FUNÇÕES GERADORAS DE MOMENTOS

ANGELA MARIA CASSAVIA JORGE CORRÊA

Orientador: Prof. Dr. IZAIAS RANGEL NOGUEIRA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Novembro, 1981

A meu marido,

A meu filho,

A meus pais,

OFEREÇO.

AGRADECIMENTOS

- Ao Dr. Izaias Rangel Nogueira, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela valiosa orientação, incentivos e sugestões durante a elaboração deste trabalho.
- Ao Dr. Humberto de Campos, Coordenador do Curso de Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pelas sugestões e incentivos.
- Ao Dr. Frederico Pimentel Gomes, Professor Catedrático do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelo incentivo e auxílio dado na elaboração do Summary.
- Ao Prof. Renato Soliani, Chefe do Departamento de Matemática da UNIMEP, pela valiosa orientação sobre Variáveis Complexas.
- Ao Prof. José Francisco C. Marques, do Departamento de Matemática da UNIMEP, pela valiosa orientação sobre Convergência de Séries.
- A meu marido, Coriolano Ferraz Corrêa, pelo apoio e incentivos.
- Ao corpo docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelos ensinamentos.
- A todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

I N D I C E

	Pág.
RESUMO	x
SUMMARY	xiii
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	10
3.1 - Considerações Preliminares	10
3.2 - Momentos	14
3.2.1 - Momentos em relação à origem	15
3.2.2 - Momentos conjuntos em relação à origem	15
3.2.3 - Momentos centrados	16
3.2.4 - Momentos conjuntos em relação à média	17
3.2.5 - Relação geral entre momentos centrados e mo- mentos em relação à origem	17
3.2.5.1 - Cálculo de alguns momentos pela re- lação geral entre momentos centra- dos e momentos em relação à origem	19
3.2.6 - Momentos absolutos	20
3.2.7 - Momentos fatoriais	21
3.3 - Funções Geradoras de Momentos (f.g.m.)	24
3.3.1 - Definição	24
3.3.2 - Algumas propriedades das f.g.m.	27
3.3.3 - Funções geradoras de momentos conjuntos	28
3.3.3.1 - Definição	28

3.3.3.2 - Algumas propriedades das f.g.m. conjuntos	29
3.3.3.3 - Funções geradoras de momentos marginais	30
3.3.3.4 - Função geradoras de momentos conjuntos e independência estocástica mútua de $(X_1, \dots, X_k)$	30
3.3.4 - Funções geradoras de momentos fatoriais	34
3.3.4.1 - Definição	34
3.4 - Cálculo da Função Geradora de Momentos e Principais Momentos, para Algumas Distribuições Especiais de Probabilidade	35
3.4.1 - Distribuições discretas	36
3.4.1.1 - Distribuição uniforme discreta ...	36
3.4.1.2 - Distribuição de Bernoulli	38
3.4.1.3 - Distribuição Binomial	39
3.4.1.4 - Distribuição de Poisson	42
3.4.1.5 - Distribuição geométrica (ou Pascal)	45
3.4.1.6 - Distribuição binomial negativa ...	47
3.4.1.7 - Distribuição multinomial	50
3.4.2 - Distribuições contínuas	53
3.4.2.1 - Distribuição retangular ou uniforme	53
3.4.2.2 - Distribuição exponencial (negativa)	55
3.4.2.3 - Distribuição gama	57

	Pág.
3.4.2.4 - Distribuição beta	59
3.4.2.5 - Distribuição normal	61
3.4.2.6 - Distribuição de qui-quadrado	70
3.4.2.7 - Distribuição multinormal	72
3.5 - Fórmula Geral para Obtenção de Momentos nas Distribuições Bernoulli, Binomial, Poisson, Geométrica, Binomial Negativa, Normal, Gama e Exponencial (Negativa)	80
3.5.1 - Fórmula recorrente (NOGUEIRA, 1965)	80
3.5.2 - Distribuição de Bernoulli	83
3.5.3 - Distribuição binomial	85
3.5.4 - Distribuição de Poisson	87
3.5.5 - Distribuição geométrica (Pascal)	89
3.5.6 - Distribuição binomial negativa	92
3.5.7 - Distribuição exponencial (negativa)	94
3.5.8 - Distribuição gama	96
3.5.9 - Distribuição normal	99
3.6 - Técnica da Função Geradora de Momentos	100
3.6.1 - Descrição da técnica	101
3.6.1.1 - Aplicações da técnica das f.g.m. à obtenção de distribuições conjuntas	102
3.6.2 - Distribuição da soma de V.A. independentes ..	107
3.6.2.1 - Aplicações da técnica da f.g.m. à distribuição da soma de V.A. independentes	108

3.6.3 - Aplicação da técnica da f.g.m. à obtenção de distribuições limite	118
3.6.3.1 - Função de distribuição limite ...	118
3.6.3.2 - Aplicação 1: Obtenção da distribuição limite da distribuição binomial quando n é grande e p é pequeno ..	120
3.6.3.3 - Aplicação 2: Obtenção da distribuição limite para $Y_n = \frac{Z_n}{\sqrt{2n}}$ quando n é grande	121
3.6.3.4 - Aplicação da f.g.m. limite ao teorema do limite central	123
3.7 - Funções Características	127
3.7.1 - Definição	127
3.7.2 - Obtenção de momentos a partir da função característica	129
3.7.2.1 - Obtenção dos momentos por desenvolvimento em série da função característica	129
3.7.2.2 - Obtenção dos momentos por derivação sucessiva de $\phi_X(t)$	131
3.7.2.3 - Cálculo de momentos através da função característica: distribuição gamma	132
3.7.3 - Algumas propriedades das funções características	135
3.7.4 - Alguns teoremas básicos das funções características	137

	Pág.
3.7.4.1 - Teorema da inversão	137
3.7.4.2 - Teorema da unicidade	146
3.7.5 - Funções características para funções de va- rias variáveis aleatórias	146
3.7.5.1 - Definição	147
3.7.5.2 - Propriedades	147
3.7.5.3 - Teoremas	148
3.7.6 - Cálculo das funções características de algu- mas distribuições especiais de probabilidade	
3.7.6.1 - Distribuições discretas	150
3.7.6.2 - Distribuições contínuas	156
3.7.7 - O caso da distribuição de Cauchy	162
3.7.7.1 - Distribuição de Cauchy	162
3.7.7.2 - Verificação de que a função gerado- ra de momentos para a distribuição de Cauchy não existe	163
3.7.7.3 - Obtenção da função característica de uma distribuição de Cauchy ...	165
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	169
4.1 - Definição de Momentos	169
4.2 - Funções Geradoras de Momentos	170
4.3 - Generalização da Fórmula Recorrente (NOGUEIRA, 1965)	171
4.4 - Técnica da Função Geradora de Momentos	174
4.5 - Momentos da Distribuição Normal	176
4.6 - Teorema da Inversão	178

	Pág.
5. CONCLUSÕES	180
6. LITERATURA CITADA	182
7. APÊNDICE	185

FUNÇÕES GERADORAS DE MOMENTOS

Autora: Angela Maria Cassavia Jorge Corrêa
Orientador: Dr. Izaias Rangel Nogueira

R E S U M O

Para se caracterizar uma distribuição de probabilidade, é de fundamental importância o conhecimento de seus principais momentos, principalmente o primeiro momento em relação à origem (média), o segundo momento em relação à média (variância), e o terceiro e o quarto momentos em relação à média, utilizados na caracterização da assimetria e da curtose, respectivamente, de uma distribuição.

Esta dissertação pretende ser um estudo abrangente sobre os momentos de uma distribuição, as funções geradoras de momentos e funções características, fórmulas recorrentes para o cálculo de momentos de ordem superior ao segundo, aplicações da técnica da função geradora de momentos e do teorema da Inversão. Faz-se, para tanto, um trabalho de revisão bibliográfica e apresenta-se, de forma didática, o que se considera de maior importância, bem como se fornecem contribuições próprias, particularmente para momentos de ordem superior ao segundo. Com essa finalidade:

- definem-se momentos usuais, momentos conjuntos, absolutos e fatoriais e apresenta-se uma importante relação geral entre momentos centrados e momentos em relação à origem;

- define-se função geradora de momentos, e apresentam-se suas principais propriedades;

- obtêm-se as funções geradoras de momentos, e calculam-se os principais momentos para algumas distribuições especiais de probabilidade;

- apresenta-se a função geradora de momentos fatorial e aplica-se a mesma às distribuições binomial e Poisson;

- estuda-se a fórmula recorrente (NOGUEIRA, 1965) para momentos de ordem superior à segunda, e generaliza-se o seu resultado para algumas distribuições discretas e contínuas;

- apresenta-se a técnica da função geradora de momentos e suas aplicações fundamentais, como obtenção de distribuições conjuntas, de soma de variáveis aleatórias independentes e distribuições limite;

- define-se função característica, obtêm-se momentos a partir de funções características, apresentam-se suas propriedades e teoremas fundamentais;

- aplica-se o teorema da inversão para obtenção de funções de densidade;

- obtêm-se a função característica de algumas distribuições especiais de probabilidade;

- apresenta-se a distribuição de Cauchy como exemplo de uma distribuição que não possui função geradora de momentos e obtém-se a sua função característica.

Por ser uma dissertação estritamente teórica, é uma contribuição didática e bibliográfica sobre o tema desenvolvido.

MOMENT GENERATING FUNCTIONS

Candidate: Angela Maria Cassavia Jorge Corrêa

Adviser: Dr. Izaias Rangel Nogueira

S U M M A R Y

This dissertation is mostly a review of literature on moments of probability distributions, moment generating functions and characteristic functions, as well as on recurrence formulas for moment calculation. There are, however, a few author's contributions, specially in connection of moments of higher orders.

Having this in view, the author shows the main topics of the theory, hoping that it will favor the teaching and studying of the subject.

1. INTRODUÇÃO

Entre as funções geradoras de momentos, destaca-se a função $m_x(t) = E[e^{tx}]$, que é denominada simplesmente função geradora de momentos e a função $\phi_x(t) = E[e^{itx}]$, denominada função característica. Alguns tratados de Estatística mais avançados apresentam essas funções geradoras, dando ênfase especial à função característica. Outros, limitam-se ao estudo da função geradora de momentos e à aplicação de sua técnica, apenas citando as funções características.

Além das funções geradoras, têm-se também fórmulas recorrentes, que permitem obter, de modo rápido e fácil, os momentos de ordem superior ao segundo.

A finalidade desta dissertação é a apresentação, em um só conjunto, de um estudo detalhado e ordenado sobre a função ge

radora de momentos e a função característica, com ênfase em alguns tópicos e aplicações, tais como: momentos, funções geradoras de momentos e funções características das distribuições de uso mais corrente em Estatística, fórmulas recorrentes, aplicações da técnica da função geradora de momentos e de alguns teoremas fundamentais, como o teorema da inversão.

Acredita-se que este trabalho é uma contribuição didática para alunos do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pela ordenação didática dos tópicos desenvolvidos e ampliados com contribuições próprias, além de bibliográfica, pois a busca em livros é muito desordenada.

Espera-se que esta dissertação venha a ser útil para aqueles estudantes que se iniciam no estudo de funções geradoras de momentos, e para tanto procura-se tornar o texto o mais claro e simples possível.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Funções geradoras de momentos e funções características foram originariamente desenvolvidas como um instrumento para a solução de problemas em Teoria de Probabilidades e em Estatística Matemática. O seu estudo, e o de suas importantes aplicações, vem sendo feito há algum tempo e por diversos autores.

Segundo TATON (1964), vários matemáticos famosos já se dedicaram ao estudo das funções geradoras de momentos. LAPLACE, em 1812, em sua obra Théorie Analytique des Probabilités, apresentou uma teoria das funções geradoras de momentos, também chamadas funções geratrizes de momentos. CAUCHY, em 1853, definiu com precisão a função característica $\int e^{itx} f(x) dx$, e a aplicou à função atualmente conhecida como função de densidade de probabilidade de Cauchy,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{1 + x^2} \right] .$$

A introdução da teoria das funções características dentro da Estatística, particularmente à Teoria de Probabilidades, deve-se a H. Poincaré e P. Lévy. Poincaré, em 1912, deu a conhecimento a definição e o nome da função característica, porém a considerando como $E[e^{tx}]$. P. Lévy em 1925, apresentou a prova do primeiro teorema do limite e, de forma até certo ponto menos geral, o teorema da inversão. Posteriormente, LÉVY e CRAMÉR (1937) demonstraram simultaneamente a forma generalizada, hoje conhecida, do teorema da inversão.

CRAMÉR (1955) estuda funções geradoras de momentos, particularmente as do tipo $E(e^{tx})$ para funções de uma variável aleatória, efetuando apenas citação rápida da definição de momentos para distribuições em duas dimensões. Ao estudar funções geradoras do tipo $E(e^{tx})$, afirma, sem demonstrar, que a existência da função geradora $E(e^{tx})$, ou de uma sequência de momentos, determina a correspondente distribuição unicamente e, também, que a função geradora de momentos de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de momentos dos termos. Apresenta as funções geradoras de momentos para as distribuições Binomial, Poisson e Normal, e a seguinte expressão para o cálculo de momentos de ordem par para esta última:

$$\begin{aligned} \text{Se } x \cap N(0,1) \quad , \quad \text{então } \mu_{2n} &= 1 \cdot 3 \dots (2n-1) \\ \text{Se } x \cap N(m, \sigma^2) \quad , \quad \text{então } \mu_{2n} &= 1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot \sigma^{2n}. \end{aligned}$$

Afirma também que as funções características têm importantes aplicações na teoria geral das distribuições, porém não

as estuda, sob a alegação da não necessidade de se introduzir variáveis complexas em grande maioria das aplicações das funções geradoras de momentos.

WILKS (1962), utilizando conceitos avançados de Matemática, como a Teoria da Integração de Lebesgue-Stieltjes, efetua um estudo geral sobre Cálculo de Probabilidades, inclusive sobre funções geradoras de momentos e funções características.

NOGUEIRA (1965) apresenta uma fórmula geral para a obtenção de momentos de ordem superior ao segundo, e verifica a sua validade para as distribuições Binomial, Poisson e Normal.

NOGUEIRA (1968) desenvolve um trabalho muito interessante sobre a aplicação de matrizes ao estudo da distribuição multinormal, desde a obtenção da função de densidade multinormal (para variáveis x_i normais de média 0 e variância σ_i^2) em forma matricial, até o cálculo dos momentos da distribuição, através da forma matricial da função geradora de momentos. Apresenta, como caso particular, a distribuição binormal.

PIEDRABUENA (1968), devido a uma anomalia relativa à distribuição de Poisson, em contagens de leveduras, chega a uma distribuição binomial que não é mais que o modelo de GREENWOOD e YULE, mas por diferente caminho e com o conceito de interferência. Efetua o desenvolvimento dos momentos sobre esse modelo, e verifica que a fórmula proposta por NOGUEIRA (1965) se aplica ao mesmo.

LUKACS (1970) desenvolve uma monografia ampla sobre funções características, baseando-se para tanto em literatura em

grande parte de origem russa e francesa, o que reveste de especial importância a obra, pois esta parte da literatura muitas vezes não é facilmente acessível, e seu uso dificultado pela barreira idiomática. Apresenta o estudo de funções características por seu interesse intrínseco matemático, e não se dedica às suas aplicações, desenvolvendo definições, propriedades, teoremas fundamentais e os mais recentes resultados sobre o assunto.

HOOGE e CRAIG (1970) apresentam um estudo das funções geradoras de momentos do tipo $E(e^{tx})$ para funções de uma variável aleatória (e definem funções geradoras de momentos para distribuições conjuntas), através do cálculo (ou indicação) das funções geradoras de momentos de algumas distribuições especiais de probabilidade. Através de teoremas, aplicam a função geradora de momentos para obtenção de distribuições da soma de variáveis aleatórias independentes. Exemplificam como obter distribuições conjuntas através do conhecimento de funções geradoras de momentos. Definem distribuições limite, tecem considerações sobre funções geradoras de momentos limite e aplicações. Apresentam um caso especial do teorema do limite central e o demonstram com auxílio de funções geradoras de momentos limite.

TORANZOS (1971) define função geradora de momentos (chama-a função característica), e função característica (chama-a função característica complexa), além de citar a função característica logarítmica. Calcula as funções geradoras de momentos das dis-

tribuições binomial e normal padrão, e apresenta, para esta última, a seguinte fórmula para obtenção de momentos de ordem par:

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{n! 2^n} .$$

Efetua, também, o cálculo das funções características para as distribuições Binomial e Normal Padrão, e cita alguns teoremas sobre aplicações das funções geradoras de momentos na obtenção de distribuições. Realiza um estudo rápido, em forma algébrica e matricial, que o conduz à função geradora de momentos de uma distribuição normal multivariada.

ROUSSAS (1973) desenvolve um estudo sobre funções características para funções de uma variável aleatória, generalizando-o para distribuições conjuntas e, no decorrer desse trabalho, define rapidamente funções geradoras de momentos do tipo $E(e^{tx})$, e fatoriais. Em um capítulo especial sobre momentos de algumas distribuições, demonstra que, em uma distribuição normal padronizada, os momentos de ordem par são dados por:

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)} .$$

Aplica as funções características para obtenção de algumas distribuições de somas de variáveis aleatórias independentes, e obtém, através de desenvolvimento matricial, a expressão da função característica de uma distribuição multinormal. Calcula funções características, geradoras de momentos e fatoriais de algumas distribuições discretas e contínuas, e apresenta, sem demonstração, os teoremas da Inversão e da Unicidade.

MOOD *et alii* (1974) destacam, em sua obra, a função geradora de momentos do tipo $E(e^{tx})$, e sua importante aplicação para obtenção de funções de variáveis aleatórias: a técnica da função geradora de momentos. Definem momentos, momentos fatoriais, funções geradoras de momentos e de momentos fatoriais. Ao estudarem algumas distribuições especiais de probabilidade, apresentam suas respectivas funções geradoras de momentos. Dedicam atenção ao teorema do limite central, em restrição particular, e o demonstram com utilização da técnica da função geradora de momentos e de distribuições limite.

CRAMÉR (1974) apresenta um estudo profundo de Estatística Matemática, reunindo em sua obra duas linhas do desenvolvi-mento clássico do Cálculo de Probabilidades, a Francesa e a Russa, utilizando teoria matemática pura, particularmente a Teoria da Medida, de Lebesgue. Estuda com profundidade a função característica e suas aplicações. Salienta-se que a primeira edição dessa obra data de 1946.

KENDALL e STUART (1977), definindo momentos, apresentam importante relação geral entre momentos centrados e em relação à origem. Também definem momentos absolutos e fatoriais, funções geradoras de momentos, funções características e funções geradoras de momentos fatoriais. Não dão ênfase em seu trabalho às funções geraradoras de momentos, mas, sim, às funções características. Apresentam o teorema da inversão, sua dedução e algumas aplicações, e, ao estudarem algumas distribuições especiais de probabilidade, calculam as

respectivas funções características. Ao analisarem as distribuições Binomial e Poisson, fazem referência à fórmula recorrente para cálculo de momentos de ordem superior ao segundo (a partir de funções características), e, ao estudarem a distribuição normal, apresentam a seguinte fórmula para cálculo de momentos de ordem par:

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \sigma^{2n}, \quad n \geq 1.$$

Utilizam o método das funções características para obtenção de distribuições de somas, e particularmente de $\bar{x}$. Apresentam estudo matricial da distribuição normal multivariada, e sua respectiva função característica.

SPIEGEL (1978) apresenta, resumidamente, e em forma de definições, momentos, funções geradoras de momentos e funções características. Para algumas distribuições especiais de probabilidade, faz referência às suas funções geradoras de momentos e/ou às suas funções características.

HOEL (1980) realiza um estudo sucinto sobre momentos, funções geradoras de momentos, e algumas aplicações relativas à obtenção de distribuições.

CRUZ (1980) apresenta o cálculo dos momentos ordinários (e centrais), de uma distribuição de frequências com intervalos de classe de amplitude constante, através da utilização dos momentos fatoriais.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 - Considerações Preliminares

Como este trabalho tem por objetivo uma revisão bibliográfica e ordenação didática a respeito de funções geradoras de momentos, é conveniente introduzir alguns conceitos elementares da Teoria Estatística que são frequentemente utilizados.

- Esperança Matemática

O conceito de esperança matemática é de grande importância em Probabilidade e Estatística. É também denominado valor esperado ou média.

Define-se esperança matemática de uma variável aleatória discreta X , com função de probabilidade $f_X(x)$, como

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) ,$$

que existe se, e somente se, essa série for convergente.

Define-se a esperança matemática de uma V.A. contínua X , com função densidade de probabilidade $f_X(x)$, como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

que existe se, e somente se, essa integral é convergente.

Se X é uma V.A., e $Y = g(X)$ também o é, tem-se que

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x) \quad , \quad \text{se } X \text{ é V.A. discreta, e}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad , \quad \text{se } X \text{ é V.A. contínua,}$$

que existem se, e somente se, a série e a integral convergirem.

Alguns tratados de Estatística Matemática apresentam o conceito de esperança matemática com um maior rigor matemático, utilizando a integral de Stieltjes nessa definição. Conceituam esperança matemática de uma V.A. X e de uma V.A. $Y = g(X)$, como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF \quad \text{e} \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X) dF$$

que existem se, e somente se, essas integrais forem convergentes.

A vantagem da utilização da integral de Stieltjes, na definição de esperança matemática, bem como em outros conceitos, é que ela evita a necessidade de se exporem todas as definições e teoremas duplamente. Assim, se $F(x)$ é uma função de distribuição com função de densidade de probabilidade contínua, a integral de Stieltjes torna-se uma integral comum,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad , \quad \text{ou} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad ,$$

incluindo, pois, esta última, um caso particular; e, se $F(x)$ é uma função de distribuição de V.A. discreta, a integral de Stieltjes corresponde ao somatório

$$\sum_x x f_X(x) \quad , \quad \text{ou} \quad , \quad \sum_x g(x) f_X(x) \quad ,$$

também como um caso particular.

- Alguns Teoremas Sobre Esperança Matemática

$$E(K X) = K E(X) \quad , \quad K \text{ constante}$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y), \quad X \text{ e } Y \text{ V.A.}$$

$$E(X.Y) = E(X) \cdot E(Y), \quad X \text{ e } Y \text{ V.A. independentes}$$

- A Variância e o Desvio Padrão

Define-se variância de uma distribuição de V.A. X como

$$\text{Var}(X) = \sigma^2(X) = E[(X-m)^2] \quad ,$$

e desvio padrão como

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{E[(X-m)^2]} \quad .$$

Se X é uma V.A. discreta com função de probabilidade $f_X(x)$, a variância de X é dada por:

$$\sigma^2(X) = \text{Var}(X) = E[(X-m)^2] = \sum_j (x_j - m)^2 f_X(x_j) \quad .$$

E, se X é uma V.A. contínua, com função densidade de probabilidade $f_X(x)$,

$$\sigma^2(X) = \text{Var}(X) = E[(X-m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_X(x) dx \quad .$$

- Alguns Teoremas sobre a Variância

$$\sigma^2(X) = E[(X-m)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\text{Var}(KX) = K^2 \text{Var}(X) \quad , \quad K \text{ constante}$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \quad , \quad X \text{ e } Y \text{ V.A. independentes}$$

- Funções de Várias Variáveis Aleatórias

Define-se esperança matemática da função

$$g_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) \quad \text{ou} \quad g_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \quad ,$$

da variável aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_K)$, ou do vetor aleatório

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_K)'$, respectivamente, como sendo

$$E[g_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K)] = \sum_{x_1, \dots, x_K} g_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K)$$

se a variável aleatória $(X_1, \dots, X_K)$ é discreta, e

$$E[g_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) dx_1 \dots dx_K$$

se a variável aleatória $(X_1, \dots, X_K)$ é contínua.

A existência das esperanças, seja para o caso de uma ou várias variáveis aleatórias, depende da existência dos somatórios (caso discreto), ou das integrais (caso contínuo).

$$\text{Se } g_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) = X_i \quad ,$$

$$E[g_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K)] = E[X_i] = m_{X_i}$$

Essa igualdade tanto pode ser provada para o caso discreto como para o caso contínuo. Apresenta-se neste trabalho a prova para o caso contínuo.

$$\begin{aligned} E [g_{X_1, \dots, X_K} (x_1, \dots, x_K)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f_{X_1, \dots, X_K} (x_1, \dots, x_K) dx_1, \dots, dx_K \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f_{X_i} (x_i) dx_i \\ &= E [X_i] = m_{X_i} \end{aligned}$$

onde $f_{X_i} (x_i)$ é a densidade marginal de X_i , obtida da densidade conjunta, ou seja:

$$f_{X_i} (x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, \dots, X_K} (x_1, \dots, x_K) dx_1, \dots, dx_{i-1}, dx_{i+1}, \dots, dx_K$$

De modo análogo, pode-se verificar que, se

$$g_{X_1, \dots, X_K} (x_1, \dots, x_K) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2$$

$$E [g_{X_1, \dots, X_K} (x_1, \dots, x_K)] = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \text{Var}(X_i)$$

3.2 - Momentos

Antes de definir-se função geradora de momentos é necessário tecer algumas considerações sobre momentos.

3.2.1 - Momentos em relação à origem

Define-se o momento de ordem r de uma V.A. em relação à origem, e nota-se por μ'_r a

$$\mu'_r = E(X^r) , \quad r=0,1,2,\dots$$

se essa esperança existe, ou seja,

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_j x_j^r f(x_j) ,$$

se x é V.A. discreta, e,

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx$$

se x é V.A. contínua.

Se $r=1$, tem-se o primeiro momento em relação à origem, que é a média de X ,

$$\mu'_1 = E(X) = m_X$$

Se μ'_r existe, também existe μ'_s para $s < r$, e se μ'_r não existe, nem μ'_s para $s > r$.

