SUPERFÍCIES DE RESPOSTA EM EXPERIMENTOS FATORIAIS 3^3 INCOMPLETOS DE ADUBAÇÃO NPK EM MANDIOCA NO ESTADO DO CEARÁ

ALEXANDRE REINALDO DA COSTA LIMA

Engenheiro-Agrônomo

Orientadora: Dra. Marli de Bem Gomes

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Maio, 1980

*À Maria Auxiliadora,
minha esposa,*

D E D I C O.

AGRADECIMENTOS

A Prof.^a Dr.^a Marli de Bem Gomes.

Aos Professores Dr. F. Pimentel Gomes, Dr. Humberto de Campos, Dr. Décio Barbin e Dr. Roberto Simionato Moraes.

Aos demais professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ.

Aos colegas Francisco das Chagas Estevam da Fonseca, Humberto Coelho e Valdenir Queiroz Ribeiro.

Aos demais colegas do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ.

Aos Doutores Francisco Férrer Bezerra e José Ismar Girão Parente.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ: Maria Izalina Ferreira Alves, Rosa Maria Alves e Octávio Frassetto.

A Empresa de Pesquisa Agropecuária do Ceará (EPACE).

A Empresa de Assistência Técnica e Extensão Rural do Ceará (EMATERCE).

Í N D I C E

	Pág.
1. RESUMO	1
2. INTRODUÇÃO	4
3. REVISÃO DE LITERATURA	7
3.1 - Regressão Polinomial	7
3.2 - Equação de Mitscherlich	12
4. MATERIAL E MÉTODOS	19
4.1 - Material	19
4.2 - Métodos	22
4.2.1 - Regressão polinomial	22
4.2.1.1 - Estimativas dos parâmetros	24
4.2.1.2 - Variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros	26
4.2.1.3 - Intervalos de confiança dos parâmetros	27
4.2.1.4 - Variâncias das estimativas dos rendimentos e intervalos de confiança dos rendimentos	28
4.2.1.5 - Análise de variância	29
4.2.1.6 - Doses econômicas dos nutrientes ..	31
4.2.1.7 - Estimativas das variâncias e intervalos de confiança das doses econômicas dos nutrientes	34
4.2.2 - Equações do tipo Mitscherlich para um, dois ou três nutrientes	35

	Pág.
4.2.2.1 - Estimativas dos parâmetros	35
4.2.2.1.1 - O método modificado de Gauss-Newton	35
4.2.2.1.2 - Aplicação do método ..	39
4.2.2.2 - Variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros	46
4.2.2.3 - Intervalos de confiança dos parâmetros	46
4.2.2.4 - Variâncias das estimativas dos rendimentos e intervalos de confiança dos rendimentos	47
4.2.2.5 - Análise de variância	50
4.2.2.6 - Doses econômicas dos nutrientes ..	50
4.2.2.7 - Estimativas das variâncias e intervalos de confiança das doses econômicas dos nutrientes	54
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	59
5.1 - Análise de Variância	59
5.2 - Regressão Polinomial	60
5.2.1 - Estimativas dos parâmetros e seus intervalos de confiança	60
5.2.2 - Estimativas dos rendimentos e seus intervalos de confiança	60
5.2.3 - Níveis ótimos de N, P e K	61

5.3 - Equações do Tipo Mitscherlich para Um, Dois ou Três Nutrientes	62
5.3.1 - Estimativas dos parâmetros e seus intervalos de confiança	72
5.3.2 - Estimativas dos rendimentos e seus intervalos de confiança	63
5.3.3 - Níveis ótimos de N, P e K	64
5.3.4 - Comparação entre as equações para um e para três nutrientes	66
5.4 - Confronto dos Resultados dos Níveis Ótimos de Nutrientes nos Modelos Estudados	67
6. CONCLUSÕES	68
7. SUMMARY	71
8. BIBLIOGRAFIA	74
9. APÊNDICE	79

1. RESUMO

Nos últimos anos, grande ênfase tem sido dada ao estudo dos níveis ótimos de nutrientes que tornem máxima a receita líquida da exploração agrícola. Nesse estudo diversos modelos matemáticos têm sido testados na busca daquele que melhor represente a função de produção.

Na procura de uma fórmula de adubação economicamente aconselhável para a cultura da mandioca, no Estado do Ceará, foi realizado o presente trabalho, a partir de dados de 22 ensaios fatoriais 3^3 incompletos de adubação NPK, do projeto EMBRATER/FAO/MA, instalados no período de 1972/76.

Aos dados experimentais foram ajustados modelos de regressão polinomial e de regressão assintótica. Esses modelos foram:

$$Y = a_0 + a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 \quad ;$$

$$Y = A \left[1 - 10^{-c(X+b)} \right] \quad ,$$

$$Y = A \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right] \quad ,$$

$$Y = A \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_3+b_3)} \right] \quad .$$

No ajustamento dos modelos assintóticos usou-se o método modificado de Gauss-Newton, desenvolvido por HARTLEY (1961).

A fim de possibilitar um estudo mais crítico, os ensaios foram combinados em diversos grupos, de acordo com as informações disponíveis.

Os grupos ficaram constituídos da maneira seguinte:

- um grupo com os 22 ensaios;
- três grupos reunidos por regiões fisiográficas;
- cinco grupos reunidos por municípios;
- dois grupos reunidos pela textura do solo;
- três grupos reunidos pela vegetação;
- quatro grupos reunidos por ano agrícola.

Durante o estudo foram focalizados os seguintes tópicos:

- a) Estimativa dos parâmetros e seus respectivos intervalos de confiança;

b) Estimativas dos rendimentos e seus respectivos intervalos de confiança;

c) Níveis ótimos dos nutrientes e seus respectivos intervalos de confiança;

d) Cortes na superfície de resposta, quando possíveis;

e) Confronto dos níveis ótimos de nutrientes nos modelos estudados.

As principais conclusões foram:

a) A análise estatística comprovou apenas efeitos lineares de nutrientes. Nessa condição, é indicado o estudo econômico através da regressão assintótica;

b) Os níveis ótimos dos nutrientes foram bastante discrepantes de um grupo de ensaios para outro, dificultando a recomendação de uma fórmula de adubação;

c) Os intervalos de confiança para as doses econômicas foram, na maioria dos casos, bastante amplos. Na regressão assintótica, apresentaram sempre limite inferior negativo;

d) Há indícios de resposta à adubação com nitrogênio e fósforo, e de que as doses economicamente aconselháveis sejam maiores que os níveis máximos usados nos ensaios cujas produções foram analisadas neste trabalho.

2. INTRODUÇÃO

Os fertilizantes constituem insumos que cada vez mais encarecem os custos operacionais da produção agrícola. Requerem por isso, que sua utilização seja efetuada em níveis adequados e econômicos.

Dessa forma, acentua-se a necessidade de, nos estudos de adubação, maior ênfase seja dada a parte econômica do uso de fertilizantes na agricultura.

A produção agrícola é interpretada como uma função contínua de diversos fatores. Todavia, nas pesquisas de fertilidade, consideram-se os nutrientes adicionados ao solo como variáveis independentes e constantes os demais fatores. Portanto, a função de produção pode ser representada simbolicamente por:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) ,$$

onde y é a produção por unidade de área e $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as quantidades usadas dos nutrientes.

Não obstante ser desconhecida a forma matemática da função que melhor se ajusta aos dados de produção, é possível utilizar modelos estatísticos que dela se aproximam com precisão razoável.

Esses modelos aproximativos adequados permitem efetuar a análise econômica, ou seja, determinar os níveis de nutrientes que conduzem a uma resposta ótima.

As funções mais comumente empregadas podem ser reunidas em dois grupos: as funções polinomiais, isto é, aquelas cujas equações de regressão são polinômios com uma ou mais variáveis independentes; e as funções assintóticas, cujo modelo mais utilizado é a equação de Mitscherlich para avaliação da resposta de cada nutriente isoladamente.

Neste trabalho estudaram-se os ajustes, aos dados de ensaios fatoriais 3^3 incompletos de adubação NPK em mandioca, instalados no Estado do Ceará, de modelos de função polinomial e de função assintótica.

O modelo polinomial ajustado foi o quadrático:

$$Y_i = a_0 + a_{11}X_{1i}^2 + a_{22}X_{2i}^2 + a_{33}X_{3i}^2 + a_{11}X_{1i} + a_{22}X_{2i} + a_{33}X_{3i},$$

onde não estão consideradas as interações entre os fatores, já que o delineamento utilizado para obtenção dos dados de produção possibilita somente o ajuste de modelos contendo até sete parâmetros.

No estudo da regressão assintótica, aplicou-se a função de Mitscherlich em três diferentes modelos: na sua forma original para um nutriente,

$$Y = A \left[1 - 10^{-c(X+b)} \right] ;$$

na forma empregada por BALBA (1960), para o estudo conjunto de dois fatores,

$$Y = A \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right] ;$$

e na forma sugerida por BAULE (1918), para o estudo conjunto de três fatores,

$$Y = A \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_3+b_3)} \right] .$$

A partir dos modelos ajustados realizou-se a análise econômica, estimando-se as doses economicamente aconselháveis dos nutrientes e seus respectivos intervalos de confiança, e, para os modelos em que eram possíveis, foram efetuados cortes das superfícies, visando verificar o comportamento de cada nutriente quando os demais são fixados.

3. REVISÃO DE LITERATURA

3.1 - Regressão Polinomial

Um dos primeiros trabalhos, segundo MEADE e PIKE (1975), aplicando modelo estatístico para o estudo da função de resposta foi o de WISHART (1938), que utilizou os polinômios ortogonais, como uma aproximação da verdadeira função de resposta, em estudos de crescimento de porcos em função da variação dos níveis nutricionais.

BOX e WILSON (1951) desenvolveram os delineamentos tipo Composto Central, objetivando a determinação da superfície de resposta — através de polinômios do segundo grau — e ao estudo de suas propriedades, principalmente a determinação de pontos extremos. Esses delineamentos foram inicialmente utilizados na indústria, onde o erro experimental é, de maneira geral, menor. Posteriormente,

passaram a ser utilizados na agricultura, por possibilitarem o estudo de diversos níveis de nutrientes, usando número relativamente pequeno de parcelas.

HEADY e PESEK (1954) ajustaram cinco modelos matemáticos de funções de produção, a uma ou duas variáveis independentes, a dados de um ensaio fatorial 9^2 incompleto de adubação NP em milho, e dissertaram sobre o ajustamento de cada modelo.

CAMPOS (1967) aplicou a regressão polinomial quadrática para dados de ensaios fatoriais 3^3 de adubação NPK em milho, usando o modelo polinomial:

$$Y = a_0 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ + a_{23}x_2x_3 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 .$$

Sob o ponto de vista teórico o autor determinou a estimativa dos parâmetros e seus respectivos intervalos de confiança, os níveis ótimos de N, P e K, as estimativas e os intervalos de confiança das produções, estudando ainda o ponto crítico, para verificar se era máximo, mínimo ou ponto de sela.

Em seguida, o autor aplicou a teoria a um conjunto de 50 ensaios, combinados em diversos grupos, e do estudo extraiu, entre outras, as conclusões:

- Os parâmetros da equação da superfície de resposta apresentaram intervalos de confiança muito amplos;

- Há maior tendência de aparecimento de ponto de máximo para a função da receita líquida, à medida que se agrupam os ensaios;

- A aplicação da regressão polinomial aos ensaios fatoriais 3^3 de adubação se recomenda apenas para grupos de ensaios e de boa precisão.

Se as interações lineares duplas entre os nutrientes forem pouco expressivas, o modelo utilizado por CAMPOS (1967), pode ser simplificado (TEJEDA, 1969; MYERS, 1971; CAMPOS e ARAUJO, 1971), ficando a função de produção, a ser adaptada, composta de sete parâmetros em vez de dez.

MORAES (1969) utilizou a regressão polinomial para um ensaio fatorial 3^3 de adubação NPK, com níveis não equidistantes, no qual todas as interações foram significativas. Argumentou que em bora o emprego do método da regressão polinomial em um único ensaio sofra sérias restrições, para aqueles casos em que as interações são de grande vulto, é vantajoso o uso do método referido, em virtude da dificuldade de interpretação dos resultados através da análise de variância usual.

O autor observou que as estimativas das produções foram boas, considerando-se as limitações do método, com intervalos de confiança bem pequenos, apesar dos intervalos de confiança dos parâmetros serem relativamente grandes. O que concorda com outros exemplos da literatura.

O teste para regressão foi altamente significativo e os desvios de regressão também foram significativos, concluindo o autor que, como o efeito de regressão tinha sido muito maior que o dos desvios, a regressão era satisfatória.

VIEIRA (1970) fez o ajuste dos modelos de superfície de resposta X^2 , raiz quadrada de X e $X^{3/2}$, além do modelo de regressão assintótica de Mitscherlich, aos dados utilizados por CAMPOS (1970). O modelo raiz quadrada apresentou os mais altos valores de R^2 , enquanto que o modelo quadrático e o de grau $3/2$ revelaram-se praticamente iguais nos resultados.

A autora recomenda que, para a determinação da dose econômica de nutriente, no caso de três níveis, é preferível o uso da lei de Mitscherlich, porque leva a soluções satisfatórias através de métodos matemáticos simples. Entretanto, se existirem interações significativas de nutrientes ou se houver queda de produção devido à adubação excessiva, é recomendável a aplicação de regressão polinomial, preferencialmente o modelo de raiz quadrada.

PIMENTEL GOMES (1976) estudou a regressão polinomial com as variáveis independentes X_1 , X_2 e X_3 , para dados de ensaios fatoriais 3^3 incompletos, utilizados pela FAO, empregando o método dos polinômios ortogonais. Adotou o modelo

$$Y = m + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + b_1Q_1 + b_2Q_2 + b_3Q_3 ,$$

onde: m é a média geral;

P_1 , P_2 , P_3 são os polinômios ortogonais de 1º grau; e

Q_1 , Q_2 , Q_3 são os polinômios ortogonais de 2º grau para N, P e K respectivamente.

COSTA (1977) fez o estudo de 3 modelos de regressão polinomial usando os dados de 27 ensaios fatoriais 3^3 de adubação NPK em arroz. Os modelos foram X^2 , raiz quadrada de X e $X^{3/2}$.

Ao fazer as análises iniciais constatou que os resultados obtidos pelos modelos quadrático e de grau $3/2$ praticamente não diferiam, o que levou o autor a excluir o modelo de grau $3/2$ por ser de maior complexidade e apresentar cálculos mais laboriosos.

O autor verificou que os intervalos de confiança dos parâmetros foram bastante amplos, chegando, às vezes, a limites inferiores negativos, e concluiu que no caso dos elementos quadráticos, essa amplitude podia ocasionar reversão de tendência para máximo ou para mínimo, no caso do modelo I.

O autor determinou as supostas doses econômicas para os dois modelos, utilizando as teorias desenvolvidas por CAMPOS (1967) e VIEIRA (1970), respectivamente, para os modelos quadrático e raiz quadrada. Verificou uma grande divergência nos níveis ótimos obtidos tanto entre ensaios como entre modelos, confirmando os resultados obtidos por aqueles autores.

MONTEIRO (1978), aplicando os modelos polinomial quadrático e assintótico (Lei de Mitscherlich), este último para os nutrientes separadamente, em produções provenientes de ensaios fatoriais 3^3 de adubação NPK em amendoim, concluiu que os dois modelos

apresentaram um bom ajuste aos dados experimentais e que os intervalos de confiança para os rendimentos foram estreitos.

