ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM BLOCOS CASUALIZADOS COMPLETOS AUMENTADOS (BLOCOS DE FEDERER), COM PARCELAS SUBDIVIDIDAS NO TEMPO

EDIO VIZONI
(Matemático)

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO SIMIONATO MORAES

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração em Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Outubro - 1984

À meu pai (in memorian)

Ofereço.

Dedico

À minha mãe

Aos meus filhos

As minhas irmãs.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Roberto Simionato Moraes, pela orientação segura e pelo incentivo para a execução deste trabalho.

Ao Dr. Humberto de Campos, Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, pelas sugestões e ensinamentos.

Aos Drs. Isaias Rangel Nogueira, Antonio Francisco Iemma, Cássio Roberto de Melo Godoi, Maria Cristina Stolf Nogueira, bem como todos os professores do curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, por sua acolhida, seus ensinamentos e solicitude com a qual invariavelmente, nos atenderam dentro e fora das salas de aula.

Aos colegas do Departamento de Matemática aplicada, da "FUEL", Departamento de Matemática da "FAFICLA", e da UNIDADE PÓLO, pelo apoio e amizade.

À FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA (FUEL), pelo afastamento concedido.

À FACULDADE DE FILOSOFIA CIÊNCIAS E LETRAS DE ARAPONGAS (FAFICLA), pelo afastamento concedido.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida.

À SEC - Secretaria de Educação e Cultura do Paraná pela licença concedida.

A Srta. Rosa Maria Alves e ao Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi pela versão do Resumo para o Inglês.

Aos companheiros do Curso de Pós-Graduação, pela receptividade, amizade e estímulo.

A Maria Luiza Meneghetti, e seus familiares, pelo apoio, compreensão, incentivo e amizade.

A Maria das Graças de Lima, pela execução dos trabalhos de datilografia.

À minha família, pela paciência e dedicação.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram na execução deste trabalho.

ÍNDICE

	Pág.
RESUMO	<i>viii</i>
SUMMARY	<i>xi</i>
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
3. MATERIAL	13
4. MÉTODOS	14
4.1. Introdução	14
4.2. Modelo Matemático	15
4.3. Equações Normais	17
4.4. Solução do Sistema de Equações	27
4.5. Análise de Variância	40
4.5.1. Introdução	40
4.5.2. Soma de Quadrados dos Parâmetros	43
4.6. Esperança das Somas de Quadrados	50
4.6.1. Média Geral	50
4.6.2. Tratamentos Principais	52
4.6.3. Blocos	55

4.6.4. Soma de Quadrados de Parcelas	57
4.6.5. Resíduo (a)	60
4.6.6. Tratamentos Secundários	61
4.6.7. Interação txa	64
4.6.8. Interação bxa	80
4.6.9. Total	85
4.6.10. Resíduo (b)	86
4.6.11. Quadro de Análise de Variância	88
4.7. Dispersão para Tratamentos	89
4.7.1. Tratamentos Principais	89
4.7.2. Tratamentos Secundários	95
4.7.3. Dispersão para a Interação txa	97
4.8. Ajuste de Médias	97
4.9. Comparações Múltiplas	98
4.9.1. Para os Tratamentos Principais	99
4.9.2. Para os Tratamentos Secundários	100
4.10. Testes Sobre a Estrutura da Matriz de Cova- riâncias	101
4.10.1. Teste de Homogeneidade para as matrizes Covariâncias	101
4.10.2. Teste de Uniformidade da matriz comum de Covariâncias	103
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	105
5.1. Teste de Homogeneidade e Uniformidade de matriz de Covariâncias	105

5.2. Equações Normais	108
5.3. Quadro de Análise de Variância	109
5.4. Comparações Múltiplas	111
6. CONCLUSÕES	113
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114
8. APENDICE	120
8.1. Tabela 1	121
8.2. Tabela 2	122

TÍTULO: ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM BLOCOS CASUALIZADOS COMPLETOS AUMENTADOS (BLOCOS DE FEDERER), COM PARCELAS SUBDIVIDIDAS NO TEMPO.

AUTOR: EDIO VIZONI.

ORIENTADOR: Dr. ROBERTO SIMIONATO MORAES.

R E S U M O

No teste de novos tratamentos (variedades, metodologias, produtos químicos, etc) nem sempre é possível se obter quantidades suficientes desses novos produtos, para um número razoável de repetições.

FEDERER (1956), desenvolveu uma metodologia para testes de clones de cana-de-açúcar, a qual permite realizar a análise de variância e as comparações múltiplas entre os efeitos de tratamentos, tanto entre as variedades comerciáveis já existentes (comuns), ou ainda entre as novas variedades ou clones (regulares), bem como a comparação entre as comuns e regulares, baseando-se em delineamentos inteiramente casualizados, blocos, ou quadrados latinos, aos quais deu o nome de "delineamentos aumentados".

Neste trabalho, pretendeu-se fazer um estudo do de lineamento em blocos aumentados com parcelas subdivididas no tempo, tendo por finalidade, principalmente a aplicação em ex perimentos agronômicos, com culturas perenes, aproveitando as produções de anos sucessivos.

Considerou-se, c , variedades comuns dispostas em b blocos, e Z variedades regulares as quais aparecem uma única vez em todo o experimento e v anos. E, ainda que todos os blocos tenham o mesmo número de parcelas (K), nada impedindo entretanto que esses números sejam diferentes.

Adotou-se o seguinte modelo matemático:

$$y_{eljv} = m + t_{\ell} + b_j + (tb)_{\ell j} + a_v + ta_{\ell v} + ba_{jv} + e_{eljv}$$

Quando se trabalha com parcelas subdivididas no tempo, não é raro encontrar correlações diferentes entre duas subparcelas de uma mesma parcela. Neste estudo, por ser um trabalho inicial, considerou-se apenas o caso onde estas correlações são constantes e existe a independência entre subparcelas de parcelas distintas, resultando:

$$\text{COV}(y_{l j v}, y_{l' j' v'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } l = l'; j = j'; v = v' \\ \rho \sigma^2 & \text{se } l = l'; j = j'; v \neq v' \\ 0 & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Nestas condições, baseando-se na metodologia apresentada por PIMENTEL GOMES (1967), para blocos incompletos balanceados, e no trabalho desenvolvido por IEMMA (1981), sobre parcelas subdivididas, determinou-se: o sistema de equações normais, somas de quadrados dos parâmetros, as matrizes de dispersão, os critérios para as comparações múltiplas pelo teste de Tukey.

ANALYSIS OF EXPERIMENTS IN COMPLETELY RANDOMISED AUGMENTED
BLOCKS DESIGN (FEDERER BLOCKS), WITH SPLIT PLOT ON TIME

Author: ÉDIO VIZONI

Adviser: ROBERTO SIMIONATO MORAES

S U M M A R Y

In the new treatments test (varieties, methodologies, chemical products) it is not possible to obtain sufficient quantities of these new products, for a reasonable number of repetitions.

FEDERER (1956), developed a methodology for tests in sugar cane clones, that allows one do the analysis of variance and multiple comparisons among the treatments effects, either between commercial existent varieties (common), or between the new varieties or clones (regular), either the comparisons between the common and regular varieties, based on a completely randomised, blocks, or lattice square designs, namely the augmented designs.

In this dissertation, we intended to study the augmented block design with split plot on time, objecting mainly, the application in agronomic experiments, with perennial cultures, utilizing production of successive years.

We considered $\underline{c}$ commons varieties in $\underline{b}$ blocks, and $\underline{z}$ regular varieties that appear only once in all experiments in $\underline{v}$ years. Although every block have the same number of plots (K), we allow different number of plots.

We adopted the following mathematical model:

$$y_{ljv} = m + t_l + b_j + (tb)_{lj} + a_v + ta_{lv} + ba_{jv} + e_{ljv}$$

When we work with split plot in time, it is not unusual to find different correlations between two sub plot in the same plot. As a preliminary study we considered only the case where this correlations are constant. And also have the independency between subplots of different plots, resulting:

$$\text{COV}(y_{ljv}, y_{l'j'v'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{if } l = l'; j = j'; v = v' \\ \rho\sigma^2 & \text{if } l = l'; j = j'; v \neq v' \\ 0 & \text{in the others cases.} \end{cases}$$

With thos conditions, based in the methodology developed by PIMENTEL GOMES (1967), for balanced incomplete blocks, an in the paper developed by IEMMA (1981), about split plot, it was determined: the normal equations system, the parameter sum of squares, the dispersion matrices, the multiple comparison criterion by Tukey test.

1. INTRODUÇÃO

Quando se pretende comparar novas variedades, tratamentos, ou novas metodologias, com outras já existentes nem sempre é possível obter quantidades suficientes desses materiais para um número de repetições, que possa ter uma eficiência razoável para a análise de variância.

FEDERER (1956), introduziu o chamado "MODELO AUMENTADO", num programa de seleção de novos clones de cana-de-açúcar do "HAWAIIAN SUGAR PLANTER'S ASSOCIATION", em substituição a modelos anteriores. Este podendo ser realizado em delineamento inteiramente ao acaso, blocos casualizados, quadrados latinos, etc.

Estes modelos apresentam dois grupos de tratamentos:

- a) C - Tratamentos comuns, repetidos b vezes.
- b) Z - Tratamentos regulares, aparecendo uma única vez em todo o experimento.

FEDERER (1961.a, 1961.b), FEDERER, et alli (1975), desenvolveram uma metodologia onde os tratamentos regulares (clones ou variedades), podem ou não ser repetidos o mesmo número de vezes.

Como nem sempre é possível obter quantidades suficientes desses materiais, para se realizar mais de uma parcela, pensou-se em aproveitar as produções ou observações sucessivas de uma mesma parcela como repetição dessa variedade.

Diante dessa nova idéia, pensou-se em utilizar o delineamento em blocos completos com parcelas subdivididas no tempo, tendo-se como tratamentos principais as variedades, e para tratamentos secundários as produções nos vários anos sucessivos.

Sabemos que quando se trabalha com parcelas subdivididas no tempo, não raramente encontramos correlações diferentes entre duas subparcelas de uma mesma parcela.

Neste estudo inicial, considerou-se somente o caso onde essas correlações são constantes. E existe a independência entre subparcelas de parcelas distintas, resultando:

$$\text{COV} (y_{\ell j v}, y_{\ell' j' v'}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } \ell = \ell'; j = j'; v = v' \\ \rho \sigma^2, & \text{se } \ell = \ell'; j = j'; v \neq v' \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

considerando assim, somente o caso em que as matrizes de variâncias e covariâncias, por parcelas, são homogêneas e uniformes.

Considerou-se, ainda, apenas o caso onde as variedades comuns são repetidas b vezes, e as variedades regulares aparecem uma única vez em todo o experimento, e o número de parcelas e subparcelas por blocos sejam iguais, com a finalidade unicamente de simplificar o tratamento algébrico.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Devido a necessidade de um delineamento experimental mais eficiente na comparação de plântulas, ("seedlings") e variedades ("clones"), nas fases iniciais de um programa de melhoramento de cana-de-açúcar, abacaxi, etc. FEDERER (1956) desenvolveu uma metodologia que permite comparar estas novas variedades, chamadas de variedades regulares, com variedades já existentes, ou comerciáveis, chamadas de comuns; chamando este novo delineamento de "Delineamento aumentado", que é um tipo de delineamento experimental, formado a partir dos delineamentos inteiramente ao acaso, blocos, linhas e colunas.

Estes delineamentos apresentam dois grupos de tratamentos, os comuns, repetidos b vezes, e um segundo grupo, os regulares, que aparecem uma única vez no experimento.

Comparando os trabalhos de FEDERER (1956) e PIMENTEL GOMES & GUIMARÃES (1958), propondo uma análise intrabloco de um grupo de experimento em blocos casualizados completos, onde alguns tratamentos são comuns para todos os grupos, observa-se que há uma certa semelhança entre elas, onde cada bloco do delineamento aumentado corresponde a um experimento em blocos casualizados completos, considerado sem repetição.

Novas sugestões foram apresentadas por: FEDERER (1961a, 1961b), PAVATE (1961), CORSTEN (1962), AFONJA (1969), PIMENTEL GOMES (1970), MARTINEZ (1972), dentre outros.

O grande uso dos experimentos em parcelas subdivididas, justificado pela sua simplicidade e alta eficiência, segundo LEONARD e CLARK (1939), foi proposto por Yates, em 1933, seguido por diversos autores como STELL e TORRIE (1960), SNEDECOR e COCHRAN (1967), PIMENTEL GOMES (1976), COCHRAN e COX (1976), dentre outros.

IEMMA (1981), desenvolvendo uma metodologia para ensaios com parcelas subdivididas em blocos incompletos, chama a atenção para o fato de que mesmo que os blocos sejam recomendados eles podem apresentar o inconveniente de fugir ao controle do experimentador, principalmente quando o número de tratamentos secundários for relativamente grande, mas deve ser preferido sobre o inteiramente ao acaso, se o efeito de blo-

cos for significativo, apesar do risco da crescente perda de eficiência diretamente associada ao tamanho dos blocos, citando COCHRAN e COX (1976), os quais definem os ensaios em parcelas subdivididas através dos ensaios em fatorial com confundimento de efeitos principais, ressaltam sua eficiência em experimentos de campo, quando se deseja introduzir um fator adicional dentro do ensaio.

Quando se trabalha com culturas perenes, onde se pode ter várias observações de uma mesma parcela, DINIZ (1980), considera duas situações básicas que pode ocorrer:

- 1ª Cada unidade experimental é tratada somente uma vez durante o experimento ou recebe o mesmo tratamento repetidamente.
- 2ª Cada unidade experimental recebe uma sequência de tratamentos sobre períodos sucessivos de tempo durante o curso do experimento.

Sendo que na 1ª situação, estão incluídos experimentos que estudam curvas de crescimento ou respostas e estudos de perfil; na 2ª, os modelos do tipo change-over.

Classifica as observações de uma mesma parcela de duas formas:

- a) Observações que diferem entre si pelas suas características;

b) Observações que tem a mesma característica, mas que diferem entre si somente quanto ao tempo.

Para as observações "a", o autor aconselha efetuar uma análise multivariada, ou uma análise univariada para cada característica observada; para as de "b", as naturezas dos dados são univariadas, usar uma análise univariada.

Para experimentos do tipo 1, com observações da parcela (b), dois tipos de análise univariada são, em geral, efetuadas,

- 1) Análise dos dados em cada tempo, separadamente.
- 2) Análise dos dados segundo o delineamento em parcelas subdivididas no tempo.

Considerando-se as medidas repetidas sobre a mesma parcela como um vetor de respostas, é válido um processo multivariado denominado análise de perfil.

Considerando-se ainda que é de se esperar que medidas adjacentes no tempo são mais altamente correlacionadas do que medidas distantes, esses dados, apesar de originados de um experimento aparentemente univariado, são essencialmente multivariados.

Mas quando se consideram as medidas repetidas sobre a mesma parcela como subparcelas no tempo, o delineamento em parcelas subdivididas, no tempo, pode ser empregado. No

entanto, para a aplicação desse tipo de análise, o autor mostra as pressuposições que devem ser observadas.

1º Os tratamentos atribuídos às parcelas devem ser casualizados.

2º Os tratamentos atribuídos às subparcelas devem ser casualizados (o que pode invalidar a análise, já que as observações repetidas no tempo não são casualizadas);

3º As medidas repetidas, tomadas sobre a mesma parcela, tem a mesma variância (σ^2), e são igualmente correlacionadas, ou seja, que medidas adjacentes no tempo são igualmente correlacionadas com as medidas distantes.