3.2.2 - Momentos conjuntos em relação à origem

Define-se momentos conjuntos em relação à origem a

$$E \left[\begin{matrix} x_1^{r_1} & x_2^{r_2} & \dots & x_K^{r_K} \end{matrix} \right] , \quad \text{com } r_i \geq 0$$

$i=1,2,\dots,K$

3.2.3 - Momentos centrados

O momento de ordem $\underline{r}$ de uma V.A., centrado em relação a $\underline{a}$, é

$$\mu_r(a) = E \left[(X - a)^r \right], \quad r=0,1,2,3,\dots$$

Se $a = m_X$, tem-se o momento de ordem $\underline{r}$ centrado em relação à média da distribuição, denotado por μ_r ,

$$\mu_r = E \left[(X - m_X)^r \right],$$

ou seja,

$$\mu_r = E \left[(X - m_X)^r \right] = \sum_j (x_j - m_X)^r f_X(x_j)$$

se x é V.A. discreta, e

$$\mu_r = E \left[(X - m_X)^r \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^r f_X(x) dx$$

se x é V.A. contínua.

$$\text{Define-se } \mu'_0 = \mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dP = 1, \text{ com } dP = f_X(x) dx.$$

Observa-se que:

$$\mu_1 = 0, \quad \text{pois } \mu_1 = E(X - m_X) = E(X) - m_X = m_X - m_X = 0$$

$$\mu_2 = \sigma^2(X), \quad \text{pois } \mu_2 = E \left[(X - m_X)^2 \right] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

e, também, que todos os momentos de ordem ímpar de X em relação a m_X , se existem, são nulos se a função de densidade de probabilidade (ou

função de probabilidade) de X é simétrica em relação à média da distribuição.

3.2.4 - Momentos conjuntos em relação à média

Define-se momento conjunto em relação à média por

$$E \left[(X_1 - m_{X_1})^{r_1} \dots (X_K - m_{X_K})^{r_K} \right], \quad r_i \geq 0 \\ i=1,2,\dots,K$$

Em particular, se $r_i = r_j = 1$, e os demais valores de r são nulos, o momento conjunto em relação à média torna-se a covariância entre X_i e X_j , ou seja,

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E \left[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j}) \right]$$

3.2.5 - Relação geral entre momentos centrados e momentos em relação à origem

É possível determinar momentos centrados (em relação à média), a partir dos momentos em relação à origem, utilizando a seguinte expressão:

$$\mu_r' = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu_{r-j} \mu_1'^j = (\mu + \mu_1')^{\underline{(r)}}$$

onde, no desenvolvimento da expressão $(\mu + \mu_1')^{\underline{(r)}}$ para a primeira parcela o r funciona como índice, e para a segunda parcela funciona como expoente.

Demonstração:

Suponha-se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ duas variáveis, tais que $b - a = c$, e denote-se por $\mu'(a)$ e $\mu'(b)$ os momentos em relação a $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente. Pelo teorema binomial, tem-se a seguinte igualdade:

$$(x-a)^r = (x-b+b-a)^r = (x-b+c)^r = [(x-b)+c]^r$$

$$(x-a)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (x-b)^{r-j} c^j$$

$$\text{Sendo } \mu_r'(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^r dP, \text{ com } dP = f_X(x) dx,$$

$$\mu_r'(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (x-b)^{r-j} c^j dP$$

$$\mu_r'(a) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} c^j \int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^{r-j} dP$$

e

$$\mu_{(r-j)}'(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^{r-j} dP$$

tem-se

$$\mu_r'(a) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} c^j \mu_{(r-j)}'(b),$$

ou, simbolicamente escrevendo,

$$\mu_r'(a) = [\mu'(b) + c]^{(r)},$$

onde, convencionalmente, na expressão, $\{\mu'(b)\}^j$ representa $\mu_j'(b)$.

Se $a = \mu_1'$ e b é uma origem arbitrária,

$$\mu_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} c^j \mu_{(r-j)}'(b) = [\mu'(b) + c]^{(r)}$$

Se $b = \mu'_1$ e $\underline{a}$ é uma origem arbitrária,

$$\mu'_r(a) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} c^j \mu_{(r-j)} = [\mu + c]^r$$

Se $b = 0$ e $a = \mu'_1$

$$\mu_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu'_{(r-j)} (-\mu'_1)^j = [\mu' - \mu'_1]^r$$

Se $a = 0$ e $b = \mu'_1$

$$\mu'_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu_{(r-j)} \mu'_1{}^j = [\mu + \mu'_1]^r$$

3.2.5.1 - Cálculo de alguns momentos pela relação geral entre momentos centrados e momentos em relação à origem

Como $\mu'_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu_{r-j} \mu'_1{}^j = (\mu + \mu'_1)^r$, se $r=2$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mu'_2 &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \mu_{2-j} \mu'_1{}^j \\ &= \binom{2}{0} \mu_2 \mu'_1{}^0 + \binom{2}{1} \mu_1 \mu'_1{}^1 + \binom{2}{2} \mu_0 \mu'_1{}^2 \end{aligned}$$

como $\mu_1 = 0$ e $\mu_0 = E(X - m_X)^0 = 1$,

$$\mu'_2 = \mu_2 + 2 \cdot 0 \cdot \mu'_1 + 1 \cdot 1 \cdot \mu'_1{}^2$$

$$\mu'_2 = \mu_2 + \mu'_1{}^2 \quad \text{e} \quad \mu_2 = \mu'_2 - \mu'_1{}^2.$$

se $r=3$, tem-se:

$$\mu'_3 = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} \mu_{3-j} \mu'_1{}^j$$

$$\mu'_3 = \binom{3}{0} \mu_3 \mu_1'^0 + \binom{3}{1} \mu_2 \mu_1'^1 + \binom{3}{2} \mu_1 \mu_1'^2 + \binom{3}{3} \mu_0 \mu_1'^3$$

$$\mu'_3 = \mu_3 + 3 \mu_2 \mu_1' + \mu_1'^3 \quad \text{e} \quad \mu_3 = \mu'_3 - 3 \mu_1' \mu_2' + 2 \mu_1'^3$$

se $r=4$, tem-se:

$$\mu'_4 = \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} \mu_{4-j} \mu_1'^j$$

$$\mu'_4 = \mu_4 + 4 \mu_3 \mu_1' + 6 \mu_2 \mu_1'^2 + \mu_1'^4$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4 \mu_1' \mu_3' + 6 \mu_1'^2 \mu_2' - 3 \mu_1'^4$$

3.2.6 - Momentos absolutos

Define-se momento absoluto de ordem $\underline{r}$ em relação a $\underline{a}$ e nota-se por v_r' a

$$v_r' = E \left[|X-a|^r \right], \quad r=0,1,2,\dots$$

ou seja,

$$v_r' = \sum_{j=1}^n |x_j - a|^r f_X(x_j)$$

se x é V.A. discreta, e

$$v_r' = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a|^r dP, \quad ,$$

se x é V.A. contínua.

Se $a = m_X$, tem-se o momento absoluto de ordem $\underline{r}$ em relação à média, e nota-se por v_r

$$v_r = E \left[|X - m_X|^r \right] = \begin{cases} \sum_{j=1}^n |x_j - m_X|^r f_X(x_j) & , \text{ se } x \text{ é V.A. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x - m_X|^r dP & , \text{ se } x \text{ é V.A. contínua} \end{cases}$$

Se existe o momento de ordem $\underline{r}$, o momento absoluto existe para qualquer ordem inferior a $\underline{r}$. Se $\underline{r}$ é par, o momento absoluto é igual ao momento comum, e se o domínio da distribuição é positivo, os momentos absolutos, simétricos em relação à qualquer ponto, são iguais aos correspondentes momentos comuns.

3.2.7 - Momentos fatoriais

Define-se momento fatorial de ordem r ($r > 0$), em relação a uma origem arbitrária, e indica-se por $\mu'_{[r]}$, a

$$\mu'_{[r]} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_j - a)^{[r]} f_X(x_j) \quad , \quad \text{se } x \text{ é V.A. discreta}$$

$$\mu'_{[r]} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^{[r]} f_X(x) dx \quad , \quad \text{se } x \text{ é V.A. contínua}$$

onde $(x_j - a)^{[r]} = (x - a)(x - a - 1)(x - a - 2) \dots (x - a - r + 1)$; e, se $a = 0$, tem-se o momento fatorial de ordem r em relação à origem.

$$\mu'_{[r]} = E [X(X-1) \dots (X-r+1)] = \begin{cases} \sum_x x(x-1) \dots (x-r+1) f_X(x) & , \\ & \text{se } x \text{ é V.A. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(x-1) \dots (x-r+1) f_X(x) dx & , \\ & \text{se } x \text{ é V.A. contínua} \end{cases}$$

Os momentos fatoriais são usados quase que unicamente para distribuições discretas e, por isso, a maior parte da literatura os definem apenas com a notação de somatório.

Esses momentos não apresentam grande importância em teoria estatística, porém, são citados no presente trabalho, porque fornecem fórmulas bastante concisas para momentos de certas distribuições discretas do tipo binomial.

O momento fatorial de ordem r , em relação à média, é notado por $\mu_{[r]}$ e definido por

$$\mu_{[r]} = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty} (x_j - m_X)^{[r]} f_X(x_j), & \text{se } x \text{ é V.A. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^{[r]} f_X(x) dx, & \text{se } x \text{ é V.A. contínua} \end{cases}$$

Segundo KENDALL e STUART (1976, p. 66), os momentos fatoriais obedecem leis de transformação similares às dos momentos comuns, de forma que

$$\mu_{[r]}^1 = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu_{[r-j]} \mu_{[1]}^j = (\mu + \mu_{[1]}^1)^{[r]}$$

é a relação de correspondência entre os momentos fatoriais em relação à origem à média.

Ainda segundo KENDALL e STUART (1976) tem-se a seguinte relação, por expansão direta da definição de momento fato-

rial, entre momentos fatoriais e momentos comuns

$$\mu_{[1]}^{\cdot} = \mu_1^{\cdot}$$

$$\mu_{[2]}^{\cdot} = \mu_2^{\cdot} - \mu_1^{\cdot}$$

$$\mu_{[3]}^{\cdot} = \mu_3^{\cdot} - 3 \mu_2^{\cdot} + 2 \mu_1^{\cdot}$$

$$\mu_{[4]}^{\cdot} = \mu_4^{\cdot} - 6 \mu_3^{\cdot} + 11 \mu_2^{\cdot} - 6 \mu_1^{\cdot}$$

e, por inversão,

$$\mu_2^{\cdot} = \mu_{[2]}^{\cdot} + \mu_{[1]}^{\cdot}$$

$$\mu_3^{\cdot} = \mu_{[3]}^{\cdot} + 3 \mu_{[2]}^{\cdot} + \mu_{[1]}^{\cdot}$$

$$\mu_4^{\cdot} = \mu_{[4]}^{\cdot} + 6 \mu_{[3]}^{\cdot} + 7 \mu_{[2]}^{\cdot} + \mu_{[1]}^{\cdot}$$

KENDALL e STUART (1976) citam, também, que FRISCH (1926) demonstrou a fórmula geral para os momentos fatoriais que se segue:

$$\mu_r^{\cdot}(a) = \sum_{j=0}^r \left\{ \binom{r}{j} B_{r-j}^{(-j)} (c) h^{r-j} \mu_{[j]}^{\cdot}(b) \right\}$$

e

$$\mu_{[r]}^{\cdot}(a) = \sum_{j=0}^r \left\{ \binom{r}{j} B_{r-j}^{(r+1)} (c+h) h^{r-j} \mu_j^{\cdot}(b) \right\}$$

onde $B_r^{(n)}(x)$ é o polinômio de Bernoulli de ordem n e grau r em x .

3.3 - Funções Geradoras de Momentos

Calcular momentos pelas definições dadas torna-se um trabalho exaustivo, a partir do instante em que se precisa pesquisar momentos de ordens mais elevadas. Em função disso, procura-se um método que permita obter momentos de modo mais imediato, sem necessariamente aplicarem-se as definições. Para tanto, define-se e constrói-se a função geradora de momentos, designada por $m_X(t)$, ou simplesmente $m(t)$, se não há dúvida quanto à variável.

3.3.1 - Definição

Define-se como função geradora de momentos de uma variável aleatória X a função

$$m_X(t) = E \left[e^{tX} \right] = \sum_x e^{tx} f_X(x) \quad , \quad \text{se } x \text{ é V.A. discreta, e}$$

$$m_X(t) = E \left[e^{tX} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) \quad , \quad \text{se } x \text{ é V.A. contínua,}$$

que existe (se a série, ou a integral forem convergentes), para todo t no intervalo $-h < t < h$, $h > 0$.

A função geradora de momentos, $m_X(t) = E \left[e^{tX} \right]$ é também chamada "transformada de Laplace" de $f_X(x)$.

Para $t = 0$, $m_X(0)$ sempre existe e é igual a 1. Entretanto, ela pode não existir para $t \neq 0$.

Se a f.g.m. existe, então tem derivadas contínuas dentro de alguma vizinhança da origem, de forma que, se derivada r

vezes em relação a t (considerando-se o caso contínuo como ilustração) tem-se:

$$m_X^r(t) = \frac{d^r}{dt^r} m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{tx} f_X(x) dx$$

e, tomando-se $t \rightarrow 0$, obtém-se

$$\mu'_{(r)} = E(X^r) = m_X^r(0) = \left. \frac{d^r}{dt^r} m_X(t) \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx$$

o que evidencia que os momentos de uma distribuição podem ser obtidos a partir da f.g.m., por derivação, daí o seu nome.

Para verificar como $m_X(t)$ define momentos, pode-se, alternativamente, efetuar a sua expansão em série

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = E\left[1 + \frac{Xt}{1!} + \frac{X^2 t^2}{2!} + \frac{X^3 t^3}{3!} + \frac{X^4 t^4}{4!} + \dots\right]$$

$$m_X(t) = E(1) + E[Xt] + E\left[\frac{X^2 t^2}{2!}\right] + E\left[\frac{X^3 t^3}{3!}\right] + \dots$$

$$m_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!} E(X^2) + \frac{t^3}{3!} E(X^3) + \dots$$

ou seja,

$$(1) \quad m_X(t) = \mu'_0 + t\mu'_1 + \frac{t^2}{2!} \mu'_2 + \frac{t^3}{3!} \mu'_3 + \dots$$

$$m_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mu'_j t^j, \quad ,$$

onde fica claro que $m_X(t)$ representa uma soma de momentos em relação à origem, e evidencia que μ'_r pode ser obtido através de $m_X(t)$, pois é o coeficiente de $\frac{t^r}{r!}$ na expansão.

Por outro lado, desenvolvendo-se $m_X(t)$ pela série de MacLaurin, tem-se

$$(2) \quad m_X(t) = m_X(0) + \frac{t}{1!} m'_X(0) + \frac{t^2}{2!} m''_X(0) + \frac{t^3}{3!} m'''_X(0) + \dots$$

e, comparando-se (1) e (2), verifica-se que

$m_X(0) = 1$	;	$\mu'_0 = 1$	$\text{onde } m'_X(0) = \left. \frac{d}{dt} [m_X(t)] \right _{t=0}$
$m'_X(0) = \mu'_1$			$m''_X(0) = \left. \frac{d^2}{dt^2} [m_X(t)] \right _{t=0}$
$m''_X(0) = \mu'_2$			$m'''_X(0) = \left. \frac{d^3}{dt^3} [m_X(t)] \right _{t=0}$
$m'''_X(0) = \mu'_3$			$\dots$
$\dots$			$\dots$

o que demonstra, mais uma vez, que μ'_r é o coeficiente de $\frac{t^r}{r!}$ na expansão de $m_X(t)$.

Com isso, demonstra-se que as derivadas sucessivas de $m_X(t)$, no ponto zero, fornecem os momentos de ordem desejada.

3.3.2 - Algumas propriedades das funções geradoras de momentos

$$3.3.2.1) \quad m_X(0) = 1 \quad ,$$

pois, $m_X(0) = E[e^{0}] = E[1] = 1.$

$$3.3.2.2) \quad m_{X+d}(t) = e^{td} m_X(t)$$

onde d é uma constante, pois:

$$\begin{aligned} m_{X+d}(t) &= E[e^{t(X+d)}] = E[e^{tX+td}] = E[e^{tX} e^{td}] \\ &= E[e^{td}] E[e^{tX}] = e^{td} E[e^{tX}] \end{aligned}$$

$$3.3.2.3) \quad m_{cX}(t) = m_X(ct) \quad ,$$

onde c é uma constante, pois

$$m_{cX}(t) = E[e^{tcX}] = E[e^{(tc)X}]$$

$$3.3.2.4) \quad m_{cX+d}(t) = e^{td} m_X(ct) \quad ,$$

pois:

$$\begin{aligned} m_{cX+d}(t) &= E[e^{(cX+d)t}] = E[e^{(ct)X} e^{dt}] \\ &= e^{td} E[e^{(ct)X}] \end{aligned}$$

$$3.3.2.5) m_{cg(X)}(t) = m_{g(X)}(ct) \quad ,$$

onde c é uma constante e $g(X)$ é função de uma V.A. x , pois,

$$m_{cg(X)}(t) = E \left[e^{cg(X)t} \right] = E \left[e^{(ct)g(X)} \right] = m_{g(X)}(ct)$$

$$3.3.2.6) m_{g(X)+c}(t) = e^{ct} m_{g(X)}(t)$$

pois,

$$\begin{aligned} m_{g(X)+c}(t) &= E \left\{ e^{[g(X)+c]t} \right\} = E \left[e^{g(X)t} e^{ct} \right] \\ &= e^{ct} m_{g(X)}(t) \quad . \end{aligned}$$

É necessário observar-se que essas propriedades estão sujeitas à existência das esperanças.

3.3.3 - Funções geradoras de momentos conjuntos

3.3.3.1 - Definição

Define-se função geradora de momentos de uma variável aleatória conjunta $(X_1, \dots, X_K)$ ou do vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1 \dots \dots X_K)'$ a

$$m_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_K) = m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = E \left[e^{\sum_{j=1}^K t_j X_j} \right]$$

se a esperança existe para todos os valores de $t_1, t_2, \dots, t_K$ tal que $-h < t_j < h$, $h > 0$, $j=1,2,\dots,K$.

Obtêm-se o momento de ordem $\underline{r}$ de X_j , a partir da f.g.m. conjuntos, por derivação parcial, como a seguir:

$$E(X_j^r) = \frac{\partial^r}{\partial t_j^r} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_K=0}$$

$$E(X_i^r X_j^s) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial t_i^r \partial t_j^s} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_K=0}$$

e, genericamente:

$$E \left[\begin{matrix} n_1 & n_K \\ X_1, \dots, X_K \end{matrix} \right] = \frac{\partial^{n_1+\dots+n_K}}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_K^{n_K}} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_K=0}$$

3.3.3.2 - Algumas propriedades das f.g.m. conjuntos

- $m_{X_1, \dots, X_K}(0, \dots, 0) = 1$
- $m_{X_1+d_1, \dots, X_K+d_K}(t_1, \dots, t_K) = e^{t_1 d_1 + \dots + t_K d_K} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K)$
- $m_{c_1 X_1, \dots, c_K X_K}(t_1, \dots, t_K) = m_{X_1, \dots, X_K}(c_1 t_1, \dots, c_K t_K)$
- $m_{c_1 X_1+d_1, \dots, c_K X_K+d_K}(t_1, \dots, t_K) = e^{t_1 d_1 + \dots + t_K d_K} \times$
 $\times m_{X_1, \dots, X_K}(c_1 t_1, \dots, c_K t_K)$

3.3.3.3 - Funções geradoras de momentos marginais

Define-se função geradora de momentos marginal e nota-se por $m_{X_j}(t_j)$ a

$$m_{X_j}(t_j) = m_{X_1, \dots, X_K}(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0) \\ j=1, 2, \dots, k$$

A função geradora de momentos marginal de X_i e X_j , por exemplo, é definida por

$$m_{X_i, X_j}(t_i, t_j) = m_{X_1, \dots, X_K}(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0)$$

3.3.3.4 - Função geradora de momentos conjuntos e independência estocástica mútua de $(X_1, \dots, X_K)$

- Independência Estocástica:

Sejam as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_K$, tendo a função de densidade de probabilidade conjunta $f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K)$, e as funções de densidade de probabilidade marginal $f_{X_1}(x_1), \dots, f_{X_K}(x_K)$.

As variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_K$ são estocasticamente independentes, se e somente se,

$$f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_K}(x_K) .$$

Pode-se demonstrar que uma condição necessária e suficiente para a independência estocástica mútua de $(X_1, \dots, X_K)$ é que

$$m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = \prod_{j=1}^k m(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0)$$

ou seja, que a f.g.m. para a distribuição conjunta de $(X_1, X_2, \dots, X_K)$ seja única, e unicamente determine a distribuição conjunta das K variáveis (e consequentemente todas as distribuições marginais)

Demonstração:

Se $(X_1, X_2, \dots, X_K)$ são estocasticamente independentes,

$$\begin{aligned} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) &= E \left[e^{j \sum_{j=1}^K t_j X_j} \right] \\ &= E \left[e^{t_1 X_1} e^{t_2 X_2} \dots e^{t_K X_K} \right] \\ &= E \left[e^{t_1 X_1} \right] E \left[e^{t_2 X_2} \right] \dots E \left[e^{t_K X_K} \right] \\ &= m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, 0, \dots, 0) \times \\ &\quad \times m_{X_2, \dots, X_K}(0, t_2, 0, \dots, 0) \dots \\ &\quad \dots m_{X_1, \dots, X_K}(0, 0, \dots, 0, t_K) \end{aligned}$$

ou seja, a independência estocástica de $(X_1, \dots, X_K)$ implica que a f.g.m. da distribuição conjunta esteja para o produto dos fatores das f.g.m. de suas distribuições marginais.

Supondo-se, a seguir, que a f.g.m. para a distribuição conjunta de $(X_1, \dots, X_K)$ é dada por

$$\prod_{j=1}^k m_{X_1, \dots, X_K} (0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0)$$

com X_j contínua tal que

$$m_{X_j}(t_j) = m_{X_1, \dots, X_K} (0, \dots, 0, t_j, \dots, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_j X_j} f_{X_j}(x_j) dx_j$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k m_{X_1, \dots, X_K} (0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 X_1} f_{X_1}(x_1) dx_1 \right] \dots \\ &\dots \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_j X_j} f_{X_j}(x_j) dx_j \right] \dots \\ &\dots \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_K X_K} f_{X_K}(x_K) dx_K \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 X_1 + \dots + t_K X_K} f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_K}(x_K) dx_1 \dots dx_K \end{aligned}$$

Como

$$m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = \prod_{j=1}^k m_{X_1, \dots, X_K}(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0)$$

tem-se que

$$m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \sum_{j=1}^k t_j X_j} \prod_{j=1}^k f_{X_j}(x_j) dx_1, \dots, dx_K$$

Mas $m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K)$ é a f.g.m. de $(X_1, \dots, X_K)$,
então também o é

$$m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \sum_{j=1}^k t_j X_j} f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) dx_1, \dots, dx_K$$

pois a unicidade da função geradora de momentos implica que as k distribuições de probabilidade, $\sum_{j=1}^k f_{X_j}(x_j)$, e $f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K)$ sejam iguais, isto é, se

$$m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = \prod_{j=1}^k m_{X_1, \dots, X_K}(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0)$$

então $(X_1, \dots, X_K)$ são estocasticamente independentes.

Embora se apresente demonstração para variáveis contínuas, com variáveis discretas a prova é semelhante, usando-se somatórios.

3.3.4 - Funções geradoras de momentos fatoriais

3.3.4.1 - Definição

Define-se função geradora de momentos fatoriais, e indica-se por $\eta_X(t)$ a

$$\eta_X(t) = E[t^X] \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad ,$$

se essa esperança existe.

Esta função é também conhecida como a MELLIN ou MELLIN-STIELTJES transformada de $f(x)$.

É utilizada para gerar momentos fatoriais de modo análogo aos momentos comuns obtidos através de $E(e^{tx})$, exceto que t deve ser substituído por 1, e não por zero. Ou seja, como

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r} \eta_X(t) &= \frac{d^r}{dt^r} E[t^X] \\ &= E\left[\frac{d^r}{dt^r} t^X\right] = E[X(X-1) \dots (X-r+1) t^{X-r}] \end{aligned}$$

tem-se que

$$u'_r = \frac{d^r}{dt^r} \eta_X(t) \Big|_{t=1} = E[X(X-1) \dots (X-r+1)]$$

Apresenta-se essa f.g.m. fatorial nesse trabalho, pois a mesma pode, algumas vezes, simplificar a obtenção de momentos para algumas distribuições discretas.

Observa-se também que $\eta_X(t) = m_X(\ln t)$, para $t > 0$.

Nota (1)

Sendo

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

e

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X),$$

tem-se que

$$\sigma^2(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2,$$

o que corresponde a uma expressão da variância de X em termos da derivada da f.g.m. fatorial de 2.^a ordem.

3.4 - Cálculo da Função Geradora de Momentos, e Principais Momentos, para Algumas Distribuições Especiais de Probabilidade

Como se propõe este trabalho, passa-se agora à dedução de funções geradoras de momentos das distribuições de probabilidade mais usuais, que são separadas em discretas e contínuas. Não são calculados os momentos de ordem elevada, pois a seguir apresenta-se um método mais rápido e eficaz para esses cálculos, que se constitui na utilização da fórmula recorrente de momentos (NOGUEIRA, 1965). Apenas a título de ilustração, são obtidas também algumas funções geradoras de momentos fatoriais.

3.4.1 - Distribuições discretas

3.4.1.1 - Distribuição uniforme discreta

3.4.1.1.1 - Definição

Define-se uma V.A. discreta X , tendo distribuição uniforme, se a sua densidade é dada por

$$f_X(x) = f_X(x;N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{para } x=1,2,\dots,N \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

3.4.1.1.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = \sum_{j=1}^N e^{jt} \frac{1}{N} ,$$

pois,

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = E\left[e^{tX} \frac{1}{N}\right] = \sum_{j=1}^N e^{jt} \frac{1}{N}$$

$$m_X(t) = \sum_{j=1}^N e^{jt} \frac{1}{N}$$

3.4.1.1.3 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m.

