ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM FAIXAS COM SUBPARCELAS SUBDIVIDIDAS

ELIZA HELENA DE SOUZA FARIA
Engenheira-Agrônoma

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Abril, 1984

Aos meus pais,
que sempre fizeram de suas vidas
um exemplo para a minha;
Aos meus irmãos,
pelo carinho e dedicação;
À Elzinha e Oswaldo,
pelo amor que sempre nos uniu,
Ao Mário,

D E D I C O.

AGRADECIMENTOS

- Ao Dr. Humberto de Campos, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela orientação segura e amigável na execução deste trabalho.
- Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pelos ensinamentos recebidos.
- Ao Professor Dr. Antonio Francisco Iemma, que esteve sempre presente com sua solidariedade e ajuda durante a realização do Curso.
- Aos Professores Décio Barbin e Clóvis Pompílio de Abreu, por sua acolhida, amizade e ensinamentos.
- Aos Professores do Departamento de Matemática, à Diretoria do Instituto de Ciências Exatas, e à Reitoria da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, pelo afastamento concedido.
- À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior, pela bolsa de estudos concedida.
- Aos amigos Élio Paulo Zonta, Margareth C. Toyama Udo e Agostinho Roberto de Abreu, pela amizade e troca de idéias durante o Curso.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Ex
perimentação Agronômica, pelo excelente convívio.

Aos Funcionários do Departamento de Matemática e Estatís-
tica da ESALQ/USP, pela atenção e amizade.

À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves, pela amizade e pe
los serviços datilográficos.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para
a realização deste trabalho.

Í N D I C E

	Pag.
RESUMO	vii
SUMMARY	ix
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 - Introdução	4
2.2 - Modelo Matemático	6
2.3 - Análise de Variância	11
2.4 - Comparações Múltiplas	20
3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	23
3.1 - Modelo Matemático	23
3.2 - Sistema de Equações Normais	25
3.2.1 - Obtenção do sistema de equações nor mais	25
3.2.2 - Solução do sistema	32
3.3 - Análise de Variância	35
3.3.1 - Obtenção das somas de quadrados ..	35
3.3.2 - Esperança matemática dos quadrados médios	38
3.3.3 - Testes de hipóteses e quadro de a- nálise de variância	52

3.4 - Variâncias de Contrastes	56
3.5 - Comparações Múltiplas	70
4. UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO	74
5. CONCLUSÕES	78
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80

ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM FAIXAS COM SUBPARCELAS SUBDIVIDIDAS

Autor: Eliza Helena de Souza Faria
Orientador: Prof. Dr. Humberto de Campos

R E S U M O

O presente estudo teve como objetivo deduzir os fundamentos da análise de variância e dos métodos de comparações múltiplas nos experimentos em faixas com as subparcelas subdivididas.

Para tanto adotou-se o modelo linear:

$$y_{iklj} = \mu + t_i + b_j + (tb)_{ij} + t'_k + (t'b)_{kj} + tt'_{ik} + \\ + (tt'b)_{ikj} + t^*_{\ell} + tt^*_{i\ell} + t't^*_{k\ell} + tt't^*_{ik\ell} + \\ + e_{iklj},$$

onde os parâmetros portadores do índice j foram considerados aleatórios.

Foram deduzidas as somas de quadrados, as esperanças dos quadrados médios e obtidos os critérios para os testes das hipóteses inerentes à análise de variância

e para as comparações múltiplas.

Um exemplo ilustrativo, com dados de produção de cana-de-açúcar, é apresentado.

Os resultados obtidos permitiram concluir pela analogia do experimento em questão, ora com os experimentos em faixas com três resíduos, ora com os experimentos em parcelas sub-subdivididas.

ANALYSIS OF EXPERIMENTS IN STRIPS WITH SPLIT SUB-PLOT

Author: Eliza Helena de Souza Faria
 Adviser: Prof. Dr. Humberto de Campos

S U M M A R Y

The present study objetives the development of the fundamentals of the variance analysis and the multiple comparisons methods in experiments in strips with split-subplot:

The following linear model was adopted:

$$y_{iklj} = \mu + t_i + b_j + (tb)_{ij} + t'_k + (t'b)_{kj} + tt'_{ik} + \\ + (tt'b)_{ikj} + t^*_l + tt^*_{il} + t't^*_{kl} + tt't^*_{ikl} + \\ + e_{iklj} ,$$

where the parameters carrying the j index were considered random.

Sum of squares and expected mean squares, and criteria for the usual hypotheses tests deduced from the Analysis of Variance table and from the multiple comparisons were obtained.

The results implied the analogy of the present experiment with either the 3 residual strip experiments or with the usual split-plot experiments.

1. INTRODUÇÃO

Em experimentos agrícolas de campo, conduzidos para estudar simultaneamente os efeitos da variação de mais de um fator, os pesquisadores podem encontrar dificuldades práticas para casualizar completamente todos os tratamentos dentro de um mesmo bloco.

Para sanar essa dificuldade operacional, pode-se lançar mão dos experimentos em faixas.

Assim, por exemplo, quando se quer considerar no mesmo experimento dois tipos de tratamentos (A e B), que requerem parcelas relativamente grandes, se estabelecem em cada bloco os níveis de um dos tratamentos distribuídos ao acaso em faixas paralelas e os níveis do outro tratamento em faixas perpendiculares às anteriores, distribuindo-os também ao acaso.

Em cada nível de A tem-se os níveis de B como subparcelas e vice-versa. Assim sendo, tanto os níveis de A como os de B são considerados parcelas principais, enquanto que a interação A x B em cada um dos seus níveis $A_i B_j$ constitui as subparcelas.

As subparcelas formadas pela interseção das faixas podem ser subdivididas para acomodar um terceiro grupo de tratamentos, ocasionando um quarto resíduo.

Várias situações podem ainda ser caracterizadas mostrando que a melhor solução prática converge para os experimentos em faixas. Assim, por exemplo, em experimentos com épocas de colheita, quando a mesma é feita por meios mecânicos; ou em aplicação mecânica de adubos, corretivos, inseticidas; em experimentos que envolvem tipos de preparo de solo, profundidade de aração; experimentos de manejo em pastagens; etc.

Por outro lado, apesar da grande aplicabilide dos experimentos em faixas, sentiu-se na revisão bibliográfica uma lacuna no tocante às justificativas teóricas das fórmulas encontradas, quadros de análise de variância e comparações múltiplas.

Além disso, constatou-se que os textos tradicionais de Estatística Experimental e mesmo os artigos mais recentes, praticamente não fornecem subsídios para

a análise de experimentos em faixas com subparcelas subdivididas. Exceção deve ser feita, no entanto, para um artigo de HEDAYETULLAH *et alii* (1944), que apresenta um quadro de análise de variância para ensaios em faixas com três tratamentos, mas sem apresentar quaisquer considerações teóricas sobre sua obtenção.

Desse modo, motivados pela necessidade da dedução de tais análises, descortinou-se como um dos objetivos desta pesquisa, a proposta de um modelo, bem como o estudo completo dos critérios para os testes de hipóteses de interesse nos experimentos em faixas com as subparcelas subdivididas, em que se tem I tratamentos T e K tratamentos T' dispostos nas parcelas principais em faixas; L tratamentos T* dispostos em cada subparcela TT' e J blocos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - Introdução

De modo geral, os autores têm sido unânimes em ressaltar a utilidade dos experimentos em faixas, para o caso em que se deseja avaliar dois tipos de tratamentos dispostos em parcelas relativamente grandes.

Para FEDERER (1955), LOMA (1966) e PIMENTEL GOMES (1976), dentre outros, além do tamanho das parcelas, outros fatores associados direta ou indiretamente ao experimento tais como processos de mecanização, níveis de irrigação, etc., podem nos levar à utilização dos experimentos em faixas.

Por outro lado, FEDERER (1955) aconselha o uso dos experimentos em faixas, quando os efeitos indivi

duais dos dois tipos de tratamentos podem ser relativamente pequenos em relação ao efeito da interação entre eles.

Por sua vez, LOMA (1966) concorda com KEMPTHORNE (1952) e FEDERER (1955), dentre outros, ao mostrar as vantagens desses experimentos no tocante a sua casualização, comparativamente a outros delineamentos.

Assim, para um ensaio com dois tratamentos A e B, em dois e três níveis respectivamente, cada bloco poderia ser dividido em faixas horizontais, A_i , e em faixas verticais, B_j , resultando para um bloco qualquer, por exemplo:

	B_3	B_1	B_2
A_2	$A_2 B_3$	$A_2 B_1$	$A_2 B_2$
A_1	$A_1 B_3$	$A_1 B_1$	$A_1 B_2$

e de modo análogo para os demais blocos do ensaio, que apresentariam diferenças apenas quanto à casualização.

Em cada repetição são estabelecidos os níveis de um dos tratamentos, distribuídos ao acaso em faixas paralelas e os níveis do outro tratamento em faixas perpendiculares às anteriores, distribuindo-os também ao acaso em cada repetição, facilitando sobremaneira, a instalação dos experimentos de campo.

FEDERER (1955) cita as seguintes vantagens dos ensaios em faixas:

- a) as subparcelas podem ser relativamente pequenas, enquanto que as parcelas podem ter grandes dimensões;
- b) maior precisão na informação para a interação dupla dos tratamentos que estão em faixas;

e suas principais desvantagens:

- a) as informações sobre os tratamentos que estão em faixas são menos precisas que aquelas obtidas em blocos casualizados;
- b) a análise estatística é mais complexa do que nos delineamentos em blocos casualizados, principalmente para situações não ortogonais e análise de covariância.

2.2 - Modelo matemático

Segundo KEMPTHORNE (1952), o modelo adequado para ensaios em faixas, com dois tratamentos, é o modelo linear do tipo misto:

$$y_{ijk} = \mu + r_i + a_j + (ra)_{ij} + b_k + (rb)_{ik} + (ab)_{jk} + (rab)_{ijk}, \quad (2.2.1)$$

onde: y_{ijk} = valor da parcela que recebeu o k -ésimo tratamento B e o j -ésimo tratamento A na i -ésima repetição;

μ = média geral;

r_i = efeito da i -ésima repetição;

a_j = efeito do j -ésimo tratamento A;

$(ra)_{ij}$ = efeito da interação entre a i -ésima repetição e o j -ésimo tratamento A;

b_k = efeito do k -ésimo tratamento B;

$(rb)_{ik}$ = efeito da interação entre a i -ésima repetição e o k -ésimo tratamento B;

$(ab)_{jk}$ = efeito da interação entre os tratamentos A e B;

$(rab)_{ijk}$ = erro experimental.

onde, $(ra)_{ij}$, $(rb)_{ik}$ e $(rab)_{ijk}$ são considerados erros experimentais para os tratamentos A, B e a interação $A \times B$, normal e independentemente distribuídos com média zero e variâncias σ_r^2 , σ_c^2 e σ_s^2 , respectivamente.

CHAKRABARTI (1962) apresenta para experimentos com parcelas subdivididas com as subparcelas em faixas, o seguinte modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + \tau_k + \delta_{jk} + \varepsilon_{ijk} \quad , \quad (2.2.2)$$

para $i=1,2,\dots,r$; $j=1,2,\dots,\alpha$; $k=1,2,\dots,\beta$;

onde: y_{ijk} = valor observado da parcela que recebeu o k -ésimo sub-tratamento e j -ésimo tratamento principal na i -ésima repetição;

μ = média geral;

α_i = efeito do i -ésimo bloco;

γ_j = efeito do j -ésimo tratamento γ ;

τ_k = efeito do k -ésimo tratamento τ ;

δ_{jk} = efeito da interação da i -ésima repetição com o k -ésimo sub-tratamento;

ϵ_{ijk} = erro experimental.

Para o autor, as observações y_{ijk} , $y_{i'jk}$ e y_{ijk} , y_{ijk} , são correlacionadas, resultando:

$$E(\epsilon_{ijk}) = 0, \quad V(\epsilon_{ijk}) = \sigma^2 \quad e$$

$$COV(\epsilon_{ijk}, \epsilon_{i'j'k'}) = \begin{cases} \rho_1 \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j', k=k' \\ \rho_2 \sigma^2 & \text{se } i=i', j \neq j', k=k' \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

ZIMMERMANN (1973), para a aplicação dos métodos em estudo, usa um ensaio de adubação e calagem, em milho (*Zea mays*, L.) conduzido no Parque Estadual de Vila Velha, PR, no período de 1963/64 a 1970/71. Foi em pregado o delineamento em faixas, em blocos casualizados,

com duas repetições, sendo aplicados às parcelas (horizontais) os diferentes níveis de calcário, e as faixas (parcelas verticais) os níveis de adubação completa NPK. O modelo matemático para cada período foi:

$$y_{ijk} = m + \rho_j + a_i + \alpha_{ij} + b_k + \beta_{jk} + (ab)_{ik} + \epsilon_{ijk} \quad (2.2.3)$$

onde: y_{ijk} = observação da ik -ésima parcela no j -ésimo bloco;

m = média geral da população;

ρ_j = efeito aleatório do j -ésimo bloco;

a_i = efeito do i -ésimo nível do tratamento A;

α_{ij} = efeito aleatório associado à ij -ésima observação;

b_k = efeito do k -ésimo nível do tratamento B;

β_{jk} = efeito aleatório associado à kj -ésima observação;

$(ab)_{ik}$ = efeito interado do i -ésimo nível do tratamento A com o k -ésimo nível do tratamento B;

ϵ_{ijk} = erro experimental.