Assim, a matriz de variâncias e covariâncias para todas as parcelas dos tratamentos comuns devem ser do tipo:

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & & 1 \end{pmatrix}$$

denominada "uniforme" por GEISSER (1963).

Sugere também uma outra alternativa que algumas vezes possibilita o uso do modelo em parcelas subdivididas, que consiste em se trabalhar com as diferenças entre medidas sucessivas, ao invés de se usar os dados originais. O uso desta técnica algumas vezes reduz as variâncias e covariâncias, destes efeitos para um grau suficiente que possibilite ser ignorada as correlações entre períodos sucessivos, já que as correlações entre períodos de tempo nem sempre são constantes; quando se usa este método, tempo e interação tratamento x tempo não podem ser testadas de maneira usual.

PARKER (1942), trabalhando com laranjeiras, verificou que as produções anuais não são igualmente correlacionadas, e devido a esse fato, SNEDECOR (1956) sugere uma análise baseada na soma das produções das parcelas e ANDERSON e BANCROFT (1952), sugerem que se separe o erro (b) em dois componentes $B \times A$, $B \times T \times A$.

BOX (1950), considerando observações sucessivas na mesma parcela, acha válida uma análise simples, se puder supor que as observações tem as mesmas variâncias e mesmas covariâncias para todas as parcelas; e para verificar a validade da aplicação de uma análise de variância de um modelo em parcelas subdivididas, deve-se usar o procedimento proposto por BOX (1949), que recomenda verificar a hipótese de que a matriz de covariância seja a mesma, para todos os tratamentos;

além disso, deve-se verificar se a matriz de variâncias e covariâncias é da forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

designada "uniforme" por GEISSER (1963). Estabelece ainda um teste de significância aproximado para verificar a hipótese de igualdade de variâncias e covariâncias.

No entanto, quando não se puder fazer tal suposição, ou seja, se as condições exigidas pelo modelo de parcelas subdivididas não forem satisfeitas, deve-se adotar uma matriz de covariâncias de estrutura mais geral. Aconselha ainda, que em experimentos onde os resultados aparecem na forma de curvas de crescimento, a forma da matriz de covariância deve ser levada em consideração para se poder decidir sobre o modelo e o método de análise apropriados, pois, considera, ainda, que é de se esperar que a correlação entre medidas tomadas no tempo decresçam à medida que elas se distanciam, ou seja, se correlacionam serialmente.

Em situações onde a análise univariada não é apropriada, BOX (1950), propõe uma extensão multivariada de testes de significância, como procedimento alternativo. Para isso, u-

utiliza o critério de WILKS (1932).

STEEL (1955), tomando as produções acumuladas para cada ano em um ensaio de variedades de alfafa, compara as análises univariadas e multivariadas, mostrando que ambas apresentam os mesmos resultados.

STEEL e TORRIE (1960), lembram as diferenças existentes entre as análises de experimentos em parcelas subdivididas no espaço e no tempo.

Salientam que em parcelas subdivididas no tempo pode acontecer grandes diferenças entre colheitas e entre suas variâncias. Outra diferença entre os dois tipos de experimentos é que os desvios padrões para várias comparações de médias de tratamentos não são sempre os mesmos em ambas as análises. Devido a isso, recomendam que seja feita uma análise de variância para cada colheita. Se a cultura apresentar mais de uma colheita por ano, sugerem a análise de cada colheita, separadamente, para então fazer-se a análise para cada ano, e daí a análise conjunta para anos.

Trabalhando com um experimento de variedades de alfafa, em blocos casualizados, dizem que a análise conjunta pode acontecer que a interação blocos x cortes seja relevante, devido a localização dos blocos. Devido a isso, a soma de quadrados da interação blocos x cortes deve ser separada do erro (b).

PATTERSON e LOWE (1970), concordam que em ensaios de longa duração, existe a correlação serial entre as observações nas mesmas parcelas. Dizem ainda que se não for considerada essa correlação, pode-se perder eficiência na estimação dos efeitos de tratamentos e vícios na estimação do erro. No entanto, o vício na variância das médias de tratamentos pode ser eliminado completa ou parcialmente determinando-se dois erros: da parcela e parcela x erro.

3. MATERIAL

O material utilizado para a aplicação do método em estudo, refere-se a produção agrícola de cana-de-açúcar, da dos em toneladas por hectare, adaptados de um ensaio de sele ção de variedades.

O plantio das canas deu-se em Abril de 1970, ten do sido realizados 2 cortes, o 1º em Novembro de 1971, o 2º em Setembro de 1972.

Utilizou-se no experimento 5 variedades comuns, dispostas em 5 blocos e 35 variedades regulares, as quais apa recem uma única vez em todo o experimento. Estes dados apare cem no apêndice, tabela 1.

4. MÉTODOS

4.1. Introdução

Para o desenvolvimento da metodologia, considerou-se um modelo de blocos completos casualizados aumentados (blocos de FEDERER), com c tratamentos comuns e z tratamentos regulares onde de cada parcela obteve-se v observações relativos aos cortes em v anos sucessivos, utilizando-se assim o modelo de parcelas subdivididas, onde as v observações no tempo correspondem as subparcelas.

Considera-se ainda que o número de parcelas em todos os blocos fossem constantes e iguais a K , o número de tratamentos comuns repetidos b vezes, e o número de tratamentos regulares fossem iguais em todos os blocos e aparecendo em

somente uma parcela em todo o experimento.

Em parcelas subdivididas, os tratamentos principais e os tratamentos secundários devem ser casualizados. Como as subparcelas neste caso, não podem ser casualizadas, segundo DINIZ (1980), poderá comprometer seriamente o uso do delineamento, mostra então, que uma das exigências para a validade deste modelo é em se fazer um teste de homogeneidade e uniformidade de matriz de variâncias e covariâncias.

4.2. Modelo Matemático

Considerou-se, para esse ensaio o modelo linear.

$$y_{\ell j v} = m + t_{\ell} + b_j + (tb)_{\ell j} + a_v + (ta)_{\ell v} + (ba)_{jv} + e_{\ell j v} \quad (42.1)$$

onde $\ell = 1, 2, \dots, c+z$

$$c = 1 \dots c$$

$$z = 1 \dots z$$

$$j = 1 \dots b$$

$$v = 1 \dots v$$

para melhor visualização das matrizes, reescreveu-se o modelo (42.1) da seguinte forma

$$y_{\ell j v} = m + (t_{\ell} + t_{\ell'j}) + b_j + (tb)_{\ell j} + a_v + (ta_{\ell v} + ta_{\ell'jv}) + ba_{jv} + e_{\ell j v} \quad (42.2)$$

onde

$y_{\ell j v}$ = é o valor observado na subparcela que recebeu o v -ésimo tratamento secundário dentro do ℓ -ésimo tratamento principal no j -ésimo bloco.

m = é o efeito da média geral.

t_{ℓ} = é o efeito do ℓ -ésimo tratamento principal, $t_{\ell} = [t_{\ell} + t_{\ell', j}]$, onde t_{ℓ} = efeito do ℓ -ésimo tratamento principal comum

$t_{\ell', j}$ = efeito do ℓ' -ésimo tratamento principal regular do j -ésimo bloco.

b_j = é o efeito do j -ésimo bloco.

$(tb)_{\ell j}$ = efeito da interação do ℓ -ésimo tratamento principal com o j -ésimo bloco, também chamado de erro(a).

a_v = efeito do v -ésimo tratamento secundário (anos).

$(ta)_{\ell v}$ = é o efeito da interação entre o ℓ -ésimo tratamento principal e o v -ésimo tratamento secundário, sendo

$(ta)_{\ell v} = [ta_{\ell v} + ta_{\ell', j v}]$ onde

$ta_{\ell v}$ = é o efeito da interação entre o ℓ -ésimo tratamento principal comum e o v -ésimo tratamento secundário.

$ta_{\ell', j v}$ = é o efeito da interação entre o ℓ' -ésimo tratamento principal regular do j -ésimo bloco e o v -ésimo tratamento secundário.

$(ba)_{jv}$ = é o efeito da interação entre o j -ésimo bloco e o v -ésimo tratamento secundário.

e_{ljv} = erro atribuído à observação y_{ljv} , chamado de erro (b).

Neste estudo considerou-se as seguintes restrições.

$$b \sum_i \bar{x}_i + \sum_{i'j} \bar{x}_{i'j} = 0$$

$$\sum_v \bar{x}_{av} = 0$$

$$\sum_j \bar{b}_j = 0$$

$$\sum_v \bar{x}_{a'jv} = 0$$

$$\sum_v \bar{a}_v = 0$$

$$b \sum_i \bar{x}_{av} + \sum_{i'j} \bar{x}_{a'jv} = 0$$

$$\sum_v b \bar{a}_{jv} = 0$$

$$\sum_j b \bar{a}_{jv} = 0$$

4.3. Equações Normais

Do modelo linear $Y = X\theta + \epsilon$ obtêm-se o sistema de equações normais

$$X'X \hat{\theta} = X'Y \quad (43.1)$$

onde X = é a matriz dos coeficientes dos parâmetros de $\dim [n \times \{v+b+l+vl+vb\}]$ sendo $n = bKv$ (número de sub-parcelas).

$\hat{\theta}$ = é o vetor das soluções de mínimos quadrados, para os

efeitos dos parâmetros de dimensão

$$[(v+b+l+vl+vb) \times 1]$$

Y = é o vetor de valores observados de dim $nx1$.

Fazendo-se a partição da matriz X , e usando os mesmos conceitos sugeridos por IEMMA (1981), tem-se

$$X = [X_0 \mid [X_1 \mid X_2] \mid X_3 \mid X_4 \mid [X_5 \mid X_6] \mid X_7]$$

onde

X_0 = é o vetor que envolve a média geral dim $nx1$.

X_1 = é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos principais comuns dim $nx c$.

X_2 = é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos principais regulares, dim $nx z$.

X_3 = é a matriz dos coeficientes associados aos blocos , dim $nx b$.

X_4 = é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos secundários, dim $nx v$.

X_5 = é a matriz dos coeficientes associados as interações τa_{iv} , dim $nx cv$.

X_6 = é a matriz dos coeficientes associados as interações $ta_{i'jv}$, dim $nxvz$.

X_7 = é a matriz dos coeficientes associados as interações ba_{jv} , dim $nxvb$.

Assim a matriz $X'X$, resulta:

$$X'X = \begin{bmatrix} X'_0 X_0 & X'_0 X_1 & X'_0 X_2 & X'_0 X_3 & X'_0 X_4 & X'_0 X_5 & X'_0 X_6 & X'_0 X_7 \\ X'_1 X_0 & X'_1 X_1 & X'_1 X_2 & X'_1 X_3 & X'_1 X_4 & X'_1 X_5 & X'_1 X_6 & X'_1 X_7 \\ X'_2 X_0 & X'_2 X_1 & X'_2 X_2 & X'_2 X_3 & X'_2 X_4 & X'_2 X_5 & X'_2 X_6 & X'_2 X_7 \\ X'_3 X_0 & X'_3 X_1 & X'_3 X_2 & X'_3 X_3 & X'_3 X_4 & X'_3 X_5 & X'_3 X_6 & X'_3 X_7 \\ X'_4 X_0 & X'_4 X_1 & X'_4 X_2 & X'_4 X_3 & X'_4 X_4 & X'_4 X_5 & X'_4 X_6 & X'_4 X_7 \\ X'_5 X_0 & X'_5 X_1 & X'_5 X_2 & X'_5 X_3 & X'_5 X_4 & X'_5 X_5 & X'_5 X_6 & X'_5 X_7 \\ X'_6 X_0 & X'_6 X_1 & X'_6 X_2 & X'_6 X_3 & X'_6 X_4 & X'_6 X_5 & X'_6 X_6 & X'_6 X_7 \\ X'_7 X_0 & X'_7 X_1 & X'_7 X_2 & X'_7 X_3 & X'_7 X_4 & X'_7 X_5 & X'_7 X_6 & X'_7 X_7 \end{bmatrix}$$

cujas partições chamaremos respectivamente de

$$X'X = \begin{bmatrix} n & g & c & d & e & f \\ g' & R & N & P & S & D \\ c' & N' & A & K & V & F \\ d' & P' & K' & U & H & G \\ e' & S' & V' & H' & L & B \\ f' & D' & F' & G' & B' & W \end{bmatrix}$$

onde

$$n = x_0' x_0 = bkv = n^{\circ} \text{ de subparcelas, dim } 1 \times 1$$

$$g = [g_1' \mid g_2']; \quad g_1 = x_0' x_1 = bvE_{(1 \times c)}, \text{ sendo } E_{(1 \times c)}, \text{ a matriz de 1's}$$

$$g_2 = x_0' x_2 = vE_{(1 \times z)}$$

$$c = x_0' x_3 = kvE_{(1 \times b)}$$

$$d = x_0' x_4 = bKE_{(1 \times v)}$$

$$e = [e_1' \mid e_2']; \quad e_1 = x_0' x_5 = bE_{(1 \times cv)}$$

$$e_2 = x_0' x_6 = E_{(1 \times vz)}$$

$$f = x_0' x_7 = KE_{(1 \times bv)}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_3 \\ R_3' & R_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} R_1 &= x_1' x_1 = bvI_{(c)} \text{ sendo } I_{(c)}, \text{ a matriz identidade} \\ R_2 &= x_2' x_2 = vI_{(z)} \\ R_3 &= x_1' x_2 = \phi_{(cxz)}, \text{ sendo } \phi_{(cxz)}, \text{ a matriz nula.} \end{aligned}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} N_1 &= x_1' x_3 = vE_{(cx b)} \\ N_2 &= x_2' x_3 = \begin{bmatrix} v & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ v & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ v & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & v & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & v & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & v \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(zxb)

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}; \quad P_1 = X_1^T X_4 = b E_{(cxv)} \\ P_2 = X_2^T X_4 = E_{(zxv)}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_3 \\ S_4 & S_2 \end{bmatrix}; \quad S_1 = X_1^T X_5 = \begin{bmatrix} b & \dots & b & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & \dots & b & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b & \dots & b \end{bmatrix}_{(cxev)}$$

$$S_2 = X_2^T X_6 = [I_{(z)} \vdots \dots \vdots I_{(z)}]_{(zxvz)}$$

$$S_3 = X_1^T X_6 = \phi_{(cxvz)}$$

$$S_4 = X_2^T X_5 = \phi_{(zxcv)}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}; \quad D_1 = X_1^T X_7 = E_{(cxbv)}$$

$$D_2 = X_2^T X_7 = \begin{bmatrix} 10 & \dots & 010 & \dots & 0 & \dots & 10 & \dots & 0 \\ 10 & \dots & 010 & \dots & 0 & \dots & 10 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 10 & \dots & 010 & \dots & 0 & \dots & 10 & \dots & 0 \\ 01 & \dots & 001 & \dots & 0 & \dots & 01 & \dots & 0 \\ 01 & \dots & 001 & \dots & 0 & \dots & 01 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 00 & \dots & 100 & \dots & 1 & \dots & 00 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 00 & \dots & 100 & \dots & 1 & \dots & 00 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(zxbv)}$$

$$A = X_3^T X_3 = vKI_{(b)}$$

$$K = X_3^T X_4 = KE_{(bxv)}$$

$$V = [V_1 \vdots V_2]; \quad V_1 = X_3^T X_5 = E_{(bxev)}$$

$$V_2 = X_3^T X_6 = \begin{bmatrix} 11 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 10 & \dots & 00 & \dots & 0 \\ 00 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 01 & \dots & 10 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 00 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 00 & \dots & 01 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(bxvz)

$$F = X_3' X_7 = K \begin{bmatrix} I_{(b)} & \dots & I_{(b)} \end{bmatrix} \quad (b \times b \nu)$$

$$U = X_4' X_4 = b K I_{(\nu)}$$

$$H = [H_1 \mid H_2] ; \quad H_1 = X_4' X_5 = b \begin{bmatrix} I_{(\nu)} & \dots & I_{(\nu)} \end{bmatrix} \quad (\nu \times c \nu)$$

$$H_2 = X_4' X_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\nu \times \nu z)$$

$$G = X_4' X_7 = K \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\nu \times b \nu)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_3 \\ L_3' & L_2 \end{bmatrix} ; \quad L_1 = X_5' X_5 = b I_{(c \nu)}$$

$$L_2 = X_6' X_6 = I_{(\nu z)}$$

$$L_3 = X_5' X_6 = \phi_{(c \nu \times \nu z)}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = X_5' X_7 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (c \nu \times b \nu)$$

$$B_2 = X_2' X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(vzxbv)

$$W = X_7' X_7 = KI_{(bv)}$$

vetor de soluções $\hat{\theta}$,

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{b} \\ \hat{a} \\ \hat{t}_a \\ \hat{b}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau}_c \\ \hat{\tau}_r \\ \hat{b} \\ \hat{a} \\ \hat{t}_a \\ \hat{t}_r \\ \hat{b}_a \end{bmatrix}$$

onde, considerando-se as restrições impostas em (4.2).