RIBOLDI (1978), utilizando os dados de ensaios fatoriais 3^3 incompletos, de adubação NPK em milho, do projeto FAO-ANDAMA, ajustou, pelo método dos polinômios ortogonais, os modelos de superfícies de resposta

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1^{0.5} + \beta_2 X_2^{0.5} + \beta_3 X_3^{0.5} + \beta_{11} X_1 + \beta_{22} X_2 + \beta_{33} X_3$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1^{0.75} + \beta_2 X_2^{0.75} + \beta_3 X_3^{0.75} + \beta_{11} X_1 + \beta_{22} X_2 + \beta_{33} X_3$$

O autor trabalhou primeiramente com todos os tratamentos do fatorial 3^3 incompleto e, em seguida, sem o tratamento testemunha. Concluiu que a omissão do tratamento testemunha influenciou na obtenção das equações de regressão, podendo, até mesmo, conduzir a equações completamente diferentes das obtidas quando o citado tratamento é considerado.

3.2 - Equação de Mitscherlich

BAULE (1918) ampliou a equação de Mitscherlich para o caso de três nutrientes estudados simultaneamente, apresentando-a sob a expressão

$$Y_h = A \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h} + b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h} + b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_{3h} + b_3)} \right],$$

possibilitando, então, a avaliação de interações entre os nutrientes envolvidos.

PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949a) estudaram a aplicação da lei de Mitscherlich para o caso de três níveis de nutrientes, e apresentaram um sistema de três equações a três incógnitas para a determinação dos parâmetros. Quando os três níveis estão em progressão aritmética, chega-se à fórmula

$$A = \frac{\bar{y}_1^2 - \bar{y}_0 \cdot \bar{y}_2}{2\bar{y}_1 - (\bar{y}_0 + \bar{y}_2)},$$

onde $\bar{y}_0$, $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$, são as produções médias referentes às doses 0, 1 e 2, respectivamente. Com a estimativa de A, obtém-se de maneira fácil as estimativas de b e c.

Os autores demonstraram que as condições

$$2\bar{y}_1 > \bar{y}_0 + \bar{y}_2$$

$$\bar{y}_0 < \bar{y}_1 < \bar{y}_2$$

são necessárias para que a lei de Mitscherlich possa ser aplicada.

PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949b) aplicaram o método dos quadrados mínimos e o método dos momentos e estabeleceram um processo geral para estimar os parâmetros da equação de Mitscherlich. Em ambos os métodos obtiveram um sistema de três equações a três incógnitas, que pela aplicação do teorema de Rouché se transforma em uma única equação que encerra c como incógnita. Esta última equação é de mais fácil resolução quando obtida pelo método dos momentos. Uma vez calculado c é fácil a obtenção de A e b.

STEVENS (1951), usando a equação de Mitscherlich sob a forma

$$Y = \alpha + \beta \rho^X ,$$

onde $\alpha = A$, $\beta = -A 10^{-cb}$ e $\rho = 10^{-c}$, expôs um processo, baseado no método dos quadrados mínimos, para a determinação dos parâmetros α , β e ρ , assim como fórmulas que estimam as variâncias e covariâncias das estimativas desses parâmetros.

PIMENTEL GOMES (1953), valendo-se das relações existentes entre a equação de STEVENS (1951) e a de Mitscherlich, demonstrou as fórmulas para as estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros A, b e c. Essas fórmulas estão em função das variâncias e covariâncias de α , β e ρ .

O autor determinou a fórmula

$$X^* = \frac{1}{c} \log \left[\frac{w A c}{t \log e} \right] - b ,$$

para o cálculo da dose economicamente aconselhável de nutriente, onde w é o preço do produto agrícola no campo, t é o custo unitário de nutriente, e A , b e c são as estimativas dos parâmetros da equação de Mitscherlich.

PIMENTEL GOMES e ABREU (1959), propuseram a fórmula

$$X^* = \frac{1}{2} X_u + \frac{1}{c} \log \left(\frac{w u}{X_u t} \right) ,$$

para o cálculo da dose econômica X^* , referente à equação de Mitscherlich. Uma vantagem dessa fórmula, em relação à apresentada por PIMENTEL GOMES (1953), é que ela não depende das estimativas dos parâmetros A e b . Aqui u representa o aumento de produção devido à dose padrão X_u de nutriente.

BALBA (1960) ajustou uma equação, do tipo proposto por BAULE (1918), para o caso do nitrogênio e fósforo estudados simultaneamente. Inicialmente calculou as estimativas dos parâmetros A , b e c , usando o método dos quadrados mínimos, para cada um dos nutrientes isoladamente. Em seguida fez o ajuste para os dois nutrientes em conjunto usando a equação

$$Y_{N,P} = A_{N,P} \left[1 - 10^{-c_N(X_N + b_N)} \right] \left[1 - 10^{-c_P(X_P + b_P)} \right],$$

onde os parâmetros c e b , concernentes ao nitrogênio e ao fósforo, são os mesmos anteriormente estimados. Para o cálculo de $A_{N,P}$ fez uso do método de IBACH e MANDUM (1953).

PIMENTEL GOMES (1961) apresentou duas fórmulas para o cálculo da estimativa da variância da dose econômica de nutriente proposta por PIMENTEL GOMES e ABREU (1959): uma para o caso da dose econômica ser calculada usando-se o coeficiente de eficácia c da literatura; e a outra para quando a dose econômica é calculada com o valor de c obtido com os dados do ensaio.

VIEIRA e CAMPOS (1971) estudaram a equação de Mitscherlich e indicaram duas fórmulas: uma para o cálculo da variância

das estimativas dos rendimentos, e outra para o cálculo das variâncias das doses economicamente aconselháveis de nutrientes. Essas fórmulas foram obtidas através da aplicação da fórmula de Taylor, tomando-se as estimativas dos parâmetros $\underline{A}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ como variáveis.

D'AULÍSIO (1973) estudou a influência dos erros experimentais sobre a dose X^* economicamente aconselhável de um nutriente e sobre a estimativa do coeficiente de eficácia $\underline{c}$ da equação de Mitscherlich.

O método básico aplicado foi o da simulação, com introdução de erros aleatórios em valores teóricos obtidos da equação

$$Y = 4000 \left[1 - 10^{-0.0009880(X+50)} \right],$$

sugerida por dados experimentais de adubação fosfatada em milho. Com base nessa equação calculou os níveis teóricos exatos de produção de milho, relativos a zero, 60 e 120 kg/ha de P_2O_5 , aos quais acrescentou erros referentes a três distribuições normais.

A autora concluiu que é preferível utilizar o $\underline{c}$ da literatura, pois conduz a resultados mais seguros. Recomenda que no caso de três níveis de adubação, a dose econômica deve ser a média aritmética dos valores de X_1^* e X_2^* , o primeiro calculado com as doses zero e q e o segundo com as doses zero e 2q.

No mesmo trabalho, a autora deduziu uma fórmula para a estimativa da variância de $\hat{c}$, que tem a vantagem de usar diretamente os resultados obtidos no ensaio, e outra para a estimativa da

variância da dose economicamente aconselhável.

MELO (1976) aplicou a lei de Mitscherlich para o caso de um nutriente, dois nutrientes (BALBA, 1960) e três nutrientes (BAULE, 1918) a dados de ensaios fatoriais 3^3 de adubação NPK em milho. Para os três modelos, os parâmetros foram estimados através do método modificado de Gauss-Newton, desenvolvido por HARTLEY (1961).

O autor constatou que houve um perfeito ajustamento dos modelos estudados aos dados experimentais, concluindo então que é viável a aplicação do método de linearização desenvolvido por HARTLEY (1961) no estudo dos citados modelos.

Outros autores (CORTARELLI, 1973; SILVEIRA JÚNIOR, 1976; SILVA, 1978) também utilizaram o método modificado de Gauss-Newton, desenvolvido por HARTLEY (1961), no estudo de diversos modelos aplicados a dados de crescimento de bovinos ou de produção agrícola, e todos concluíram que o resultado foi satisfatório.

LIMA (1979) fez o ajuste, através de dois diferentes métodos, da equação de Mitscherlich generalizada para três nutrientes a dados de ensaios fatoriais 3^3 incompletos. O primeiro ajuste foi feito pelo método modificado de Gauss-Newton desenvolvido por HARTLEY (1961), e o segundo através da metodologia usada por BALBA (1960).

O autor verificou que os dois métodos conduziram às mesmas estimativas dos parâmetros, e concluiu que, para o modelo e delineamento utilizados, os dois métodos eram equivalentes. Conside

rou que, nas condições de seu estudo, o método de BALBA (1960) era o mais indicado, por ser de uso relativamente simples e dispensar o auxílio de computador.

Acrescente-se que, quando se tem por finalidade um estudo mais completo que o simples ajuste de um modelo, o método modificado de Gauss-Newton tem a vantagem de estimar, também, as variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros.

4. MATERIAL E MÉTODOS

4.1 - Material

Utilizaram-se dados de 22 ensaios fatoriais 3^3 incompletos de adubação NPK em mandioca, previamente selecionados de um grupo de 27, instalados em diversos municípios do Estado do Ceará, nos anos agrícolas de 1972/73, 1973/74, 1974/75 e 1976/77, que foram cedidos pelo Projeto EMBRATER/FAO/MA, e que constam da Tabela 1 do Apêndice.

Os ensaios referidos constam dos tratamentos: 000, 011, 101, 110, 111, 112, 121, 211 e 111 + calcário, com apenas uma repetição em um só bloco de nove parcelas, sendo que os tratamentos 000 e 111 + calcário não participaram do presente estudo. O primeiro, em virtude de, para fins de ajustamento de superfície de resposta usando-se dados obtidos através de fatoriais 3^3 incompletos, ser

conveniente não incluí-lo, pois o mesmo fica a parte e altera toda a superfície. O segundo foi excluído por ser um tratamento adicional.

As doses de nutrientes utilizadas foram: zero, 40 e 80 kg/ha para o nitrogênio, na forma de sulfato de amônio (20% de N); zero, 50 e 100 kg/ha para o fósforo, na forma de superfosfato simples (20% de P_2O_5); e zero, 30 e 60 kg/ha para o potássio, na forma de cloreto de potássio (60% de K_2O).

A variedade empregada foi a comumente usada na região pelos agricultores, utilizando-se o espaçamento 1,00m x 0,50m e a colheita foi efetuada após 16 a 18 meses do plantio.

No estudo econômico foram considerados os preços seguintes, obtidos através de informações junto aos agricultores do município de Pacajus, Estado do Ceará, no mês de abril de 1980:

Tubérculo de mandioca	Cr\$ 1.500,00/t
Nitrogênio (N)	Cr\$ 52,50/kg
Fósforo (P_2O_5)	Cr\$ 50,00/kg
Potássio (K_2O)	Cr\$ 25,00/kg

Para fins de estudo, os ensaios foram reunidos em vários grupos de acordo com as informações disponíveis, conforme segue:

Grupo 1:

1.1 - Conjunto formado pelos 22 ensaios.

Grupo 2: Conjuntos formados de acordo com as zonas fisiográficas:

- 2.1 - Zona fisiográfica do Litoral (ensaios de números 1 a 15);
- 2.2 - Zona fisiográfica da Ibiapaba (ensaios de números 16 a 19);
- 2.3 - Zona fisiográfica do Sertão Baixo Jaguaribano (ensaios de números 20 a 22).

Grupo 3: Conjuntos formados de acordo com os municípios com mais de um ensaio:

- 3.1 - Município de Granja (ensaios de números 1 a 4);
- 3.2 - Município de Caucaia (ensaios de números 5 a 8);
- 3.3 - Município de Itapipoca (ensaios de números 9 a 12);
- 3.4 - Município de Mucambo (ensaio de números 16 a 19);
- 3.5 - Município de Morada Nova (ensaios de números 20 a 21).

Grupo 4: Conjuntos formados de acordo com a textura do solo:

- 4.1 - Textura arenosa (ensaios de números 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 20, 21 e 22);
- 4.2 - Textura argilo arenosa (ensaios de números 2, 16, 17 e 18).

Grupo 5: Conjuntos formados de acordo com a vegetação:

- 5.1 - Caatinga (ensaios de números 1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 14, 20 e 22);
- 5.2 - Sertão (ensaios de números 5, 6, 7, 13, 16, 17, 18 e 19);
- 5.3 - Mata (ensaios de números 2 e 21).

Grupo 6: Conjuntos formados de acordo com o ano agrícola:

- 6.1 - Ano agrícola 1972/73 (ensaios de números 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10 e 13);
- 6.2 - Ano agrícola 1973/74 (ensaios de números 16 e 17);
- 6.3 - Ano agrícola 1974/75 (ensaios de números 4, 7, 18 e 19);
- 6.4 - Ano agrícola 1976/77 (ensaios de números 8, 11, 12, 14, 15, 20, 21 e 22).

Em virtude da grande complexidade de cálculos, especialmente os relativos às funções assintóticas, a metodologia aplicada neste trabalho foi programada em linguagem FORTRAN, sendo o processamento dos dados realizado no Computador Eletrônico IBM-1130 pertencente ao Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ (Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz").

4.2 - Métodos

4.2.1 - Regressão polinomial

Usou-se o modelo polinomial quadrático simplificado, dado por:

$$Y_j = a_0 + a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + e_j ,$$

onde $e_j \cap N(0, \sigma^2)$.

Em forma matricial tem-se $Y = X\beta + \epsilon$, onde:

Y : vetor das produções;

X : matriz dos valores assumidos por X_1 , X_2 e X_3 nos diversos tratamentos;

β : vetor dos parâmetros;

ϵ : vetor dos erros.

Codificando as doses dos nutrientes através da fórmula $x_1 = \frac{X_1 - \bar{X}}{q_1}$, onde q_1 é a equidistância entre as doses, fica $x_1 = -1, 0, 1$, e utilizando a correção para a média, introduzida nos termos quadráticos, chega-se ao polinômio:

$$Y_j = a_0 + a_{11}(x_1^2 - \frac{2}{7}) + a_{22}(x_2^2 - \frac{2}{7}) + a_{33}(x_3^2 - \frac{2}{7}) + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + e_j.$$

A matriz X , também chamada matriz das variáveis independentes, fica sendo então:

	Tratamentos							
X =	1	5/7	-2/7	-2/7	-1	0	0	(011)
	1	-2/7	5/7	-2/7	0	-1	0	(101)
	1	-2/7	-2/7	5/7	0	0	-1	(110)
	1	-2/7	-2/7	5/7	0	0	0	(111)
	1	-2/7	-2/7	5/7	0	0	1	(112)
	1	-2/7	5/7	-2/7	0	1	0	(121)
	1	5/7	-2/7	-2/7	1	0	0	(222)

As linhas da matriz X estão em correspondência com a sequência dada aos tratamentos na relação colocada à sua direita.

4.2.1.1 - Estimativas dos parâmetros

As estimativas dos parâmetros foram obtidas a partir da solução

$$\hat{\beta} = S^{-1} X'Y .$$

Para os grupos de ensaios, cada linha da matriz X será tantas vezes repetidas quantas forem as repetições dos tratamentos. Desse modo, a matriz S é constituída por:

$$S = X'X = r \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10/7 & -4/7 & -4/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4/7 & 10/7 & -4/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4/7 & -4/7 & 10/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A inversa S^{-1} , fica sendo:

$$S^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

O vetor $X'Y$ é dado por:

$$X'Y = \begin{bmatrix} G \\ N_0 + N_2 - \frac{2}{7} G \\ P_0 + P_2 - \frac{2}{7} G \\ K_0 + K_2 - \frac{2}{7} G \\ N_2 - N_0 \\ P_2 - P_0 \\ K_2 - K_0 \end{bmatrix}$$

onde, G : total geral no grupo;

N_0 : total do tratamento 011;

e o restante definido semelhantemente.

