MÉTODO PARA CONTORNAR O PROBLEMA DE ESTIMATIVAS NEGATIVAS EM COMPONENTES DE VARIÂNCIA

CESAR PEREIRA

Orientador: Prof. Dr. IZAIAS RANGEL NOGUEIRA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia, Área de Concentração em Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Maio, 1983

*Aos meus pais,
Cecilia e Oscar (in memoriam)
A minha filha,
Marice,
Aos meus irmãos,
Ana Maria, Oscar e Silvana,
A minha companheira,
Zeza,*

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira, pela eficiente orientação.

Ao Prof. Dr. Décio Barbin, pelas sugestões, colaboração e revisão do texto.

Ao Prof. Dr. Humberto de Campos, Chefe do Departamento de Matemática e Estatística e Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP.

Aos Professores e Funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela dedicação e colaboração.

Aos colegas do Curso de Estatística e Experimentação Agronômica, pela amizade e colaboração prestada.

À Fundação Universidade Estadual de Maringá, pela oportunidade.

À CAPES, através do PICD, pela bolsa de estudo concedida.

A todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a execução deste trabalho.

INDICE

	Pág.
RESUMO	vi
SUMMARY	viii
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. MÉTODO	14
3.1 - Modelo Matemático	16
3.1.1 - Modelo aleatório (Tipo II)	17
3.1.1.1 - Somas de quadrados	19
3.1.1.2 - Determinação das esperanças matemá ticas	20
3.1.1.3 - Esperança matemática do quadrado mē dio dos fatores	27
3.1.1.4 - Quadro de análise de variância ..	30
3.1.1.5 - Estimativas de ρ , $\hat{\sigma}_a$ e σ^2	31
3.1.1.6 - Valores de a, b e c	33
3.1.2 - Modelo misto (1º caso)	34
3.1.2.1 - Somas de quadrados	35
3.1.2.2 - Determinação das esperanças matemá ticas	35
3.1.2.3 - Esperança matemática do quadrado mē dio dos fatores	40
3.1.2.4 - Quadro de análise de variância ...	42
3.1.2.5 - Estimativas de ρ e σ^2	43

	Pág.
3.1.3 - Modelo misto (2º caso)	44
3.1.3.1 - Somas de quadrados	46
3.1.4 - Modelo fixo (tipo I)	46
3.1.4.1 - Somas de quadrados	48
4. EXEMPLO NUMÉRICO	49
5. RESULTADOS OBTIDOS	54
6. CONCLUSÕES	56
7. BIBLIOGRAFIA	57

MÉTODO PARA CONTORNAR O PROBLEMA DE ESTIMATIVAS NEGATIVAS EM COMPONENTES DE VARIÂNCIA

Autor: Cesar Pereira

Orientador: Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira

R E S U M O

Numa análise de variância, a presença de correlação negativa entre os elementos de uma mesma parcela (correlação intra-classe) pode ocasionar estimativas negativas de componentes de variância no modelo de classificação hierárquica.

O modelo matemático considerado foi:

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk} .$$

Ao fazermos uma análise de variância no modelo de classificação hierárquica, considerando este modelo aleatório, misto (dois casos) ou fixo, se determinarmos uma estimativa de componente de variância negativo e pelo teste F bilateral a hipótese de nulidade for rejeitada ao nível α de significância, eliminamos o pa

parâmetro correspondente no modelo matemático.

Então o modelo $y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk}$ passa para

$$y_{ijk} = \mu + a_i + e_{ijk}$$

e reestruturamos a análise de variância, supondo

$$E [e_{ijk} \cdot e_{i'j'k'}] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ 0, & \text{para os demais casos,} \end{cases}$$

compomos um novo quadro de análise de variância a partir das somas de quadrados e respectivas esperanças matemáticas, através do método dos momentos.

A partir do novo quadro de análise de variância estimamos os novos componentes de variância e a correlação intra-classe.

METHOD TO SOLVE THE PROBLEM OF NEGATIVE ESTIMATIVES IN COMPONENTS OF VARIANCE

Author: Cesar Pereira
Adviser: Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira

S U M M A R Y

The main purpose of the present work is to determine the new estimatives of the components of variance when its negative estimatives occur in the standard or hierarchical classification considering the following pattern: random, mixed or fixed, and the estimatives occur in the standard or hierarchical classification.

This mathematical pattern was considered:

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk} .$$

When we make an analysis of variance in the hierarchical classification considering the pattern shown above, if we determine a estimative of component of negative variance and by the bilateral F test, the null hypothesis is rejected at the α level of meaning we eliminated the corresponding parameter in the mathematical model.

So the model $y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk}$ becomes

$$y_{ijk} = \mu + a_i + e_{ijk} ,$$

and we re-structure the analysis of variance, supposing:

$$E \left[e_{ijk} \cdot e_{i',j',k'} \right] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{to } i=i', j=j' \text{ and } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{to } i=i', j=j' \text{ and } k \neq k' \\ 0, & \text{other cases} \end{cases}$$

we compose a new board of analysis of variance from the addition of same numbers and respective mathematical expectations across method of moments.

From the new board of the analysis of variance we estim_{ate} the new components of variance and the into-class correlation.

1. INTRODUÇÃO

Devido ao inconveniente do fato de estimarmos como negativo certos componentes de variância, o problema de estimativas negativas tem merecido por parte dos estatísticos um tratamento especial. Talvez não seja exagero afirmarmos que este fato tenha sido o responsável pelas recentes contribuições na área de componentes de variância.

Uma abordagem para o problema de estimativas negativas, e mais fundamentada, é sugerir métodos alternativos de estimação que não produzem estimativas negativas para os componentes de variância.

Na tentativa de contornar esse problema, talvez como primeiro trabalho, surgiu o de HERBACH (1959), que usa estimadores de máxima verossimilhança, como vantagem o fato de serem não negativos, e como desvantagem o fato de serem truncados e viciados.

THOMPSON (1962) na tentativa de resolver o problema de estimativas negativas desenvolveu um algoritmo, por ele denominado

do de "pool-the-minimum-violator". Esse algoritmo resulta da maximização da função de verossimilhança dos quadrados médios, sujeita a um conjunto de restrições, que recebe a denominação de princípio de máxima verossimilhança restritivo. Este procedimento provoca um truncamento, e o estimador resultante é viciado.

Através de HILL (1965) e TIAO & TAN (1965) surgiram os primeiros trabalhos nesta área, tratando de inferência bayesiana sobre componentes de variância, num modelo aleatório simples. A grande vantagem prática do uso dos métodos bayesianos, é que as estimativas dos componentes de variância são sempre não negativas.

Numa análise de variância, a presença de correlação negativa entre os elementos de uma mesma parcela (correlação intra-classe) pode ocasionar estimativas negativas de componentes de variância.

SEARLE (1971) enumera vários procedimentos alternativos, quando encontramos uma estimativa negativa de um componente de variância, os quais faremos as seguintes considerações:

I) Aceitamos a estimativa negativa, admitindo que o verdadeiro valor do componente de variância é zero. Isto pode parecer lógico, mas como parte da estimação foi truncada, isto perturba as propriedades dos estimadores.

II) Sendo negativa uma estimativa de componente de variância, devemos eliminar o parâmetro correspondente no modelo, e reestruturamos a análise de variância obtendo uma ponderação dos

quadrados médios restantes, e, com isso, obtemos novas estimativas dos componentes de variância restantes.

Um problema que tem ocorrido ao aceitar a estimativa negativa (consideração I) é que, muitas vezes, valores negativos muito distantes de zero são tomados como tal. É aconselhável testar a hipótese nula utilizando o teste F bilateral.

O objeto deste trabalho, é obtermos as novas estimativas dos componentes de variância através do método dos momentos, em classificação hierárquica, quando determinamos uma estimativa negativa do componente de variância nos modelos: aleatório, misto e fixo, e determinar a expressão da estimativa da correlação negativa entre as variáveis.

2. REVISÃO DE LITERATURA

KING e HENDERSON (1954) apresentam em detalhes um método para estimação dos componentes de variância de dados em classificação hierárquica com números desiguais dentro de sub-classes, obtendo coeficientes dos componentes de variância.