$\hat{m}$ = é o efeito da média geral estimada, dim 1x1.

$\hat{\tau}_c$ = é o vetor dos efeitos estimados para tratamentos principais comuns.

$$\hat{\tau}'_c = [\hat{t}_1 \ \hat{t}_2 \ \dots \ \hat{t}_c] \ (1 \times c)$$

$\hat{\tau}_r$ = é o vetor dos efeitos estimados para tratamentos principais regulares.

$$\hat{\tau}'_r = [\hat{t}_{11} \ \hat{t}_{21} \ \dots \ \hat{t}_{k1} \ \hat{t}_{12} \ \hat{t}_{22} \ \dots \ \hat{t}_{k2} \ \dots \ \hat{t}_{1b} \ \hat{t}_{2b} \ \dots \ \hat{t}_{kb}] \ (1 \times z)$$

$\hat{b}$ = é o vetor dos efeitos estimados para os blocos,

$$\hat{b}' = [\hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_b]_{(1 \times b)}$$

$\hat{a}$ = é o vetor dos efeitos estimados para os tratamentos secundários

$$\hat{a}' = [\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_v]_{(1 \times v)}$$

$\hat{ta}_c$ = é o vetor dos efeitos estimados das interações tratamentos comuns x tratamentos secundários.

$$\hat{ta}'_c = [\hat{ta}_{11} \hat{ta}_{12} \dots \hat{ta}_{1v} \hat{ta}_{21} \dots \hat{ta}_{2v} \dots \hat{ta}_{c1} \hat{ta}_{c2} \dots \hat{ta}_{cv}]_{(1 \times cv)}$$

$\hat{ta}_r$ = é o vetor dos efeitos estimados das interações tratamentos regulares x tratamentos secundários.

$$\hat{ta}'_r = [\hat{ta}_{111} \hat{ta}_{211} \dots \hat{ta}_{k11} \hat{ta}_{121} \dots \hat{ta}_{k21} \dots \hat{ta}_{1bv} \dots \hat{ta}_{kbv}]_{(1 \times kbv)}$$

$\hat{ba}$ = é o vetor dos efeitos estimados das interações blocos x tratamentos secundários.

$$\hat{ba}' = [\hat{ba}_{11} \hat{ba}_{21} \dots \hat{ba}_{b1} \hat{ba}_{12} \dots \hat{ba}_{b2} \dots \hat{ba}_{1v} \dots \hat{ba}_{bv}]_{(1 \times bv)}$$

na matriz $X'Y$

$$X'Y = \begin{bmatrix} X'_0Y \\ X'_1Y \\ X'_2Y \\ \vdots \\ X'_3Y \\ \vdots \\ X'_4Y \\ \vdots \\ X'_5Y \\ X'_6Y \\ X'_7Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T_c \\ T_r \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ TA_c \\ TA_r \\ BA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ \vdots \\ T \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ TA \\ \vdots \\ BA \end{bmatrix}$$

onde

G = é o vetor do total geral observado, dim 1×1 .

T_c = é o vetor dos totais observados dos tratamentos comuns, dim $c \times 1$.

$$T'_c = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_c]$$

T_r = é o vetor dos totais observados dos tratamentos regulares, dim $zx1$.

$$T'_r = [T_{11} \ \dots \ T_{k1} \ T_{12} \ \dots \ T_{k2} \ \dots \ T_{1b} \ \dots \ T_{kb}]$$

B = é o vetor dos totais observados para blocos, dim $b \times 1$.

$$B' = [B_1 \ B_2 \dots B_b]$$

A = é o vetor dos totais observados para tratamentos secundários, dim $v \times 1$.

$$A' = [A_1 \ A_2 \dots A_v]$$

TA_c = é o vetor dos totais observados para as interações tratamentos comuns x secundários, dim $cv \times 1$.

$$TA'_c = [TA_{11} \ TA_{12} \dots TA_{1v} \ TA_{21} \dots TA_{2v} \dots TA_{c1} \dots TA_{cv}]$$

TA_r = é o vetor dos totais observados para as interações tratamentos regulares x secundários, dim $zv \times 1$.

$$TA'_r = [TA_{111} \ TA_{211} \dots TA_{k11} \ TA_{121} \ TA_{221} \dots TA_{k21} \dots TA_{1bv} \dots TA_{kbv}]$$

BA = é o vetor dos totais observados para as interações blocos x tratamentos secundários, dim $bv \times 1$.

$$BA' = [BA_{11} \ BA_{21} \dots BA_{b1} \ BA_{12} \dots BA_{b2} \dots BA_{1v} \dots BA_{bv}]$$

E o sistema de equações $X'X\hat{\theta} = X'Y$, (431) toma a seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} n & g & c & d & e & f \\ g' & R & N & P & S & D \\ c' & N' & A & K & V & F \\ d' & P' & K' & U & H & G \\ e' & S' & V' & H' & L & B \\ f' & D' & F' & G' & B' & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{b} \\ \hat{a} \\ \hat{ta} \\ \hat{ba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ A \\ TA \\ BA \end{bmatrix}$$

efetuando-se os produtos e usando as restrições impostas em 4.2; tem-se.

$$\begin{aligned} n \hat{m} &= G \quad (1) \\ g' \hat{m} + R\hat{\tau} + N\hat{b} &= T \quad (2) \\ c' \hat{m} + N'\hat{\tau} + A\hat{b} &= B \quad (3) \\ d' \hat{m} + P'\hat{\tau} + K'\hat{b} + U\hat{a} &= A \quad (4) \quad (432) \\ e' \hat{m} + S'\hat{\tau} + V'\hat{b} + H'\hat{a} + L\hat{ta} + B\hat{ba} &= TA \quad (5) \\ f' \hat{m} + D'\hat{\tau} + F'\hat{b} + G'\hat{a} + B'\hat{ta} + W\hat{ba} &= BA \quad (6) \end{aligned}$$

4.4. Solução do Sistema de Equações

De 432, obtemos

$$\hat{m} = \frac{G}{n} \quad (441)$$

de (3), isolando-se o valor de $\hat{b}$, tem-se

$$\hat{b} = A^{-1} [B - N'\hat{\tau} - c'\hat{m}] \quad (442)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{\nu K} [B - N'\hat{\tau} - c'\hat{m}] \quad (443)$$

substituindo-se (442) em (2), tem-se

$$[R - NA^{-1}N'] \hat{\tau} = T - NA^{-1}B - m[g' - NA^{-1}C'] \quad (44.4)$$

mas $g' = NA^{-1}C'$ e fazendo-se

$$C = R - NA^{-1}N' = R - \frac{1}{vK} NN' \quad (44.5)$$

$$Q = T - NA^{-1}B = T - \frac{1}{vK} NB \quad (44.6)$$

assim (44.4) fica

$$C\hat{\tau} = Q \quad (44.7)$$

onde a matriz Q é partida da seguinte forma

$$Q = \begin{bmatrix} Q_c \\ Q_r \end{bmatrix}; \quad Q_c = \text{submatriz associada aos tratamentos comuns, dim } cx1, \text{ e cujos elementos são}$$

$$Q_{ci} = T_{ci} - \frac{1}{K} G \quad (44.8)$$

$Q_r =$ submatriz associada aos tratamentos regulares dim $(zx1)$ e cujos elementos são:

$$Q_{i'j} = T_{i'j} - \frac{1}{K} j_{i'j} \quad (44.9)$$

onde

$j_{i'j} = B_j$, pois não se tem repetições de tratamentos regulares assim

$$Q_{i'j} = T_{i'j} - \frac{1}{K} B_j \quad (44.10)$$

Como a matriz $\mathbf{C}$ é uma matriz singular de característica $\ell-1 = (c+z-1)$. Desse modo, e como em PIMENTEL GOMES (1967), adotou-se uma matriz $\mathbf{Z}$ de restrição e de característica 1, com dimensão $(c+z) \times (c+z)$ e tal que $\hat{\mathbf{Z}}\tau = \phi$,

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} bv \dots bv & v \dots v \\ \dots & \dots \\ bv \dots bv & v \dots v \\ \hline 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

assim

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}\tau &= Q \\ - \hat{\mathbf{Z}}\tau &= \phi \\ \hline (\mathbf{C}-\mathbf{Z})\tau &= Q \end{aligned}$$

fazendo $(\mathbf{C}-\mathbf{Z}) = \mathbf{M}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\tau &= Q \\ \therefore \tau &= \mathbf{M}^{-1}Q \end{aligned} \quad (4411)$$

onde, $\bar{M}^{-1}$, tem a seguinte forma

$$\bar{M}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \frac{1}{bv} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{bv} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{bv} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{bcv} & \frac{1}{bcv} & \dots & \frac{1}{bcv} & \frac{c+1}{cv} & \frac{1}{cv} & \dots & \frac{1}{cv} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{bcv} & \frac{1}{bcv} & \dots & \frac{1}{bcv} & \frac{1}{cv} & \frac{c+1}{cv} & \dots & \frac{1}{cv} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{bcv} & \frac{1}{bcv} & \dots & \frac{1}{bcv} & \frac{1}{cv} & \frac{1}{cv} & \dots & \frac{c+1}{cv} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{bcv} & \frac{1}{bcv} & \dots & \frac{1}{bcv} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{c+1}{cv} & \frac{1}{cv} & \dots & \frac{1}{cv} \\ \frac{1}{bcv} & \frac{1}{bcv} & \dots & \frac{1}{bcv} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{cv} & \frac{c+1}{cv} & \dots & \frac{1}{cv} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{bcv} & \frac{1}{bcv} & \dots & \frac{1}{bcv} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{cv} & \frac{1}{cv} & \dots & \frac{c+1}{cv} \end{array} \right]$$

assim uma solução para um determinado tratamento principal comum, i , é dada por

$$\hat{x}_i = \frac{1}{bv} Q_i = \frac{1}{bv} T_i - \hat{m} \quad (44.12)$$

e para um determinado tratamento principal regular $i'j$

$$\bar{x}_{i,j} = \frac{1}{v} Q_{i,j} + \frac{1}{cv} \sum_{i'}^k Q_{i',j} + \frac{1}{bcv} \sum_i^c Q_i \quad (44.13)$$

outra forma de apresentar (44.13), usando somente os totais de tratamentos, é obtido substituindo os valores do Q 's, ou seja.

$$\bar{x}_{i,j} = \frac{1}{v} [T_{i,j} - \frac{j_{i,j}}{K}] + \frac{1}{cv} \sum_{i'}^k [T_{i',j} - \frac{j_{i',j}}{K}] + \frac{1}{bcv} \sum_i^c [T_i - \frac{G}{K}]$$

como $j_{i,j} = B_j$, tem-se

$$\bar{x}_{i,j} = \frac{T_{i,j}}{v} - B_j (\frac{1}{Kv} + \frac{k}{cKv}) + \frac{1}{cv} \sum_{i'}^k T_{i',j} + \frac{1}{bcv} \sum_i^c T_i - \frac{G}{bKv}$$

como $B_j = \sum_{i'}^k T_{i',j} + (\sum_i^c T_i) [dentro de j]$ e $K=c+k$, sendo

$(\sum_i^c T_i) [dentro de j] = (\sum_i^c T_i) / j$ é a soma dos tratamentos comuns

no bloco B_j .

$$\therefore \bar{x}_{i,j} = \frac{T_{i,j}}{v} - (\sum_{i'}^k T_{i',j} + (\sum_i^c T_i) / j) (\frac{c+k}{cKv}) + \frac{1}{cv} \sum_{i'}^k T_{i',j} + \frac{1}{bcv} \sum_i^c T_i - \frac{G}{bKv}$$

$$\hat{x}_{i,j} = \frac{T_{i,j}}{v} + (\frac{1}{cv} - \frac{1}{cv}) \sum_{i'}^k T_{i',j} - \frac{1}{cv} (\sum_i^c T_i) / j + \frac{1}{bcv} \sum_i^c T_i - \hat{m}$$

$$\hat{x}_{i,j} = \frac{T_{i,j}}{v} - \frac{1}{cv} (\sum_i^c T_i) / j + \frac{1}{bcv} \sum_i^c T_i - \hat{m} \quad (44.14)$$

De (44.2)

$$\hat{b} = A^{-1} [B - N' \hat{\tau} - c' \hat{m}], \text{ tem-se}$$

$$\hat{b}_j = \frac{1}{cv} (\sum_i^c T_i) / j - \frac{1}{bcv} \sum_i^c T_i \quad (44.15)$$