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{N+1}{2}$$

pois,

$$m_X'(t) = \sum_{j=1}^N e^{jt} j \frac{1}{N}$$

$$m_X'(0) = \sum_{j=1}^N j \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N j = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2}$$

$$m_X'(0) = \frac{N+1}{2} = \mu_1'$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6N}$$

pois,

$$m_X''(t) = \sum_{j=1}^N e^{jt} j^2 \frac{1}{N}$$

$$m_X''(0) = \sum_{j=1}^N j^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N j^2 = \frac{1}{N} \frac{(N+1)(2N+1)}{6} N$$

$$m_X''(0) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} = \mu_2'$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \frac{N^2-1}{12}$$

pois:

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\mu_2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}$$

3.4.1.2 - Distribuição de Bernoulli

3.4.1.2.1 - Definição

Define-se uma V.A. discreta X , tendo distribuição de Bernoulli, se a sua densidade é dada por

$$f_X(x) = f_X(x;p) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{para } x=0 \text{ ou } x=1 \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

com $0 \leq p \leq 1$ e $q = 1-p$.

3.4.1.2.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = q + pe^t,$$

pois,

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[e^{tX}] = \sum [e^{tx} p^x (1-p)^{1-x}] \\ &= \sum [e^{tx} p^x q^{1-x}] = q + e^t p \end{aligned}$$

$$m_X(t) = q + e^t p$$

3.4.1.2.3 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m.

$$\mu'_1 = E(X) = p$$

pois,

$$m'_X(t) = pe^t$$

$$m'_X(0) = p$$

$$\mu_2' = E(X^2) = p$$

pois, $m_X''(t) = pe^t$

$$m_X''(0) = p$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = pq$$

pois, $\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$

$$\mu_2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

3.4.1.3 - Distribuição binomial

3.4.1.3.1 - Definição

Define-se uma V.A. discreta X , tendo distribuição binomial de probabilidade, se a sua densidade é dada por:

$$f_X(x) = f_X(x; N, p) = \begin{cases} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} & \text{para } x=0,1,2,\dots,N \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

com $0 \leq p \leq 1$ e $q = 1-p$.

3.4.1.3.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = (q + pe^t)^N$$

pois,

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum [e^{tx} \binom{N}{x} p^x q^{N-x}]$$

$$m_X(t) = \sum_{x=0}^N e^{tx} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} = \sum_{x=0}^N \binom{N}{x} (pe^t)^x q^{N-x}$$

$$m_X(t) = \binom{N}{0} (pe^t)^0 q^N + \binom{N}{1} (pe^t)^1 q^{N-1} + \dots + \binom{N}{N} (pe^t)^N q^0$$

$$m_X(t) = (q + pe^t)^N$$

3.4.1.3.3 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m.

$$\mu_1' = E(X) = Np$$

pois,

$$m_X'(t) = N(q + pe^t)^{N-1} pe^t$$

$$m_X'(0) = N(q + p)^{N-1} p, \quad \text{como } p+q = 1$$

$$m_X'(0) = Np$$

$$\mu_2' = E(X^2) = Np + N^2 p^2 - Np^2$$

pois,

$$m_X''(t) = Np e^t (q + pe^t)^{N-1} + N(N-1) (pe^t)^2 (q + pe^t)^{N-2}$$

$$m_X''(0) = Np (q + p)^{N-1} + N(N-1) (p^2) (q + p)^{N-2}$$

$$m_X''(0) = Np + (N^2 - N) p^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = Npq$$

pois,

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\mu_2 = Np + N^2 p^2 - Np^2 - N^2 p^2$$

$$\mu_2 = Np(1-p) = Npq$$

Por derivação sucessiva, obtem-se, de forma análoga,

$$\mu'_3 = Np + 3N^2p^2 - 3Np^2 + N^3p^3 - 3N^2p^3 + 2Np^3$$

$$\mu_3 = Npq (q-p)$$

$$\begin{aligned} \mu'_4 = Np + 7N^2p^2 + 6N^3p^3 + N^4p^4 - 6N^3p^4 - 18N^2p^3 + 11N^2p^4 - \\ - 7Np^2 - 6Np^4 + 12Np^3 \end{aligned}$$

$$\mu_4 = 3N^2p^2q^2 + Npq (1 - 6pq)$$

3.4.1.3.4 - Função geradora de momentos fatorial

$$\eta_X(t) = (q + pt)^N$$

pois,

$$\eta_X(t) = E[t^X] = \sum \left[t^x \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \right]$$

$$\eta_X(t) = \sum_{x=0}^N t^x \binom{N}{x} p^x q^{N-x} = \sum_{x=0}^N \binom{N}{x} (tp)^x q^{N-x}$$

$$\eta_X(t) = (q + pt)^N$$

3.4.1.3.5 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m. fatorial

$$\mu'_1 = E(X) = Np ,$$

pois,

$$\mu'_{[1]} = \frac{d}{dt} \eta_X(t) \Big|_{t=1}$$

$$\mu'_{[1]} = N(q + pt)^{N-1} p \Big|_{t=1}$$

$$\mu_{[1]}' = N(q + p)^{N-1} p = Np \quad , \quad \text{e como } \mu_{[1]}' = \mu_1' = Np \quad ,$$

$$\mu_1' = Np$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = Npq$$

pois,

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} n_X(t) \right|_{t=1} = N(N-1) (q + pt)^{N-2} p^2 \left|_{t=1} = N(N-1) p^2$$

$$\text{e como } \text{Var}(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 \quad ,$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = N^2 p^2 - Np^2 + Np - N^2 p^2$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = Np(1-p) = Npq$$

3.4.1.4 - Distribuição de Poisson

3.4.1.4.1 - Definição

Define-se uma V.A. discreta X , tendo distribuição de Poisson, se a sua densidade é dada por:

$$f_X(x) = f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{para } x=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

com o parâmetro $\lambda > 0$.

3.4.1.4.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

pois,

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum \left[e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \right]$$

$$m_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} \lambda^x}{x!}$$

$$m_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

$$m_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

pois, $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{\lambda e^t}$

3.4.1.4.3 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m.

$$\mu'_1 = E(X) = \lambda$$

pois,

$$m'_X(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$m'_X(0) = e^0 \lambda e^0 = \lambda$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

pois,

$$m''_X(t) = \lambda e^{\lambda e^t - \lambda + t} (\lambda e^t + 1)$$

$$m''_X(0) = \lambda e^{\lambda - \lambda} (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \lambda$$

pois,

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \mu'_2 - \mu_1^2 \\ \mu_2 &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\end{aligned}$$

Por derivação sucessiva obtêm-se, de modo análogo,

$$\begin{aligned}\mu'_3 &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \\ \mu_3 &= \lambda \\ \mu'_4 &= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda \\ \mu_4 &= \lambda + 3\lambda^2\end{aligned}$$

3.4.1.4.4 - Função geradora de momentos fatorial

$$\eta_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

pois,

$$\begin{aligned}\eta_X(t) &= E[t^X] = \sum \left[t^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \right] \\ \eta_X(t) &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} \\ \eta_X(t) &= e^{\lambda(t-1)}\end{aligned}$$

3.4.1.4.5 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m. fatorial

$$\mu'_1 = \mu'_1[1] = E(X) = \lambda$$

pois,

$$\mu_{[1]} = \left. \frac{d}{dt} \eta_X(t) \right|_{t=1}$$

$$\mu_{[1]} = \left. \frac{d}{dt} e^{\lambda(t-1)} \right|_{t=1} = e^{\lambda(t-1)} \lambda \Big|_{t=1} = e^0 \lambda = \lambda$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \lambda$$

pois,

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \eta_X(t) \right|_{t=1} = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)} \Big|_{t=1} = \lambda^2$$

e

$$\text{Var}(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

$$\text{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

3.4.1.5 - Distribuição geométrica (ou Pascal)

3.4.1.5.1 - Definição

Define-se uma V.A. discreta X , tendo distribuição geométrica, se a sua densidade é dada por

$$f_X(x) = f_X(x;p) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{para } x=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

com $0 < p \leq 1$ e $q = 1-p$.

3.4.1.5.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

pois,

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum [e^{tx} p(1-p)^x]$$

$$m_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} p(1-p)^x = p \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} (1-p)^x$$

$$m_X(t) = p \sum (qe^t)^x$$

$$m_X(t) = p[1 + qe^t + (qe^t)^2 + (qe^t)^3 + \dots]$$

como $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $|x| < 1$, pelo desenvolvimento da série de Taylor, tem-se que

$$m_X(t) = p \cdot \frac{1}{1 - qe^t} \quad ; \quad |qe^t| < 1$$

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

3.4.1.5.3 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m.

$$\mu_1' = E(X) = \frac{q}{p}$$

pois,

$$m'_X(t) = pqe^t (1 - qe^t)^{-2}$$

$$m'_X(0) = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = \frac{q}{p} + 2 \frac{q^2}{p^2}$$

pois,

$$m''_X(t) = pqe^t (1 - qe^t)^{-2} + 2p(qe^t)^2 (1 - qe^t)^{-3}$$

$$m''_X(0) = \frac{pq}{p^2} + \frac{2pq^2}{p^3} = \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2}$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

pois,

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$$

$$\mu_2 = \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2}$$

$$\mu_2 = \frac{qp + q^2}{p^2} = \frac{q(p + q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

3.4.1.6 - Distribuição binomial negativa

3.4.1.6.1-Definição

Defin-se uma V.A. discreta X , tendo distribuição binomial negativa, se a sua densidade é dada por

$$f_X(x) = f_X(x; r, p) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} p^r q^x = \binom{-r}{x} p^r (-q)^x, & \text{para } x=0,1,2,\dots \\ 0 & , \text{ para outros valores} \end{cases}$$

com $r=1,2,3,\dots$; $0 < p \leq 1$; $q = 1-p$.

Notas:

- (2) Se na distribuição binomial negativa tomar-se $r=1$, obtém-se a função de densidade da distribuição geométrica

$$f_X(x;1,p) = p(1-p)^x \quad , \quad \text{para } x=0,1,2,3,\dots$$

- (3) Essa distribuição recebe o nome de binomial negativa pelo fato de $f_X(x)$ ser o termo geral da expansão de

$$p^r [1 - (1-p)]^{-r}$$

3.4.1.6.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^r$$

pois,

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[e^{tX}] = \sum \left[e^{tx} \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \right] \\ &= \sum \left[e^{tx} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \right] \\ &= \sum_0^{\infty} e^{tx} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \\ &= \sum_0^{\infty} \binom{-r}{x} p^r (-qe^t)^x \\ &= p^r \sum_0^{\infty} \binom{-r}{x} (-qe^t)^x \end{aligned}$$

$$m_X(t) = p^r (1 - qe^t)^{-r}$$

$$m_X(t) = \left[\frac{p}{1 - qe^t} \right]^r, \quad |qe^t| < 1 \text{ ou } t < -\ln q$$

3.4.1.6.3 - Cálculo dos principais momentos por f.g.m.

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{rq}{p}$$

pois,

$$m'_X(t) = p^r r q e^t (1 - qe^t)^{-r-1}$$

$$m'_X(0) = p^r r q (1 - q)^{-r-1} = p^{-1} r q = \frac{rq}{p}$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = \frac{r^2 q^2}{p^2} + \frac{rq^2}{p^2} + \frac{rq}{p}$$

pois,

$$m''_X(t) = rqp^r \left[re^t qe^t (1 - qe^t)^{-r-2} + e^t qe^t (1 - qe^t)^{-r-2} + e^t (1 - qe^t)^{-r-1} \right]$$

$$m''_X(0) = rqp^r [rq (1 - q)^{-r-2} + q(1 - q)^{-r-2} + (1 - q)^{-r-1}]$$

$$m''_X(0) = r^2 q^2 p^{-2} + rq^2 p^{-2} + rqp^{-1}$$

$$m''_X(0) = \frac{r^2 q^2}{p^2} + \frac{rq^2}{p^2} + \frac{rq}{p}$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$$

pois,

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \mu_2' - \mu_1'^2 \\ \mu_2 &= \frac{r^2 q^2}{p^2} + \frac{rq^2}{p^2} + \frac{rq}{p} - \frac{r^2 q^2}{p^2} \\ \mu_2 &= \frac{rq}{p} \left(\frac{q+p}{p} \right) = \frac{rq}{p^2}\end{aligned}$$

3.4.1.7 - Distribuição multinomial

3.4.1.7.1 - Definição

Suponha-se que os eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \dots, A_K$ podem ocorrer com probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_K$, tal que $\sum_{j=1}^K p_j = 1$. Se $X_1, X_2, \dots, X_K$ são as V.A. que dão, respectivamente, os números de vezes que os eventos A_j ocorrem em n provas independentes, de modo que $x_1 + x_2 + \dots + x_K = n$, a probabilidade de que ocorram x_1 eventos A_1 , x_2 eventos A_2 , $\dots$, x_K eventos A_K em n provas, tem distribuição multinomial de probabilidade com função de probabilidade conjunta dada por

$$f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, x_2, \dots, x_K) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_K!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_K^{x_K}$$

Essa distribuição é uma generalização da distribuição binomial, e recebe o nome de distribuição multinomial por corresponder ao termo geral do desenvolvimento multinomial de

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_K)^n.$$

3.4.1.7.2 - Função geradora de momentos

$$m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = (p_1 e^{t_1} + \dots + p_K e^{t_K})^n$$

pois,

$$\begin{aligned} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) &= E \left[e^{\sum_{j=1}^K t_j X_j} \right] \\ &= \sum \left[e^{t_1 x_1 + \dots + t_K x_K} \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_K!} p_1^{x_1} \dots p_K^{x_K} \right] \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_K} \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_K!} (e^{t_1} p_1)^{x_1} \dots (e^{t_K} p_K)^{x_K} \end{aligned}$$

$$m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \dots + p_K e^{t_K})^n$$

3.4.1.7.3 - Cálculo dos principais momentos por f.g.m.

$$\mu'_1 = E(X_j) = np_j$$

pois,

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \frac{\partial}{\partial t_i} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_K=0} \\ &= n \left(\sum p_j e^{t_j} \right)^{n-1} p_i e^{t_i} \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_K=0} \\ &= n \cdot 1 \cdot p_i \\ &= np_i \end{aligned}$$

de forma que: $E(X_1) = np_1$

$$E(X_2) = np_2$$

... ..

$$E(X_K) = np_K$$

$$\mu'_2 = E(X_1^2) = n^2 p_1^2 - np_1^2 + np_1$$

pois,

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_K=0} \\ &= n \left[(n-1) (\sum p_j e^{t_j})^{n-2} p_1^2 e^{2t_1} + (\sum p_j e^{t_j})^{n-1} p_1 e^{t_1} \right] \Big|_{t_1=\dots=t_K=0} \\ &= n(n-1) p_1^2 + np_1 \\ &= n^2 p_1^2 - np_1^2 + np_1 \end{aligned}$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X_1) = np_1(1 - p_1)$$

pois,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu'_2 - \mu_1^2 \\ \mu_2 &= n^2 p_1^2 - np_1^2 + np_1 - n^2 p_1^2 \\ \mu_2 &= np_1(1 - p_1) = np_1 q_1 \end{aligned}$$

de forma que: $\text{Var}(X_1) = np_1(1 - p_1)$

$$\text{Var}(X_2) = np_2(1 - p_2)$$

... ..

$$\text{Var}(X_K) = np_K(1 - p_K)$$

$$E(X_1, X_2, \dots, X_K) = n(n-1) \dots (n-i+1) p_1 p_2 \dots p_K$$

pois,

$$\begin{aligned} E(X_1, X_2, \dots, X_K) &= \frac{\partial^i}{\partial t_1 \dots \partial t_K} m_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \Big|_{t_1 = \dots = t_K = 0} \\ &= n(n-1) \dots (n-i+1) p_1 \dots p_K (\sum p_j e^{t_j})^{n-i} \Big|_{t_1 = \dots = t_K = 0} \\ &= n(n-1) \dots (n-i+1) p_1 p_2 \dots p_K . \end{aligned}$$

3.4.2 - Distribuições contínuas

3.4.2.1 - Distribuição retangular (ou uniforme)

3.4.2.1.1 - Definição

Define-se uma variável aleatória contínua X , tendo distribuição retangular (ou uniforme), se a sua densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = f_X(x; a, b) = \frac{1}{b - a} , \quad I_{[a, b]}(x)$$

com $-\infty < a < b < +\infty$.

3.4.2.1.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

pois,

$$\begin{aligned}
 m_X(t) &= E[e^{tx}] \\
 &= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx \\
 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{t} e^{tx} \right]_a^b \\
 &= \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a) t}
 \end{aligned}$$

3.4.2.1.3 - Cálculo dos principais momentos por f.g.m.

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

pois,

$$\begin{aligned}
 m'_X(t) &= \frac{e^{tb} [tb-1] - e^{at} [ta-1]}{(b-a) t^2} \\
 &= \frac{\left[1 + bt + \frac{(bt)^2}{2!} + \frac{(bt)^3}{3!} + \dots \right] (bt-1) - \left[1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \dots \right] (at-1)}{(b-a) t^2} \\
 &= \frac{\left(\frac{b^2-a^2}{2} \right) + t \left(\frac{2b^3-2a^3}{6} \right) + t^2(\dots) + t^3(\dots) + \dots}{(b-a)} \\
 m'_X(0) &= \frac{\frac{b^2-a^2}{2}}{b-a} = \frac{a+b}{2}
 \end{aligned}$$

Observe-se que o cálculo dos momentos, pela f.g.m., para a distribuição retangular, é um processo exaustivo, porém, os principais momentos podem ser obtidos de imediato pela aplicação da própria definição, ou seja,

$$\mu_1' = E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Nota (4) - A distribuição uniforme pode também ser definida no intervalo aberto (a,b) ou misto [a,b) ou (a,b].

3.4.2.2 - Distribuição exponencial (negativa)

3.4.2.2.1 - Definição

Define-se uma V.A. contínua X, tendo distribuição exponencial (negativa) se a sua densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad I_{[0,\infty)}(x)$$

com $\lambda > 0$.

3.4.2.2.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad ,$$

pois,

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{x(t-\lambda)} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{du}{-t+\lambda} \end{aligned}$$

substituindo-se: $u = -x(t-\lambda)$, $\frac{du}{-t+\lambda} = dx$,

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \int_0^{\infty} e^{-u} du$$

e, sendo $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-u} du = 1$, tem-se que

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad , \quad t < \lambda \quad .$$

3.4.2.2.3 - Cálculo dos principais momentos por f.g.m.

$$\mu_1' = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

pois,

$$m_X'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

$$m_X'(0) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

pois,

$$m_X''(t) = \frac{2\lambda(\lambda-t)}{(\lambda-t)^4}$$

$$m_0''(t) = \frac{2\lambda^2}{\lambda^4} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

pois,

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\mu_2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.4.2.3 - Distribuição gama

3.4.2.3.1 - Definição

Define-se uma V.A. contínua X , tendo distribuição gama, se a sua densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = f_X(x; r, \lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad , \quad I_{[0, \infty)}(x)$$

com $r > 0$ e $\lambda > 0$.

3.4.2.3.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r \quad ,$$

pois,

$$\begin{aligned}
 m_X(t) &= E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\
 &= \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{tx} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\
 &= \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda-t)} x^{r-1} \lambda^{r-1} dx \\
 &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda-t)} x^{r-1} (\lambda-t)^{r-1} \frac{(\lambda-t)}{(\lambda-t)^r} dx \\
 &= \frac{\lambda^r}{(\lambda-t)^r} \frac{1}{\Gamma(r)} (\lambda-t) \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda-t)} [x(\lambda-t)]^{r-1} dx
 \end{aligned}$$

substituindo-se: $u = x(\lambda-t)$; $\frac{du}{\lambda-t} = dx$,

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{1}{r} r \int_0^{\infty} e^{-u} u^{r-1} du$$

e como $r \int_0^{\infty} e^{-u} u^{r-1} du = \Gamma(r+1) = r \Gamma(r)$

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r \frac{r \Gamma(r)}{r \Gamma(r)}$$

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r$$

3.4.2.3.3 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m.

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{r}{\lambda}$$

pois,

$$m_X'(t) = r \lambda^r (\lambda - t)^{-r-1}$$

$$m_X'(0) = r \lambda^r \lambda^{-r-1} = r \lambda^{-1} = \frac{r}{\lambda}$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

pois,

$$m_X''(t) = r(r+1) \lambda^r (\lambda - t)^{-r-2}$$

$$m_X''(0) = r(r+1) \lambda^r \lambda^{-r-2} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

pois,

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\mu_2 = \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} = \frac{r^2+r-r^2}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2}$$

3.4.2.4 - Distribuição beta

3.4.2.4.1 - Definição

Define-se uma V.A. contínua x , tendo distribuição beta, se a sua densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = f_X(x;p,q) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad I_{(0,1)}(x)$$

com $p > 0$ e $q > 0$.

A função geradora de momentos para essa distribuição não é usada, pois a mesma não tem uma forma simples (ver quadro 2, de acordo com LUKACS, 1970), e o cálculo dos principais momentos pode ser feito de imediato pela utilização de suas definições, e mais precisamente a partir da seguinte igualdade:

$$E(X^K) = \frac{\Gamma(k+p) \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(k+p+q)}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} E(X^K) &= \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^{k+p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{1}{\beta(p,q)} \beta(k+p, q) = \frac{\Gamma(k+p) \Gamma(q)}{\Gamma(k+p+q)} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(q)} \\ &= \frac{\Gamma(k+p) \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(k+p+q)} \end{aligned}$$

Obtem-se facilmente, então, que:

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{p}{p+q}$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \frac{pq}{(p+q)^2 (p+q+1)}$$

3.4.2.5 - Distribuição normal

3.4.2.5.1 - Definição

Define-se uma V.A. contínua x , tendo distribuição normal, se a sua densidade de probabilidade $\tilde{e}$ dada por

$$f_X(x) = f_X(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-m)^2/(2\sigma^2)]}, \text{ para } -\infty < x < \infty$$

com $-\infty < m < \infty$ e $\sigma > 0$, sendo m = média, σ^2 = variância e σ = desvio padrão.

3.4.2.5.2 - Função geradora de momentos

$$m_X(t) = e^{tm + [(\sigma^2 t^2)/2]}$$

pois,

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-m)^2/(2\sigma^2)]} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-[(x-m)^2/(2\sigma^2)]} dx \end{aligned}$$

substituindo-se:

$$\frac{x-m}{\sigma} = u \quad \text{e, se } x \rightarrow -\infty \rightarrow u \Rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow u \Rightarrow +\infty$$

$$x = \sigma u + m$$

$$dx = \sigma du$$

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(1/2)u^2] + t(\sigma u + m)} du \\
&= \frac{e^{tm}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(1/2)u^2] + t\sigma u} du \\
&= \frac{e^{tm}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)[u^2 - 2t\sigma u]} du \\
&= \frac{e^{tm}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)[(u - \sigma t)^2 - \sigma^2 t^2]} du \\
&= \frac{e^{tm}}{\sqrt{2\pi}} e^{(\sigma^2 t^2)/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)[(u - \sigma t)^2]} du
\end{aligned}$$

substituindo-se, novamente,

$$u - \sigma t = v$$

$$u = v + \sigma t$$

$$du = dv \quad ,$$

tem-se que:

$$m_X(t) = e^{tm + (\sigma^2 t^2)/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(v^2/2)} dv$$

e, sendo $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(v^2/2)} dv = 1$ (distribuição normal reduzida), obtem-se finalmente a f.g.m.

$$m_X(t) = e^{tm + (\sigma^2 t^2)/2}$$

Dessa forma, a função geradora de momentos para a distribuição normal é dada por:

$$m_X(t) = e^{tm + (\sigma^2 t^2)/2}, \quad \text{para } x \in N(m, \sigma^2)$$

$$m_X(t) = e^{(\sigma^2 t^2)/2}, \quad \text{para } x \in N(0, \sigma^2)$$

$$m_X(t) = e^{t^2/2}, \quad \text{para } x \in N(0, 1)$$

3.4.2.5.3 - Cálculo dos principais momentos pela f.g.m.

$$\mu_1' = E(X) = m$$

pois,

$$m_X'(t) = (m + \sigma^2 t) e^{tm + (\sigma^2 t^2)/2}$$

$$m_X'(0) = m e^0 = m$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \sigma^2 + m^2$$

pois,

$$m_X''(t) = e^{tm + (\sigma^2 t^2)/2} [\sigma^2 + (m + \sigma^2 t)^2]$$

$$m_X''(0) = e^0 [\sigma^2 + m^2] = \sigma^2 + m^2$$

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = \sigma^2$$

pois,

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2$$

$$\mu_3' = E(X^3) = 3m\sigma^2 + m^3$$

pois,

$$m_X'''(t) = (m + t\sigma^2) e^{tm + (t^2\sigma^2)/2} [3\sigma^2 + (m+t\sigma^2)^2]$$

$$m_X'''(0) = m e^0 [3\sigma^2 + m^2] = 3m\sigma^2 + m^3$$

$$\mu_3 = 0$$

puis,

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2\mu_1' - \mu_1'^3$$

$$\mu_3 = 3m\sigma^2 + m^3 - 3\sigma^2m - m^3 = 0$$

$$\mu_4' = E(X^4) = 3\sigma^4 + 6m^2\sigma^2 + m^4$$

puis,

$$m_X''''(t) = e^{tm + (\sigma^2 t^2)/2} \left\{ 3\sigma^4 + \sigma^2(m+t\sigma^2)^2 + (m+t\sigma^2)^2 [3\sigma^2 + (m+t\sigma^2)^2] + 2\sigma^2(m+t\sigma^2)^2 \right\}$$

$$m_X''''(0) = e^0 \{ 3\sigma^4 + \sigma^2 m^2 + m^2 [3\sigma^2 + m^2] + 2\sigma^2 m^2 \}$$

$$= 3\sigma^4 + 6m^2\sigma^2 + m^4$$

$$\mu_4 = 3\sigma^4$$

puis,

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3\mu_1' - 6\mu_2\mu_1'^2 - \mu_1'^4$$

3.4.2.5.4 - Fórmula recorrente para cálculo de momentos de ordem par

A distribuição normal apresenta uma interessante fórmula recorrente para cálculo de momentos de ordem par, que muito facilita o cálculo.