Além disso, ZIMMERMANN (1973) apresenta o seguinte modelo para análise de um experimento de adubação e calagem em milho, executado num delineamento em faixas, durante oito anos, em um mesmo local:

$$\begin{aligned}
 y_{ijkm} = & m + \rho_j + a_i + \alpha_{ij} + c_m + (\rho c)_{jm} + (ac)_{im} + \\
 & + \beta_{ijm} + b_k + \gamma_{jk} + (bc)_{km} + \delta_{jkm} + (ab)_{ik} + \\
 & + \theta_{ijk} + (abc)_{ikm} + \epsilon_{ijkm} \quad , \quad (2.2.4)
 \end{aligned}$$

onde: y_{ijkm} = produção da ijk -ésima parcela, no m -ésimo ano;

m = média geral da população;

ρ_j = efeito aleatório do j -ésimo bloco;

a_i = efeito do i -ésimo nível do tratamento A;

α_{ij} = efeito aleatório associado à ij -ésima observação;

c_m = efeito do m -ésimo ano;

$(\rho c)_{jm}$ = efeito do j -ésimo bloco, no m -ésimo ano;

$(ac)_{im}$ = efeito interado do i -ésimo nível do tratamento A com o m -ésimo ano;

β_{ijm} = efeito aleatório da ijm -ésima observação;

b_k = efeito do k -ésimo nível do tratamento B;

γ_{jk} = efeito aleatório associado a jk -ésima observação;

$(bc)_{km}$ = efeito interado do k -ésimo nível do tratamento B com o m -ésimo ano;

δ_{jkm} = efeito aleatório, associado à jkm -ésima observação;

$(ab)_{ik}$ = efeito interado do i -ésimo nível do tratamento A com o k -ésimo nível do tratamento B;

θ_{ijk} = efeito aleatório associado à interação do i -ésimo nível de A com o k -ésimo nível do tratamento B, no j -ésimo bloco;

$(abc)_{ikm}$ = efeito interado do i -ésimo nível do tratamento A com o k -ésimo nível do tratamento B, no m -ésimo ano;

ε_{ijkm} = efeito aleatório ou influência do acaso.

O modelo matemático é do tipo misto, e consideram-se aleatórios:

ρ_j , α_{ij} , β_{ijk} , γ_{jk} , δ_{jkm} , θ_{ijk} , $(\rho c)_{jm}$ e ε_{ijkm} ,

com médias zero e variâncias

σ_ρ^2 , σ_α^2 , σ_β^2 , σ_γ^2 , σ_δ^2 , σ_θ^2 , $\sigma_{\rho c}^2$ e σ^2 ,

respectivamente.

2.3 - Análise de Variância

Na revisão dos textos existentes na área, notou-se também, que os autores apresentam os experimentos em faixas como uma extensão dos experimentos fatoriais, notadamente FEDERER (1955) e LOMA (1966), ou como uma extensão dos experimentos com parcelas subdivididas, como GOULDEN (1939), KEMPTHORNE (1952) e PIMENTEL GOMES (1976).

Desse modo, esses autores não demonstraram as

somas de quadrados, suas esperanças matemáticas e os principais testes de hipóteses. Exceção deve ser feita, no entanto, para CHAKRABARTI (1962) e ZIMMERMANN (1973), aquele usando dois tratamentos e este estudando a análise conjunta de experimentos em faixas.

Assim, como abordado anteriormente, apenas em HEDAYETULLAH *et alii* (1944) encontrou-se um quadro de análise de variância para ensaios em faixas incluindo três tipos de tratamentos, mas sem quaisquer considerações teóricas sobre sua obtenção.

NAIR (1944) considera um experimento de dois fatores com p níveis $a_1, a_2, \dots, a_p$ de um fator A e q níveis $b_1, b_2, \dots, b_q$ de um fator B em todas as combinações, cada um repetido em r blocos. Cada bloco é dividido em p faixas de coluna, às quais são designados $a_1, a_2, \dots, a_p$, aleatoriamente, e dividido em q faixas de linhas, às quais são designadas $b_1, b_2, \dots, b_q$, aleatoriamente. Nota-se que não há casualização livre para cada combinação de tratamento $a_i b_j$ dentro de cada bloco.

A estrutura da análise da variância é mostrada no quadro 1.

Quadro 1 - Análise de variância para experimentos em faixas, segundo NAIR (1944).

Causas da Variação	G.L.
Blocos	$r-1$
Efeito A	$p-1$
Erro (1)	$(p-1)(r-1)$
Efeito B	$q-1$
Erro (2)	$(q-1)(r-1)$
Interação A x B	$(p-1)(q-1)$
Erro (3)	$(p-1)(q-1)(r-1)$
TOTAL	$pqr-1$

Para KEMPTHORNE (1952), que considera apenas dois tipos de tratamentos, a análise de variância para experimentos em faixas com base no modelo citado em (2.2.1), pode ser efetuada conforme o quadro 2.

Quadro 2 - Análise de variância para experimentos em faixas, segundo KEMPTHORNE (1952).

Causas da Variação	G.L.	E(Q.M.)
Repetições R	r-1	-
Tratamentos A	a-1	$\sigma_s^2 + b\sigma_r^2 + \frac{rb}{a-1} \sum_j t_j^2$
R x A	(r-1)(a-1)	$\sigma_s^2 + b\sigma_r^2$
<hr/>		
Tratamento B	(b-1)	$\sigma_s^2 + a\sigma_c^2 + \frac{ra}{b-1} \sum_k s_k^2$
R x B	(r-1)(b-1)	$\sigma_s^2 + a\sigma_c^2$
<hr/>		
Interação A x B	(a-1)(b-1)	$\sigma_s^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)} \sum_{jk} (ts)_{jk}^2$
R x A x B	(r-1)(a-1)(b-1)	σ_s^2
<hr/>		
TOTAL	rab-1	
<hr/>		

FEDERER (1955), com base no seguinte delineamento:

REPETIÇÃO I				REPETIÇÃO II				REPETIÇÃO III			
a_3	a_1	a_0	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_2	a_0	a_3	a_1
b_2				b_2				b_1			
b_0				b_1				b_2			
b_1				b_0				b_0			

embora sem apresentar referências sobre o modelo matemático, propõe a decomposição que consta do quadro 3.

Quadro 3 - Análise de variância para experimentos em faixas, segundo FEDERER (1955).

Causas da Variação	G.L.
Repetição	2
A	3
Repetição x A = erro (a)	6
B	2
Repetição x B = erro (b)	4
A x B	6
Erro (c)	12
TOTAL	35

De modo análogo, sem apresentar deduções, LOMA (1966), PANSE e SUKHATME (1963), COCHRAN e COX (1976), adotam a decomposição abordada no quadro 2.

Para CHAKRABARTI (1962), que considera um ensaio em "split-plot" com subtratamentos em faixas, a análise de variância baseada no modelo citado em (2.2.2), pode ser efetuada conforme o quadro 4.

Quadro 4 - Análise de variância para experimentos em faixas, segundo CHAKRABARTI (1962).

Causas da Variação	G.L.	S.Q.
Tratamento principal	$(\alpha-1)$	$r\beta\sum(y_{.j.}-y_{...})^2$
Erro (a)	$(r-1)(\alpha-1)$	$\beta\sum\sum(y_{ij.}-y_{i..}-y_{.j.}+y_{...})^2$
Subtratamentos	$(\beta-1)$	$r\alpha\sum(y_{..k}-y_{...})^2$
Erro (b)	$(r-1)(\beta-1)$	$\alpha\sum\sum(y_{i.k}-y_{i..}-y_{..k}+y_{...})^2$
Interação	$(\alpha-1)(\beta-1)$	$r\sum\sum(y_{.jk}-y_{.k.}-y_{.j.}+y_{...})^2$
Erro (c)	$(r-1)(\alpha-1)(\beta-1)$	$\sum\sum\sum\left(y_{ijk}-y_{i.k}-y_{.jk}-y_{..k}+y_{.j.}+y_{...}-y_{...}\right)^2$

ZIMMERMANN (1973), com base nos modelos citados em 2.2.3 e 2.2.4, propõe os esquemas de análise de variância, que constam dos quadros 5 e 6.

Quadro 5 - Análise de variância para cada período, segundo ZIMMERMANN (1973).

Causas da Variação	G.L.	E(Q.M.)
Repetições	$J-1$	$\sigma^2 + K\sigma_\alpha^2 + I\sigma_\beta^2 + IK\sigma_\rho^2$
Tratamento A	$I-1$	$\sigma^2 + K\sigma_\alpha^2 + \frac{JK}{I-1} \sum_i a_i^2$
Resíduo (a)	$(I-1)(J-1)$	$\sigma^2 + K\sigma_\alpha^2$
Tratamento B	$K-1$	$\sigma^2 + I\sigma_\beta^2 + \frac{IJ}{K-1} \sum_k b_k^2$
Resíduo (b)	$(J-1)(K-1)$	$\sigma^2 + I\sigma_\beta^2$
A x B	$(I-1)(K-1)$	$\sigma^2 + \frac{J}{(I-1)(J-1)} \sum_{i,k} (ab)_{ik}^2$
Resíduo (c)	$(I-1)(J-1)(K-1)$	σ^2
TOTAL	$IJK-1$	

Quadro 6 - Análise de variância conjunta para o delineamento em faixas durante m anos no mesmo local, segundo ZIMMERMANN (1973).

Causa de Variação	G. L.	E (Q. M.)
Repetição (R)	J - 1	$\sigma^2 + K M \sigma_a^2 + K \sigma_b^2 + I M \sigma_\gamma^2 + I \sigma_\delta^2 + M \sigma_\theta^2 + I K \sigma_{\rho_0}^2 + I K M \sigma_\rho^2$
Tratamento A	I - 1	$\sigma^2 + K M \sigma_a^2 + K \sigma_b^2 + M \sigma_\theta^2 + \frac{J K M}{I - 1} \sum_1 a_1^2$
Resíduo (a)	(I - 1)(J - 1)	$\sigma^2 + K M \sigma_a^2 + K \sigma_b^2 + M \sigma_\theta^2$
S. Total I	I J - 1	
Tratamento C (anos)	M - 1	$\sigma^2 + K \sigma_b^2 + I \sigma_\delta^2 + I K \sigma_{\rho_c}^2 + \frac{I J K}{M - 1} \sum_M \sigma_M^2$
R x C	(J - 1)(M - 1)	$\sigma^2 + K \sigma_b^2 + I \sigma_\delta^2 + I K \sigma_{\rho_c}^2$
A x C	(I - 1)(M - 1)	$\sigma^2 + K \sigma_b^2 + \frac{J K}{(I - 1)(M - 1)} \sum_{1, M} (a \sigma)^2_{1M}$
Resíduo (b)	(I - 1)(J - 1)(M - 1)	$\sigma^2 + K \sigma_b^2$
S. Total II	I J M - 1	
Tratamento B	K - 1	$\sigma^2 + I \sigma_\delta^2 + M \sigma_\theta^2 + I M \sigma_\gamma^2 + \frac{I J M}{K - 1} \sum_K b_k^2$
Resíduo (c)	(K - 1)(J - 1)	$\sigma^2 + I \sigma_\delta^2 + M \sigma_\theta^2 + I M \sigma_\gamma^2$
S. Total III	J K - 1	
B x C	(K - 1)(M - 1)	$\sigma^2 + I \sigma_\delta^2 + \frac{I J}{(K - 1)(M - 1)} \sum_{K, M} (b \sigma)^2_{kM}$
Resíduo (d)	(K - 1)(J - 1)(M - 1)	$\sigma^2 + I \sigma_\delta^2$
S. Total IV	J K M - 1	
A x B	(I - 1)(K - 1)	$\sigma^2 + M \sigma_\theta^2 + \frac{J M}{(I - 1)(K - 1)} \sum_{1, K} (a b)^2_{1K}$
Resíduo (e)	(I - 1)(K - 1)(J - 1)	$\sigma^2 + M \sigma_\theta^2$
S. Total V	I J K - 1	
A x B x C	(I - 1)(K - 1)(M - 1)	$\sigma^2 + \frac{J}{(I - 1)(K - 1)(M - 1)} \sum_{1KM} (a b \sigma)^2_{1KM}$
Resíduo (f)	(I - 1)(K - 1)(J - 1)(M - 1)	σ^2
Total	I J K M - 1	

Com a finalidade de se obter uma idéia precisa dos efeitos dos fatores culturais, tais como época de plantio, idade das mudas, espaçamento, número de mudas por cova, etc., sobre a produtividade de algumas linhagens selecionadas de arroz de diferentes hábitos de maturação sob as condições existentes na "Dacca Farm", foi estabelecida uma série de experimentos em 1936-37, e que foram repetidos durante diversos anos sucessivos. HEDAYETULLAH *et alii* (1944) tratam dos resultados de um desses experimentos que foi conduzido em 5 anos sucessivos, envolvendo três fatores a saber: data de plantio, linhagem de arroz e espaçamento. Assim, para três linhagens de arroz, seis datas de plantio e três espaçamentos, com 3 repetições, os autores apresentam o esquema de análise que consta do quadro 7 acrescentando, assim, um quarto resíduo, aos casos mencionados anteriormente.

Quadro 7 - Análise de variância, conforme HEDAYETULLAH *et alii*(1944).

Causas da Variação	G.L.
Blocos	2
Linhagens	2
Erro I	4
Épocas de plantio	5
Erro II	10
Linhagens x Épocas	10
Erro III	20
Espaçamentos	2
Espaçamentos x Épocas	10
Espaçamentos x Linhagens	4
Espaçamentos x Épocas x Linhagens	20
Erro IV	72
TOTAL	161

2.4 - Comparações Múltiplas

No tocante à obtenção das estimativas das variâncias dos contrastes inerentes às comparações múltiplas, constatou-se a omissão de detalhes na maior parte das obras consultadas.

Para FEDERER (1955) o erro padrão para a diferença entre duas médias na parcela base para os níveis a_i é:

$$\sqrt{\frac{2E_a}{rq}}$$

e para os níveis b_j é:

$$\sqrt{\frac{2E_b}{rp}}$$

onde: r = número de repetições;

q = número de níveis do fator b ;

p = número de níveis do fator a .

CHAKRABARTI (1962), considerando o modelo citado em (2.2.2), apresenta as seguintes variâncias de contrastes:

$$V(y_{.j.} - y_{.j'.}) = \frac{2}{r\beta} \sigma_1^2$$

$$V(y_{..k} - y_{..k'.}) = \frac{2}{r\alpha} \sigma_2^2$$

$$V(y_{.jk} - y_{.j'k}) = \frac{2}{r\beta} [(\beta-1)\sigma_3^2 + \sigma_1^2]$$

$$V(y_{.jk} - y_{.jk'}) = \frac{2}{r\alpha} [(\beta-1)\sigma_3^2 + \sigma_2^2]$$

Resultados semelhantes podem ser observados em COCHRAN e COX (1976), embora sem referências à existência ou não de correlações.