SNEDECOR (1956), exemplificando um caso de classificação hierárquica com os dados distribuídos em classes de: machos, fêmeas dentro de machos, e filhos dentro de uma mesma fêmea, obteve um quadrado médio para machos menor que o quadrado médio para fêmeas. Diz que isto não pode acontecer na população mesmo quando o componente para machos for igual a zero e sugere métodos alternativos de amostragem que devem ser feitas para diminuir o verdadeiro quadrado médio para machos, ou aumentada a correspondente para fêmeas, ou ambas as coisas, e conclui ainda que está claro que não há

evidência contrária ao fato de se admitir o componente de variância para macho como igual a zero.

SNEDECOR (1956) apresenta um método aproximado para determinar os coeficientes dos componentes de variância para dados dispostos numa classificação hierárquica com sub-classes de tamanhos diferentes, desde que essas desigualdades não sejam muito grandes.

Esses coeficientes são assim determinados:

$$k_1 = \frac{1}{N_d - 1} \left(N - \frac{\sum_j n_j^2}{N} \right) ;$$

onde:

k_1 = número aproximado de descendentes por fêmea;

N = número total de descendentes;

N_d = número de fêmeas;

n_j = número de descendentes de cada fêmea;

$$k_2 = \frac{1}{N_s - 1} \left(N - \frac{\sum_i n_i^2}{N} \right) ;$$

onde: k_2 = número aproximado de descendente por macho;

N = número total de descendentes;

N_s = número de machos;

n_i = número de descendentes de cada macho.

Afirma que essa utilização permite a aplicação de um teste F exato, baseado nos valores aproximados dos coeficientes dos componentes.

COCHRAN e COX (1957) admitem a possibilidade do fato de que observações entre diferentes sub-unidades de uma mesma unidade experimental podem estar correlacionadas. Citam que em experimentos de campo esta correlação é um reflexo do fato de que porções de terra vizinhas tendam a ser semelhantes quanto à fertilidade e outras propriedades agronômicas. Mostram que a variância aplicável às sub-unidades é $\sigma^2(1-\rho)$, e às unidades é $\sigma^2[1 + (\beta-1)\rho]$, sendo: σ^2 = variância entre sub-unidades de uma mesma unidade; ρ = coeficiente de correlação e β = número de sub-unidades dentro de cada unidade.

FALCONER (1960) salienta que, se houver números desiguais de filhos por fêmea ou de fêmeas por machos, pode-se utilizar como coeficiente de σ_D^2 o número médio de descendente por fêmea e como coeficiente σ_S^2 o número médio de fêmeas por macho. Isso traria pouco erro, desde que a desigualdade dos números não fosse muito grande.

STEEL e TORRIE (1960) citam a existência de uma correlação intra-classe que é estimada por:

$$r_I = \frac{QM \text{ (Entre Classes)} - QM \text{ (Dentro de Classes)}}{QM \text{ (Entre Classes)} + (n-1) QM \text{ (Dentro de Classes)}},$$

onde n = número de observações por classe.

O mesmo resultado seria obtido da equação:

$$r = \frac{\hat{\sigma}_r^2}{\hat{\sigma}_r^2 + \hat{\sigma}^2}$$

onde $\hat{\sigma}^2$ é a estimativa do componente de variância dentro de classes e $\hat{\sigma}_r^2$ é a estimativa do componente de variância entre classes. Afirmam que isto é válido mesmo quando o número de observações varia de uma classe para outra. Indicam que um teste de significância para a correlação intra-classe é o teste F. O teste deve ser feito usando as variâncias entre e dentro de classes no numerador e denominador, respectivamente. Aconselham, então, fazer um teste de significância antes de calcular a correlação. Indicam, ainda, que quando o quadrado médio entre classes é menor que o quadrado médio dentro de classes, deve-se tomar a estimativa $\hat{\sigma}_r^2$ como zero, isto é, $\hat{\sigma}_r^2 = 0$. Mostram que r_I pode variar de

$$+ 1 \text{ até } - \frac{1}{n-1},$$

que é o caso quando QM Entre Classes = 0.

KALIL (1963) estudou herdabilidade do período de serviço de vacas Gir e Guzerá pelo método de correlação entre meio-irmãos paternos, com as causas de variação: Raças, Touros dentro de Raças, Meios-irmãs paternas, com respectivamente 1, 6 e 141 graus de liberdade.

Encontrou uma estimativa de variância para Touros

$$\hat{\sigma}_T^2 = -0,13.$$

Concluiu, como uma variância negativa é impossível por definição, a interpretação mais plausível dessa estimativa é atribuir o sinal negativo a erro de amostragem e considerá-la como sendo uma estimativa de variância nula.

PANSE e SUKHATME (1963) citam exemplos para ilustrar a utilidade da correlação intra-classe. Afirmam que um valor positivo da correlação intra-classe significa que a variação dentro do grupo é menor que a entre os grupos, enquanto que um valor negativo do coeficiente significa que as médias dos grupos tendem a ser semelhantes, apesar da variação dentro dos grupos. Um valor próximo de zero mostraria que as variações dentro dos grupos e entre eles são da mesma ordem, isto é, que a variação real entre grupos não é maior nem menor que dentro dos grupos.

PIMENTEL GOMES *et alii* (1964), trabalhando com amostragem de cana-de-açúcar para determinações tecnológicas, utilizaram, para cada variedade ensaiada, 2 blocos, 15 touceiras dentro de cada bloco e 4 canas dentro de cada touceira.

Consideraram inicialmente o modelo matemático:

$$y_{ijk} = m + b_i + t_{ij} + e_{ijk} \quad ,$$

onde,

m = média da variedade;

b_i = efeito do bloco (fixo) i ($i=1,2$);

t_{ij} = efeito (aleatório) da touceira j no bloco i ($j=1,2,\dots,15$);

e_{ijk} = efeito (aleatório) da cana k na touceira j do bloco i ($k=1,2,3,4$).

A análise da variância apresentou o esquema:

Causas de Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Blocos	1		
Touceira d. de Blocos	28	Q_1	$V_1 = \sigma^2 + 4\sigma_1^2$
Canas d. de Touceiras	90	Q_2	$V_2 = \sigma^2$

σ^2 = variância de e_{ijk} ;

σ_1^2 = variância de t_{ij} ;

$\hat{\sigma}^2 = Q_2$ = QM Canas d. Touceiras

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{4} (Q_1 - Q_2)$$

Mostram que uma amostra de 20 canas, no caso de 20 canas da mesma touceira, teria como variância da média:

$$V(m_{20}) = \frac{\sigma^2 + 20\sigma_1^2}{20} = \frac{5V_1 - 4V_2}{20}$$

enquanto que com 20 canas, mas uma de cada touceira obteriam:

$$V(m_1) = \frac{\sigma^2 + \sigma_1^2}{20} = \frac{1}{20} \cdot \frac{V_1 + 3V_2}{4}$$

Admitindo este modelo matemático deveriam ter sempre $V_1 > V_2$, resultando sempre em menor variância da amostra obtida com uma só cana por touceira.

No entanto, admitindo a possibilidade de ter $V_1 < V_2$, consideraram o modelo:

$$y_{ijk} = m + b_i + e_{ijk} \quad ,$$

admitindo para duas canas da mesma touceira j , um coeficiente de correlação ρ , resultando na análise de variância seguinte:

Causas de Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Blocos	1		
Touceira d. de Blocos	28	Q_1	$V_1 = \sigma^2(1+3\rho)$
Canas d. de Touceiras	90	Q_2	$V_2 = \sigma^2(1-\rho)$

No caso de ter $\rho > 0$, então $V_1 > V_2$, recaindo-se no caso anterior. Mas se tivesse $\rho < 0$, então ficaria $V_1 < V_2$. Então:

$$\sigma^2 = \frac{V_1 + 3V_2}{4}$$

$$\rho = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + 3V_2}$$

e:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q_1 + 3Q_2}{4}$$

$$\hat{\rho} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + 3Q_2}$$

A partir desses valores mostram que, para 20 canas de uma mesma touceira:

$$V(m_{20}) = \frac{\sigma^2(1 + 19\rho)}{20} = \frac{5V_1 - 4V_2}{2}$$

e para 20 canas, uma por touceira,

$$V(m_1) = \frac{\sigma^2}{20} = \frac{1}{20} \cdot \frac{V_1 + 3V_2}{4} .$$

Assim, mostram não haver influência da correlação no cálculo da variância da média.

