APLICAÇÃO DE MODELOS LINEARES EM
EXPERIMENTOS COM DADOS CATEGORIZADOS

DALTON GERALDO GUAGLIANONI

LICENCIADO EM MATEMÁTICA

Orientadora: Profª Drª MARLI DE BEM GOMES

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: "Estatística e Experimentação Agronômica".

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Outubro de 1986

À

Neusa Maria Nunes Guaglianoni
Patrick Nunes de Oliveira Guaglianoni
Erick Nunes de Oliveira Guaglianoni
Elvira Borelli Guaglianoni

DEDICO

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Marly de Bem Gomes pela orientação, sugestões, compreensão e amizade.

Ao Professor Rômeu Magnani pelo companheirismo, incentivo e amizade demonstrados em todas as horas.

Aos Docentes do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP pelos bons ensinamentos transmitidos.

A Maria Izalina Ferreira Alves, Octávio Frassetto, Rosa Maria Alves pelas gentilezas e prestatividades.

Ao Professor Doutor Carlos Felício Vanni e Professora Doutora Maria Aparecida Rodrigues de Lima Grande Chefes do Departamento de Ciências da Educação do ILCSE/UNESP pelo incentivo e compreensão os quais concorreram para a realização deste trabalho.

Aos amigos José Sebastião Soares e Luís Fernando Coletti pelos serviços de datilografia prestados.

Í N D I C E

	PÁGINA
RESUMO	vi
SUMMARY	viii
1. INTRODUÇÃO	01
2. REVISÃO DA LITERATURA	04
3. METODOLOGIA	10
3.1. Metodologia GSK	10
3.2. Tabela de Classificação Cruzadas mais Usuais	22
3.3. Aplicação do Método "GSK" em um Experimento Odontológico	35
3.3.1. O Experimento	35
3.3.2. Metodologia	36
3.3.3. Análise do experimento pelo modelo GSK	39
3.3.3.1. Matriz das proporções obser- vadas $\underline{p}$	39
3.3.3.2. Matriz de variâncias e cova- riâncias $\underline{V}(\underline{p})$	39
3.3.3.3. Matriz $\underline{A}$	42
3.3.3.4. Matriz $\underline{X}$	43
3.3.3.5. Matriz $\underline{S}^{-1}$	46
3.3.3.6. Matriz $\underline{F}(\underline{p})$	47
3.3.3.7. Matriz $\underline{\beta}$	48
3.3.3.8. A estimativa do modelo	49
3.3.3.9. Teste dos parâmetros Encon- trados	49

3.3.4. Readaptando o modelo	52
3.3.4.1. Matriz X_1	52
3.3.4.2. Matriz β_1	53
3.3.4.3. Estimando o novo modelo	
3.3.4.4. As proporções obtidas e as estimadas através do modelo reduzido	53
4. DISCUSSÃO	56
5. CONCLUSÕES FINAIS	61
6. BIBLIOGRAFIA	63
7. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	66
APÊNDICE	69

APLICAÇÃO DE MODELOS LINEARES EM
EXPERIMENTOS COM DADOS CATEGORIZADOS

Autor: DALTON GERALDO GUAGLIANONI

Orientadora: Marli de Bem Gomes

RESUMO

Pesquisas de diversas áreas como: Biologia, Medicina, Psicologia, Sociologia, Agricultura etc, apresentam como resultados dados qualitativos o que nos leva a distribuí-los em algumas categorias de respostas, razão principal da denominação de dados categorizados. Nas últimas décadas, dada uma intensa utilização, esse tipo de dados passou a ser objeto de estudo de diversos pesquisadores no intuito de tornar mais flexível as hipóteses a serem testadas, uma vez que as soluções usuais não permitem nenhuma flexibilidade.

O objetivo geral do presente trabalho refere-se ao estudo do método proposto por GRIZZLE et alli (1969) no qual propõe uma teoria utilizando modelos de regressão linear para solucionar problemas envolvendo tabelas de contingência.

É objetivo fundamental deste trabalho aplicar

o método em um experimento odontológico onde os dados são classificados em cinco fatores subdivididos em dois níveis cada um, e mostrar que as matrizes envolvidas são de fácil construção, após tal construção, o método pode ser processado por um microcomputador através de um programa relativamente simples envolvendo produtos de inversão de matrizes.

Pudemos com a teoria de GRIZZLE et alli ajustar uma superfície de resposta ao experimento odontológico com bons resultados e concluir ao final que o método é de fácil aplicação e possibilita uma grande diversificação de hipóteses a serem testadas.

LINEAR MODELS APPLICATION TO
CATEGORICAL DATA EXPERIMENTS

Author: DALTON GERALDO GUAGLIANONI
Adviser: Marli de Bem Gomes

SUMMARY

Researches of several areas like: Biology, Medicine, Psychology, Sociology, Agriculture, etc, present like results qualitative data that conducts us to distribute them in some categories of answers, principal reason by denomination of categorical data.

In the last decades, because of a intensive utilization, this type of points passed to be the object of estudy of several searchers in the intent to turn more flexible the hypothesis to be examined, considering that usual solutions do not permit any flexibility.

General objective of the present work refers to the study of the method proposed by GRIZZLE et alii (1969) in which proposes a theory utilizing models of linear

regression to solve problems involving tables of contingency.

It is fundamental objective of this work to apply the method in an odontological experiment where the elements are classified in five factors subdivided in two involved matrixes are of easy construction, and following this the method may be prosecuted by a micron computer through a program more or less simple involving products of inversion of matrixes.

With the theory by Grizzle, Starmer and Koch we could adjust a response surface to the odontological experiment with good results and we could conclude at the final that the method is of easy application and it makes possible a great diversification of hypothesis to be tested.

1. INTRODUÇÃO

As pesquisas nas áreas de biologia, medicina, psicologia e sociologia, entre outras, apresentam frequentemente seu resultado expresso em dados qualitativos, o que nos leva a distribuí-los em algumas categorias de respostas, razão principal da denominação de dados categorizados, normalmente apresentados em tabelas de contingências. Esses dados são frequências com que indivíduos, objetos, etc., são classificados através das diversas categorias de resposta relativas ao experimento. Essas frequências seguem uma distribuição multinomial.

As hipóteses relativas a dados categorizados são normalmente testadas através da estatística χ^2 de Pearson, χ^2_1 modificado de Neyman e do teste da razão de Verossimilhança.

Devido ao crescente uso de pesquisas com tais características e a necessidade de maior flexibilidade nas hipóteses a serem testadas, o assunto passou a ser objeto de estudo de muitos pesquisadores.

GRIZZLE et alii (1969) propuseram-se a utilização de modelos lineares e quadrados mínimos ponderados para análise de tabelas de contingência. Essa proposição está baseada no trabalho de BHAPKAR (1966) que mostra a equivalência da estatística de WALD e a estatística de NEYMAN sendo que os fundamentos teóricos estão em WALD (1943).

A solução usual do χ^2 de Pearson não possibilita a partição de hipóteses, o que, é possível com o método GSK que permite o estudo do efeito isolado de cada fator.

A grande quantidade de produtos e inversões de matrizes que está relacionada com a metodologia do método GSK exige um programa de computador conveniente.

LANDIS et alii (1976), desenvolveram um programa para análise de dados categorizados multivariados que é denominado GENCAT.

Outros programas, também têm como finalidade a análise de dados categorizados através do método estudado. O único inconveniente é que são programas para computador de grande porte.

Constitui objetivos deste trabalho desenvolver os conceitos teóricos de modo a tornar viável a programação para micro-computadores e principalmente, ajustar uma superfície de resposta a um experimento odontológico.

O experimento é constituído de cinco fatores (Idade, Tratamento, Sexo, Maxilar e Número de Raízes) com dois níveis cada um e existe interesse em se estudar a influência dos fatores, bem como suas possíveis interações, sobre a variável de análise (reatividade).

Pelo exposto, adotamos um modelo fatorial 2^5 e desse modo, os dados da amostra ficam distribuídos dentre trinta e duas sub-populações.

Alguns autores apresentaram preocupações sobre a validade do método para pequenas amostras. Com essas preocupações adotamos uma amostra de $N = 2529$ elementos.

2. REVISÃO DA LITERATURA

WALD (1943), estudou o problema de testar hipóteses constituídas por funções, que possuem derivadas parciais contínuas de segunda ordem. Para testar tais hipóteses, propôs a estatística W baseada em estimadores de máxima verossimilhança. Demonstrou ainda que a estatística W tem distribuição de χ^2 central, sob H_0 .

NEYMAN (1949), apresentou um estudo sobre as propriedades e métodos de obtenção de estimador χ^2_1 modificado. Verificou que os estimadores χ^2_1 modificados, são mais fáceis de serem obtidos do que os estimadores de máxima verossimilhança quando as funções envolvidas são lineares, para os casos em que as funções não são lineares, o autor fornece um método de linearização, tornando possível a obtenção de esti-

madores através de um sistema de equações lineares.

Demonstrou ainda NEYMAN que as estatísticas χ^2 e χ_1^2 , usando estimadores de máxima verossimilhança ou estimadores χ_1^2 modificado, são consistentes e equivalentes ao teste da razão de verossimilhança e, além disso, possuem distribuição assintótica de χ^2 .

BHAPKAR (1966), adaptou a teoria de WALD a dados categóricos, sob o "modelo geral de classificação cruzada" usando uma variável dicotômica, tal que, a variável assumia valor 1 (um) se uma observação tivesse determinado atributo e 0 (zero) nos demais casos. Mostrou ainda a equivalência algébrica entre a estatística de WALD e a estatística de NEYMAN, para hipóteses lineares sobre dados categorizados. Para hipóteses não lineares estas se equivalem, desde que sejam linearizadas através de técnica proposta por NEYMAN.

Em estudo anterior, BHAPKAR (1961) descreveu a estatística de NEYMAN para testar hipóteses lineares, obtida pela minimização da estatística χ_1^2 sujeita a restrições.

Pelo exposto, os testes de hipóteses lineares e não lineares são possíveis utilizando a estatística de WALD, que através da equivalência demonstrada por BHAPKAR pertence à classe dos testes χ_1^2 modificado e com distribuição assintótica de χ^2 , sob H_0 .

BERKSON (1968), mostrou que para muitos problemas o logit mínimo resulta, numericamente, as mesmas estimativas obtidas através de testes estatísticos como máxima verossimilhança e χ^2 de Pearson. GRIZZLE et alii (1969) mostraram

que o logit mínimo em grandes amostras possui distribuição de χ^2 sendo H_0 verdadeira, ou seja, é mais um membro desta família de testes.

BHAPKAR e KOCH (1968a), analisaram a existência de quatro tipos principais de tabelas, levando-se em conta "fatores" tais como blocos, tratamento e "respostas" como categorias de respostas. O primeiro tipo são as tabelas multi-respostas, nenhum fator; o segundo são as tabelas multi-respostas, um fator; o terceiro são as tabelas de multi-respostas, multi-fatores e o quarto são as tabelas uma resposta, multi-fatores.

Para cada tipo de tabela o conceito de "não - interação" está relacionado com as associações entre as "respostas" ou as combinações entre os "fatores". Os embasamentos teóricos dos testes estatísticos estão em WALD (1943).

GOODMAN (1968), diferenciou dois tipos de tabelas de contingência: (A) tabelas de contingência truncada, nas quais as frequências de algumas caselas são omitidas da análise; e (B) tabelas de contingência não truncada, ou seja, as mais usuais em que a frequência de nenhuma casela é omitida quando da análise. Desta maneira, vários métodos de análise de um tipo de tabela, quando modificado apropriadamente, torna-se adequado à análise do outro tipo.

Na prática as tabelas não truncadas comumente são analisadas através do χ^2 de Pearson. GOODMAN sugeriu novos procedimentos para análise. Esses métodos podem ser usados

para testar hipóteses de nulidade de que as populações multinominais são quase homogêneas e podem ainda estimar proporções hipotéticas para as caselas, se nenhuma delas for nula.