1) Se $x \sim N(0,1)$, então

$$\mu_{2n+1} = 0 \quad \text{e} \quad \mu_{2n} = (2n-1) \mu_{2n-2} = \frac{(2n)!}{2^n (n)!}$$

para $n=1,2,3,4,\dots$

Demonstra-se inicialmente que

$$\mu_{2n+1} = E[X^{2n+1}] = 0$$

De fato,

$$\begin{aligned} E[X^{2n+1}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 x^{2n+1} e^{-x^2/2} dx + \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/2} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 y^{2n+1} e^{-y^2/2} dy + \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/2} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/2} dx + \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/2} dx \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que corresponde a afirmar que

$$\mu_{2n+1} = E[X^{2n+1}] = 0$$

e, em particular, que

$$E[X] = 0 \quad .$$

A seguir, demonstra-se que

$$\mu_{2n} = E[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n (n)!} = (2n-1) \mu_{2n-2}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mu_{2n} = E[X^{2n}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_0^{\infty} x^{2n-1} de^{-x^2/2} \right] \end{aligned}$$

e, integrando por partes,

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[- x^{2n-1} e^{-x^2/2} \Big|_0^{\infty} + (2n-1) \int_0^{\infty} x^{2n-2} e^{-x^2/2} dx \right] \\ &= (2n-1) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{2n-2} e^{-x^2/2} dx \\ &= (2n-1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n-2} e^{-x^2/2} dx \\ &= (2n-1) \mu_{(2n-2)} \end{aligned}$$

tem-se então que

$$\mu_{2n} = (2n-1) \mu_{(2n-2)}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\mu_{2n} &= (2n-1) \mu_{2n-2} \\ \mu_{2n-2} &= (2n-3) \mu_{2n-4} \\ &\dots \dots \dots \\ \mu_2 &= 1 \mu_0 \\ \mu_0 &= 1\end{aligned}$$

e, multiplicando-se sucessivamente cada qual pelo seu valor correspondente, tem-se

$$\begin{aligned}\mu_{2n} &= (2n-1)(2n-3) \dots (1) \\ &= \frac{1 \cdot 2 \dots (2n-3)(2n-2)(2n-1)(2n)}{2 \dots (2n-2)(2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{2 \cdot 1 \dots [2(n-1)] (2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n [1 \dots (n-1) n]} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n)!}\end{aligned}$$

o que corresponde a afirmar que

$$\mu_{2n} = E[X^{2n}] = (2n-1) \mu_{(2n-2)} = \frac{(2n)!}{2^n (n)!} \quad ,$$

e, em particular, que, se

$$n=1 \quad , \quad \sigma^2(X) = E(X^2) = \frac{2!}{2! \cdot 1!} = 1$$

$$n=2 \quad , \quad \mu_4 = \frac{4!}{4 \cdot 2!} = 3$$

$$n=3 \quad , \quad \mu_6 = \frac{6!}{8 \cdot 3!} = 15$$

$$n=4 \quad , \quad \mu_8 = \frac{8!}{16 \cdot 4!} = 105$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

2) Se $x \cap N(m, \sigma^2)$, então

$$\mu_{2n+1} = 0 \quad \text{e} \quad \mu_{2n} = (2n-1) \sigma^2 \mu_{(2n-2)} = \frac{(2n)!}{2^n (n)!} \sigma^{2n}$$

Essas igualdades podem ser verificadas por demonstrações análogas ao caso de $x \cap N(0,1)$, ou pela aplicação da fórmula recorrente (NOGUEIRA, 1965), como apresenta-se a seguir.

Na fórmula recorrente (NOGUEIRA, 1965),

$$\mu_{N+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} \mu_N + N \sigma^2 \mu_{N-1}$$

substituindo-se $N+1 = 2n$, para $n=1,2,3,\dots$

$$N = 2n-1 \quad ,$$

tem-se

$$\mu_{2n} = \sigma^2 \frac{d}{dm} \mu_{2n-1} + (2n-1) \sigma^2 \mu_{2n-2}$$

e, admitindo-se pela simetria da distribuição que

$$\mu_{2n-1} = 0$$

obtem-se

$$\mu_{2n} = (2n-1) \sigma^2 \mu_{2n-2}$$

de forma que, se

$n=1$	,	$\mu_2 = \sigma^2$
$n=2$	,	$\mu_4 = 3\sigma^4$
$n=3$	,	$\mu_6 = 15\sigma^6$
$n=4$	,	$\mu_8 = 105\sigma^8$
$\dots$		$\dots \quad \dots$

ou

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n (n)!} \sigma^{2n}$$

de acordo com o item 1 desta secção.

Observe-se que a fórmula recorrente

$$\mu_{2n} = (2n-1) \mu_{2n-2} = \frac{(2n)!}{2^n (n)!}$$

para $x \cap N(0,1)$, pode ser obtida de forma mais imediata também a partir dessa forma recorrente (NOGUEIRA, 1965), bastando para tanto a substituição de σ^2 por 1(um).

3.4.2.6 - Distribuição de qui-quadrado (χ^2)

3.4.2.6.1 - Definição

Define-se uma V.A. contínua v_f , tendo distribuição de qui-quadrado, com f graus de liberdade, se a sua densidade de probabilidade é dada por

$$f_{v_f}(v_f) = \frac{1}{2^{f/2} \Gamma(f/2)} e^{-v_f/2} v_f^{(f-2)/2}$$

com $0 \leq v_f \leq \infty$, onde,

$$v_f = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_f^2 \quad ; \quad u_i \cap N(0,1) \\ i=1,2,\dots,f$$

3.4.2.6.2 - Função geradora de momentos

$$m_{v_f}(t) = (1-2t)^{-f/2}$$

pois,

$$m_{v_f}(t) = E[e^{tv_f}] = E[e^{t(u_1^2+u_2^2+\dots+u_f^2)}] = E[e^{tu_1^2} e^{tu_2^2} \dots e^{tu_f^2}]$$

e, sendo as variáveis supostas independentes,

$$m_{v_f}(t) = E[e^{tv_f}] = E[e^{tu_1^2}] E[e^{tu_2^2}] \dots E[e^{tu_f^2}]$$

Como $u_i \cap N(0,1)$

$$E[e^{tu_i^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u_i^2/2} e^{tu_i^2} du_i \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(u_i^2/2)(1-2t)} du_i$$

e substituindo

$$w^2 = \frac{u^2}{2} (1-2t)$$

$$w = u \sqrt{\frac{1-2t}{2}}$$

$$dw = \sqrt{\frac{1-2t}{2}} du$$

$$\sqrt{\frac{2}{1-2t}} dw = du \quad ,$$

tem-se

$$\begin{aligned} E \left[e^{tu_i^2} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_0^\infty e^{-w^2} \sqrt{\frac{2}{1-2t}} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-2t}} 2 \int_0^\infty e^{-w^2} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \Gamma(1/2) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$E \left[e^{tu_i^2} \right] = (1-2t)^{-1/2}$$

e, como $m_{v_f}(t)$ é um produto de f fatores, obtem-se finalmente que

$$m_{v_f}(t) = (1-2t)^{-f/2}$$

3.4.2.6.3 - Cálculo dos principais momentos por f.g.m.

$$\mu_1' = E(v_f) = f$$

pois,

$$m_{v_f}'(t) = f(1-2t)^{-(f+2)/2}$$

$$m_{v_f}'(0) = f$$

$$\mu_2' = E(v_f^2) = f^2 + 2f$$

pois,

$$m_{v_f}''(t) = f(f+2)(1-2t)^{-[(f+4)/2]}$$

$$m_{v_f}''(0) = f^2 + 2f$$

$$\mu_2 = \text{Var}(v_f) = 2f$$

pois,

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\mu_2 = f^2 + 2f - f^2 = 2f$$

3.4.2.7 - Distribuição multinormal

Uma densidade multivariada das mais importantes é a densidade normal multivariada (ou multinormal), a qual é uma generalização da distribuição normal para k variáveis.

Para maior facilidade de aplicação, a distribuição multinormal é apresentada nesse trabalho na forma matricial, bem co

mo sua função geradora de momentos, de acordo com NOGUEIRA (1968).

3.4.2.7.1 - Definição

Dadas as variáveis aleatórias X_i , $i=1,2,\dots,n$, tal que $x_i \cap N(0, \sigma_i^2)$, define-se a função densidade de probabilidade multnormal a

$$g_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|S|}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-(1/2)X'S^{-1}X}$$

onde:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$S = \sigma^{-1} \quad ; \quad |S| = |\sigma^{-1}| = \frac{1}{|\sigma|}$$

$$-\infty < x_i < \infty$$

$$-1 < \rho_{ij} < 1 \quad , \quad \rho_{ij} \rightarrow \text{coeficientes de correlação}$$

$$\sigma_i > 0$$

3.4.2.7.1.1 - Função densidade de probabilidade binormal

Define-se duas V.A. contínuas, $x_1 \cap N(0, \sigma_1^2)$ e $x_2 \cap N(0, \sigma_2^2)$ tendo distribuição binormal de probabilidades, se a sua densidade de

probabilidade é dada por

$$g_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{|S|}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-(1/2)X'\sigma^{-1}X},$$

na forma matricial, com

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad X' = [x_1 \quad x_2]$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$|\sigma| = \sigma_1^2\sigma_2^2 (1-\rho^2)$$

$$\sigma^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

tal que

$$g_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{-1/2 [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1/(1-\rho^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & -\rho/\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho/\sigma_1\sigma_2 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

$$g_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{-[1/2(1-\rho^2)] [(x_1^2/\sigma_1^2) - (2\rho x_1 x_2 / \sigma_1\sigma_2) + (x_2^2/\sigma_2^2)]}$$

é a densidade de probabilidade na forma algébrica.

3.4.2.7.2 - Função geradora de momentos para a distribuição multi- normal

Para obter-se uma expressão geral que permita calcular de modo fácil os momentos das diversas ordens, obtêm-se a f.g.m. para a distribuição multinormal, a partir de sua definição.

$$m_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = e^{(1/2)(T' \sigma T)}$$

pois,

$$\begin{aligned} m_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) &= E \left[e^{X_1 t_1 + X_2 t_2 + \dots + X_n t_n} \right] \\ &= E \left[e^{X' T} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{X' T} g_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dX \\ (3) \quad &= \frac{\sqrt{|S|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{X' T - (1/2)(X' \sigma^{-1} X)} dX \end{aligned}$$

onde:

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{bmatrix} \quad dX = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_n \end{bmatrix} \quad X' = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

$$g_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|S|}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-(1/2)(X' \sigma^{-1} X)}$$

Para resolver a integral correspondente à função geradora de momentos, procede-se da seguinte maneira.

Seja

$$\Omega(X) = - \frac{1}{2} X' \sigma^{-1} X + X' T$$

e

$$\begin{aligned} d\Omega(X) &= - \frac{1}{2} (dX)' \sigma^{-1} X - \frac{1}{2} X' \sigma^{-1} (dX) + (dX)' T \\ &= - (dX)' [\sigma^{-1} X - T] \end{aligned}$$

Tomando-se $d\Omega(X) \equiv 0$, tem-se

$$\sigma^{-1} X - T \equiv 0$$

$$\sigma^{-1} X \equiv T$$

$$\sigma \sigma^{-1} X \equiv \sigma T$$

$$X_0 \equiv \sigma T$$

e, substituindo-se

$$X = X_0 + Y$$

$$X = \sigma T + Y$$

$$dX = dY,$$

obtém-se

$$\Omega(X) = \Omega(X_0 + Y) = \Omega(\sigma T + Y)$$

$$= \Omega(X_0) - \frac{1}{2} Y' \sigma^{-1} Y$$

e, como $\sigma = \sigma'$,

$$\begin{aligned}
\Omega(X) &= -\frac{1}{2} (T'\sigma + Y') \sigma^{-1} (\sigma T + Y) + (T'\sigma + Y') T \\
&= -\frac{1}{2} [T'\sigma\sigma^{-1}\sigma T + T'\sigma\sigma^{-1}Y + Y'\sigma^{-1}\sigma T + Y'\sigma^{-1}Y] + T'\sigma T + Y'T \\
&= \frac{1}{2} T'\sigma T - \frac{1}{2} Y'\sigma^{-1}Y
\end{aligned}$$

e, substituindo-se esse resultado em (3), tem-se que

$$\begin{aligned}
m_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) &= \frac{\sqrt{|S|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)Y'\sigma^{-1}Y + (1/2)T'\sigma T} dY \\
&= e^{(1/2)T'\sigma T} \frac{\sqrt{|S|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)Y'\sigma^{-1}Y} dY
\end{aligned}$$

e, como

$$\frac{\sqrt{|S|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)Y'\sigma^{-1}Y} dY = 1$$

tem-se finalmente que

$$m_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = e^{(1/2)T'\sigma T}$$

é a função geradora de momentos para a distribuição multinormal.

A partir dessa expressão geral, é possível obter-se a f.g.m. para distribuições multinormais. Cita-se, a título de ilustração, a distribuição binormal, e calculam-se os seus principais momentos.

3.4.2.7.2.1 - Função geradora de momentos para a distribuição binormal

Sejam $x_1 \cap N(0, \sigma_1^2)$ e $x_2 \cap N(0, \sigma_2^2)$ variáveis aleatórias com distribuição binormal de probabilidade. A sua função geradora de momentos é dada por

$$\begin{aligned} m_{X_1, X_2}(t_1, t_2) &= e^{\frac{1}{2} [t_1 \ t_2] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}} \\ &= e^{\frac{1}{2} [t_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2 \sigma_2^2]} \end{aligned}$$

e seus principais momentos são

$$E(X_1) = 0 \quad \text{e} \quad E(X_2) = 0$$

pois,

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \frac{\partial}{\partial t_1} m_{X_1, X_2}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=0} \\ &= \frac{1}{2} (2t_1 \sigma_1^2 + 2\rho t_2 \sigma_1 \sigma_2) e^{\frac{1}{2} [t_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2 \sigma_2^2]} \Big|_{t_1=t_2=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$E(X_1^2) = \sigma_1^2 \quad \text{e} \quad E(X_2^2) = \sigma_2^2$$

pois,

$$E(X_1^2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} m_{X_1, X_2}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=0}$$

$$\begin{aligned}
E(X_1^2) &= e^{\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)} (t_1\sigma_1^2 + \rho t_2\sigma_1\sigma_2)^2 + \\
&\quad + e^{\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)} \sigma_1^2 \quad \Big|_{t_1=t_2=0} \\
&= \sigma_1^2
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X_1) = \sigma_1^2 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X_2) = \sigma_2^2$$

$$E(X_1, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

pois,

$$\begin{aligned}
E(X_1, X_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} m_{X_1, X_2}(t_1, t_2) \quad \Big|_{t_1=t_2=0} \\
&= e^{\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)} (t_1\sigma_1^2 + \rho t_2\sigma_1\sigma_2) \times \\
&\quad \times (\rho t_1\sigma_1\sigma_2 + t_2\sigma_2^2) + e^{\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)} \times \\
&\quad \times (\rho\sigma_1\sigma_2) \quad \Big|_{t_1=t_2=0} \\
&= \rho\sigma_1\sigma_2
\end{aligned}$$

É conveniente observar-se que, se as variáveis aleatórias independentes têm distribuição normal, tal que

$$\begin{aligned}
x_1 &\cap N(m_1, \sigma_1^2) \quad \text{e} \quad x_2 \cap N(m_2, \sigma_2^2) \\
-\infty &< m_i < \infty, \quad i=1,2
\end{aligned}$$

a sua densidade de probabilidade é dada por

$$g_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}}$$

e a sua função geradora de momentos, por

$$m_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = e^{\left[t_1 m_1 + t_2 m_2 + (1/2)(t_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2 \sigma_2^2) \right]}$$

de forma que, para o cálculo da f.g.m., basta que se adicione ao expoente na forma matricial geral o vetor da combinação linear

$$\left[\sum t_i m_i \right]$$

de forma que

$$m_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = e^{\left[\sum t_i m_i \right] + (1/2) T' \sigma T}$$

3.5 - Fórmula Geral para Obtenção dos Momentos nas Distribuições Bernoulli, Binomial, Poisson, Geométrica, Binomial Negativa, Normal, Gama e Exponencial (Negativa)

3.5.1 - Fórmula recorrente (NOGUEIRA, 1965)

Os momentos das distribuições Binomial, Poisson, Normal, Geométrica, Gama, Exponencial, Binomial Negativa e Bernoulli podem ser obtidos a partir de suas funções geradoras de momentos, como se desenvolve no sub-capítulo 3.4 deste trabalho. Porém, o cálculo dos momentos pelo método da função geradora, embora geral, não é de fácil aplicação quando se pretende determinar momentos de ordem

superior à segunda. Para facilitar esse cálculo, apresenta-se a fórmula recorrente (NOGUEIRA, 1965)

$$(4) \quad \mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

que foi, pelo citado autor, aplicada às distribuições Binomial, Poisson e Normal.

NOGUEIRA (1965) afirma que a fórmula (4) é válida para toda função densidade de probabilidade $f_X(x)$ que satisfaça a fórmula

$$(5) \quad \frac{d}{dm} [f_X(x)] = \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right) f_X(x)$$

onde m e σ^2 são, respectivamente, a média e a variância da função $f_X(x)$, e o demonstra, tanto para o caso da função densidade ser de variável discreta como contínua.

- Caso em que a função densidade $f_X(x)$ é de variável discreta

Neste caso, sendo N inteiro e positivo, tem-se

$$\mu_n = \sum_{x=0}^N (x-m)^n f(x) \quad .$$

Derivando em relação a m , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} (\mu_n) &= n \sum_{x=0}^N (x-m)^{n-1} (-1) f(x) + \sum_{x=0}^N (x-m)^n \frac{d}{dm} f(x) \\ &= -n \sum_{x=0}^N (x-m)^{n-1} f(x) + \sum_{x=0}^N (x-m)^n \frac{d}{dm} f(x) \quad . \end{aligned}$$

Se $\frac{d}{dm} f(x)$ satisfaz à fórmula (5),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dm} (\mu_n) &= -n \mu_{n-1} + \frac{(x-m)}{\sigma^2} f(x) \sum_0^N (x-m)^n \\ &= -n \mu_{n-1} + \frac{1}{\sigma^2} \mu_{n+1}\end{aligned}$$

e

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1} .$$

- Caso em que a função de densidade $f_X(x)$ é de variável contínua

Neste caso,

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^n f(x) dx .$$

Derivando em relação a $\underline{m}$, obtêm-se:

$$\frac{d}{dm} (\mu_n) = -n \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^{n-1} f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^n \frac{d}{dm} f(x) dx$$

se $\frac{d}{dm} f(x)$ satisfaz à fórmula (5)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dm} (\mu_n) &= -n \mu_{n-1} + \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^n \frac{(x-m)}{\sigma^2} f(x) dx \\ &= -n \mu_{n-1} + \frac{1}{\sigma^2} \mu_{n+1}\end{aligned}$$

e

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1} .$$

No presente trabalho, aplicou-se a fórmula (5) a cada uma das citadas distribuições, e depois obteve-se a fórmula recorrente (4), demonstrando-se assim que, além das distribuições Binomial, Poisson e Normal apresentarem uma fórmula geral para a obtenção dos momentos, essa fórmula pode ser generalizada para as distribuições Geométrica, Gama, Exponencial (Negativa), Binomial Negativa e Bernoulli.

Apresenta-se, neste capítulo, esse desenvolvimento para cada uma das mencionadas distribuições.

3.5.2 - Distribuição de Bernoulli

Em uma distribuição de Bernoulli, tem-se que:

$$\begin{cases} f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{para } x=0 \text{ ou } x=1 \\ E(X) = m = p, & \text{Var}(X) = \sigma^2 = pq \end{cases}$$

Verifica-se inicialmente a fórmula:

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = \frac{(x-m)}{\sigma^2} f(x)$$

$$\frac{d}{dm} f(x) = x p^{x-1} q^{1-x} + p^x (1-x) q^{-x} (-1)$$

$$= p^x q^{1-x} \left[\frac{x}{p} - \frac{(1-x)}{q} \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm} f(x) &= p^x q^{1-x} \left[\frac{x(p+q) - p}{pq} \right] \\
&= p^x q^{1-x} \frac{(x-p)}{pq} \\
&= f(x) \frac{(x-m)}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

e a seguir obtêm-se a fórmula recorrente

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1},$$

pois o momento de ordem n é, por definição,

$$\mu_n = \sum_0^1 (x-p)^n p^x q^{1-x}$$

e, derivando-o em relação a p , lembrando que $q = 1 - p$ e, portanto,

$\frac{dq}{dp} = -1$, obtem-se:

$$\frac{d}{dp} (\mu_n) = \sum \left[\begin{aligned} &- n(x-p)^{n-1} p^x q^{1-x} + x(x-p)^n p^{x-1} q^{1-x} - \\ &- (x-p)^n p^x (1-x) q^{-x} \frac{q}{q} \end{aligned} \right]$$

$$= -n \mu_{n-1} + \frac{x}{p} \mu_n - \frac{(1-x)}{q} \mu_n$$

$$pq \frac{d}{dp} (\mu_n) = -npq \mu_{n-1} + xq \mu_n - (1-x)p \mu_n$$

$$= -npq \mu_{n-1} + (x-p) \mu_n$$

$$pq \frac{d}{dp} (\mu_n) = -npq \mu_{n-1} + \mu_{n+1}$$

e, como $pq = \sigma^2$ e $p=m$,

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

3.5.3 - Distribuição Binomial

Em uma distribuição binomial, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \quad , \quad \text{para } X=0,1,2,\dots,N \\ \text{com } 0 \leq p \leq 1 \quad , \quad q = 1-p \\ m = E(X) = Np \quad , \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = Npq \end{array} \right.$$

Verifica-se inicialmente a fórmula

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right) f(x)$$

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = \binom{N}{x} \left[x p^{x-1} \frac{1}{N} q^{N-x} + p^x (N-x) q^{N-x-1} \left(-\frac{1}{N} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} [f(x)] &= \frac{1}{N} \binom{N}{x} \left[\frac{x p^x q^{N-x}}{p} - \frac{p^x q^{N-x} (N-x)}{q} \right] \\ &= \frac{1}{N} \binom{N}{x} \left[\frac{x p^x q^{N-x} q - p^x q^{N-x} (N-x) p}{pq} \right] \\ &= \frac{1}{N} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \left[\frac{xq - p(N-x)}{pq} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm} f(x) &= \frac{1}{N} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \left[\frac{x(q+p) - Np}{pq} \right] \\
&= \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \left[\frac{x - Np}{Npq} \right] \\
&= f(x) \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

e a seguir obtêm-se a fórmula recorrente

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

pois, o momento de ordem n é, por definição,

$$\mu_n = \sum_0^N (x - Np)^n \binom{N}{x} p^x q^{N-x}$$

e, derivando-o em relação a p , lembrando que $q = 1-p$ e $\frac{dq}{dp} = -1$,
obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} (\mu_n) &= \sum \left[\begin{aligned} &- n N(x-Np)^{n-1} f(x) + (x-Np)^n \binom{N}{x} x p^{x-1} q^{N-x} \\ &- (N-x) (x-Np)^n \binom{N}{x} p^x q^{N-x-1} \end{aligned} \right] \\
&= -Nn \mu_{n-1} + \frac{x}{p} \mu_n - \frac{(N-x)}{q} \mu_n \\
pq \frac{d}{dp} (\mu_n) &= -nN pq \mu_{n-1} + xq \mu_n - (N-x)p \mu_n \\
&= -nN pq \mu_{n-1} + (x-Np) \mu_n \\
&= -nN pq \mu_{n-1} + \mu_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\mu_{n+1} = pq \frac{d}{dp} (\mu_n) + n Npq \mu_{n-1}$$

como

$$m = Np \quad , \quad \frac{dp}{dm} = \frac{1}{N}$$

e

$$\frac{d}{dp} (\mu_n) = \frac{\frac{d}{dm} (\mu_n)}{\frac{d}{dm} (p)} = N \frac{d}{dm} (\mu_n)$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &= Npq \frac{d}{dm} (\mu_n) + n Npq \mu_{n-1} \\ &= \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1} \end{aligned}$$

3.5.4 - Distribuição de Poisson

Em uma distribuição de Poisson, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad , \quad \text{para } x=0,1,2,3,\dots \\ \text{com } \lambda > 0 \\ \text{e } m = E(X) = \lambda \\ \sigma^2 = \text{Var}(X) = \lambda \end{array} \right.$$

Verifica-se inicialmente a fórmula

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right) f(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm} f(x) &= \frac{1}{x!} \left[x \lambda^{x-1} e^{-\lambda} - \lambda^x e^{-\lambda} \right] \\
&= \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \left[\frac{x}{\lambda} - 1 \right] \\
&= \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \left[\frac{x - \lambda}{\lambda} \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dm} f(x) = f(x) \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right)$$

e a seguir obtêm-se a fórmula recorrente

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

pois, o momento de ordem n é, por definição,

$$\mu_n = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^n \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

e, derivando-o em relação a λ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} (\mu_n) &= \sum_{x=0}^{\infty} \left[-n(x-\lambda)^{n-1} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} + (x-\lambda)^n \frac{x \lambda^{x-1}}{x!} e^{-\lambda} - (x-\lambda)^n \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \right] \\
&= -n \mu_{n-1} + x \lambda^{-1} \mu_n - \mu_n \\
&= -n \mu_{n-1} + \mu_n \left(\frac{x}{\lambda} - 1 \right) \\
&= -n \mu_{n-1} + \mu_n \left(\frac{x-\lambda}{\lambda} \right)
\end{aligned}$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} (\mu_n) = -n \lambda \mu_{n-1} + \mu_{n+1}$$

$$\mu_{n+1} = n \lambda \mu_{n-1} + \lambda \frac{d}{d\lambda} (\mu_n)$$

como $m = \lambda$ e $\sigma^2 = \lambda$,

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

3.5.5 - Distribuição Geométrica (Pascal)