Desse modo, as estimativas dos parâmetros, elementos do vetor $\hat{\beta}$, são:

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{7r} G$$

$$\hat{a}_{11} = \frac{1}{2r} (N_0 - 2N_1 + N_2)$$

$$\hat{a}_{22} = \frac{1}{2r} (P_0 - 2P_1 + P_2)$$

$$\hat{a}_{33} = \frac{1}{2r} (K_0 - 2K_1 + K_2)$$

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{2r} (N_2 - N_0)$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{2r} (P_2 - P_0)$$

$$\hat{a}_3 = \frac{1}{2r} (K_2 - K_0)$$

4.2.1.2 - Variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros

A matriz de dispersão, também chamada de "matriz-variância-covariância de $\hat{\beta}$ ", ou simplesmente de "matriz D", é obtida a partir da matriz S^{-1} . Desse modo, através da igualdade $D = S^{-1} \sigma^2$ tem-se as variâncias (elementos da diagonal principal) e as covariâncias (elementos fora da diagonal principal) das estimativas dos parâmetros, as quais são:

$$V(\hat{a}_0) = \frac{1}{7r} \sigma^2 \quad ,$$

$$V(\hat{a}_{11}) = \frac{3}{2r} \sigma^2 \quad ,$$

$$V(\hat{a}_i) = \frac{1}{2r} \sigma^2 \quad ,$$

$$\text{COV}(\hat{a}_{11}, \hat{a}_{i',1'}) = \frac{1}{r} \sigma^2 \quad , \quad \begin{matrix} (i=1,2,3; i'=1,2,3; \\ i \neq i') \end{matrix}$$

As demais covariâncias são todas nulas.

Como em experimentação σ^2 é desconhecida, trabalha-se com sua estimativa imparcial $s^2 = \text{QM Resíduo}$, e, assim, tem-se estimativas de variâncias e covariâncias.

4.2.1.3 - Intervalos de confiança dos parâmetros

Supondo-se que os parâmetros têm distribuição aproximadamente normal, a partir das estimativas das variâncias pode-se calcular o intervalo de confiança dos mesmos. Assim, tem-se os intervalos

$$\hat{a}_i \pm t \sqrt{V(\hat{a}_i)} \quad ,$$

onde t é obtido da distribuição teórica de t , ao nível α de probabilidade e com os graus de liberdade do resíduo.

4.2.1.4 - Variâncias das estimativas dos rendimentos e intervalo de confiança dos rendimentos

A variância de cada rendimento $\hat{Y}_j$ pode ser encontrada, segundo CONAGIN (1977), a partir da matriz D.

Seja X'_j o vetor linha $1 \times p$, cujos elementos correspondem exatamente à linha de X relativa ao tratamento j, isto é:

$$X'_j = [1, u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3], \text{ sendo } u_1 = x_1^2 - \frac{2}{7}$$

$$V(\hat{Y}_j) = X'_j D X_j = X'_j S^{-1} X_j \sigma^2$$

Desenvolvendo virã:

$$V(\hat{Y}_j) = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{7} + \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (u_1 + u_2 + u_3)^2 + \\ + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{array} \right] \frac{\sigma^2}{r}$$

Substituindo u_1 por seus valores:

$$V(\hat{Y}_j) = \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{3}{2} (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - \frac{3}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \\ + 2 (x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) \end{array} \right] \frac{\sigma^2}{r}$$

Mas $x_i = -1, 0, 1$, então $x_i^4 = x_i^2$. Logo,

$$V(\hat{Y}_j) = [1 + 2 (x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2)] \frac{\sigma^2}{r}$$

Substituindo os valores de x_1 , x_2 e x_3 para cada $\hat{y}_j$, tem-se para qualquer tratamento a variância da estimativa de seu rendimento dada por

$$V(\hat{y}_j) = \frac{\sigma^2}{r}.$$

Então,

$$\hat{V}(\hat{y}_j) = \frac{s^2}{r}.$$

Consequentemente, o intervalo de confiança para o rendimento do tratamento j ($j=1,2,\dots,7$) será:

$$IC(\hat{y}_j) = \hat{y}_j \pm t \sqrt{\hat{V}(\hat{y}_j)}.$$

4.2.1.5 - Análise de variância

A redução na soma de quadrados, devida à regressão, é dada por $\hat{\beta}'X'Y$.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}'X'Y = & \hat{a}_0 G + \hat{a}_{11}u_1 + \hat{a}_{22}u_2 + \hat{a}_{33}u_3 + \hat{a}_1(N_2 - N_0) + \hat{a}_2(P_2 - P_0) + \\ & + \hat{a}_3(K_2 - K_0), \end{aligned}$$

$$\text{sendo: Correção} = C = \hat{a}_0 G = \frac{G^2}{7r}$$

$$\begin{aligned} \text{SQ Termos Quadráticos} &= \text{SQ}(\hat{a}_{11}, \hat{a}_{22}, \hat{a}_{33}) \\ &= \hat{a}_{11}u_1 + \hat{a}_{22}u_2 + \hat{a}_{33}u_3, \end{aligned}$$

onde:

$$u_1 = N_0 + N_2 - \frac{2}{7} G; \quad u_2 = P_0 + P_2 - \frac{2}{7} G; \quad u_3 = K_0 + K_2 - \frac{2}{7} G$$

$$SQN_L = SQ \hat{a}_1 = \hat{a}_1 (N_2 - N_0) = \frac{1}{2r} (N_2 - N_0)^2$$

$$SQP_L = SQ \hat{a}_2 = \hat{a}_2 (P_2 - P_0) = \frac{1}{2r} (P_2 - P_0)^2$$

$$SQK_L = SQ \hat{a}_3 = \hat{a}_3 (K_2 - K_0) = \frac{1}{2r} (K_2 - K_0)^2$$

O quadro de análise da variância será:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.
Nitrogênio linear	1	$SQ \hat{a}_1$
Fósforo linear	1	$SQ \hat{a}_2$
Potássio linear	1	$SQ \hat{a}_3$
Termos quadráticos	3	$SQ (\hat{a}_{11}, \hat{a}_{22}, \hat{a}_{33})$
(Tratamentos)	(6)	$\left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^7 T_j^2 - C \right\}$
Blocos	r-1	$\frac{1}{7} \sum_{j'=1}^r B_{j'}^2 - C$
Resíduo	6(r-1)	por diferença
T o t a l	7r-1	$\sum Y_{jj'}^2 - C$

Os termos quadráticos não são testados isoladamente visto que há covariância entre eles.

4.2.1.6 - Doses econômicas dos nutrientes

Na análise econômica o que se procura é tornar máxima a receita líquida, dada pela função

$$L = w \hat{Y} - t_1 x_1 - t_2 x_2 - t_3 x_3 - m ,$$

onde: w é o preço unitário do produto agrícola a nível de produtor;

$\hat{Y}$ é a estimativa da produção;

t_1 é o preço da dose unitária do nutriente 1;

t_2 é o preço da dose unitária do nutriente 2;

t_3 é o preço da dose unitária do nutriente 3;

m representa os custos fixos da adubação.

Para que exista receita máxima, as condições suficientes são:

$$(a) \quad dL \equiv 0$$

$$(b) \quad d^2L < 0 .$$

Pela condição (a), obtém-se:

$$(c) \quad \begin{cases} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_1} = \frac{t_1}{w} \\ \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_2} = \frac{t_2}{w} \\ \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_3} = \frac{t_3}{w} \end{cases}$$

Para o estudo dos valores de x_1 , x_2 e x_3 que satisfaça ao sistema (c), é essencial verificar se a superfície de resposta apresenta realmente máximo, sem o que as considerações acerca da receita máxima não têm nenhum valor.

O estudo da condição (b), que indica o ponto extremo da superfície de resposta, pode ser feito de maneira fácil através da matriz M da diferencial segunda d^2L .

Seja o polinômio de segundo grau, com três variáveis independentes, onde estão representadas as interações lineares dos fatores, dois a dois:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11}x_1^2 + \hat{a}_{22}x_2^2 + \hat{a}_{33}x_3^2 + \hat{a}_{12}x_1x_2 + \hat{a}_{13}x_1x_3 + \hat{a}_{23}x_2x_3 + \hat{a}_1x_1 + \hat{a}_2x_2 + \hat{a}_3x_3$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 2\hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{12} & 2\hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{13} & \hat{a}_{23} & 2\hat{a}_{33} \end{bmatrix}$$

$$M = w A$$

Por operações de congruência, RAO (1952), de A obtém-se uma matriz diagonal D. Se em D os termos da diagonal, forem:

todos negativos, então $d^2L < 0$ e haverá máximo; todos positivos, haverá mínimo ($d^2L > 0$); negativos e positivos, será ponto de sela.

Para o modelo sem as interações a matriz M é diagonal, e, portanto, é suficiente que os coeficientes dos termos quadráticos da equação sejam todos negativos para que exista máximo.

Para maior segurança da existência dessa condição, é recomendável verificar se os $\hat{a}_{ii}$ ($i=1,2,3$) diferem significativamente de zero, através do teste

$$t = \frac{\hat{a}_{ii} - 0}{s(\hat{a}_{ii})} ,$$

conforme sugere PIMENTEL GOMES (1969).

As dosagens x_1^* , x_2^* e x_3^* , que tornam máxima a receita líquida são dadas através da resolução do sistema de equações (c).

Assim,

$$x_1^* = \frac{\frac{t_1}{w} - \hat{a}_1}{2\hat{a}_{11}}$$

$$x_2^* = \frac{\frac{t_2}{w} - \hat{a}_2}{2\hat{a}_{22}}$$

$$x_3^* = \frac{\frac{t_3}{w} - \hat{a}_3}{2\hat{a}_{33}} .$$

Ou então,

$$X_i^* = (x_i^* + 1) q_i \quad (i=1,2,3) .$$

Uma característica do modelo de regressão adotado, é que as doses econômicas permanecem inalteradas, quaisquer que sejam os cortes efetuados na superfície de resposta.

4.2.1.7 - Estimativas das variâncias e intervalos de confiança das doses econômicas dos nutrientes

Estimativas das variâncias de x_i^* ($i=1,2,3$) podem ser obtidas, de modo aproximado, através da fórmula de Taylor, conforme mostra CAMPOS (1967).

Por diferenciação de x_i , tem-se

$$dx_i^* = - \frac{1}{2\hat{a}_{ii}} d\hat{a}_i - \frac{\left(\frac{t_i}{w} - \hat{a}_i\right)}{2\hat{a}_{ii}^2} d\hat{a}_{ii}$$

e, conseqüentemente,

$$V(x_i^*) = \frac{1}{4\hat{a}_{ii}^2} V(\hat{a}_i) + \frac{\left(\frac{t_i}{w} - \hat{a}_i\right)^2}{4\hat{a}_{ii}^4} V(\hat{a}_{ii}) ,$$

já que $CôV(\hat{a}_i, \hat{a}_{ii}) = 0$.

Aplicando as propriedades da variância à igualdade

$X_i^* = (x_i^* + 1) q_i$, virá:

$$\hat{V}(X_1^*) = q_1^2 \hat{V}(x_1^*)$$

Admitindo-se que x_1^* tenha uma distribuição probabilística aproximadamente normal, então

$$IC(x_1^*) = x_1^* \pm t \, s(x_1^*)$$

e

$$IC(X_1^*) = X_1^* \pm q_1 \, t \, s(x_1^*)$$

4.2.2 - Equações do tipo Mitscherlich para um, dois ou três nutrientes

4.2.2.1 - Estimativas dos parâmetros

As estimativas dos parâmetros foram obtidas através do método modificado de Gauss-Newton, desenvolvido por HARTLEY(1961).

Vários autores, entre eles CORTARELLI (1973), apresentaram descrição detalhada desse método. Aqui apenas um resumo é apresentado a fim de facilitar a compreensão do tema em estudo.

4.2.2.1.1 - O método modificado de Gauss-Newton

Na função de regressão,

$$f(x; \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_p; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \quad (1)$$

é necessário determinar um grupo de θ_i ($i=1,2,\dots,m$) para o qual se ja mínima a soma de quadrados

$$Q(\theta) = \sum_{h=1}^n [y_h - f(x_h; \theta)]^2 \quad (2)$$

O símbolo x_h representa um vetor a p dimensão com elementos $x_{1h}, x_{2h}, \dots, x_{ph}$, e o símbolo θ um vetor a m dimensão, com elementos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$.

As primeiras e segundas derivadas de $f(x; \theta)$ em relação aos θ_i ,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_i} = f_{i1}(x; \theta) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = f_{ij}(x; \theta) \quad , \quad (3)$$

deverão ser funções contínuas de θ para todo x_h ($h=1,2,\dots,n$). Isto permite as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} &= Q_{i1}(x; \theta) = -2 \sum_h [y_h - f(x_h; \theta)] f_{i1}(x_h; \theta) \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= Q_{ij}(x; \theta) = -2 \sum_h [y_h - f(x_h; \theta)] f_{ij}(x_h; \theta) + \\ &\quad + 2 \sum_h f_{i1}(x_h; \theta) f_{j1}(x_h; \theta) . \end{aligned}$$

As equações dos quadrados mínimos, correspondentes à (2), são dadas por

$$Q_{i1}(x; \theta) = 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,m \quad (5)$$

Descrição do Processo Iterativo

Começa-se com o vetor θ_0 dos supostos valores iniciais dos parâmetros. O primeiro passo é fazer correções aos θ_{0i} do vetor inicial θ_0 . Tais correções serão proporcionais às soluções D_i das equações de Gauss-Newton, correspondentes à (2). Essas equações são obtidas substituindo-se no desenvolvimento de Taylor de $f(x;\theta)$ para $\theta = \theta_0$ em (2) e chegando-se, então, às resultantes equações lineares dos quadrados mínimos:

$$2 \sum_{j=1}^m \left[\sum_{h=1}^n f_1(x_h; \theta_0) f_j(x_h; \theta_0) \right] D_j = - Q_1(x_h; \theta_0) \quad , \quad (6)$$

onde $Q_1(x_h; \theta_0)$ é dado por (4).

O determinante das equações lineares (6) tem característica m e desse modo pode ser sempre resolvido, dando os elementos D_i do vetor D como solução.

O sistema de equações obtido anteriormente pode ser simbolizado por:

$$ZD = W \quad ,$$

que, pré-multiplicado por Z^{-1} , resulta

$$D = Z^{-1} W \quad (7)$$

Considerando-se agora a função

$$Q(v) = Q(x_h; \theta_0 + vD) \quad , \quad \text{para } 0 \leq v \leq 1 \quad (8)$$

e seja v' o valor de v , para o qual $Q(v)$ é um mínimo no intervalo $0 \leq v \leq 1$.