GRIZZLE, et alii (1969), formularam um método, que a partir daqui chamaremos método GSK, que ajusta funções a um modelo linear para resolver problemas que aparecem em tabelas de classificação cruzada, sob "o modelo geral de classificação cruzada", isto é, quando s amostras são retiradas de s populações e os elementos de cada amostra classificados em r categorias de respostas. Baseia o desenvolvimento do método nas mesmas considerações feitas para a adaptação da estatística de WALD a dados categorizados.

Descrevem ainda um procedimento para testar hipóteses sobre os parâmetros do modelo linear e para testar o ajuste do modelo aos dados.

Neste estudo são citados alguns exemplos de como o método pode ser usado para analisar vários tipos de dados categorizados.

JONHSON e KOCH (1971), mostraram uma análise análoga ao "stepwise" usados em regressões com dados paramétricos e que baseia-se no uso de quadrados mínimos ponderados para adptar modelos adequados a dados não paramétricos contidos em tabelas de contingência multi-dimensional.

GOODMAN (1971b), mostra usando um método análogo em alguns pontos ao "stepwise" na análise de regressão, como selecionar modelos adequados para descrever dados contidos em tabelas de m variáveis (ou fatores) e as possíveis intera-

ções multiplicativas entre elas. Aponta ainda dificuldades para aplicação do método GSK quando para cada hipótese a ser testada há necessidade de mudança nas matrizes envolvidas.

GRIZZLE e WILLIAMS (1972) baseados na equivalência entre a análise fatorial e testes de independência marginal formularam prova capaz de testar independências de tabelas de contingência multi-dimensionais. OGLIARI (1984) faz ressalvas sobre algumas fórmulas e hipóteses do artigo.

WILLIAMS e GRIZZLE (1972), apresentaram dois métodos para análise de dados categorizados e os resultados de cada análise são apresentados na forma de análise de variância e adaptaram o método GSK ao modelo escalar de Thurstone.

LANDIS et alii (1976), desenvolveram um programa de computador que denominaram de GENCAT e que condensa toda metodologia que envolve análise de dados categorizados multi-variados. Esse algoritmo obtém estatísticas de χ^2_1 , modificado a partir de partições das somas de quadrados, como na análise de variância paramétrica.

WADA (1977) conclui que a metodologia proposta por GRIZZLE et alii (1969) apresenta vantagens sobre as soluções usuais e que, apesar de muitas dificuldades, apontadas por diversos pesquisadores na aplicação do método GSK, de um modo geral esse procedimento é de fácil aplicação.

OGLIARI (1984), fez estudo sobre o problema causado pela aproximação assintótica dos testes utilizados em tabelas de contingência.

Desenvolveu um programa de análise em linguagem

"BASIC" de modelos log lineares aos dados de tabela de contingência do tipo $C \times V \times F$ e a determinação de estruturas de independência para os dados dessas tabelas.

Conclui que para amostras entre 1.000 e 1.500 dados os resultados são bastantes eficientes no sentido de indicar um modelo que represente a estrutura de independência dos dados das tabelas.

3. METODOLOGIA

3.1. Metodologia GSK

Considere s amostras simples e independentes de tamanho $n_1, n_2 \dots n_s$ extraídas de s distribuições multinomiais (consideradas aqui como sub-populações).

Para efeito teórico os n_i serão fixos à priori. Cada uma das distribuições acima apresenta r categorias de respostas distintas.

Os dados resultantes da amostragem podem ser resumidos numa tabela de contingência (sxr), onde n_{ij} denota a frequência de respostas da j -ésima categoria na amostra da i -ésima sub-população.

TABELA 1: Distribuição de frequência segundo categoria de respostas e sub-populações.

SUB POPULAÇÕES	CATEGORIAS DE RESPOSTAS						TOTAL
	1	2	.	.	.	r	.
1	n_{11}	n_{12}	.	.	.	n_{1r}	n_1
2	n_{21}	n_{22}	.	.	.	n_{2r}	n_2
3	...	...	.	.	.	...	..
.	...	...	.	.	.	...	..
.	...	...	.	.	.	...	..
.	...	...	.	.	.	...	..
s	n_{s1}	n_{s2}	.	.	.	n_{sr}	n_s

O Vetor aleatório n_i com $i = 1, 2, \dots, s$, segue por hipótese uma distribuição multinomial com parâmetros n_i e π_i , onde π_i é um vetor $r \times 1$ e π_{ij} representa a probabilidade de que um elemento selecionado ao acaso, da i -ésima sub população, seja classificado na j -ésima categoria de resposta.

Vetores n_i e π_i

$$\tilde{n}'_i = \begin{pmatrix} n_{i1} \\ n_{i2} \\ \vdots \\ n_{ir} \end{pmatrix} \quad \tilde{\pi}'_i = \begin{pmatrix} \pi_{i1} \\ \pi_{i2} \\ \vdots \\ \pi_{ir} \end{pmatrix}$$

Vetor aleatório é um Vetor cujos componentes são variáveis aleatórias. Seja X um ponto de coordenadas $X (X_1, X_2, \dots X_m)$. A função de probabilidade conjunta da multinomial em X é:

$$P(X) = P(X_1, X_2, \dots X_r) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^r (X_i!)} \prod_{i=1}^r (p_i)^{X_i}$$

$$\text{com } \sum X_i = n$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

$$0 \leq p_i \leq 1$$

Esta fórmula é uma generalização da binomial, onde:

$$P(X) = \frac{n!}{r! (n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} \quad \text{onde por analogia podemos fazer}$$

$$X(X_1, X_2) \text{ e } P(X) = \frac{n!}{X_1! X_2!} p_1^{X_1} p_2^{X_2}$$

$$\therefore P(X) = P(X_1, X_2) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^2 (X_i!)} \prod_{i=1}^2 p_i^{X_i}$$

Considerando-se a tabela anterior, podemos escrever que a probabilidade do i-ésimo Vetor, é:

$$P(n_i) = \frac{n_i!}{\prod_{j=1}^r (n_{ij})!} \prod_{j=1}^r (\pi_{ij})^{n_{ij}}$$

Este Vetor de probabilidade corresponde a i -ésima sub-população multinomial.

Como as sub-populações são independentes entre si, os s vetores serão linearmente independentes e o seu produto que no caso é o modelo matemático do problema será:

$$\Phi = \prod_{i=1}^s (n_i!) \prod_{j=1}^r \left(\frac{\pi_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \right)$$

Com as restrições

$$\sum_{j=1}^r \pi_{ij} = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, s$$

(cada linha é uma multinomial e portanto a soma de suas probabilidades deve ser 1)

Seja $p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$ e consideremos o Vetor $\underline{p}_i$
rx1

$$\underline{p}_i = \left(\frac{n_{i1}}{n_i}, \frac{n_{i2}}{n_i}, \dots, \frac{n_{ir}}{n_i} \right) \text{ com } i = 1, 2, \dots, s$$

Cada Vetor $\underline{p}_i$ é um estimador da verdadeira probabilidade. Portanto $\underline{p}_i$ é um Vetor rx1 das proporções observa

das associadas com as amostras da i -ésima sub-população. Seja agora o Vetor $\underline{p}$ de dimensões $rs \times 1$ que contém todas as proporções de todas as s distribuições multinomiais

$$\underline{p}'_{rs \times 1} = (p'_{11}, p'_{12}, \dots, p'_{1s})$$

O Vetor $\underline{p}$ é um estimador de máxima verossimilhança, sem estar sujeito a qualquer hipótese H_0 e sem restrições, de π onde

$$\underline{\pi}'_{rs \times 1} = (\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_s)$$

Destacando que em cada casela temos

$$p_{ij} = \hat{\pi}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$$

Como estamos considerando s distribuições multinomiais há correlação entre os elementos da mesma distribuição (no caso entre elementos da mesma linha), mas, não há entre as distribuições já que são duas a duas independentes.

MATRIZ DE VARIÂNCIAS E COVARIÂNCIAS

Consideremos a i -ésima multinomial, podemos obter a seguinte matriz considerando-se as variâncias na diagonal e as covariâncias fora dela. Observamos, ainda, que o elemento está na j -ésima casela ou fora dela e assim podemos raciocinar como em uma binomial

$$V \left(\frac{n_{ij}}{n_i} \right) = \frac{1}{n_i} \cdot V(n_{ij}) \quad V(n_{ij}) = n_i \pi_{ij} (1 - \pi_{ij})$$

$$\therefore V \left(\frac{n_{ij}}{n_i} \right) = \frac{1}{n_i} \pi_{ij} (1 - \pi_{ij}) =$$

$$V \left(\frac{n_{ij}}{n_i} \right) = \frac{\pi_{ij} (1 - \pi_{ij})}{n_i}$$

Ainda na i -ésima multinomial temos as covariâncias

$$\text{Cov} \left(\frac{n_{ij}}{n_i}, \frac{n_{ij}'}{n_i} \right)$$

Consideremos

$$\text{Var} \left(\frac{n_{ij} + n_{ij}'}{n_i} \right) = \text{Var} \left(\frac{n_{ij}}{n_i} \right) + \text{Var} \left(\frac{n_{ij}'}{n_i} \right) + 2 \text{Cov} \left(\frac{n_{ij}}{n_i}, \frac{n_{ij}'}{n_i} \right)$$

$$\text{Cov} \left(\frac{n_{ij}}{n_i}, \frac{n_{ij}'}{n_i} \right) = \frac{1}{2} \left[V \left(\frac{n_{ij} + n_{ij}'}{n_i} \right) - V \left(\frac{n_{ij}}{n_i} \right) - V \left(\frac{n_{ij}'}{n_i} \right) \right]$$

$$\text{Var} \left(\frac{n_{ij} + n_{ij}'}{n_i} \right) = \frac{1}{n_i} V(n_{ij} + n_{ij}')$$

$$\text{onde } V(n_{ij} + n_{ij}') = n_i (\pi_{ij} + \pi_{ij}') (1 - \pi_{ij} - \pi_{ij}')$$

$$\therefore \text{Var} \left(\frac{n_{ij} + n_{ij}'}{n_i} \right) = \frac{(\pi_{ij} + \pi_{ij}') (1 - \pi_{ij} - \pi_{ij}')}{n_i}$$

então

$$\text{Cov} \left(\frac{n_{ij}}{n_i}, \frac{n_{ij'}}{n_i} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_i} (\pi_{ij} + \pi_{ij'}) (1 - \pi_{ij} - \pi_{ij'}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{n_i} \pi_{ij} (1 - \pi_{ij}) - \frac{1}{n_i} \pi_{ij'} (1 - \pi_{ij'}) \right]$$

Desenvolvendo e simplificando a expressão obtemos:

$$\text{Cov} \left(\frac{n_{ij}}{n_i}, \frac{n_{ij'}}{n_i} \right) = - \frac{\pi_{ij} \pi_{ij'}}{n_i}$$

Portanto a matriz de Variância - covariância da i-ésima multinomial fica:

$$V(\pi_i)_{r \times r} = \frac{1}{n_i} \begin{bmatrix} \pi_{i1}(1-\pi_{i1}) & -\pi_{i1}\pi_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & \pi_{i1}\pi_{ir} \\ -\pi_{i2}\pi_{i1} & \pi_{i2}(1-\pi_{i2}) & \cdot & \cdot & \cdot & \pi_{i2}\pi_{ir} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\pi_{ir}\pi_{i1} & -\pi_{ir}\pi_{i2} & & & & \pi_{ir}(1-\pi_{ir}) \end{bmatrix}$$

A matriz $V(p_i)_{r \times r}$ é um estimador de $V(\pi_i)_{r \times r}$

Como estamos estimando probabilidades, a amostra deve ter um tamanho suficiente.