Da equação (4), tem-se

$$\hat{a} = U^{-1} [A - d' \hat{m}] \quad (4416)$$

$$\hat{a} = U^{-1} A - bK \hat{m} E_{(v \times 1)} \quad (4417)$$

que é uma solução para os tratamentos secundários, assim para um determinado, $\hat{a}_v$, tem-se

$$\hat{a}_v = \frac{Av}{bK} - \hat{m} \quad (4418)$$

na equação (5) temos

$$\hat{t}a = L^{-1} [TA - B\hat{b}a - H' \hat{a} - V' \hat{b} - S' \hat{\tau} - e' \hat{m}] \quad (4419)$$

substituindo (4419) na equação (6) tem-se

$$(f' - B'L^{-1}e') \hat{m} + (D' - B'L^{-1}S') \hat{\tau} + (F' - B'L^{-1}V') \hat{b} + \\ + (G' - B'L^{-1}H') \hat{a} + (B'L^{-1}TA) + (W - B'L^{-1}B) \hat{b}a = BA$$

$$\text{mas } f' = B'L^{-1}e'; \quad D' = B'L^{-1}S'; \quad G' = B'L^{-1}H'$$

$$\therefore (W - B'L^{-1}B) \hat{b}a = BA - (F' - B'L^{-1}V') \hat{b} - B'L^{-1}TA \quad (4420)$$

de acordo com as restrições impostas, $\sum_j \hat{b}a_{jv} = 0$ e $\sum_j \hat{b}_{jj} = 0$; tem

se

$$(W - B'L^{-1}B) \hat{b}a = c \hat{b}a \quad e$$

$$(F' - B'L^{-1}V') \hat{b} = c \psi \hat{b} \text{ onde}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} I(b) \\ \dots \\ I(b) \end{bmatrix} \quad (bv \times b)$$

assim (4420), pode ser escrita da seguinte forma

$$c \hat{b}a = BA - c \psi \hat{b} - B'L^{-1}TA$$

$$\hat{b}a = \frac{BA}{c} - \psi \hat{b} - \frac{1}{c} B'L^{-1}TA \quad (4421)$$

que é uma solução para a interação blocos x anos, assim para um determinado $\hat{b}a_{jv}$, tem-se

$$\hat{b}a_{jv} = \frac{1}{c} BA_{jv} - \hat{b}_j - \frac{1}{bc} \sum_i TA_{iv} - \frac{1}{c} \sum_{i'} TA_{i'jv} \quad (44.22)$$

substituindo $\hat{b}_j$, dado em (4415) tem-se

$$\hat{b}a_{jv} = \frac{1}{c} BA_{jv} - \frac{1}{cv} \left(\sum_i \tau_i \right) / j + \frac{1}{bcv} \sum_i \tau_i - \frac{1}{bc} \sum_i TA_{iv} - \frac{1}{c} \sum_{i'} TA_{i'jv} \quad (4423)$$

substituindo em 4419, o valor de $\hat{b}a$ dado em (4421) tem-se

$$\begin{aligned} \hat{t}a = & (L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1}BB'L^{-1})TA - \frac{1}{c} L^{-1}BBA + (L^{-1}B\psi - L^{-1}V')\hat{b} - L^{-1}H'\hat{a} - \\ & - L^{-1}S'\hat{\tau} - L^{-1}e'\hat{m} \end{aligned}$$

$$\text{mas } L^{-1}B\psi = L^{-1}V'$$

e substituindo os valores de $\hat{\tau}$ e $\hat{a}$, dados em (4411) e (4416) respectivamente

$$\hat{t}\hat{a} = [L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1} BB' L^{-1}] T A - \frac{1}{c} L^{-1} BBA - L^{-1} H' U^{-1} A - L^{-1} S' M^{-1} Q + \\ + [L^{-1} H' U^{-1} d' - L^{-1} e'] \hat{m}$$

$$\text{mas } L^{-1} H' U^{-1} d' = L^{-1} e',$$

$$\therefore \hat{t}\hat{a} = [L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1} BB' L^{-1}] T A - \frac{1}{c} L^{-1} BBA - L^{-1} H' U^{-1} A - L^{-1} S' M^{-1} Q \\ \dots (4424)$$

que é uma solução para a interação tratamento principal x anos onde:

$\hat{t}a =$

$$\begin{bmatrix} \hat{t}a_{11} \\ \hat{t}a_{12} \\ \dots \\ \hat{t}a_{1\nu} \\ \hat{t}a_{21} \\ \hat{t}a_{22} \\ \dots \\ \hat{t}a_{2\nu} \\ \dots \\ \hat{t}a_{i\nu} \\ \dots \\ \hat{t}a_{111} \\ \hat{t}a_{211} \\ \dots \\ \hat{t}a_{i'j1} \\ \hat{t}a_{112} \\ \dots \\ \hat{t}a_{i'j2} \\ \dots \\ \hat{t}a_{i'j\nu} \end{bmatrix}$$

$$; \frac{1}{c} L^{-1} BBA = \frac{1}{c}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{b} \sum_j BA_{j1} \\ \frac{1}{b} \sum_j BA_{j2} \\ \dots \\ \frac{1}{b} \sum_j BA_{j\nu} \\ \frac{1}{b} \sum_j BA_{j1} \\ \dots \\ \frac{1}{b} \sum_j BA_{j\nu} \\ \dots \\ \frac{1}{b} \sum_j BA_{j\nu} \\ BA_{11} \\ BA_{21} \\ \dots \\ BA_{j1} \\ BA_{12} \\ \dots \\ BA_{j2} \\ \dots \\ BA_{1\nu} \\ \dots \\ BA_{j\nu} \end{bmatrix}$$

$$[L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1} BB' L^{-1}] TA =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{b} TA_{11} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i1} + \frac{1}{cb} \sum_{i,j} TA_{ij1} \\ \frac{1}{b} TA_{12} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i2} + \frac{1}{cb} \sum_{i,j} TA_{ij2} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{b} TA_{1v} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{cb} \sum_{i,j} TA_{ijv} \\ \frac{1}{b} TA_{21} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i1} + \frac{1}{cb} \sum_{i,j} TA_{ij1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{b} TA_{2v} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{cb} \sum_{i,j} TA_{ijv} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{b} TA_{iv} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{cb} \sum_{i,j} TA_{ijv} \\ \dots \dots \dots \\ TA_{111} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i1} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij1} \\ TA_{211} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i1} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij1} \\ \dots \dots \dots \\ TA_{ij1} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i1} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij1} \\ TA_{112} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i2} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij2} \\ \dots \dots \dots \\ TA_{ij2} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i2} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij2} \\ \dots \dots \dots \\ TA_{ijv} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ijv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} TA_{11} + \frac{1}{cb} A_1 \\ \frac{1}{b} TA_{12} + \frac{1}{cb} A_2 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{b} TA_{1v} + \frac{1}{cb} A_v \\ \frac{1}{b} TA_{21} + \frac{1}{cb} A_1 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{b} TA_{2v} + \frac{1}{cb} A_v \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{b} TA_{iv} + \frac{1}{cb} A_v \\ \dots \dots \dots \\ TA_{111} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i1} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij1} \\ TA_{211} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i1} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij1} \\ \dots \dots \dots \\ TA_{ij1} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i1} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij1} \\ TA_{112} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i2} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij2} \\ \dots \dots \dots \\ TA_{ij2} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{i2} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ij2} \\ \dots \dots \dots \\ TA_{ijv} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{c} \sum_{i,j} TA_{ijv} \end{bmatrix}$$

$$L^{-1}H'U^{-1}A = \frac{1}{bK}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_v \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_v \\ \dots \\ \dots \\ A_v \\ \dots \\ A_1 \\ A_1 \\ \dots \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_2 \\ \dots \\ \dots \\ A_v \end{bmatrix}$$

$$; \quad L^{-1}S'M^{-1}Q =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{bv} Q_1 \\ \frac{1}{bv} Q_1 \\ \dots \\ \frac{1}{bv} Q_1 \\ \frac{1}{bv} Q_2 \\ \frac{1}{bv} Q_2 \\ \dots \\ \frac{1}{bv} Q_2 \\ \dots \\ \dots \\ \frac{1}{bv} Q_i \\ \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i + \frac{1}{v} Q_{11} + \frac{1}{cv} \sum_{i'} Q_{i'1} \\ \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i + \frac{1}{v} Q_{21} + \frac{1}{cv} \sum_{i'} Q_{i'1} \\ \dots \\ \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i + \frac{1}{v} Q_{i'1} + \frac{1}{cv} \sum_{i'} Q_{i'1} \\ \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i + \frac{1}{v} Q_{12} + \frac{1}{cv} \sum_{i'} Q_{i'2} \\ \dots \\ \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i + \frac{1}{v} Q_{i'2} + \frac{1}{cv} \sum_{i'} Q_{i'2} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i + \frac{1}{v} Q_{i'j} + \frac{1}{cv} \sum_{i'} Q_{i'j} \end{bmatrix}$$

assim para as interações tratamentos comuns x anos, tem-se

$$\hat{t}a_{iv} = \frac{1}{b} TA_{iv} + \frac{1}{bc} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{bc} \sum_{ij} TA_{ijv} - \frac{1}{bc} \sum_j BA_{jv} - \frac{1}{bK} A_v - \frac{1}{bv} Q_i$$

mas $\sum_j BA_{jv} = \sum_i TA_{iv} + \sum_{ij} TA_{ijv}$

$$\therefore \hat{t}a_{iv} = \frac{1}{b} TA_{iv} - \frac{1}{bK} A_v - \frac{1}{bv} Q_i \quad (4425)$$

ou substituindo $Q_i = T_i - \frac{G}{K}$, tem-se

$$\hat{t}a_{iv} = \frac{1}{b} TA_{iv} - \frac{1}{bK} A_v - \frac{1}{bv} T_i + \frac{G}{bKv}$$

$$\hat{t}a_{iv} = \frac{1}{b} TA_{iv} - \frac{1}{bK} A_v - \frac{1}{bv} T_i + \hat{m} \quad (4426)$$

e para as interações tratamentos regulares x anos, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{t}a_{ijv} &= TA_{ijv} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{c} \sum_{i'} TA_{i'jv} - \frac{1}{bK} A_v - \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i - \\ &\quad - \frac{1}{v} Q_{i'j} - \frac{1}{cv} \sum_{i'} Q_{i'j} - \frac{1}{c} BA_{jv} \end{aligned}$$

ou substituindo os valores dos Q 's pelos seus valores dados em 448 e 4410 respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{t}a_{ijv} &= TA_{ijv} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{c} \sum_{i'} TA_{i'jv} - \frac{1}{c} BA_{jv} - \frac{1}{bK} A_v - \\ &\quad - \frac{1}{bcv} \sum_i [T_i - \frac{G}{K}] - \frac{1}{v} [T_{i'j} - \frac{1}{K} B_j] - \frac{1}{cv} \sum_{i'} [T_{i'j} - \frac{1}{K} B_j] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{t}a_{ijv} &= TA_{ijv} + \frac{1}{cb} \sum_i TA_{iv} + \frac{1}{c} \sum_{i'} TA_{i'jv} - \frac{1}{c} BA_{jv} - \frac{1}{bK} A_v - \\ &\quad - \frac{1}{bcv} \sum_i T_i + \frac{cG}{bcvK} - \frac{1}{v} T_{i'j} - \frac{1}{cv} \sum_{i'} T_{i'j} + (\frac{c+k}{cKv}) B_j \quad (4427) \end{aligned}$$

mas

$$B_j = \left(\sum_i^* T_i \right) / j + \sum_{i'} T_{i'} j \quad e$$

$$BA_{jv} = \left(\sum_{\lambda}^* TA_{\lambda v} \right) / j + \sum_{\lambda'} TA_{\lambda' v} j_v$$

substituindo estes valores em 4427, resulta

$$\begin{aligned} \hat{a}_{i'jv} = TA_{i'jv} + \frac{1}{cb} \sum_{\lambda} TA_{\lambda v} - \frac{1}{c} \left(\sum_{\lambda}^* TA_{\lambda v} \right) / j - \frac{1}{bK} A_v - \frac{1}{bcv} \sum_{\lambda} T_{\lambda} - \\ - \frac{1}{v} T_{i'j} + \frac{1}{cv} \left(\sum_{\lambda}^* T_{\lambda} \right) / j + \hat{m} \quad (4428) \end{aligned}$$

4.5.1. Introdução

Do modelo matemático $Y=X\theta+\epsilon$, e da estimativa de θ , resulta a soma de quadrados dos resíduos

$$SQ \text{ Res} = Y'Y - \hat{\theta}'X'Y$$

$$= SQ_{Total} - SQ \text{ Parâmetros} = SQT - SQP$$

$$\text{mas } X'Y = X'X \hat{\theta}$$

$$\therefore SQ \text{ Res} = Y'Y - \hat{\theta}'X'X \hat{\theta} \quad (4511)$$

onde

$$SQP = \hat{\theta}'X'X \hat{\theta} = \hat{\theta}'X'Y \quad (4512)$$

$$\left(\hat{m} \quad \hat{\tau}' \quad \hat{b}' \quad \hat{a}' \quad \hat{t}a' \quad \hat{b}a' \right) \begin{pmatrix} n & g & c & d & e & f \\ g' & R & N & P & S & D \\ c' & N' & A & K & V & F \\ d' & P' & K' & U & H & G \\ e' & S' & V' & H' & L & B \\ f' & D' & F' & G' & B' & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{b} \\ \hat{a} \\ \hat{t}a \\ \hat{b}a \end{pmatrix} \quad (4513)$$

usando-se as notações de IEMMA(1981) tem-se para as partições das matrizes

$$SQP = \begin{bmatrix} \hat{\theta}'_1 & \hat{\theta}'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X'X)_a & (X'X)_c \\ (X'X)'_c & (X'X)_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

onde as partições de $\hat{\theta}$, referem-se às duas partes encontradas no esquema de análise de variância para ensaios em parcelas subdivididas em esquema de blocos casualizados.

Efetuando-se o produto tem-se

$$SQP = \hat{\theta}'_1 (X'X)_a \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}'_2 (X'X)_d \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}'_1 (X'X)_c \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}'_2 (X'X)'_c \hat{\theta}_1$$

mas de acordo com as restrições impostas em 4.2. tem-se

$$\hat{\theta}'_1 (X'X)_c \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}'_2 (X'X)'_c \hat{\theta}_1 = \phi$$

$$SQP = \hat{\theta}'_1 (X'X)_a \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}'_2 (X'X)_d \hat{\theta}_2$$

$$= SQP(a) + SQP(b)$$

assim

$$SQRes = SQT - SQP(a) - SQP(b)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} SQRes &= [SQParcelas - SQP(a)] + [SQT - SQParcelas - SQP(b)] \quad (4514) \\ &= SQRes(a) + SQRes(b) \end{aligned}$$

onde

$$SQParcelas = \frac{1}{v} Y' \phi Y - Co \quad (451.5)$$

sendo

$$\phi = \begin{pmatrix} I_{(bc)} & I_{(bc)} \dots I_{(bc)} & \phi_{(bcxz)} & \phi_{(bcxz)} \dots \phi_{(bcxz)} \\ I_{(bc)} & I_{(bc)} & I_{(bc)} & \phi_{(bcxz)} & \phi_{(bcxz)} \dots \phi_{(bcxz)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{(bc)} & I_{(bc)} \dots I_{(bc)} & \phi_{(bcxz)} & \phi_{(bcxz)} \dots \phi_{(bcxz)} \\ \phi_{(zxbc)} & \phi_{(zxbc)} \dots \phi_{(zxbc)} I_{(z)} & I_{(z)} \dots I_{(z)} \\ \phi_{(zxbc)} & \phi_{(zxbc)} \dots \phi_{(zxbc)} I_{(z)} & I_{(z)} \dots I_{(z)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{(zxbc)} & \phi_{(zxbc)} & \phi_{(zxbc)} I_{(z)} & I_{(z)} & I_{(z)} \end{pmatrix}$$