Definindo-se o vetor

$${}_1\theta = {}_0\theta + v'D \quad ,$$

com elementos ${}_1\theta_i = {}_0\theta_i + v'D_i$, tem-se de acordo com (8):

$$Q(v) = \sum_{h=1}^n [y_h - f(x_h; {}_0\theta + vD)]^2 \quad .$$

Para se achar o ponto $v_{\min}$ e, em consequência, o mínimo de Q , utiliza-se um método aproximado. Calcula-se Q para $v = 0$, $v = 1/2$ e $v = 1$ e determina-se o nível de v para o qual a parábola que passa por $Q(0)$, $Q(1/2)$ e $Q(1)$ tenha mínimo, isto é:

$$v_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{Q(0) - Q(1)}{Q(1) - 2Q(1/2) + Q(0)} \quad ,$$

$$\text{onde: } Q(0) = \sum_{h=1}^n [y_h - f(x_h; {}_0\theta)]^2$$

$$Q(1/2) = \sum_{h=1}^n [y_h - f(x_h; {}_0\theta + \frac{1}{2}D)]^2$$

$$Q(1) = \sum_{h=1}^n [y_h - f(x_h; {}_0\theta + D)]^2$$

De posse dos valores do vetor D e do ponto $v_{\min}$, de acordo com (9), tem-se:

$${}_1\theta_i = {}_0\theta_i + v_{\min} D_i \quad i=1,2,\dots,m.$$

Neste ponto já são conhecidos ${}_0\theta_1, {}_0\theta_2, \dots, {}_0\theta_m$ e ${}_1\theta_1, {}_1\theta_2, \dots, {}_1\theta_m$. Aplica-se então, um teste com a finalidade de identificar a convergência, que deverá ser simultânea para todos os parâmetros. O teste consiste em comparar os valores dos parâmetros obtidos em um ciclo, com os valores dos mesmos parâmetros obtidos no ciclo anterior, através da expressão

$$\left[|{}_{(j+1)}\theta_i - {}_j\theta_i| / {}_j\theta_i \right] < \delta \quad ,$$

onde δ é uma precisão pré-estabelecida.

Na passagem da iteração j para a iteração $j+1$, volta-se ao sistema de equações, substituindo-se os parâmetros ${}_j\theta_i$ por ${}_{j+1}\theta_i$ e assim sucessivamente até a convergência.

4.2.2.1.2 - Aplicação do método

O ajuste da equação de Mitscherlich para o caso de um nutriente com três níveis equidistantes, só é possível (PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA, 1949a), se as condições

$$\bar{y}_0 < \bar{y}_1 < \bar{y}_2 \quad \text{e} \quad 2\bar{y}_1 > \bar{y}_0 + \bar{y}_2$$

ocorrerem simultaneamente, sendo $\bar{y}_0$, $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$, respectivamente, as produções médias, das parcelas com doses 0, 1 e 2 de nutriente.

Segundo MELO (1976), no caso da equação de Mitscherlich ampliada para dois ou mais nutrientes, essas mesmas condições deverão ser satisfeitas para cada um dos nutrientes envolvidos, e

que a não observância dessas condições conduz a resultados absurdos ou faz com que o método modificado de Gauss-Newton não convirja.

Assim, para os diversos grupos de ensaios do presente trabalho, usou-se o modelo de Mitscherlich para três, dois ou um nutriente, conforme o número de nutrientes que satisfizeram às condições citadas acima foram três, dois ou um, respectivamente.

A rapidez na convergência do processo iterativo depende de boas estimativas dos valores iniciais dos parâmetros e da precisão (δ) que se deseja. Então, para possibilitar uma rápida convergência, os valores iniciais dos parâmetros c e b foram estimados individualmente para cada nutriente usando-se as fórmulas

$$\hat{c} = \frac{1}{q} \log \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\bar{y}_2 - \bar{y}_1} \quad \text{e} \quad \hat{b} = \frac{1}{\hat{c}} \log \frac{\bar{y}_1^2 - \bar{y}_0 \cdot \bar{y}_2}{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0)^2}.$$

Para o parâmetro A, no caso da equação para um nutriente, sua estimativa inicial foi obtida pela fórmula

$$\hat{A} = \frac{\bar{y}_1^2 - \bar{y}_0 \cdot \bar{y}_2}{2\bar{y}_1 - (\bar{y}_0 + \bar{y}_2)},$$

e, no caso do estudo conjunto de dois ou três nutrientes, essa foi calculada seguindo-se o método apresentado por IBACH e MANDUM (1953), conforme descrito por BALBA (1960), e que recentemente foi utilizado por LIMA (1979). Quanto ao valor δ , trabalhou-se com a precisão $\delta = 0,000001$.

Os sistemas matriciais $ZD = W$ do método modificado de Gauss-Newton, concernentes aos três casos previstos para a aplicação da lei de Mitscherlich, são obtidos do modo que segue:

Modelo para um nutriente

$$f = Y_h = A \left[1 - 10^{-c(X_h+b)} \right],$$

onde, A: produção máxima teórica;

c: coeficiente de eficácia do nutriente;

b: teor do nutriente contido no solo em forma assimilável pelas plantas;

X: dose do nutriente.

De acordo com (3), tem-se:

$$f_1 = \frac{\partial Y}{\partial A} = 1 - 10^{-c(X_h+b)}$$

$$f_2 = \frac{\partial Y}{\partial c} = A \cdot L10 \cdot 10^{-c(X_h+b)} \cdot (X_h + b)$$

$$f_3 = \frac{\partial Y}{\partial b} = A \cdot L10 \cdot c \cdot 10^{-c(X_h+b)}$$

A equação correspondente à (2), será:

$$Q(\theta) = \sum_{h=1}^n \left\{ Y_h - A \left[1 - 10^{-c(X_h+b)} \right] \right\}^2.$$

De acordo com (6), tem-se:

$$\sum_{j=1}^3 \left[\sum_{h=1}^n f_i(X_{h;0}\theta) f_j(X_{h;0}\theta) \right] D_j = \sum_{h=1}^n [Y_h - f(X_{h;0}\theta)] f_i(X_{h;0}\theta),$$

com $i=1,2,3$ e $j=1,2,3$.

Fixando i e variando j , virá:

$$i = 1 \quad \text{e} \quad j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{h=1}^n f_1 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^n f_1 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^n f_1 f_3 D_3 = \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_1$$

$$i = 2 \quad \text{e} \quad j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{h=1}^n f_2 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^n f_2 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^n f_2 f_3 D_3 = \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_2$$

$$i = 3 \quad \text{e} \quad j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{h=1}^n f_3 f_1 D_1 + \sum_{h=1}^n f_3 f_2 D_2 + \sum_{h=1}^n f_3 f_3 D_3 = \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_3$$

Este sistema em forma matricial, será:

$$\begin{bmatrix} \sum_{h=1}^n f_1^2 & \sum_{h=1}^n f_1 f_2 & \sum_{h=1}^n f_1 f_3 \\ \sum_{h=1}^n f_1 f_2 & \sum_{h=1}^n f_2^2 & \sum_{h=1}^n f_2 f_3 \\ \sum_{h=1}^n f_1 f_3 & \sum_{h=1}^n f_2 f_3 & \sum_{h=1}^n f_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_1 \\ \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_2 \\ \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_3 \end{bmatrix}$$

Modelo para dois nutrientes

$$f = Y_h = A \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right],$$

onde, A: produção máxima teórica;

c_1 e c_2 : coeficientes de eficácia dos nutrientes 1 e 2, respectivamente;

b_1 e b_2 : respectivos teores dos nutrientes 1 e 2 contidos no solo em forma assimilável pelas plantas;

X_1 e X_2 : doses dos nutrientes 1 e 2, respectivamente.

De acordo com (3), tem-se:

$$f_1 = \frac{\partial Y}{\partial A} = \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right]$$

$$f_2 = \frac{\partial Y}{\partial c_1} = A \cdot 10 \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right] 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} (X_{1h} + b_1)$$

$$f_3 = \frac{\partial Y}{\partial b_1} = A \cdot c_1 \cdot 10 \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right] 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)}$$

$$f_4 = \frac{\partial Y}{\partial c_2} = A \cdot 10 \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} \right] 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} (X_{2h} + b_2)$$

$$f_5 = \frac{\partial Y}{\partial b_2} = A \cdot c_2 \cdot 10 \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} \right] 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)}$$

De modo análogo ao empregado no modelo para um nutriente, obtêm-se as equações de Gauss-Newton correspondentes à (2) e a partir das mesmas o sistema matricial $ZD = W$, cuja representação é:

$$\begin{bmatrix} \sum_{h=1}^n f_1^2 & \sum_{h=1}^n f_1 f_2 & \dots & \sum_{h=1}^n f_1 f_5 \\ \sum_{h=1}^n f_1 f_2 & \sum_{h=1}^n f_2^2 & \dots & \sum_{h=1}^n f_2 f_5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^n f_1 f_5 & \sum_{h=1}^n f_2 f_5 & \dots & \sum_{h=1}^n f_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_1 \\ \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_2 \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_5 \end{bmatrix}$$

Modelo para três nutrientes

$$f = Y_h = A \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_{3h}+b_3)} \right],$$

onde, A: produção máxima teórica;

c_1 , c_2 e c_3 : coeficientes de eficácia dos nutrientes 1, 2 e 3, respectivamente;

b_1 , b_2 e b_3 : respectivos teores dos nutrientes 1, 2 e 3 contidos no solo em forma assimilável pelas plantas;

X_1 , X_2 e X_3 : doses dos nutrientes 1, 2 e 3, respectivamente.

De acordo com (3), tem-se:

$$f_1 = \frac{\partial Y}{\partial A} = \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_{3h}+b_3)} \right]$$

$$f_2 = \frac{\partial Y}{\partial c_1} = A \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_{3h}+b_3)} \right] 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} (X_{1h}+b_1)$$

$$f_3 = \frac{\partial Y}{\partial b_1} = A c_1 L10 \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h} + b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_{3h} + b_3)} \right] 10^{-c_1(X_{1h} + b_1)}$$

$$f_4 = \frac{\partial Y}{\partial c_2} = A L10 \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h} + b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_{3h} + b_3)} \right] 10^{-c_2(X_{2h} + b_2)} (X_{2h} + b_2)$$

$$f_5 = \frac{\partial Y}{\partial b_2} = A c_2 L10 \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h} + b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_{3h} + b_3)} \right] 10^{-c_2(X_{2h} + b_2)}$$

$$f_6 = \frac{\partial Y}{\partial c_3} = A L10 \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h} + b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h} + b_2)} \right] 10^{-c_3(X_{3h} + b_3)} (X_{3h} + b_3)$$

$$f_7 = \frac{\partial Y}{\partial b_3} = A c_3 L10 \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h} + b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h} + b_2)} \right] 10^{-c_3(X_{3h} + b_3)}$$

De modo análogo ao empregado no modelo para um nutriente, obtêm-se as equações de Gauss-Newton, correspondentes à (2) e a partir das mesmas o sistema matricial $ZD = W$, cuja representação é:

$$\begin{bmatrix} \sum_{h=1}^n f_1^2 & \sum_{h=1}^n f_1 f_2 & \dots & \sum_{h=1}^n f_1 f_7 \\ \sum_{h=1}^n f_1 f_2 & \sum_{h=1}^n f_2^2 & \dots & \sum_{h=1}^n f_2 f_7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^n f_1 f_7 & \sum_{h=1}^n f_2 f_7 & \dots & \sum_{h=1}^n f_7^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_1 \\ \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_2 \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^n (Y_h - f) f_7 \end{bmatrix}$$

4.2.2.2 - Variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros

Segundo GALLANT (1975), a matriz M das estimativas de variâncias e covariâncias é determinada invertendo-se a matriz Z, obtida com os valores da última iteração, e multiplicando-se por s^2 , e, no presente caso, dividindo-se pelo número de repetições r. Portanto,

$$M = Z^{-1} \frac{s^2}{r} .$$

4.2.2.3 - Intervalos de confiança dos parâmetros

De posse das estimativas da variância dos parâmetros, e supondo-se que estes tenham distribuição aproximadamente normal, o intervalo de confiança para cada parâmetro é dado por

$$p \pm t . s(p) ,$$

onde, p: estimativa do parâmetro;

s(p): erro padrão da estimativa do parâmetro;

t: valor da distribuição teórica de t ao nível α de probabilidade e com os graus de liberdade da variância residual.

4.2.2.4 - Variâncias das estimativas dos rendimentos e intervalos de confiança dos rendimentos

Uma aproximação da variância do rendimento, para cada modelo, é obtida através da aplicação da fórmula de Taylor, quando se diferencia-se Y_h .

Modelo para um nutriente

$$Y_h = A \left[1 - 10^{-c(X_h+b)} \right] .$$

Por diferenciação, tem-se:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial A} dA + \frac{\partial Y}{\partial c} dc + \frac{\partial Y}{\partial b} db ,$$

onde: $\frac{\partial Y}{\partial A} = f_1$, $\frac{\partial Y}{\partial c} = f_2$, $\frac{\partial Y}{\partial b} = f_3$, são as mesmas equações do item (3) do método modificado de Gauss-Newton.

Logo

$$dY = f_1 dA + f_2 dc + f_3 db ,$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_h) = & f_1^2 V(A) + f_2^2 V(c) + f_3^2 V(b) + 2f_1f_2 \text{COV}(A,c) + \\ & + 2f_1f_3 \text{COV}(A,b) + 2f_2f_3 \text{COV}(c,b) . \end{aligned}$$

Modelo para dois nutrientes

$$Y_h = A \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right]$$

Por diferenciação, tem-se:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial A} dA + \frac{\partial Y}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial Y}{\partial b_1} db_1 + \frac{\partial Y}{\partial c_2} dc_2 + \frac{\partial Y}{\partial b_2} db_2 ,$$

onde: $\frac{\partial Y}{\partial A} = f_1$; $\frac{\partial Y}{\partial c_1} = f_2$; $\frac{\partial Y}{\partial b_1} = f_3$; $\frac{\partial Y}{\partial c_2} = f_4$; $\frac{\partial Y}{\partial b_2} = f_5$, são as mesmas equações do item (3) do método modificado de Gauss-Newton.

Logo,

$$dY = f_1 dA + f_2 dc_1 + f_3 db_1 + f_4 dc_2 + f_5 db_2 ,$$

e, conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{Y}_h) &= f_1^2 \hat{V}(A) + f_2^2 \hat{V}(c_1) + f_3^2 \hat{V}(b_1) + f_4^2 \hat{V}(c_2) + \\ &\quad + f_5^2 \hat{V}(b_2) + 2f_1f_2 \text{COV}(A, c_1) + \dots + \\ &\quad + 2f_1f_5 \text{COV}(A, b_2) + 2f_2f_3 \text{COV}(c_1, b_1) + \\ &\quad + \dots + 2f_4f_5 \text{COV}(c_2, b_2) . \end{aligned}$$

Modelo para três nutrientes

$$Y_h = A \left[1 - 10^{-c_1(X_{1h}+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_{2h}+b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_{3h}+b_3)} \right]$$

Por diferenciação, tem-se:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial A} dA + \frac{\partial Y}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial Y}{\partial b_1} db_1 + \frac{\partial Y}{\partial c_2} dc_2 + \frac{\partial Y}{\partial b_2} db_2 + \\ + \frac{\partial Y}{\partial c_3} dc_3 + \frac{\partial Y}{\partial b_3} db_3 ,$$

$$\text{onde: } \frac{\partial Y}{\partial A} = f_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial c_1} = f_2, \quad \frac{\partial Y}{\partial b_1} = f_3, \quad \frac{\partial Y}{\partial c_2} = f_4, \quad \frac{\partial Y}{\partial b_2} = f_5, \quad \frac{\partial Y}{\partial c_3} = f_6,$$

$\frac{\partial Y}{\partial b_3} = f_7$, são as mesmas equações do item (3) do método modificado

de Gauss-Newton.