Em uma distribuição geométrica, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = p(1-p)^x \quad , \quad \text{para } x=0,1,2,\dots \\ \text{com } 0 < p \leq 1 \quad , \quad q = 1-p \\ m = E(X) = \frac{q}{p} \quad , \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2} \end{array} \right.$$

Verifica-se inicialmente a fórmula

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right) f(x)$$

Observando-se que $\frac{dp}{dm} = -p^2$ e $\frac{dq}{dm} = p^2$,

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = \frac{d}{dm} (p) q^x + p x q^{x-1} \frac{d}{dm} (q)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dm} [f(x)] &= -p^2 q^x + p x \frac{q^x}{q} p^2 \\
 &= p q^x \left[x \frac{p^2}{q} - p \right] \\
 &= p q^x \left[\frac{p^2}{q} \left(x - \frac{q}{p} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = f(x) \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right)$$

e a seguir obtêm-se a fórmula recorrente

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

pois, o momento de ordem n é, por definição

$$\mu_n = \sum \left(x - \frac{q}{p} \right)^n p q^x$$

e, derivando-o em relação a p, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dp} (\mu_n) &= \sum \left[n \left(x - \frac{q}{p} \right)^{n-1} \frac{1}{p^2} p q^x + \left(x - \frac{q}{p} \right)^n q^x \frac{p}{p} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(x - \frac{q}{p} \right)^n p x q^{x-1} \right] \\
 &= \frac{n}{p^2} \mu_{n-1} + \frac{1}{p} \mu_n - \frac{x}{q} \mu_n \\
 &= \frac{n}{p^2} \mu_{n-1} - \frac{1}{q} \left(x - \frac{q}{p} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dp} (\mu_n) = \frac{n}{p^2} \mu_{n-1} - \frac{1}{q} \mu_{n+1}$$

$$q \frac{d}{dp} (\mu_n) = n \frac{q}{p^2} \mu_{n-1} - \mu_{n+1}$$

$$\mu_{n+1} = n \frac{q}{p^2} \mu_{n-1} - q \frac{d}{dp} (\mu_n)$$

Como

$$\frac{d}{dp} (\mu_n) = \frac{\frac{d}{dm} (\mu_n)}{\frac{d}{dm} (p)} = - (m+1)^2 \frac{d}{dm} (\mu_n)$$

$$\mu_{n+1} = n \frac{q}{p^2} \mu_{n-1} + q(m+1)^2 \frac{d}{dm} (\mu_n)$$

e, como

$$q(m+1)^2 = q \left(\frac{q}{p} + 1 \right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

$$\mu_{n+1} = n \frac{q}{p^2} \mu_{n-1} + \frac{q}{p^2} \frac{d}{dm} (\mu_n)$$

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

3.5.6 - Distribuição binomial negativa

Em uma distribuição binomial negativa, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (-q)^x = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x, \text{ para } x=0,1,2,\dots \\ \text{com } r = 1,2,3,\dots; \quad 0 < p \leq 1; \quad q = 1-p \\ m = E(X) = \frac{rq}{p}; \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2} \end{array} \right.$$

Verifica-se inicialmente a fórmula

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right) f(x)$$

Observando-se que

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{p^2}{r} \quad \text{e} \quad \frac{dq}{dm} = \frac{p^2}{r},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} f(x) &= \binom{r+x-1}{x} \left[-p^2 p^{r-1} q^x + p^r x q^{x-1} \frac{p^2}{r} \right] \\ &= \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \left[-p + \frac{xp^2}{rq} \right] \\ &= \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \left[\frac{p^2}{rq} \left(x - \frac{rq}{p} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dm} f(x) = f(x) \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right)$$

E a seguir obtêm-se a fórmula recorrente

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} \mu_n + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

pois, o momento de ordem $\underline{n}$ é, por definição,

$$\mu_n = \Sigma \left(x - \frac{rq}{p} \right)^n \binom{r+x-1}{x} p^r q^x$$

e, derivando-o em relação a $\underline{p}$, obtêm-se:

$$\frac{d}{dp} (\mu_n) = \Sigma \left[n \left(x - \frac{rq}{p} \right)^{n-1} \frac{r}{p^2} p^r q^x + \left(x - \frac{rq}{p} \right)^n r p^{r-1} q^x - \right. \\ \left. - \left(x - \frac{rq}{p} \right)^n p^r x q^{x-1} \right]$$

$$\frac{d}{dp} (\mu_n) = \Sigma \binom{r+x-1}{x} \left[\left(x - \frac{rq}{p} \right)^{n-1} p^r q^x \frac{nr}{p^2} + \left(x - \frac{rq}{p} \right)^n p^r q^x \frac{r}{p} - \right. \\ \left. - \left(x - \frac{rq}{p} \right)^n p^r q^x \frac{x}{q} \right]$$

$$= \mu_{n-1} \frac{nr}{p^2} + \frac{r}{p} \mu_n - \frac{x}{q} \mu_n$$

$$= n \frac{r}{p^2} \mu_{n-1} - \frac{1}{q} \left(x - \frac{rq}{p} \right) \mu_n$$

$$= n \frac{r}{p^2} \mu_{n-1} - \frac{1}{q} \mu_{n+1}$$

$$q \frac{d}{dp} (\mu_n) = n \frac{rq}{p^2} \mu_{n-1} - \mu_{n+1}$$

$$\mu_{n+1} = n \frac{rq}{p^2} \mu_{n-1} - q \frac{d}{dp} (\mu_n)$$

e, como

$$\frac{d}{dp} (\mu_n) = \frac{\frac{d}{dm} (\mu_n)}{\frac{d}{dm} (p)} = \frac{\frac{d}{dm} (\mu_n)}{-\frac{p^2}{r}} = \frac{-r}{p^2} \frac{d}{dm} (\mu_n)$$

$$\mu_{n+1} = n \frac{rq}{p^2} \mu_{n-1} + \frac{rq}{p^2} \frac{d}{dm} (\mu_n)$$

ou seja,

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

3.5.7 - Distribuição exponencial (negativa)

Em uma distribuição exponencial (negativa), tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad I_{[0, \infty)}(x) \\ \text{com } \lambda > 0 \quad , \\ m = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{array} \right.$$

Verifica-se inicialmente a fórmula

$$\frac{d}{dm} [f(x)] = \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right) f(x)$$

observando-se que

$$\frac{d}{dm} (\lambda) = - \frac{1}{m^2} = - \lambda^2, e$$

$$\frac{d}{dm} (e^{-\lambda x}) = \frac{x}{m^2} e^{-\lambda x} = x \lambda^2 e^{-\lambda x}$$

$$\frac{d}{dm} f(x) = \frac{d}{dm} (\lambda) e^{-\lambda x} + \lambda \frac{d}{dm} (e^{-\lambda x})$$

$$= \lambda e^{-\lambda x} [-\lambda + x \lambda^2]$$

$$= \lambda e^{-\lambda x} \left[\lambda^2 \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) \right]$$

$$\frac{d}{dm} f(x) = f(x) \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right)$$

e a seguir obtêm-se a fórmula recorrente

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

pois, o momento de ordem $\underline{n}$ é, por definição,

$$\mu_n = \int_0^{\infty} (x-m)^n \lambda e^{-\lambda x} dx$$

e, derivando-o em relação a $\underline{m}$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} (\mu_n) &= \int_0^{\infty} \left[-n(x-m)^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} - \lambda(x-m)^n \lambda e^{-\lambda x} + \right. \\ &\quad \left. + x \lambda^2 (x-m)^n \lambda e^{-\lambda x} \right] dx \\ &= -n \mu_{n-1} - \lambda \mu_n + x \lambda^2 \mu_n \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dm} (\mu_n) = -n \mu_{n-1} + \lambda^2 \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \mu_n$$

$$= -n \mu_{n-1} + \lambda^2 \mu_{n+1}$$

de forma que

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{dm} (\mu_n) + \frac{1}{\lambda^2} n \mu_{n-1}$$

ou seja,

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

3.5.8 - Distribuição gama

Em uma distribuição gama tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad I_{[0, \infty)}(x) \\ \text{com } r > 0, \quad \lambda > 0 \\ m = E(X) = \frac{r}{\lambda} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{r}{\lambda^2} \end{array} \right.$$

Verifica-se inicialmente a fórmula

$$\frac{d}{dm} f(x) = \left(\frac{x-m}{\sigma^2}\right) f(x)$$

observando-se que $\frac{d\lambda}{dm} = -\frac{\lambda^2}{r}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \left[\frac{d}{dm} (\lambda) (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} + \lambda(r-1) (\lambda x)^{r-2} \frac{d}{dm} (\lambda x) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \frac{d}{dm} (-\lambda x) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)} \left[-\frac{\lambda}{r} \lambda (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} - \right. \\
&\quad \left. - (r-1) \frac{\lambda^2}{r} x \lambda (\lambda x)^{r-1} (\lambda x)^{-1} e^{-\lambda x} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^2}{r} x \lambda (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \right] \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \left[-\frac{\lambda}{r} - (r-1) \frac{\lambda}{r} + x \frac{\lambda^2}{r} \right] \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \left[\frac{\lambda^2}{r} \left(x - \frac{r}{\lambda} \right) \right]
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dm} f(x) = f(x) \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right)$$

e a seguir obtêm-se a fórmula recorrente

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

pois, o momento de ordem $\underline{n}$ é, por definição,

$$\mu_n = \int_0^\infty (x-m)^n \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$

e, derivando-o em relação a $\underline{m}$, obtêm-se:

$$\frac{d}{dm} (\mu_n) = \int_0^{\infty} \left[\begin{aligned} & - \frac{n}{\Gamma(r)} (x-m)^{n-1} \lambda (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} - \\ & - \frac{(x-m)^n}{\Gamma(r)} \frac{\lambda^2}{r} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} - \\ & - \frac{(x-m)^n}{\Gamma(r)} \lambda (r-1) \frac{(\lambda x)^{r-1}}{\lambda x} \frac{\lambda^2}{r} x e^{-\lambda x} + \\ & + (x-m)^n \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^2}{r} x \end{aligned} \right] dx$$

$$= -n \mu_{n-1} - \frac{\lambda}{r} \mu_n - (r-1) \frac{\lambda}{r} \mu_n + \frac{\lambda^2}{r} x \mu_n$$

$$= -n \mu_{n-1} + \mu_n \left(x - \frac{r}{\lambda} \right) \frac{\lambda^2}{r}$$

$$= -n \mu_{n-1} + \frac{\lambda^2}{r} \mu_{n+1}$$

$$\mu_{n+1} = \frac{r}{\lambda^2} \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \frac{r}{\lambda^2} \mu_{n-1}$$

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

3.5.9 - Distribuição normal

Em uma distribuição normal, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-[(x-m)^2 / (2\sigma^2)]}, \quad -\infty < x < \infty \\ \text{com } -\infty < m < \infty \quad ; \quad \sigma > 0 \\ m = E(X) \quad ; \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) \end{array} \right.$$

Verifica-se inicialmente a fórmula

$$\frac{d}{dm} f(x) = \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right) f(x)$$

$$\frac{d}{dm} f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-[(x-m)^2 / (2\sigma^2)]} \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right)$$

$$\frac{d}{dm} f(x) = \left(\frac{x-m}{\sigma^2} \right) f(x)$$

e a seguir obtém-se a fórmula recorrente

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

pois, o momento de ordem $\underline{n}$ é, por definição,

$$\mu_n = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^n e^{-[(x-m)^2 / (2\sigma^2)]} dx$$

e, derivando-o em relação a m , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm} (\mu_n) &= - \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} n \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^{n-1} e^{-[(x-m)^2/(2\sigma^2)]} dx - \\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^{n+1} e^{-[(x-m)^2/(2\sigma^2)]} dx \\
&= - n \mu_{n-1} + \frac{1}{\sigma^2} \mu_{n+1}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$$

3.6 - Técnica da Função Geradora de Momentos

MOOD *et alii* (1974) apresentam o seguinte teorema: Se duas variáveis aleatórias, X e Y , com funções de densidade $f_X(x)$ e $f_Y(x)$, possuem funções geradoras de momentos $m_X(t)$ e $m_Y(t)$, iguais para todo t no intervalo $-h < t < h$, $h > 0$, elas têm funções de distribuição $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ iguais (6). Isso corresponde a estabelecer que, se é possível obter a f.g.m. de uma variável aleatória, teoricamente é possível encontrar a distribuição da variável aleatória, desde que existe uma única função de distribuição para uma dada função geradora de momentos.

Esse teorema (6), constitui-se na base do desenvolvimento deste capítulo.

3.6.1 - Descrição da técnica

A técnica da função geradora de momentos é um método para determinação das funções de distribuição, construído sobre o conceito da função geradora de momentos, e na existência de uma única função de distribuição para uma dada função geradora (conforme 6).

Dadas as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$, com densidade $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e funções $g_1(x_1, \dots, x_n) \dots g_K(x_1, \dots, x_n)$, obtém-se a distribuição conjunta de

$$Y_1 = g_1(X_1, \dots, X_n) \dots Y_K = g_K(X_1, \dots, X_n).$$

A função geradora de momentos conjuntos de $Y_1, Y_2, \dots, Y_K$, se existe, é dada por

$$\begin{aligned} m_{Y_1, \dots, Y_K}(t_1, \dots, t_K) &= E \left[e^{t_1 Y_1 + t_2 Y_2 + \dots + t_K Y_K} \right] \\ &= \int \dots \int e^{t_1 g_1(X_1, \dots, X_n) + \dots + t_K g_K(x_1, \dots, x_n)} \times \\ &\quad \times f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n dx_i \end{aligned}$$

Se, após efetuar essa integração, a função resultante de $t_1, t_2, \dots, t_K$ pode ser reorganizada como uma f.g.m. conjuntos de várias distribuições conjuntas conhecidas, segue-se que $Y_1, Y_2, \dots, Y_K$ tem aquela distribuição conjunta, em virtude do estabelecido, que uma f.g.m., quando existe, é única e unicamente determinada por sua função de distribuição (conforme 6).

Apesar da grande aplicação dessa técnica, para $k > 1$ ela é de utilização prática restrita, pois poucas f.g.m. conjuntas são passíveis de reconhecimento imediato. Porém, para $k = 1$, tem-se melhores possibilidades de reconhecer a f.g.m. resultante, pois a mesma é função de um argumento único.

Essa técnica, em conexão com a teoria das transformações, torna-se um instrumento poderoso na determinação de distribuições, se conhecidas as suas funções geradoras de momentos.

3.6.1.1 - Aplicações da técnica de funções geradoras de momentos à obtenção de distribuições conjuntas

3.6.1.1.1 - Obtenção da distribuição de $Y = X^2$, admitindo-se X normalmente distribuída com média zero e variância um

Se $X \sim N(0,1)$, a sua densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Obtém-se a seguir a f.g.m. de $Y = X^2$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[e^{tY}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)x^2(1-2t)} dx \end{aligned}$$

$$m_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-2t)^{-1/2}}{(1-2t)^{-1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)x^2(1-2t)} dx$$

e, substituindo-se

$$u^2 = \frac{x^2}{2} (1-2t)$$

$$u = \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1-2t}$$

$$\frac{\sqrt{2} du}{\sqrt{1-2t}} = dx \quad ,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-2t)^{-1/2}}{(1-2t)^{-1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1-2t)^{-1/2} 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

e, como

$$2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

segue-se que

$$m_Y(t) = (1-2t)^{-1/2}$$

Conhecendo-se a função geradora de momentos para a distribuição gama, que é

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r = \left(\frac{\lambda-t}{\lambda}\right)^{-r} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r} \quad ,$$

e admitindo-se $\lambda = \frac{1}{2}$; $r = \frac{1}{2}$, verifica-se facilmente que

$$m_X(t) = (1-2t)^{-1/2} ,$$

o que torna evidente o fato de que $m_Y(t) = (1-2t)^{-1/2}$ é a função geradora de momentos de uma V.A. com distribuição gama, com $\lambda = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$, do que se conclui que a densidade de probabilidade de $Y = X^2$ é dada por

$$g_Y(y) = \frac{1}{2^{1/2} \Gamma(1/2)} e^{-y/2} y^{-1/2}$$

que é também a densidade de probabilidade de uma distribuição de qui-quadrado com 1 (um) grau de liberdade.

Dessa forma, se $x \cap N(0,1)$ e $Y = X^2$, tem-se que

$$Y \cap \chi^2_{(1)}$$

3.6.1.1.2 - Obtenção da distribuição conjunta de Y_1 e Y_2 , com

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = g_2(X_1, X_2) = X_2 - X_1$$

e X_1 e X_2 variáveis normais padronizadas independentes

Obtém-se inicialmente a função geradora de momentos conjuntos de Y_1 e Y_2 :

$$\begin{aligned} m_{Y_1, Y_2}(t_1, t_2) &= E \left[e^{t_1 Y_1 + t_2 Y_2} \right] \\ &= E \left[e^{(X_1 + X_2)t_1 + (X_2 - X_1)t_2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{Y_1, Y_2}(t_1, t_2) &= E \left[e^{X_1(t_1 - t_2)} \right] E \left[e^{X_2(t_1 + t_2)} \right] \\
&= m_{X_1}(t_1 - t_2) m_{X_2}(t_1 + t_2) \\
&= e^{(t_1 - t_2)^2/2} e^{(t_1 + t_2)^2/2} \\
&= e^{2t_1^2/2} e^{2t_2^2/2} \\
&= e^{1/2 [2t_1^2 + 2t_2^2]} \\
&= m_{Y_1}(t_1) m_{Y_2}(t_2)
\end{aligned}$$

Observa-se então que a função resultante é a f.g.m. conjuntos de uma distribuição binormal, com $Y_1 \cap N(0, 2)$ e $Y_2 \cap N(0, 2)$ sendo Y_1 e Y_2 independentes, de forma que a distribuição conjunta de Y_1, Y_2 é binormal, com densidade de probabilidade dada por

$$g_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi} e^{-1/2 [(y_1^2/2) + (y_2^2/2)]}$$

3.6.1.1.3 - Obtenção da distribuição conjunta de $\bar{X}$ e $\bar{Y}$

Suponha-se (X_i, Y_i) , $i=1, 2, \dots, n$ uma amostra aleatória de tamanho n proveniente de uma distribuição normal bivariada, com função densidade de probabilidade $f_{X,Y}(x,y)$ e parâmetros m_1 , m_2 , σ_1^2 , σ_2^2 e ρ .

Sejam

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad \text{e} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$

Admitindo-se que os pares (X_i, Y_i) são mutuamente independentes, e têm todos a mesma densidade de probabilidade, obtêm-se a f.g.m. conjuntos $m_{\bar{X}, \bar{Y}}(t_1, t_2)$.

$$m_{\bar{X}, \bar{Y}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(t_1 \sum x_i/n) + (t_2 \sum y_i/n)]} \Omega dx_1 \dots dy_n$$

onde $\Omega = f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) \dots f(x_n, y_n)$

$$m_{\bar{X}, \bar{Y}}(t_1, t_2) = \prod_{i=1}^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(t_1 x_i/n) + (t_2 y_i/n)]} f(x_i, y_i) dx_i dy_i \right]$$

$$m_{\bar{X}, \bar{Y}}(t_1, t_2) = \prod_{i=1}^n e^{\left\{ \frac{t_1 m_1}{n} + \frac{t_2 m_2}{n} + \frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 \left(\frac{t_1}{n} \right)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left(\frac{t_1}{n} \right) \left(\frac{t_2}{n} \right) + \sigma_2^2 \left(\frac{t_2}{n} \right)^2 \right] \right\}}$$

que é a f.g.m. de uma distribuição normal bivariada com médias m_1 e m_2 e variâncias $\frac{\sigma_1^2}{n}$ e $\frac{\sigma_2^2}{n}$ e coeficiente de correlação ρ . Consequentemente, $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ tem essa distribuição conjunta binormal com densidade conjunta dada por

$$g_{\bar{X}, \bar{Y}}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{n}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(\bar{x}-m_1)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n}} - 2\rho \frac{(\bar{x}-m_1)}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}} \frac{(\bar{y}-m_2)}{\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}} + \frac{(\bar{y}-m_2)^2}{\frac{\sigma_2^2}{n}} \right]}$$

3.6.2 - Distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes

Mostra-se, neste sub-ítem, como utilizar a técnica da função geradora de momentos para se obter a distribuição da soma de V.A. independentes, através da utilização do teorema que se enuncia e demonstra a seguir.

Teorema: Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são V.A. independentes, e a f.g.m.

de cada uma delas existe para todo $h > 0$, com $-h < t < h$, e $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, então

$$(7) \quad m_Y(t) = E\left[e^{\sum_{i=1}^n X_i t}\right] = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) \quad , \text{ para } -h < t < h$$

Demonstração :

$$m_Y(t) = E\left[e^{\sum_{i=1}^n X_i t}\right] = E\left[\prod_{i=1}^n e^{X_i t}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[e^{X_i t}\right] = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t)$$

A grande utilidade prática desse teorema decorre do teorema que se apresenta no primeiro parágrafo deste capítulo, (6), que diz que uma f.g.m., quando existe, determina a função de distribuição. Dessa forma, se é possível reconhecer $\prod_{i=1}^n m_{X_i}(t)$ como a f.g.m. correspondente a uma distribuição particular, então encontra-se a distribuição da soma das n variáveis aleatórias independentes X_i .

3.6.2.1 - Aplicações da técnica da f.g.m. à distribuição da soma de V.A. independentes

3.6.2.1.1 - Obtenção da distribuição binomial como soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias de Bernoulli independentes, isto é, que

$$P(X_i = 1) = p \quad \text{e} \quad P(X_i = 0) = 1 - p$$

com $m_{X_i}(t) = q + pe^t$.

Se $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, a função geradora de Y , de acordo com o teorema apresentado em (7), é dada por

$$m_Y(t) = m_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) = (q + pe^t)^n$$

que é a f.g.m. de uma V.A. binomial. Consequentemente, $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ tem distribuição binomial com parâmetros

$$E(y) = np$$

$$\text{Var}(y) = npq$$

e densidade

$$f_Y(y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}$$

3.6.2.1.2 - Obtenção da distribuição da soma de n V.A. independentes com distribuição de Poisson

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são V.A. independentes com distribuição de Poisson, com

$$E(X_i) = \lambda_i \quad \text{e} \quad m_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)}$$

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^n X_i, \quad ,$$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(e^t - 1)} = e^{\sum \lambda_i(e^t - 1)} \end{aligned}$$

que é novamente a f.g.m. de uma distribuição de V.A. Poisson com média $\sum \lambda_i$. Consequentemente, $Y = \sum X_i$ tem distribuição Poisson com mé-dia

$$E(Y) = \sum \lambda_i$$

e densidade

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\sum \lambda_i} (\sum \lambda_i)^y}{y!}, \quad y=0,1,2,\dots$$

3.6.2.1.3 - Obtenção da distribuição gama como soma de n V.A. independentes com distribuição exponencial (negativa)

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são V.A. independentes com distribuição exponencial (negativa), tal que

$$m_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$m_Y(t) = m_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

que é a função geradora de momentos de uma distribuição gama, com média

$$E(Y) = \frac{n}{\lambda}$$

e densidade

$$f_Y(y) = \frac{\lambda}{\Gamma(n)} (\lambda y)^{n-1} e^{-\lambda y}, \quad I_{[0, \infty)}(y)$$

$$n > 0 \quad \text{e} \quad \lambda > 0$$

3.6.2.1.4 - Obtenção da distribuição da soma de $\underline{n}$ V.A. independentes com distribuição normal padronizada, que também é normal de média zero e variância $\underline{n}$

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são V.A. independentes com distribuição normal padrão, tal que

$$m_{X_i}(t) = e^{(1/2)t^2}$$

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^n X_i ,$$

$$m_Y(t) = m_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) = [e^{(1/2)t^2}]^n = e^{t^2 n/2}$$

que é a f.g.m. de uma V.A. com distribuição normal de média zero e variância $\underline{n}$. Consequentemente Y tem distribuição normal, com densidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(2n)}$$

3.6.2.1.5 - Obtenção da distribuição amostral das médias de amostras aleatórias de tamanho n a partir da distribuição da soma de n V.A. independentes com distribuição normal

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal de média $\underline{m}$ e variância σ^2 tal que

$$m_{X_i}(t) = e^{mt + (\sigma^2 t^2 / 2)}$$

$$\text{se } S = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\begin{aligned} m_S(t) &= m_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) \\ &= \left[e^{mt + (\sigma^2 t^2 / 2)} \right]^n \\ &= e^{nmt + (n\sigma^2 t^2 / 2)} \end{aligned}$$

que é a f.g.m. de uma V.A. com distribuição normal, de média $\underline{nm}$ e variância $\underline{n\sigma^2}$, de forma que

$$f_S(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n} \sqrt{2\pi}} e^{-(s - nm)^2 / (2n\sigma^2)}$$

é a densidade de $S = \sum X_i$.