(bcv+uz) x
x(bcv+uz)

obs: a característica de $\bar{\phi} = bc + z$, mas $z = bK$, portanto a característica de $\bar{\phi} = bc + bk = bK$

a SQParcelas é usualmente encontrada na literatura

$$SQParcelas = \frac{1}{v} \sum_{\ell j} (y_{\ell j})^2 - Co \quad (451.6)$$

$$\text{sendo } Co = \frac{G^2}{n}$$

4.5.2. Soma de Quadrados dos Parâmetros;

Tem-se de (451,2)

$$SQP = \hat{\theta}' X' Y = [\hat{m} \quad \hat{\tau}' \quad \hat{b}' : \hat{a}' \quad \hat{ta}' \quad \hat{ba}'] \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ \dots \\ A \\ TA \\ BA \end{bmatrix}$$

$$SQP = [\hat{m}G + \hat{\tau}'T + \hat{b}'B] + [\hat{a}'A + \hat{ta}'TA + \hat{ba}'BA] \quad (452,1)$$

onde

$$SQP(a) = [\hat{m}G + \hat{\tau}'T + \hat{b}'B] \quad (452,2)$$

substituindo o valor $\hat{b}'$ de 442, tem-se

$$SQP(a) = \hat{m}G + \hat{\tau}'T + [B' A^{-1} - \hat{\tau}' N A^{-1} - \hat{m} C A^{-1}] B$$

$$SQP(a) = \hat{m}G + \hat{\tau}'[T - N A^{-1} B] + B' A^{-1} B - \hat{m} C A^{-1} B$$

mas

$$C A^{-1} B = \sum_j B_j = G \quad e$$

$$T - N A^{-1} B = Q$$

$$\therefore SQP(a) = \hat{m}G + \hat{\tau}'Q + B' A^{-1} B - \hat{m}G$$

como $\hat{m}G = Co$, tem-se

$$SQP(a) = Co + \hat{\tau}' Q + B'A^{-1}B - Co \quad (4523)$$

fazendo

$$a) SQBlocos = B' A^{-1} B - Co \quad (4524)$$

$$= \frac{1}{Kv} \sum_j B_j^2 - Co \quad (4524a)$$

$$b) SQTrat.ajust. = \hat{\tau}' Q = Q' M^{-1} Q \quad (4525)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{\tau}' Q = [\hat{\tau}'_c \quad \hat{\tau}'_r] \begin{vmatrix} Q_c \\ Q_r \end{vmatrix} \\ &= \hat{\tau}'_c Q_c + \hat{\tau}'_r Q_r \quad (4526) \end{aligned}$$

ou ainda

$$SQTrat\ ajust = \sum_i \hat{x}_i Q_i + \sum_{i,j} \hat{x}_{i,j} Q_{i,j} \quad (4527)$$

substituindo $\hat{x}_i$ e $\hat{x}_{i,j}$ pelos seus valores dados em (4412) e (4413) respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} SQtrat\ aj &= \sum_i \left(\frac{1}{bv} Q_i \right) Q_i + \sum_{i,j} \left(\frac{1}{v} Q_{i,j} + \frac{1}{cv} \sum_i Q_i \right) Q_{i,j} + \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i \sum_i Q_i \\ &= \frac{1}{bv} \sum_i Q_i^2 + \frac{1}{v} \sum_{i,j} Q_{i,j}^2 + \frac{1}{bcv} \sum_i Q_i \sum_{i,j} Q_{i,j} + \frac{1}{cv} \sum_{i,j} \left(\sum_i Q_i \right) Q_{i,j} \end{aligned}$$

mas

$$\sum_i Q_i = - \sum_{i,j} Q_{i,j} \quad e$$

$$\sum_{i,j} (\sum_i Q_{i,j}) Q_{i,j} = \sum_j (\sum_i Q_{i,j})^2$$

$$\therefore SQ_{trat\ aj} = \frac{1}{bv} \sum_i Q_i^2 + \frac{1}{v} \sum_{i,j} Q_{i,j}^2 - \frac{1}{bcv} (\sum_i Q_i)^2 + \frac{1}{cv} \sum_j (\sum_i Q_{i,j})^2 \quad (4528)$$

outra forma de apresentar a $SQ_{trat\ aj}$, é através dos totais, resultando.

$$SQ_{trat\ aj} = \frac{1}{bv} \sum_i T_i^2 + \frac{1}{v} \sum_{i,j} T_{i,j}^2 - \frac{1}{bcv} (\sum_i T_i)^2 + \frac{1}{cv} \sum_j (\sum_i^* T_i)^2 / j - \frac{1}{kv} \sum_j (B_j)^2 \quad (4528a)$$

assim $SQP(a) = Co + SQ_{trat\ aj} + SQ_{Blocos}$ (4529)

e a soma de quadrados de Resíduo(a) é dada por

$$SQ_{Res(a)} = SQ_{Parcelas} - SQ_{trat\ aj} - SQ_{Blocos} \quad (45210)$$

e para a soma de quadrado de parâmetro (b), tem-se

$$SQP(b) = \hat{a}' A + \hat{t} a' TA + \hat{b} a' BA \quad (45211)$$

fazendo

$$a) \quad SQ \text{ anos} = \hat{a}'A$$

substituindo $\hat{a}$, de (44.16), tem-se

$$SQ \text{ anos} = [A' U^{-1} - \hat{m} d U^{-1}] A$$

$$= A' U^{-1} A - m d U^{-1} A$$

$$\text{mas } d U^{-1} A = G$$

$$\therefore SQ \text{ anos} = A' U^{-1} A - \hat{m} G = A' U^{-1} A - Co \quad (452,12)$$

ou ainda

$$SQ \text{ anos} = \frac{1}{bK} \sum_v A_v^2 - Co \quad (452,13)$$

$$b) \quad SQtxa = \hat{t}a' TA$$

substituindo $\hat{t}a'$, de (44,24), tem-se

$$SQtxa = TA' (L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1} BB' L^{-1}) TA - \frac{1}{c} BA' B' L^{-1} TA - \\ - A' U^{-1} HL^{-1} TA - Q'M^{-1} SL^{-1} TA$$

$$\text{mas } Q'M^{-1} = \hat{\tau}' \text{ e } SL^{-1} TA = T; A' U^{-1} HL^{-1} TA = \frac{1}{bK} A'A$$

$$SQtxa = TA' [L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1} BB' L^{-1}] TA - \frac{1}{c} BA' B' L^{-1} TA - \frac{1}{bK} A'A - \hat{\tau}' T$$

$$SQtxa = TA' [L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1} BB' L^{-1}] TA - \frac{1}{c} BA' B' L^{-1} TA - SQa -$$

$$- SQ \text{ trat}_{usual} - Co \quad (452,14)$$

onde

$$\begin{aligned} TA' [L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1} BB' L^{-1}] TA &= \frac{1}{b} \sum_{i,v} (TA_{i,v})^2 + \sum_{i',j,v} (TA_{i',j,v})^2 + \\ &+ \frac{1}{cb} \sum_v A_v \sum_i TA_{i,v} + \frac{1}{cb} \sum_v \left(\sum_i TA_{i,v} \right) \left(\sum_{i',j} TA_{i',j,v} \right) + \\ &+ \frac{1}{c} \sum_{j,v} \left(\sum_{i'} TA_{i',j,v} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} BA' B' L^{-1} TA &= \frac{1}{bc} \left[\sum_v A_v \sum_i TA_{i,v} \right] + \frac{1}{c} \sum_{j,v} \left[BA_{j,v} \sum_{i'} TA_{i',j,v} \right] \\ &= \frac{1}{bc} \left[\sum_v A_v \sum_i TA_{i,v} \right] + \frac{1}{c} \sum_{j,v} \left[\sum_{i'} TA_{i',j,v} \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{c} \sum_{j,v} \left[\left(\sum_i TA_{i,v} \right) / j \sum_{i'} TA_{i',j,v} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{bK} A'A - Co = SQ \text{ anos}$$

$$\hat{\tau}'T = SQ \text{ trat usual}$$

tendo-se assim

$$\begin{aligned} SQtxa &= \frac{1}{b} \sum_{i,v} (TA_{i,v})^2 + \sum_{i',j,v} (TA_{i',j,v})^2 + \frac{1}{cb} \sum_v \left[\left(\sum_i TA_{i,v} \right) \left(\sum_{i',j} TA_{i',j,v} \right) \right] - \\ &- \frac{1}{c} \sum_{j,v} \left[\left(\sum_i TA_{i,v} \right) / j \left(\sum_{i'} TA_{i',j,v} \right) \right] - \\ &- SQanos - SQtrat_{usual} - Co \quad (45215) \end{aligned}$$

$$c) \quad SQbxa = \hat{b}a' BA$$

substituindo $\hat{b}a$, de (4421), tem-se

$$SQbxa = \frac{1}{c} BA' BA - \hat{b}' \psi' BA - \frac{1}{c} TA' L^{-1} BBA$$

$$\text{mas } \psi' BA = B$$

$$SQbxa = \frac{1}{c} BA' BA - \hat{b}' B - \frac{1}{c} TA' L^{-1} BBA$$

$$SQbxa = \frac{1}{c} BA' BA - \frac{1}{c} TA' L^{-1} BBA - SQblocos^* \quad (45216)$$

onde

$$\frac{1}{c} BA' BA = \frac{1}{c} \sum_{jv} BA_{jv}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} TA' L^{-1} BBA &= \frac{1}{bc} \left[\sum_v A_v \sum_i TA_{iv} \right] + \frac{1}{c} \sum_{jv} \left(\sum_i TA_{ij} TA_{iv} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{c} \sum_{jv} \left[\left(\sum_i^* TA_{iv} \right) / j \right] \sum_i TA_{ij} \end{aligned}$$

$$SQblocos^* = \hat{b}' B = [B' A^{-1} B - Co - \tau' T + \tau' Q] = \sum_j \hat{b}_j B_j$$

substituindo o valor de $\hat{b}_j$ dado em 4415

$$\sum_j \left[\frac{1}{cv} \left(\sum_i^* TA_{iv} \right) / j - \frac{1}{bcv} \sum_i TA_{iv} \right] B_j =$$

$$= \frac{1}{cv} \sum_j \left(\sum_i^* TA_{iv} \right) / j \cdot B_j - \frac{1}{bcv} \left(\sum_i TA_{iv} \right) \sum_j B_j =$$

$$= \frac{1}{cv} \sum_j \left(\sum_i^* TA_{iv} \right) / j \cdot B_j - \sum_i TA_{iv} \frac{G}{bcv} =$$

$$= \frac{1}{cv} \sum_j \left(\sum_i^* TA_{iv} \right) / j \cdot B_j - m \sum_i TA_{iv} = SQ \text{ blocos } *$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{SQbxa} = & \frac{1}{c} \sum_{jv} BA_{jv}^2 - \frac{1}{bc} \left[\sum_v A_v \sum_i TA_{iv} \right] - \frac{1}{c} \sum_{jv} \left(\sum_i TA_{ijv} \right)^2 - \\
& - \frac{1}{c} \sum_{jv} \left[\left(\sum_i TA_{iv} \right) / j \sum_i TA_{ijv} \right] - \text{SQblocos}^* \\
& (45217)
\end{aligned}$$

assim

$$\text{SQP}(b) = \text{SQanos} + \text{SQtxa} + \text{SQbxa}$$

e para a soma de quadrado de Resíduo (b)

$$\text{SQRes}(b) = \text{SQTotal} - \text{SQP}(b) - \text{SQParcelas}$$

$$\text{onde SQTotal} = Y'Y - Co$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{SQRes}(b) = & Y'Y - Co - \text{SQanos} - \text{SQtxa} - \text{SQbxa} - \text{SQParcelas} \\
& \dots (45218)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{SQRes}(b) = & Y'Y - Co - \text{SQanos} - \text{SQtxa} - \text{SQbxa} - \frac{1}{v} Y' \phi Y + Co \\
= & Y' \left[I - \frac{1}{v} \phi \right] Y - \text{SQanos} - \text{SQtxa} - \text{SQbxa} \dots (45219)
\end{aligned}$$

4.6. Esperança das Somas de Quadrados

Para o desenvolvimento das esperanças matemáticas das somas de quadrados, as mesmas restrições usadas para a solução do sistema de equações, dadas em 4.2, são usadas agora para os parâmetros.

No desenvolvimento deste capítulo, utilizaremos as mesmas metodologias empregadas por IEMMA (1981).

4.6.1. Média Geral

$$SQ_{\hat{m}} = \hat{m}G = \frac{G^2}{bKv} = \frac{G^2}{n}$$

$$E(SQ_{\hat{m}}) = \frac{1}{n} E(G^2) = \frac{1}{n} E(Y'X_0X_0'Y) =$$

$$= \frac{1}{n} E[(\theta X' + \epsilon')X_0X_0'(X\theta + \epsilon)]$$

desenvolvendo os produtos e aplicando-se a esperança matemática, considerando que

$$COV(y_{ljv}, y_{l'j'v'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } l = l'; j = j'; v = v' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } l = l'; j = j'; v \neq v' \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

tem-se

$$E(SQ\hat{m}) = \frac{1}{n} \theta' X' X_0 X_0' X \theta + \frac{1}{n} E(\epsilon' X_0 X_0' \epsilon) \quad (461.1)$$

onde

$$i) \frac{1}{n} \theta' X' X_0 X_0' X \theta = \frac{1}{n} \theta' \begin{pmatrix} n^2 & ng & nc & nd & ne & nf \\ g'n & g'g & g'c & g'd & g'e & g'f \\ c'n & c'g & c'c & c'd & c'e & c'f \\ d'n & d'g & d'c & d'd & d'e & d'f \\ e'n & e'g & e'c & e'd & e'e & e'f \\ f'n & f'g & f'c & f'd & f'e & f'f \end{pmatrix} \theta$$

efetuando-se o produto e de acordo com as restrições impostas em 4.2, tem-se as seguintes matrizes nulas

$$r'g' = b'c' = a'd' = ta'e' = ba'f' = \phi$$

resultando assim

$$\frac{1}{n} \theta' X' X_0 X_0' X \theta = n m^2 \quad (461.2)$$

e em conformidade com IEMMA(1981), para o desenvolvimento de

$$ii) \frac{1}{n} E(\epsilon' X_0 X_0' \epsilon) = \frac{1}{n} \text{TR}(X_0 X_0') [1 + (v-1) \rho] \sigma^2$$

onde TR, significa traço da matriz,

$$\text{sendo } X_0 X_0' = bKvE_{(1 \times 1)} \quad \text{então } \text{TR}(X_0 X_0') = bKv = n$$

$$\text{assim } \frac{1}{n} E(\epsilon' X_0 X_0' \epsilon) = [1 + (v-1) \rho] \sigma^2 \quad (461.3)$$

substituindo 461.2 461.3 em 461.1 tem-se

$$E(SQ\hat{m}) = nm^2 + [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 \quad (461.4)$$

4.6.2. Tratamentos Principais

De 452.5, tem-se

$$SQ_{trat\ aj} = \hat{\tau}' Q = Q M^{-1'} Q$$

Para minimizar os cálculos devido a substituição da matriz $Q = T - N A^{-1} B$, adotou-se o uso da matriz que CHAKRABARTI(1962), PIMENTEL GOMES(1967), DINIZ(1980), chamam de matriz W , a qual é definida por IEMMA(1981), como:

$$A = \begin{bmatrix} \phi_{(lx1)} & \vdots & I_{(l)} & (-NA^{-1})_{(lxb)} & \vdots & \phi_{(lxv)} & \vdots & \phi_{(lxl v)} & \vdots & \phi_{(lxbv)} \end{bmatrix}$$

usando a propriedade demonstrada por PIMENTEL GOMES (1967) de que $Q = A X' Y$, obtêm-se

$$SQ_{trat\ aj} = Y' X A' M^{-1'} A X' Y \quad (462.1)$$

$$= (\theta' X' + \epsilon') X A' M^{-1'} A X' (X\theta + \epsilon)$$

$$E(SQ_{trat\ aj}) = \theta' X' X A' M^{-1'} A X' X \theta + E(\epsilon' X A' M^{-1'} A X' \epsilon) \quad (462.2)$$

$$\text{mas } \Lambda X'X\theta = C\tau = Q \quad \text{e} \quad \Lambda X'X \Lambda' = C$$

tem-se assim 4622, a seguinte estrutura.

$$E(\text{SQtrat aj}) = \tau' C' M^{-1'} C \tau + E(\varepsilon' X \Lambda' M^{-1'} \Lambda X' \varepsilon)$$

$$\text{mas } C' M^{-1'} C = C \quad \text{e} \quad C \tau = Q$$

$$E(\text{SQtrat aj}) = \tau' Q + E(\varepsilon' X \Lambda' M^{-1'} \Lambda X' \varepsilon) \quad (4623)$$

no desenvolvimento do termo $E(\varepsilon' X \Lambda' M^{-1'} \Lambda X' \varepsilon)$, utilizando o método apresentado por IEMMA(1981), define-se

$$\pi_0 = X \Lambda' M^{-1'} \Lambda X'$$

$$E(\varepsilon' X \Lambda' M^{-1'} \Lambda X' \varepsilon) = E(\varepsilon' \pi_0 \varepsilon) = \text{TR}(\pi_0) [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 \quad (4624)$$

onde partindo-se a matriz π_0 em $\pi_1 = X \Lambda'$ e $\pi_2 = M^{-1'} \Lambda X'$

e usando-se a propriedade de que se existem os produtos

$\pi_1 \pi_2$ e $\pi_2 \pi_1$ então $\text{TR}(\pi_1 \pi_2) = \text{TR}(\pi_2 \pi_1)$, assim

$$\text{TR}(\pi_0) = \text{TR}(\pi_2 \pi_1) = \text{TR}(M^{-1'} \Lambda X' X \Lambda') = \text{TR}(M^{-1'} C)$$

mas $M^{-1'} C$ é idempotentes então

$\text{TR}(\mathbf{M}^{-1'}\mathbf{C}) = \varrho(\mathbf{M}^{-1'}\mathbf{C})$, sendo ϱ a característica da matriz.