Pode-se dizer que $p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$ é um estimador

consistente para π_{ij} quando $n_i \rightarrow \infty$

Na prática, todavia, com valores não muito grande de n_i já podemos desenvolver as aplicações, que a teoria funciona.

A matriz com todas as informações sobre variâncias e covariâncias é dada por:

$V(\pi)$ = Matriz bloco diagonal com elementos $V(\pi_i)$ na diagonal $\tilde{r} \times \tilde{r}$

principal e zeros fora dela, devido à independência entre as linhas (independência duas a duas das multinomiais).

$$V(\pi) = \begin{bmatrix} \underline{V}(\pi_1) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \underline{V}(\pi_2) & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & 0 & \\ & & \underline{V}(\pi_3) & \dots & \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{V}(\pi_s) \end{bmatrix}$$

A matriz $V(p)$ $\tilde{r} \times \tilde{r}$ é um estimador consistente da matriz de variâncias e covariâncias (π) onde π é um Vetor $\tilde{r} \times 1$ contendo todas as proporções teóricas e o Vetor p que o estima contém todas as proporções $\frac{n_{ij}}{n_i}$ observadas.

Sejam as funções $F_1(p)$, $F_2(p)$..., $F_u(p)$ com

$u \leq r - s$ pois há r s elementos com uma restrição em cada multinomial isto é:

Cada linha i tem $r-1$ graus de liberdade.

No total teremos $s(r-1) = sr - s$ graus de liberdade.

$\{F(p)\}$ é um conjunto de u funções que descrevem em algum aspecto a relação entre as distribuições das respostas e a natureza das sub-populações consideradas.

Cada uma dessas funções tem, por hipótese, derivadas parciais contínuas até 2ª ordem, com respeito aos elementos de p , dentro de uma região aberta contendo $\pi = E(p)$

$$\text{Seja } F'_{ux1} = \underline{F}(p) = \left[F_1(p), F_2(p) \dots F_u(p) \right]$$

Desta forma, um estimador consistente da matriz de Variâncias e Covariâncias do Vetor F é dado por $S_{u\tilde{x}u} = HV(p) H'$ onde

$$H_{uxrs} = \left[\frac{\partial F_m(\tilde{x})}{\partial \pi_{ij}} \right] \pi_{ij} = p_{ij}$$

com $i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r; m = 1, \dots, u$

Se $\underline{F}$ for linear: $\underline{F}_{\tilde{u}x1} = \underline{A}_{\tilde{u}xrs} \underline{p}_{rsx1}$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \underline{A} = \underline{H}$$

Se $\underline{F}$ for não linear

$$F(\underline{\pi}) = F(\underline{p}) + \left[\frac{\partial F(\underline{\pi})}{\partial \underline{\pi}} \right]_{\underline{\pi}=\underline{p}} (\underline{\pi}-\underline{p}) + E_n ||\underline{\pi} - \underline{p}||$$

$$\text{onde } H = \left[\frac{\partial^2 F(\underline{\pi})}{\partial^2 \underline{\pi}} \right]_{\underline{\pi}=\underline{p}} = K D_a^{-1} A$$

e D_a é uma matriz diagonal com elementos do Vetor $a = Ap$

Para funções aproximadamente lineares $y = \psi(x)$ usa-se o desenvolvimento de Taylor. Assim:

$$y = \psi(x) = \psi(\xi) + (x - \xi) \psi'(\xi)$$

$$V(y) = [\psi'(\xi)]^2 V(x), \text{ onde } HH' \text{ corresponde a } [\psi'(\xi)]^2$$

$$\pi_{ij} = x; p_{ij} = \xi \text{ e } \frac{\partial F_m(\underline{\pi})}{\partial \pi_{ij}} = \psi'(\xi)$$

Nas aplicações as funções $F_m(\underline{\pi})$ para $m = 1, 2, \dots, u$, devem ser escolhidas de sorte que S (matriz de variâncias - covariâncias), seja assintoticamente não-singular).

$F(\underline{p})$ é um estimador consistente de $F(\underline{\pi})$. Consequentemente a variação entre os elementos de $F(\underline{\pi})$ pode ser investigada, pelo ajustamento de modelos de regressão linear, por meio do método dos mínimos quadrados ponderados. Isto pode ser caracterizado por meio da relação:

$EA \{F(\underline{p})\} = F(\underline{\pi}) = X \underline{\beta}$ onde X é uma matriz pré-especificada ($u \times t$) de planejamento de elementos conhecidos e o posto de X é $t \leq u$, $\underline{\beta}$ é um vetor ($t \times 1$) de parâmetros desconhecidos e EA denota o valor assintótico esperado de $F(\underline{p})$.

Por hipótese as funções $F_m(\pi)$ para $m = 1, 2, \dots, u$ são independentes e também independentes das restrições $\sum_{j=1}^r \pi_{ij} = 1$, isto é $\underline{H}$ e $\underline{H} \underline{V}(\underline{\pi}) \underline{H}'$ são de posto u .

Contudo para alguns tipos de dados se algum $n_{ij} = 0$, S será de posto menor que u .

Neste caso, usaremos procedimento proposto por BERKSON (1955), que substitui os valores zeros por $1/r$.

Isto implica que $\hat{\pi}_{ij} = p_{ij} = \frac{1}{r n_i}$ para o valor substituído.

ESTIMAÇÃO E TESTES

Até este ponto foram definidas u funções paramétricas de π , $F_m(\pi)$, $m = 1, 2, \dots, u$, possivelmente não lineares, suas estimativas $F_m(p)$ e sua matriz de variância - covariância $S = \underline{H} \underline{V}(p) \underline{H}'$

O modelo é linear: $E\{F(p)\} = F(\pi) = \underline{X} \underline{\beta}$

Se o modelo hipotético ajusta-se "bem" aos dados, o melhor estimador assintótico de β é dado por $\underline{b}$ onde:

$$\underline{b}_{\tilde{x}1} = (\underline{X}' S^{-1} \underline{X})^{-1} \underline{X}' S^{-1} \underline{F}$$

$\underline{b}$ é o melhor estimador de β (BAN - best asymptot normal)

$\underline{b}$ é obtido minimizando a forma quadrática (mínimos quadrados generalizados)

$$\min (\underline{F} - \underline{X}\underline{\beta})' \quad S^{-1} (\underline{F} - \underline{X}\underline{\beta}) = (\underline{F} - \underline{X}\underline{b})' \quad S^{-1} (\underline{F} - \underline{X}\underline{b})$$

O teste estatístico usado para verificar o ajustamento do modelo é dado por:

$$SQ \{F(\pi) = X\beta\} = \begin{matrix} F' & S^{-1} & F & - & b' & (& X' & S^{-1} & X &) & b \\ l\tilde{x}u & uxu & u\tilde{x}l & l\tilde{x}t & t\tilde{x}u & uxu & u\tilde{x}t & t\tilde{x}l \end{matrix}$$

$\begin{matrix} F' & S^{-1} & F \\ l\tilde{x}u & uxu & u\tilde{x}l \end{matrix}$ tem distribuição de χ^2 (central) com u graus de liberdade.

$\begin{matrix} b' & (& X' & S^{-1} & X &) & b \\ l\tilde{x}t & t\tilde{x}u & uxu & u\tilde{x}t & t\tilde{x}l \end{matrix}$ tem distribuição de χ^2 com t graus de liberdade.

Os χ^2 ocorrem assintoticamente. O resultado é portanto uma distribuição de χ^2 com (u-t) graus de liberdade.

Se o modelo $\underline{F}(\pi) = \underline{X}\underline{\beta}$ é aceito, podemos testar hipóteses da forma $H_0: \underline{C}\underline{\beta} = \underline{0}$ onde $\underline{C}$ é uma matriz $c \times t$ com $c \leq t$ e $\underline{0}$ é um vetor nulo $c \times 1$.

O teste estatístico é dado por:

$$QC = SQ \{C\beta = 0\} = (Cb)' \{C(X' S^{-1} X)^{-1} C'\}^{-1} (Cb)$$

que é assintoticamente uma distribuição de χ^2 com $\underline{c}$ graus de liberdade se H_0 é verdadeira.

O posto de C é $\underline{c}$. A estimativa de $C\beta$ é Cb .

Quando H_0 é verdadeira $C\beta = 0 \implies Cb = 0$, onde,
 $V(b) = (X' S^{-1} X)^{-1}$

e

$$V(Cb) = C \text{ Var}(b) C' = C(X' S^{-1} X)^{-1} C'.$$

3.2. Tabelas de Classificação Cruzada mais Usuais

Os dados categorizados são freqüentemente apresentados em dois tipos de tabelas de classificação cruzada; um com dados provenientes de uma população e outro com dados provenientes de várias populações.

No primeiro tipo, os dados são apresentados em tabelas de contingência onde N elementos de uma amostra são classificados em dois atributos. O número de categorias de respostas podem ser igual ou diferente para cada atributo. No caso de igualdade teremos uma tabela quadrada.

TABELA 2: DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA POPULACIONAL SEGUNDO AS CATEGORIAS DE RESPOSTAS DE DOIS ATRIBUTOS

CATEGORIAS DE RESPOSTAS DO 2º ATRIBUTO	CATEGORIAS DE RESPOSTAS DO 1º ATRIBUTO						TOTAL
	1	2	.	.	.	r	
1	n_{11}	n_{12}	.	.	.	n_{1r}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	.	.	.	n_{2r}	$n_{2.}$
...	...	...	.	.	.	...	...
r	n_{r1}	n_{r2}	.	.	.	n_{rr}	$n_{r.}$
TOTAL	$n_{.1}$	$n_{.2}$	.	.	.	$n_{.r}$	$n_{..}$

Tabela quadrada r categorias de respostas uma população onde os n_{ij} são as frequências da casela (i, j) e os $n_{i.}$, $n_{.j}$ são os totais marginais.

Para esses casos de amostras provenientes de uma única população, as hipóteses estatísticas apropriadas são formuladas por $F(\pi) = 0$, dispensando dessa maneira a construção da matriz X referente ao planejamento.

O teste estatístico apropriado para o ajuste resume-se a: $SQ F(\pi) = 0 = F' S^{-1} (F) F$ que tem distribuição χ^2 central assintótica com u graus de liberdade se H_0 for verdadeira.

Com o número de respostas $r=2$, para tabelas desse tipo, ficar fácil verificar a distribuição do teste, como segue:

CATEGORIA DE RESPOSTA DO 1º ATRIBUTO	CATEGORIA DE RESPOSTA 2º ATRIBUTO		TOTAL
	1	2	
1	n_{11}	n_{12}	n_1
2	n_{21}	n_{22}	n_2

Suponhamos que, a hipótese a ser testada seja:

$H_0: \pi_{11} = \pi_{21}$, o que implica que $\pi_{11} - \pi_{21} = 0$.