RICO GUTIERREZ (1965) cita que, entre as anomalias que podem ocorrer ao estimar a herdabilidade como correlação entre meio-irmãos, pode acontecer que o quadrado médio para pais (machos) seja inferior ao quadrado médio para mães (fêmeas) e, por isso, a variância devida a machos seria negativa, o que teoricamente não poderia acontecer. Aconselha supor-se que a influência dos machos é nula, e agrupar estes com as fêmeas, somando os graus de liberdade e as somas de quadrados de ambos, calculando um quadrado médio correspondente a esses graus de liberdade. Isto equivaleria a supor que não existe agrupamento das fêmeas dentro dos machos.

SNEDECOR (1966) cita um exemplo em que o quadrado médio para amostras é menor que para sub-amostras, e admite o componente de variância para amostras com estimativa igual a zero. Discute também sobre a correlação intra-classe, indicando como obter sua

estimativa, e como verificar sua significância. Conclui que uma grande correlação intra-classe indica uma variação relativamente pequena entre os indivíduos das sub-amostras.

BECKER (1967) apresenta o modelo matemático e a análise de variância para o caso de classificação hierárquica com números diferentes de fêmeas por macho e de filhos por fêmea.

O modelo é:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + e_{ijk} \quad ,$$

onde:

y_{ijk} = valor da progênie k da fêmea j e do macho i;

μ = média geral;

α_i = efeito do macho i;

β_{ij} = efeito da fêmea j acasalada com o macho i;

e_{ijk} = fatores não controlados e desvios genéticos atribuídos aos indivíduos.

O esquema da análise de variância é:

Causas de variação	G.L.	S.Q.	E(Q.M.)
Entre machos	S-1	SQ_S	$\sigma_W^2 + K_2 \sigma_D^2 + K_3 \sigma_S^2$
Entre fêmeas d. de machos	D-1	SQ_D	$\sigma_W^2 + K_1 \sigma_D^2$
Progênies d. de fêmeas	n..-D	SQ_W	σ_W^2

onde: S = número de machos;

D = número de fêmeas;

n.. = número total de filhos;

$$K_1 = \frac{n_{..} - \sum_i \frac{\sum_j n_{ij}^2}{n_{i.}}}{D - S},$$

$$K_2 = \frac{\sum_i \frac{\sum_j n_{ij}^2}{n_{i.}} - \frac{\sum_{i,j} n_{ij}^2}{n_{..}}}{S - 1},$$

$$K_3 = \frac{n_{..} - \frac{\sum_i n_{i.}^2}{n_{..}}}{S - 1}.$$

LOUCA E ROBISON (1967) não conseguiram calcular correlações genéticas entre tamanho de leitegada e outras características a partir dos componentes de variância e covariância entre irmãos germanos, devido ao fato de que em todas as análises os componentes de variância para machos, para tamanho de leitegada, foi negativo.

KALIL (1972) encontrou duas situações em que ocorre um componente de variância negativo:

- 1º) Para o rebanho Nelore encontrou para $\hat{\sigma}_{SD}^2$ (Fator B/A), um valor de -0,52, que teoricamente não poderia ocorrer. Como este valor está bastante próximo de zero, admitiu-o como nulo.

29) Para o rebanho Gir encontrou $\hat{\sigma}_{SD}^2 = -183,87$. Afirma que como este componente de variância negativo é muito grande, não é indicado admiti-lo como zero. Faz uma analogia com um trabalho de PIMENTEL GOMES *et alii* (1963) que, estudando a amostragem da cana-de-açúcar para determinações tecnológicas, onde ocorreu um problema estatístico semelhante, admitiram que, em um dos casos examinados, havia um coeficiente de correlação negativo para duas canas da mesma touceira. Então, concluiu que, do mesmo modo, poder-se-ia admitir um coeficiente de correlação negativo para os filhos de um mesmo casal, no caso do rebanho Gir.

Como o assunto relativo a componentes de variância negativa é relativamente escassa, encontramos dificuldade para maiores detalhes sobre o assunto.

3. MÉTODO

Devido ao fato de existirem, na classificação hierárquica, problemas em que devemos considerar modelos aleatório, misto ou fixo.

E considerando o diagrama a seguir, vamos ilustrar a classificação hierárquica geral.

Fator A: (I)

Fator B: (n_i)

Fator C: (m_{ij})

e seja:

I = número de elementos do Fator A ($i=1,2,\dots,I$);
 n_i = número de elementos do Fator B dentro de A_i ;
 m_{ij} = número de elementos do Fator C de B_j com A_i ($j=1,2,\dots,n_i$);
 $m_{i.}$ = número total do Fator C dentro de B_j ;
 $m_{..}$ = número de Fator C.

3.1 - Modelo Matemático

Considerando o modelo matemático

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk} \quad ,$$

com $k=1,2,\dots,m_{ij}$, e onde:

y_{ijk} corresponde a uma característica do k -ésimo Fator C referente ao j -ésimo Fator B dentro do i -ésimo Fator A;

μ é a média teórica;

a_i é o efeito do Fator A_i ;

b_{ij} é o efeito do Fator B_j dentro do Fator A_i ;

e_{ijk} é o efeito do erro residual ou do Fator C_k dentro do Fator B_j dentro do Fator A_i .

3.1.1 - Modelo aleatório (Tipo II)

Considerando-se como de efeito fixo o parâmetro μ e os demais de efeitos aleatórios, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mu) &= \mu & e & \quad \mathbb{E}(\mu^2) = \mu^2 \\ \mathbb{E}(a_i) &= 0 & e & \quad \mathbb{E}(a_i^2) = \sigma_a^2, \text{ com } a_i \sim N(0, \sigma_a^2) \\ \mathbb{E}(b_{ij}) &= 0 & e & \quad \mathbb{E}(b_{ij}^2) = \sigma_b^2, \text{ com } b_{ij} \sim N(0, \sigma_b^2) \\ \mathbb{E}(e_{ijk}) &= 0 & e & \quad \mathbb{E}(e_{ijk}^2) = \sigma^2, \text{ com } e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

e vamos considerar que as variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídos.

Quadro de análise de variância:

Causas de Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Fator A	I-1	V_1	$\sigma^2 + K_2 \sigma_b^2 + K_1 \sigma_a^2$
Fator B/A	$\sum_i^I n_i - I$	V_2	$\sigma^2 + K_3 \sigma_b^2$
Fator C/B/A	$m_{..} - \sum_i^I n_i$	V_3	σ^2
TOTAL	$m_{..} - 1$		

onde,

$$K_1 = \frac{1}{(I-1)} \left[m_{..} - \frac{1}{m_{..}} \sum_i m_{i.}^2 \right]$$

$$K_2 = \frac{1}{(I-1)} \left[\sum_{i,j}^{I, n_i} m_{ij}^2 \left(\frac{1}{m_{i.}} - \frac{1}{m_{..}} \right) \right]$$

$$K_3 = \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left[m_{..} - \sum_{i,j}^{I, n_i} \frac{m_{ij}^2}{m_{i.}} \right]$$

Ao fazermos a análise de variância, observamos que $V_2 < V_3 \Rightarrow \hat{\sigma}_b^2 = (V_2 - V_3) / K_3 < 0$, em primeiro lugar aplicamos o teste F bilateral testando a hipótese de nulidade. Temos duas situações a considerar:

- a - caso não seja significativo, aceitamos a estimativa negativa, admitindo que o verdadeiro valor é zero:
- b - caso seja significativo, eliminamos o parâmetro correspondente no modelo matemático.

Então o modelo $y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk}$ passa para $y_{ijk} = \mu + a_i + e_{ijk}$, e reestruturamos a análise de variância.

Supondo,

$$E [e_{ijk} \cdot e_{i',j',k'}] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ 0, & \text{para os demais casos} \end{cases}$$

sendo ρ = correlação entre os elementos de C.