Tendo-se em conta que $\mathbf{C}$ é singular de característica $\ell-1 = c+z-1$, então como $\mathbf{M}^{-1'}$ é não singular o produto $\mathbf{M}^{-1'}\mathbf{C}$, preserva a característica de $\mathbf{C}$, logo

$$\text{TR}(\mathbf{M}^{-1'}\mathbf{C}) = \varrho(\mathbf{C}) = \ell-1$$

obtendo-se assim para 4624,

$$E(\varepsilon'X \wedge' \mathbf{M}^{-1'} \wedge X'\varepsilon) = (\ell-1)[1+(\nu-1)\rho]\sigma^2 \quad (4625)$$

substituindo 4625 em 4623, tem-se

$$E(\text{SQtrat aj}) = \tau'Q + (\ell-1)[1+(\nu-1)\rho]\sigma^2 \quad (4626)$$

Da característica de $\mathbf{C}$, obtém-se o número de graus de liberdade para os tratamentos principais: desse modo

$$E(\text{QMtrat aj}) = [1+(\nu-1)\rho]\sigma^2 + \frac{\tau'Q}{\ell-1} \quad (4627)$$

4.6.3. Blocos

De 4524

$$SQb = B'A^{-1}B - C_0$$

$$= Y'X_3A^{-1}X_3'Y - C_0$$

$$E(SQb) = E[(\theta'X' + \epsilon')X_3A^{-1}X_3'(X\theta + \epsilon)] - E(C_0)$$

$$= \theta'X'X_3A^{-1}X_3'X\theta + E(\epsilon'X_3A^{-1}X_3'\epsilon) - E(C_0) \quad (463.1)$$

desenvolvendo por partes tem-se

$$i) \theta'X'X_3A^{-1}X_3'X\theta = \theta' \begin{pmatrix} c'A^{-1}c' & c'A^{-1}N' & c & c'A^{-1}K & c'A^{-1}V & c'A^{-1}F \\ N'A^{-1}c' & N'A^{-1}N' & N & N'A^{-1}K & N'A^{-1}V & N'A^{-1}F \\ c' & N' & A & K & V & F \\ K'A^{-1}c' & K'A^{-1}N' & K' & K'A^{-1}K & K'A^{-1}V & K'A^{-1}F \\ V'A^{-1}c' & V'A^{-1}N' & V' & V'A^{-1}K & V'A^{-1}V & V'A^{-1}F \\ F'A^{-1}c' & F'A^{-1}N' & F' & F'A^{-1}K & F'A^{-1}V & F'A^{-1}F \end{pmatrix} \theta$$

efetuando-se os produtos, e de acordo com as restrições impostas, tem-se as seguintes matrizes nulas.

$$\begin{aligned} & \tau'N'A^{-1}c'; \quad b'c'; \quad a'K'A^{-1}c'; \quad ta'V'A^{-1}c'; \quad ba'F'A^{-1}c'; \quad c'A^{-1}N'\tau; \\ & a'K'A^{-1}N'; \quad ta'V'A^{-1}N'; \quad ba'F'A^{-1}N'; \quad a'K'; \quad ta'V'; \quad ba'F' \end{aligned}$$

assim

$$\theta'X'X_3A^{-1}X_3'X\theta = n m^2 + \tau'N A^{-1}N'\tau + 2b'N'\tau + b'A b$$

$$\text{mas } R - \mathbf{C} = N A^{-1}N';$$

$$\therefore \theta'X'X_3A^{-1}X_3'X\theta = nm^2 + \tau'R\tau - \tau'\mathbf{C}\tau + 2b'N'\tau + b'A b \quad (4632)$$

$$\text{ii) } E(\varepsilon'X_3A^{-1}X_3'\varepsilon)$$

define-se $\pi_3 = X_3A^{-1}X_3'$; $\pi_4 = X_3$ e $\pi_5 = A^{-1}X_3'$, tendo-se

$$E(\varepsilon'X_3A^{-1}X_3'\varepsilon) = E(\varepsilon'\pi_3\varepsilon) = \text{TR}(\pi_3)[1 + (\nu-1)\rho]\sigma^2$$

$$\text{onde } \text{TR}(\pi_3) = \text{TR}(\pi_4 \cdot \pi_5) = \text{TR}(\pi_5 \cdot \pi_4) =$$

$$= \text{TR}(A^{-1}A) = \text{TR}(I_{(b)}) = b$$

$$\therefore E(\varepsilon'X_3A^{-1}X_3'\varepsilon) = b [1 + (\nu-1)\rho]\sigma^2 \quad (4633)$$

$$\text{iii) } E(\text{Co}) = E(\text{SQ}\hat{m}) = n m^2 + [1 + (\nu-1)\rho]\sigma^2 \quad \text{de (4614)}$$

susbtituindo 4614; 4632; 4633 em 4631, tem-se

$$E(\text{SQ}b) = (b-1)[1 + (\nu-1)\rho]\sigma^2 + \tau'R\tau - \tau'\mathbf{C}\tau + 2b'N'\tau + b'Ab$$

$$\text{como } \mathbf{C}\tau = Q$$

$$E(SQb) = (b-1)[1 + (v-1)\rho] \sigma^2 + \tau' R \tau - \tau' Q + 2b' N' \tau + b' A b \quad (4634)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} E(SQb) = (b-1)[1 + (v-1)\rho] \sigma^2 + vb \sum_i x_i^2 + v \sum_{i,j} x_i^2 x_j^2 + \\ + 2v \sum_j b_j \sum_i x_i x_j + Kv \sum_j b_j^2 - \tau' Q \quad (4635) \end{aligned}$$

$$e \ E(QMb) = [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 + \frac{1}{b-1} \{ \tau' R \tau - \tau' Q + 2b' N' \tau + b' A b \} \dots (4636)$$

4.6.4. Soma de Quadrados de Parcelas

$$SQ_{\text{Parc}} = \frac{1}{v} Y' \Phi Y - Co$$

$$\begin{aligned} E(SQ_{\text{Parc}}) &= \frac{1}{v} E[(\theta' X' + \varepsilon') \Phi (X\theta + \varepsilon)] - E(Co) \\ &= \frac{1}{v} (\theta' X' \Phi X \theta) + \frac{1}{v} E(\varepsilon' \Phi \varepsilon) - E(Co) \quad (4641) \end{aligned}$$

resolvendo por partes tem-se

$$i) \frac{1}{v} \theta' X' \Phi X \theta = \frac{1}{v} \theta' \begin{bmatrix} v_n & v_g & v_c & v_d & v_e & v_f \\ v_g' & v_R & v_N & v_P & v_S & v_D \\ v_c' & v_N' & v_A & v_K & v_V & v_F \\ v_d' & v_P' & v_K' & U^* & H^* & G^* \\ v_e' & v_S' & v_V' & H^* & L^* & B^* \\ v_f' & v_D' & v_F' & G^* & B^* & W^* \end{bmatrix} \theta$$

sendo, v o número de tratamentos secundários

$$U^* = K E_{(v \times v)} ; \quad K \text{ número de parcelas por bloco}$$

$$H^* = [H_0^* : H_1^*] ; \quad H_0^* = b E_{(v \times c v)} ; \quad b = \text{números de blocos.}$$

$$H_1^* = E_{(v \times v z)}$$

$$G^* = K E_{(v \times b v)}$$

L_0^* = matriz diagonal de submatrizes

$E_{(c \times c)}$ de dim $c v \times c v$

$$L^* = \begin{bmatrix} L_0^* & \vdots & L_1^* \\ \hline L_1^{*'} & \vdots & L_2^* \end{bmatrix} (l v \times l v)$$

$$L_1^* = \emptyset_{(c v \times v z)}$$

L_2^* = matriz de submatrizes $I_{(\bar{z})}$ de dimensão $v \bar{z} \times v z$.

$$B^* = \begin{pmatrix} B_0^* & \dots & B_0^* \\ B_1^* & \dots & B_1^* \\ B_1^* & \dots & B_1^* \\ \dots & \dots & \dots \\ B_1^* & \dots & B_1^* \end{pmatrix} (lv \times bv)$$

$$B_0^* = E_{(cv \times b)}$$

$$B_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} (z \times b)$$

W^* = matriz de submatrizes $KI_{(b)}$, com K número de parcelas por bloco; dim de $W^* = bv \times bv$.

assim efetuando-se os produtos e de acordo com as restrições, têm-se as seguintes matrizes nulas.

$$\tau'g'; c b; da; e ta; f ba; a'P'; ta'S'; ba'D'; a'K';$$

$$ta'V'; ba'F'; ta'H'; ba'G^*; ta B^*; a'U^*; ta'L^*; ba'W^*$$

assim

$$\frac{1}{v} (\theta'X' \Phi X\theta) = n m^2 + \tau'R\tau + 2b'N'\tau + b'A b \quad (4642)$$

$$ii) \frac{1}{v} E(\epsilon'\Phi\epsilon) = TR(\Phi) [1 + (v-1) \rho] \sigma^2$$

onde $TR(\phi) = bK$

$$\frac{1}{v} E(\epsilon' \phi \epsilon) = bK [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 \quad (4643)$$

$$\text{iii) } E(Co) = n m^2 + [1 + (v-1)\rho] \sigma^2, \text{ de (4614)}$$

substituindo os valores (4642); (4643); (4614); em (4641) tem-se

$$E(SQParc) = (bK-1)[1 + (v-1)\rho] \sigma^2 + \tau' R \tau + 2b' N' \tau + b' A b \quad (4644)$$

na forma algébrica tem-se

$$E(SQParc) = vb \sum_i t_i^2 + v \sum_{i,j} t_{i,j}^2 + 2v \sum_j b_j \sum_{i,j} t_{i,j} + Kv \sum_j b_j^2 + \\ + (bK-1)[1 + (v-1)\rho] \sigma^2 \quad (4645)$$

$$\text{e } E(QMParc) = [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 + \frac{1}{bK-1} [\tau' R \tau + 2 b' N' \tau + b' A b] \\ \dots \quad (4646)$$

4.6.5. Resíduo (a)

De 45210 tem-se

$$SQRes(a) = SQParc - SQTrat aj - SQBlocos.$$

$$E(SQRes(a)) = E(SQParc) - E(SQtrat aj) - E(SQBlocos) \quad (4651)$$

substituindo os valores (462,7); (463,4); (464,4); em (465,1)

$$E(SQRes(a)) = [b(K-1) - (\ell-1)][1 + (\nu-1)\rho] \sigma^2 \quad (465,2)$$

$$\therefore E[QMRes(a)] = [1 + (\nu-1)\rho] \sigma^2 \quad (465,3)$$

4.6.6. Tratamentos Secundários

$$SQa = \mathbf{A}' \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} - Co \quad \text{de} \quad (452,12)$$

$$SQa = \mathbf{Y}' \mathbf{X}_4 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' \mathbf{Y} - Co$$

$$E(SQa) = E[(\theta' \mathbf{X}' + \epsilon') \mathbf{X}_4 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' (\mathbf{X}\theta + \epsilon)] - E(Co)$$

$$E(SQa) = \theta' \mathbf{X}' \mathbf{X}_4 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' \mathbf{X}\theta + E(\epsilon' \mathbf{X}_4 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' \epsilon) - E(Co) \quad (466,1)$$

resolvendo por partes tem-se

$$i) \quad \theta' \mathbf{X}' \mathbf{X}_4 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' \mathbf{X}\theta = \theta' \begin{pmatrix} d \mathbf{U}^{-1} d' & d \mathbf{U}^{-1} p' & d \mathbf{U}^{-1} k' & d \mathbf{U}^{-1} h & d \mathbf{U}^{-1} g \\ p \mathbf{U}^{-1} d' & p \mathbf{U}^{-1} p' & p \mathbf{U}^{-1} k' & p \mathbf{U}^{-1} h & p \mathbf{U}^{-1} g \\ k \mathbf{U}^{-1} d' & k \mathbf{U}^{-1} p' & k \mathbf{U}^{-1} k' & k \mathbf{U}^{-1} h & k \mathbf{U}^{-1} g \\ d' & p' & k' & h & g \\ h' \mathbf{U}^{-1} d' & h' \mathbf{U}^{-1} p' & h' \mathbf{U}^{-1} k' & h' \mathbf{U}^{-1} h & h' \mathbf{U}^{-1} g \\ g' \mathbf{U}^{-1} d' & g' \mathbf{U}^{-1} p' & g' \mathbf{U}^{-1} k' & g' \mathbf{U}^{-1} h & g' \mathbf{U}^{-1} g \end{pmatrix} \theta$$

efetuando-se os produtos e de acordo com as restrições impostas, temos as seguintes matrizes nulas

$$\tau'P; b'K; a'd'; ta'H'; ba'G'$$

$$e d'U^{-1}d' = n$$

tendo-se então

$$\theta'X'X_4U^{-1}X'X\theta = n m^2 + a'U a \quad (4.6.2)$$

$$ii) E(\epsilon'X_4U^{-1}X'_4\epsilon)$$

fazendo $\pi_6 = X_4U^{-1}X'_4$; $\pi_7 = X_4$ e $\pi_8 = U^{-1}X'_4$, tem-se

$$TR(\pi_6) = TR(\pi_7 \pi_8) = TR(\pi_8 \pi_7) = TR(U^{-1}U) = TR(I_{(v)}) = v$$

no entanto, para a correção 4.6.1., para tratamentos principais 4.6.2., e para blocos 4.6.3., foram obtidas

$$E(\epsilon'\pi^*\epsilon) = [1 + (v-1)\rho]\sigma^2 + f(P)$$

sendo π^* , uma das matrizes ali definidas, e $f(P)$ uma função de parâmetros envolvidos, segundo IEMMA(1981), o resultado obtido para o termo que envolve a variância é diferente; e que é justificado pela estrutura da matriz X_4 , ou seja:

$$\varepsilon' X_4 = \left[\sum_{ij} e_{ij1} \quad \sum_{ij} e_{ij2} \cdots \sum_{ij} e_{ijv} \right]$$

$$\therefore \varepsilon' X_4 X_4' \varepsilon = \left[\sum_{ij} e_{ij1}^2 + \sum_{ij} e_{ij2}^2 + \cdots + \sum_{ij} e_{ijv}^2 + \text{dúplos produtos.} \right]$$

$$\therefore E(\varepsilon' X_4 X_4' \varepsilon) = bKv \sigma^2$$

portanto

$$\begin{aligned} E(\varepsilon' X_4 U^{-1} X_4' \varepsilon) &= \frac{1}{bK} E(\varepsilon' X_4 I_{(v)} X_4' \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{bK} E(\varepsilon' X_4 X_4' \varepsilon) = v \sigma^2 \quad (466.3) \end{aligned}$$