Então poderíamos escrever

$$H_0: 1\pi_{11} + 0\pi_{12} - 1\pi_{21} + 0\pi_{22} = 0$$

$$\text{A matriz } \underset{4 \times 1}{p} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{A matriz } \underset{1 \times 4}{A} = \{1 \quad 0 \quad -1 \quad 0\}$$

$$\underline{F}(p) = A \times p$$

$$\underline{F}(p) = \{p_{11} - p_{21}\}$$

$$\underset{4 \times 4}{V}(p) = \begin{bmatrix} V(p_1) & 0 \\ 0 & V(p_2) \end{bmatrix}$$

$$V(p_1) = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}(1-p_{11})}{n_1} & \frac{-p_{11} p_{12}}{n_1} \\ \frac{-p_{11} p_{12}}{n_1} & \frac{p_{12}(1-p_{12})}{n_1} \end{bmatrix}$$

$$V(p_2) = \begin{bmatrix} \frac{p_{21}(1-p_{21})}{n_2} & \frac{-p_{21} p_{22}}{n_2} \\ \frac{-p_{21}(1-p_{21})}{n_2} & \frac{p_{22}(1-p_{22})}{n_2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p) = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}(1-p_{11})}{n_1} & \frac{-p_{11} p_{12}}{n_1} & 0 & 0 \\ \frac{-p_{11} p_{12}}{n_1} & \frac{p_{12}(1-p_{12})}{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_{21}(1-p_{21})}{n_2} & \frac{-p_{21} p_{22}}{n_2} \\ 0 & 0 & \frac{-p_{21} p_{22}}{n_2} & \frac{p_{22}(1-p_{22})}{n_2} \end{bmatrix}$$

$$S = A \tilde{V}(p) A' = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}(1-p_{11})}{n_1} & -\frac{p_{21}(1-p_{21})}{n_2} \end{bmatrix}$$

$$SQ \{ F(\pi) = 0 \} = \tilde{F}' S^{-1} F$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & -p_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p_{11}(1-p_{11})}{n_1} & \frac{p_{21}(1-p_{21})}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & -p_{21} \end{bmatrix}$$

$$SQ \left[F(\pi)' = 0 \right] = \frac{p_1 p_2 (p_{11} - p_{21})^2}{n_2 p_{11} (1-p_{11}) + n_1 p_{21} (1-p_{21})}$$

$$SQ F(\pi) = 0 = \frac{n_1 n_2 \left[\frac{n_{11}}{n_1} - \frac{n_{21}}{n_2} \right]^2}{n_2 \frac{n_{11}}{n_1} \frac{n_{12}}{n_1} + n_1 \frac{n_{21}}{n_2} \frac{n_{22}}{n_2}}$$

$$SQ F(\pi) = 0 = \frac{n_1 n_2 (n_2 n_{11} - n_1 n_{21})^2}{n_2^3 n_{11} n_{12} n_1^3 n_{21} n_{22}} \quad (I)$$

(I) é a expressão de um χ^2 com 1 grau de liberdade.

A análise estatística de dados categorizados provindos de uma população, a exemplo do que consta da tabela 2, podem ser feita através das hipóteses:

a) Independência, formulada por $H_0: \pi_{ij} = \pi_{i.} \pi_{.j}$

b) associação sobre a diagonal principal, formulada por

$$H_0: \pi_{ii} = \pi_{i.} \pi_{.j}$$

c) homogeneidade das marginais, formulada por,

$$H_0: \pi_{i.} = \pi_{.j} \text{ com } i = j = 1, 2, \dots, r$$

d) simetria, formulada por,

$$H_0: \pi_{ij} = \pi_{ji} \quad \text{com } i \neq j$$

Passamos, agora a adaptar cada uma dessas hipóteses ao método "GSK". Para nos auxiliar, mostramos uma tabela de proporções teóricas.

TABELA 3: PROPORÇÕES TEÓRICAS DE UMA TABELA DE CONTINGÊNCIA POPULACIONAL COM DOIS ATRIBUTOS

2º ATRIBUTO	1º ATRIBUTO				TOTAL
	1	2	...	r	
1	π_{11}	π_{12}	...	π_{1r}	$\pi_{1.}$
2	π_{21}	π_{22}	...	π_{2r}	$\pi_{2.}$
...	...	...	...	...	...
r	π_{r1}	π_{r2}	...	π_{rr}	$\pi_{r.}$
TOTAL	$\pi_{.1}$	$\pi_{.2}$	...	$\pi_{.r}$	1

Essa hipótese pode ser testada em tabelas onde o número de categoria de respostas nos dois atributos, sejam iguais ou diferentes. No caso particular de uma tabela 3x3 teríamos:

$$\begin{array}{l}
 \text{Ho:} \left[\begin{array}{l}
 \pi_{11} = \pi_{1.} \pi_{.1} \\
 \pi_{12} = \pi_{1.} \pi_{.2} \\
 \pi_{13} = \pi_{1.} \pi_{.3} \\
 \pi_{21} = \pi_{2.} \pi_{.1} \\
 \pi_{22} = \pi_{2.} \pi_{.2} \\
 \pi_{23} = \pi_{2.} \pi_{.3} \\
 \pi_{31} = \pi_{3.} \pi_{.1} \\
 \pi_{32} = \pi_{3.} \pi_{.2} \\
 \pi_{33} = \pi_{3.} \pi_{.3}
 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Ho:} \left[\begin{array}{l}
 \frac{\pi_{11} \pi_{33}}{\pi_{31} \pi_{13}} = 1 \\
 \frac{\pi_{12} \pi_{33}}{\pi_{32} \pi_{13}} = 1 \\
 \frac{\pi_{21} \pi_{33}}{\pi_{31} \pi_{23}} = 1 \\
 \frac{\pi_{22} \pi_{33}}{\pi_{32} \pi_{23}} = 1
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

que equivalem a

$$\text{Ho:} \left[\begin{array}{l}
 \ln \pi_{11} - \ln \pi_{31} - \ln \pi_{13} + \ln \pi_{33} \\
 \ln \pi_{12} - \ln \pi_{32} - \ln \pi_{13} + \ln \pi_{33} \\
 \ln \pi_{21} - \ln \pi_{31} - \ln \pi_{23} + \ln \pi_{33} \\
 \ln \pi_{22} - \ln \pi_{32} - \ln \pi_{23} + \ln \pi_{33}
 \end{array} \right.$$

que é uma hipótese do tipo:

$$\text{Ho: } F(\pi) = K \ln A_{\pi} = 0 \text{ onde}$$

$$K = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1
 \end{bmatrix}$$

A = matriz identidade 9 x 9 e

π é o vetor das proporções

$$\underline{\pi}' = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix}$$

De um modo geral, numa tabela de contingência $c \times d$ a hipótese de independência entre duas respostas é descrita por $(c-1)(d-1)$ funções do tipo

$$F(\pi) = K \sum_{(c-1)(d-1) \times cd} \ln A_{cd \times cd} \pi_{cd \times 1}$$

Essas funções logarítmicas podem ser encontradas com facilidade através da medida de associação dada por:

$$\Delta_{ij} = \frac{\pi_{ij} \pi_{cd}}{\pi_{cj} \pi_{id}} \quad \begin{array}{l} \text{com } i = 1, 2, \dots, c-1 \text{ e} \\ j = 1, 2, \dots, d-1 \end{array}$$

Δ_{ij} é igual a 1 (um) quando há independência

Desse modo, podemos substituir a hipótese de independência $H_0: \pi_{ij} = \pi_{i.} \pi_{.j}$ por $H_0: \Delta_{ij} = 1$ que se aplicarmos logaritmo, obtemos:

$$H_0: \ln \Delta_{ij} = \ln \pi_{ij} - \ln \pi_{cj} - \ln \pi_{id} + \ln \pi_{cd} = 0$$

que é da forma

$$H_0: F(\pi) = K \ln A_{\underline{\pi}} = 0$$

O teste adequado para essa hipótese é fornecido por $F' S^{-1} F$, que possui distribuição assintótica de χ^2 com $(c-1)(d-1)$ graus de liberdade, sob H_0 .

A hipótese de associação sobre a diagonal principal $H_0: \pi_{ii} = \pi_{i.} \pi_{.i}$ para $i = 1, 2, \dots, r$ que equivale a uma hipótese do tipo

$$H_0: F(\pi) = K \ln A_{\underline{\pi}} = 0$$

Vamos desenvolver essa hipótese para $r = 4$. Te

mos

$$H_0: \begin{cases} \pi_{11} = \pi_{1.} \pi_{.1} \\ \pi_{22} = \pi_{2.} \pi_{.2} \\ \pi_{33} = \pi_{3.} \pi_{.3} \\ \pi_{44} = \pi_{4.} \pi_{.4} \end{cases}$$

Fazendo a transformação logarítmica, obtemos:

$$H_0: \begin{cases} \ln \pi_{11} - \ln \pi_{1.} - \ln \pi_{.1} = 0 \\ \ln \pi_{22} - \ln \pi_{2.} - \ln \pi_{.2} = 0 \\ \ln \pi_{33} - \ln \pi_{3.} - \ln \pi_{.3} = 0 \\ \ln \pi_{44} - \ln \pi_{4.} - \ln \pi_{.4} = 0 \end{cases}$$

que é da forma

$$H_0: F(\pi) = K_{4 \times 12} \ln A_{12 \times 16} \pi_{16 \times 1} = 0$$

As matrizes K , A e π são as seguintes.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi' = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} & \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix}$$

A soma de quadrados para testar esse tipo de hipótese é dada por $F' S^{-1} F$ que tem distribuição assintótica de χ^2 com r graus de liberdade.

Para testarmos hipóteses de independência e associação sobre a diagonal principal, que são funções do tipo $F(\pi) = K \ln A \pi$, devemos usar a matriz de variâncias e covariâncias dada por

$$S = K D_a^{-1} A V(p) A' D_a^{-1} K' \quad \text{pois,}$$

$$S = H V(p) H'$$

e H no caso de funções logarítmicas é dada por

$$H = K D_a^{-1} A$$

onde D_a é uma matriz diagonal com elementos do Vetor A_p na diagonal principal.

A hipótese de homogeneidade das marginais

$$H_0: \pi_{i.} = \pi_{.j} \quad \text{para } i=j= 1, 2, \dots, r$$

Para o caso em que $r = 4$ podemos escrever

$$H_0: \begin{bmatrix} \pi_{1.} = \pi_{.1} \\ \pi_{2.} = \pi_{.2} \\ \pi_{3.} = \pi_{.3} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad H_0: \begin{bmatrix} \pi_{1.} - \pi_{.1} = 0 \\ \pi_{2.} - \pi_{.2} = 0 \\ \pi_{3.} - \pi_{.3} = 0 \end{bmatrix}$$

Observação:

$\pi_{4.} = \pi_{.4}$ é linearmente dependente.

Podemos reescrever H_0 da seguinte forma:

$$H_0: \begin{bmatrix} \pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} + \pi_{14} = \pi_{11} + \pi_{21} + \pi_{31} + \pi_{41} \\ \pi_{21} + \pi_{22} + \pi_{23} + \pi_{24} = \pi_{12} + \pi_{22} + \pi_{32} + \pi_{42} \\ \pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{33} + \pi_{34} = \pi_{13} + \pi_{23} + \pi_{33} + \pi_{43} \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$H_0: \begin{bmatrix} \pi_{12} + \pi_{13} + \pi_{14} - \pi_{21} - \pi_{31} - \pi_{41} = 0 \\ \pi_{21} + \pi_{23} + \pi_{24} - \pi_{12} - \pi_{32} - \pi_{42} = 0 \\ \pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{34} - \pi_{13} - \pi_{23} - \pi_{43} = 0 \end{bmatrix}$$

o que implica em

$$H_0: \begin{bmatrix} F_1(\pi) \\ F_2(\pi) \\ F_3(\pi) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{F}(\pi) = 0$$

onde as funções são do tipo

$$F(\pi) = A\pi$$

As matrizes A e π são as seguintes

$$A_{3 \times 16} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi' = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} & \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix}$$

O teste adequado é dado por

$$SQ \left[F(\pi) = 0 \right] = F' S^{-1} F = (Ap)' S^{-1} Ap$$

que tem distribuição assintótica de χ^2 com r-1 grau de liberdade, sob H_0 .