Como

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{S}{n} \quad ,$$

efetuando-se a transformação de variável, com $S = n\bar{X}$, e obtendo-se o Jacobiano da transformação

$$|J| = \frac{dS}{d\bar{X}} = n \quad ,$$

resulta a densidade de probabilidade de $\bar{x}$

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{2\pi}} e^{-(\bar{x}-\underline{m})^2 / (2\sigma^2/n)}$$

que é a densidade de probabilidade de uma V.A. com distribuição normal de média $\underline{m}$ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, de forma que se pode afirmar que, se $x \cap N(m, \sigma^2)$, também $\bar{x} \cap N(m, \frac{\sigma^2}{n})$, ou seja, a média amostral $\bar{X}$, proveniente de uma população normal com média $\underline{m}$ e variância σ^2 , também tem distribuição normal de média $\underline{m}$ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

3.6.2.1.6 - Obtenção da distribuição de qui-quadrado com $(r_1+r_2+\dots+r_n)$ graus de liberdade a partir da soma de n V.A. independentes com distribuição de qui-quadrado com r_i graus de liberdade, $i=1,2,\dots,n$

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes tendo distribuição de qui-quadrado com r_i graus de liberdade,

$$X_1 \cap \chi^2_{(r_1)}$$

$$X_2 \cap \chi^2_{(r_2)}$$

...

$$X_n \cap \chi^2_{(r_n)}$$

tal que

$$m_{X_i}(t) = (1-2t)^{-r_i/2}$$

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$m_Y(t) = m_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t)$$

$$= \prod_{i=1}^n (1-2t)^{-r_i/2}$$

$$m_Y(t) = (1-2t)^{-(\sum r_i)/2}$$

que é a f.g.m. de uma V.A. com distribuição de qui-quadrado com $\sum r_i$ graus de liberdade. Consequentemente, $Y = \sum X_i$ tem distribuição $\chi^2_{(\sum r_i)}$ com densidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{(\sum r_i)/2} \Gamma(\sum r_i/2)} e^{-y/2} y^{(\sum r_i/2)-1}$$

3.6.2.1.7 - Obtenção da distribuição binomial negativa a partir da soma de n V.A. independentes com distribuição geométrica

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, cada qual com distribuição geométrica com parâmetro p , tal que

$$m_{X_i}(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$m_Y(t) = m_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right) = \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^n$$

que é a f.g.m. de uma V.A. com distribuição binomial negativa de média $E(X) = \frac{nq}{p}$.

Consequentemente, $Y = \sum X_i$ tem distribuição binomial negativa com densidade

$$f_Y(y) = \binom{n+y-1}{y} p^n q^y = \binom{-n}{y} p^n (-q)^y,$$

para $y=0,1,2,\dots$

3.6.2.1.8 - Obtenção da distribuição de

$$Y = \sum_{i=1}^n k_i X_i$$

com k_i constantes reais e

$$X_i \cap N(m_i, \sigma_i^2)$$

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são V.A. independentes distribuídas normalmente, tal que

$$X_i \cap N(m_i, \sigma_i^2) \quad , \quad i=1, 2, \dots, n$$

$k_1, k_2, \dots, k_n$ constantes reais, e funções geradora de momentos,

$$m_{k_i X_i}(t) = e^{k_i m_i t + \frac{1}{2} k_i^2 \sigma_i^2 t^2}$$

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^n k_i X_i \quad ,$$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_{\sum k_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{k_i X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^n \left[e^{k_i m_i t + \frac{1}{2} k_i^2 \sigma_i^2 t^2} \right] \end{aligned}$$

$$= e^{(\sum_{i=1}^n k_i m_i) t + \left[(\sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2) t^2 \right] / 2}$$

que é a f.g.m. de uma V.A. com distribuição normal de média $(\sum_{i=1}^n k_i m_i)$ e variância $(\sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2)$. Consequentemente, $Y = \sum k_i X_i$ tem distribuição normal com média $(\sum k_i m_i)$ e variância $(\sum k_i^2 \sigma_i^2)$ e densidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sum k_i^2 \sigma_i^2}} e^{-\frac{(y - \sum k_i m_i)^2}{2(\sum k_i^2 \sigma_i^2)}}$$

Nota (4): O resultado obtido, $Y = \sum k_i X_i \cap N(\sum k_i m_i; \sum k_i^2 \sigma_i^2)$ corresponde a afirmar que a combinação linear de V.A. normais é também uma V.A. distribuída normalmente.

Em particular, se

$$X_1 \cap N(m_1, \sigma_1^2) \quad \text{e} \quad X_2 \cap N(m_2, \sigma_2^2)$$

sendo X_1 e X_2 independentes, então

$$(X_1 + X_2) \cap N(m_1 + m_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

e

$$(X_1 - X_2) \cap N(m_1 - m_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

3.6.2.1.9 - Obtenção da distribuição de

$$Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2$$

Suponha-se que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são V.A. independentes distribuídas normalmente, com média m e variância σ^2 ,

$$X_i \cap N(m, \sigma^2), \quad i=1, 2, \dots, n$$

Como $\left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)$ tem distribuição normal padrão, tem-se que $\left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2$ tem distribuição de qui-quadrado, com um grau de liberdade, de forma que

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2 (t) = (1-2t)^{-1/2}$$

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2, \quad \text{então}$$

$$\begin{aligned}
 m_Y(t) &= \prod_{i=1}^n m_{\frac{X_i - \mu}{\sigma}}(t) \\
 &= \left[(1-2t)^{1/2} \right]^n \\
 &= (1-2t)^{n/2}
 \end{aligned}$$

que é a f.g.m. de uma V.A. com distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade.

Consequentemente, $Y = \sum \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ tem distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade, ou seja:

$$Y = \sum \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

3.6.3 - Aplicação da técnica da função geradora de momentos à obtenção de distribuições limites

3.6.3.1 - Função de distribuição limite

Antes de se abordar como uma f.g.m. pode ser usada em problemas de distribuições limites, uma definição básica deve ser apresentada.

Definição (1): (definição de função de distribuição limite)
(HOOG e CRAIG, 1970)

Seja uma função de distribuição $F_n(y)$, de variável aleatória Y_n , dependente de n , uma constante positiva. Se $F(y)$ é uma função de distribuição, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = F(y)$ para todo y para o

qual $F(y)$ é contínua, então a variável aleatória Y_n é dita tendo uma distribuição limite, com função de distribuição limite $F(y)$.

Para obter a função de distribuição limite de uma variável aleatória Y_n , pela utilização da definição (1), requer-se o conhecimento de $F_n(y)$ para cada constante positiva n . Se essa função existe, a sua correspondente f.g.m., designada por $m_Y(t, n)$, fornece um método conveniente para a determinação da função de distribuição limite, baseado no teorema que se segue.

Teorema: (HOOG e CRAIG, 1970)

Seja uma variável aleatória Y_n , tendo uma função de distribuição $F_n(y)$ e função geradora de momentos $m_Y(t; n)$, que existe para $-h < t < h$, e para todo n . Se existe uma função de distribuição $F(y)$, com correspondente função geradora de momentos $m_Y(t)$, definida para $|t| \leq h_1 < h$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} m_Y(t, n) = m_Y(t)$, então Y_n tem uma distribuição limite, com função de distribuição $F(y)$.

Esse teorema habilita a afirmar que, sempre que uma V.A. tem uma distribuição limite, se desejado, pode-se usar essa distribuição limite como uma aproximação para a exata função de distribuição, como mostra-se através de algumas aplicações.

3.6.3.2 - Aplicação (1): Obtenção da distribuição limite da distribuição binomial quando $\underline{n}$ é grande e $\underline{p}$ é pequeno

Seja Y_n tendo uma distribuição que é binomial $b(n, p)$. Suponha-se que a média $m = np$ é a mesma para todo $\underline{n}$, isto é, $p = \frac{\underline{m}}{\underline{n}}$, onde $\underline{m}$ é uma constante. Obtém-se a distribuição limite da distribuição binomial, quando $p = \frac{\underline{m}}{\underline{n}}$, através do limite de $m_Y(t; n)$.

Então, sendo

$$\begin{aligned} m_Y(t; n) &= E\left[e^{tY_n}\right] = [1 - p + pe^t]^n \\ &= \left[1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{n} pe^t\right]^n \\ &= \left[1 + \frac{m(e^t - 1)}{n}\right]^n \end{aligned}$$

para todo t real.

E aplicando-se a seguir o limite a $m_Y(t; n)$ para $\underline{n}$ tendendo a infinito, pelo limite fundamental (1) do Apêndice, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_Y(t; n) = e^{m(e^t - 1)}$$

para todo t real.

Lembrando que uma V.A. com distribuição de Poisson tem f.g.m. dada por

$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)},$$

observa-se que a distribuição limite obtida é a f.g.m. de uma V.A. com distribuição de Poisson com $m=\lambda$.

Então, de acordo com o teorema citado (HOOG e CRAIG, 1970), e sob as condições estabelecidas, conclui-se que Y_n tem uma distribuição limite Poisson com média m .

Dessa forma, mostra-se ser possível usar a distribuição de Poisson como uma aproximação para a distribuição binomial quando n é grande e p é pequeno.

3.6.3.3 - Aplicação (2): Obtenção da distribuição limite para $Y_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}}$ quando n é grande

Seja Z_n uma V.A. com distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade e função geradora de momentos,

$$m_{Z_n}(t) = (1-2t)^{-n/2}, \quad t < \frac{1}{2}.$$

A média e a variância de Z_n são, respectivamente, n e $2n$. Obtém-se a seguir a distribuição limite da V.A. $Y_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}}$.

Para tanto, calcula-se a f.g.m. de Y_n , e a seguir aplica-se o limite para $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} m_Y(t; n) &= E\left[e^{tY_n}\right] = E\left[e^{t(Z_n - n)/\sqrt{2n}}\right] \\ &= e^{-tn/\sqrt{2n}} E\left[e^{(tZ_n)/\sqrt{2n}}\right] \end{aligned}$$

$$m_Y(t;n) = e^{-t[\sqrt{2/n}(n/2)]} \left(1 - \frac{2t}{\sqrt{2n}}\right)^{-n/2}, \quad t < \frac{\sqrt{2n}}{2}$$

$$= \left[e^{t\sqrt{2/n}} - t \sqrt{\frac{2}{n}} e^{t\sqrt{2/n}} \right]^{-n/2}$$

De acordo com a fórmula de Taylor, existe um número $\xi(n)$, entre 0 e $t\sqrt{2/n}$ tal que:

$$e^{t\sqrt{2/n}} = 1 + t \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{1}{2} (t \sqrt{\frac{2}{n}})^2 + \frac{e^{\xi(n)}}{6} (t \sqrt{\frac{2}{n}})^3$$

Se esta soma é substituída por $e^{t\sqrt{2/n}}$ em $m_Y(t;n)$, tem-se que

$$m_Y(t,n) = \left(1 - \frac{t^2}{n} + \frac{\psi(n)}{n}\right)^{-n/2}$$

com

$$\psi(n) = \frac{\sqrt{2} t^3 e^{\xi(n)}}{3\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2} t^3}{\sqrt{n}} + \frac{2t^4 e^{\xi(n)}}{3n}$$

Como $\xi(n)$ tende a zero, com n tendendo a infinito, então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0,$$

para todo valor fixo de t , e, de acordo com o limite fundamental (1) do Apêndice, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_Y(t,n) = e^{t^2/2},$$

para todo t real, que é a f.g.m. de uma distribuição normal padronizada.

Conclui-se, pois, que a V.A. $Y_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}}$ tem uma distribuição normal padronizada como limite.

3.6.3.4 - Aplicação da função geradora de momentos limite ao teorema do limite central

Como se demonstra, pela utilização da técnica da função geradora de momentos em (3.6.2.1.5), a média amostral $\bar{x}$, proveniente de uma população normal, de média $\underline{m}$ e variância σ^2 , tem também distribuição normal, de média m e variância $\frac{\sigma^2}{n}$. Consequentemente, a variável aleatória $\frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ tem distribuição normal padrão.

Em teoria estatística há um importante teorema chamado Teorema do Limite Central (vide Apêndice). Um caso especial desse teorema, afirma que, se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são os elementos de uma amostra aleatória de tamanho n , provenientes de alguma distribuição que possui variância σ^2 e média m ($\sigma^2 > 0, -\infty < m < \infty$), então a variável aleatória $\frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ tem uma distribuição normal limite com média zero e variância um. Pode-se, pois, usar essa distribuição normal aproximada para calcular probabilidades aproximadas concernentes a $\bar{x}$, o que se constitui na grande importância prática do conhecimento desse teorema.

Apresenta-se, nesta aplicação, somente uma forma especial do teorema do limite central, que consiste em requerer-se a existência de uma função geradora de momentos para a distribuição a partir da qual toma-se a amostra, o que, entretanto, é muito mais

severo do que meramente requerer-se uma variância positiva para a distribuição. Segue-se a forma modificada do teorema do limite central.

Teorema: Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ os elementos de uma amostra aleatória provenientes de uma população com média $\underline{m}$ e variância σ^2 , a qual possui função geradora de momentos $m_X(t)$ que existe para $-h < t < h, h > 0$. Então a variável aleatória $Y_n = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ tem uma distribuição limite, a qual é normal, com média zero e variância um.

Demonstração:

Como $m_X(t) = E[e^{tX}]$ existe para $-h < t < h, h > 0$, a função $M_X(t) = E[e^{t(X-m)}] = e^{-mt} m_X(t)$ existe para $-h < t < h, h > 0$.

Mostra-se inicialmente que:

$$M_X(t) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{[M''(\xi) - \sigma^2] t^2}{2}$$

onde ξ está entre zero e um. Para tanto, nota-se que

$$M'_X(t) = e^{-mt} m'_X(t) - m e^{-mt} m_X(t)$$

$$M''_X(t) = e^{-mt} m''_X(t) - 2m e^{-mt} m'_X(t) + m^2 e^{-mt} m_X(t)$$

e que

$$m_X(0) = 1 \quad ; \quad m'_X(0) = m \quad e \quad m''_X(0) = \sigma^2 + m^2$$

de forma que

$$M_X(0) = 1 \quad , \quad M'_X(0) = (0) \quad \text{e} \quad M''_X(0) = \sigma^2$$

Como pela fórmula de Taylor existe um número ξ entre 0 e t tal que

$$\begin{aligned} M_X(t) &= M_X(0) + M'_X(0) t + \frac{M''_X(\xi) t^2}{2} \\ &= 1 + \frac{M''_X(\xi) t^2}{2} \end{aligned}$$

adicionando-se e subtraindo-se $\frac{\sigma^2 t^2}{2}$ obtém-se então o que se preten
de mostrar inicialmente, ou seja, que

$$(8) \quad M_X(t) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{[M''_X(\xi) - \sigma^2] t^2}{2}$$

A seguir, considera-se $m_Y(t;n)$, onde:

$$m_Y(t;n) = E \left[e^{t Y_n} \right] = E \left[e^{\left[t (\bar{X} - m) / (\sigma / \sqrt{n}) \right]} \right]$$

substituindo-se $Y_n = \frac{\bar{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}}$ por $\frac{\sum X_i - nm}{\sigma \sqrt{n}}$

obtém-se:

$$m_Y(t;n) = E \left[e^{\left[t (\sum X - nm) / (\sigma \sqrt{n}) \right]} \right]$$

$$\begin{aligned}
m_Y(t;n) &= E \left\{ e^{t[(X_1 - m)/(\sigma\sqrt{n})]} e^{t[(X_2 - m)/(\sigma\sqrt{n})]} \dots e^{t[(X_n - m)/(\sigma\sqrt{n})]} \right\} \\
&= E \left\{ e^{[t(X_1 - m)/(\sigma\sqrt{n})]} \right\} \dots E \left\{ e^{[t(X_n - m)/(\sigma\sqrt{n})]} \right\} \\
&= \left\{ E \left[e^{t[(X - m)/(\sigma\sqrt{n})]} \right] \right\}^n
\end{aligned}$$

$$(9) \quad m_Y(t;n) = \left[M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n, \quad -h < \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} < h$$

No resultado (8), substituindo-se t por $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$, obtêm-se:

$$(10) \quad M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[M_X''(\xi) - \sigma^2] t^2}{2n\sigma^2}$$

onde ξ está entre 0 e $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$, com $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$.

E, a seguir, substituindo-se o resultado (10) em (9), tem-se

$$m_Y(t;n) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[M_X''(\xi) - \sigma^2] t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n$$

Sendo $M_X''(t)$ contínua para $t = 0$, e desde que $\xi \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, pelo limite fundamental (1) do Apêndice, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [M_X''(\xi) - \sigma^2] = 0$$

de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_Y(t; n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{2n}\right)^n = e^{t^2/2}$$

para todo t real, a qual é a função geradora de momentos de uma distribuição normal padronizada.

Prova-se, pois, por esse resultado, que a variável aleatória $Y_n = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ tem distribuição normal padronizada como distribuição limite.

3.7 - Funções Características

3.7.1 - Definição

Define-se função característica de uma variável aleatória X , e nota-se por $\phi_X(t)$ a

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \sum_x e^{itx} f_X(x) = \sum_x [\cos(tx) f_X(x) + i \sin(tx) f_X(x)] \\ &= \sum_x [\cos(tx) f_X(x)] + i \sum_x [\sin(tx) f_X(x)] , \end{aligned}$$

se x é V.A. discreta, e

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(tx) f_X(x) + i \sin(tx) f_X(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) f_X(x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) f_X(x) dx \end{aligned}$$

se x é V.A. contínua, onde:

$f_X(x)$ é a densidade de probabilidade de x ,

$$e^{itx} = \cos(tx) + i \sin(tx)$$

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad (\text{operador complexo})$$

A função característica $\phi_X(t)$ pode também ser chamada "transformada de Fourier" de $f_X(x)$.

Observa-se que a função característica sempre existe, pois a integral (ou somatório) que a define sempre converge como demonstra-se facilmente para variáveis contínuas (o mesmo pode ser verificado para o caso discreto, trabalhando-se com somatórios).

Demonstração:

Sendo $f_X(x)$ densidade de probabilidade, $f_X(x) \geq 0$, para todo x real,

$$|\phi_X(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| |f_X(x)| dx$$

e como $|e^{itx}| = \cos^2(tx) + \sin^2(tx) = 1$, obtém-se que

$$|\phi_X(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

o que demonstra a convergência absoluta dessa integral.

3.7.2 - Obtenção de momentos a partir da função característica

Os momentos de uma distribuição, podem também ser obtidos a partir da correspondente função característica, como mostra-se nesse estudo, seja por desenvolvimento da série e^{itx} ou por derivação sucessiva.

3.7.2.1 - Obtenção dos momentos por desenvolvimento em série da função característica

Partindo-se da definição dada para $\phi_X(t)$, no caso contínuo (salientando-se que o mesmo pode ser visto para o caso discreto),

$$\phi_X(t) = E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx$$

e desenvolvendo-se, sob o sinal de integração, a série e^{itx} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \frac{itx}{1!} + \frac{(itx)^2}{2!} + \frac{(itx)^3}{3!} + \dots \right] f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx + \frac{it}{1} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + \frac{(it)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx + \dots \end{aligned}$$

e como, por definição de momentos,

$$\mu'_0 = 1$$

$$\mu'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$\mu'_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx$$

... ...

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx$$

... ...

nota-se que

$$\phi_X(t) = \mu'_0 + \frac{it}{1} \mu'_1 + \frac{(it)^2}{2!} \mu'_2 + \dots + \frac{(it)^r}{r!} \mu'_r + \dots$$

Com isso, mostra-se que os momentos de uma distribuição podem ser obtidos a partir do desenvolvimento em série da função característica, pois

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mu'_j (it)^j$$

e que a função característica $\phi_X(t)$ é também uma função geradora de momentos.

3.7.2.2 - Obtenção dos momentos por derivação sucessiva

Se

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx ,$$

a sua derivada primeira em relação a t é dada por:

$$\frac{d}{dt} [\phi_X(t)] = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x f_X(x) dx .$$

Multiplicando-se membro a membro essa igualdade por $-i$, obtém-se

$$-i \frac{d}{dt} [\phi_X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x f_X(x) dx ,$$

de modo que

$$-i \frac{d}{dt} [\phi_X(t)] \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = E(X) = \mu'_1$$

A derivada segunda de $\phi_X(t)$ em relação a t é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} [\phi_X(t)] = i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x^2 f_X(x) dx$$

Multiplicando-se membro a membro essa igualdade por $-i^2$, obtém-se:

$$-i^2 \frac{d^2}{dt^2} [\phi_X(t)] \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = E(X^2) = \mu'_2$$

Generalizando-se essa sequência de resultados, tem-se a expressão geral para o momento de ordem r , em relação à origem, a partir da função característica da distribuição, que é

$$\mu'_r = E[X^r] = (-1)^r i^r \left. \frac{d^r}{dt^r} [\phi_X(t)] \right|_{t=0}$$

É necessário observar-se que, embora o desenvolvimento tenha sido feito para distribuições contínuas, ele se aplica igualmente à distribuições discretas.

3.7.2.3 - Cálculo de momentos através da função característica: distribuição gama

Ilustrando o cálculo de momentos a partir da função característica, seja por desenvolvimento da série e^{itx} , ou por derivação sucessiva de $\phi_X(t)$, apresenta-se a distribuição gama.

Inicialmente, calcula-se a função característica correspondente a uma V.A. com distribuição gama com função de densidade de probabilidade

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad I_{[0, \infty)}(x) \\ r > 0 \quad ; \quad \lambda > 0 \end{array} \right.$$

como a seguir:

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{itx} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x(\lambda-it)} dx\end{aligned}$$

Substituindo-se na igualdade acima $x(\lambda-it) = w$, tem-se que

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{w^{r-1}}{(\lambda-it)^{r-1}} e^{-w} \frac{dw}{(\lambda-it)} \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r) (\lambda-it)^r} \int_0^\infty e^{-w} w^{r-1} dw\end{aligned}$$

e, como

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-w} w^{r-1} dw \quad ,$$

obtêm-se, finalmente, a função característica

$$\phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^r = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r} .$$

A seguir, desenvolve-se essa função obtida, $\phi_X(t)$, pelo binômio de Newton.

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r} = 1 + \frac{r}{\lambda} it + \frac{r(r+1)}{\lambda^2} \frac{(it)^2}{2!} + \\ &\quad + \frac{r(r+1)(r+2)}{\lambda^3} \frac{(it)^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

e lembrando que

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mu'_j (it)^j$$

tem-se os momentos desejados, ou seja,

$$\mu'_0 = 1$$

$$\mu'_1 = \frac{r}{\lambda}$$

$$\mu'_2 = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

$$\mu'_3 = \frac{r(r+1)(r+2)}{\lambda^3}$$

... ..

$$\mu'_n = \frac{r(r+1)(r+2) \dots (r+n-1)}{\lambda^n}$$

... ..

Lógicamente, a partir desses resultados, podem ser obtidos os momentos em relação à média, através da utilização da relação geral entre os momentos.

Alternativamente, os momentos de uma distribuição gama podem ser obtidos por derivação sucessiva, pois

$$\mu'_n = E(X^n) = (-1)^n i^n \left. \frac{d^n}{dt^n} [\phi_X(t)] \right|_{t=0}$$

tal que

$$\mu_1' = (-1) i \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r} \right] \Big|_{t=0} = \frac{r}{\lambda}$$

$$\mu_2' = (-1)^2 i^2 \frac{d^2}{dt^2} \left[\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r} \right] \Big|_{t=0} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

e assim por diante

3.7.3 - Algumas propriedades das funções características

3.7.3.1 - $\phi_X(0) = 1$

pois,

$$\phi_X(0) = E[e^0] = E(1) = 1$$

3.7.3.2 - $|\phi_X(t)| = 1$

pois,

$$|\phi_X(t)| = |E(e^{itx})| \leq E|e^{itx}| = E(1) = 1$$

3.7.3.3 - $\phi_X(t)$ é uniformemente contínua

pois,

$$\begin{aligned} |\phi_X(t+h) - \phi_X(t)| &= |E[e^{i(t+h)x} - e^{itx}]| \\ &= |E[e^{itx} (e^{ihx} - 1)]| \leq E|e^{itx} (e^{ihx} - 1)| \\ &= E|e^{ihx} - 1| \end{aligned}$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\phi_X(t+h) - \phi_X(t)| \leq \lim_{h \rightarrow 0} E |e^{ihx} - 1| = E \left[\lim_{h \rightarrow 0} |e^{ihx} - 1| \right] = 0$$

$$3.7.3.4 - \phi_{X+d}(t) = e^{itd} \phi_X(t) , d \text{ constante}$$

puis,

$$\begin{aligned} \phi_{X+d}(t) &= E[e^{it(x+d)}] = E[e^{itx} e^{itd}] = e^{itd} E[e^{itx}] \\ &= e^{itd} \phi_X(t) \end{aligned}$$

$$3.7.3.5 - \phi_{cX}(t) = \phi_X(ct) , c \text{ constante}$$

puis,

$$\phi_{cX}(t) = E[e^{it(cx)}] = E[e^{i(ct)x}] = \phi_X(ct)$$

$$3.7.3.6 - \phi_{cX+d}(t) = e^{itd} \phi_X(ct)$$

puis,

$$\phi_{cX+d}(t) = E[e^{(cx+d)it}] = E[e^{(cx)it}] E[e^{dit}]$$

3.7.4 - Alguns teoremas básicos das funções características

3.7.4.1 - Teorema da inversão (fórmula de inversão)

3.7.4.1.1 - Caso contínuo

Uma razão importante para o estudo da função característica

$$\phi_X(t) = E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx$$

é que ela representa a transformada de Fourier da função de densidade de $f_X(x)$. Pela teoria das transformadas de Fourier pode-se determinar a função de densidade a partir de sua função característica. De fato,

$$f_X(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \phi_X(t) dt$$

e, em particular, se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_X(t)| dt < \infty ,$$

então,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt ,$$

se $f_X(x)$ é contínua (ROUSSAS, 1973).

Demonstração:

. Seja $\phi_X(t)$ a função característica da função de densidade $f_X(x)$, cuja função de distribuição é $F(x)$. Então,

$$(11) \quad F(a+h) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1 - e^{-ith}}{it} e^{-ita} \phi_X(t) dt$$

sob a condição de que a e $a+h$ (com $h > 0$) sejam pontos de continuidade de $F(x)$.