3.1.1.1 - Somas de quadrados

$$SQ \text{ Total} = \sum_{i,j,k}^{I, n_i, m_{ij}} y_{ijk}^2 - C \quad , \text{ onde } C = \frac{(y_{...})^2}{m_{..}}$$

$$SQ \text{ Fator A} = \sum_i^I \left[\frac{(y_{i..})^2}{m_{i.}} \right] - \frac{(y_{...})^2}{m_{..}}$$

$$SQ \text{ Fator B/A} = \sum_{i,j}^{I, n_i} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right] - \sum_i^I \left[\frac{(y_{i..})^2}{m_{i.}} \right]$$

$$SQ \text{ Fator C/B/A} = \sum_{i,j,k}^{I, n_i, m_{ij}} y_{ijk}^2 - \sum_{i,j}^{I, n_i} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right]$$

e passaremos a considerar

$$\sum_{i,j,k}^{I, n_i, m_{ij}} = \sum_{i,j,k} \quad , \quad \sum_{i,j}^{I, n_i} = \sum_{i,j} \quad \text{e} \quad \sum_i^I = \sum_i$$

Do modelo matemático

$$y_{ijk} = \mu + a_i + e_{ijk} \quad ,$$

$$\sum_k^{m_{ij}} y_{ijk} = y_{ij.} = m_{ij} \mu + m_{ij} a_i + \sum_k e_{ijk} \quad ,$$

$$\sum_{j,k}^{n_i, m_{ij}} y_{ijk} = y_{i..} = m_{i.} \mu + m_{i.} a_i + \sum_{j,k} e_{ijk},$$

$$\sum_{i,j,k}^{I, n_i, m_{ij}} y_{ijk} = y_{...} = m_{..} \mu + \sum_i m_{i.} a_i + \sum_{i,j,k} e_{ijk},$$

e, considerando os seguintes termos das somas de quadrados

$$(I) = \frac{(y_{...})^2}{m_{..}}$$

$$(II) = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2$$

$$(III) = \sum_{i,j} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right]$$

$$(IV) = \sum_i \left[\frac{(y_{i..})^2}{m_{i.}} \right]$$

3.1.1.2 - Determinação das esperanças matemáticas

Utilizando o método dos momentos para a determinação das esperanças matemáticas e sendo μ constante, os termos onde o mesmo aparece se simplificam, logo não interfere na obtenção das $E(QM)$, (esperanças dos quadrados médios corrigidos), portanto vamos suprimi-lo de todas as expressões.

Esperança matemática da expressão (I)

$$\begin{aligned}(y \dots)^2 &= \left(\sum_i m_{i.} a_i + \sum_{i,j,k} e_{ijk} \right)^2 \\ &= \left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2 + \left(\sum_{i,j,k} e_{ijk} \right)^2 + dp(1)\end{aligned}$$

onde dp indica os duplos produtos.

$$dp(1) = 2 \sum_i (m_{i.} a_i \cdot \sum_{j,k} e_{ijk})$$

$$\mathbb{E} [dp(1)] = 0$$

$$\left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2 = \sum_i m_{i.}^2 a_i^2 + dp(2)$$

$$\begin{aligned}dp(2) &= 2(m_{1.} a_1 m_{2.} a_2 + m_{1.} a_1 m_{3.} a_3 + \dots + \\ &\quad + m_{I-1.} a_{I-1} m_{I.} a_I)\end{aligned}$$

$$\mathbb{E} [dp(2)] = 0$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_i m_{i.}^2 a_i^2 \right] = \sum_i m_{i.}^2 \sigma_a^2$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i,j,k} e_{ijk} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\begin{array}{c} e_{11.} + e_{12.} + \dots + e_{1n_1.} + \\ + e_{21.} + e_{22.} + \dots + e_{2n_2.} + \\ + e_{I1.} + e_{I2.} + \dots + e_{In_I.} \end{array} \right]^2$$

mas,

$$\mathbb{E}(e_{ij.} \cdot e_{i'.j.}) = 0 \quad , \quad \mathbb{E}(e_{ij.} \cdot e_{ij'.}) = 0$$

$$\mathbb{E} \left[(e_{ij.})^2 \right] = \mathbb{E} \left[(e_{ij} + e_{ij} + \dots + e_{ijm_{ij}})^2 \right] \quad (1)$$

$$= m_{ij} \sigma^2 + 2 \sigma^2 C_{m_{ij}}^2$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i,j} e_{ij.} \right)^2 \right] = \sum_{i,j} m_{ij} \sigma^2 + 2 \sigma^2 \rho \sum_{i,j} C_{m_{ij}}^2$$

$$= m_{..} \sigma^2 + 2 \sigma^2 \rho \sum_{i,j} C_{m_{ij}}^2$$

$$2 \sum_{i,j} C_{m_{ij}}^2 = 2 \sum_{i,j} \frac{m_{ij}(m_{ij} - 1)}{2}$$

$$= \sum_{i,j} (m_{ij}^2 - m_{ij})$$

$$= \sum_{i,j} m_{ij}^2 - m_{..}$$

então a Esperança Matemática da expressão (I) será:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\frac{(y_{...})^2}{m_{..}} \right] &= \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \sigma_a^2 + \sigma^2 + \frac{\rho}{m_{..}} \left(\sum_{i,j} m_{ij}^2 - m_{..} \right) \sigma^2 \\ &= \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \sigma_a^2 + \left[1 + \frac{\rho}{m_{..}} \sum_{i,j} m_{ij}^2 - \rho \right] \sigma^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E} \left[\frac{(y_{...})^2}{m_{..}} \right] = \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \sigma_a^2 + \left[1 + \rho \left(\frac{\sum_{i,j} m_{ij}^2}{m_{..}} - 1 \right) \right] \sigma^2}$$

Esperança matemática da expressão (II)

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 &= \sum_{i,j,k} \left[(a_i + e_{ijk})^2 \right] \\ &= \sum_{i,j,k} \left[a_i^2 + e_{ijk}^2 + 2 a_i e_{ijk} \right] \\ \mathbb{E} \left(\sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 \right) &= \sum_{i,j,k} \left[\mathbb{E} (y_{ijk}^2) \right] \\ &= \sum_{i,j,k} \left[\mathbb{E} (a_i^2 + e_{ijk}^2 + 2 a_i e_{ijk}) \right] \\ &= \sum_{i,j,k} (\sigma_a^2 + \sigma^2)\end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 \right) = m_{..} (\sigma_a^2 + \sigma^2)$$

Esperança matemática da expressão (III)

$$\begin{aligned} (y_{ij.})^2 &= (m_{ij} a_i + e_{ij.})^2 \\ &= m_{ij}^2 a_i^2 + e_{ij.}^2 + 2 m_{ij} a_i e_{ij.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sum_{i,j} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right] \right\} &= \sum_{i,j} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right] \right\} \\ &= \sum_{i,j} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{m_{ij}} (m_{ij}^2 a_i^2 + e_{ij.}^2 + 2 m_{ij} a_i e_{ij.}) \right] \right\} \\ &= \sum_{i,j} \left\{ \frac{1}{m_{ij}} \left[\mathbb{E}(m_{ij}^2 a_i^2) + \mathbb{E}(e_{ij.}^2) + \mathbb{E}(2 m_{ij} a_i e_{ij.}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(m_{ij}^2 a_i^2) = m_{ij}^2 \sigma_a^2$$

De (1) temos:

$$\mathbb{E} [(e_{ij.})^2] = m_{ij} \sigma^2 + 2 \rho \sigma^2 C_{m_{ij}}^2, \quad ,$$

$$\text{onde } 2 C_{m_{ij}}^2 = \frac{2 m_{ij} (m_{ij} - 1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(e_{ij.})^2 \right] &= m_{ij} \sigma^2 + \rho m_{ij} (m_{ij} - 1) \sigma^2 \\ &= m_{ij} [1 + \rho(m_{ij} - 1)] \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(m_{ij} a_i e_{ij.}) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sum_{i,j} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right] \right\} &= \sum_{i,j} \left\{ \frac{1}{m_{ij}} \left[m_{ij}^2 \sigma_a^2 + m_{ij} [1 + \rho(m_{ij} - 1)] \sigma^2 \right] \right\} \\ &= \sum_{i,j} \left\{ m_{ij} \sigma_a^2 + [1 + \rho(m_{ij} - 1)] \sigma^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{i,j} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right] \right\} = m_{..} \sigma_a^2 + \left[\sum_i n_i + \rho(m_{..} - \sum_i n_i) \right] \sigma^2$$

Esperança matemática da expressão (IV)

$$\begin{aligned} (y_{i..})^2 &= (m_{i.} a_i + e_{i..})^2 \\ &= m_{i.}^2 a_i^2 + e_{i..}^2 + 2 m_{i.} a_i e_{i..} \end{aligned}$$

onde,

$$\mathbb{E} \left[2 m_{i.} a_i e_{i..} \right] = 0$$

$$\mathbb{E} \left[e_{i..}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_j e_{ij.} \right)^2 \right]$$