A hipótese de simetria

$$H_0: \pi_{ij} = \pi_{ji} \text{ com } i \neq j \text{ e } i, j = 1, 2, \dots, r$$

Para o caso de $r = 4$ temos

$$H_0: \begin{bmatrix} \pi_{12} = \pi_{21} \\ \pi_{13} = \pi_{31} \\ \pi_{14} = \pi_{41} \\ \pi_{23} = \pi_{32} \\ \pi_{24} = \pi_{42} \\ \pi_{34} = \pi_{43} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad H_0: \begin{bmatrix} \pi_{12} - \pi_{21} = 0 \\ \pi_{13} - \pi_{31} = 0 \\ \pi_{14} - \pi_{41} = 0 \\ \pi_{23} - \pi_{32} = 0 \\ \pi_{24} - \pi_{42} = 0 \\ \pi_{34} - \pi_{43} = 0 \end{bmatrix}$$

que é do tipo $H_0: F(\pi) = A = 0$, onde

$$A_{6 \times 16} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\pi' = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} & \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix}$$

O teste estatístico adequado a essa hipótese é dado por:

$$SQ \left[F(\pi) = 0 \right] = F' S^{-1} F = (Ap)' S^{-1} (Ap)$$

que tem distribuição assintótica de χ^2 com $\frac{r(r-1)}{2}$ graus de liberdade, sob H_0 .

O segundo tipo de tabela de contingência mais conhecido é a tabela 1 apresentada na página 11, na qual, é baseado todo o método de GRIZZLE et alii.

Para esse tipo de tabela, as hipóteses podem ser ainda mais diversificada, pois, podemos adaptar a elas modelos matemáticos convenientes a cada experimento. Um desses modelos é adaptado ao experimento odontológico, desenvolvido no próximo item.

3.3. Aplicação do Método "GSK" em um Experimento Odontológico

3.3.1. O Experimento

Após o tratamento de canais radiculares, faz-se radiografias do dente tratado e observa-se a reatividade (capacidade de reagir ou não a tratamento químico).

Cinco fatores são incluídos nestes experimento e para cada fator consideramos dois níveis que são os seguintes:

FATORES	N Í V E I S	
IDADE	Menos que 30 anos	30 anos ou mais
TRATAMENTO	Parcial	Total
SEXO	Masculino	Feminino
MAXILAR	superior	Inferior
Nº DE RAÍZES	uma raiz	mais que uma raiz

Assim temos para o referido experimento 32 (2^5) sub-populações binomiais pois a variável de análise (reatividade) é composta apenas de duas categorias de respostas (com reação ou sem reação).

3.3.2. Metodologia

Analisaremos o experimento através de um delineamento fatorial pois assim, poderemos testar se as proporções de respostas "com reação" são equivalentes para todos os fatores e todas as suas interações.

Para isto adotaremos o modelo matemático completo que segue.

$$\begin{aligned}
 Y = & \mu + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \beta_1 x_1 x_2 + \\
 & + \beta_2 x_1 x_3 + \beta_3 x_1 x_4 + \beta_4 x_1 x_5 + \beta_5 x_2 x_3 + \beta_6 x_2 x_4 + \beta_7 x_2 x_5 + \\
 & + \beta_8 x_3 x_4 + \beta_9 x_3 x_5 + \beta_{10} x_4 x_5 + \gamma_1 x_1 x_2 x_3 + \gamma_2 x_1 x_2 x_4 + \\
 & + \gamma_3 x_1 x_2 x_5 + \gamma_4 x_1 x_3 x_4 + \gamma_5 x_1 x_3 x_5 + \gamma_6 x_1 x_4 x_5 + \\
 & + \gamma_7 x_2 x_3 x_4 + \gamma_8 x_2 x_3 x_5 + \gamma_9 x_2 x_4 x_5 + \gamma_{10} x_3 x_4 x_5 + \\
 & + \psi_1 x_1 x_2 x_3 x_4 + \psi_2 x_1 x_2 x_3 x_5 + \psi_3 x_1 x_2 x_4 x_5 + \psi_4 x_1 x_3 x_4 x_5 + \\
 & + \psi_5 x_2 x_3 x_4 x_5 + \Gamma_1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + \epsilon_i
 \end{aligned}$$

Encontrada a regressão, segundo o método "GSK", onde, $b = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} F$ é a estimativa da matriz de parâmetros, testaremos os parâmetros, através do teste esta-

tístico.

$$QC = SQ\{c\beta = 0\} = (cb)' \{c(X' S^{-1} X)^{-1} c\}^{-1} (cb)$$

Verifica-se a significância ou não dos parâmetros, os parâmetros não significantes são eliminados para obtermos, com isto, alguns graus de liberdade para testarmos o ajustamento do modelo através do teste.

$$SQ \{F(\pi) = X\beta\} = F' S^{-1} F - b' \{X S^{-1} X\} b$$

Os dados, para este experimento, foram obtidos junto ao departamento de Diagnóstico e Cirurgia, da Faculdade de Odontologia de Araraquara.

A seguir apresentamos os dados já tabulados nas diversas sub-populações.

TABELA 4: DADOS DE REATIVIDADE SEGUNDO AS SUB-POPULAÇÕES

IDADE (ANOS)	TRATAMENTO	SEXO	MAXILAR	Nº RAÍZES	COM REAÇÃO	SEM REAÇÃO
< 30	PARCIAL	M	SUP	1	49	15
< 30	PARCIAL	M	SUP	> 1	24	16
< 30	PARCIAL	M	INF	1	05	03
< 30	PARCIAL	M	INF	> 1	38	15
< 30	PARCIAL	F	SUP	1	182	49
< 30	PARCIAL	F	SUP	> 1	99	45
< 30	PARCIAL	F	INF	1	17	01
< 30	PARCIAL	F	INF	> 1	78	27
< 30	TOTAL	M	SUP	1	55	37
< 30	TOTAL	M	SUP	> 1	23	12
< 30	TOTAL	M	INF	1	02	01
< 30	TOTAL	M	INF	> 1	21	08
< 30	TOTAL	F	SUP	1	139	73
< 30	TOTAL	F	SUP	> 1	51	41
< 30	TOTAL	F	INF	1	05	08
< 30	TOTAL	F	INF	> 1	38	30
≥ 30	PARCIAL	M	SUP	1	35	16
≥ 30	PARCIAL	M	SUP	> 1	30	13
≥ 30	PARCIAL	M	INF	1	11	07
≥ 30	PARCIAL	M	INF	> 1	18	09
≥ 30	PARCIAL	F	SUP	1	218	83
≥ 30	PARCIAL	F	SUP	> 1	135	62
≥ 30	PARCIAL	F	INF	1	58	24
≥ 30	PARCIAL	F	INF	> 1	87	56
≥ 30	TOTAL	M	SUP	1	19	16
≥ 30	TOTAL	M	SUP	> 1	06	09
≥ 30	TOTAL	M	INF	1	06	06
≥ 30	TOTAL	M	INF	> 1	10	07
≥ 30	TOTAL	F	SUP	1	92	68
≥ 30	TOTAL	F	SUP	> 1	40	44
≥ 30	TOTAL	F	INF	1	50	15
≥ 30	TOTAL	F	INF	> 1	40	32

3.3.3. Análise do experimento pelo modelo GSK

A partir desta distribuição de frequência pelas sub-populações e do modelo adotado temos:

3.3.3.1. Matriz das proporções observadas

$$\hat{\pi} = \underline{\underline{p}} = \begin{bmatrix} 49/64 \\ 15/64 \\ 24/40 \\ 16/40 \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \\ 40/72 \\ 32/72 \end{bmatrix}_{64 \times 1}$$

3.3.3.2. Matriz de variâncias e covariâncias

Para cada sub-população teremos uma matriz 2X2 de Variâncias - covariâncias do tipo

$$\underline{\underline{V}}(p_i) = \frac{1}{n_i} \begin{bmatrix} p_{i1}(1-p_{i1}) & -p_{i1}p_{i2} \\ -p_{i1}p_{i2} & p_{i2}(1-p_{i2}) \end{bmatrix}$$

em se tratando de variável binomial temos $(1-p_{i1}) = p_{i2}$ e então

$$\underline{\underline{V}}(p_i) = \frac{1}{n_i} \begin{bmatrix} p_{i1}p_{i2} & -p_{i1}p_{i2} \\ -p_{i1}p_{i2} & p_{i1}p_{i2} \end{bmatrix}$$

Para $i = 1, 2, 3, \dots, 32$ temos:

$$\underline{V}(p_1) = \begin{bmatrix} 0,002804 & -0,002804 \\ -0,002804 & 0,002804 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_2) = \begin{bmatrix} 0,006000 & -0,006000 \\ -0,006000 & 0,006000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_3) = \begin{bmatrix} 0,029297 & -0,029297 \\ -0,029297 & 0,029297 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_4) = \begin{bmatrix} 0,003829 & -0,003829 \\ -0,003829 & 0,003829 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_5) = \begin{bmatrix} 0,000723 & -0,000723 \\ -0,000723 & 0,000723 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_6) = \begin{bmatrix} 0,001492 & -0,001492 \\ -0,001492 & 0,001492 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_7) = \begin{bmatrix} 0,002915 & -0,002915 \\ -0,002915 & 0,002915 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_8) = \begin{bmatrix} 0,001819 & -0,001819 \\ -0,001819 & 0,001819 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_9) = \begin{bmatrix} 0,002613 & -0,002613 \\ -0,002613 & 0,002613 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{10}) = \begin{bmatrix} 0,006437 & -0,006437 \\ -0,006437 & 0,006437 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{11}) = \begin{bmatrix} 0,074074 & -0,074074 \\ -0,074074 & 0,074074 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{12}) = \begin{bmatrix} 0,006888 & -0,006888 \\ -0,006888 & 0,006888 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{13}) = \begin{bmatrix} 0,001065 & -0,001065 \\ -0,001065 & 0,001065 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{14}) = \begin{bmatrix} 0,002685 & -0,002685 \\ -0,002685 & 0,002685 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{15}) = \begin{bmatrix} 0,018207 & -0,018207 \\ -0,018207 & 0,018207 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{16}) = \begin{bmatrix} 0,003626 & -0,003626 \\ -0,003626 & 0,003626 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{17}) = \begin{bmatrix} 0,004222 & -0,004222 \\ -0,004222 & 0,004222 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{18}) = \begin{bmatrix} 0,004905 & -0,004905 \\ -0,004905 & 0,004905 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{19}) = \begin{bmatrix} 0,013203 & -0,013203 \\ -0,013203 & 0,013203 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{20}) = \begin{bmatrix} 0,008230 & -0,008230 \\ -0,008230 & 0,008230 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{21}) = \begin{bmatrix} 0,000663 & -0,000663 \\ -0,000663 & 0,000663 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{22}) = \begin{bmatrix} 0,001095 & -0,001095 \\ -0,001095 & 0,001095 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{23}) = \begin{bmatrix} 0,002525 & -0,002525 \\ -0,002525 & 0,002525 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{24}) = \begin{bmatrix} 0,001666 & -0,001666 \\ -0,001666 & 0,001666 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{25}) = \begin{bmatrix} 0,007090 & -0,007090 \\ -0,007090 & 0,007090 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{26}) = \begin{bmatrix} 0,016000 & -0,016000 \\ -0,016000 & 0,016000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{27}) = \begin{bmatrix} 0,020833 & -0,020833 \\ -0,020833 & 0,020833 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{28}) = \begin{bmatrix} 0,014248 & -0,014248 \\ -0,014248 & 0,014248 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{29}) = \begin{bmatrix} 0,001527 & -0,001527 \\ -0,001527 & 0,001527 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{30}) = \begin{bmatrix} 0,002969 & -0,002969 \\ -0,002969 & 0,002969 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}(p_{31}) = \begin{bmatrix} 0,002731 & -0,002731 \\ -0,002731 & 0,002731 \end{bmatrix} \quad \underline{V}(p_{32}) = \begin{bmatrix} 0,003429 & -0,003429 \\ -0,003429 & 0,003429 \end{bmatrix}$$

A matriz completa de variâncias e covariâncias é uma matriz bloco diagonal pois as sub-populações são independentes, o que nos dá covariância nula entre as populações, portanto teremos $\underline{V}(p)$ igual a:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{32 \times 64}$$

3.3.3.4. Matriz $\underline{X}$

A matriz $\underline{X}$ ou matriz de planejamento é obtida através da seguinte estruturação dos fatores principais:

Idade 1 se o paciente tiver menos que 30 anos
 -1 se o paciente tiver 30 anos ou mais

Tratamento 1 se o tratamento foi parcial
 -1 se o tratamento foi total

Sexo 1 se o paciente foi do sexo masculino
 -1 se o paciente for do sexo feminino

Maxilar 1 se o dente tratado estiver no maxilar superior
 -1 se o dente tratado estiver no maxilar inferior

nº de raízes 1 se o dente tratado tem uma raiz
 -1 se o dente tratado tem mais de uma raiz

Portanto a matriz X de planejamento é construída da seguinte forma.