Logo,

$$dY = f_1 dA + f_2 dc_1 + f_3 db_1 + f_4 dc_2 + f_5 db_2 + \\ + f_6 dc_3 + f_7 db_3 ,$$

e, consequentemente:

$$\hat{V}(\hat{Y}_h) = f_1^2 \hat{V}(A) + f_2^2 \hat{V}(c_1) + f_3^2 \hat{V}(b_1) + f_4^2 \hat{V}(c_2) + \\ + f_5^2 \hat{V}(b_2) + f_6^2 \hat{V}(c_3) + f_7^2 \hat{V}(b_3) + \\ + 2f_1f_2 \text{COV}(A, c_1) + \dots + \\ + 2f_1f_7 \text{COV}(A, b_3) + 2f_2f_3 \text{COV}(c_1, b_1) + \\ + \dots + 2f_6f_7 \text{COV}(c_3, b_3) .$$

Os intervalos de confiança dos rendimentos são calculados usando-se a variância assintótica de $\hat{Y}_h$, determinada para cada um dos modelos, através da expressão

$$\hat{Y}_h \pm t \sqrt{V(\hat{Y}_h)} ,$$

onde t é o valor tabelado ao nível α de probabilidade e em função do número de graus de liberdade do resíduo.

4.2.2.5 - Análise de variância

A análise de variância, em todos os casos, foi realizada de acordo com o esquema apresentado em 4.2.1.5.

4.2.2.6 - Doses econômicas dos nutrientes

Modelo para um nutriente

Na obtenção da dose economicamente aconselhável, pela equação de Mitscherlich em sua forma para um nutriente, usou-se a fórmula apresentada por PIMENTEL GOMES (1953):

$$X^* = \frac{1}{c} \log \left[\frac{w A c}{t \log e} \right] - b ,$$

onde, w é o preço unitário do produto agrícola;

t é o preço unitário do nutriente;

A , b , c são os parâmetros da equação de Mitscherlich.

Modelo para dois nutrientes

A receita líquida, para o modelo com dois nutrientes, é dada pela função

$$L = w\hat{Y} - t_1 X_1 - t_2 X_2 - m \quad .$$

Diferenciando L em relação às variáveis independentes X_1 e X_2 , fica:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial L}{\partial X_2} dX_2 \quad ,$$

onde,

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = w \frac{\partial Y}{\partial X_1} - t_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial X_2} = w \frac{\partial Y}{\partial X_2} - t_2 \quad .$$

Fazendo $dL \equiv 0$, então $\frac{\partial L}{\partial X_1} = 0$ e $\frac{\partial L}{\partial X_2} = 0$, de maneira que obtém-se o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{t_1}{w} \\ \frac{\partial Y}{\partial X_2} = \frac{t_2}{w} \end{cases}$$

No modelo para dois nutrientes, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial X_1} &= A c_1 L10 \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right]_{10}^{-c_1(X_1+b_1)} \\ \frac{\partial Y}{\partial X_2} &= A c_2 L10 \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right]_{10}^{-c_2(X_2+b_2)} \quad . \end{aligned}$$

Logo, pode-se escrever o sistema

$$\begin{aligned} A c_1 L10 \left[1 - 10^{-c_2 (X_2 + b_2)} \right] 10^{-c_1 (X_1 + b_1)} &= \frac{t_1}{w} \\ A c_2 L10 \left[1 - 10^{-c_1 (X_1 + b_1)} \right] 10^{-c_2 (X_2 + b_2)} &= \frac{t_2}{w} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por $w 10^{c_1 (X_1 + b_1)} / t_1$, fica

$$\frac{w A c_1 L10 \left[1 - 10^{-c_2 (X_2 + b_2)} \right]}{t_1} = 10^{c_1 (X_1 + b_1)} .$$

Definindo $u_2 = 1 - 10^{-c_2 (X_2 + b_2)}$, e aplicando propriedade de logaritmos, se obtém

$$\log \left[\frac{w A c_1 u_2}{t_1 \log e} \right] = c_1 (X_1 + b_1) .$$

Desenvolvendo a igualdade, virá:

$$X_1^* = \frac{1}{c_1} \log \left[\frac{w A c_1 u_2}{t_1 \log e} \right] - b_1 .$$

Procedendo de modo análogo com a segunda equação do sistema, resulta a dose economicamente aconselhável para o outro nutriente

$$X_2^* = \frac{1}{c_2} \log \left[\frac{w A c_2 u_1}{t_2 \log e} \right] - b_2 ,$$

onde $u_1 = 1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)}$.

Modelo para três nutrientes

A partir da função da receita líquida, chega-se ao sistema de equações:

$$\begin{cases} A c_1 L 10 \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_3+b_3)} \right] 10^{-c_1(X_1+b_1)} = \frac{t_1}{w} \\ A c_2 L 10 \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_3+b_3)} \right] 10^{-c_2(X_2+b_2)} = \frac{t_2}{w} \\ A c_3 L 10 \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right] 10^{-c_3(X_3+b_3)} = \frac{t_3}{w} \end{cases}$$

Por operações análogas às feitas no caso anterior, resultam:

$$\begin{aligned} X_1^* &= \frac{1}{c_1} \log \left[\frac{w A c_1 u_2 u_3}{t_1 \log e} \right] - b_1 \quad ; \\ X_2^* &= \frac{1}{c_2} \log \left[\frac{w A c_2 u_1 u_3}{t_2 \log e} \right] - b_2 \quad ; \\ X_3^* &= \frac{1}{c_3} \log \left[\frac{w A c_3 u_1 u_2}{t_3 \log e} \right] - b_3 \quad ; \end{aligned}$$

sendo,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \quad , \\ u_2 &= 1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \quad , \\ u_3 &= 1 - 10^{-c_3(X_3+b_3)} \quad . \end{aligned}$$

4.2.2.7 - Estimativas das variâncias e intervalos de confiança das doses econômicas dos nutrientes

Uma aproximação da variância de X_1^* , nos três modelos, é obtida através da fórmula de Taylor, conforme segue.

Modelo para um nutriente

$$X^* = \frac{1}{c} \log \left[\frac{w A c}{t \log e} \right] - b \quad .$$

Fazendo $z = \frac{w A c}{t \log e}$ e diferenciando X^* , tem-se:

$$dX^* = \frac{\log e}{A c} dA + \frac{1}{c^2} \left(\log \frac{e}{z} \right) dc - db \quad ,$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} V(X^*) = & \frac{(\log e)^2}{A^2 c^2} V(A) + \frac{(\log \frac{e}{z})^2}{c^4} V(c) + V(b) + \\ & + \frac{2}{Ac^3} (\log e) \left(\log \frac{e}{z} \right) \text{COV}(A, c) - \\ & - \frac{2}{Ac} (\log e) \text{COV}(A, b) - \\ & - \frac{2}{Ac^2} \left(\log \frac{e}{z} \right) \text{COV}(c, b) \quad . \end{aligned}$$

Modelo para dois nutrientes

Em

$$X_1^* = \frac{1}{c_1} \log \left[\frac{w A c_1 u_2}{t_1 \log e} \right] - b_1 ,$$

fazendo $z_1 = \frac{w A c_1 u_2}{t_1 \log e}$ e diferenciando, tem-se

$$dX_1^* = \frac{\log e}{Ac_1} dA + \frac{1}{c_1^2} \left(\log \frac{e}{z_1} \right) dc_1 - db_1 + \frac{(X_2 + b_2)(1 - u_2)}{c_1 u_2} dc_2 + \\ + \frac{c_2(1 - u_2)}{c_1 u_2} db_2 .$$

Definindo:

$$g_{11} = \frac{\log e}{Ac_1} ; \quad g_{12} = \frac{1}{c_1^2} \log \frac{e}{z_1} ; \quad g_{13} = -1 ; \\ g_{14} = \frac{(X_2 + b_2)(1 - u_2)}{c_1 u_2} ; \quad g_{15} = \frac{c_2(1 - u_2)}{c_1 u_2} ,$$

consequentemente,

$$V(X_1^*) = g_{11}^2 V(A) + g_{12}^2 V(c_1) + \dots + g_{15}^2 V(b_2) + 2g_{11}g_{12} \text{COV}(A, c_1) + \\ + 2g_{11}g_{13} \text{COV}(A, b_1) + \dots + \\ + 2g_{14}g_{15} \text{COV}(c_2, b_2) .$$

De modo análogo, para o outro nutriente, obtém-se:

$$V(X_2^*) = g_{21}^2 V(A) + g_{22}^2 V(c_1) + \dots + g_{25}^2 V(b_2) + 2g_{21}g_{22} \text{COV}(A, c_1) + \\ + 2g_{21}g_{23} \text{COV}(A, b_1) + \dots + 2g_{24}g_{25} \text{COV}(c_2, b_2) ,$$

onde:

$$g_{21} = \frac{\log e}{Ac_2} ; \quad g_{22} = \frac{(X_1 + b_1)(1 - u_1)}{c_2 u_1} ; \quad g_{23} = \frac{c_1(1 - u_1)}{c_2 u_1} ;$$

$$g_{24} = \frac{1}{c_2^2} \log \frac{e}{z_2} ; \quad g_{25} = -1 ,$$

sendo $z_2 = \frac{w A c_2 u_1}{t_2 \log e} .$

Modelo para três nutrientes

Em

$$X_1^* = \frac{1}{c_1} \log \left[\frac{w A c_1 u_2 u_3}{t_1 \log e} \right] - b_1 ,$$

fazendo $z_1 = \frac{w A c_1 u_2 u_3}{t_1 \log e}$ e diferenciando, tem-se

$$dX_1^* = \frac{\log e}{Ac_1} dA + \frac{1}{c_1^2} \left(\log \frac{e}{z_1} \right) dc_1 - db_1 + \frac{(X_2 + b_2)(1 - u_2)}{c_1 u_2} dc_2 + \\ + \frac{c_2 (1 - u_2)}{c_1 u_2} db_2 + \frac{(X_3 + b_3)(1 - u_3)}{c_1 u_3} dc_3 + \\ + \frac{c_3 (1 - u_3)}{c_1 u_3} db_3 .$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \frac{\log e}{Ac_1} & ; & & g_{12} &= \frac{1}{c_1^2} \log \frac{e}{z_1} & ; & & g_{13} &= -1 & ; \\
 g_{14} &= \frac{(X_2 + b_2)(1 - u_2)}{c_1 u_2} & ; & & g_{15} &= \frac{c_2(1 - u_2)}{c_1 u_2} & ; \\
 g_{16} &= \frac{(X_3 + b_3)(1 - u_3)}{c_1 u_3} & ; & & g_{17} &= \frac{c_3(1 - u_3)}{c_1 u_3} & ,
 \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
 V(X_1^*) &= g_{11}^2 V(A) + g_{12}^2 V(c_1) + \dots + g_{17}^2 V(b_3) + 2g_{11}g_{12} \text{COV}(A, c_1) + \\
 &+ 2g_{11}g_{13} \text{COV}(A, b_1) + \dots + 2g_{16}g_{17} \text{COV}(c_3, b_3) .
 \end{aligned}$$

De modo análogo, para o segundo nutriente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 V(X_2^*) &= g_{21}^2 V(A) + g_{22}^2 V(c_1) + \dots + g_{27}^2 V(b_3) + 2g_{21}g_{22} \text{COV}(A, c_1) + \\
 &+ 2g_{21}g_{23} \text{COV}(A, b_1) + \dots + 2g_{26}g_{27} \text{COV}(c_3, b_3) ,
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 g_{21} &= \frac{\log e}{Ac_2} & ; & & g_{22} &= \frac{(X_1 + b_1)(1 - u_1)}{c_2 u_1} & ; \\
 g_{23} &= \frac{c_1(1 - u_1)}{c_2 u_1} & ; & & g_{24} &= \frac{1}{c_2^2} \log \frac{e}{z_2} & ; & & g_{25} &= -1 & ; \\
 g_{26} &= \frac{(X_3 + b_3)(1 - u_3)}{c_2 u_3} & ; & & g_{27} &= \frac{c_3(1 - u_3)}{c_2 u_3} & ;
 \end{aligned}$$

$$\text{sendo } z_2 = \frac{w A c_2 u_1 u_3}{t_2 \log e}.$$

Finalmente, para o terceiro nutriente, obtêm-se:

$$\begin{aligned} V(X_3^*) = & g_{31}^2 V(A) + g_{32}^2 V(c_1) + \dots + g_{37}^2 V(b_3) + 2g_{31}g_{32} \text{COV}(A, c_1) + \\ & + 2g_{31}g_{33} \text{COV}(A, b_1) + \dots + 2g_{36}g_{37} \text{COV}(c_3, b_3), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} g_{31} &= \frac{\log e}{Ac_3} & ; & & g_{32} &= \frac{(X_1 + b_1)(1 - u_1)}{c_3 u_1} & ; \\ g_{33} &= \frac{c_1(1 - u_1)}{c_3 u_1} & ; & & g_{34} &= \frac{(X_2 + b_2)(1 - u_2)}{c_3 u_2} & ; \\ g_{35} &= \frac{c_2(1 - u_2)}{c_3 u_2} & ; & & g_{36} &= \frac{1}{c_3^2} \log \frac{e}{z_3} & ; & & g_{37} &= -1 & ; \end{aligned}$$

$$\text{sendo } z_3 = \frac{w A c_3 u_1 u_2}{t_3 \log e}.$$

Os intervalos de confiança das doses economicamente aconselháveis dos nutrientes, nos modelos estudados, são calculados usando-se as respectivas variâncias estimadas, através de:

$$X_1^* \pm t \sqrt{V(X_1^*)},$$

onde t é o valor tabelado ao nível α de probabilidade e em função do número de graus de liberdade do resíduo.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 - Análise de Variância

O teste F, para todos os componentes da análise, nos diversos grupos de ensaios, foi feito tomando-se como resíduo a interação Locais x Tratamentos, com $6(r-1)$ graus de liberdade.

Dos 18 casos estudados, apenas sete apresentaram teste F significativo para o efeito linear do nitrogênio, dez para o do fósforo e nenhum para o do potássio. Não houve significância para os efeitos quadráticos em nenhum dos casos.

Os coeficientes de variação nos grupos de ensaios ficaram, em maior número, em torno de 17 a 30%; valores considerados altos, mesmo para ensaios de campo.

Na Tabela 3 do Apêndice, encontra-se um resumo das análises de variância efetuadas.

5.2 - Regressão Polinomial

5.2.1 - Estimativas dos parâmetros e seus intervalos de confiança

Os parâmetros da regressão polinomial apresentaram uma grande variação de valores nos diversos grupos de ensaios. Concordando com a literatura, seus intervalos de confiança — estimados ao nível de 95% de probabilidade — apresentaram uma grande amplitude. Muitas vezes, esses intervalos abrangeram de valores negativos a positivos, condição que, no caso dos parâmetros dos termos quadráticos, pode ocasionar reversão de tendência do ponto crítico da superfície de resposta.

As estimativas dos parâmetros, com seus respectivos intervalos de confiança, encontram-se na Tabela 4 do Apêndice.

5.2.2 - Estimativas dos rendimentos e seus intervalos de confiança

O modelo polinomial quadrático sem as interações possui sete parâmetros, número igual ao de tratamentos do fatorial 3^3 incompleto, cujas produções foram utilizadas no ajuste. Desse modo, não há desvios de regressão e as produções estimadas deverão coincidir com as produções médias dos tratamentos, nos grupos de ensaios. Confrontando as Tabelas 2 e 6 do Apêndice, vê-se que realmente houve essa concordância de valores.

Confirmando resultados da literatura, os intervalos de confiança dos rendimentos foram relativamente estreitos, embora os intervalos de confiança dos parâmetros tenham sido amplos.

Os resultados obtidos constam da Tabela 6 do Apêndice.