Por (1),

$$\mathbb{E} \left[e_{i..}^2 \right] = \sum_j \left[m_{ij} \sigma^2 + 2 \rho \sigma^2 c_{mij}^2 \right]$$

$$= m_{i.} \sigma^2 + 2 \rho \sigma^2 \sum_j c_{mij}^2$$

$$= m_{i.} \sigma^2 + 2 \rho \sigma^2 \sum_j (m_{ij}^2 - m_{ij})$$

$$\mathbb{E} \left[m_{i.}^2 a_i^2 \right] = m_{i.}^2 \sigma_a^2$$

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_i \left[\frac{(y_{i..}^2)}{m_{i.}} \right] \right\} = \sum_i \left\{ \frac{1}{m_{i.}} \mathbb{E} \left[(y_{i..})^2 \right] \right\}$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{1}{m_{i.}} \left[m_{i.}^2 \sigma_a^2 + m_{i.} \sigma^2 + \rho \sigma^2 \sum_j (m_{ij}^2 - m_{ij}) \right] \right\}$$

$$= \sum_i \left[m_{i.} \sigma_a^2 + \sigma^2 + \rho \sigma^2 \left(\frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - 1 \right) \right]$$

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_i \left[\frac{(y_{i..})^2}{m_{i.}} \right] \right\} = m_{..} \sigma_a^2 + \left[I + \rho \left(\sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - I \right) \right] \sigma^2$$

3.1.1.3 - Esperança matemática dos quadrados médios dos fatores

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator A}) = \frac{1}{I-1} \mathbb{E}(\text{SQ Fator A})$$

$$= \frac{1}{I-1} \left[\mathbb{E}(\text{expressão IV}) - \mathbb{E}(\text{expressão I}) \right]$$

$$= \frac{1}{I-1} \left\{ \begin{aligned} & m_{..} \sigma_a^2 + [I + (m_{..} - I) \rho] \sigma^2 - \\ & - \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \sigma_a^2 - \left[1 + \left(\frac{\sum_{i,j} m_{ij}^2}{m_{..}} - 1 \right) \rho \right] \sigma^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator A}) = \frac{1}{I-1} \left[m_{..} - \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \right] \sigma_a^2 + \left\{ 1 + \left[\frac{1}{I-1} \left(m_{..} - \frac{\sum_{i,j} m_{ij}^2}{m_{..}} \right) - 1 \right] \rho \right\} \sigma^2$$

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator B/A}) = \frac{1}{\sum_i n_i - I} \mathbb{E}(\text{SQ Fator B/A})$$

$$= \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left[\mathbb{E}(\text{expressão III}) - \mathbb{E}(\text{expressão IV}) \right]$$

$$= \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left\{ \begin{aligned} & m_{..} \sigma_a^2 + \left[\sum_i n_i + \rho(m_{..} - \sum_i n_i) \right] \sigma^2 - \\ & - m_{..} \sigma_a^2 - \left[I + \rho \left(\sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - I \right) \right] \sigma^2 \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left[\left(\sum_i n_i - I \right) + \rho \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - \sum_i n_i + I \right) \right] \sigma^2$$

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator B/A}) = \left\{ 1 + \rho \left[\frac{1}{\sum_i n_i - I} \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} \right) - 1 \right] \right\} \sigma^2$$

$$\mathbb{E}(\text{QM C/B/A}) = \frac{1}{m_{..} - \sum_i n_i} \mathbb{E}(\text{SQ Fator C/B/A})$$

$$= \frac{1}{m_{..} - \sum_i n_i} \left[\mathbb{E}(\text{expressão II}) - \mathbb{E}(\text{expressão III}) \right]$$

$$= \frac{1}{m_{..} - \sum_i n_i} \left\{ \begin{aligned} &m_{..} \sigma_a^2 + m_{..} \sigma^2 - m_{..} \sigma_a^2 - \\ &- \left[\sum_i n_i + \rho(m_{..} - \sum_i n_i) \right] \sigma^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\text{QM C/B/A}) = (1 - \rho) \sigma^2}$$

3.1.1.4 - Quadro de análise de variância (modelo aleatório incluindo a esperança dos quadrados médios)

C. de Variação	G.L.	Q.M.	$\mathbb{E}(Q.M.)$
Fator A	I - 1	V_1	$\frac{1}{I-1} \left[m_{..} - \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \right] \sigma_a^2 + \left\{ 1 + \left[\frac{1}{I-1} \left(m_{..} - \frac{\sum_{i,j} m_{ij}^2}{m_{..}} \right) - 1 \right] \rho \right\} \sigma^2$
Fator B/A	$\sum_i n_{i.} - I$	V_2	$\left\{ 1 + \rho \left[\frac{1}{\sum_i n_{i.} - I} \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - 1 \right) \right] \right\} \sigma^2$
Fator C/B/A	$m_{..} - \sum_i n_{i.}$	V_3	$(1 - \rho) \sigma^2$
TOTAL	$m_{..} - 1$		

3.1.1.5 - Estimativas de ρ , σ_a^2 e σ^2

As estimativas de ρ , σ_a^2 e σ^2 são obtidas resolvendo o sistema:

$$\frac{1}{I-1} \left[m_{..} - \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \right] \hat{\sigma}_a^2 + \left\{ 1 + \left[\frac{1}{I-1} \left(m_{..} - \frac{\sum_{i,j} m_{ij}^2}{m_{..}} \right) - 1 \right] \hat{\rho} \right\} \hat{\sigma}^2 = v_1$$

$$\left\{ 1 + \hat{\rho} \left[\frac{1}{\sum_i n_i - I} \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} \right) - 1 \right] \right\} \hat{\sigma}^2 = v_2$$

$$(1 - \rho) \hat{\sigma}^2 = v_3$$

Denominando:

$$\frac{1}{I-1} \left(m_{..} - \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \right) = a$$

observando-se que $a = K_1$,

$$\frac{1}{I-1} \left(m_{..} - \frac{\sum_{i,j} m_{ij}^2}{m_{..}} \right) - 1 = b \quad ,$$

$$\frac{1}{\sum_i n_i - I} \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} \right) - 1 = c \quad ,$$

o sistema fica sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \hat{\sigma}_a^2 + [1 + b\hat{\rho}] \hat{\sigma}^2 = v_1 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [1 + c\hat{\rho}] \hat{\sigma}^2 = v_2 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [1 - \hat{\rho}] \hat{\sigma}^2 = v_3 \end{array} \right. \quad (4)$$

A razão entre (3) e (4) nos dá:

$$\hat{\rho} = \frac{v_2 - v_3}{c v_3 + v_2},$$

e sendo $c v_3 + v_2 > 0$, e, por hipótese, $v_2 - v_3 < 0$,

$$\hat{\rho} < 0.$$

Utilizando (3) e substituindo $\hat{\rho}$, temos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{c v_3 + v_2}{1 + c} > 0$$

Utilizando (2) e substituindo $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}^2$, temos:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{b(v_3 - v_2) + c(v_1 - v_3) + (v_1 - v_2)}{a(1 + c)}$$

3.1.1.6 - Valores de a, b, c

Para que a, b e c sejam positivas, é suficiente demonstrarmos que:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2} > 0$$

para $a_i \in \mathbb{N}$ e pelo menos dois valores de a_i não nulos e $i=1,2,\dots,n$.

$$\frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i} > 0$$

$$(\sum_{i=1}^n a_i)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i a_{i'}, - \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0, \text{ com } i < i'$$

$$2 \sum_{i=1}^n a_i a_{i'} > 0$$

3.1.2 - Modelo misto (1º caso)

Considerando o modelo misto, temos os parâmetros μ e a_i de efeitos fixos e os demais de efeitos aleatórios:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{E}(\mu) = \mu & e & \mathbb{E}(\mu^2) = \mu^2 \\ \mathbb{E}(a_i) = a_i & e & \mathbb{E}(a_i^2) = a_i^2 \\ \mathbb{E}(b_{ij}) = 0 & e & \mathbb{E}(b_{ij}^2) = \sigma_b^2, \text{ com } b_{ij} \sim N(0, \sigma_b^2) \\ \mathbb{E}(e_{ijk}) = 0 & e & \mathbb{E}(e_{ijk}^2) = \sigma^2, \text{ com } e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \end{array}$$

e vamos considerar que as variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídos.