Assim, para α = número de níveis de A, β = número de níveis de B, r = número de repetições, COCHRAN e COX (1976) apresentam fórmulas para estimativas do erro padrão da diferença entre duas médias, para os seguintes casos:

a) Diferença entre duas médias de tratamentos A:

$$\bar{Y}_i = a_1 - a_0 \quad \hat{V}(\bar{Y}_i) = \frac{2E_a}{r\beta}$$

b) Diferença entre duas médias de tratamentos B:

$$\bar{Y}_k = b_1 - b_0 \quad \hat{V}(\bar{Y}_k) = \frac{2E_b}{r\alpha}$$

c) Diferença entre duas médias de tratamentos A dentro de um mesmo nível do tratamento B:

$$\bar{Y}_{i/k} = (a_1 b_1 - a_0 b_1) \quad \hat{V}(\bar{Y}_{i/k}) = \frac{2[(\beta-1)E_c + E_a]}{r\beta}$$

d) Diferença entre duas médias de tratamentos B dentro de um mesmo nível de tratamento A:

$$\bar{Y}_{k/i} = (a_1 b_1 - a_1 b_0) \quad \hat{V}(\bar{Y}_{k/i}) = \frac{2[(\alpha-1)E_c + E_b]}{r\alpha}$$

Para ZIMMERMANN (1973), as comparações entre duas médias, para cada período, baseada no modelo

$$y_{ijk} = m + \rho_j + a_i + \alpha_{ij} + b_k + \beta_{jk} + (ab)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

podem ser feitas de cinco diferentes maneiras, tendo as variâncias de cada tipo de contraste a expressão:

$$a) \hat{Y}_i = \bar{A}_i - \bar{A}_i, \quad \hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JK} [\text{QM Resíduo}(a)]$$

$$b) \hat{Y}_k = \bar{B}_k - \bar{B}_k, \quad \hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJ} [\text{QM Resíduo}(b)]$$

$$c) \hat{Y}_{i/k} = \overline{A_i B_k} - \overline{A_i, B_k}, \quad \hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JK} \left[\text{QM Resíduo}(a) + \right. \\ \left. + (K-1) \text{QM Resíduo}(c) \right]$$

$$d) \hat{Y}_{k/i} = \overline{A_i B_k} - \overline{A_i, B_k}, \quad \hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{IJ} \left[\text{QM Resíduo}(b) + \right. \\ \left. + (I-1) \text{QM Resíduo}(c) \right]$$

$$e) \hat{Y}_{ik} = \overline{A_i B_k} - \overline{A_i, B_k}, \quad \hat{V}(\hat{Y}_{ik}) = \left\{ \begin{aligned} &I[\text{QM Resíduo}(a)] + K[\text{QM Resíduo}(b)] + \\ &+ (IK-I-K) \text{QM Resíduo}(c) \end{aligned} \right\}$$

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Para o desenvolvimento teórico considerou-se um experimento em faixas com subparcelas subdivididas tendo-se I tratamentos T e K tratamentos T' dispostos nas parcelas principais em faixas; L tratamentos T* dispostos em cada subparcela resultante das combinações TT' e J blocos.

3.1 - Modelo Matemático

Considerou-se o modelo linear:

$$y_{ik\ell j} = \mu + t_i + b. + (tb)_{ij} + t'_k + (t'b)_{kj} + tt'_{ik} + \\ + (tt'b)_{ikj} + t^*_{\ell} + tt^*_{i\ell} + t't^*_{k\ell} + tt't^*_{ik\ell} + e_{ik\ell j}$$

com $i = 1, 2, \dots, I$;

$j = 1, 2, \dots, J$;

$k = 1, 2, \dots, K$;

$\ell = 1, 2, \dots, L$.

onde, y_{iklj} = valor observado da ikl -ésima subparcela no j -ésimo bloco;

μ = média geral;

t_i = efeito do i -ésimo tratamento T ;

b_j = efeito aleatório do j -ésimo bloco, onde se supõe $b_j \sim N(0; \sigma_b^2)$;

$(tb)_{ij}$ = componente aleatório da interação entre o i -ésimo tratamento T e o j -ésimo bloco, onde se supõe $(tb)_{ij} \sim N(0; \sigma_{tb}^2)$;

t'_k = efeito do k -ésimo tratamento T' ;

$(t'b)_{kj}$ = componente aleatório da interação entre o k -ésimo tratamento T' com o j -ésimo bloco onde se supõe $(t'b)_{kj} \sim N(0; \sigma_{t'b}^2)$;

tt'_{ik} = efeito da interação do i -ésimo tratamento T com o k -ésimo tratamento T' ;

$(tt'b)_{ikj}$ = componente aleatório da interação entre o i -ésimo tratamento T com o k -ésimo tratamento T' no j -ésimo bloco, onde se supõe $(tt'b)_{ikj} \sim N(0; \sigma_{tt'b}^2)$;

t^*_{ℓ} = efeito do ℓ -ésimo tratamento T^* ;

$tt^*_{i\ell}$ = efeito da interação do i -ésimo tratamento T com o ℓ -ésimo tratamento T^* ;

$t't^*_{k\ell}$ = efeito da interação do k -ésimo tratamento T' com o ℓ -ésimo tratamento T^* ;

$tt't_{ikl}^*$ = efeito da interação do i -ésimo tratamento T com o k -ésimo tratamento T' com o l -ésimo tratamento T^* ;

e_{iklj} = erro associado à $iklj$ -ésima observação, onde se supõe $e_{iklj} \sim N(0 ; \sigma^2)$.

A adoção da aleatoriedade para blocos foi feita com base em ANDERSON e BANCROFT (1952) e FEDERER (1955) que preconizam a aleatoriedade dos blocos, pois as inferências feitas a partir deles, valem para a população, e somente o consideram fixo quando as várias amostras são tomadas de cada tratamento em cada bloco.

Resultou, assim, um modelo misto onde são considerados aleatórios:

b_j , $(tb)_{ij}$, $(t'b)_{kj}$, $(tt'b)_{ijk}$ e e_{iklj} , com média zero e variâncias σ_b^2 , σ_{tb}^2 , $\sigma_{t'b}^2$, $\sigma_{tt'b}^2$ e σ^2 , respectivamente.

3.2 - Sistema de Equações Normais

3.2.1 - Obtenção do sistema de equações normais

O sistema de equações normais foi obtido através do método dos mínimos quadrados, resultando:

a) Equação normal para média:

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} y_{ijkl} = & IJKL\bar{m} + JKL \sum_i \bar{t}_i + IKL \sum_j \bar{b}_j + KL \sum_{ij} (t\bar{b})_{ij} + \\ & + IJL \sum_k \bar{t}'_k + IL \sum_{jk} (t'\bar{b})_{kj} + \\ & + JL \sum_{ik} \widehat{t\bar{t}'}_{ik} + L \sum_{ikj} (\widehat{t\bar{t}'}\bar{b})_{ikj} + \\ & + IJK \sum_l \bar{t}^*_l + JK \sum_{il} \widehat{t\bar{t}'}^*_{il} + \\ & + IJ \sum_{kl} \widehat{t'\bar{t}'}^*_{kl} + J \sum_{ikl} \widehat{t\bar{t}'}\bar{t}^*_{ikl} \end{aligned}$$

b) Equação normal para tratamento T:

$$\begin{aligned} \sum_{jkl} y_{ijkl} = & JKL\bar{m} + JKL \bar{t}_i + KL \sum_j \bar{b}_j + KL \sum_j (t\bar{b})_{ij} + \\ & + JL \sum_k \bar{t}'_k + L \sum_{jk} (\widehat{t'\bar{b}})_{jk} + JL \sum_k \widehat{t\bar{t}'}_{ik} + \\ & + L \sum_{jk} (\widehat{t\bar{t}'}\bar{b})_{ikj} + JK \sum_l \bar{t}^*_l + \\ & + JK \sum_l \widehat{t\bar{t}'}^*_{il} + J \sum_{kl} \widehat{t'\bar{t}'}^*_{kl} + J \sum_{kl} \widehat{t\bar{t}'}\bar{t}^*_{ikl} \end{aligned}$$

c) Equação normal para bloco

$$\begin{aligned} \sum_{ikl} y_{ijkl} = & IKL\bar{m} + KL \sum_i \bar{t}_i + IKL \bar{b}_j + KL \sum_i (t\bar{b})_{ij} + \\ & + L \sum_{ik} \widehat{t\bar{t}'}_{ik} + L \sum_{ik} (\widehat{t\bar{t}'}\bar{b})_{ikj} + \\ & + IK \sum_l \bar{t}^*_l + K \sum_{il} \widehat{t\bar{t}'}^*_{il} + I \sum_{kl} \widehat{t'\bar{t}'}^*_{kl} + \\ & + \sum_{ikl} \widehat{t\bar{t}'}\bar{t}^*_{ikl} + IL \sum_k \bar{t}'_k + IL \sum_i (\widehat{t'\bar{b}})_{kj} \end{aligned}$$

d) Equação normal para a interação tratamento T x Bloco

[Resíduo(a)]:

$$\begin{aligned} \sum_{k\ell} y_{ik\ell j} = & KL\hat{m} + KL \hat{t}_i + KL \hat{b}_j + KL (t\hat{b})_{ij} + L \sum_k \hat{t}'_k + \\ & + L \sum_k (t'\hat{b})_{kj} + L \sum_k t\hat{t}'_{ik} + L \sum_k (\widehat{tt'b})_{ijk} + \\ & + K \sum_{\ell} \hat{t}^*_{\ell} + K \sum_{\ell} t\hat{t}^*_{i\ell} + \sum_{k\ell} \widehat{t't^*_{k\ell}} + \\ & + \sum_{k\ell} \widehat{tt't^*_{ik\ell}} \end{aligned}$$

e) Equação normal para tratamento T':

$$\begin{aligned} \sum_{ij\ell} y_{ik\ell j} = & IJL\hat{m} + JL \sum_i \hat{t}_i + IL \sum_j \hat{b}_j + L \sum_{ij} (t\hat{b})_{ij} + \\ & + IJL \hat{t}'_k + IL \sum_j (t'\hat{b})_{kj} + JL \sum_i t\hat{t}'_{ik} + \\ & + L \sum_{ij} (\widehat{tt'b})_{ikj} + IJ \sum_{\ell} \hat{t}^*_{\ell} + \\ & + J \sum_{i\ell} t\hat{t}^*_{i\ell} + IJ \sum_{\ell} \widehat{t't^*_{k\ell}} + \\ & + J \sum_{i\ell} \widehat{tt't^*_{ik\ell}} \end{aligned}$$

f) Equação normal para a interação tratamento T' x Bloco

[Resíduo(b)]:

$$\begin{aligned} \sum_{i\ell} y_{ik\ell j} = & IL\hat{m} + L \sum_i \hat{t}_i + IL \hat{b}_j + L \sum_i (t\hat{b})_{ij} + IL \hat{t}'_k + \\ & + IL (t'\hat{b})_{kj} + L \sum_i t\hat{t}'_{ik} + L \sum_i (\widehat{tt'b})_{ikj} + \\ & + I \sum_{\ell} \hat{t}^*_{\ell} + \sum_{i\ell} t\hat{t}^*_{i\ell} + I \sum_{\ell} \widehat{t't^*_{k\ell}} + \sum_{i\ell} \widehat{tt't^*_{ik\ell}} \end{aligned}$$

g) Equação normal para a interação T x T':

$$\begin{aligned} \sum_{j\ell} y_{ik\ell j} = & JL\hat{m} + JL\hat{t}_i + L \sum_j \hat{b}_j + L \sum_j (t\hat{b})_{ij} + JL\hat{t}'_k + \\ & + L \sum_j (t'\hat{b})_{kj} + JL\hat{t}t'_{ik} + L \sum_j (\widehat{tt'b})_{ikj} + \\ & + J \sum_{\ell} \hat{t}^*_{\ell} + J \sum_{\ell} \hat{t}t^*_{i\ell} + J \sum_{\ell} \widehat{t't^*}_{k\ell} + \\ & + J \sum_{\ell} \widehat{tt't^*}_{ik\ell} . \end{aligned}$$

h) Equação normal para a interação TxT'xB [Resíduo(c)]:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell} y_{ik\ell j} = & L\hat{m} + L\hat{t}_i + L\hat{b}_j + L(t\hat{b})_{ij} + L\hat{t}'_k + L(t'\hat{b})_{kj} + \\ & + L\hat{t}t'_{ik} + L(\widehat{tt'b})_{ikj} + \sum_{\ell} \hat{t}^*_{\ell} + \sum_{\ell} \hat{t}t^*_{i\ell} + \\ & + \sum_{\ell} \widehat{t't^*}_{k\ell} + \sum_{\ell} \widehat{tt't^*}_{ik\ell} \end{aligned}$$

i) Equação normal para tratamento T*:

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} y_{ik\ell j} = & IJK\hat{m} + JK \sum_i \hat{t}_i + IK \sum_j \hat{b}_j + K \sum_{ij} (t\hat{b})_{ij} + \\ & + IJ \sum_k \hat{t}'_k + I \sum_{jk} (t'\hat{b})_{kj} + J \sum_{ik} \hat{t}t'_{ik} + \\ & + \sum_{ikj} (\widehat{tt'b})_{ikj} + IKJ \hat{t}^*_{\ell} + JK \sum_i \hat{t}t^*_{i\ell} + \\ & + IJ \sum_k \widehat{t't^*}_{k\ell} + J \sum_{ik} \widehat{tt't^*}_{ik\ell} . \end{aligned}$$

j) Equação normal para a interação TxT*:

$$\begin{aligned} \sum_{jk} y_{ik\ell j} = & JK\hat{m} + JK\hat{t}_i + K \sum_j \hat{b}_j + K \sum_j (t\hat{b})_{ij} + J \sum_k \hat{t}'_k + \\ & + \sum_{jk} (t\hat{b})_{kj} + J \sum_k t\hat{t}'_{ik} + \sum_{jk} (\widehat{tt'b})_{ikj} + \\ & + JK\hat{t}^*_{\ell} + JK\hat{t}^*_{i\ell} + J \sum_k \widehat{t't^*}_{k\ell} + J \sum_k \widehat{tt't^*}_{ik\ell} \end{aligned}$$

l) Equação normal para a interação T'xT*:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} y_{ik\ell j} = & IJ\hat{m} + J \sum_i \hat{t}_i + I \sum_j \hat{b}_j + \sum_{ij} (t\hat{b})_{ij} + IJ\hat{t}'_k + \\ & + I \sum_j (t\hat{b})_{kj} + J \sum_i t\hat{t}'_{ik} + \sum_{ij} (\widehat{tt'b})_{ikj} + \\ & + IJ\hat{t}^*_{\ell} + J \sum_i \widehat{tt^*}_{i\ell} + IJ\hat{t}'^*_{k\ell} + J \sum_i \widehat{tt't^*}_{ik\ell} \end{aligned}$$

m) Equação normal para a interação TxT'xT*:

$$\begin{aligned} \sum_j y_{ik\ell j} = & J\hat{m} + J\hat{t}_i + \sum_j \hat{b}_j + \sum_j (t\hat{b})_{ij} + J\hat{t}'_k + \sum_j (t\hat{b})_{kj} + \\ & + J\hat{t}^*_{i\ell} + \sum_j (\widehat{tt'b})_{ikj} + J\hat{t}^*_{\ell} + J\hat{t}^*_{i\ell} + \\ & + J\widehat{t't^*}_{k\ell} + J\widehat{tt't^*}_{ik\ell} \end{aligned}$$

Consideraram-se as seguintes restrições:

$$\begin{array}{lll}
\sum_i \hat{t}_i = 0 & \sum_k \hat{t}_k = 0 & \sum_l \hat{t}^* = 0 \\
\sum_j \hat{b}_j = 0 & \sum_i \hat{t} t'_{ik} = 0 & \sum_k \hat{t} t'_{ik} = 0 \\
\sum_k \hat{t} \hat{t}^*_{k\ell} = 0 & \sum_i \hat{t} \hat{t}^*_{i\ell} = 0 & \sum_l \hat{t} \hat{t}^*_{i\ell} = 0 \\
\sum_k \widehat{t t' t^*}_{ik\ell} = 0 & \sum_l \widehat{t \hat{t} t^*}_{k\ell} = 0 & \sum_i \widehat{t t' t^*}_{ik\ell} = 0 \\
\sum_j \hat{t} b_{ij} = 0 & \sum_l \widehat{t t' t^*}_{ik\ell} = 0 & \sum_i (\hat{t} b)_{ij} = 0 \\
\sum_i \widehat{t t' b}_{ikj} = 0 & \sum_k \widehat{t' b}_{kj} = 0 & \sum_j \widehat{t' b}_{kj} = 0 \\
\sum_k \widehat{t t' b}_{ijk} = 0 & \sum_j \widehat{t t' b}_{ikj} = 0 &
\end{array}$$

e desse modo, o sistema de equações normais ficou:

$$IJKL \hat{m} = G$$

$$JKL \hat{m} + JKL \hat{t}_i = T_i$$

$$IKL \hat{m} + IKL \hat{b}_j = B_j$$

$$KL \hat{m} + KL \hat{t}_i + KL \hat{b}_j + KL (\hat{t} b)_{ij} = y_{i..j}$$

$$IJL\widehat{m} + IJL t'_k = T'_k$$

$$IL\widehat{m} + IL \widehat{t}'_k + IL \widehat{b}_j + IL (\widehat{t'b})_{kj} = y_{.k.j}$$

$$JL\widehat{m} + JL \widehat{t}'_i + JL \widehat{t}'_k + JL \widehat{tt}'_{ik} = TT'_{ik}$$

$$L\widehat{m} + L \widehat{t}'_i + L \widehat{b}_j + L (\widehat{tb})_{ij} + L \widehat{t}'_k + L (\widehat{t'b})_{kj} + L \widehat{tt}'_{ik} + L (\widehat{tt'b})_{ikj} = y_{ik.j}$$

$$IJK\widehat{m} + IJK \widehat{t}^*_\ell = T^*_\ell$$

$$JK\widehat{m} + JK \widehat{t}'_i + JK \widehat{t}^*_\ell + JK \widehat{tt}^*_{i\ell} = TT^*_{i\ell}$$

$$IJ\widehat{m} + IJ \widehat{t}'_k + IJ t^*_{\ell} + IJ \widehat{t't}^*_{k\ell} = T'T^*_{k\ell}$$

$$J\widehat{m} + J \widehat{t}'_i + J \widehat{t}'_k + J t^*_{\ell} + J \widehat{tt}'_{ik} + J \widehat{tt}^*_{i\ell} + J \widehat{t't}^*_{k\ell} + J \widehat{tt't}^*_{ik\ell} = TT'T^*_{ik\ell}$$

onde, G = total geral;

T_i = total do i-ésimo tratamento T;

B_j = total do j-ésimo bloco;

$y_{i.k.j}$ = total das parcelas que receberam o i-ésimo tratamento T no j-ésimo bloco;

T'_k = total do k-ésimo tratamento T'.

$y_{.k.j}$ = total das parcelas que receberam o k-ésimo tratamento T' no j-ésimo bloco;

TT'_{ik} = total das subparcelas relativas ao i-ésimo tratamento T com o k-ésimo tratamento T'.

$y_{ik.j}$ = total das subparcelas que receberam o i-ésimo tratamento T com o k-ésimo tratamento T' no j-ésimo bloco;

T_{ℓ}^* = total do ℓ -ésimo tratamento T*;

$TT_{i\ell}^*$ = total das subparcelas relativas ao i-ésimo tratamento T com o ℓ -ésimo tratamento T*;

$T'T_{k\ell}^*$ = total das subparcelas relativas ao i-ésimo tratamento T' com o ℓ -ésimo tratamento T*;

$TT'T_{ik\ell}^*$ = total das subparcelas relativas ao i-ésimo tratamento T, com o k-ésimo tratamento T' no ℓ -ésimo tratamento T*.

3.2.2 - Solução do sistema

Partindo-se das equações normais e com base nas restrições citadas, obtiveram-se as soluções que se seguem:

a) Para média geral:

$$\hat{m} = \frac{G}{IJKL} \quad ;$$

b) Para o i-ésimo tratamento T:

$$\hat{t}_i = \frac{T_i}{JKL} - \hat{m} \quad ;$$

c) Para o j-ésimo bloco:

$$\hat{\sigma}_j = \frac{B_j}{IKL} - \hat{m}$$

d) Para o i-ésimo tratamento T com o j-ésimo bloco:

$$(\hat{tb})_{ij} = \frac{y_{i..j}}{KL} - \hat{t}_i - \hat{\sigma}_j - \hat{m} ;$$

e) Para o k-ésimo tratamento T':

$$\hat{t}'_k = \frac{T'_k}{IJL} - \hat{m} ;$$

f) Para o k-ésimo tratamento T' com o j-ésimo bloco:

$$(\widehat{t'b})_{kj} = \frac{y_{.k.j}}{IL} - \hat{t}'_k - \hat{\sigma}_j - \hat{m} ;$$

g) Para a interação do i-ésimo tratamento T com o k-ésimo tratamento T':

$$t\hat{t}'_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{JL} - \hat{t}_i - \hat{t}'_k - \hat{m} ;$$

h) Para a interação do i-ésimo tratamento T com o k-ésimo tratamento T' no j-ésimo bloco:

$$(\widehat{tt'b})_{ikj} = \frac{y_{ik.j}}{L} - t\hat{t}'_{ik} - (\widehat{t'b})_{kj} - \hat{t}'_k - (\hat{tb})_{ij} - \hat{\sigma}_j - \hat{t}_i - \hat{m} ;$$

i) Para o ℓ -ésimo tratamento T^* :

$$\hat{t}_{\ell}^* = \frac{T_{\ell}^*}{IJK} - \hat{m} \quad ;$$

j) Para a interação do i -ésimo tratamento T com o ℓ -ésimo tratamento T^* :

$$\hat{t}_{i\ell}^{*} = \frac{TT_{i\ell}^*}{JK} - \hat{t}_{\ell}^* - \hat{t}_i - \hat{m} \quad ;$$

l) Para a interação do k -ésimo tratamento T' com o ℓ -ésimo tratamento T^* :

$$\widehat{t}_{k\ell}^{*} = \frac{T'T_{k\ell}^*}{IJ} - \hat{t}_k' - \hat{t}_{\ell}^* - \hat{m} \quad ;$$

m) Para a interação do i -ésimo tratamento T com o k -ésimo tratamento T' no ℓ -ésimo tratamento T^* :

$$\begin{aligned} \widehat{t}_{ik\ell}^{*} &= \frac{TT'T_{ik\ell}^*}{J} - \hat{t}_{ik}' - \hat{t}_{i\ell}^{*} - \widehat{t}_{k\ell}^{*} - \hat{t}_i - \\ &\quad - \hat{t}_k' - \hat{t}_{\ell}^* - \hat{m} \quad . \end{aligned}$$

3.3 - Análise de Variância

3.3.1 - Obtenção das somas de quadrados

A soma de quadrados dos parâmetros foi obtida, segundo NOGUEIRA (1962), PIMENTEL GOMES (1966), dentre outros, através da soma dos produtos das soluções pelos segundos membros das equações normais correspondentes, resultando:

$$a) C = \bar{m}G = \frac{G^2}{IJKL} ;$$

$$b) \text{ SQ Tratamento T} = \text{SQT} = \sum_i \hat{t}_i T_i = \frac{1}{JKL} \sum_i T_i^2 - C ;$$

$$c) \text{ SQ Bloco} = \text{SQB} = \sum_j \hat{b}_j B_j = \frac{1}{IKL} \sum_j B_j^2 - C$$

$$d) \text{ SQ Resíduo(a)} = \text{SQR(a)} = \sum_{ij} (\hat{t}\hat{b})_{ij} y_{i..j} = \frac{1}{KL} \sum_{ij} y_{i..j}^2 - C - \text{SQT} - \text{SQB} ;$$

$$e) \text{ SQ Tratamento T'} = \text{SQT'} = \sum_k \hat{t}'_k T'_k = \frac{1}{IJL} \sum_k (T'_k)^2 - C ;$$

$$f) \text{ SQ Resíduo(b)} = \text{SQR(b)} = \sum_{kj} (t\hat{b})_{kj} y_{.k.j} = \frac{1}{IL} \sum_{kj} y_{.k.j}^2 - C - \text{SQT'} - \text{SQB} ;$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) SQ Interação } T \times T' &= SQT \times T' = \sum_{ik} \hat{t}t'_{ik} TT'_{ik} = \\
 &= \frac{1}{JL} \sum_{ik} (TT'_{ik})^2 - C - SQT - SQT'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) SQ Resíduo(c)} &= SQR(c) = \sum_{ikj} (\hat{t}t'b)_{ikj} Y_{ikj} = \\
 &= \frac{1}{L} \sum_{ijk} y_{ik.j}^2 - C - SQT - SQB - \\
 &\quad - SQT' - SQT \times T' - SQR(a) - \\
 &\quad - SQR(b) ;
 \end{aligned}$$

$$\text{i) SQ Tratamento } T^* = SQT^* = \sum_{\ell} \hat{t}t^*_{\ell} T^*_{\ell} = \frac{1}{IJK} \sum_{\ell} (T^*_{\ell})^2 - C ;$$

$$\begin{aligned}
 \text{j) SQ Interação } T \times T^* &= SQT \times T^* = \sum_{i\ell} \hat{t}t^*_{i\ell} TT^*_{i\ell} = \\
 &= \frac{1}{JK} \sum_{i\ell} (TT^*_{i\ell})^2 - C - SQT - \\
 &\quad - SQT^* ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l) SQ Interação } T' \times T^* &= SQT' \times T^* = \sum_{k\ell} \hat{t}'t^*_{k\ell} T'T^*_{k\ell} = \\
 &= \frac{1}{IJ} \sum_{k\ell} (T'T^*)^2_{k\ell} - C - \\
 &\quad - SQT' - SQT^*
 \end{aligned}$$

$$m) \text{ SQ Interação } T \times T' \times T^* = \text{SQ } T \times T' \times T^* = \sum_{ikl} \widehat{t t' t^*}_{ikl} T T' T^*_{ikl} =$$

$$= \frac{1}{J} \sum_{ikl} (T T' T^*)^2_{ikl} - C - \text{SQT} -$$

$$- \text{SQT}' - \text{SQT}^* - \text{SQT} \times T' - \text{SQT} \times T^* -$$

$$- \text{SQT}' \times T^* ;$$

$$n) \text{ SQ Total} = \sum_{iklj} y^2_{iklj} - C ;$$

$$o) \text{ SQ Resíduo (d)} = \text{SQR(d)} = \text{SQ Total} - \text{SQT} - \text{SQB} - \text{SQT}' -$$

$$- \text{SQT}^* - \text{SQT} \times T' - \text{SQT} \times T^* -$$

$$- \text{SQT}' \times T^* - \text{SQT} \times T' \times T^* - \text{SQR(a)} -$$

$$- \text{SQR(b)} - \text{SQR(c)} .$$

3.3.2 - Esperança matemática dos quadrados médios

Com base nas somas de quadrados obtidas em (3.3.1), no modelo linear proposto em (3.1) e através dos procedimentos descritos em PIMENTEL GOMES (1966), as esperanças dos quadrados médios resultaram:

$$a) E(\text{correção}) = E(C) = E \left[\frac{(\sum_{ijkl} y_{ijkl})^2}{IJKL} \right]$$

Dado que:

$$\begin{aligned} y_{ijkl} = & \mu + t_i + b_j + (tb)_{ij} + t'_k + (t'b)_{kj} + tt'_{ik} + \\ & + (tt'b)_{ikj} + t^*_l + tt^*_{il} + t't^*_{kl} + tt't^*_{ikl} + \\ & + e_{ijkl} \end{aligned}$$

e pelo fato de que no resultado final das diversas $E(SQ)$ μ não aparece, pode-se suprimi-la em todos os cálculos, facilitando assim as deduções.