substituindo (466.2); (466.3); (461.4) em (466.1) tem-se

$$E(SQa) = a' U a + [(v-1)(1-\rho)] \sigma^2 \quad (466.4)$$

e na forma algébrica tem-se

$$E(SQa) = bK \sum_v a_v^2 + (v-1)(1-\rho) \sigma^2$$

$$\therefore E(QMa) = (1-\rho) \sigma^2 + \frac{a' U a}{(v-1)} \quad (466.5)$$

4.6.7. Interação txa

De (452,14) temos

$$SQtxa = TA' L^{-1} TA - \frac{1}{c} BA' B' L^{-1} TA + \frac{1}{c} TA' L^{-1} BB' L^{-1} TA -$$

$$- SQa - SQtrat_{usual} - Co$$

$$E(SQtxa) = E[TA' L^{-1} TA - \frac{1}{c} BA' B' L^{-1} TA + \frac{1}{c} TA' L^{-1} BB' L^{-1} TA - \\ - SQa - SQtrat_{usual} - Co] \quad (467,1)$$

aplicando-se a esperança e resolvendo por partes tem-se

$$i) E(TA' L^{-1} TA) = E \left[\begin{bmatrix} TA'_c & TA'_r \end{bmatrix} L^{-1} \begin{bmatrix} TA_c \\ TA_r \end{bmatrix} \right] =$$

$$= E \left[Y' \begin{bmatrix} X_5 & X_6 \end{bmatrix} L^{-1} \begin{bmatrix} X'_5 \\ X'_6 \end{bmatrix} Y \right] =$$

$$= E \left[\begin{bmatrix} \theta' X' + \epsilon' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_5 & X_6 \end{bmatrix} L^{-1} \begin{bmatrix} X'_5 \\ X'_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X\theta + \epsilon \end{bmatrix} \right]$$

desenvolvendo o produto e aplicando o conceito de esperança matemática tem-se:

$$E(TA'L^{-1}TA) = \theta'X' \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} L^{-1} \begin{bmatrix} X'_5 \\ X'_6 \end{bmatrix} X\theta + \\ + E[\varepsilon' \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} L^{-1} \begin{bmatrix} X'_5 \\ X'_6 \end{bmatrix} \varepsilon] \quad (4672)$$

desenvolvendo por partes tem-se

$$a) \theta'X' \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} L^{-1} \begin{bmatrix} X'_5 \\ X'_6 \end{bmatrix} X\theta =$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} e L^{-1} e' & e L^{-1} S' & e L^{-1} V' & e L^{-1} H' & e & e L^{-1} B \\ S L^{-1} e' & S L^{-1} S' & S L^{-1} V' & S L^{-1} H' & S & S L^{-1} B \\ V L^{-1} e' & V L^{-1} S' & V L^{-1} V' & V L^{-1} H' & V & V L^{-1} B \\ H L^{-1} e' & H L^{-1} S' & H L^{-1} V' & H L^{-1} H' & H & H L^{-1} B \\ e' & S' & V' & H' & L & B \\ B' L^{-1} e' & B' L^{-1} S' & B' L^{-1} V' & B' L^{-1} H' & B' & B' L^{-1} B \end{bmatrix} \theta$$

... (4673)

mas

$$\begin{array}{llll}
 e L^{-1} e' = n & S L^{-1} S' = R & H L^{-1} H' = U & S L^{-1} e' = g' \\
 V L^{-1} S' = N' & B' L^{-1} H' = G' & V L^{-1} e' = c' & H L^{-1} S' = P' \\
 V L^{-1} V' = \psi_1^* & H L^{-1} e' = d' & B' L^{-1} S' = D' & B' L^{-1} V' = \psi_2^* \\
 B' L^{-1} e' = f' & H L^{-1} V' = K' & B' L^{-1} B = \psi_3^* &
 \end{array}$$

onde

$$\psi_1^* = \begin{pmatrix} \frac{cv}{b} + vk & \frac{cv}{b} & \dots & \frac{cv}{b} \\ \frac{cv}{b} & \frac{cv}{b} + vk & \dots & \frac{cv}{b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{cv}{b} & \frac{cv}{b} & \dots & \frac{cv}{b} + vk \end{pmatrix} \quad (b \times b)$$

$$\psi_2^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & \psi_1^* \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{v} & \psi_1^* \end{pmatrix} \quad (bv \times b)$$

ψ_3^* = matriz diagonal de submatrizes $\frac{1}{v} \psi_1^*$; de dim $(bv \times bv)$ assim (4673) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\theta' \begin{pmatrix} n & g & c & d & e & f \\ g' & R & N & P & S & D \\ c' & N' & \psi_1^* & K & V & \psi_2^* \\ d' & P' & K' & U & H & G \\ e' & S' & V' & H' & L & B \\ f' & D' & \psi_2^* & G' & B' & \psi_3^* \end{pmatrix} \theta$$

efetuando-se os produtos, e de acordo com as restrições têm-se as seguintes matrizes nulas.

$g\tau$; $c\ b$; $d\ a$; $e\ ta$; $f\ ba$; $P\ a$; $S\ ta$; $D\ ba$;

$K\ a$; $V\ ta$; $ba'\psi_2^*$; $H\ ta$; $G\ ba$;

e as seguintes matrizes não nulas

$$m\ n\ m = n\ m^2$$

$$\tau'R\tau = v \left[b \sum_i t_{i,i}^2 + \sum_{i,j} t_{i,j}^2 \right]$$

$$b'N'\tau = v \sum_j b_j \sum_{i,j} t_{i,j}$$

$$b'\psi_1^*b = vkb'b = vk \sum_j b_j^2$$

$$ta'Lt = b \sum_{i,v} ta_{i,v}^2 + \sum_{i',j,v} ta_{i',j,v}^2$$

$$ba'B'ta = \sum_{j,v} ba_{j,v} \sum_{i,j} ta_{i,j,v}$$

$$ba'\psi_3^*ba = k ba'ba = k \sum_{jv} ba_{jv}^2$$

$$a'U a = bKa'a = bK \sum_v a_v^2$$

tendo-se assim, na forma matricial

$$\theta'X'[X_5 \mid X_6] L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \hline X'_6 \end{pmatrix} X\theta = n m^2 + \tau'R\tau + 2 b'N'\tau + b'\psi_1^*b +$$

$$+ a'U a + \tau a'L \tau + 2ba'B'\tau + ba'\psi_3^*ba =$$

$$= n m^2 + \tau'R\tau + 2b'N'\tau + vkb'b + bKa'a + \tau a'L \tau +$$

$$+ 2 ba'B'\tau + k ba'ba \quad (4674)$$

$$b) E[\varepsilon'[X_5 \mid X_6] L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \hline X'_6 \end{pmatrix} \varepsilon]$$

devido as estruturas das matrizes X_5 e X_6 , e de forma análoga ao desenvolvimento de (4663) e fazendo-se

$$\pi_9 = [X_5 \mid X_6] L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \hline X'_6 \end{pmatrix}; \quad \pi_{10} = [X_5 \mid X_6] \text{ e}$$

$$\pi_{11} = L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \hline X'_6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{TR}(\pi_9) = \text{TR}(\pi_{10} \pi_{11}) = \text{TR}(\pi_{11} \pi_{10}) = \text{TR}(L L^{-1}) =$$

$$= \text{TR}(I_{[v(c+z)]}) = v'(c+z) = \ell v$$

logo

$$E(\epsilon' [X_5' \mid X_6'] L^{-1} \begin{bmatrix} X_5' \\ \hline X_6' \end{bmatrix} \epsilon) = \ell v \sigma^2 \quad (4675)$$

substituindo os valores (4674) e (4675) em (4672) tem-se:

$$E(TA' L^{-1} TA) = n m^2 + \tau' R \tau + 2 b' N' \tau + v k b' b + b k a' a + \\ + \tau a' L \tau a + 2 b a' B' \tau a + k b a' b a + \ell v \sigma^2 \quad (4676)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } E\left(\frac{1}{c} BA' B' L^{-1} TA\right) &= \frac{1}{c} E\left[Y' X_7 B' L^{-1} \begin{bmatrix} X_5' \\ \hline X_6' \end{bmatrix} Y\right] = \\ &= \frac{1}{c} E\left[\theta' X' + \epsilon' \mid X_7 B' L^{-1} \begin{bmatrix} X_5' \\ \hline X_6' \end{bmatrix} [X\theta + \epsilon]\right] = \\ &= \frac{1}{c} \theta' X' X_7 B' L^{-1} \begin{bmatrix} X_5' \\ \hline X_6' \end{bmatrix} X\theta + \frac{1}{c} E\left[\epsilon' X_7 B' L^{-1} \begin{bmatrix} X_5' \\ \hline X_6' \end{bmatrix} \epsilon\right] \quad (4677) \end{aligned}$$

desenvolvendo por partes tem-se

$$a) \frac{1}{c} X' X_7 B' L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \hline X'_6 \end{pmatrix} X_0$$

$$\text{onde } X' X_7 = \begin{pmatrix} f \\ D \\ F \\ G \\ B \\ W \end{pmatrix}$$

e fazendo

$$\Psi = B' L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \hline X'_6 \end{pmatrix} X =$$

$$= [B' L^{-1} e' \quad B' L^{-1} s' \quad B' L^{-1} v' \quad B' L^{-1} h' \quad B' L^{-1} l \quad B' L^{-1} b]$$

$$\text{mas } B' L^{-1} e' = f' \quad B' L^{-1} s' = D' \quad B' L^{-1} v' = \psi_2^*$$

$$B' L^{-1} h' = G' \quad B' L^{-1} l = B' \quad B' L^{-1} b = \psi_3^*$$

$$\Psi = [f' \quad D' \quad \psi_2^* \quad G' \quad B' \quad \psi_3^*]$$

e

$$\theta' X' X_7 \Psi \theta = \theta' \begin{pmatrix} ff' & fD' & f\psi_2^* & fG' & fB' & f\psi_3^* \\ Df' & DD' & D\psi_2^* & DG' & DB' & D\psi_3^* \\ Ff' & FD' & F\psi_2^* & FG' & FB' & F\psi_3^* \\ Gf' & GD' & G\psi_2^* & GG' & GB' & G\psi_3^* \\ Bf' & BD' & B\psi_2^* & BG' & BB' & B\psi_3^* \\ Wf' & WD' & W\psi_2^* & WG' & WB' & W\psi_3^* \end{pmatrix} \theta$$

efetuando-se os produtos e de acordo com as restrições, têm-se as seguintes matrizes nulas.

$$\begin{aligned} &\tau'Df'; b'Ff'; a'Gf'; ta'Bf'; ba'Wf'; a'GD'\tau; \\ &ba'WD'\tau; mf\psi_2^*b; a'G\psi_2^*b; ba'W\psi_2^*b; b'FG'a; ta'BG'a; \\ &ba'WG'a; mfB'ta; mf\psi_3^*ba; \tau'D\psi_3^*ba; b'F\psi_3^*ba; a'G\psi_3^*ba; \\ &ta'BD'\tau; ta'B\psi_2^*b; b'FB'ta. \end{aligned}$$

e as matrizes não nulas.

$$m ff'm = K n m^2$$

$$\tau'DD'\tau = v \left[\sum_i t_i \sum_{i,j} t_{i,j} + \sum_j \left(\sum_i t_{i,j} \right)^2 \right]$$

$$b'FD'\tau = K b'N'\tau = vK \sum_j b_j \sum_i t_{i,j}$$

$$\tau'D\psi_2^*b = k b'N'\tau = \nu k \sum_j b_j \sum_{i'} t_{i'j}$$

$$b'F\psi_2^*b = kK\nu b'b = kK\nu \sum_j b_j^2$$

$$a'GG'a = bK^2 a'a = bK^2 \sum_v a_v^2$$

$$ta'BB'ta = \sum_{jv} \left(\sum_i ta_{iv} + \sum_{i'} ta_{i'jv} \right)^2$$

$$ba'WB'ta = Kba'B'ta = K \sum_{jv} ba_{jv} \sum_{i'} ta_{i'jv}$$

$$ta'B\psi_3^*ba = kba'B'ta = k \sum_{jv} ba_{jv} \sum_{i'} ta_{i'jv}$$

$$ba'W\psi_3^*ba = kK ba'ba = kK \sum_{jv} ba_{jv}^2$$

assim na forma matricial tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \theta'X'X_7\psi\theta &= \frac{1}{c} \{ m'ff'm + \tau'DD'\tau + b'FD'\tau + \tau'D\psi_2^*b + b'F\psi_2^*b + \\ &+ a'GG'a + ta'BB'ta + ba'WB'ta + ta'B\psi_3^*ba + ba'W\psi_3^*ba \} = \\ &= \frac{1}{c} \{ K n m^2 + \tau'DD'\tau + (K+k) b'N'\tau + kK\nu b'b + bK^2 a'a + \\ &+ ta'BB'ta + (K+k) ba'B'ta + kK ba'ba \} \quad (4678) \end{aligned}$$

$$b) \frac{1}{c} E\{\varepsilon'X_7B'L^{-1} \begin{pmatrix} X_5' \\ \vdots \\ X_6' \end{pmatrix} \varepsilon\}$$

fazendo

$$\pi_{12} = X_7 B' L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \vdots \\ X'_6 \end{pmatrix} ; \pi_{13} = X_7 B' L^{-1} \quad \text{e} \quad \pi_{14} = \begin{pmatrix} X'_5 \\ \vdots \\ X'_6 \end{pmatrix}$$

$$\text{TR}(\pi_{12}) = \text{TR}(\pi_{14} \pi_{13}) = \text{TR}(B B' L^{-1}) = \ell v$$

$$\therefore \frac{1}{c} E(\varepsilon' \pi_{12} \varepsilon) = \frac{1}{c} \text{TR}(\pi_{12}) \sigma^2 = \frac{\ell v}{c} \sigma^2 \quad (4679)$$

substituindo (4678) e (4679) em (4677), tem-se

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{c} E(BA' B' L^{-1} T A) &= \frac{1}{c} \{ K n m^2 + \tau' D D' \tau + (K+k) b' N' \tau + k K v b' b + \\ &+ b K^2 a' a + \tau a' B B' \tau a + (K+k) b a' B' \tau a + k K b a' b a \} + \frac{\ell v}{c} \sigma^2 \\ &\dots (46710) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \frac{1}{c} E(T A' L^{-1} B B' L^{-1} T A) &= \frac{1}{c} E[Y' [X_5 \mid X_6] L^{-1} B B' L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \vdots \\ X'_6 \end{pmatrix} Y] = \\ &= \frac{1}{c} E[(\theta' X' + \varepsilon') [X_5 \mid X_6] L^{-1} B B' L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \vdots \\ X'_6 \end{pmatrix} (X\theta + \varepsilon)] \end{aligned}$$

desenvolvendo o produto e aplicando a esperança, têm-se

$$= \frac{1}{c} \theta' X' [X_5 \mid X_6] L^{-1} B B' L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \vdots \\ X'_6 \end{pmatrix} X\theta + \frac{1}{c} E[\varepsilon' [X_5 \mid X_6] L^{-1} B B' L^{-1} \begin{pmatrix} X'_5 \\ \vdots \\ X'_6 \end{pmatrix} \varepsilon]$$

mas

$$\Psi = B' L^{-1} \begin{bmatrix} X_5' \\ \vdots \\ X_6' \end{bmatrix} X = [f' \ D' \ \psi_2^* \ G' \ B' \ \psi_3^*] \\ = \frac{1}{c} \theta' \Psi' \Psi \theta + \frac{1}{c} E[\varepsilon' [X_5' \vdots X_6'] L^{-1} B B' L^{-1} \begin{bmatrix} X_5' \\ \vdots \\ X_6' \end{bmatrix} \varepsilon] \quad (46711)$$

resolvendo por partes, têm-se

$$a) \frac{1}{c} \theta' \Psi' \Psi \theta = \frac{1}{c} \theta' \begin{bmatrix} ff' & fD' & f\psi_2^* & fG' & fB' & f\psi_3^* \\ Df' & DD' & D\psi_2^* & DG' & DB' & D\psi_3^* \\ \psi_2^* f' & \psi_2^* D' & \psi_2^* \psi_2^* & \psi_2^* G' & \psi_2^* B' & \psi_2^* \psi_3^* \\ Gf' & GD' & G\psi_2^* & GG' & GB' & G\psi_3^* \\ Bf' & BD' & B\psi_2^* & BG' & BB' & B\psi_3^* \\ \psi_3^* f' & \psi_3^* D' & \psi_3^* \psi_2^* & \psi_3^* G' & \psi_3^* B' & \psi_3^* \psi_3^* \end{bmatrix} \theta$$

efetuando-se o produto e utilizando-se das restrições, têm-se as seguintes matrizes nulas.