5.2.3 - Níveis ótimos de N, P e K

No estudo do ponto crítico da superfície de resposta, nos 18 grupos de ensaios, obtiveram-se os seguintes resultados:

Máximo: 5 casos

Sela: 12 casos

Mínimo: 1 caso

Dos 5 grupos que apresentaram o ponto crítico como sendo de máximo, em nenhum deles o teste t, aplicado aos coeficientes dos termos quadráticos da regressão, indicou que esses diferissem significativamente de zero, conforme mostra a Tabela 3 do Apêndice. Consequentemente, mesmo nesses 5 casos, não se tem garantia de que ocorram realmente máximos, o que impossibilita a recomendação de doses economicamente aconselháveis dos nutrientes.

Na Tabela 8 do Apêndice, estão representadas as supostas doses econômicas e seus respectivos intervalos de confiança. Nota-se que somente um pequeno número de intervalos estimados apresentou limite inferior positivo. Esses intervalos geralmente foram obtidos nos casos em que os coeficientes dos termos quadráticos, dos

respectivos nutrientes, eram negativos e estiveram próximos de diferirem significativamente de zero. Isso indica a necessidade dos coeficientes dos termos quadráticos serem significativamente menores do que zero, para que se possa ter doses econômicas confiáveis.

Foram encontradas algumas doses econômicas negativas. No sentido agrônomo, a existência de doses econômicas negativas exprime a não conveniência de adubação, sendo, então, essas doses indicadas como zero.

5.3 - Equações do Tipo Mitscherlich para Um, Dois ou Três Nutrientes

A escolha do modelo ajustado, em cada um dos 18 grupos de ensaios, realizou-se de acordo com o número de nutrientes que satisfizeram as condições discutidas em 4.2.2.1.2, resultando na distribuição seguinte: o modelo para os três nutrientes estudados conjuntamente só pôde ser ajustado em um grupo; o modelo para dois nutrientes foi possível em dois grupos (sempre nitrogênio e fósforo); o modelo para um nutriente foi possível em 11 grupos (o nitrogênio em 5, o fósforo em 4 e o potássio em 3); e não foi ajustado nenhum dos modelos em três dos grupos.

5.3.1 - Estimativas dos parâmetros e seus intervalos de confiança

As estimativas dos parâmetros, com os respectivos intervalos de confiança ao nível de 95% de probabilidade, constam da

Tabela 5 do Apêndice. Para os casos em que foram ajustadas equações para dois ou três nutrientes, o parâmetro A representa a produção máxima teórica possível, relativa aos nutrientes em conjunto.

Pode ser observada a grande variabilidade das estimativas dos parâmetros b e c de um grupo para outro. Nota-se, também, que em todos os casos os intervalos de confiança desses parâmetros foram bastante amplos e apresentaram limite inferior negativo.

5.3.2 - Estimativas dos rendimentos e seus intervalos de confiança

Para os três modelos, o número de parâmetros é igual ao de tratamentos envolvidos no ajuste, o que determina estimativas de rendimentos coincidentes com as produções observadas.

Consoante o modelo ajustado em cada grupo, de acordo com 4.2.2.4 foram calculados os intervalos de confiança para os rendimentos dos tratamentos utilizados no ajuste, obtendo-se os resultados indicados na Tabela 7 do Apêndice. Verifica-se que esses intervalos foram relativamente estreitos, embora os intervalos de confiança dos parâmetros tenham sido amplos, concordando, portanto, com a literatura relacionada à regressão polinomial.

Confrontando as Tabelas 6 e 7 do Apêndice, constata-se que os intervalos de confiança dos rendimentos obtidos através da regressão polinomial são idênticos aos estimados usando-se os modelos de Mitscherlich para um, dois ou três nutrientes. Visto que os primeiros foram calculados usando-se a fórmula $\hat{V}(\hat{y}) = s^2/r$, e os

segundos em função das estimativas das variâncias e covariâncias dos parâmetros estimados, dos respectivos modelos, conclui-se que, tanto essas variâncias e covariâncias, determinadas conforme 4.2.2.2, como as variâncias dos rendimentos, estão bem estimadas, embora as fórmulas dessas últimas hajam sido obtidas de modo aproximado através da aplicação da fórmula de Taylor.

5.3.3 - Níveis ótimos de N, P e K

Os resultados obtidos para as doses econômicas dos nutrientes e seus respectivos intervalos de confiança, em todos os casos em que foi possível o cálculo matemático, constam das Tabelas 8 a 11 do Apêndice.

Houve uma grande discrepância entre as estimativas das doses econômicas nos diferentes grupos: a dose econômica de nitrogênio, considerando apenas os casos em que foram comprovados efeitos lineares significativos do mesmo, variou de 52 até 216 kg/ha de N, a de fósforo, sob a mesma condição, variou de 43 até 190 kg/ha de P_2O_5 . Quanto ao potássio, não foi comprovado efeito significativo em nenhum dos casos, e, conseqüentemente, a recomendação seria não adubar, embora matematicamente tenham sido determinados valores que ficaram entre -6 e 48,

Os intervalos de confiança foram bastante amplos, com limite inferior sempre negativo. Essa imprecisão seria devida ao reduzido número de ensaios nos grupos, ou, ainda, inerente às fórmu-

las usadas para estimar as variâncias das doses econômicas. Nesses intervalos, os limites inferiores devem ser entendidos como zero.

Analizando mais detalhadamente o grupo 1.1 — que engloba todos os ensaios; que foi o único a possibilitar o ajuste do modelo de Mitscherlich para três nutrientes; e onde a análise de variância comprovou efeitos lineares do nitrogênio e do fósforo altamente significativos — é possível, pelo exame da Tabela 9 do Apêndice, fazer as seguintes observações, tendo em conta os cortes efetuados na superfície:

- A dose econômica de N aumentou consideravelmente com a elevação do nível fixado de fósforo e permaneceu praticamente constante com a elevação do nível de potássio;

- A dose econômica de P_2O_5 cresceu moderadamente com a elevação do nível fixado de nitrogênio, permanecendo constante com a elevação do nível de potássio;

- A dose econômica de K_2O foi negativa para todos os níveis fixados de nitrogênio e de fósforo, apresentando valores entre -12 e -3;

- As doses econômicas de nitrogênio e de fósforo superaram os respectivos níveis máximos usados nos ensaios, principalmente as de nitrogênio quando na presença de fósforo.

5.3.4 - Comparação entre as equações para um e para três nutrientes

Como estudo complementar, para o grupo 1.1 foram também ajustadas equações de Mitscherlich para os nutrientes isoladamente, a fim de possibilitar um melhor conhecimento sobre a qualidade da equação proposta por BAULE (1918). Os resultados obtidos constam da Tabela 12 do Apêndice.

Feito o ajustamento dessas equações, constatou-se que os parâmetros b e c — relativos ao nitrogênio, fósforo e potássio — coincidiam com os correspondentes parâmetros do modelo para três nutrientes, o mesmo ocorrendo com os respectivos intervalos de confiança, e ainda com as estimativas dos rendimentos e suas variâncias.

As doses econômicas de cada nutriente, e suas respectivas variâncias, calculadas através das equações individuais, apresentaram valores iguais às calculadas através do modelo de BAULE, quando fixados os dois outros nutrientes em suas respectivas doses padrões. Isso é explicado pelo fato dos dados experimentais, usados no ajustamento, serem oriundos de fatoriais 3^3 incompletos.

5.4 - Confronto dos Resultados dos Níveis Ótimos de Nutrientes nos Modelos Estudados

Surgiram — estimadas tanto pelo modelo polinomial, como pelos assintóticos — doses econômicas, para o nitrogênio e o fósforo, que superaram largamente os níveis máximos usados nos ensaios. Como apenas os efeitos lineares desses nutrientes foram significativos, é admissível supor que a amplitude dos níveis de N e P escolhidos não abrangeu em seu interior o máximo da função.

Nessas condições, seria mais válido o estudo econômico através da regressão assintótica de Mitscherlich, pois esta é uma função que não tem máximo, porém possibilita o estudo da receita máxima.

As doses econômicas, obtidas através de todos os modelos, foram bastante discordantes de um grupo para outro, o que dificulta uma recomendação de adubação. Em um mesmo grupo, quando as doses econômicas estiveram dentro dos intervalos estudados, houve uma relativa concordância entre os modelos estudados.

6. CONCLUSÕES

a) Concordando com a literatura, para todos os modelos e em todos os grupos, foram obtidos intervalos de confiança bastante amplos para os parâmetros e intervalos de confiança relativamente estreitos para os rendimentos.

b) O método modificado de Gauss-Newton, desenvolvido por HARTLEY (1961), estima com boa precisão os parâmetros (e suas respectivas variâncias) dos modelos de Mitscherlich para um, dois ou três nutrientes, quando estes são ajustados a dados de ensaios fatoriais 3^3 incompletos.

c) Quando existirem indicações de que as interações entre os nutrientes são significativas, sempre que possível deve-se optar pelo emprego do modelo proposto por BAULE (1918), pois ele leva em conta essas interações.

d) Quando é feito o estudo econômico através da equação de Mitscherlich em sua forma tradicional para um nutriente, usando-se da dos de ensaios fatoriais 3^3 incompletos, o nível ótimo de cada nutriente coincide com o obtido através da equação proposta por BAULE (1918), quando fixados os dois outros nutrientes em suas respectivas doses padrões.

e) Os níveis ótimos dos nutrientes foram bastante discrepantes de um grupo de ensaios para outro, embora dentro de um mesmo grupo tenha havido uma relativa concordância entre os modelos estudados, quando esses níveis estiveram dentro dos intervalos usados nos ensaios.

f) Para que as doses econômicas determinadas através da regres são polinomial sejam confiáveis, é necessário que os coeficientes dos termos quadráticos da equação sejam significativamente menores do que zero.

g) Nas condições presentes, onde a análise estatística apenas comprovou efeitos lineares de nutrientes, indicando que a amplitude dos níveis usados não abrangeu em seu interior o máximo da função de produção, seria mais recomendável o estudo econômico através da regressão assintótica de Mitscherlich.

h) Os intervalos de confiança para as doses econômicas obtidas através dos modelos tipo Mitscherlich foram bastante amplos, com li mite inferior sempre negativo. Essa imprecisão seria devida ao redu

zido número de ensaios nos grupos, ou, ainda, inerente às fórmulas usadas para estimar as variâncias das doses econômicas.

i) Há indícios de que a cultura da mandioca, no Estado do Ceará, responde à adubação com nitrogênio e fósforo e de que as doses economicamente aconselháveis sejam maiores do que os níveis máximos usados nos ensaios cujas produções foram analisadas neste trabalho.

7. SUMMARY

In the last years, the study of nutrients optimum levels has been greatly emphasized in order to render the most in liquid profits in agricultural yields. In this work several mathematical models have been tested to find which will represent best the production function.

Searching for an advisable formula in economical fertilization on manioc culture, the present work has been carried out in the State of Ceará, from the data of 22 incomplete 3^3 factorial experiments of NPK fertilization from the EMBRATER/FAO/MA project, installed in the 1972/76 period.

To the experimental data were adjusted polynomial regression and asymptotic regression.

These models were:

$$Y = a_0 + a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 \quad ;$$

$$Y = A \left[1 - 10^{-c(X+b)} \right] \quad ;$$

$$Y = A \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right] \quad ;$$

$$Y = A \left[1 - 10^{-c_1(X_1+b_1)} \right] \left[1 - 10^{-c_2(X_2+b_2)} \right] \left[1 - 10^{-c_3(X_3+b_3)} \right] \quad .$$

In the asymptotic models adjustment, Gauss-Newton modified method developed by HARTLEY (1961), was used.

In order to carry out a stricter study, trials were combined in several groups, according to the available information.

The groups were organized in the following ways:

- One group with 22 trials;
- Three groups gathered by physiographic regions;
- Five groups gathered by counties;
- Two groups gathered by soil texture;
- Three groups gathered by vegetation;
- Four groups gathered by growing season.

During the study the following topics were focused:

- a) Estimates of the parameters and their respective confidence intervals;
- b) Estimates of the yields and their respective confidence intervals;

- c) The optimum levels of the nutrients and their respective confidence intervals;
- d) Cuts in the response surface, when possible;
- e) Nutrients optimum levels comparisons in the studied models.

The main conclusions were:

- a) Statistical analysis showed only nutrients linear effect. In this condition, the economic study is indicated through asymptotic regression;
- b) Nutrients optimum levels were greatly discrepant from one trials group to another, making it difficult to recommend a fertilization formula;
- c) The confidence intervals for economic doses were, mostly very wide. In the asymptotic regression they always present negative inferior limit;
- d) There are evidences of response to fertilization with nitrogen and phosphorus and that the economically advisable dosage is higher than the highest levels used in the trial analysed in this work.

8. BIBLIOGRAFIA

- BALBA, A.M., 1960. Phosphorus and Nitrogen Uptake as Expressed by a Mitscherlich-type Equation. 7th International Congress of Soil Science, Madison, 3: 154-160.
- BAULE, B., 1918. Zu Mitscherlich Gesetz der Physiologischen Beziehungen. Landwirtschaftlich Jahrbucher, Berlim, 51: 363-385.
- BOX, G.E.P. e K.B. WILSON, 1951. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. J. Royal Statist. Soc. - Série B, Manchester, 13: 1-45.
- CAMPOS, H., 1967. Aspectos da Aplicação das Superfícies de Resposta a Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 82 pp. (Tese de Livre-Docência).
- CAMPOS, H. e P.F.C. de ARAUJO, 1971. Aspectos Econômicos da Adubação em Milho. Piracicaba, ESALQ/USP, 41 pp. (Mimeografado).

- CONAGIN, A. e J.P.N. JORGE, 1977. Delineamentos (1/5)(5³). Bragantia, Campinas, 36: 23-58.
- CORTARELLI, A., 1973. Estudo da Curva de Crescimento de Machos da Raça Nelore, Através de Quatro Modelos Estocásticos. Jaboticabal, FMVAR/UEJMF, 179 pp. (Tese de Doutorado).
- COSTA, R.A. da, 1977. Funções de Produção Ajustadas a Ensaios Fatoriais 3³ de Adubação de Arroz. Piracicaba, ESALQ/USP, 80 pp. (Dissertação de Mestrado).
- D'AULÍSIO, M. de B.G., 1973. Influência dos Erros Experimentais Sobre as Recomendações de Adubação Obtidas pela Lei de Mitscherlich. Botucatu, FCMBB/UEJMF, 71 pp. (Tese de Doutorado).
- GALLANT, A.R., 1975. Nonlinear Regression. Am. Statistn., Filadelfia, 29:73-81.
- HARTLEY, H.O., 1961. The Modified Gauss-Newton Method for the Fitting of Non-Linear Regression Functions by Least Squares. Technometrics, 3: 269-280.
- HEADY, E.O. e J.T. PESEK, 1954. A Fertilizer Production Surface with Specification of Economic Optima for Corn Grown on Calcareous Ida Silt Loam. J. Farm. of Econ., 36: 466-482.
- IBACH, D.B. e S.W. MANDUM, 1953. Determining Profitable Use of Fertilizer. F.M. 105 U.S.D.A. (Original não consultado; extraído de BALBA, A.M.).
- LIMA, A.R. da C., 1979. Ajuste da Equação de Mitscherlich Proposta por Baule a Dados de Ensaios Fatoriais 3³ Incompletos. Piracicaba, ESALQ/USP, 18 pp. (Seminário apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica).