Assim,

$$\left(\sum_{ijkl} y_{ijkl} \right)^2 = \left[\begin{aligned} & IKL \sum_j b_j + KL \sum_{ij} (tb)_{ij} + IL \sum_{kj} (t'b)_{kj} + \\ & + L \sum_{ikj} (tt'b)_{ikj} + \sum_{ijkl} e_{ijkl} \end{aligned} \right]^2$$

$$E\left[\left(\sum_{ijkl} y_{iklj}\right)^2\right] = I^2 JK^2 L^2 \sigma_b^2 + IJ K^2 L^2 \sigma_{tb}^2 + I^2 JK L^2 \sigma_{t'b}^2 + \\ + IJK L^2 \sigma_{tt'b}^2 + IJKL \sigma^2$$

e

$$E(C) = \frac{1}{IJKL} \left[\begin{aligned} &I^2 JK^2 L^2 \sigma_b^2 + IJK^2 L^2 \sigma_{tb}^2 + I^2 JK L^2 \sigma_{t'b}^2 + \\ &+ IJK L^2 \sigma_{tt'b}^2 + IJKL \sigma^2 \end{aligned} \right]$$

$$\therefore E(C) = IKL \sigma_b^2 + KL \sigma_{tb}^2 + IL \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2$$

b) Partindo-se de $QMT = \frac{SQT}{I-1}$ tem-se:

$$E(QMT) = \frac{1}{I-1} E(SQT) ,$$

onde

$$SQT = \frac{1}{JKL} \sum_i T_i^2 - C$$

e

$$T_i = JKL t_i + KL \sum_j b_j + KL \sum_j (tb)_{ij} + L \sum_{jk} (t'b)_{kj} + \\ + L \sum_{jk} (tt'b)_{ikj} + \sum_{ijkl} e_{ikjl}$$

então,

$$\frac{1}{JKL} E\left(\sum_i T_i^2\right) = JKL \sum_i t_i^2 + IKL \sigma_b^2 + IKL \sigma_{tb}^2 + IL \sigma_{t'b}^2 + IL \sigma_{tt'b}^2 + I \sigma^2 .$$

Subtraindo-se a $E(C)$ vem:

$$E(SQT) = JKL \sum_i t_i^2 + KL (I-1) \sigma_{tb}^2 + L (I-1) \sigma_{tt'b}^2 + (I-1) \sigma^2$$

dividindo-se por $(I-1)$

$$E(QMT) = \frac{JKL}{(I-1)} \sum_i t_i^2 + KL \sigma_{tb}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2$$

c) Analogamente ao caso anterior $QMB = \frac{SQB}{J-1}$, assim:

$$E(QMB) = \frac{1}{(J-1)} E(SQB)$$

onde:

$$SQB = \frac{1}{IKL} \sum_j B_j^2 - C$$

e

$$B_j = IKL b_j + KL \sum_i (tb)_{ij} + IL \sum_k (t'b)_{kj} + L \sum_{ik} (tt'b)_{ikj} + \sum_{ikl} e_{iklj}$$

então:

$$\frac{1}{IKL} E(\sum_j B_j^2) = IJKL \sigma_b^2 + JKL \sigma_{tb}^2 + IJL \sigma_{t'b}^2 + JL \sigma_{tt'b}^2 + J \sigma^2$$

subtraindo-se a $E(C)$ vem:

$$E(SQB) = IKL(J-1) \sigma_b^2 + KL(J-1) \sigma_{tb}^2 + IL(J-1) \sigma_{t'b}^2 + \\ + L(J-1) \sigma_{tt'b}^2 + (J-1) \sigma^2 ,$$

dividindo-se por $(J-1)$,

$$E(QMB) = IKL \sigma_b^2 + KL \sigma_{tb}^2 + IL \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2 .$$

d) Partindo-se de $QMR(a) = \frac{SQR(a)}{(I-1)(J-1)}$, tem-se:

$$E[QMR(a)] = \frac{1}{(I-1)(J-1)} \cdot E[SQR(a)]$$

onde:

$$SQR(a) = \frac{1}{KL} \sum_{ij} y_{i..j}^2 - C - SQT - SQB$$

e

$$y_{i..j} = KL t_i + KL b_j + KL (tb)_{ij} + L \sum_k (t'b)_{kj} + \\ + L (tt'b)_{ikj} + \sum_{kl} e_{iklj} ,$$

então:

$$\frac{1}{KL} E(\sum_{ij} y_{i..j}^2) = JKL \sum_i t_i^2 + IJKL \sigma_b^2 + IJKL \sigma_{tb}^2 + \\ + IJL \sigma_{t'b}^2 + IJL \sigma_{tt'b}^2 + IJ \sigma^2$$

Subtraindo-se a $E(C)$, $E(SQT)$ e $E(SQB)$, vem:

$$E[SQR(a)] = KL(I-1)(J-1) \sigma_{tb}^2 + L(I-1)(J-1) \sigma_{tt'b}^2 + \\ + (I-1)(J-1) \sigma^2 .$$

Dividindo-se por $(I-1)(J-1)$:

$$E[QMR(a)] = KL \sigma_{tb}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2$$

e) Analogamente ao caso anterior: $QMT' = \frac{SQT'}{K-1}$, então:

$$E(QMT') = \frac{1}{(K-1)} E(SQT') ,$$

onde:

$$SQT' = \frac{1}{IJL} \sum_k T_k^2 - C$$

e

$$T'_k = IL \sum_j b_j + IJL t'_k + L \sum_{ij} (tb)_{ij} + IL \sum_j (t'b)_{kj} + \\ + L \sum_{ij} (tt'b)_{ikj} + \sum_{ijl} e_{iklj} ,$$

então:

$$\frac{1}{IJL} E(\sum_k T_k^2) = IKL \sigma_b^2 + KL \sigma_{tb}^2 + IJL \sum_k t_k^2 + IKL \sigma_{t'b}^2 + \\ + KL \sigma_{tt'b}^2 + K \sigma^2 ,$$

subtraindo-se a $E(C)$, vem:

$$E(SQT') = IJL \sum_k t_k^2 + IL(K-1) \sigma_{t'b}^2 + L(K-1) \sigma_{tt'b}^2 + \\ + (K-1) \sigma^2$$

dividindo-se por (K-1):

$$E(QMT') = \frac{IJL}{K-1} \sum_k t_k^2 + IL \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2$$

f) Partindo-se de $QMR(b) = \frac{SQR(b)}{(J-1)(K-1)}$, tem-se:

$$E[QMR(b)] = \frac{1}{(J-1)(K-1)} E[SQR(b)]$$

onde:

$$SQR(b) = \frac{1}{IL} \sum_{kj} y_{.k.j}^2 - C - SQT' - SQB$$

e,

$$y_{.k.j} = IL t'_k + IL b_j + L \sum_i (tb)_{ij} + IL (t'b)_{kj} + \\ + L \sum_i (tt'b)_{ikj} + \sum_{ij} e_{iklj}$$

então:

$$\frac{1}{IL} E\left(\sum_{kj} y_{.k.j}^2\right) = IJL \sum_k t_k^2 + IJKL \sigma_b^2 + JKL \sigma_{tb}^2 + \\ + IJKL \sigma_{t'b}^2 + JKL \sigma_{tt'b}^2 + JK \sigma^2$$

Subtraindo-se a $E(C)$, $E(SQT')$ e $E(SQB)$, vem:

$$E[SQR(b)] = IL(J-1)(K-1) \sigma_{t'b}^2 + \\ + L(J-1)(K-1) \sigma_{tt'b}^2 + \\ + (J-1)(K-1) \sigma^2$$

Dividindo-se por $(J-1)(K-1)$:

$$E[QMR(b)] = IL \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2$$

g) Analogamente ao caso anterior: $QMT \times T' = \frac{SQT \times T'}{(I-1)(K-1)}$, en
tão:

$$E(QMT \times T') = \frac{1}{(I-1)(K-1)} E(SQT \times T')$$

onde:

$$SQT \times T' = \frac{1}{JL} \sum_{ik} (TT'_{ik})^2 - C - SQT - SQT'$$

e

$$\begin{aligned} TT'_{ik} = & JL t_i + L \sum_j b_j + L \sum_j (tb)_{ij} + JL t'_k + \\ & + L \sum_j (t'b)_{kj} + JL tt'_{ik} + \\ & + L \sum_j (tt'b)_{ikj} + \sum_{j\ell} e_{ik\ell j} \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{JL} E\left[\sum_{ik} (TT'_{ik})^2\right] = & JKL \sum_i t_i^2 + IKL \sigma_b^2 + IKL \sigma_{tb}^2 + \\ & + IJL \sum_k t_k^2 + IKL \sigma_{t'b}^2 + \\ & + JL \sum_{ik} (tt')_{ik}^2 + IKL \sigma_{tt'b}^2 + \\ & + IK \sigma^2 . \end{aligned}$$

Subtraindo-se a $E(C)$, $E(SQT)$ e $E(SQT')$ vem:

$$E(SQT \times T') = JL \sum_{ik} (tt'_{ik})^2 + L(I-1)(K-1) \sigma_{tt'b}^2 + \\ + (I-1)(K-1) \sigma^2 ,$$

dividindo-se por $(I-1)(K-1)$:

$$E(QMT \times T') = \frac{JL}{(I-1)(K-1)} \sum_{ik} (tt'_{ik})^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2$$

h) Partindo-se de $QMR(c) = \frac{SQR(c)}{(I-1)(K-1)(J-1)}$, tem-se:

$$E[QMR(c)] = \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} E[SQR(c)]$$

onde:

$$SQR(c) = \frac{1}{L} \sum_{ijk} y_{ik.j}^2 - C - SQT - SQT' - SQB - \\ - SQT \times T' - SQR(a) - SQR(b)$$

e

$$y_{ik.j} = L t_i + L b_j + L (tb)_{ij} + L t'_k + L (t'b)_{kj} + \\ + L tt'_{ik} + L (tt'b)_{ikj} + \sum_{\ell} e_{ik\ell j} ,$$

então:

$$\frac{1}{L} E\left(\sum_{ijk} y_{ik.j}^2\right) = JKL \sum_i t_i^2 + IJKL \sigma_b^2 + IJKL \sigma_{tb}^2 + \\ + IJL \sum_k t_k^2 + IJKL \sigma_{t'b}^2 + \\ + JL \sum_{ik} (tt')_{ik}^2 + IJKL \sigma_{tt'b}^2 + IJK \sigma^2$$

Substituindo-se a $E(C)$, $E(SQT)$, $E(SQB)$, $E(SQT')$, $E(SQT \times T')$, $E[SQR(a)]$ e a $E[SQR(b)]$, vem:

$$E[SQR(c)] = L(I-1)(J-1)(K-1) \sigma_{tt'b}^2 + \\ + (I-1)(J-1)(K-1) \sigma^2 ,$$

dividindo-se por $(I-1)(K-1)(J-1)$:

$$E[QM \text{ Resíduo}(c)] = L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2 .$$

i) Analogamente ao caso anterior, $QMT^* = \frac{SQT^*}{L-1}$, então:

$$E(QMT^*) = \frac{1}{(L-1)} E(SQT^*)$$

onde:

$$SQT^* = \frac{1}{IJK} \sum_{\ell} T_{\ell}^{*2} - C$$

e

$$T^* = IK \sum_j b_j^2 + K \sum_{ij} (tb)_{ij}^2 + I \sum_{jk} (t'b)_{kj}^2 + \\ + \sum_{ijk} (tt'b)_{ikj}^2 + IJK t_{\ell}^{*2} + \sum_{ijk} e_{iklj}^2 ,$$

então:

$$\frac{1}{IJK} E\left(\sum_{\ell} T_{\ell}^{*2}\right) = IKL \sigma_b^2 + KL \sigma_{tb}^2 + IL \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \\ + IJK \sum_{\ell} t_{\ell}^{*2} + L \sigma^2 .$$

Subtraindo-se a $E(C)$, vem:

$$E(SQT^*) = IJK \sum_{\ell} t_{\ell}^2 + (L-1) \sigma^2,$$

dividindo-se por $(L-1)$:

$$E(QMT^*) = \frac{IJK}{(L-1)} \sum_{\ell} t_{\ell}^2 + \sigma^2.$$

j) Analogamente ao caso anterior; $QMT \times T^* = \frac{SQT \times T^*}{(I-1)(L-1)}$,
então:

$$E(QMT \times T^*) = \frac{1}{(I-1)(L-1)} E(SQT \times T^*)$$

onde:

$$SQT \times T^* = \frac{1}{JK} \sum_{i\ell} (TT_{i\ell}^*)^2 - C - SQT - SQT^*$$

e

$$\begin{aligned} TT^* = & JK t_i + K \sum_j b_j + K \sum_j (tb)_{ij} + \sum_{jk} (t'b)_{kj} + \\ & + \sum_{jk} (tt'b)_{ikj} + JK t_{\ell}^* + JK tt_{i\ell}^* + \\ & + \sum_{jk} e_{iklj}, \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{JK} E \left[\sum_{i\ell} (TT^*)_{i\ell}^2 \right] = & JKL \sum_i t_i^2 + IKL \sigma_b^2 + IKL \sigma_{tb}^2 + \\ & + IL \sigma_{t'b}^2 + IL \sigma_{tt'b}^2 + IJK \sum_{\ell} t_{\ell}^2 + \\ & + JK \sum_{i\ell} (tt^*)_{i\ell}^2 + IL \sigma^2. \end{aligned}$$