A primeira coluna é toda de números 1, pois, refere-se à média do modelo. As cinco colunas que seguem (da 2.^a a 6.^a), referem-se aos fatores principais, e seguem a estruturação acima descrita, assumindo valores 1 e -1, dependendo do fator e do nível do fator considerado, seguindo sempre a ordem de disposição da tabela (4). Da 7.^a a 32.^a colunas, relativas às interações dos fatores principais, são obtidas através de multiplicações das colunas dos efeitos principais envolvidos em cada interação.

Portanto a matriz X fica:

As letras gregas colocadas fora da matriz X , acima de cada coluna, são os parâmetros aos quais as colunas se referem e estão apenas auxiliando a montagem da matriz.

A média do modelo é representada por μ , α_1 é o parâmetro relativo à idade, α_2 parâmetro relativo ao tratamento, α_3 parâmetro relativo ao sexo, α_4 parâmetro relativo ao maxilar e α_5 o parâmetro relativo ao nº de raízes do dente.

Como exemplo construímos ainda as colunas, β_1 (Interação Idade X Tratamento) obtida pelo produto da 2.^a e 3.^a colunas, γ_1 (Interação Idade X Tratamento X Sexo) obtida pelo produto da 2.^a, 3.^a e 4.^a colunas, ψ_1 (Interação Idade X Tratamento X Sexo X Maxilar) obtida pelo produto da 2.^a, 3.^a, 4.^a, e 5.^a colunas, τ_1 (Interação de todos os fatores principais) obtida pelo produto da 2.^a, 3.^a, 4.^a, 5.^a e 6.^a colunas.

3.3.3.5. Matriz S^{-1}

A matriz de Variâncias-covariâncias de $\underline{F}$ é dada pela fórmula

$$\begin{array}{ccccc} S & = & A & V(p) & A' \\ 32 \times 32 & & 32 \times 64 & 64 \times 64 & 64 \times 32 \end{array}$$

Portanto, S é uma matriz diagonal.

S = diagonal [0,002804; 0,006000; 0,029297; 0,003829;
 0,000723; 0,001492; 0,002915; 0,001819; 0,002613;
 0,006437; 0,074074; 0,006888; 0,001065; 0,002685;
 0,018207; 0,003626; 0,004222; 0,004905; 0,013203;
 0,008230; 0,000663; 0,001095; 0,002525; 0,001666;
 0,007090; 0,016000; 0,020833; 0,014248; 0,001527;
 0,002969; 0,002731; 0,003429;]

A matriz inversa de uma matriz diagonal é também uma matriz diagonal e composta pelos inversos dos elementos da matriz original. Temos então

$S^{-1}_{32 \times 32}$ = diag. [356,633381; 166,666667; 34,133188; 261,164795;
 1383,125864; 670,241287; 343,053173; 549,679487;
 382,701875; 155,351872; 13,500014; 145,080023;
 938,967136; 372,439479; 54,923930; 275,785990;
 236,854571; 203,873598; 75,740362; 121,506683;
 1508,295626; 913,242009; 396,039604; 600,240096;
 141,043724; 62,500000; 48,000768; 70,185289;
 654,878847; 336,813742; 366,166239; 291,630213;]

3.3.3.6. Matriz F(p)

A matriz $F(p)$ é dada por $A_{32 \times 64} \cdot p_{64 \times 1}$. Temos
 então uma matriz coluna, que para simplificar, passamos a escrever em sua forma transposta.

$$\begin{bmatrix} F(p) \\ \tilde{z} \end{bmatrix}'_{1 \times 32} = \begin{bmatrix} 49/64 & 24/40 & 5/8 & 38/53 & 182/231 \\ 99/144 & 17/18 & 78/105 & 55/92 & 23/35 \\ 2/3 & 21/29 & 139/212 & 51/92 & 5/13 \\ 38/68 & 35/51 & 30/43 & 11/18 & 18/27 \\ 218/301 & 135/197 & 58/82 & 87/143 & 19/35 \\ 6/15 & 6/12 & 10/17 & 92/160 & 40/84 \\ 50/65 & 40/72 \end{bmatrix}$$

3.3.3.7. Matriz β

A matriz β é uma matriz coluna contendo os 32 parâmetros do modelo adotado. O que vamos determinar será a sua estimativa representada por $\tilde{b}_{32 \times 1}$.

Conhecidas todas as matrizes, que são envolvidas, passamos a estimar os parâmetros através da fórmula,

$$\hat{\beta} = b = [X' S^{-1} X]^{-1} X' S^{-1} F(p) \text{ e chegamos a}$$

$$\begin{bmatrix} b' \\ 1 \times 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6395 & 0,0274 & 0,0641 & -0,0116 & -0,0086 & 0,0195 \\ 0,0028 & 0,0139 & 0,0050 & -0,0079 & -0,0208 & 0,0094 \\ 0,0084 & -0,0008 & -0,0230 & 0,0166 & -0,0384 & -0,2931 \\ 0,0269 & -0,0096 & 0,0060 & 0,0060 & 0,0103 & 0,0041 \\ -0,0078 & 0,0166 & 0,0236 & -0,0074 & -0,0005 & -0,0115 \\ 0,0123 & 0,0274 \end{bmatrix}$$

3.3.3.8. A estimativa do modelo

$$\begin{aligned} \hat{Y} = & 0,6395 + 0,0274 x_1 + 0,0641 x_2 - 0,0116 x_3 - \\ & -0,0086 x_4 + 0,0195 x_5 + 0,0028 x_1 x_2 + 0,0139 x_1 x_3 + \\ & +0,0050 x_1 x_4 - 0,0079 x_1 x_5 - 0,0208 x_2 x_3 + 0,0094 x_2 x_4 + \\ & +0,0084 x_2 x_5 - 0,0008 x_3 x_4 - 0,0230 x_3 x_5 + 0,0166 x_4 x_5 + \\ & -0,0384 x_1 x_2 x_3 - 0,2931 x_1 x_2 x_4 + 0,0269 x_1 x_2 x_5 - \\ & -0,0096 x_1 x_3 x_4 - 0,0060 x_1 x_3 x_5 + 0,0103 x_1 x_4 x_5 + \\ & +0,0163 x_2 x_3 x_4 - 0,0041 x_2 x_3 x_5 - 0,0078 x_2 x_4 x_5 + \\ & +0,0166 x_3 x_4 x_5 - 0,0236 x_1 x_2 x_3 x_4 - 0,0074 x_1 x_2 x_3 x_5 - \\ & -0,0005 x_1 x_2 x_4 x_5 - 0,0115 x_1 x_3 x_4 x_5 + 0,0123 x_2 x_3 x_4 x_5 + \\ & +0,0274 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \end{aligned}$$

3.3.3.9. Teste dos parâmetros encontrados

Testaremos as hipóteses $H_0: \beta_i = 0$, onde β_i representa cada parâmetro de β , com $i = 1, 2, 3, \dots, 32$ (β_1 não é testado pois representa a média do modelo) através do teste

$$SQ [C \beta = 0] = (Cb)' [C(X' S^{-1} X)^{-1} C']^{-1} (Cb) = x_1^2$$

Para o efeito da idade (I) teremos

$$H_{01}: \alpha_1 = 0 \Rightarrow C_I \beta = 0 \text{ com}$$

$$C_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times 32}$$

Para o efeito do Tratamento (T)

$$Ho_2: \alpha_2 = 0 \rightarrow C_T \beta = 0 \quad \text{com}$$

$$C_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1x32

Para o efeito do sexo (S)

$$Ho_3: \alpha_3 = 0 \rightarrow C_S \beta = 0 \quad \text{com}$$

$$C_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1x32

Para o efeito do Maxilar (M)

$$Ho_4: \alpha_4 = 0 \rightarrow C_M \beta = 0 \quad \text{com}$$

$$C_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1x32

Para o efeito do número de raízes (R)

$$Ho_5: \alpha_5 = 0 \rightarrow C_R \beta = 0 \quad \text{com}$$

$$C_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1x32

Como podemos notar, para cada Hoi temos como variação, somente a posição da unidade (1) dentro da matriz C. Fazendo i variar da 2^a até a 32^a coluna de C, testaremos todos os parâmetros do modelo adotado exceto a média (μ).

Estes testes fornecem os seguintes resultados:

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	X ² OBTIDO	SIGNIFICÂNCIA
IDADE (I)	1	2,8407	s.
TRATAMENTO (T)	1	15,5903	s.
SEXO (S)	1	0,5106	n.s.
MAXILAR (M)	1	0,2834	n.s.
Nº DE RAÍZES (R)	1	1,4430	s.
IXT	1	0,0308	n.s.
IXS	1	0,7361	n.s.
IXM	1	0,0966	n.s.
IXR	1	0,2356	n.s.
TXS	1	1,6441	s.
TXM	1	0,3335	n.s.
TXR	1	0,2684	n.s.
SXM	1	0,0026	n.s.
SXR	1	2,0019	s.
MXR	1	1,0431	s.
IXTXS	1	5,5960	s.
IXTXM	1	3,2608	s.
IXTXR	1	2,7505	s.
IXSXM	1	0,3502	n.s.
IXSXR	1	0,1345	n.s.
IXMXR	1	0,4028	n.s.
TXSXM	1	1,0103	s.
TXSXR	1	0,0640	n.s.
TXMXR	1	0,2303	n.s.
SXMXR	1	1,0470	s.
IXTXSXM	1	2,1062	s.
IXTXSXR	1	0,2089	n.s.
IXTXMXR	1	0,0008	n.s.
IXSXM XR	1	0,5036	n.s.
TXSXM XR	1	0,5763	n.s.
IXTXSXM XR	1	2,8573	s.
TOTAL	31		

n.s. = não significativo

s. = significativo (considerado significativo os valores encontrados > 1)

3.3.4. Readaptando o modelo

Desprezando os efeitos não significativos (consideramos significativos valores obtidos maiores que um), passamos a trabalhar com um novo modelo matemático que é reduzido em relação ao adotado anteriormente.

Temos então:

$$\begin{aligned} Y'_i = & \mu' + \alpha'_i x + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_5 x_5 + \beta'_5 x_2 x_3 + \beta'_9 x_3 x_5 + \\ & + \beta'_{10} x_4 x_5 + \gamma'_1 x_1 x_2 x_3 + \gamma'_2 x_1 x_2 x_4 + \gamma'_3 x_1 x_2 x_5 + \\ & + \gamma'_7 x_2 x_3 x_4 + \gamma'_{10} x_3 x_4 x_5 + \psi'_1 x_1 x_2 x_3 x_4 + \tau'_1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ & + \varepsilon_i \end{aligned}$$

A partir deste novo modelo formamos uma nova matriz X de planejamento, que para diferenciarmos chamaremos de X_1 e uma nova β que chamaremos β_1 .

3.3.4.1. Matriz X_1

Para a formação da matriz X_1 , eliminamos da matriz X as colunas relativas aos parâmetros desprezados e temos uma matriz reduzida no seu número de colunas. Assim X_1 terá o mesmo número de linhas (32) e o número de colunas passa de 32 para 14 que é o número de parâmetros do modelo reduzido.