Quadro de análise de variância

Causas da Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Fator A	$I - 1$	V_1	$\sigma^2 + K_2 \sigma_b^2 + K_1 \phi_a$
Fator B/A	$\sum_i n_i - I$	V_2	$\sigma^2 + K_3 \sigma_b^2$
Fator C/B/A	$m.. - \sum_i n_i$	V_3	σ^2
Total	$m.. - 1$		

onde, K_1 , K_2 e K_3 são as expressões já vistas em (3.2.1), e

$$\phi_a = \frac{\sum_i^I a_i^2}{I-1} :$$

Ao fazermos a análise de variância e observarmos que $V_2 < V_3 \implies \hat{\sigma}_b^2 = (V_2 - V_3) / K_3 < 0$, em primeiro lugar aplicamos o teste F bilateral testando a hipótese de nulidade. Temos duas situações a considerar:

- a - caso não seja significativo, aceitamos a estimativa negativa, admitindo que o verdadeiro valor é zero;
- b - caso seja significativo, eliminamos o parâmetro correspondente no modelo matemático.

Então, o modelo $y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk}$ passa para $y_{ijk} = \mu + a_i + e_{ijk}$, e reestruturamos a análise de variância.

Supondo:

$$E \left[e_{ijk} \cdot e_{i'j'k'} \right] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ 0, & \text{para os demais casos} \end{cases}$$

3.1.2.1 - Somas de quadrados

Consideremos as somas de quadrados já vistas em 3.1.1.1.

3.1.2.2 - Determinação das esperanças matemáticas

Sendo μ constante, não interfere na obtenção das E(Q.M.). Vamos suprimi-lo de todas as expressões.

Esperança matemática da expressão (I)

$$\begin{aligned}(y \dots)^2 &= \left(\sum_i m_{i.} a_i + \sum_{i,j,k} e_{ijk} \right)^2 \\ &= \left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2 + \left(\sum_{i,j,k} e_{ijk} \right)^2 + dp(3)\end{aligned}$$

onde dp indica os duplos produtos.

$$dp(3) = 2 \sum_i (m_{i.} a_i \sum_{j,k} e_{ijk})$$

$$\mathbb{E} [dp(3)] = 0$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2 \right] = \left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i,j,k} e_{ijk} \right)^2 \right] = m_{..} \sigma^2 + \rho \sigma^2 \left(\sum_{i,j} m_{ij}^2 - m_{..} \right)$$

conforme demonstração em 3.1.1.2.

$$\mathbb{E} \left[\frac{(y \dots)^2}{m_{..}} \right] = \frac{1}{m_{..}} \left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2 + \left[1 + \left(\frac{1}{m_{..}} \sum_{i,j} m_{ij}^2 - 1 \right) \rho \right] \sigma^2$$

Esperança matemática da expressão (II)

$$\sum_{i,j,k} \left[y_{ijk}^2 \right] = \sum_{i,j,k} \left[(a_i + e_{ijk})^2 \right]$$

$$= \sum_{i,j,k} \left[a^2 + e_{ijk}^2 + 2 a_i e_{ijk} \right]$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i,j,k} (y_{ijk}^2) \right] = \sum_{i,j,k} \left[\mathbb{E} (y_{ijk}^2) \right]$$

$$= \sum_{i,j,k} \left[\mathbb{E} (a_i + e_{ijk} + 2 a_i e_{ijk}) \right]$$

$$= \sum_{i,j,k} (a_i^2 + \sigma^2)$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i,j,k} (y_{ijk}^2) \right] = \sum_i m_i \cdot a_i^2 + m_{..} \sigma^2$$

Esperança matemática da expressão (III)

$$(y_{ij.})^2 = (m_{ij} a_i + \sum_k e_{ijk})^2$$

$$= m_{ij}^2 a_i^2 + (\sum_k e_{ijk})^2 + 2 m_{ij} a_i \sum_k e_{ijk}$$

$$\mathbb{E}(2m_{ij} a_i \sum_k e_{ijk}) = 0$$

$$\mathbb{E} \left[(\sum_k e_{ijk})^2 \right] = m_{ij} \sigma^2 + 2 \rho \sigma^2 c_{m_{ij}}^2$$

$$= m_{ij} \sigma^2 + \rho \sigma^2 [m_{ij} (m_{ij} - 1)]$$

$$\mathbb{E}(m_{ij} a_i) = m_{ij}^2 a_i^2$$

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{i,j} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right] \right\} = \sum_{i,j} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right] \right\}$$

$$= \sum_{i,j} \left[m_{ij} a_i^2 + \sigma^2 + \rho \sigma^2 (m_{ij} - 1) \right]$$

$$= \sum_i m_{i.} a_i^2 + \sum_i n_i \sigma^2 + \rho \sigma^2 (m_{..} - \sum_i n_i)$$

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{i,j} \left[\frac{(y_{ij.})^2}{m_{ij}} \right] \right\} = \sum_i m_{i.} a_i^2 + \left[\sum_i n_i + \rho (m_{..} - \sum_i n_i) \right] \sigma^2$$

Esperança matemática da expressão (IV)

$$\begin{aligned}(y_{i..})^2 &= (m_{i.} a_i + \sum_{j,k} e_{ijk})^2 \\ &= m_{i.}^2 a_i^2 + (\sum_{j,k} e_{ijk})^2 + 2 m_{i.} a_i \sum_{j,k} e_{ijk}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(2 m_{i.} a_i \sum_{j,k} e_{ijk}) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{j,k} e_{ijk})^2 &= m_{i.} \sigma^2 + 2 \rho \sigma^2 \sum_j c_{m_{ij}}^2 \\ &= m_{i.} \sigma^2 + \rho \sigma^2 \left[\sum_j (m_{ij}^2 - m_{i.}) \right]\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(m_{i.}^2 a_i^2) = m_{i.}^2 a_i^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left\{ \sum_i \left[\frac{(y_{i..})^2}{m_{i.}} \right] \right\} &= \sum_i \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{(y_{i..})^2}{m_{i.}} \right] \right\} \\ &= \sum_i \left[m_{i.} a_i^2 + \sigma^2 + \rho \sigma^2 \left(\frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - 1 \right) \right]\end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_i \left[\frac{(y_{i..})^2}{m_{i.}} \right] \right\} = \sum_i m_{i.} a_i^2 + \left[I + \rho \left(\sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - I \right) \right] \sigma^2$$

3.1.2.3 - Esperança matemática dos quadrados médios dos fatores

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator A}) = \frac{1}{I-1} (\text{SQ Fator A})$$

$$= \frac{1}{I-1} \left[\mathbb{E}(\text{expressão IV}) - \mathbb{E}(\text{expressão I}) \right]$$

$$= \frac{1}{I-1} \left[\begin{aligned} & \sum_i m_{i.} a_i^2 + I\sigma^2 + \rho\sigma^2 \left(\sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - I \right) - \\ & - \frac{1}{m_{..}} \left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2 - \left[1 + \left(\frac{1}{m_{..}} \sum_{i,j} m_{ij}^2 - 1 \right) \rho \right] \sigma^2 \end{aligned} \right]$$

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator A}) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{I-1} \left[\sum_i m_{i.} a_i^2 - \frac{1}{m_{..}} \left(\sum_i m_{i.} a_i \right)^2 \right] + \\ & + \left[1 + \frac{\rho}{I-1} \left(\sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - \frac{1}{m_{..}} \sum_{i,j} m_{ij}^2 - 1 \right) \right] \sigma^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\text{QM Fator B/A}) &= \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left[\mathbb{E}(\text{SQ Fator B/A}) \right] \\
&= \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left[\mathbb{E}(\text{expressão III}) - \mathbb{E}(\text{expressão IV}) \right] \\
&= \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left[\begin{aligned} &\sum_i m_{i.} a_i^2 + \left[\sum_i n_i + (m_{..} - \sum_i n_i) \right] \sigma^2 - \\ &- \sum_i m_{i.} a_i^2 - \left[I + \rho \left(\sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} - I \right) \right] \sigma^2 \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator B/A}) = \left\{ 1 + \rho \left[\frac{1}{\sum_i n_i - I} (m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}}) - 1 \right] \right\} \sigma^2$$

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator C/B/A}) = \frac{1}{m_{..} - \sum_i n_i} \left[\mathbb{E}(\text{expressão II}) - \mathbb{E}(\text{expressão III}) \right]$$

$$= \frac{1}{m_{..} - \sum_i n_i} \left[\begin{aligned} &\sum_i m_{i.} a_i^2 + m_{..} \sigma^2 + \\ &- \sum_i m_{i.} a_i^2 - \left[\sum_i n_i + \rho(m_{..} - \sum_i n_i) \right] \sigma^2 \end{aligned} \right]$$

$$\mathbb{E}(\text{QM Fator C/B/A}) = (1 - \rho) \sigma^2$$

3.2.2.4 - Quadro de análise de variância (modelo misto incluindo a esperança dos quadrados médios)