. Seja $\lambda(h,T) = \frac{1}{\pi} \int_0^{hT} \frac{\text{sen } hy}{y} dy$, e, substituindo-se $x = hy$, obtém-se

$$\lambda(hT) = \frac{1}{\pi} \int_0^{hT} \frac{\text{sen } x}{x} dx$$

que, de acordo com o lema 1 (Vide Apêndice) é limitada para todo h e todo T e tal que

$$\lambda(-hT) = -\lambda(hT)$$

e,

$$(12) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(hT) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } h > 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \\ -1/2 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

. Introduzindo-se a integral

$$J_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-it(a+h)}}{it} \phi_X(t) dt$$

e nela substituindo-se $\phi_X(t)$ por $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx$, obtêm-se

$$J_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-T}^T \frac{e^{it(a-x)} - e^{it(a+h-x)}}{it} dt \right] f_X(x) dx$$

e substituindo os exponenciais pelas respectivas funções trigonométricas,

$$(13) \quad J_T = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^T \frac{\text{sen } t(x-a) - \text{sen } t(x-a-h)}{t} dt \right] f_X(x) dx$$

de forma que se pode escrever que

$$g(x, T) = \lambda(x-a; T) - \lambda(x-a-h; T)$$

e, a partir da limitação de $\lambda(x, T)$ e de (12), observa-se que $g(x, T)$ é também limitada para todo x e todo T , de forma que

$$(14) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} g(x, T) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 1/2 & \text{se } x = a \\ 1 & \text{se } a < x < a+h \\ 1/2 & \text{se } x = a+h \\ 0 & \text{se } x > a+h \end{cases}$$

Além disso, (13) pode ser escrita como:

$$(15) \quad J_T = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, T) f_X(x) dx$$

. Seja ε um número positivo arbitrário. Como se admite que $\underline{a}$ e $a+h$ são pontos de continuidade de $F(x)$, e se demonstra que $g(x,T)$ é limitada, é possível selecionar um $\delta > 0$ tão pequeno que são válidas simultaneamente as três inequações

$$(I_1) \quad \left| \int_{a-\delta}^{a+\delta} g(x,T) f_X(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

$$(I_2) \quad \left| \int_{a+h-\delta}^{a+h+\delta} g(x,T) f_X(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

$$(I_3) \quad \left| \int_{a+\delta}^{a+h-\delta} f_X(x) dx - \int_a^{a+h} f_X(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

Além disso, a partir de (14), pode-se escolher T tão grande que as inequações

$$(I_4) \quad \left| \int_{a+\delta}^{a+h-\delta} g(x,T) f_X(x) dx - \int_{a+\delta}^{a+h-\delta} f_X(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

$$(I_5) \quad \left| \int_{-\infty}^{a-\delta} g(x,T) f_X(x) dx \right| + \left| \int_{a+h+\delta}^{\infty} g(x,T) f_X(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

são ambas satisfeitas.

. Decompõe-se, dessa forma, o intervalo de integração da integral (15) dentro de 5 sub-intervalos $(-\infty, a-\delta)$; $(a-\delta, a+\delta)$; $(a+\delta, a+h-\delta)$; $(a+h-\delta, a+h+\delta)$ e $(a+h+\delta, \infty)$ e obtêm-se, usando (I_1) ; (I_2) e (I_5)

$$(I_6) \quad \left| J_T - \int_{a+\delta}^{a+h-\delta} g(x,T) f_X(x) dx \right| \leq 3\varepsilon$$

e, a partir de (I_6) , (I_4) e (I_3) , e de T escolhido suficientemente grande, que

$$(16) \quad \left| J_T - \int_a^{a+h} f_X(x) dx \right| \leq 5\varepsilon$$

E, como (16) é equivalente a (11), demonstra-se o teorema da inversão.

. Admitindo-se que $F(x)$ é função de distribuição associada à densidade $f_X(x)$, tem-se que

$$f_X(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) \quad .$$

E, associando-se esse resultado com o resultado (11) tomando-se $a = x$, desde que x seja um ponto qualquer de continuidade de $F(x)$, pode-se escrever finalmente que:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \phi_X(t) dt \end{aligned}$$

3.7.4.1.2 - Caso discreto

De forma análoga, pode-se mostrar, no caso discreto, que a função de probabilidades $f_X(x)$ pode ser obtida de

$$\phi_X(t) = \sum_{x=0}^n e^{itx} f_X(x)$$

mediante o emprego das séries de Fourier (que constituem, para o caso discreto, o análogo da integral de Fourier).

De fato, se x é variável aleatória discreta, tem-se que

$$f_X(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \phi_X(t) dt$$

e, em particular, se x tem distribuição 'lattice' (Vide Apêndice), então,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} \phi_X(t) dt .$$

3.7.4.1.3 - Aplicações do teorema da inversão

A aplicação fundamental do teorema da inversão, é que ele permite que se obtenha a função de densidade de probabilidade de uma distribuição, a partir da correspondente função característica, seja a distribuição de variável contínua, como em (3.7.4.1.1), ou de variável discreta (3.7.4.1.2). Apresenta-se, pois, exemplos dessa inversão, para o caso discreto ilustrado pela distribuição binomial, e para o caso contínuo, pela distribuição normal padronizada.

3.7.4.1.3.1 - Caso discreto (distribuição binomial)

Seja uma V.A. $\underline{x}$ com distribuição binomial e função característica

$$\phi_X(t) = (q + pe^{it})^N \quad (\text{veja-se 3.7.6.1.2})$$

Aplica-se o teorema da inversão a essa função característica de V.A. discreta, e obtêm-se a correspondente densidade

$$f_X(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}$$

como se segue:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \phi_X(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (pe^{it} + q)^N e^{-itx} dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\sum_{r=0}^N \binom{N}{r} (pe^{it})^r q^{N-r} e^{-itx} \right] dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \sum_{r=0}^N \binom{N}{r} p^r q^{N-r} \int_{-T}^T e^{i(r-x)t} dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq x}}^N \binom{N}{r} p^r q^{N-r} \frac{1}{i(r-x)} \int_{-T}^T e^{i(r-x)t} i(r-x) dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2T} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \int_{-T}^T dt \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\sum_{\substack{r=0 \\ r \neq x}}^N \binom{N}{r} p^r q^{N-r} \frac{e^{i(r-x)T} - e^{-i(r-x)T}}{2Ti(r-x)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2T} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq x}}^N \binom{N}{r} p^r q^{N-r} \frac{\sin(r-x)T}{(r-x)T} + \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \right\} \\
&= \binom{N}{x} p^x q^{N-x}
\end{aligned}$$

que é a função densidade de uma distribuição binomial.

3.7.4.1.3.2 - Caso contínuo (distribuição normal padronizada)

Seja uma V.A. x com distribuição normal padrão,
 $x \cap N(0,1)$ e função característica,

$$\phi_X(t) = e^{-t^2/2} \quad (\text{veja-se 3.7.6.2.5})$$

Aplica-se o teorema da inversão a essa função característica de V.A. contínua e obtêm-se a correspondente densidade

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

como se segue.

Sendo

$$|\phi_X(t)| = |e^{-t^2/2}| = e^{-t^2/2},$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_X(t)| dt < \infty$$

de acordo com 3.1.1 tem-se que

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(t^2+2itx)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2[t^2+2t(ix)+(ix)^2]} e^{1/2(ix)^2} dt \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(t+ix)^2} dt \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du \end{aligned}$$

$$f_X(x) = \frac{e^{(-1/2)x^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

que é a função densidade de probabilidade de uma distribuição normal padronizada.

3.7.4.2 - Teorema da unicidade

Existe uma única função densidade de probabilidade associada a uma função característica, e vice-versa (ROUSSAS, 1973), ou seja, duas funções de distribuição $F_1(X)$ e $F_2(X)$ são idênticas, se e somente se, suas funções características $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são idênticas.

Não se apresenta a prova dessa teorema, pois o mesmo é decorrência imediata do teorema da inversão visto em (3.7.4.1).

3.7.5 - Funções características para funções de várias variáveis aleatórias

Apresenta-se, de forma condensada, a definição e algumas propriedades das funções características de funções de várias variáveis, como generalização do que se apresenta neste trabalho para funções de uma variável independente.

3.7.5.1 - Definição

Define-se função característica da V.A. conjunta $X_1, X_2, \dots, X_K$, ou do vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_K)$ e nota-se por $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T})$ ou $\phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K)$ a

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}) = E \left[e^{i \mathbf{T}' \mathbf{X}} \right]$$

com $\mathbf{T} = (t_1 \ t_2 \ \dots \ t_K)$, ou

$$\phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = E \left[e^{i \sum_{j=1}^K t_j X_j} \right] = E \left[e^{it_1 X_1 + it_2 X_2 + \dots + it_K X_K} \right]$$

$j=1, 2, \dots, K$

A função característica conjunta $\phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K)$ satisfaz propriedades e teoremas análogos aos apresentados para $\phi_{\mathbf{X}}(t)$ como os que se seguem.

3.7.5.2 - Propriedades

$$(3.7.5.2.1) \quad \phi_{X_1, \dots, X_K}(0, \dots, 0) = 1$$

$$(3.7.5.2.2) \quad |\phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K)| \leq 1$$

$$(3.7.5.2.3) \quad \phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \quad \text{é uniformemente contínua}$$

$$(3.7.5.2.4) \quad \phi_{\sum_j (X_j + d_j)}(t_1, \dots, t_K) = e^{i \sum_j t_j d_j} \phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K)$$

$j=1, 2, \dots, k \quad ; \quad d \text{ constante}$

$$(3.7.5.2.5) \quad \phi_{\sum_j c_j X_j}(t_1, \dots, t_K) = \phi_{X_1, \dots, X_K}(c_1 t_1, \dots, c_K t_K)$$

$$j=1, 2, \dots, k \quad ; \quad c \text{ constante}$$

$$(3.7.5.2.6) \quad \phi_{\sum_j (c_j X_j + d_j)}(t_1, \dots, t_K) = e^{i \sum_j t_j d_j} \phi_{X_1, \dots, X_K}(c_1 t_1, \dots, c_K t_K)$$

$$j=1, 2, \dots, k \quad ; \quad c \text{ e } d \text{ constantes}$$

$$(3.7.5.2.7) \quad i^{\left(\sum_{j=1}^k n_j\right)} E[X_1^{n_1} \dots X_K^{n_K}] = \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_K}}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_K^{n_K}} \phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \Big|_{t_1 = \dots = t_K = 0}$$

$$(3.7.5.2.8) \quad i^{(n)} E(X_j^n) = \frac{\partial^n}{\partial t_j^n} \phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) \Big|_{t_1 = \dots = t_K = 0}$$

3.7.5.3 - Teoremas

3.7.5.3.1 - Teorema da inversão

Se $(X_1, \dots, X_K)$ é uma V.A. conjunta discreta,

$$f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T}\right)^k \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T e^{-it_1 X_1 - \dots - it_K X_K} \times \\ \times \phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) dt_1 \dots dt_K$$

e, se $(X_1, \dots, X_K)$ é uma V.A. conjunta contínua,

$$f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^k \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \prod_{j=1}^k \left(\frac{1 - e^{-it_j h}}{it_j h} \right) \times$$

$$e^{-it_1 X_1 - \dots - it_K X_K} \times$$

$$\times \phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) dt_1 \dots dt_K$$

e, se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K)| dt_1 \dots dt_K < \infty$$

então,

$$f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, \dots, x_K) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it_1 X_1 - \dots - it_K X_K} \times$$

$$\times \phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) dt_1 \dots dt_K$$

(ROUSSAS, 1973).

3.7.5.3.2 - Teorema da unicidade

Há uma correspondência biunívoca entre a função característica e a função densidade de probabilidade de uma V.A. conjunta $(X_1, \dots, X_K)$ (ROUSSAS, 1973).

3.7.6 - Cálculo das funções características de algumas distribuições especiais de probabilidade

Também dentro do propósito inicial deste trabalho, calculam-se as funções características das distribuições mais usuais de probabilidade, cujas funções de densidade e correspondentes funções geradoras de momentos se apresentam em (3.4). Não se obtêm os momentos, como em (3.4) a partir das funções características, e lembra-se apenas que o momento de ordem r , em relação à origem, pode ser obtido a partir da função característica, através de

$$\mu'_r = E[X^r] = (-1)^r i^r \left. \frac{d^r}{dt^r} [\phi_X(t)] \right|_{t=0}$$

e os momentos em relação à média, pela relação geral entre os momentos, dada por

$$\mu_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu'_{r-j} (-\mu'_1)^j$$

3.7.6.1 - Distribuições discretas

3.7.6.1.1 - Distribuição de Bernoulli

Se uma V.A. discreta x tem distribuição de Bernoulli, com densidade

$$f_X(x) = f_X(x,p) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & \text{para } x=0 \text{ ou } x=1 \\ 0 & \text{, para outros valores} \end{cases}$$

$$\text{com } 0 \leq p \leq 1 \quad \text{e} \quad q = 1-p$$

a sua função característica $\phi_X(t)$ é dada por:

$$\phi_X(t) = (q + pe^{it})$$

pois,

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \sum [e^{itx} p^x q^{1-x}] \\ &= \sum_{x=0}^1 e^{itx} p^x q^{1-x} = \sum_{x=0}^1 (pe^{it})^x q^{1-x} \\ &= (q + pe^{it}) \end{aligned}$$

3.7.6.1.2 - Distribuição binomial

Se uma V.A. discreta x tem distribuição binomial, com densidade

$$f_X(x) = f_X(x;n,p) = \begin{cases} \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, & \text{para } x=0,1,2,\dots,N \\ 0 & \text{, para outros valores} \end{cases}$$

$$\text{com } 0 \leq p \leq 1, \quad q = 1-p$$

a sua função característica $\phi_X(t)$ é dada por

$$\phi_X(t) = (q + pe^{it})^N,$$

pois,

$$\begin{aligned}
 \phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \sum \left[e^{itx} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \right] \\
 &= \sum_{x=0}^N e^{itx} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \\
 &= \sum_{x=0}^N \binom{N}{x} (pe^{it})^x q^{N-x} \\
 &= (q + pe^{it})^N
 \end{aligned}$$

3.7.6.1.3 - Distribuição de Poisson

Se uma V.A. discreta x tem distribuição de Poisson, com densidade

$$f_X(x) = f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & , \text{ para } x=0,1,2,\dots \\ 0 & , \text{ para outros valores} \end{cases}$$

com $\lambda > 0$,

a sua função característica $\phi_X(t)$ é dada por

$$\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

pois,

$$\phi_X(t) = E[e^{itx}] = \sum \left[e^{itx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \phi_X(t) &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{itx} \lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} \\
 &= e^{\lambda(e^{it}-1)}
 \end{aligned}$$

3.7.6.1.4 - Distribuição geométrica (ou Pascal)

Se uma variável aleatória discreta x apresenta distribuição geométrica, com densidade

$$f_X(x) = f_X(x;p) = \begin{cases} p(1-p)^x & , \text{ para } x=0,1,2,\dots \\ 0 & , \text{ para outros valores} \end{cases}$$

$$\text{com } 0 < p \leq 1 \quad ; \quad q = 1-p \quad ,$$

a sua função característica $\phi_X(t)$ é dada por

$$\phi_X(t) = p \left[\frac{1}{1 - qe^{it}} \right] \quad ; \quad |qe^{it}| < 1$$

pois,

$$\begin{aligned}
 \phi_X(t) &= E [e^{itx}] = \sum [e^{itx} p(1-p)^x] \\
 &= p \sum_{x=0}^{\infty} [(qe^{it})^x]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= p [1 + qe^{it} + q^2 e^{2it} + q^3 e^{3it} + \dots] \\ &= p \left[\frac{1}{1 - qe^{it}} \right] \quad ; \quad |qe^{it}| < 1\end{aligned}$$

3.7.6.1.5 - Distribuição binomial negativa

Se uma V.A. discreta $\underline{x}$ tem distribuição binomial negativa, com densidade

$$f_X(x) = f_X(x; r, p) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} p^r q^x = \binom{-r}{x} p^r (-q)^x, & \text{para } x=0,1,\dots \\ 0 & , \text{ para outros valores} \end{cases}$$

$$\text{com } r=1,2,3,\dots ; 0 < p \leq 1 ; q = 1-p$$

a sua função característica $\phi_X(t)$ é dada por

$$\phi_X(t) = \left[\frac{p}{1 - qe^{it}} \right]^r, \quad |qe^{it}| < 1$$

pois,

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E [e^{itx}] = \sum [e^{itx} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x] \\ &= p^r \sum_0^{\infty} \binom{-r}{x} (-qe^{it})^x \\ &= p^r (1 - qe^{it})^{-r} \\ &= \left[\frac{p}{1 - qe^{it}} \right]^r, \quad |qe^{it}| < 1\end{aligned}$$

3.7.6.1.6 - Distribuição multinomial

Se uma V.A. discreta conjunta $(X_1, \dots, X_K)$ apresenta distribuição multinomial, com densidade conjunta

$$f_{X_1, \dots, X_K}(x_1, x_2, \dots, x_K) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_K!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_K^{x_K}$$

$$\text{com } \sum p_j = 1 \quad ; \quad \sum x_j = n \quad ; \quad j=1, 2, \dots, k$$

a sua função característica $\phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K)$ é dada por

$$\phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) = (p_1 e^{it_1} + \dots + p_K e^{it_K})^n$$

pois,

$$\begin{aligned} \phi_{X_1, \dots, X_K}(t_1, \dots, t_K) &= E \left[e^{i \sum_j t_j X_j} \right] \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_K} e^{it_1 x_1 + \dots + it_K x_K} \frac{n!}{x_1! \dots x_K!} \times \\ &\quad \times p_1^{x_1} \dots p_K^{x_K} \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_K} \frac{n!}{x_1! \dots x_K!} (p_1 e^{it_1})^{x_1} \dots (p_K e^{it_K})^{x_K} \\ &= (p_1 e^{it_1} + \dots + p_K e^{it_K})^n \end{aligned}$$

3.7.6.2 - Distribuições contínuas

3.7.6.2.1 - Distribuição retangular (ou uniforme)

Se uma V.A. contínua X tem distribuição retangular, com densidade

$$f_X(x) = f_X(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, \quad I_{[a, b]}(x)$$

$$\text{com } -\infty < a < b < \infty,$$

a sua função característica $\phi_X(t)$ é dada por

$$\phi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

pois,

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx \\ &= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} \end{aligned}$$

3.7.6.2.2 - Distribuição exponencial (negativa)

Se uma V.A. contínua X tem distribuição exponencial (negativa), com densidade

$$f_X(x) = f_X(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad I_{[0, \infty)}(x)$$

com $\lambda > 0$, a sua função característica $\phi_X(t)$ é dada por

$$\phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} \quad , \quad it < \lambda$$

pois:

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \int_0^{\infty} itx \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{x(it-\lambda)} dx \end{aligned}$$

onde, substituindo-se $u = -x(it-\lambda)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - it} \int_0^{\infty} e^{-u} du \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - it} \quad , \end{aligned}$$

pois

$$\int_0^{\infty} e^{-u} du = \Gamma(1) = 1$$

3.7.6.2.3 - Distribuição gama

Se uma V.A. contínua X apresenta distribuição gama,
com densidade

$$f_X(x) = f_X(x; r, \lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad I_{[0, \infty)}(x)$$

com $r > 0$, $\lambda > 0$, a sua função característica $\phi_X(t)$ é dada por

$$\phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^r, \quad it < \lambda$$

pois,

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \int_0^\infty e^{itx} \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-x(\lambda - it)} x^{r-1} dx \\ &= \frac{\lambda^r}{(\lambda - it)^r} \frac{1}{\Gamma(r)} (\lambda - it) \int_0^\infty e^{-x(\lambda - it)} [x(\lambda - it)]^{r-1} dx \end{aligned}$$

onde, substituindo-se $u = x(\lambda - it)$, obtêm-se

$$\phi_X(t) = \frac{\lambda^r}{(\lambda - it)^r} \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{1}{r} r \int_0^\infty e^{-u} u^{r-1} du$$

e, como

$$r \int_0^\infty e^{-u} u^{r-1} du = \Gamma(r+1) = r \Gamma(r)$$

tem-se que

$$\phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^r, \quad it < \lambda$$

3.7.6.2.4 - Distribuição beta

Se uma V.A. contínua X apresenta distribuição beta, com densidade

$$f_X(x) = f_X(x;p,q) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad I_{(0,1)}(x)$$

com $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$; $p > 0$ e $q > 0$, a sua função característica é dada por:

$$\phi_X(t) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+j)}{\Gamma(p+q+j) \Gamma(j+1)} (it)^j \quad (\text{LUKACS, 1970})$$

3.7.6.2.5 - Distribuição normal

Se uma V.A. contínua X apresenta distribuição normal, com densidade

$$f_X(x) = f_X(x;m,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

com $-\infty < m < \infty$, $\sigma > 0$, a sua função característica é dada por

$$\phi_X(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

e, em particular, se

$$x \cap N(0, 1) \quad , \quad \phi_X(t) = e^{-t^2/2}$$

e, se

$$x \cap N(0, \sigma^2) \quad , \quad \phi_X(t) = e^{(-1/2)t^2\sigma^2}$$

pois,

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx\end{aligned}$$

onde, substituindo-se $u = \frac{x-m}{\sigma}$, obtêm-se

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-1/2)u^2 + it\sigma u + itm} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itm} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2[(u-it\sigma)^2 + t^2\sigma^2]} du \\ &= \frac{e^{itm} - \frac{t^2\sigma^2}{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(u-it\sigma)^2} du\end{aligned}$$

e efetuando-se a substituição $z = u - it\sigma$ obtêm-se finalmente que

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \frac{e^{itm} - \frac{t^2\sigma^2}{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \\ &= e^{itm - [(t^2\sigma^2)/2]}\end{aligned}$$

pois

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz = 1$$

3.7.6.2.6 - Distribuição de qui-quadrado

Se uma V.A. contínua v_f tem distribuição de qui-quadrado, com f graus de liberdade, com densidade

$$f_{v_f}(v_f) = \frac{1}{2^{f/2} \Gamma(f/2)} e^{-v_f/2} v_f^{(f-2)/2}, \quad 0 \leq v_f < \infty$$

a sua função característica é dada por

$$\phi_{v_f}(t) = (1-2it)^{-f/2},$$

pois,

$$\begin{aligned} \phi_{v_f}(t) &= E[e^{itv_f}] = E[e^{it(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_f^2)}] \\ &= E[e^{itu_1^2}] E[e^{itu_2^2}] \dots E[e^{itu_f^2}] \end{aligned}$$

e, como $u_i \sim N(0, 1)$,

$$\begin{aligned} E[e^{itu_i^2}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{(u_i^2/2)(1-2it)} du_i \\ &= (1-2it)^{-1/2} \end{aligned}$$

tem-se que

$$\phi_{v_f}(t) = (1-2it)^{-f/2}$$

3.7.7 - O caso da distribuição de Cauchy

Uma razão importante para se estudar a função característica é que ela sempre existe, como se demonstra no último parágrafo de (3.7.1). A função geradora, porém, pode não existir, se $E[e^{tx}]$ não existe. Logo, há distribuições de probabilidade que não possuem funções geradoras de momentos, possuindo, no entanto, função característica, como é o caso da distribuição de Cauchy.

3.7.7.1 - Distribuição de Cauchy

Uma variável aleatória X distribui-se segundo Cauchy, ou tem distribuição de Cauchy, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad a > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Esta função de densidade é simétrica em relação a $x=0$, de forma que, mesmo não possuindo média, pode-se considerá-la como zero. A variância e os momentos de ordem mais alta não existem, como também não existe a função geradora de momentos. Entretanto, a função característica existe, e é dada por

$$\phi_X(t) = e^{-a|t|}$$

3.7.7.2 - Verificação de que a função geradora de momentos para a distribuição de Cauchy não existe

Tem-se, por definição, que

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[e^{tx}] = E\left[e^{tx} \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\right] \\ &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx}}{x^2+a^2} dx \end{aligned}$$

que não existe para t real. Com efeito, basta notar, por exemplo, que se $x \geq 0$, $t > 0$,

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots > \frac{t^2 x^2}{2!}$$

de modo que

$$\frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx}}{x^2+a^2} dx \geq \frac{a}{\pi} \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2+a^2} dx$$

onde $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2+a^2} dx$ diverge.

Demonstra-se, então, que a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2+a^2} dx$$

diverge.

Em $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2+a^2} dx$, substituindo-se

$$x^2+a^2 = a^2 \sec^2 \theta$$

$$x = a \operatorname{tg} \theta$$

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} a \sec^2 \theta d\theta &= a \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^2 \theta d\theta \\ &= a \int_0^{\pi/2} (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\ &= a [\operatorname{tg} \theta - \theta]_0^{\pi/2} \\ &= \infty \end{aligned}$$

de forma que $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2+a^2} dx$ diverge.

Além disso, verifica-se que também para $t < 0$, $m_X(t)$ não existe. Dessa forma, apenas para $t=0$, $m_X(t)$ existe, ou seja,

$$m_X(0) = E[e^0] = 1 \quad .$$

3.7.7.3 - Obtenção da função característica de uma distribuição de Cauchy

Tem-se, por definição, que:

$$\begin{aligned}
 \phi_X(t) &= E[e^{itx}] = E\left[e^{itx} \frac{a}{\pi} \frac{1}{(x^2+a^2)}\right] \\
 &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+a^2} dx \\
 &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx) + i \operatorname{sen}(tx)}{a^2+x^2} dx \\
 &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{a^2+x^2} dx + i \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{a^2+x^2} dx \\
 &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{a^2+x^2} dx \\
 &= \frac{2a}{\pi} \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|} \\
 &= e^{-a|t|}
 \end{aligned}$$

pois,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{a^2+x^2} dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|}$$

como se demonstra a seguir.

Considere-se inicialmente que

$$\oint_{\mathbb{C}} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2} dz, \quad ,$$

onde $\mathbb{C}$ é o caminho do lema 2 (Apêndice).

O integrando possui polos simples em $z = \pm ai$, dos quais somente $z = ai$ é interior a $\mathbb{C}$.

O resíduo em $z = ai$ é

$$\lim_{z \rightarrow ai} \left[(z-ai) \frac{e^{itz}}{(z-ai)(z+ai)} \right] = \frac{e^{-at}}{2ai}$$

Então,

$$\oint_{\mathbb{C}} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-at}}{2ai} \right) = \frac{\pi}{a} e^{-at}$$

pelo teorema dos resíduos (Apêndice).