- MEADE, R. e D.J. PIKE, 1975. A Review of Response Surface Methodology from a Biometric Viewpoint. Biometrics, Raleigh, 31: 803-851.
- MELO, F.I.O., 1976. Aplicação do Método Modificado de Gauss-Newton para Estimar os Parâmetros da Equação de Mitscherlich. Piracicaba, ESALQ/USP, 74 pp. (Dissertação de Mestrado).
- MORAES, R.S., 1969. Superfície Polinomial de Resposta num Ensaio de Adubação com Níveis Não-Equidistantes. Piracicaba, ESALQ/USP, 58 pp. (Tese de Doutorado).
- MYERS, R.H., 1971. Response Surface Methodology. Boston, Allyn and Bacon, Inc., 245 pp.
- PIMENTEL GOMES, F. e E. MALAVOLTA, 1949a. Considerações Matemáticas sobre a Lei de Mitscherlich. Boletim nº 3, E.S.A. "Luiz de Queiroz", Piracicaba, 24 pp.
- PIMENTEL GOMES, F. e E. MALAVOLTA, 1949b. Aspectos Matemáticos e Estatísticos da Lei de Mitscherlich. Anais E.S.A. "Luiz de Queiroz", Piracicaba, 6: 193-229.
- PIMENTEL GOMES, F., 1953. The Use of Mitscherlich's Regression Law in the Analysis of Experiments with Fertilizers. Biometrics, Raleigh, 9: 498-516.
- PIMENTEL GOMES, F. e C.P. ABREU, 1959. Sobre uma Fórmula para o Cálculo da Dose Mais Econômica de Adubo. Anais E.S.A. "Luiz de Queiroz", Piracicaba, 16: 191-198.
- PIMENTEL GOMES, F., 1961. On a Formula for the Estimation of the Optimum Dressing of a Fertilizer. Biometrics, Raleigh, 17: 492-494.

- PIMENTEL GOMES, F., 1969. Novos Aspectos do Estudo Econômico de Ensaio de Adubação. Fertilidade, 34: 3-9.
- PIMENTEL GOMES, F., 1976. Justificação do Método Usado na Análise dos Ensaio da FAO. Piracicaba, ESALQ/USP. (Mimeografado).
- RAO, C.R., 1952. Advanced Statistical Methods in Biometric Research. Nova York. John Wiley and Sons, Inc., 390 pp.
- RIBOLDI, J., 1978. Ajustamento de Duas Superfícies de Resposta Usadas em Ensaio de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 81 pp. (Dissertação de Mestrado).
- SILVA, M.A.P. da, 1978. Segunda Aproximação de Mitscherlich, $y = A \left[1 - 10^{-c(x+b)} \right] 10^{-k(x+b)^2}$, aplicada à Adubação Mineral. Piracicaba, ESALQ/USP, 96 pp. (Dissertação de Mestrado).
- SILVEIRA JÚNIOR, P., 1976. Estudo de Alguns Modelos Exponenciais de Crescimento de Bovinos da Raça Ibagé. Piracicaba, ESALQ/USP, 174 pp. (Dissertação de Mestrado).
- STEVENS, W.L., 1951. Asymptotic Regression. Biometrics, Raleigh, 7: 247-267.
- TEJEDA, H., 1969. Consideraciones sobre Diseños Experimentales en la Investigación de Campo en Fertilidad de Suelo. In: Reynaert, E.E., 1969. La Investigación de Fertilidad de Suelos para la Producción Agrícola en la Zona Templada. Montivideo, IICA, Zona Sur. p. 171-182.
- VIEIRA, S., 1970. Aspectos das Funções de Produção Ajustadas aos Ensaio Fatoriais 3^3 de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 165 pp. (Tese de Doutorado).

VIEIRA, S. e H. CAMPOS, 1971. Fórmulas para a Determinação das Variâncias das Estimativas dos Rendimentos das Culturas e das Doses Econômicas de Nutrientes, para a Lei de Mitscherlich. Ciência e Cultura, São Paulo, 23: 657-660.

WISHART, J., 1938. Growth Rate Determination in Nutrition Studies with the Bacon Pig, and Their Analysis. Biometrika, Londres, 30: 16-28.

9. APENDICE

Tabela 1 - Produções, em t/ha, referentes a 22 ensaios fatoriais 3^3 incompletos de adubação NPK em mandioca, instalados no Estado do Ceará, no período 1972/76.

Nº DO ENSAIO	TRATAMENTO						
	011	101	110	111	112	121	211
1	13,96	1,46	11,04	11,88	14,58	14,79	12,71
2	17,71	11,46	10,42	19,79	8,33	18,13	20,83
3	15,00	16,25	4,58	16,67	25,42	36,17	24,79
4	22,29	30,21	14,54	23,13	22,92	22,29	14,54
5	18,75	26,50	23,64	25,29	24,67	30,58	23,33
6	13,08	9,08	24,58	19,08	20,08	21,67	19,17
7	6,25	5,83	10,00	14,58	8,75	10,00	15,88
8	32,00	21,25	27,33	31,25	27,33	29,33	32,67
9	12,48	14,98	14,98	9,98	15,39	14,56	11,23
10	17,01	9,66	18,27	26,25	24,15	27,93	34,02
11	4,58	4,17	7,50	5,00	5,83	6,25	5,00
12	30,42	17,08	44,38	30,42	31,25	32,71	31,25
13	18,30	24,96	41,60	22,46	27,87	32,86	26,62
14	27,29	17,29	18,75	23,33	20,83	33,13	33,13
15	22,88	23,30	33,28	22,05	26,21	21,63	31,20
16	15,00	17,21	16,67	15,67	17,92	20,67	18,75
17	15,33	15,00	13,66	16,50	15,21	16,00	15,83
18	22,88	23,30	22,05	22,88	22,88	21,22	25,38
19	4,16	5,41	4,99	6,66	7,90	7,07	7,50
20	25,83	21,67	30,00	22,08	27,08	23,92	28,75
21	14,58	10,42	16,46	23,54	19,38	20,84	17,96
22	12,00	15,00	16,50	20,00	15,00	20,50	20,00

Tabela 2 - Produções médias dos tratamentos, em t/ha, nos grupos de ensaios.

GRUPO	TRATAMENTO						
	011	101	110	111	112	121	211
1.1	17,35	15,52	19,33	19,48	19,50	21,92	21,39
2.1	18,13	15,57	20,33	20,08	20,24	23,47	22,42
2.2	14,34	15,23	14,34	15,43	15,98	16,24	16,87
2.3	17,47	15,70	20,99	21,87	20,49	21,75	22,24
3.1	17,24	14,84	10,15	17,87	17,81	22,85	18,22
3.2	17,52	15,67	21,39	22,55	20,21	22,90	22,76
3.3	16,12	11,47	21,28	17,91	19,16	20,36	20,38
3.4	14,34	15,23	14,34	15,43	15,98	16,24	16,87
3.5	20,21	16,05	23,23	22,81	23,23	22,38	23,36
4.1	16,94	14,78	19,36	19,51	19,91	22,62	21,09
4.2	17,73	16,74	15,70	18,71	16,09	19,01	20,20
5.1	18,09	14,78	18,05	18,87	20,24	23,22	21,54
5.2	14,22	15,91	19,65	17,89	18,16	20,01	19,06
5.3	16,15	10,94	13,44	21,67	13,86	19,48	19,40
6.1	15,79	14,29	18,64	18,92	20,06	24,59	21,59
6.2	15,17	16,11	15,17	16,09	16,56	18,34	17,29
6.3	13,90	16,19	12,89	16,81	15,61	15,51	15,83
6.4	21,20	16,27	24,27	22,21	21,61	23,54	24,99

Tabela 3 - Estimativas dos desvios padrões, coeficientes de variação, valores do teste F relativos aos efeitos lineares e quadráticos dos nutrientes, e valores do teste t referentes aos coeficientes dos termos quadráticos da regressão polinomial, nos grupos de ensaios.

GRUPO	Desvio Padrão (t/ha)	C.V. (%)	Teste F				Teste t		
			N _L	P _L	K _L	Efeitos quadrá- ticos	a ₁₁	a ₂₂	a ₃₃
1.1	4,60	23,92	8,48**	21,31**	0,015	0,237	-0,088	-0,629	-0,052
2.1	5,35	26,69	4,83*	16,38**	0,001	0,136	0,119	-0,331	0,121
2.2	1,23	7,92	8,44**	1,35	3,547	0,325	0,234	0,409	-0,355
2.3	3,21	15,99	3,31	5,34*	0,036	0,761	-0,889	-1,386	-0,500
3.1	6,26	36,84	0,05	3,26	2,998	0,913	-0,036	0,254	-1,014
3.2	3,59	17,59	4,26	8,10*	0,215	0,782	-1,094	-1,486	-0,796
3.3	5,41	29,97	1,24	5,41*	0,309	0,847	0,101	-0,602	0,696
3.4	1,23	7,92	8,44**	1,35	3,547	0,325	0,234	0,409	-0,355
3.5	3,80	17,59	0,69	2,78	0,000	0,841	-0,312	-1,092	0,127
4.1	4,89	25,51	6,12*	21,87**	0,106	0,244	-0,337	-0,554	0,088
4.2	2,61	14,71	1,79	1,50	0,043	2,112	0,158	-0,523	-1,762
5.1	5,52	28,65	1,96	11,72**	0,788	0,100	0,439	0,059	0,128
5.2	3,50	19,60	7,65**	5,49*	0,724	1,129	-0,826	0,046	0,669
5.3	3,65	22,25	0,79	5,47	0,012	2,469	-1,231	-2,039	-2,534*
6.1	5,60	29,28	4,29*	13,51**	0,258	0,061	-0,098	0,212	0,175
6.2	1,38	8,44	2,36	2,60	1,024	0,722	0,118	0,947	-0,183
6.3	3,68	24,22	0,55	0,16	1,089	0,497	-0,866	-0,508	-1,134
6.4	4,08	18,54	3,46	12,67**	1,699	2,080	0,502	-1,302	0,416

Tabela 4 - Estimativas dos parâmetros e respectivos intervalos de confiança, ao nível de 95% de probabilidade, das equações polinomiais de superfície, com variáveis centradas, nos grupos de ensaios.

GRUPO	$\hat{a}_0$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{22}$	$\hat{a}_{33}$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$
1.1	18,480	-2,482	-3,131	-2,439	0,645	1,827	-1,287
	19,213	-0,106	-0,755	-0,063	2,017	3,199	0,085
	19,946	2,270	1,621	2,313	3,389	4,571	1,457
2.1	18,995	-3,164	-3,926	-3,160	0,203	2,009	-1,986
	20,034	0,202	-0,560	0,206	2,146	3,952	-0,043
	21,073	3,568	2,806	3,572	4,089	5,895	1,900
2.2	15,002	-1,403	-1,272	-1,847	0,350	-0,406	-0,094
	15,489	0,176	0,307	-0,268	1,261	0,505	0,617
	15,976	1,755	1,886	1,311	2,172	1,416	1,728
2.3	18,545	-6,969	-8,097	-6,086	-0,474	0,171	-3,107
	20,072	-2,020	-3,148	-1,137	2,383	3,028	-0,250
	21,599	2,929	1,801	3,812	5,240	5,885	2,607
3.1	14,511	-8,192	-7,076	-11,942	-4,160	-0,649	-0,815
	16,996	-0,139	0,977	-3,889	0,489	4,000	3,834
	19,481	7,914	9,030	4,164	5,138	8,649	8,483
3.2	19,001	-7,030	-7,891	-6,373	-0,047	0,947	-3,258
	20,427	-2,409	-3,270	-1,752	2,621	3,615	-0,590
	21,853	2,212	1,351	2,869	5,289	6,283	2,078

Tabela 4 - {continuação}

GRUPO	$\hat{a}_0$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{22}$	$\hat{a}_{33}$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$
3.3	15,952	-6,616	-8,947	-4,646	-1,888	0,431	-5,078
	18,097	0,336	-1,995	2,306	2,126	4,445	-1,064
	20,242	7,288	4,957	9,258	6,140	8,459	2,950
3.4	15,002	-1,403	-1,272	-1,847	0,350	-0,406	-0,094
	15,489	0,176	0,307	-0,268	1,261	0,505	0,817
	15,976	1,755	1,886	1,311	2,172	1,416	1,728
3.5	19,119	-9,095	-11,663	-7,645	-3,081	-1,489	-4,656
	21,608	-1,030	-3,598	0,420	1,575	3,167	0,000
	24,097	7,035	4,467	8,485	6,231	7,823	4,656
4.1	18,284	-3,367	-3,682	-2,748	0,415	2,262	-1,388
	19,172	-0,490	-0,805	0,129	2,076	3,923	0,273
	20,060	2,387	2,072	3,006	3,737	5,584	1,934
4.2	16,703	-3,103	-4,193	-6,175	-0,704	-0,807	-1,745
	17,739	0,254	-0,836	-2,818	1,234	1,131	0,193
	18,775	3,611	2,521	0,539	3,172	3,069	2,131
5.1	17,939	-3,335	-4,148	-3,999	-0,740	1,756	-1,373
	19,258	0,940	0,127	0,276	1,728	4,224	1,095
	20,577	5,215	4,402	4,551	4,196	6,692	3,563
5.2	16,898	-4,312	-2,990	-2,046	0,652	0,282	-2,511
	17,842	-1,252	0,070	1,014	2,419	2,049	-0,744
	18,786	1,808	3,130	4,074	4,186	3,816	1,023

Tabela 4 - (continuação)

GRUPO	$\hat{a}_0$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{22}$	$\hat{a}_{33}$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$
5.3	14,026	-11,647	-14,205	-15,770	-2,850	-0,202	-4,267
	16,418	-3,895	-6,453	-8,018	1,625	4,273	0,208
	18,810	3,857	1,299	-0,266	6,100	8,748	4,683
6.1	17,614	-5,137	-4,384	-4,474	-0,072	2,317	-2,118
	19,126	-0,238	0,515	0,425	2,901	5,146	0,711
	20,638	4,661	5,414	5,324	5,730	7,975	3,540
6.2	15,481	-2,793	-1,800	-3,155	-0,632	-0,580	-0,995
	16,387	0,142	1,135	-0,220	1,063	1,115	0,700
	17,293	3,077	4,070	2,715	2,758	2,810	2,395
6.3	13,740	-6,687	-5,880	-7,293	-1,768	-3,255	-1,375
	15,200	-1,952	-1,146	-2,559	0,965	-0,521	1,359
	16,660	2,781	3,588	2,175	3,698	2,213	4,093
6.4	20,912	-2,683	-5,874	-2,835	-0,163	1,571	-3,393
	22,014	0,887	-2,303	0,736	1,899	3,633	-1,331
	23,116	4,458	1,268	4,306	3,961	5,695	0,731

Tabela 5 - Estimativas dos parâmetros e respectivos intervalos de confiança, ao nível de 95% de probabilidade, das equações do tipo Mitscherlich, para um, dois ou três nutrientes, nos grupos de ensaios.