C. de Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Fator A	I - 1	V ₁	$\frac{1}{I-1} \left[\sum_i m_i a_i^2 - \frac{1}{m_{..}} \left(\sum_i m_i a_i \right)^2 \right] + \left[1 + \frac{\rho}{I-1} \left(\sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_i} - \frac{1}{m_{..}} \sum_{i,j} m_{ij}^2 \right) - 1 \right] \sigma^2$
Fator B/A	$\sum_i n_i - I$	V ₂	$\left\{ 1 + \rho \left[\frac{1}{\sum_i n_i} \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_i} \right) - 1 \right] \right\} \sigma^2$
Fator C/B/A	$m_{..} - \sum_i n_i$	V ₃	$(1 - \rho) \sigma^2$
TOTAL	$m_{..} - 1$		

3.2.2.5 - Estimativas de ρ e σ^2

As estimativas de ρ e σ^2 são obtidas resolvendo o sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \hat{\rho} \left[\frac{1}{\sum_i n_i - 1} (m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}}) - 1 \right] \hat{\sigma}^2 &= v_2 \\ (1 - \hat{\rho}) \hat{\sigma}^2 &= v_3 \end{aligned} \right.$$

Denominando:

$$\frac{1}{\sum_i n_i - 1} (m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}}) - 1 = a_1$$

o sistema fica sendo:

$$\left\{ \begin{aligned} (1 + a_1 \hat{\rho}) \hat{\sigma}^2 &= v_2 & (5) \\ (1 - \hat{\rho}) \hat{\sigma}^2 &= v_3 & (6) \end{aligned} \right.$$

Efetuando a razão entre (5) e (6):

$$\frac{1 + a_1 \hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}} = \frac{v_2}{v_3}$$

$$\hat{\rho} = \frac{v_2 - v_3}{a_1 v_3 + v_2}$$

e sendo $a_1 V_3 + V_2 > 0$, e, por hipótese, $V_2 - V_3 < 0$,

$$\hat{\rho} < 0.$$

Utilizando (6) e substituindo $\hat{\rho}$, temos:

$$\sigma^2 = \frac{a_1 V_3 + V_2}{a_1}$$

ou

$$\sigma^2 = V_3 + \frac{V_2}{a_1} > 0.$$

Para que a_1 seja > 0 , observamos a demonstração

3.1.1.6.

3.1.3 - Modelo misto (2º caso)

Considerando o modelo misto, temos os parâmetros μ e b_{ij} de efeitos fixos, e os demais de efeitos aleatórios:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{E}(\mu) = \mu & \text{e} & \mathbb{E}(\mu^2) = \mu^2 \\ \mathbb{E}(a_i) = 0 & \text{e} & \mathbb{E}(a_i^2) = \sigma_a^2, \text{ com } a_i \sim N(0, \sigma_a^2) \\ \mathbb{E}(b_{ij}) = b_{ij} & \text{e} & \mathbb{E}(b_{ij}^2) = b_{ij}^2 \\ \mathbb{E}(e_{ijk}) = 0 & \text{e} & \mathbb{E}(e_{ijk}^2) = \sigma^2, \text{ com } e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \end{array}$$

e vamos considerar que as variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídos.

Quadro de análise de variância

Causas de Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Fator A	$I - 1$	V_1	$\sigma^2 + K_2 \phi_b + K_1 \sigma_2^2$
Fator B/A	$\sum_i n_i - I$	V_2	$\sigma^2 + K_3 \phi_b$
Fator C/B/A	$m.. - \sum_i n_i$	V_3	σ^2
TOTAL	$m.. - 1$		

onde K_1 , K_2 e K_3 são as expressões já vistas em 3.2.1, e

$$\phi_b = \frac{\sum_{i,j}^{I, n_i} b_{ij}}{\sum_i n_i - I}.$$

Ao fazermos a análise de variância e observarmos que $V_2 < V_3 \implies \hat{\sigma}_b^2 = (V_2 - V_3) / K_3 < 0$, em primeiro lugar aplicamos o teste F bilateral testando a hipótese de nulidade. Temos duas situações a considerar:

- a - caso não seja significativo, aceitamos a estimativa negativa, admitindo que o verdadeiro valor é zero;
- b - caso seja significativo, eliminamos o parâmetro correspondente no modelo matemático.

Então o modelo $y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk}$ passa para $y_{ijk} = \mu + a_i + e_{ijk}$, e reestruturamos a análise de variância.

$$\mathbb{E} \left[e_{ijk} \cdot e_{i'j'k'} \right] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ 0, & \text{para os demais casos} \end{cases}$$

3.1.3.2 - Soma de quadrados

Observamos que a estrutura do modelo misto (2º caso) coincide com a do modelo aleatório, então, as novas estimativas dos componentes de variância do modelo misto (2º caso) coincidem com as do modelo aleatório.

3.1.4 - Modelo fixo (Tipo I)

Considerando o modelo fixo, temos os parâmetros μ , a_i e b_{ij} de efeitos fixos e e_{ijk} de efeito aleatório,

$$\begin{array}{lll} \mathbb{E}(\mu) = \mu & \text{e} & \mathbb{E}(\mu^2) = \mu^2 \\ \mathbb{E}(a_i) = a_i & \text{e} & \mathbb{E}(a_i^2) = a_i^2 \\ \mathbb{E}(b_{ij}) = b_{ij} & \text{e} & \mathbb{E}(b_{ij}^2) = b_{ij}^2 \\ \mathbb{E}(e_{ijk}) = 0 & \text{e} & \mathbb{E}(e_{ijk}^2) = \sigma^2, \text{ com } e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \end{array}$$

e vamos considerar que as variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídos.

Quadro de análise de variância

Causas de Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Fator A	$I - 1$	V_1	$\sigma^2 + K_2 \phi_b + K_1 \phi_a$
Fator B/A	$\sum_i^I n_i - I$	V_2	$\sigma^2 + K_3 \phi_b$
Fator C/B/A	$m.. - \sum_i^I n_i$	V_3	σ^2
TOTAL	$m.. - 1$		

onde K_1 , K_2 e K_3 são as expressões já vistas em (3.2.1),

$$\phi_a = \frac{\sum_i^I a_i}{I - 1} \quad \text{e} \quad \phi_b = \frac{\sum_{i,j}^{I,n_i} b_{ij}}{\sum_i^I n_i - I}$$

Ao fazermos a análise de variância e observarmos que $V_2 < V_3 \implies \hat{\sigma}_b^2 = (V_2 - V_3) / K_3 < 0$, em primeiro lugar aplicamos o teste F bilateral testando a hipótese de nulidade. Temos duas situações a considerar:

- a - caso não seja significativo, aceitamos a estimativa negativa, admitindo que o verdadeiro valor é zero.
- b - caso seja significativo, eliminamos o parâmetro correspondente no modelo matemático.

Então o modelo $y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk}$ passa para $y_{ijk} = \mu + a_i + e_{ijk}$, e reestruturamos a análise de variância.

Supondo:

$$\mathbb{E} \left[e_{ijk} \cdot e_{i'j'k'} \right] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{para } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ 0, & \text{para os demais casos} \end{cases}$$

3.2.4.2 - Somas de quadrados

Observamos que a estrutura do modelo fixo coincide com a do modelo misto (1º caso), então as novas estimativas dos componentes de variância do modelo fixo coincidem com as do modelo misto (1º caso).

4. EXEMPLO

O esquema abaixo ilustra um exemplo com dados fictícios referentes ao modelo hierárquico geral, considerando o modelo aleatório, e supondo os valores y_{ijk} com pesos em kilogramas (kg).