Daí,

$$\int_{-R}^R \frac{e^{itx}}{x^2+a^2} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2} dz = \frac{\pi}{a} e^{-at}$$

ou

$$\int_{-R}^R \left[\frac{\cos(tx) + i \operatorname{sen}(tx)}{x^2+a^2} \right] dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2} dz = \frac{\pi}{a} e^{-at}$$

$$\int_{-R}^R \frac{\cos(tx)}{a^2+x^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen}(tx)}{a^2+x^2} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2} dz = \frac{\pi}{a} e^{-at}$$

$$2 \int_0^R \frac{\cos(tx)}{a^2+x^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen}(tx)}{a^2+x^2} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2} dz = \frac{\pi}{a} e^{-at}$$

e, considerando-se o lema 2 (Apêndice), como $F(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ é limitada no círculo $z = Re^{i\theta}$, tem-se que

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2} dz = 0 ,$$

de forma que

$$2 \int_0^R \frac{\cos(tx)}{a^2+x^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen}(tx)}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-at}$$

e, aplicando-se o limite para R tendendo a infinito ($R \rightarrow \infty$), tem-se que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-at}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{a^2+x^2} dx = 0$$

e, como a função cosseno é par, pode-se trabalhar com $|t|$, de forma que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|}$$

Como $\phi_X(t) = e^{-a|t|}$,

$$\frac{d}{dt} \phi_X(t) = \frac{d}{dt} [e^{-a|t|}]$$

que não existe para $t=0$. Dessa forma, não existe μ'_1 e qualquer outro μ'_r como se afirma em (3.7.7.1).

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Embora esta dissertação seja essencialmente teórica, por se tratar de uma revisão bibliográfica, alguns resultados importantes devem ser salientados, bem como as generalizações teóricas comprovadas.

4.1 - Definição de Momentos

Quanto à definição geral de momentos, salienta-se a fórmula que se constitui na relação geral entre momentos centrados e momentos em relação à origem, pois a mesma é um instrumento de grande utilidade para obtenção de momentos de ordem elevada a partir do conhecimento dos momentos de ordem mais baixa, embora o trabalho algébrico possa ser considerado exaustivo. Porém, como em termos prá-

ticos, para caracterização de uma distribuição, dificilmente se precisa obter momentos de ordem superior à quarta, basta que se saiba que as igualdades:

$$\begin{aligned}\mu_2' &= \mu_2 + \mu_1'^2 \\ \mu_3' &= \mu_3 + 3\mu_2\mu_1' + \mu_1'^3 \\ \mu_4' &= \mu_4 + 4\mu_3\mu_1' + 6\mu_2\mu_1'^2 + \mu_1'^4\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \mu_2' - \mu_1'^2 \\ \mu_3 &= \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3 \\ \mu_4 &= \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1'^4\end{aligned}$$

são obtidas pelo desenvolvimento algébrico de

$$\mu_r' = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu_{r-j} \mu_1'^j = (\mu + \mu_1')^r$$

4.2 - Funções Geradoras de Momentos

Destacam-se, neste trabalho, duas principais funções geradoras de momentos, a função geradora de momentos,

$$m_X(t) = E[e^{tx}] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mu_j' t^j, \quad ,$$

e a função característica,

$$\phi_X(t) = E[e^{itx}] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mu_j' (it)^j .$$

Além disso, faz-se referência à função geradora de momentos fatorial, $\eta_X(t) = E(t^X)$, de utilidade praticamente restrita ao caso discreto, como ao Binomial e Poisson para momentos até 2.^a ordem.

Uma vantagem da função característica sobre a função geradora de momentos é o fato de que ela sempre existe, ao passo que a f.g.m. pode não existir, como ocorre no caso da distribuição de Cauchy. Observa-se, entretanto, que se $m_X(t)$ existe, $\phi_X(t)$ é correspondente a $m_X(it)$, de forma que a obtenção dos momentos é mais simples algebricamente se feita através de $m_X(t)$, por não ser necessário trabalhar no campo complexo.

Apresentam-se, condensadamente, nas Tabelas 1 e 2, as funções geradoras de momentos obtidas no decorrer deste trabalho, onde evidencia-se que, se $m_X(t)$ existe, $\phi_X(t) = m_X(it)$, e também os principais momentos que caracterizam uma distribuição (média e variância).

4.3 - Generalização da Fórmula Recorrente (NOGUEIRA, 1965)

Aplicando-se a fórmula recorrente (NOGUEIRA, 1965) às distribuições Bernoulli, Geométrica, Binomial Negativa, Exponencial (negativa) e Gama, obteve-se, para a mesma, uma generalização do que já estava assentado para as distribuições Binomial, Poisson e Normal. Resume-se, na Tabela 3, o resultado dessa generalização.

Tabela 1 - Distribuições discretas. Funções geradoras e principais momentos.

Nome da distribuição	Função de densidade $f_X(x)$	Condições dos parâmetros	Funções geradoras de momentos $m_X(t)$	Funções características $\phi_X(t)$	Funções geradoras de momentos $\eta_X(t)$	Média $m=E(X)=\mu_1$	Variância $\sigma^2=Var(X)=\mu_2$
Uniforme Discreta	$\frac{1}{N}$, se $x=1,2,\dots,N$ 0, p/outros valores	-	$\sum_{j=1}^N e^{jt} \frac{1}{N}$	não obtida	não obtida	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}$, $p/x=0$ ou $x=1$ 0, p/outros valores	$0 < p < 1$ $q=1-p$	$q + pe^t$	$q + pe^{it}$	não obtida	p	pq
Binomial	$\binom{N}{x} p^x q^{N-x}$, $p/x=0,1,\dots,N$ 0, p/outros valores	$0 < p < 1$ $q=1-p$	$(q + pe^t)^N$	$(p + pe^{it})^N$	$(q + pt)^N$	Np	Npq
Poisson	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$, $p/x=0,1,2,\dots$ 0, p/outros valores	$\lambda > 0$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$e^{\lambda(t-1)}$	λ	λ
Geométrica (p, q, d, L)	$p(1-p)^x$, $p/x=0,1,2,\dots$ 0, p/outros valores	$0 < p < 1$ $q=1-p$	$\frac{p}{1-qe^t}$	$\left[\frac{p}{1-qe^{it}} \right]^r$	não obtida	q/p	q/p^2
Binomial Negativa	$\binom{r+x-1}{x} p^r q^x$ ou $\binom{-r}{x} p^r (-q)^x$, $p/x=0,1,2,\dots$ 0, p/outros valores	$r=1,2,3,\dots$ $0 < p < 1$ $q=1-p$	$\left[\frac{p}{1-qe^t} \right]^r$	$\left(\frac{p}{1-qe^{it}} \right)^r$	não obtida	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Multinomial	$\frac{n!}{x_1! \dots x_K!} p_1^{x_1} \dots p_K^{x_K}$, $x_j=0,1,\dots,n$, $j=1,2,\dots,K$	$\sum_{j=1}^K p_j=1$	$(p_1 e^{t_1} + \dots + p_K e^{t_K})^n$	$(p_1 e^{it_1} + \dots + p_K e^{it_K})^n$	não obtida	np_j	$np_j q_j$

Tabela 2 - Distribuições contínuas. Funções geradoras e principais momentos.

Nome da distribuição	Função de densidade $f_X(x)$	Condições dos parâmetros	Funções geradoras de momentos $\phi_X(t)$	Funções características $\phi_X(t)$	Média $m=E(X)=\mu_1'$	Variância $\sigma^2=Var(X)=\mu_2'$
Retangular ou Uniforme	$\frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$	$-\infty < a < b < \infty$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial (negativa)	$\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$\lambda > 0$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$\frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}; x \geq 0$	$r > 0, \lambda > 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^r$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$
Beta	$\frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, 0 < x < 1$	$p > 0, q > 0, p, q \text{ reais}$	$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} (1-t)^j$	$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} (it)^j$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$	$e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$	$e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$	μ	σ^2
Qui-quadrado	$\frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \Gamma(\frac{f}{2})} e^{-\frac{v}{2}} \frac{v^{\frac{f}{2}-1}}{\Gamma(\frac{f}{2})}, 0 < v < \infty$	$v = \sum_{i=1}^f u_i^2, u_i \sim N(0,1), i=1,2,\dots,f$	$(1-2t)^{-f/2}$	$(1-2it)^{-f/2}$	f	$2f$
Multinormal	$\frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{ S }} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}' S^{-1} \mathbf{x}}, -\infty < x_i < \infty, \mathbf{x}_i \in N(0, \sigma_i^2)$	$\sigma_i > 0, -1 < \rho_{ij} < 1$	$e^{i\mathbf{t}' \boldsymbol{\sigma}}$	$e^{-\frac{1}{2} \mathbf{t}' S \mathbf{t}}$	-	-
Binormal	$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right]}$	$\sigma_i > 0, -1 < \rho < 1$	$\frac{1}{2} (t_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2 \sigma_2^2)$	$-\frac{1}{2} (it_1^2 \sigma_1^2 + 2i\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + it_2^2 \sigma_2^2)$	0	$\sigma_i^2, i=1,2$
Cauchy	$\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}, -\infty < x < \infty$	$a > 0$	não tem	$e^{-a t }$	não tem	não tem

Tabela 3 - Fôrmula recorrente (NOGUEIRA, 1965) e generalizações.

Se $\frac{d}{dm} [f_X(x)] = \left[\frac{x-m}{\sigma^2} \right] f_X(x)$, então, $\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$	
Distribuição	$\mu_{n+1} = \sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$
Bernoulli	$pq \frac{d}{dm} (\mu_n) + npq \mu_{n-1}$
Binomial (NOGUEIRA, 1965)	$Npq \frac{d}{dm} (\mu_n) + n Npq \mu_{n-1}$
Poisson (NOGUEIRA, 1965)	$\lambda \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \lambda \mu_{n-1}$
Geométrica (Pascal)	$\frac{q}{p^2} \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \frac{q}{p^2} \mu_{n-1}$
Binomial Negativa	$\frac{rq}{p^2} \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \frac{rq}{p^2} \mu_{n-1}$
Exponencial (negativa)	$\frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \frac{1}{\lambda^2} \mu_{n-1}$
Gama	$\frac{r}{\lambda^2} \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \frac{r}{\lambda^2} \mu_{n-1}$
Normal (NOGUEIRA, 1965)	$\sigma^2 \frac{d}{dm} (\mu_n) + n \sigma^2 \mu_{n-1}$

4.4 - Técnica da Função Geradora de Momentos

A maior importância prática do estudo das funções geradoras de momentos do tipo $m_X(t)$ não reside, simplesmente, no fato de que elas geram momentos, mas sim na aplicação da técnica da função geradora de momentos que se apresenta em 3.6. Esta afirmação é feita em função dessa técnica permitir que:

- i) se obtenham distribuições conjuntas, desde que sejam conhecidas as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias que a definem, o que se constitui como uma ferramenta de grande utilidade em teoria estatística aplicada, embora a mesma seja limitada para $k > 1$, pelo fato de que poucas funções geradoras de momentos conjuntos são de imediato reconhecíveis. Porém, para $k = 1$, é de extrema utilidade;
- ii) seja possível identificar a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes, também de importância fundamental em estatística aplicada;
- iii) se encontrem distribuições limites, também de grande importância em estatística aplicada, o que permite a utilização da distribuição limite como uma aproximação para a exata função de distribuição. Isto é extremamente útil para o caso em que as tabelas de probabilidade se limitam a n pequeno para uma determinada variável X com distribuição de probabi

lidade conhecida, se essa variável X tem por distribuição limite de probabilidade (para n grande) uma distribuição cuja tabela independe de n , tipo normal padrão. Além disso, por permitir que se prove a forma especial do teorema do limite central, apesar da limitação imposta de que se deve admitir a existência de uma função geradora de momentos para a distribuição da qual se extrai a amostra.

Outros resultados da aplicação da técnica da função geradora de momentos, além dos que se desenvolvem nesta dissertação, podem ser pesquisados. Resume-se, na Tabela 4, o que se desenvolve neste trabalho como aplicação desta técnica.

4.5 - Momentos da Distribuição Normal

Em uma distribuição normal, o cálculo de momentos é extremamente simples, pois todos os momentos em relação à média, de ordem ímpar, são nulos, e os de ordem par são dados pela fórmula recorrente que se resume na Tabela 5. Os momentos em relação à origem são facilmente obtidos pela relação geral entre os momentos que se apresenta em 3.2.7.

Tabela 4 - Aplicações da técnica da função geradora de momentos.

APLICAÇÃO À OBTENÇÃO DA SOMA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES		
Variáveis aleatórias independentes	Distribuições de variáveis aleatórias independentes	Distribuições da soma de variáveis aleatórias independentes
$X_1, \dots, X_n$	Bernoulli	Binomial, $m = np$
$X_1, \dots, X_n$	Poisson	Poisson, $m = \sum \lambda_i$
$X_1, \dots, X_n$	Exponencial (Negativa)	Gama, $m = n/\lambda$
$X_1, \dots, X_n$	Normal Padrão	Normal, $\cap N(0, n)$
$X_1, \dots, X_n$	Normal	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Normal, } \cap N(nm, n\sigma^2) \\ \bar{x}, \cap N(m, \sigma^2/n) \end{array} \right.$
$\chi^2_{r_1}, \chi^2_{r_2}, \dots, \chi^2_{r_n}$	Qui-quadrado com r_i graus de liberdade	$\chi^2_{(\sum r_i)} \text{ g.l.}$
$X_1, \dots, X_n$	Geométrica	Binomial negativa, $m = \frac{nq}{q}$
$k_1 X_1, \dots, k_n X_n$	Normal $\cap N(m_i, \sigma_i^2)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Normal } \cap N(\sum k_i m_i, \sum k_i^2 \sigma_i^2) \\ X_1 + X_2 \cap N(m_1 + m_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\ X_1 - X_2 \cap N(m_1 - m_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \end{array} \right.$
$\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2$	Qui-quadrado com 1 grau de liberdade	$\chi^2_{(n)} \text{ g.l.}$
APLICAÇÃO À OBTENÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS		
$\left\{ \begin{array}{l} X \\ X \cap N(0, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = X^2 \\ Y \cap \chi^2_{(1)} \end{array} \right.$		
$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \cap N(0, 1) \\ X_2 \cap N(0, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = X_2 - X_1 \\ Y_1, Y_2 \cap \text{Binormal} \\ Y_1 \cap N(0, 2); Y_2 \cap N(0, 2) \end{array} \right.$		
$\left\{ \begin{array}{l} (X_1, Y_1) \cap \text{Binormal} \\ m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}, \bar{Y} \cap \text{Binormal} \\ m_1, m_2, \sigma_1^2/n, \sigma_2^2/n, \rho \end{array} \right.$		
OBTENÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES LIMITE		
Distribuição	Distribuição Limite	
$X \cap \text{Binomial}$	Poisson	
$z_n \cap \chi^2_{(n)}$	Normal Padrão	
Se: $X \cap$ distribuição de média m , variância σ^2 e		Normal Padrão
$m_X(t) = E(e^{tx})$, existe, então $Y_n = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$		

Tabela 5 - Distribuição Normal. Fórmula recorrente para momentos de ordem par.

$x \cap N(0, 1)$	$x \cap N(m, \sigma^2)$
$\mu_{2n+1} = 0$	$\mu_{2n+1} = 0$
$\mu_{2n} = (2n-1) \mu_{2n-2}$ $= \frac{(2n)!}{2^n (n)!}$	$\mu_{2n} = (2n-1) \sigma^2 \mu_{(2n-2)}$ $= \frac{(2n)!}{2^n (n)!} \sigma^{2n}$

4.6 - Teorema da Inversão

A principal razão de se apresentar um capítulo deste trabalho dedicado ao estudo das funções características não se deve ao fato de que essas funções são geradoras de momentos que sempre existem, pois as distribuições de probabilidade mais utilizadas em estatística aplicada possuem funções geradoras de momentos do tipo $m_X(t)$ como se apresenta em 3.4, e distribuições tipo Cauchy, que não possuem $m_X(t)$, mas sim $\phi_X(t)$, são raramente utilizadas. A razão fundamental, então, de se estudar a teoria das funções características é o conhecimento do teorema da inversão, porque ele permite que se determine a função de densidade de uma variável aleatória X , a partir de sua função característica, como se resume na Tabela 6.

Tabela 6 - Obtenção da função de densidade a partir da sua função característica, pelo teorema da inversão.

V.A. DISCRETA	V.A. CONTÍNUA
$f_X(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \phi_X(t) dt$ <p>e, se X tem distribuição "lattice"</p> $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} \phi_X(t) dt$	$f_X(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \phi_X(t) dt$ <p>e, se $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(t) dt < \infty$</p> $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt$

5. CONCLUSÕES

- Os momentos de uma distribuição são obtidos pelas próprias definições, ou por funções geradoras de momentos, dos tipos $m_X(t) = E(e^{tX})$ se a esperança existe, ou $\phi_X(t) = E[e^{itx}]$ que sempre existe.
- Existindo $m_X(t)$, $\phi_X(t) = m_X(it)$.
- A função $m_X(t)$ é mais simples de ser operada algebricamente que a função $\phi_X(t)$.
- A função geradora de momentos pode não existir, porém, existe para as distribuições mais usuais da Estatística.
- Os momentos de ordem elevada nas distribuições Bernoulli, Binomial, Poisson, Geométrica, Binomial Negativa, Exponencial

(negativa), Gama e Normal são imediatamente obtidos através da generalização da fórmula recorrente.

- Distribuições conjuntas, distribuições da soma de variáveis aleatórias independentes, e distribuições limites podem ser encontradas pela utilização da técnica da função geradora de momentos.
- Aplica-se uma fórmula recorrente para o cálculo dos momentos de ordem par em uma distribuição normal.
- Obtêm-se funções de densidade pela aplicação do teorema da inversão às suas funções características.

6. LITERATURA CITADA

CHURCHILL, R.V., 1975. Variáveis Complexas e Suas Aplicações. São Paulo, McGraw Hill do Brasil e Editora da USP. 276 p.

CRAMÉR, H., 1958. The Elements of Probability Theory. 4.^a edição, Nova York, John Wiley. 281 p.

CRAMÉR, H., 1974. Mathematical Methods of Statistics. 3.^a edição, Princeton, Princeton University Press. 575 p.

CRUZ, H.V., 1980. Emprego da Função Fatorial para o Cálculo de Momentos de uma Distribuição de Frequência. Revista Brasileira de Estatística, Fundação IBGE, Rio de Janeiro, 162: 267-287.

DIXON, J.W. e F.J. MASSEY Jr., 1969. Introduction to Statistical Analysis. 3.^a edição, Tóquio, International Student Edition (Mc Graw-Hill Koga Kusha). 638 p.

HOEL, P.G., 1980. Estatística Matemática. 4.^a edição, Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois. 373 p.

- HOGG, R.V. e A. CRAIG, 1970. Introduction to Mathematical Statistics. 3.^a edição, Nova York, Macmillan. 415 p.
- KENDALL, M. e A. STUART, 1977. The Advanced Theory of Statistics. Vol. 1. 4.^a edição, Nova York, Macmillan. 472 p.
- LU KACS, E., 1970. Characteristic Functions. 2.^a edição, Londres, Charles Griffin. 350 p.
- MOOD, A.M.; F.A. GRAYBILL e D.C. BOES, 1974. Introduction to the Theory of Statistics. 3.^a edição, Tóquio, International Student Edition (McGraw-Hill Koga Kusha). 564 p.
- NOGUEIRA, I.R., 1965. Fórmula Geral para Obtenção dos Momentos nas Distribuições Binomial, Poisson e Normal. Boletim Didático, ESALQ/USP, Piracicaba, nº 12.
- NOGUEIRA, I.R., 1968. Aplicação de Matrizes no Estudo da Distribuição Multinormal. Revista Ciência e Cultura. São Paulo, 20(3): 601-611.
- PIEDRABUENA, A.E., 1968. Distribuições Interferidas - Estudo Sobre uma Distribuição Generalizada. Piracicaba, ESALQ/USP. 65 p. (Dissertação de Mestrado).
- ROUSSAS, G.G., 1973. A First Course in Mathematical Statistics. Wisconsin, Addison-Wesley. 506 p.
- SPIEGEL, M.R., 1971. Cálculo Avançado. São Paulo, McGraw-Hill. 500 p.

SPIEGEL, M.R., 1971. Variáveis Complexas. São Paulo, McGraw-Hill. 468 p.

SPIEGEL, M.R., 1978. Probabilidade e Estatística. São Paulo, McGraw Hill. 518 p.

TATON, R. (Coord.), 1964. La Science Contemporaine. In: HISTOIRE GÉNÉRALE DES CIENCES, Vol. II. Paris, Presses Universitaires de France. 1080 p.

TORANZOS, F.I., 1971. Teoria Estadística y Aplicaciones. 3^a edição, Buenos Aires, Editorial Kapelusz. 448 p.

WILKS, S.S., 1962. Mathematical Statistics. Nova York, John Wiley. 644 p.

7. APÊNDICE

7.1 - Teorema do Limite Central (SPIEGEL, 1978)

Sejam $X_1, X_2, \dots$, variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e com média $\underline{m}$ e variância σ^2 finitas. Então, se

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (n=1,2,\dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du$$

isto é, a variável aleatória $(S_n - nm)/(\sigma\sqrt{n})$, que é a variável padronizada correspondente a S_n , é assintoticamente normal.

O teorema é válido também sob condições mais gerais, por exemplo, quando $X_1, X_2, \dots$, são variáveis aleatórias indepen-

dentes com a mesma média e a mesma variância, mas não necessariamente com a mesma distribuição.

7.2 - Função Gama

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx, \quad \alpha > -1$$

$$\text{PROPRIEDADE: } \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

7.3 - Função Beta

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

ou

$$\beta(a,b) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2a-1} (\cos \theta)^{2b-1} d\theta$$

$$\text{PROPRIEDADE: } \beta(a,b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

7.4 - Série de MacLaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \dots$$

7.5 - Série de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R$$

onde $R = f^{(n)}(x_1) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}$, $(a < x_1 < x)$.

O termo R diz-se o resto depois do n-egésimo termo.

7.6 - Binômio de Newton

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} +$$

$$+ \dots + \binom{n}{n} a^n x^0$$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j x^{n-j}$$

7.7 - Distribuição "Lattice"

Se X é uma variável aleatória que possa ser escrita na forma $x = a + kh$, com $\underline{a}$, $\underline{h}$, constantes, $h > 0$ e $\underline{k}$ variando no conjunto $0, 1, 2, \dots, n$, ou $0, 1, 2, \dots$, ou $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, ou $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, chama-se a distribuição de X de "distribuição lattice".

Exemplificando, se x tem distribuição binomial, então os valores de x são da forma $x = a + kh$, com $a=0$, $h=1$, e $k=0, 1, 2, \dots, n$.

Se $\phi_X(t)$ é a função característica de X , pode-se mostrar que a distribuição de X é uma "distribuição lattice", se e somente se, $|\phi_X(t)| = 1$ para algum $t \neq 0$ (ROUSSAS, 1973). Pode também ser mostrado que a distribuição de x é uma "distribuição lattice", se e somente se, a função característica $\phi_X(t)$ é periódica com período 2π (isto é, $\phi_X(t+2\pi) = \phi_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$) (ROUSSAS, 1973).

7.8 - Lema (1):

A integral $\int_0^x \frac{\sin y}{y} dy$ é limitada para $x > 0$ e aproxima-se de $\pi/2$ com x tendendo a infinito (LUKACS, 1970).

7.9 - Lema (2):

Se $|F(z)| \leq M/R^K$, para $z = R e^{i\theta}$, onde $K > 0$ e $M = \text{cte}$, então $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{itz} F(z) dz = 0$, onde Γ é o semi-círculo do semi-plano $\text{Im}z \geq 0$, de raio R e centro na origem.

Demonstração:

$$\text{Se } z = R e^{i\theta},$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e^{itz} F(z) dz &= \int_0^\pi e^{it R e^{i\theta}} F(R e^{i\theta}) i R e^{i\theta} d\theta \\ \left| \int_0^\pi e^{it R e^{i\theta}} F(R e^{i\theta}) i R e^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^\pi \left| e^{it R e^{i\theta}} F(R e^{i\theta}) i R e^{i\theta} \right| d\theta = \\ &= \int_0^\pi \left| e^{it R \cos\theta - tR \sin\theta} F(R e^{i\theta}) i R e^{i\theta} \right| d\theta = \\ &= \int_0^\pi e^{-tR \sin\theta} |F(R e^{i\theta})| R d\theta \leq \frac{M}{R^{K-1}} \int_0^\pi e^{-tR \sin\theta} d\theta \\ &= \frac{2M}{R^{K-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-tR \sin\theta} d\theta \end{aligned}$$

Para $0 \leq \theta \leq \pi/2$, tem-se $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$, logo,

$$\begin{aligned} \frac{2M}{R^{K-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-tR \sin\theta} d\theta &\leq \frac{2M}{R^{K-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-(2tR\theta)/\pi} d\theta = \\ &= \frac{-2M}{R^{K-1}} \int_0^{\pi/2} e^u \frac{\pi}{2tR} du = \left[\frac{-M\pi}{tR^K} e^{-(2tR\theta)/\pi} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{-M\pi}{tR^K} (e^{-tR} - 1) = \frac{M\pi}{tR^K} (1 - e^{-tR}), \end{aligned}$$

que tende a zero quando R tende a infinito.

7.10 - Limite Fundamental (1) (HOOG e CRAIG, 1970)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n} \right]^{cn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n} \right)^{cn} = e^{bc}$$

onde $\underline{b}$ e $\underline{c}$ não dependem de $\underline{n}$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$.

7.11 - Teorema dos Resíduos (Cauchy) - (SPIEGEL, 1973)

"Se $\underline{f}$ é analítica e univalente numa região R , excepto em um número finito de singularidades isoladas $z_1, z_2, \dots, z_K$, então,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^K (\text{res } f)(z_j) ,$$

onde $\underline{C}$ é um contorno fechado de R , envolvendo $z_1, z_2, \dots, z_K$, uma vez no sentido positivo."