Subtraindo-se a $E(C)$, $E(SQT)$ e $E(SQT^*)$, vem:

$$E(SQT \times T^*) = JK \sum_{i\ell} (tt^*)_{i\ell}^2 + (I-1)(L-1) \sigma^2 ,$$

dividindo-se por $(I-1)(L-1)$:

$$E(QMT \times T^*) = \frac{JK}{(I-1)(L-1)} \sum_{i\ell} (tt^*)_{i\ell}^2 + \sigma^2 .$$

k) Partindo-se de $QMT' \times T^* = \frac{SQT' \times T^*}{(K-1)(L-1)}$, tem-se:

$$E(QMT' \times T^*) = \frac{1}{(K-1)(L-1)} E(SQT' \times T^*) ,$$

onde:

$$SQT' \times T^* = \frac{1}{IJ} \sum_{k\ell} (T' T^*)_{k\ell}^2 - C - SQT' - SQT^*$$

e

$$\begin{aligned} T' T^* = & I \sum_j b_j + IJ t'_k + IJ t^*_\ell + IJ (t' t^*)_{k\ell} + \\ & + \sum_{ij} (tb)_{ij} + I \sum_j (t' b)_{kj} + \\ & + \sum_{ij} (tt' b)_{ikj} + \sum_{ij} e_{ik\ell j} , \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{IJ} E \left[\sum_{k\ell} (T' T^*)_{k\ell}^2 \right] = & IKL \sigma_b^2 + IJL \sum_k t_k^2 + IJK \sum_\ell t_\ell^2 + \\ & + IJ \sum_{k\ell} (t' t^*)_{k\ell}^2 + KL \sigma_{tb}^2 + \\ & + IKL \sigma_{t'b}^2 + KL \sigma_{tt'b}^2 + KL \sigma^2 . \end{aligned}$$

Subtraindo-se a $E(C)$, $E(SQT')$ e $E(SQT^*)$, vem:

$$E(SQT' \times T^*) = IJ \sum_{k\ell} (t' t^*)_{k\ell}^2 + (K-1)(L-1) \sigma^2$$

dividindo-se por $(K-1)(L-1)$:

$$E(QMT' T^*) = \frac{IJ}{(K-1)(L-1)} \sum_{k\ell} (t' t^*)_{k\ell}^2 + \sigma^2$$

1) Partindo-se de $QMT \times T' \times T^* = \frac{SQT \times T' \times T^*}{(I-1)(K-1)(L-1)}$, tem-se:

$$E(QMT \times T' \times T^*) = \frac{1}{(I-1)(K-1)(L-1)} E(SQT \times T' \times T^*),$$

onde:

$$SQT \times T' \times T^* = \frac{1}{J} \sum_{i k \ell} (TT' T^*)_{i k \ell}^2 - C - SQT - SQT' - \\ - SQT^* - SQT \times T' - SQT \times T^* - SQT' \times T^*$$

e

$$TT' T^* = J t_i + \sum_j b_j + \sum_j (tb)_{ij} + J t'_k + \sum_j (t'b)_{kj} \\ + J (tt')_{ik} + \sum_j (tt'b)_{ik} + J t_{\ell}^* + \\ + J (tt^*)_{i\ell} + J (t't^*)_{k\ell} + J (tt't^*)_{ik\ell} + \\ + \sum_j e_{ik\ell j},$$

então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J} E \left[\sum_{ik\ell} (TT'T^*)_{ik\ell}^2 \right] = & JKL \sum_i t_i^2 + IJKL \sigma_b^2 + IKL \sigma_{tb}^2 + \\
& + IJL \sum_k t_k^2 + IJKL \sigma_{t'b}^2 + \\
& + JL \sum_{ik} (tt')_{ik}^2 + IKL \sigma_{tt'b}^2 + \\
& + IJK \sum_{\ell} t_{\ell}^2 + JK \sum_{i\ell} (tt^*)_{i\ell}^2 + \\
& + IJ \sum_{k\ell} (t't^*)_{k\ell}^2 + \\
& + J \sum_{ik\ell} (tt't^*)_{ik\ell}^2 + IKL \sigma^2 .
\end{aligned}$$

Subtraindo-se a $E(C)$, $E(SQT)$, $E(SQT')$, $E(SQT^*)$, $E(SQT \times T')$, $E(SQT \times T^*)$ e a $E(SQT' \times T^*)$, vem:

$$E(SQT \times T' \times T^*) = J \sum_{ik\ell} (tt't^*)_{ik\ell}^2 + (I-1)(K-1)(L-1) \sigma^2$$

dividindo-se por $(I-1)(K-1)(L-1)$,

$$E[QMT \times T' \times T^*] = \frac{J}{(I-1)(K-1)(L-1)} \sum_{ik\ell} (tt't^*)_{ik\ell}^2 + \sigma^2$$

m) Partindo-se de $QMR(d) = \frac{SQR(d)}{IK(J-1)(L-1)}$, tem-se:

$$E[QMR(d)] = \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} E[SQR(d)] ,$$

onde:

$$\begin{aligned}
SQR(d) = & \sum_{ijk\ell} y_{ik\ell j}^2 - \frac{1}{L} \sum_{ijk} y_{ik.j}^2 - SQT^* - SQT \times T^* - \\
& - SQT' \times T^* - SQT \times T' \times T^*
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 y_{iklj} = & t_i + b_j + (tb)_{ij} + t'_k + (t'b)_{kj} + tt'_{ik} + \\
 & + (tt'b)_{ikj} + t^*_l + tt^*_{il} + t't^*_{kl} + tt't^*_{ikl} + \\
 & + e_{iklj} ,
 \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned}
 \sum_{ijk\ell} E(y^2_{ikj\ell}) = & JKL \sum_i t^2_i + IJKL \sigma^2_b + IJKL \sigma^2_{tb} + \\
 & + IJL \sum_k t^2_k + IJKL \sigma^2_{t'b} + JL \sum_{ik} (tt')^2_{ik} + \\
 & + IJKL \sigma^2_{tt'b} + IJK \sum_\ell t^2_\ell + JK \sum_{i\ell} (tt^*)^2_{i\ell} + \\
 & + IJ \sum_{k\ell} (t't^*)^2_{k\ell} + J \sum_{ik\ell} (tt't^*)^2_{ik\ell} + \\
 & + IJKL \sigma^2 .
 \end{aligned}$$

Subtraindo-se: $\frac{1}{L} \sum_{ijk} E[Y^2_{ijk}]$; $E(SQT^*)$;
 $E(SQT \times T^*)$; $E(SQT' \times T^*)$ e $E(SQT \times T' \times T^*)$, vem:

$$E[SQR(d)] = IK(J-1)(L-1) \sigma^2 , ,$$

dividindo-se por $IK(J-1)(L-1)$, tem-se:

$$E[QMR(d)] = \sigma^2 .$$

3.3.3 - Testes de hipóteses e quadro de análise de variância

Segundo KEMPTHORNE (1952), CHAKRABARTI (1962) e PIMENTEL GOMES (1976), as hipóteses de nulidade usuais, nos experimentos em faixas, são geralmente:

$$H_0(1): t_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, I;$$

$$H_0(2): t'_k = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K;$$

$$H_0(3): tt'_{ik} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, I, \\ k = 1, 2, \dots, K;$$

representando, respectivamente, as hipóteses de nulidade para efeitos T, T' e para efeito da interação TxT'.

Dados os objetivos deste estudo, a essas hipóteses foram acrescentadas:

$$H_0(4): t^*_{\ell} = 0 \quad ; \quad \ell=1,2,\dots,L;$$

$$H_0(5): tt^*_{i\ell} = 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,I, \ell=1,2,\dots,L;$$

$$H_0(6): t't^*_{k\ell} = 0 \quad ; \quad k=1,2,\dots,K, \ell=1,2,\dots,L;$$

$$H_0(7): tt't^*_{ik\ell} = 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,I, k=1,2,\dots,K, \\ \ell=1,2,\dots,L;$$

que correspondem respectivamente às hipóteses de nulidade para efeito do tratamento T*, das interações TxT* e T'T* e para efeito da interação tripla entre os três tipos de tratamentos.

Essas hipóteses adicionais estão coerentes com aquelas sugeridas em HEDAYETULLAH *et alii* (1944) que embora sem discussões ou demonstrações teóricas, apresentaram um quadro para a análise de variância de um experimento com três linhagens de "arroz de inverno", seis datas de plantio e três espaçamentos.

Aqui, os resíduos adequados para os testes de hipótese ficaram evidentes, quando se observou a coluna relativa às esperanças dos quadrados médios, conforme o quadro 8.

Quadro 8 - Esquema de análise de variância e esperanças dos quadra dos médios, para experimentos em faixas com subparcelas subdivididas.

Causas da Variação	G.L.	E(QM)
Tratamentos T	(I-1)	$\sigma^2 + L\sigma_{tt'b}^2 + KL\sigma_{tb}^2 + \frac{JKL}{(I-1)} \sum_i t_i^2$
Blocos	(J-1)	$\sigma^2 + L\sigma_{tt'b}^2 + KL\sigma_{tb}^2 + IL\sigma_{t'b}^2 + IKL\sigma_b^2$
Resíduo (a)	(I-1)(J-1)	$\sigma^2 + L\sigma_{tt'b}^2 + KL\sigma_{tb}^2$
Tratamento T'	(K-1)	$\sigma^2 + L\sigma_{tt'b}^2 + IL\sigma_{t'b}^2 + \frac{IJL}{(K-1)} \sum_k t_k^2$
Resíduo (b)	(J-1)(K-1)	$\sigma^2 + L\sigma_{tt'b}^2 + IL\sigma_{t'b}^2$
Interação TxT'	(I-1)(K-1)	$\sigma^2 + L\sigma_{tt'b}^2 + \frac{JL}{(I-1)(K-1)} \sum_{ik} (tt')_{ik}^2$
Resíduo (c)	(I-1)(K-1)(J-1)	$\sigma^2 + L\sigma_{tt'b}^2$
Tratamento T*	(L-1)	$\sigma^2 + \frac{IJK}{(L-1)} \sum_\ell t_\ell^2$
Interação TxT*	(I-1)(L-1)	$\sigma^2 + \frac{JK}{(I-1)(L-1)} \sum_{i\ell} (tt^*)_{i\ell}^2$
Interação T'xT*	(K-1)(L-1)	$\sigma^2 + \frac{IJ}{(K-1)(L-1)} \sum_{k\ell} (t't^*)_{k\ell}^2$
Interação TxT'T*	(I-1)(K-1)(L-1)	$\sigma^2 + \frac{J}{(I-1)(K-1)(L-1)} \sum_{ik\ell} (tt't^*)_{ik\ell}^2$
Resíduo (d)	IK(J-1)(L-1)	σ^2
TOTAL	IJKL-1	

Assim, quando os dados são balanceados, como sugerido nas deduções aqui efetuadas, ficam bem determinados os critérios para os respectivos testes, conforme se verifica no quadro 9.

Quadro 9 - Critérios para os testes de hipóteses.

Hipóteses	G.L.	Valores de F
$H_o(1)$	$(I-1); (I-1)(J-1)$	$[QMT]/[QRes(a)]$
$H_o(2)$	$(K-1); (J-1)(K-1)$	$[QMT']/[QRes(b)]$
$H_o(3)$	$(I-1)(K-1); (I-1)(J-1)(K-1)$	$[QMT \times T']/[QRes(c)]$
$H_o(4)$	$(L-1); IK(J-1)(L-1)$	$[QMT^*]/[QRes(d)]$
$H_o(5)$	$(I-1)(L-1); IK(J-1)(L-1)$	$[QMT \times T^*]/[QRes(d)]$
$H_o(6)$	$(K-1)(L-1); IK(J-1)(L-1)$	$[QMT' \times T^*]/[QRes(d)]$
$H_o(7)$	$(I-1)(K-1)(L-1); IK(J-1)(L-1)$	$[QMT \times T' \times T^*]/[QRes(d)]$

Além das estruturas apresentadas para os testes de hipóteses, poderiam ser considerados os casos referentes aos desdobramentos das interações tais como: níveis de T num mesmo nível de T', e outros análogos. Entretanto, todos esses casos serão abordados no método de comparações múltiplas descrito a seguir.

3.4 - Variâncias de Contrastes

Considerando-se a possibilidade de rejeição de ao menos uma das hipóteses de nulidade, formularam-se as regras para os testes entre as estimativas dos efeitos dos parâmetros envolvidos.

Para tanto, foram obtidas as estimativas das variâncias das estimativas dos doze tipos possíveis de contrastes entre duas médias de tratamentos, conforme demonstrado a seguir.

a) Diferença entre duas médias de tratamentos T:

$$T_i = \hat{m}_i - \hat{m}_i,$$

Dado que $T_i = \sum_{jkl} y_{iklj}$ e usando-se as restrições citadas em (3.2.1), vem:

$$T_i = JKL t_i + KL \sum_j b_j + KL \sum_j (tb)_{ij} + L \sum_{kj} (t'b)_{kj} + \\ + L \sum_{kj} (tt'b)_{ikj} + \sum_{jkl} e_{iklj}$$

$$\hat{m}_i = \frac{T_i}{JKL} = t_i + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (tb)_{ij} + \frac{1}{JK} \sum_{kj} (t'b)_{kj} + \\ + \frac{1}{JK} \sum_{jk} (tt'b)_{ikj} + \frac{1}{JKL} \sum_{jkl} e_{iklj}.$$

Por analogia:

$$\begin{aligned}\hat{m}_{i'} &= t_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (tb)_{i',j} + \frac{1}{JK} \sum_{kj} (t'b)_{kj} + \\ &+ \frac{1}{JK} \sum_{jk} (tt'b)_{i',kj} + \frac{1}{JKL} \sum_{jkl} e_{i',jkl}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Y}_i &= t_i - t_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j (tb_{ij} - tb_{i',j}) + \\ &+ \frac{1}{JK} \sum_{kj} (tt'b_{ikj} - tt'b_{i',kj}) + \\ &+ \frac{1}{JKL} \sum_{jkl} (e_{iklj} - e_{i',klj}),\end{aligned}$$

e então:

$$E(\bar{Y}_i) = t_i - t_{i'}$$

Por outro lado,

$$V(\bar{Y}_i) = E[\bar{Y}_i - E(\bar{Y}_i)]^2$$

substituindo-se tem-se:

$$V(\bar{Y}_i) = E \left[\frac{1}{J} \sum_j (tb_{ij} - tb_{i',j}) + \frac{1}{JK} \sum_{kj} (tt'b_{ikj} - tt'b_{i',kj}) + \frac{1}{JKL} \sum_{jkl} (e_{iklj} - e_{i',klj}) \right]^2$$

$$V(\bar{Y}_i) = \frac{1}{J^2} 2J \sigma_{tb}^2 + \frac{1}{J^2 K^2} 2KJ \sigma_{tt'b}^2 + \frac{1}{J^2 K^2 L^2} 2JKL \sigma^2$$

$$V(\bar{Y}_i) = \frac{2}{JKL} (KL \sigma_{tb}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2)$$

e sua estimativa:

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKL} [\text{QM Resíduo(a)}] ,$$

que é um resultado concordante com aqueles encontrados em CHAKRABARTI (1962), FEDERER (1955), COCHRAN e COX (1976) e ZIMMERMANN (1973) para a mesma variância quando o ensaio em faixas, com dois tratamentos, é delineado em blocos casualizados.

b) Diferença entre duas médias de tratamentos T' :

$$\hat{Y}_k = \hat{m}_k - \hat{m}_{k'} .$$

Dado que:

$$T'_k = \sum_{ijl} y_{iklj} ,$$

e de acordo com as condições anteriores, vem:

$$\begin{aligned} T'_k = & IL \sum_j b_j + IJL t'_k + L \sum_{ij} (tb)_{ij} + IL \sum_j (t'b)_{kj} + \\ & + L \sum_{ij} (tt'b)_{ikj} + \sum_{ijl} e_{iklj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_k = \frac{t'_k}{IJL} = & \frac{1}{J} \sum_j b_j + t'_k + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (tb)_{ij} + \frac{1}{J} \sum_j (t'b)_{kj} + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (tt'b)_{ikj} + \frac{1}{IJL} \sum_{ijl} e_{iklj} . \end{aligned}$$

Por analogia:

$$\begin{aligned}\hat{m}_{k'} = & \frac{1}{J} \sum_j b_j + t'_{k'} + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (tb)_{ij} + \frac{1}{J} \sum_j (t'b)_{k'j} + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (tt'b)_{ik'j} + \frac{1}{IJL} \sum_{ijl} e_{ik'lj}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_k = & t'_k - t'_{k'} + \frac{1}{J} \sum_i (t'b_{kj} - t'b_{k'j}) + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (tt'b_{ikj} - tt'b_{ik'j}) + \\ & + \frac{1}{IJL} \sum_{ijl} (e_{iklj} - e_{ik'lj}) \quad ,\end{aligned}$$

então:

$$E(\hat{Y}_k) = t'_k - t'_{k'} \quad .$$

Por outro lado:

$$V(\hat{Y}_k) = E[\hat{Y}_k - E(\hat{Y}_k)]^2,$$

$$\therefore V(\hat{Y}_k) = E \left[\begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j (t'b_{kj} - t'b_{k'j}) + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (tt'b_{ikj} - tt'b_{ik'j}) + \\ & + \frac{1}{IJL} \sum_{ijl} (e_{iklj} - e_{ik'lj}) \end{aligned} \right]^2$$

$$\therefore V(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJL} (IL \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) \quad ,$$

e sua estimativa será:

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJL} [QMR(b)] , \quad ,$$

que é um resultado concordante com aqueles encontrados em CHAKRABARTI (1962), FEDERER (1955), COCHRAN e COX (1976) e ZIMMERMANN (1973), para a mesma variância quando o ensaio em faixas com dois tratamentos é delineado em blocos casualizados.

c) Diferença entre duas médias de tratamentos T^* :

$$\hat{Y}_\ell = \hat{m}_\ell - \hat{m}_\ell , \quad .$$

Dado que $T_\ell^* = \sum_{ijk} y_{ik\ell j}$ ou, de acordo com as condições anteriores:

$$\begin{aligned} T_\ell^* &= IK \sum_j b_j + K \sum_{ij} (tb)_{ij} + I \sum_{jk} (t'b)_{kj} + \\ &\quad + \sum_{ijk} (tt'b)_{ikj} + IJK t_\ell^* + \sum_{ijk} e_{ik\ell j} \\ \hat{m}_\ell &= \frac{T_\ell^*}{IJK} = \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (tb)_{ij} + \frac{1}{JK} \sum_{jk} (t'b)_{kj} + \\ &\quad + \frac{1}{IJK} \sum_{ijk} (tt'b)_{ikj} + t_\ell^* + \frac{1}{IJK} \sum_{ijk} e_{ik\ell j} . \end{aligned}$$

Por analogia:

$$\begin{aligned}\hat{m}_{\ell'} = & \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (tb)_{ij} + \frac{1}{JK} \sum_{jk} (t'b)_{kj} + \\ & + \frac{1}{IJK} \sum_{ijk} (tt'b)_{ikj} + t_{\ell'}^* + \frac{1}{IJK} \sum_{ijk} e_{ik\ell'j}\end{aligned}$$

$$E(\hat{Y}_{\ell}) = t_{\ell}^* - t_{\ell'}^*,$$

$$V(\hat{Y}_{\ell}) = E \left[\frac{1}{IJK} \sum_{ijk} (e_{ik\ell j} - e_{ik\ell'j}) \right]^2$$

$$\therefore V(\hat{Y}_{\ell}) = \frac{1}{I^2 J^2 K^2} 2 IJK \sigma^2$$

$$V(\hat{Y}_{\ell}) = \frac{2}{IJK} \sigma^2$$

e sua estimativa

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell}) = \frac{2}{IJK} [QMR(d)] .$$

d) Diferença entre duas médias de tratamentos T, dentro de um mesmo nível de tratamento T':

$$\hat{Y}_{i/k} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i'k} .$$

Dado que:

$$T_i T'_k = \sum_{j\ell} y_{ik\ell j} ,$$

então:

$$T_i T'_k = JL t_i + L \sum_j b_j + L \sum_j (tb)_{ij} + JL t'_k + L \sum_j (t'b)_{kj} + \\ + JL (tt')_{ik} + L \sum_j (tt'b)_{ikj} + \sum_{j\ell} e_{ik\ell j},$$

donde:

$$\hat{m}_{ik} = \frac{T_i T'_k}{JL} = t_i + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (tb)_{ij} + t'_k + \\ + \frac{1}{J} \sum_j (t'b)_{kj} + tt'_{ik} + \frac{1}{J} \sum_j (tt'b)_{ikj} + \\ + \frac{1}{JL} \sum_{j\ell} e_{ik\ell j}.$$

Por analogia:

$$\hat{m}_{i',k} = t_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (tb)_{i',j} + t'_k + \\ + \frac{1}{J} \sum_j (t'b)_{kj} + tt'_{i',k} + \frac{1}{J} \sum_j (tt'b)_{i',kj} + \\ + \frac{1}{JL} \sum_{j\ell} e_{i',k\ell j}$$

$$\hat{Y}_{i/k} = t_i - t_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j [(tb)_{ij} - (tb)_{i',j}] + \\ + (tt'_{ik} - tt'_{i',k}) + \frac{1}{J} \sum_j [(tt'b)_{ikj} - (tt'b)_{i',kj}] + \\ + \frac{1}{JL} \sum_{j\ell} (e_{ik\ell j} - e_{i',k\ell j})$$

então:

$$E(\hat{Y}_{i/k}) = (t_i - t_{i'}) + (tt'_{ik} - tt'_{i',k})$$

$$e \quad V(\hat{Y}_{i/k}) = E \left[\begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j (tb_{ij} - tb_{i',j}) + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j (tt'b_{ikj} - tt'b_{i',kj}) + \\ & + \frac{1}{JL} \sum_{j\ell} (e_{ik\ell j} - e_{i',k\ell}) \end{aligned} \right]^2$$

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JL} (L \sigma_{tb}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) .$$

Multiplicando-se e dividindo-se por K, não se altera o valor da $V(\hat{Y}_{i/k})$ e ainda, agrupando-se convenientemente, tem-se:

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKL} \left[\begin{aligned} & (KL \sigma_{tb}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) + \\ & + (K-1)(L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) \end{aligned} \right]$$

e sua estimativa será:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKL} [QMR(a) + (K-1) QMR(c)] ,$$

que é um resultado concordante com aqueles encontrados em CHAKRABARTI (1962), COCHRAN e COX (1976), ZIMMERMANN (1973) para a mesma variância quando o ensaio em faixas com dois tratamentos é delineado em blocos casualizados.

A variância do contraste assim estimado terá n' graus de liberdade, que, de acordo com a fórmula de SATTERTHWAIT (1946), será:

$$n' = \frac{[\text{QM Resíduo}(a) + (K-1) \text{QM Resíduo}(c)]^2}{\frac{[\text{QM Resíduo}(a)]^2}{(I-1)(J-1)} + \frac{(K-1)^2 [\text{QM Resíduo}(c)]^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}$$

e) Diferença entre duas médias de tratamentos T' dentro de um mesmo nível de tratamento T:

$$\hat{Y}_{k/i} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{ik'}$$

Por processos idênticos ao usado nos itens anteriores, tem-se:

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{JL} (L \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2)$$

Multiplicando-se e dividindo-se por I, e ainda agrupando-se convenientemente:

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{IJL} \left[(IL \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) + (I-1)(L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) \right]$$

e sua estimativa

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{IJL} [\text{QMR}(b) + (I-1) \text{QMR}(c)]$$

que é um resultado concordante com aqueles encontrados em CHAKRABARTI (1962), COCHRAN e COX (1976) e ZIMMERMANN (1973) para a mesma variância quando o ensaio em faixas com dois tratamentos é delineado em blocos casualizados.

A variância do contraste assim estimado terá n' graus de liberdade, que de acordo com a fórmula de SAT TERTHWAITE (1946) será:

$$n' = \frac{[\text{QM Resíduo}(b) + (I-1) \text{QM Resíduo}(c)]^2}{\frac{[\text{QM Resíduo}(b)]^2}{(J-1)(K-1)} + \frac{(I-1)^2 [\text{QM Resíduo}(c)]^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}$$

f) Diferença entre duas médias de tratamentos T dentro de um mesmo nível de tratamento T*:

$$\bar{Y}_{i/\ell} = \hat{m}_{i\ell} - \hat{m}_{i'\ell}$$

Por processos idênticos ao usado nos itens anteriores, tem-se:

$$V(\bar{Y}_{i/\ell}) = \frac{2}{JK} (K \sigma_{tb}^2 + \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2),$$

multiplicando-se e dividindo-se por L e agrupando-se convenientemente:

$$V(\bar{Y}_{i/\ell}) = \frac{2}{JKL} [KL \sigma_{tb}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2 + (L-1) \sigma^2]$$

se sua estimativa:

$$\hat{V}(\bar{Y}_{i/\ell}) = \frac{2}{JKL} [\text{QMR}(a) + (L-1) \text{QMR}(d)]$$

com n' graus de liberdade, onde:

$$n' = \frac{[QM \text{ Resíduo}(a) + (L-1) QM \text{ Resíduo}(d)]^2}{\frac{[QM \text{ Resíduo}(a)]^2}{(I-1)(J-1)} + \frac{(L-1)^2 [QM \text{ Resíduo}(d)]^2}{IK(J-1)(L-1)}}$$

g) Diferença entre duas médias de tratamentos T* dentro de um mesmo nível de tratamento T:

$$\hat{Y}_{\ell/i} = \hat{m}_{i\ell} - \hat{m}_{i\ell'}$$

Do mesmo modo tem-se

$$V(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{2}{JK} \sigma^2$$

e sua estimativa será:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{2}{JK} [QM R(d)]$$

h) Diferença entre duas médias de tratamentos T' dentro de um mesmo nível de tratamento T*:

$$\hat{Y}_{k/\ell} = \hat{m}_{k\ell} - \hat{m}_{k'\ell}$$

De forma idêntica às adotadas anteriormente,

tem-se:

$$V(\hat{Y}_{k/\ell}) = \frac{2}{IJ} (I \sigma_{t'b}^2 + \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2)$$

Multiplicando-se e dividindo-se por L e agrupando-se convenientemente, tem-se:

$$V(\bar{Y}_{k/\ell}) = \frac{2}{IJL} [(IL \sigma_t^2 'b + L \sigma_{tt}^2 'b + \sigma^2) + (L-1) \sigma^2]$$

e sua estimativa:

$$\hat{V}(\bar{Y}_{k/\ell}) = \frac{2}{IJL} [QMR(b) + (L-1) QMR(d)] ,$$

com n' graus de liberdade, onde:

$$n' = \frac{[QM \text{ Resíduo}(b) + (L-1) QM \text{ Resíduo}(d)]^2}{\frac{[QM \text{ Resíduo}(b)]^2}{(K-1)(J-1)} + \frac{(L-1)^2 [QM \text{ Resíduo}(d)]^2}{IK(J-1)(L-1)}}$$

i) Diferença entre duas médias de tratamentos T^* dentro de um mesmo nível de tratamento T' :

$$\bar{Y}_{\ell/k} = \hat{m}_{k\ell} - \hat{m}_{k\ell} ,$$

Por processos idênticos aos usados anteriormente, tem-se:

$$V(\bar{Y}_{\ell/k}) = \frac{2}{IJ} \sigma^2$$

e sua estimativa:

$$\hat{V}(\bar{Y}_{\ell/k}) = \frac{2}{IJ} [QMR(d)]$$

j) Diferença entre duas médias de tratamentos T, dentro de uma mesma combinação T'T*:

$$\bar{Y}_{i/kl} = \bar{m}_{ikl} - \bar{m}_{i'kl}.$$

A variância do contraste dado pela fórmula:

$$V(\bar{Y}_{i/kl}) = E[\bar{Y}_{i/kl} - E(\bar{Y}_{i'kl})]^2$$

é igual a:

$$V(\bar{Y}_{i/kl}) = \frac{2}{J} (\sigma_{tb}^2 + \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2)$$