GRUPO	Â	Nitrogênio		Fósforo		Potássio	
		$\hat{\delta}$	$\hat{c}$	$\hat{\delta}$	$\hat{c}$	$\hat{\delta}$	$\hat{c}$
1.1	-560,40	-1431,53	-0,0246	-98,08	-0,0096	-4972,64	-1,9036
	51,39	226,95	0,0011	95,16	0,0042	74,51	0,0274
	663,18	1885,43	0,0268	288,40	0,0180	5121,66	1,9584
2.1	-50,54			-154,94	-0,0158		
	33,73			86,70	0,0031		
	118,00			328,34	0,0220		
2.2	8,87					-366,67	-0,0539
	16,54					89,08	0,0098
	24,21					544,83	0,0735
2.3	17,40	-128,84	-0,1511				
	22,27	24,61	0,0271				
	27,14	178,06	0,2053				
3.1	-32,78	-8659,22	-0,3880				
	18,66	176,52	0,0063				
	70,10	9012,26	0,4006				
3.2	15,60	-126,73	-0,2442	-78,45	-0,1118		
	23,14	18,54	0,0344	19,22	0,0260		
	30,68	163,81	0,3130	116,89	0,1638		

Tabela 5 - (continuação)

GRUPO	A	Nitrogênio		Fósforo		Potássio	
		6	ê	6	ê	6	ê
3.3	3,17			-87,24	-0,0267		
	21,87			38,48	0,0084		
	40,57			164,20	0,0435		
3.4	8,87					-366,67	-0,0539
	16,54					89,08	0,0098
	24,21					544,83	0,0735
3.5	12,08	-507,48	-0,1907				
	23,50	50,24	0,0170				
	34,92	607,96	0,2247				
4.1	-41,00	-323,08	-0,0271	-92,58	-0,0099		
	34,75	104,61	0,0052	87,03	0,0036		
	110,50	532,30	0,0375	266,64	0,0171		
4.2	15,10			-332,70	-0,1071		
	19,06			55,55	0,0165		
	23,02			443,80	0,1401		
5.1	-	-	-	-	-	-	-
5.2	13,21	-73,81	-0,0267				
	19,60	45,12	0,0124				
	25,99	164,05	0,0515				
5.3	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 5 - (continuação)

GRUPO	Â	Nitrogênio		Fósforo		Potássio	
		δ	ê	δ	ê	δ	ê
6.1	-327,80	-888,44	-0,0352				
	36,47	137,85	0,0018				
	400,74	1164,14	0,0388				
6.2	1,68					-1062,28	-0,1275
	17,09					100,72	0,0094
	32,50					1263,72	0,1463
6.3	-	-	-	-	-	-	-
6.4	18,61			-40,33	-0,0174		
	23,92			38,11	0,0130		
	29,23			116,55	0,0434		

Tabela 6 - Estimativas, em t/ha, e intervalo de confiança dos rendimentos, ao nível de 95% de probabilidade, nos grupos de ensaios, relativos ao modelo polinomial.

GRUPO	TRATAMENTO						
	011	101	110	111	112	121	211
1.1	15,41	13,58	17,39	17,54	17,56	19,98	19,45
	17,35	15,52	19,33	19,48	19,50	21,92	21,39
	19,29	17,46	21,27	21,42	21,44	23,86	23,33
2.1	15,38	12,82	17,58	17,33	17,49	20,72	19,67
	18,13	15,57	20,33	20,08	20,24	23,47	22,42
	20,88	18,32	23,08	22,83	22,99	26,22	25,17
2.2	13,05	13,94	13,05	14,14	14,69	14,95	15,57
	14,34	15,23	14,34	15,43	15,98	16,24	16,86
	15,63	16,52	15,63	16,72	17,27	17,53	18,15
2.3	13,43	11,66	16,95	17,83	16,45	17,71	18,20
	17,47	15,70	20,99	21,87	20,49	21,75	22,24
	21,51	19,74	25,03	25,91	24,53	25,79	26,28
3.1	10,67	8,27	3,57	11,30	11,24	16,27	11,65
	17,24	14,84	10,14	17,87	17,81	22,84	18,22
	23,81	21,41	16,71	24,44	24,38	29,41	24,79
3.2	13,75	11,90	17,62	18,78	16,44	19,13	18,99
	17,52	15,67	21,39	22,55	20,21	22,90	22,76
	21,29	19,44	25,16	26,32	23,98	26,67	26,53

Tabela 6 - (continuação)

GRUPO	TRATAMENTO						
	011	101	110	111	112	121	211
3.3	10,44	5,79	15,60	12,23	13,47	14,68	14,69
	16,12	11,47	21,28	17,91	19,15	20,36	20,37
	21,80	17,15	26,96	23,59	24,83	26,04	26,05
3.4	13,05	13,94	13,05	14,14	14,69	14,95	15,57
	14,34	15,23	14,34	15,43	15,98	16,24	16,86
	15,63	16,52	15,63	16,72	17,27	17,53	18,15
3.5	13,63	9,45	16,64	16,22	16,64	15,79	16,76
	20,21	16,04	23,23	22,81	23,23	22,38	23,35
	26,79	22,63	29,82	29,40	29,82	28,97	29,94
4.1	14,59	12,43	17,01	17,16	17,56	20,27	18,74
	16,94	14,78	19,36	19,51	19,91	22,62	21,09
	19,29	17,13	21,71	21,86	22,26	24,97	23,44
4.2	14,99	14,00	12,96	15,97	13,34	16,27	17,46
	17,73	16,74	15,70	18,71	16,08	19,01	20,20
	20,47	19,48	18,44	21,45	18,82	21,75	22,94
5.1	14,60	11,29	14,56	15,38	16,75	19,73	18,05
	18,09	14,78	18,05	18,87	20,24	23,22	21,54
	21,58	18,27	21,54	22,36	23,73	26,71	25,03
5.2	11,72	13,41	17,15	15,39	15,66	17,51	16,56
	14,22	15,91	19,65	17,89	18,16	20,01	19,06
	16,72	18,41	22,15	20,39	20,66	22,51	21,56

Tabela 6 - (continuação)

GRUPO	TRATAMENTO						
	011	101	110	111	112	121	211
5.3	9,81	4,61	7,11	15,33	7,52	13,15	13,06
	16,14	10,94	13,44	21,66	13,85	19,48	19,39
	22,47	17,27	19,77	27,99	20,18	25,81	25,72
6.1	11,79	10,29	14,64	14,92	16,06	20,59	17,59
	15,79	14,29	18,64	18,92	20,06	24,59	21,59
	18,79	18,29	22,64	22,92	24,06	28,59	25,59
6.2	12,76	13,70	12,76	13,68	14,16	15,93	14,89
	15,16	16,10	15,16	16,08	16,56	18,33	17,29
	17,56	18,50	17,56	18,48	18,96	20,73	19,69
6.3	10,02	12,32	9,02	12,94	11,74	11,27	11,95
	13,89	16,19	12,89	16,81	15,61	15,14	15,82
	17,76	20,06	16,76	20,68	19,48	19,01	19,69
6.4	18,28	13,35	21,35	19,29	18,69	20,62	22,07
	21,20	16,27	24,27	22,21	21,61	23,54	24,99
	24,12	19,19	27,19	25,13	24,53	26,46	27,91

Tabela 7 - Estimativas, em t/ha, e intervalos de confiança dos rendimentos, ao nível de 95% de probabilidade, nos grupos de ensaios, relativos aos modelos de Mitscherlich, para um, dois ou três nutrientes.

GRUPO	TRATAMENTO						
	011	101	110	111	112	121	211
1.1	15,41	13,58	17,39	17,54	17,56	19,98	19,45
	17,35	15,52	19,33	19,48	19,50	21,92	21,39
	19,29	17,46	21,27	21,42	21,44	23,86	23,33
2.1		12,82		17,33		20,72	
		15,57		20,08		23,47	
		18,32		22,83		26,22	
2.2			13,05	14,14	14,69		
			14,34	15,43	15,98		
			15,63	16,72	17,27		
2.3	13,43			17,83			18,20
	17,47			21,87			22,24
	21,51			25,91			26,28
3.1	10,67			11,30			11,65
	17,24			17,87			18,22
	23,81			24,44			24,79
3.2	13,75	11,90		18,78		19,13	18,99
	17,52	15,67		22,55		22,90	22,76
	21,29	19,44		26,32		26,67	26,53

Tabela 7 - (continuação)

GRUPO	TRATAMENTO						
	011	101	110	111	112	121	211
3.3		5,79		12,23		14,68	
		11,47		17,91		20,36	
		17,15		23,59		26,04	
3.4			13,05	14,14	14,69		
			14,34	15,43	15,98		
			15,63	16,72	17,27		
3.5	13,63			16,22			16,76
	20,21			22,81			23,35
	26,79			29,40			29,94
4.1	14,59	12,43		17,16		20,27	18,64
	16,94	14,78		19,51		22,62	21,09
	19,29	17,13		21,86		24,97	23,44
4.2		14,00		15,97		16,27	
		16,74		18,71		19,01	
		19,48		21,45		21,75	
5.1	-	-	-	-	-	-	-
5.2	11,72			15,39			16,56
	14,22			17,89			19,06
	16,72			20,39			21,56

Tabela 7 - (continuação)

GRUPO	TRATAMENTO						
	011	101	110	111	112	121	211
5.3	-	-	-	-	-	-	-
6.1	11,79			14,92			17,59
	15,79			18,92			21,59
	19,79			22,92			25,59
6.2			12,76	13,68	14,16		
			15,16	16,08	16,56		
			17,56	18,48	18,96		
6.3	-	-	-	-	-	-	-
6.4		13,35		19,29		20,62	
		16,27		22,21		23,54	
		19,19		25,13		26,46	

Tabela 8 - Estimativas das doses econômicas, em kg/ha, e respectivos intervalos de confiança, ao nível de 95% de probabilidade, referentes aos modelos polinomial e de Mitscherlich para um, dois ou três nutrientes.

GRUPO	POLINOMIAL			Nat. do ponto	MITSCHERLICH		
	X_N^*	X_P^*	X_K^*		X_N^*	X_P^*	X_K^*
1.1	-2471	-65	-3784	máximo	(ver Tabela 9)		
	157	101	-68				
	2785	267	3648				
2.1	-1283	-466	-591	sela	-759		
	-34	152	70				
	1215	770	731				
2.2	-119	-347	-69	sela	-130		
	56	144	48				
	231	635	165				
2.3	13	33	-37	máximo	-100		
	50	61	20				
	87	89	77				
3.1	-7744	-516	11	sela	-4232		
	-91	-10	43				
	7562	496	75				
3.2	21	36	-13	máximo	(ver Tabela 10)		
	50	65	21				
	79	94	55				

Tabela 8 - (continuação)

GRUPO	POLINOMIAL				MITSCHERLICH		
	X_N^*	X_P^*	X_K^*	Nat. do ponto	X_N^*	X_P^*	X_K^*
3.3	-927	-46	0			-166	
	-3	85	40	sela		93	
	921	216	80			352	
3.4	-119	-347	-69				-130
	56	144	48	sela			48
	231	635	165				226
3.5	-51	20	-333		-148		
	43	60	48	sela	33		
	137	100	429		214		
4.1	-107	-135	-567				
	68	120	56	sela	(ver Tabela 11)		
	243	375	679				
4.2	-178	-53	17			-25	
	53	34	28	sela		26	
	284	121	39			77	
5.1	-28	-17405	-523				
	33	-453	-2	mínimo			
	94	16499	519				
5.2	7	-6084	-13		-40		
	56	-86	48	sela	52		
	105	5912	109		144		

Tabela 8 - (continuação)

GRUPO	POLINOMIAL			Nat. do ponto	MITSCHERLICH		
	X_N^*	X_P^*	X_K^*		X_N^*	X_P^*	X_K^*
5.3	18	39	21	máximo			
	41	60	29				
	64	81	37				
6.1	-2438	-1732	-109	sela	-3489		
	166	-119	23		216		
	2770	1494	155		3921		
6.2	-917	13	-172	sela			-269
	87	62	44				42
	1091	111	260				353
6.3	6	-204	16	máximo			
	36	2	35				
	66	208	54				
6.4	-36	31	-119	sela		-29	
	29	71	67			64	
	94	111	253			157	

Tabela 9 - Estimativas, erros padrões e intervalos de confiança(95%), em kg/ha, das doses econômicas dos nutrientes, obtidos através de cortes na superfície do grupo 1.1, referentes à equação tipo Mitscherlich para três nutrientes.

NUTRIENTE ESTUDADO	Corte			$\bar{X}^*$	$s(\bar{X}^*)$	Intervalo de Confiança	
	X_N	X_P	X_K				
Nitrogênio		0	0	89	622,87	-1144	1322
		0	30	92	639,47	-1174	1358
		0	60	92	660,07	-1215	1399
		50	0	175	1579,04	-2951	3301
		50	30	178	1596,35	-2983	3339
		50	60	179	1616,96	-3023	3381
		100	0	220	2104,37	-3947	4387
		100	30	223	2121,67	-3978	4424
		100	60	224	2142,35	-4018	4466
Fósforo	0		0	101	112,02	-121	323
	0		30	102	109,05	-114	318
	0		60	102	113,51	-123	327
	40		0	113	127,32	-139	365
	40		30	114	124,42	-132	360
	40		60	114	128,82	-141	369
	80		0	123	147,56	-169	415
	80		30	123	144,59	-163	409
	80		60	124	149,06	-171	419
Potássio	0	0		-12	890,29	-1775	1751
	0	50		-8	764,91	-1523	1507
	0	100		-6	698,84	-1390	1378
	40	0		-10	826,78	-1647	1627
	40	50		-6	701,63	-1395	1383
	40	100		-5	635,73	-1264	1254
	80	0		-9	774,21	-1542	1524
	80	50		-5	649,29	-1291	1281
	80	100		-3	583,57	-1158	1152

Tabela 10 - Estimativas, erros padrões e intervalos de confiança (95%), em kg/ha, das doses econômicas dos nutrientes, obtidos através de cortes na superfície do grupo 3.2, referentes à equação tipo Mitscherlich para dois nutrientes.

NUTRIENTE ESTUDADO	Corte		X^*	$s(X^*)$	Intervalo de Confiança	
	X_N	X_P				
Nitrogênio		0	27	58,55	-96	150
		50	31	75,56	-127	190
		100	31	77,01	-131	193
Fósforo	0		39	59,92	-87	165
	40		43	69,58	-103	189
	80		43	70,92	-106	192

Tabela 11 - Estimativas, erros padrões e intervalos de confiança (95%), em kg/ha, das doses econômicas dos nutrientes, obtidos através de cortes na superfície do grupo 4.1, referentes à equação tipo Mitscherlich para dois nutrientes.

NUTRIENTE ESTUDADO	Corte		X^*	$s(X^*)$	Intervalo de Confiança	
	X_N	X_P				
Nitrogênio		0	46	58,84	-71	163
		50	70	120,62	-170	310
		100	82	161,73	-240	404
Fósforo	0		132	177,81	-222	486
	40		149	203,16	-255	553
	80		159	226,52	-292	610

Tabela 12 - Resultados do estudo do grupo 1.1 através da função de Mitscherlich em sua forma para um nutriente.

a) Estimativas dos parâmetros e respectivos intervalos de confiança.

NUTRIENTE	$\hat{A}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$
Nitrogênio	-392,81	-1431,44	-0,0246
	38,64	226,95	0,0011
	470,09	1885,34	0,0268
Fósforo	4,14	-98,08	-0,0096
	25,87	95,16	0,0042
	47,60	288,40	0,0180
Potássio	16,70	-4972,60	-0,9035
	19,50	74,51	0,0275
	22,30	5121,62	1,9585

b) Estimativas e intervalos de confiança (95%) das produções, em t/ha.

NUTRIENTE	011	101	110	111	112	121	211
Nitrogênio	15,41			17,54			19,45
	17,35			19,48			21,39
	19,29			21,42			23,33
Fósforo		13,58		17,54		19,98	
		15,52		19,48		21,92	
		17,46		21,42		23,86	
Potássio			17,39	17,54	17,56		
			19,33	19,48	19,50		
			21,27	21,42	21,44		

c) Estimativas, erros padrões e intervalos de confiança (95%) das doses econômicas.

NUTRIENTE	$\bar{x}^*$	$s(\bar{x}^*)$	Intervalo de Confiança	
Nitrogênio	178	1596,26	-2983	3339
Fósforo	114	124,42	-132	360
Potássio	-6	701,62	-1395	1383