3.3.4.2. Matriz β_1

A matriz β_1 é formada pelos 14 parâmetros do

novo modelo e a matriz b_1 pelas estimativas destes parâmetros.

As demais matrizes permanecem iguais, pois independem do modelo adotado.

3.3.4.3. Estimando o novo modelo

A estimativa é dada por

$$b_1 = \begin{bmatrix} X_1' & S^{-1} & X_1 \\ 14 \times 1 & 32 \times 32 & 32 \times 14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1' & S^{-1} & F \\ 14 \times 32 & 32 \times 32 & 32 \times 1 \end{bmatrix}$$

A matriz das estimativas obtidas (b_1) é apresentada a seguir em sua forma transposta.

$$b_1' = \begin{bmatrix} 0,6490 & 0,0270 & 0,0637 & 0,0216 & -0,0147 & -0,0285 \\ 0,0084 & -0,0323 & -0,0235 & 0,0271 & 0,0070 & 0,0198 \\ 0,0213 & 0,0179 \end{bmatrix}$$

Portanto a estimativa do modelo reduzido fica:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_1' = & 0,6490x_0 + 0,0270x_1 + 0,0637x_2 + 0,0216x_5 - \\ & -0,0147x_2x_3 - 0,0285x_3x_5 + 0,0084x_4x_5 - 0,0323x_1x_2x_3 \\ & -0,0235x_1x_2x_4 + 0,0271x_1x_2x_5 + 0,0070x_2x_3x_4 + \\ & 0,0198x_3x_4x_5 + 0,0213x_1x_2x_3x_4 + 0,0179x_1x_2x_3x_4x_5 \end{aligned}$$

3.3.4.4. As proporções obtidas e as estimadas através modelo reduzido

Para ilustração apresentamos uma comparação das proporções estimadas e obtidas através do modelo acima ($\hat{Y}_i$

representa a estimativa da mesma proporção).

$Y_1 = 0,7656$	$\hat{Y}_1 = 0,7368$	$Y_{17} = 0,6863$	$\hat{Y}_{17} = 0,6888$
$Y_2 = 0,6000$	$\hat{Y}_2 = 0,6597$	$Y_{18} = 0,6977$	$\hat{Y}_{18} = 0,7362$
$Y_3 = 0,6250$	$\hat{Y}_3 = 0,6620$	$Y_{19} = 0,6111$	$\hat{Y}_{19} = 0,6498$
$Y_4 = 0,7170$	$\hat{Y}_4 = 0,7138$	$Y_{20} = 0,6667$	$\hat{Y}_{20} = 0,7384$
$Y_5 = 0,7879$	$\hat{Y}_5 = 0,7828$	$Y_{21} = 0,7243$	$\hat{Y}_{21} = 0,7354$
$Y_6 = 0,6875$	$\hat{Y}_6 = 0,6870$	$Y_{22} = 0,6853$	$\hat{Y}_{22} = 0,6764$
$Y_7 = 0,9444$	$\hat{Y}_7 = 0,9450$	$Y_{23} = 0,7073$	$\hat{Y}_{23} = 0,6468$
$Y_8 = 0,7429$	$\hat{Y}_8 = 0,7320$	$Y_{24} = 0,6084$	$\hat{Y}_{24} = 0,6138$
$Y_9 = 0,5978$	$\hat{Y}_9 = 0,6308$	$Y_{25} = 0,5429$	$\hat{Y}_{25} = 0,5978$
$Y_{10} = 0,6571$	$\hat{Y}_{10} = 0,6782$	$Y_{26} = 0,4000$	$\hat{Y}_{26} = 0,4652$
$Y_{11} = 0,6667$	$\hat{Y}_{11} = 0,6198$	$Y_{27} = 0,5000$	$\hat{Y}_{27} = 0,5240$
$Y_{12} = 0,7241$	$\hat{Y}_{12} = 0,7084$	$Y_{28} = 0,5882$	$\hat{Y}_{28} = 0,5758$
$Y_{13} = 0,6557$	$\hat{Y}_{13} = 0,6466$	$Y_{29} = 0,5750$	$\hat{Y}_{29} = 0,5860$
$Y_{14} = 0,5543$	$\hat{Y}_{14} = 0,5876$	$Y_{30} = 0,4762$	$\hat{Y}_{30} = 0,4902$
$Y_{15} = 0,3846$	$\hat{Y}_{15} = 0,5300$	$Y_{31} = 0,7692$	$\hat{Y}_{31} = 0,7274$
$Y_{16} = 0,5588$	$\hat{Y}_{16} = 0,4970$	$Y_{32} = 0,5556$	$\hat{Y}_{32} = 0,5072$

Novamente testamos as Hipóteses $H_0: \beta_i = 0$, para $i = 1, 2, 3, \dots, 14$, através do teste

$$SQ [C\beta = 0] = (Cb_1)' [C(X_1' S^{-1} X_1)^{-1} C']^{-1} Cb_1 = x_1^2$$

Testamos também o ajustamento do modelo pois são agora temos disponibilidade de graus de liberdade.

Anteriormente tínhamos 31 graus de liberdade para testarmos os 31 parâmetros, agora temos apenas 13 parâme

tros a serem testados o que nos dá uma diferença de 18 graus de liberdade para o teste do ajustamento do modelo que é feito através do teste

$$SQ[F(\pi) = X\beta] = F' S^{-1} F - b_1' (X' S^{-1} X)^{-1} b_1 = \chi^2$$

$\begin{matrix} 1 \times 32 & 32 \times 32 & 32 \times 1 & 1 \times 14 & 14 \times 32 & 32 \times 32 & 32 \times 14 & 14 \times 1 & 32-14 \end{matrix}$

Aplicando os testes aos parâmetros e ao modelo chegamos ao seguinte quadro:

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	χ^2	SIGNIFICÂNCIA
IDADE (I)	1	8,1754	**
TRATAMENTO (T)	1	29,4918	**
NÚMERO DE RAÍZES (R)	1	3,0880	n.s.
TXS	1	1,4651	n.s.
SXR	1	5,3137	n.s.
MXR	1	0,4241	n.s.
IXTXS	1	9,1905	**
IXTXM	1	3,8411	n.s.
IXTXR	1	7,4624	**
TXSXM	1	0,4871	n.s.
SXMXR	1	2,5717	n.s.
IXTXSXM	1	3,1408	n.s.
IXTXSXM XR	1	3,2371	n.s.
AJUSTE OU ERRO	18	8,7754	n.s.
TOTAL	31		

onde

n.s. não significante

** significante a 1%

4. DISCUSSÃO

1ª O fator Idade foi significativo a 1%, isto é, dos dois níveis considerados um influenciou mais que o outro na reatividade. Podemos notar na Tabela 5 que o nível "menos que trinta anos" é responsável por maior reatividade.

TABELA 5: Frequência e proporções da reatividade relativas à IDADE

IDADE	COM REAÇÃO	SEM REAÇÃO	TOTAL	p
<30 anos	826	381	1207	0,6843
≥30 anos	855	467	1322	0,6467
TOTAIS	1681	848	2529	

2.^a O fator Tratamento foi significativo a 1%, o que quer dizer que estatisticamente os dois tratamentos diferem-se. Na tabela 6 podemos notar que o tratamento parcial é responsável por maior incidência de reatividade.

TABELA 6: Frequência e proporções da reatividade relativas ao Tratamento

TRATAMENTO	COM REAÇÃO	SEM REAÇÃO	TOTAL	p
PARCIAL	1084	441	1525	0,7108
TOTAL	597	407	1004	0,5946
TOTAIS	1681	848	2529	

3.^a A interação Idade X Tratamento foi não significativa quando a testamos pelo modelo completo, o que pode ser observado na tabela 7 e 8, onde o fator Idade não altera a variabilidade exercida pelo fator Tratamento sobre a reatividade e vice e versa. Porém, esta interação altera-se significativamente na presença dos fatores principais Sexo e Número de Raízes.

Essas alterações podem ser notadas nas tabelas 9, 10, 11 e 12.

TABELA 7: Interação Idade x Tratamento (frequência)

TRATAMENTO	P A R C I A L				T O T A L			
IDADE	<30		≥30		<30		≥30	
REATIVIDADE	G	S	C	S	C	S	C	S
FREQUÊNCIA	492	171	592	270	334	210	263	197

TABELA 8: Interação Idade x Tratamento (proporções)

TRATAMENTO	PARCIAL		TOTAL	
IDADE	<30		≥30	
PROPORÇÃO	0,7421	0,6868	0,6140	0,5717

Notamos nessa tabela que p apresenta o mesmo decréscimo entre os níveis do fator Tratamento dentro de cada nível do fator Idade e entre os níveis do fator Idade dentro de cada nível do fator Tratamento

TABELA 9: Interação Idade x Tratamento x Sexo (frequência)

TRATAMENTO		P A R C I A L				T O T A L			
IDADE		<30		≥30		<30		≥30	
REATIVIDADE		C	S	C	S	C	S	C	S
S E X O	MASCULINO	116	49	94	45	101	58	41	38
	FEMININO	376	122	498	225	233	152	222	159

TABELA 10: Interação Idade x Tratamento x Sexo (proporções)

TRATAMENTO		PARCIAL		TOTAL	
IDADE		<30	≥30	<30	≥30
S E X O	MASCULINO	0,7030	0,6763	0,6352	0,5190
	FEMININO	0,7550	0,6888	0,6052	0,5827

Notamos que, o sexo feminino apresentou a proporção.p maior em todos os níveis da interação Tratamento x Idade, com excessão do tratamento total na idade < 30.

TABELA 11: Interação Idade x Tratamento x nº de Raízes (frequência)

TRATAMENTO		P A R C I A L				T O T A L			
IDADE		<30		≥30		<30		≥30	
REATIVIDADE		C	S	C	S	C	S	C	S
nº D E R A I Z	UMA RAIZ	253	68	322	130	201	119	167	105
	MAIS QUE UMA	239	103	270	140	133	91	96	92

TABELA 12: Interação Idade x Tratamento x nº de Raízes (proporções)

TRATAMENTO		PARCIAL		TOTAL	
IDADE		<30	≥30	<30	≥30
nº D E R A I Z	UMA RAIZ	0,7882	0,7124	0,6281	0,6140
	MAIS QUE UMA	0,6988	0,6585	0,5938	0,5106

Notamos que, p decresce entre os dentes com apenas uma raiz e os dentes com mais que uma raiz em todos os níveis da interação Tratamento x Idade, mas de modo bastante diferenciado, o que explica a significância da interação Tratamento x Idade x Número de Raízes.

4ª A não significância do ajuste mostra que o modelo é adequado para explicar o experimento.

5. CONCLUSÕES FINAIS

Finalizando este trabalho faremos alguns comentários sobre o método de análise de dados categorizados por modelos lineares proposto por GRIZZLE, STARMER e KOCH e as modificações a ele propostas por diversos autores.

O método GSK tem vantagens sobre os outros testes estatísticos usuais, essas vantagens estão: na não necessidade de estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros sob H_0 , que em algumas hipóteses apresenta dificuldades na obtenção desses estimadores; na diversificação dos delineamentos possíveis de serem analisados e na oportunidade de determinarmos curvas ou superfícies de respostas, possibilitando uma análise detalhada de cada um dos parâmetros envolvidos, sejam eles, relativos a fatores principais ou às suas

interações.

Apesar de não ter sido esta nossa preocupação constatamos através da literatura que o método e suas modificações permitem diversos tipos de estimação de parâmetros através de funções adequadas, que podem ser funções lineares, logarítmicas, exponenciais e algumas funções compostas.