Multiplicando-se e dividindo-se por KL e agrupando-se convenientemente, vem:

$$V(\bar{Y}_{i/kl}) = \frac{2}{JKL} \left[(KL \sigma_{tb}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) + (K-1)(L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) + K(L-1) \sigma^2 \right]$$

cujas estimativas é dada por:

$$V(\bar{Y}_{i/kl}) = \frac{2}{JKL} [QMR(a) + (K-1) QMR(c) + K(L-1) QMR(d)] ,$$

com n' graus de liberdade, onde:

$$n' = \frac{[QM \text{ Resíduo}(a) + (K-1) QM \text{ Resíduo}(c) + K(L-1) QM \text{ Resíduo}(d)]^2}{\frac{[QM \text{ Resíduo}(a)]^2}{(I-1)(J-1)} + \frac{(K-1)^2 [QM \text{ Resíduo}(c)]^2}{(I-1)(J-1)(K-1)} + \frac{K^2 (L-1)^2 [QM \text{ Resíduo}(d)]^2}{IK(J-1)(L-1)}}$$

k) Diferença entre duas médias de tratamentos T' , dentro de uma mesma combinação TT^* :

$$\hat{Y}_{k/il} = \hat{m}_{ikl} - \hat{m}_{ik'l}$$

A variância do contraste em questão será:

$$V(\hat{Y}_{k/il}) = \frac{2}{J} (\sigma_{t'b}^2 + \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2)$$

Multiplicando-se e dividindo-se por IL , e ainda agrupando-se convenientemente, tem-se:

$$V(\hat{Y}_{k/il}) = \frac{2}{IJL} \left[\begin{aligned} & (IL \sigma_{t'b}^2 + L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2) + \\ & + [(I-1) L \sigma_{tt'b}^2 + \sigma^2] + \\ & + [I(L-1)\sigma^2] \end{aligned} \right]$$

e sua estimativa:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/il}) = \frac{2}{IJL} [QMR(b) + (I-1) QMR(c) + I(L-1) QMR(d)] ,$$

com n' graus de liberdade, onde:

$$n' = \frac{[QM \text{ Resíduo}(b) + (I-1) QM \text{ Resíduo}(c) + I(L-1) QM \text{ Resíduo}(d)]^2}{\frac{[QM \text{ Resíduo}(b)]^2}{(K-1)(J-1)} + \frac{(I-1)^2 [QM \text{ Resíduo}(c)]^2}{(I-1)(J-1)(K-1)} + \frac{I^2 (L-1)^2 [QM \text{ Resíduo}(d)]^2}{IK(J-1)(L-1)}}$$

- 1) Diferença entre duas médias de tratamentos T^* dentro de uma mesma combinação $T'T$:

$$\bar{Y}_{\ell/ik} = \bar{m}_{ik\ell} - \bar{m}_{ik\ell},$$

Para o contraste em estudo, tem-se:

$$V(\bar{Y}_{\ell/ik}) = \frac{2}{J} \sigma^2$$

e sua estimativa será:

$$\hat{V}(\bar{Y}_{\ell/ik}) = \frac{2}{J} [QMR(d)]$$

3.5 - Comparações Múltiplas

Visando à estruturação dos contrastes entre duas médias de tratamentos, foram estudados doze casos que constituem os de maior interesse do ponto de vista de aplicação. Em cada caso foi estabelecido o contraste propriamente dito, determinada a sua variância e, quando cabível, deduzido o número de graus de liberdade pela fórmula de SATTERTHWAITTE (1946).

Com estes elementos é possível utilizar-se qualquer dos métodos clássicos de comparações múltiplas, desde que estejam resguardadas as pressuposições do modelo. Nesse estudo optou-se pelo critério de Tukey, por sua

versatilidade e aplicabilidade.

Assim, com base na diferença mínima significativa, dada por $\Delta = q \sqrt{1/2 \hat{V}(\bar{Y})}$, onde q é o valor da amplitude total estudentizada e $\hat{V}(\bar{Y})$ é a estimativa da variância da estimativa do contraste em questão, foram obtidas:

a) Para contrastes entre médias de tratamento T:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{\text{QM Resíduo(a)}}{JKL}} ; q_{\alpha; I; (I-1)(J-1)}$$

b) Para contrastes entre médias de tratamentos T':

$$\Delta = q \sqrt{\frac{\text{QM Resíduo(b)}}{IJL}} ; q_{\alpha; K; (K-1)(J-1)}$$

c) Para contrastes entre médias de tratamentos T*:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{\text{QM Resíduo(d)}}{IJK}} ; q_{\alpha; L; IK(J-1)(L-1)}$$

d) Para contrastes entre médias de tratamentos T dentro de um mesmo nível de tratamento T':

$$\Delta = q \sqrt{\frac{\text{QM Resíduo(a)} + (K-1) \text{QM Resíduo(c)}}{JKL}} ; q_{\alpha; I; n'}$$

onde n' é obtido conforme 3.4.1.d.

- e) Para contrastes entre médias de tratamentos T' dentro de um mesmo nível de T:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{\text{QM Resíduo}(b) + (I-1) \text{QM Resíduo}(c)}{IJL}} ; q_{\alpha; K; n'}$$

onde n' é obtido conforme 3.4.1.e.

- f) Para contrastes entre médias de tratamentos T, dentro de um mesmo nível de tratamento T*:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{\text{QM Resíduo}(a) + (L-1) \text{QM Resíduo}(d)}{JKL}} ; q_{\alpha; I; n'}$$

onde n' é obtido conforme 3.4.1.f.

- g) Para contrastes entre médias de tratamentos T* dentro de um mesmo nível de tratamento T:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{\text{QM Resíduo}(d)}{JK}} ; q_{\alpha; L; IK(J-1)(L-1)}$$

- h) Para contrastes entre médias de tratamentos T' dentro de um mesmo nível de tratamento T*:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{\text{QM Resíduo}(b) + (L-1) \text{QM Resíduo}(d)}{IJL}} ; q_{\alpha; K; n'}$$

onde n' é obtido conforme 3.4.1.h.

- i) Para contrastes entre médias de tratamentos T^* dentro de um mesmo nível de tratamento T' :

$$\Delta = q \sqrt{\frac{QM \text{ Resíduo}(d)}{IJ}} \quad ; \quad q_{\alpha; L; IK(J-1)(L-1)}$$

- j) Para contrastes entre médias de tratamentos T dentro de uma mesma combinação $T'T^*$:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{QM \text{ Resíduo}(a) + (K-1) QM \text{ Resíduo}(c) + K(L-1) QM \text{ Resíduo}(d)}{JKL}}$$

$q_{\alpha; I; n'}$, onde n' é obtido conforme 3.4.1.j.

- k) Para contrastes entre médias de tratamentos T' dentro de uma mesma combinação TT^* :

$$\Delta = q \sqrt{\frac{QM \text{ Resíduo}(b) + (I-1) QM \text{ Resíduo}(c) + I(L-1) QM \text{ Resíduo}(d)}{IJL}}$$

$q_{\alpha; K; n'}$; onde n' é obtido conforme 3.4.1.k.

- l) Para contrastes entre médias de tratamentos T^* dentro de uma mesma combinação $T'T$:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{QM \text{ Resíduo}(d)}{J}} \quad ; \quad q_{\alpha; L; IK(J-1)(L-1)}$$

4. UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Com o objetivo de ilustrar as técnicas sugeridas nas deduções do item 3, apresenta-se a seguir um exemplo de aplicação, onde foram considerados:

T = duas épocas de plantio: 11/09/78 e 31/10/78;

T' = três variedades de cana-de-açúcar: CB 41-76, IAC 51-205 e NA 56-79;

T* = número de gemas por colmo: uma e três.

O experimento foi conduzido em cinco repetições, em blocos ao acaso, considerando-se T e T' em faixas e T* como subtratamento em cada combinação TT', conforme ilustrado no esquema seguinte:

	T_2^1		T_1^1		T_3^1	
T_1	T_1^*	T_2^*	T_2^*	T_1^*	T_2^*	T_1^*
T_2	T_2^*	T_1^*	T_1^*	T_2^*	T_2^*	T_1^*

Os pesos médios dos colmos, em kg/parcela, constam do Quadro 10.

Quadro 10 - Peso médio dos colmos, em kg por parcela.

VARIETADES	ÉPOCAS	GEMAS	I	II	III	IV	V
CB 41-76	1ª	1	272,70	318,40	316,20	246,00	275,00
		3	324,50	320,10	297,30	331,20	296,10
	2ª	1	231,50	229,00	201,00	192,20	205,50
		3	196,00	232,00	232,00	273,20	244,00
IAC 51/205	1ª	1	180,50	195,90	220,90	186,50	229,50
		3	248,70	245,00	217,50	249,50	255,00
	2ª	1	155,00	188,00	180,50	181,50	128,00
		3	218,70	209,70	202,00	222,20	225,50
NA 56-79	1ª	1	144,70	98,50	146,10	79,00	100,50
		3	245,80	265,40	227,80	260,80	228,50
	2ª	1	105,50	127,20	132,00	184,20	156,50
		3	193,00	192,00	221,00	216,00	165,30

Conforme as regras deduzidas em 3.3.3, obt_eve-se a análise de variância que consta do Quadro 11.

Quadro 11 - Análise de variância dos pesos médios dos colmos.

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	4	1.036,0876	259,0219	-
Épocas	1	23.340,5926	23.340,5926	35,37**
Resíduo (a)	4	2.639,2424	659,8106	-
Variedades	2	77.686,2223	38.843,1112	207,67**
Resíduo (b)	8	1.496,3094	187,0387	-
Época x Variedade	2	11.221,0564	5.610,5282	14,67**
Resíduo (c)	8	3.060,3286	382,5411	-
Gemas	1	45.254,0806	45.254,0806	63,75**
Época x Gema	1	2.133,6808	2.133,6808	3,01
Variedade x Gema	2	12.421,8904	6.210,9452	8,75**
Época x Variedade x Gema	2	5.112,7922	2.556,3961	3,60
Resíduo (d)	24	17.037,2760	709,8865	-
Total	59	202.439,5593		

Através dos procedimentos descritos em (3.4.2) foram obtidas as seguintes diferenças mínimas significativas (DMS), relativas ao método de Tukey.

Quadro 12 - Contrastes entre duas médias de tratamentos, suas respectivas variâncias e a diferença mínima significativa (DMS) calculada pelo método de Tukey, à taxa de 0,05 de probabilidade.

CONTRASTE	n'	$\bar{V}(\bar{Y})$	DMS
$\bar{Y}_i$	4	43,9874	18,43
$\bar{Y}_k$	8	18,7039	12,36
$\bar{Y}_l$	24	47,3258	14,20
$\bar{Y}_{i/k}$	11	94,9929	21,43
$\bar{Y}_{k/i}$	14	56,9580	19,75
$\bar{Y}_{i/l}$	14	91,3131	20,47
$\bar{Y}_{l/i}$	24	94,6515	20,09
$\bar{Y}_{k/l}$	31	89,6925	23,34
$\bar{Y}_{l/k}$	24	141,9773	24,60
$\bar{Y}_{i/kl}$	34	236,9702	31,33
$\bar{Y}_{k/il}$	37	198,9353	34,47
$\bar{Y}_{l/ik}$	24	283,9546	34,79

5. CONCLUSÕES

De um modo geral, concluiu-se que:

- 5.1 - O modelo linear adequado para a análise de ensaios em faixas com subparcelas subdivididas, pode ser obtido através da inclusão dos parâmetros relativos ao tratamento secundário, no modelo tradicional dos experimentos em faixas.
- 5.2 - Na análise de variância de ensaios em faixas com subparcelas subdivididas, pode-se identificar duas partes distintas. A primeira envolvendo os tratamentos principais numa estrutura análoga ao esquema usual dos experimentos em faixas e a segunda constituída do tratamento secundário e suas interações com os tratamentos principais.

- 5.3 - Os componentes de variância confirmaram a analogia referida na conclusão anterior, no tocante aos resíduos apropriados para os testes adequados a cada tipo de tratamento e suas interações.
- 5.4 - As variâncias dos contrastes de interesse para uso nos critérios de comparações múltiplas se adequaram a cada parte anteriormente citada da estrutura da análise de variância, isto é, onde envolveu os tratamentos principais e sua interação, como experimentos em faixas e onde envolveu o tratamento secundário e suas interações com os principais, como experimento em parcelas subsubdivididas.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, R.L. e T.A. BANCROFT, 1952. Statistical Theory in Research. McGraw-Hill, Nova York, 399 pp.

CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. Asia Publishing House, Londres, 120 pp.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1976. Diseños Experimentales. 3ª ed. Trillas, Mexico, 661 pp.

FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design. 1ª ed., McMillan Co., Nova York, 544 pp.

GOULDEN, C.H., 1939. Methods of Statistical Analysis. Wiley, Nova York, 151 pp.

HEDAYETULLAH, S.; S. SEN e K.R. NAIR, 1944. Influence of Dates of Planting and Spacings on Some Winter Varieties of Rice. Indian J. Agr. Sci., 14: 248-259.

KEMPTHORNE, O., 1952. The Design and Analysis of Experiments. 1ª ed. Wiley, Nova York, 631 pp.

LOMA, J.L. de La, 1966. Experimentación Agrícola, 2ª ed. México. Union Tipográfica Editorial Hispano Americana, 495 pp.

NAIR, K.R., 1944. Calculation of the standard error and tests of significance of different types of treatment comparisons in split-plot and steep arrangements of fields experiments. Indian J. Agr. Sci., 14: 315-319.

NOGUEIRA, I.R., 1962. Emprego do cálculo de matrizes na dedução de importante fórmula da análise estatística. Boletim Técnico-Científico, ESALQ/USP, 1: 1-8.

PANSE, V.G. e P.V. SUKHATME, 1963. Métodos Estadísticos para Investigadores Agrícolas. 2ª ed. México, Fondo de Cultura Econômica, 359 pp.

PIMENTEL GOMES, F., 1966. Componentes de Variância. Apostila mimeografada. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - USP, Piracicaba.

PIMENTEL GOMES, F., 1976. Curso de Estatística Experimental. 6ª ed. Nobel, Piracicaba, 430 pp.

SATTERTHWAITE, F.E., 1946. An approximate distribution of estimates of variance components. Biometrics, 2: 110-114.

ZIMMERMANN, F.J.P., 1973. Análise de um experimento de adubação e calagem em milho, executado num delineamento em faixa durante oito anos no mesmo local. Piracicaba, ESALQ/USP. 93 pp. [Dissertação de Mestrado].