Quadro de análise de variância

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Fator A	2	0,80	$V_1 = 0,40$	0,063*
Fator B/A	4	2,20	$V_2 = 0,55$	
Fator C/B/A	9	78,00	$V_3 = 8,67$	
Total	15			

Observando o quadro de análise de variância, notamos que $V_2 < V_3$ e o teste F é significativo ao nível $\alpha = 0,05$ de probabilidade, portanto, justifica-se reestruturarmos a análise e, utilizando as fórmulas de 3.1.1.5, resolvendo o sistema:

$$a \sigma_a^2 + [1 + b\hat{\rho}] \hat{\sigma}^2 = v_1$$

$$[1 + c\hat{\rho}] \hat{\sigma}^2 = v_2$$

$$[1 - \hat{\rho}] \hat{\sigma}^2 = v_3$$

onde,

$$a = \frac{1}{I-1} \left[m_{..} - \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \right]$$

$$b = \frac{1}{I-1} \left(m_{..} - \frac{\sum_{i,j} m_{ij}^2}{m_{..}} \right) - 1$$

$$c = \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_i.} \right) - 1$$

onde,

$$I = 3$$

$$n_1 = 2, n_2 = 3 \text{ e } n_3 = 2 \implies \sum_i n_i = 7$$

$$m_{11} = 3 \text{ e } m_{12} = 2 \implies m_{1.} = \sum_{j=1}^n m_{1j} = 5$$

$$m_{21} = 2, m_{22} = 3 \text{ e } m_{23} = 2 \implies m_{2.} = \sum_{j=1}^n m_{2j} = 7$$

$$m_{31} = 2 \text{ e } m_{32} = 2 \implies m_{3.} = \sum_{j=1}^n m_{3j} = 4$$

$$m_{..} = \sum_{i,j}^{I, n_i} m_{ij} = 16$$

$$\sum_i^{n_i} m_{i.}^2 = m_{1.}^2 + m_{2.}^2 + m_{3.}^2$$

$$= 5^2 + 7^2 + 4^2$$

$$\sum_i^{n_i} m_{i.}^2 = 90$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}^{I, n_i} m_{ij}^2 &= m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{21}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2 + m_{31}^2 + m_{32}^2 \\ &= 3^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j}^{I, n_i} m_{ij}^2 = 38$$

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} = \frac{m_{11}^2 + m_{12}^2}{m_{1.}} + \frac{m_{21}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2}{m_{2.}} + \frac{m_{31}^2 + m_{32}^2}{m_{3.}} \\
 &= \frac{3^2 + 2^2}{5} + \frac{2^2 + 3^2 + 2^2}{7} + \frac{2^2 + 2^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$I = \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} \cong 7,03$$

$$a = \frac{1}{3 - 1} \left(16 - \frac{90}{16} \right)$$

$$a = 5,1875$$

$$b = \frac{1}{3 - 1} \left(16 - \frac{38}{16} \right) - 1$$

$$b = 5,8125$$

$$c = \frac{1}{7 - 3} (16 - 7,03) - 1$$

$$c = 1,2425$$

$$\hat{\rho} = \frac{V_2 - V_3}{cV_3 + V_2}$$

$$\hat{\rho} = \frac{0,55 - 8,67}{1,2425 \cdot 8,67 + 0,55}$$

$$\hat{\rho} = -0,717$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{cV_3 + V_2}{1 + c}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1,2425 \cdot 8,67 + 0,55}{1 + 1,2425}$$

$$\hat{\sigma}^2 = 5,05$$

$$\hat{\sigma}_a = \frac{b(V_3 - V_2) + c(V_1 - V_3) + (V_1 - V_2)}{2(1 + c)}$$

$$\hat{\sigma}_a = \frac{5,8125(8,67 - 0,55) + 1,2425(0,40 - 8,67) + (0,40 - 0,55)}{5,1875(1 + 1,2425)}$$

$$\hat{\sigma}_a = 3,16$$

onde obtemos uma estimativa de correlação negativa, significativa a 5% de probabilidade, dentro do Fator C.

5. RESULTADOS OBTIDOS

Sendo V_1 , V_2 e V_3 os quadrados médios estimados dos Fatores A, B dentro de A e C dentro de B dentro de A, respectivamente, os estimadores dos novos componentes de variância e correlação são:

I - Para o modelo aleatório e misto (2º caso), onde foram considerados fixos os parâmetros μ e b_{ij} :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{c V_3 + V_2}{1 + c} > 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{b(V_3 - V_2) + c(V_1 - V_3) + (V_1 - V_2)}{a(1 + c)}$$

e

$$\hat{\rho} = \frac{V_2 - V_3}{V_1 + cV_3} < 0 \quad \text{para} \quad V_2 < V_3 \quad ,$$

sendo,

$$a = \frac{1}{I-1} \left(m_{..} - \frac{\sum_i m_{i.}^2}{m_{..}} \right)$$

$$b = \frac{1}{I-1} \left(m_{..} - \frac{\sum_{i,j} m_{ij}^2}{m_{..}} \right) - 1$$

$$c = \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} \right) - 1$$

II - Para o modelo fixo e misto (1º caso) onde foram considerados fixos os parâmetros μ e a_i

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{a_1 V_3 + V_2}{a_1} > 0$$

e

$$\hat{\rho} = \frac{V_2 - V_3}{a_1 V_3 + V_2} < 0 \quad , \quad \text{para } V_2 < V_3$$

sendo, $a_1 = \frac{1}{\sum_i n_i - I} \left(m_{..} - \sum_i \frac{\sum_j m_{ij}^2}{m_{i.}} \right) - 1$.

6. CONCLUSÕES

Conclui-se do presente trabalho, quando utiliza-se o modelo Classificação Hierárquica, considerando os fatores A, B dentro de A e C dentro de B dentro de A, que mesmo no caso de Quadrado Médio do Fator B dentro de A ser menor que o Quadrado Médio do Fator C dentro de B dentro de A ($V_2 < V_3$), pode-se fazer análise de variância desde que se suponha a existência de um coeficiente de correlação inferido neste modelo.

Para tal fim, as fórmulas deduzidas neste trabalho permitiram contornar o problema de componente de variância negativa pelo método dos momentos, observando-se que o coeficiente de correlação ($\hat{\rho}$) é menor que zero.

8. BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON, R.L. e T.A. BANCROFT, 1952. Statistical Theory in Research. McGraw-Hill, Nova York.
- BECKER, W.A., 1967. Manual of Procedures in Quantitative Genetics. Washington State University, Pullman.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Designs. 2^a ed. Nova York, John Wiley & Sons, Inc. 611 p.
- FALCONER, D.S., 1960. Introduction to Quantitative Genetics. The Ronald Press Co. Nova York. 365 p.
- HERBACH, L.H., 1959. Properties of Model II Type Analysis of Variance Tests. Ann. Math. Statist., 30: 939-959.
- HICKS, C.R., 1973. Fundamental Concepts in the Design of Experiments. Holt, Rinehart and Winston, Nova York.
- HILL, B.M., 1965. Inference about Variance Components in the One-Way Model. J. Amer. Statis. Ass., 60: 806-825.
- KALIL, E.B., 1963. Repetibilidade e Hereditabilidade: um Exemplo de Aplicação. Zootecnia. Boletim nº 3: 11-17. Secretaria de Agricultura. São Paulo.

- KEMPTHORNE, O., 1957. An Introduction to Genetics Statistics. John Wiley, Nova York.
- KEMPTHORNE, O., 1965. Design and Analysis of Experiments. John Wiley, Nova York.
- KING, S.C. e C.R. HENDERSON, 1954. Variance components analysis in heretability studies. Poultry Science 33: 147-154.
- LOUCA, A. e O.W. ROBINSON, 1967. Components of variance and covariance in purebred and crossbred swine. J. Anim. Sci. 26: 267-273.
- PANSE, V.G. e P.V. SUKHATME, 1963. Métodos Estadísticos para Investigadores Agrícolas. 2.^a ed. em espanhol. México, Fondo de Cultura Económica, 359 p.
- PIMENTEL GOMES, F.; O. VALSECHI; C.P. de ABREU e E.R. de OLIVEIRA, 1964. A amostragem da cana-de-açúcar para determinações tecnológicas. Anais da E.S.A. "Luiz de Queiroz", Piracicaba, 20: 89-114.
- RICO GUTIERREZ, M., 1965. Genética-Estatística. Ministério de Agricultura. 195 p. Madrid.
- SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. John Wiley Inc. Nova York.
- SNEDECOR, G.W., 1956. Statistical Methods Applied to Experiments in Agriculture and Biology. 5.^a ed. Ames, Iowa State University Press, 535 p.
- SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1966. Métodos Estadísticos Aplicados a la Investigación Agrícola y Biológica. 1.^a ed. em espanho. México, Compañía Editorial Continental S.A.

STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. Nova York, McGraw-Hill Book Co. 481 p.

THOMPSON, W. A. Jr., 1962. The Problem of Negative Estimates of Variance Components. Ann. Math. Statist., 33: 273-289.

TIAO, G. C. and W. Y. TAN; 1965. Bayesian Analysis of Random Effect Models in the Analysis of Variance I. Posterior Distribution of Variance-Components. Biometrika, 52: 37-53.