Diversos autores criticam o método apontando muitas dificuldades de cálculo, porém, da maneira que expusemos a metodologia do GSK e com a crescente utilização do micro computador nas análises estatísticas essas dificuldades apontadas desaparecem com uma programação bem simplificada envolvendo produtos e inversões de matrizes. Os programas de computação podem ser construídos a partir de combinações de programas já prontos e bem conhecidos, de produtos e inversões de matrizes, restando ao analista a construção das matrizes envolvidas. Salientamos ainda que essa construção pode também ser feita através de programação do computador.

Na análise do experimento odontológico apresentado neste trabalho, encontramos uma superfície de resposta capaz de explicá-lo de maneira aceitável, não só pela não rejeição do modelo como também pela comparação entre as proporções obtidas e as estimada através do modelo reduzido.

Vários métodos para análise de dados categorizados existem, o GSK foi o método estudado e por tudo que expusemos neste trabalho estamos convencidos de que se trata de um bom teste para grandes amostras e que para os casos de pequenas amostras seus resultados merecem ainda um estudo maior.

6. BIBLIOGRAFIA

BERKSON, J., 1955. Maximum likelihood and minimum X^2 estimate of the logistic function. JASA. Boston, 50: 130-162.

BERKSON, J., 1968. Application of minimum logit X^2 estimate to a problem of Grizzle, with a natation on the problem of no interaction. Biometrics. Raleigh, 24: 75-95.

BHAPKAR, V.P., 1961. "Some test for categorical data", in: ANN. MATH. STAT., 32: 72-83.

BHAPKAR, V.P., 1966. A note on the equivalence of two test criteria for hupotheses in categorical data. JASA. Boston, 61: 228-235.

BHAPKAR, V.P. e G.G. KOCH, 1968b. On the hypotheses of 'no interaction' in contingency tables. Biometrics. Raleigh, 24: 567-594.

- GOODMAN, L.A., 1968. The analysis of cross-classified data; independence, quasi-independence, and interaction in contingency tables with or without missing entries. JASA. Boston, 63: 1091-131.
- GOODMAN, L.A., 1971b. The analysis ou multidimensional contingency tables: stepwise procedures and direct estimation methods for building models for multiple classifications. Technometrics. Washington, 13: 33-63.
- GRIZZLE, J.E., C.F. STARMER e C.G. KOCH, 1969. Analysis of categorical data by linear models. Biometrics. Raleigh, 25: 489-504.
- GRIZZLE, J.E. e O.D. WILLIAMS, 1972. Log Linear models and tests of independence for contingency tables. Biometrics. Raleigh, 28: 137-156.
- JOHNSON, W.D. e G.G. KOCH, 1971. A note on the weighted least squares analysis of the Ries-Smith contingency table data. Technometrics. Washington, 13: 438-447.
- LANDIS, J.R.; W.M. STANISH; J.L. FREEMAN e G.G. KOCH, 1976. A computer program for the generalized chi-square analysis of categorical data using weighted least squares (GENCAT). Computer Programs in Biomedicine, 6: 196-231.
- NEYMAN, J., 1949. Contributions to the theory of the X^2 test. Proc. Berkley Symp. Math. Statist. Prob. University of California Press. 239-272.
- OGLIARI, P.J. 1984. Análise de Dados Categorizados: Modelo Log-Linear e Independência em tabelas de Contingência. USP Piracicaba (Dissertação de Mestrado).

WADA, C.Y., 1977. Análise de dados categóricos. Instituto de Matemática e Estatística - USP. (Dissertação de Mestrado).

WALD, A., 1943. Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large, In: TRANS. AMER. MATH. SOC., 54, 426-482.

7. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- BHAPKAR, V.P. e G.G. KOCH, 1968a. Hypotheses of 'no interaction' in multidimensional contingency tables. Technometrics, Washington, 10: 107-123.
- BISHOP, Y.M.M., 1972. Effects Collapsing Multidimensional Contingency Tables. Biometrics, 24: 567-594.
- CANTON, A.W.P., 1980. Análise de dados categorizados. Atas do 4º SINAPE. Rio de Janeiro, 79 p.
- CANTON, A.W.P. e M.N. FESTA, 1979. Análise de dados categorizados usando modelos lineares e suas aplicações - uma revisão bibliográfica. Atas do 3º SINAPE. São Paulo, 182-189.
- CHI, G.Y.H.; G.G. KOCH; S. LUI CHI; W.M. STANISH; W.D. JOHNSON e J.R. LANDIS, 1978. A computer program for the generalized chi-square analysis of computing risks agrouped survival categorical data (CRISCAT). Computer programs in Biomedical, impress.

- DARROCH, J.N., 1962. Interactions in multi-factor contingency tables; In: J. ROYAL STAT. SOC., Series B, 24, 251-263.
- PORTHOFFER, R.N. e G.G. KOCH, 1973. An analysis for compounded functions of categorical data; In: BIOMETRICS, 29, 143-157.
- GOODMAN, L.A., 1970. The multivariate analysis of qualitative data: interaction among multiple classifications. JASA. Boston, 65: 226-256.
- GOODMAN, L.A., 1971a. Partitioning of chi-square analysis of marginal contingency tables, and estimation of expected frequencies in multidimensional contingency tables. JASA. Boston, 66: 339-344.
- KOCH, G.G. e D.W. REINFURT, 1971. The analysis of categorical data from mixed models, In: BIOMETRICS, 27, 157-174.
- KOCH, G.G., P.B. IMREY e D.W. REINFURT, 1972. Linear models analysis of categorical data with incomplete response vectors, In: BIOMETRICS, 663-690.
- KOCH, G.G., W.D. JOHNSON e H.D. TOLLEY, 1972. A linear models approach to analysis of survival and extent of disease in multidimensional contingency tables, In: JASA, 67, 780-795.
- KOCH, G.G.; J.R. LANDIS; D.H. FREEMAN Jr.; J.L. FREEMAN e R. G. LEHNEN, 1978. A general methodology for the analysis of experiments with repeated measurement of categorical data. Biometrics. Raleigh, 33: 133-134.
- KULLBACK, S.; H.H. KU e R. VARNER, 1971. Analysis of multidimensional contingency tables. JASA. Boston, 66: 55-64.

- MANTEL, N., 1963. Chi-square tests with one degree of freedom; extensions of the Mantel-Haenszel procedure, In: JASA, 58, 690-700.
- ODOROFF, C.L., 1970. Minimum logit chi-square estimation and maximum likelihood estimation in contingency tables. JASA. Boston, 65: 1617-32.
- ROY, S.N. e M.A. KASTENBRAUM, 1956. On the hypotheses of no interaction in a multi-way contingency tables. Ann. Math. Statist. Baltimore, 27: 749-757.
- WILLIAMS, O.D. e J.E. GRIZZLE, 1972. Analysis of contingency tables having ordered response categories, In: JASA, 67, 55-63.

A P Ê N D I C E

```

10  REM  PROGRAMA PARA ANALISE DE FATORIAL
20  REM  5 FATORES E 2 NIVEIS
30  N = 32
40  DIM CR(N),SR(N),VF(N),P(N),F(N),B(N),SQ(N)
50  DIM X(N,N),H(N,N),HI(N,N)
60  FOR I = 1 TO N
70  READ CR(I),SR(I)
80  T = CR(I) + SR(I)
90  P(I) = CR(I) / T
100 VF(I) = CR(I) * SR(I) / (T * T * T)
110 NEXT I
120 REM  FORMA A MATRIZ X
130 FOR I = 0 TO 5
140 V = 1:M = 0
150 FOR J = 1 TO 2 ^ I
160 FOR K = 1 TO 2 ^ (5 - I)
170 M = M + 1
180 X(I,M) = V
190 NEXT K
200 V = - V
210 NEXT J
220 NEXT I
230 FOR J = 1 TO 32
240 X(6,J) = X(1,J) * X(2,J)
250 X(7,J) = X(1,J) * X(3,J)
260 X(8,J) = X(1,J) * X(4,J)
270 X(9,J) = X(1,J) * X(5,J)
280 X(10,J) = X(2,J) * X(3,J)
290 X(11,J) = X(2,J) * X(4,J)
300 X(12,J) = X(2,J) * X(5,J)
310 X(13,J) = X(3,J) * X(4,J)
320 X(14,J) = X(3,J) * X(5,J)
330 X(15,J) = X(4,J) * X(5,J)
340 X(16,J) = X(6,J) * X(3,J)
350 X(17,J) = X(6,J) * X(4,J)
360 X(18,J) = X(6,J) * X(5,J)
370 X(19,J) = X(7,J) * X(4,J)
380 X(20,J) = X(7,J) * X(5,J)
390 X(21,J) = X(8,J) * X(5,J)
400 X(22,J) = X(10,J) * X(4,J)
410 X(23,J) = X(10,J) * X(5,J)
420 X(24,J) = X(11,J) * X(5,J)
430 X(25,J) = X(13,J) * X(5,J)
440 X(26,J) = X(16,J) * X(4,J)
450 X(27,J) = X(16,J) * X(5,J)
460 X(28,J) = X(17,J) * X(5,J)
470 X(29,J) = X(19,J) * X(5,J)
480 X(30,J) = X(22,J) * X(5,J)
490 X(31,J) = X(26,J) * X(5,J)
500 NEXT J

```

```

510  FOR I = 1 TO N
520  FOR J = 1 TO N
530  FOR K = 1 TO N
540  H(I,J) = H(I,J) + X(I - 1,K) * X(J - 1,K) / VF(K)
550  NEXT K
560  NEXT J
570  NEXT I
580  FOR I = 1 TO N - 1
590  FOR J = I + 1 TO N
600  H(J,I) = H(I,J)
610  NEXT J
620  NEXT I
630  FOR I = 1 TO N
640  FOR J = 1 TO N
650  F(I) = F(I) + X(I - 1,J) * P(J) / VF(J)
660  NEXT J
670  NEXT I
680  GOSUB 820
690  FOR I = 1 TO N
700  FOR J = 1 TO N
710  B(I) = B(I) + HI(I,J) * F(J)
720  NEXT J
730  SQ(I) = B(I) * B(I) / HI(I,I)
740  NEXT I
750  REM  RESULTADOS
760  REM  ESTIMATIVAS DOS PARAMETROS
770  REM  QUI-QUADRADO
780  FOR I = 2 TO N
790  PRINT B(I),SQ(I)
800  NEXT I
810  END
820  REM  INVERSAO DE MATRIZ
830  FOR I = 1 TO N
840  FOR J = 1 TO N
850  HI(I,J) = 0
860  NEXT J
870  HI(I,I) = 1
880  NEXT I
890  FOR I = 1 TO N
900  FOR J = I TO N
910  IF H(J,I) < > 0 THEN 950
920  NEXT J
930  PRINT "MATRIZ SINGULAR"
940  END
950  FOR K = 1 TO N
960  S = H(I,K)
970  H(I,K) = H(J,K)
980  H(J,K) = S
990  S = HI(I,K)

```



```
1000 HI(I,K) = HI(J,K)
1010 HI(J,K) = S
1020 NEXT K
1030 T = 1 / H(I,I)
1040 FOR K = 1 TO N
1050 H(I,K) = T * H(I,K)
1060 HI(I,K) = T * HI(I,K)
1070 NEXT K
1080 FOR L = 1 TO N
1090 IF L = I THEN 1150
1100 T = - H(L,I)
1110 FOR K = 1 TO N
1120 H(L,K) = H(L,K) + T * H(I,K)
1130 HI(L,K) = HI(L,K) + T * HI(I,K)
1140 NEXT K
1150 NEXT L
1160 NEXT I
1170 RETURN
1180 DATA 49,15,24,16,5,3,38,15,182,49
1190 DATA 99,45,17,1,78,27,55,37,23,12
1200 DATA 2,1,21,8,139,73,51,41,5,8
1210 DATA 38,30,35,16,30,13,11,7,18,9
1220 DATA 218,83,135,62,58,24,87,56
1230 DATA 19,16,6,9,6,6,10,7,92,68,40,44
1240 DATA 50,15,40,32
```