$$\tau' D f' m; b' \psi_2^* f' m; a' G f' m; t a' B f' m; b a' \psi_3^* f' m;$$

$$a' G D' \tau; t a' B D' \tau; b a' \psi_3^* D' \tau; t a' B \psi_2^* b; a' G \psi_2^* b;$$

$$t a' B G' a; b a' \psi_3^* G' a; b a' \psi_3^* \psi_2^* b.$$

e as seguintes matrizes não nulas.

$$m \text{ ff}'m = K n m^2$$

$$\tau' DD' \tau = v \left[\sum_i t_i \sum_{i',j} t_{i',j} + \sum_j \left(\sum_{i'} t_{i',j} \right)^2 \right]$$

$$b' \psi_2^* D' \tau = k b' N' \tau = k v \sum_j b_j \sum_{i'} t_{i',j}$$

$$ta' BB' ta = \sum_{jv} \left(\sum_i ta_{iv} + \sum_{i'} ta_{i',jv} \right)^2$$

$$b' \psi_2^* \psi_2^* b = v k^2 b' b = v k^2 \sum_j b_j^2$$

$$a' GG' a = b K^2 a' a = b K^2 \sum_v a_v^2$$

$$ba' \psi_3^* B' ta = k ba' B' ta = k \sum_{jv} ba_{jv} \sum_{i'} ta_{i',jv}$$

$$ba' \psi_3^* \psi_3^* ba = k^2 ba' ba = k^2 \sum_{jv} ba_{jv}^2$$

portanto na forma matricial tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \theta' \Psi' \Psi \theta &= \frac{1}{c} \{ K n m^2 + \tau' DD' \tau + 2k b' N' \tau + k^2 v b' b + b K^2 a' a + \\ &+ ta' BB' ta + 2k ba' B' ta + k^2 ba' ba \} \quad (467,12) \end{aligned}$$

$$b) \frac{1}{c} E\{\varepsilon' [X_5 \vdots X_6] L^{-1} BB' L^{-1} \begin{bmatrix} X_5' \\ \vdots \\ X_6' \end{bmatrix} \varepsilon\}$$

fazendo

$$\pi_{15} = [X_5 \mid X_6] L^{-1} BB' L^{-1} \quad \text{e} \quad \pi_{16} = \begin{bmatrix} X_5' \\ \hline X_6' \end{bmatrix}$$

então

$$\text{TR}(\pi_{15} \cdot \pi_{16}) = \text{TR}(\pi_{16} \cdot \pi_{15}) = \text{TR}(BB' L^{-1}) = \ell_v$$

$$\therefore \frac{1}{c} E\{\varepsilon' \pi_{15} \cdot \pi_{16} \varepsilon\} = \text{TR}(\pi_{15} \cdot \pi_{16}) \sigma^2 = \frac{\ell_v}{c} \sigma^2 \quad (467.13)$$

substituindo 467.12; 467.13 em 467.11 tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} E(TA' L^{-1} BB' L^{-1} TA) &= \frac{1}{c} [K_n m^2 + \tau' DD' \tau + 2kb' N' \tau + k^2 v b' b + \\ &+ b k^2 a' a + \tau a' BB' \tau a + 2kba' B' \tau a + k^2 ba' ba] + \frac{\ell_v}{c} \sigma^2 \quad (467.14) \end{aligned}$$

$$\text{iv) } E(\text{SQtr}_{\text{usual}}) = E(\tau' T) = E[T' R^{-1} T - Co]$$

$$= E[T' R^{-1} T] - E(Co) \quad (467.14)$$

desenvolvendo por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{a) } E(T'R^{-1}T) &= E\left\{ Y' \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} Y \right\} \\
 &= E\left\{ [\theta'X' + \epsilon'] \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} (X\theta + \epsilon) \right\} = \\
 &= \theta'X' \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} X\theta + \\
 &+ E\left\{ \epsilon' \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} \epsilon \right\} \quad (467,15)
 \end{aligned}$$

onde

$$\text{a.1) } \theta'X' \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} X\theta =$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} g'R^{-1}g' & g & g'R^{-1}N & g'R^{-1}P & g'R^{-1}S & g'R^{-1}D \\ g' & R & N & P & S & D \\ N'R^{-1}g' & N' & N'R^{-1}N & N'R^{-1}P & N'R^{-1}S & N'R^{-1}D \\ P'R^{-1}g' & P' & P'R^{-1}N & P'R^{-1}P & P'R^{-1}S & P'R^{-1}D \\ S'R^{-1}g' & S' & S'R^{-1}N & S'R^{-1}P & S'R^{-1}S & S'R^{-1}D \\ D'R^{-1}g' & D' & D'R^{-1}N & D'R^{-1}P & D'R^{-1}S & D'R^{-1}D \end{bmatrix} \theta$$

efetuando-se os produtos e de acordo com as restrições impostas, têm-se as seguintes matrizes nulas.

$$\tau'g'; b'N'R^{-1}g'; a'P'; ta'S'; ba'D'$$

e as matrizes não nulas.

$$m'g'R^{-1}g'm = n m^2$$

$$\tau'R\tau = v [b \sum_i t_{i,i}^2 + \sum_{i,j} t_{i,j} t_{j,i}]$$

$$b'N'\tau = \sum_j b_j \sum_{i'} t_{i',j}$$

$$b'N'R^{-1}Nb = b'\psi_1^*b = vkb'b = vk \sum_j b_j^2$$

tem-se então

$$\theta'X'[X_1' \vdots X_2']R^{-1} \begin{pmatrix} X_1' \\ \vdots \\ X_2' \end{pmatrix} X\theta = n m^2 + \tau'R\tau + 2b'N'\tau + vkb'b \quad (46716)$$

$$a.2) E\{\varepsilon'[X_1' \vdots X_2']R^{-1} \begin{pmatrix} X_1' \\ \vdots \\ X_2' \end{pmatrix} \varepsilon\}$$

fazendo-se

$$\pi_{17} = [X_1' \vdots X_2']; \quad \pi_{18} = R^{-1} \begin{pmatrix} X_1' \\ \vdots \\ X_2' \end{pmatrix}$$

então

$$\text{TR}(\pi_{17} \cdot \pi_{18}) = \text{TR}(\pi_{18} \cdot \pi_{17}) = \text{TR}(R^{-1}R) = \text{TR}(I_{(\ell)}) = \ell$$

$$\begin{aligned} \therefore E(\varepsilon' \pi_{17} \cdot \pi_{18} \varepsilon) &= \text{TR}(\pi_{17} \cdot \pi_{18}) [1 + (\nu - 1)\rho] \sigma^2 \\ &= \ell [1 + (\nu - 1)\rho] \sigma^2 \quad (46717) \end{aligned}$$

substituindo 46716 e 46717 em 46715, tem-se

$$E(T'R^{-1}T) = n m^2 + \tau'R\tau + 2b'N'\tau + \nu kb'b + \ell [1 + (\nu - 1)\rho] \sigma^2 \quad (46718)$$

e substituindo 46718; 4614 em 46714, tem-se

$$E(SQ_{\text{trat}_{\text{usual}}}) = \tau'R\tau + 2b'N'\tau + \nu kb'b + (\ell - 1)[1 + (\nu - 1)\rho] \sigma^2 \quad (46719)$$

retornando em 4671 e substituindo os valores 4676; 46710; 46714; 46719; 4664; 4614, tem-se na forma matricial:

$$\begin{aligned} E(SQ_{\text{txa}}) &= \tau a' L \tau a + b a' B' \tau a - b' N' \tau - \nu k b' b + (\ell - 1)(\nu - 1)(1 - \rho) \sigma^2 \\ &\quad \dots (46720) \end{aligned}$$

ou ainda

$$E(SQtxa) = b \sum_{i,v} ta_{iv}^2 + \sum_{i,j,v} ta_{iv}^2 + \sum_{j,v} ba_{jv} \sum_{i,j,v} ta_{iv} - v \sum_j b_j \sum_{i,j} t_{ij} - \\ - vk \sum_j b_j^2 + (l-1)(v-1) (1-\rho) \sigma^2 \quad (467,21)$$

$$\therefore E(QMtxa) = (1-\rho) \sigma^2 + \frac{1}{(l-1)(v-1)} \{ ta' L ta + ba' B' ta - b' N' \tau - \\ - vk b' b \} \quad (467,22)$$

4.6.8. Interação bxa

De 452,16 temos

$$SQbxa = \hat{b}a'BA = \frac{1}{c} BA'BA - \frac{1}{c} TA'L^{-1}BBA - SQbloco^*$$

então

$$E(SQbxa) = \frac{1}{c} E(BA'BA) - \frac{1}{c} E(TA'L^{-1}BBA) - E(SQbloco^*) \quad (468,1)$$

resolvendo por partes tem-se

$$i) \frac{1}{c} E(BA'BA) = \frac{1}{c} E(Y'X_7X_7'Y) = \frac{1}{c} E[(\theta'X' + \epsilon')X_7X_7'(X\theta + \epsilon)] \\ = \frac{1}{c} \theta'X'X_7X_7'X\theta + \frac{1}{c} E(\epsilon'X_7X_7'\epsilon) \quad (468,2)$$

onde

$$a) \frac{1}{c} \theta' X' X_7 X_7' X \theta = \frac{1}{c} \theta' \begin{bmatrix} ff' & fd' & ff' & fg' & fb' & fw' \\ Df' & DD' & DF' & DG' & DB' & DW' \\ Ff' & FD' & FF' & FG' & FB' & FW' \\ Gf' & GD' & GF' & GG' & GB' & GW' \\ Bf' & BD' & BF' & BG' & BB' & BW' \\ Wf' & WD' & WF' & WG' & WB' & WW' \end{bmatrix} \theta$$

efetuando-se os produtos e de acordo com as restrições têm-se as seguintes matrizes nulas.

$$\tau'Df'; bFf'; aGf'; taBf'; ba'Wf'; aGD'\tau; ta'BD'\tau;$$

$$ba'WD'\tau; ta'BF'b; ba'WF'b; ta'BG'a; ba'WG'a;$$

e as matrizes não nulas.

$$m f f'm = K n m^2$$

$$\tau'DD'\tau = v \left[\sum_i t_i \sum_{i'} t_{i'} + \sum_j \left(\sum_{i'} t_{i'j} \right)^2 \right]$$

$$b'FD'\tau = K b'N'\tau = vK \sum_j b_j \sum_{i'} t_{i'j}$$

$$b'FF'b = vK^2 b'b = vK^2 \sum_j b_j^2$$

$$a'GG'a = bK^2 a'a = bK^2 \sum_v a_v^2$$

$$ta'BB'ta = \sum_{jv} \left[\sum_i ta_{iv} + \sum_{i'} ta_{i'jv} \right]^2$$

$$ba'WB'ta = K ba'B'ta = K \sum_{jv} ba_{jv} \sum_i ta_i'jv$$

$$ba'WW'ba = K^2 ba'ba = K^2 \sum_{jv} ba_{jv}^2$$

tem-se assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \theta'X'X_7X_7'X\theta = \frac{1}{c} \{ K n m^2 + \tau'DD'\tau + 2Kb'N'\tau + vK^2b'b + \\ + bK^2a'a + taBB'ta + 2Kba'B'ta + K^2ba'ba \} \quad (4683) \end{aligned}$$

$$b) \frac{1}{c} E(\epsilon'X_7X_7'\epsilon) = \frac{1}{c} TR(X_7X_7') \sigma^2$$

$$\text{onde } TR(X_7X_7') = bKv$$

$$\therefore \frac{1}{c} E(\epsilon'X_7X_7'\epsilon) = \frac{bKv}{c} \sigma^2 \quad (4684)$$

substituindo 4683 e 4684 em 4682, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} E(BA'BA) = \frac{bKv}{c} \sigma^2 + \frac{1}{c} \{ K n m^2 + \tau'DD'\tau + 2Kb'N'\tau + vK^2b'b + \\ + bK^2a'a + taBB'ta + 2Kba'B'ta + K^2ba'ba \} \quad (4685) \end{aligned}$$

$$ii) \frac{1}{c} E(TA'L^{-1}BBA) = \frac{1}{c} E(BA'B'L^{-1}TA)$$

cujo valor é visto em 46710.

$$\text{iii) } E(\text{SQblocos}^*) = E(\hat{b}'B)$$

$$\text{substituindo o valor de } \hat{b}' = [B'A^{-1} - \hat{\tau}'N\hat{A}^{-1} - \hat{m}cA^{-1}]$$

tem-se

$$\hat{b}'B = B'A^{-1}B - \hat{\tau}'N\hat{A}^{-1}B - \hat{m}cA^{-1}B$$

$$\text{mas } \hat{m}cA^{-1}B = Co;$$

$$B'A^{-1}B - Co = \text{SQblocos};$$

$$N\hat{A}^{-1}B = T - Q$$

$$\therefore \hat{\tau}'N\hat{A}^{-1}B = \hat{\tau}'T - \hat{\tau}'Q$$

$$\text{mas } \hat{\tau}'T = \text{SQtrat}_{\text{usual}}$$

$$\hat{\tau}'Q = \text{SQtrat}_{\text{ajustado}}$$

então

$$E(\text{SQblocos}^*) = E[\text{SQblocos}] - E[\text{SQtrat}_{\text{usual}}] + E[\text{SQtrat}_{\text{ajust}}]$$

substituindo os valores 4634; 467,19; 4626, tem-se

$$E(\text{SQblocos}^*) = cvb'b + (b-1)[1 + (v-1)\rho]\sigma^2 \quad (468,6)$$

substituindo os valores 4685; 46710; 4686 em 4681 têm-se na forma matricial.

$$E(SQbxa) = \left[\frac{bKv}{c} - \frac{\ell v}{c} - (b-1) \right] \sigma^2 - (b-1)(v-1) \rho \sigma^2 + b'N'\tau + \\ + vkb'b + ba'B'ta + Kba'ba$$

mas

$$\left[\frac{bKv}{c} - \frac{\ell v}{c} - (b-1) \right] = \left[\frac{v}{c} (bK - \ell) - (b-1) \right] = (v-1)(b-1)$$

observe que

$$bK - \ell = b(c+k) - \ell = bc + bk - \ell = bc + z - \ell = (b-1)c.$$

assim

$$E(SQbxa) = (v-1)(b-1)(1-\rho)\sigma^2 + b'N'\tau + vkb'b + ba'B'ta + \\ + Kba'ba \quad (4687)$$

ou ainda

$$E(SQbxa) = (v-1)(b-1)(1-\rho)\sigma^2 + v \sum_j b_j \sum_{i'} t_{i'j} + vk \sum_j b_j^2 + \\ + K \sum_{jv} b a_{jv}^2 + \sum_{jv} b a_{jv} \sum_{i'} t a_{i'jv} \quad (4688)$$

e

$$E(QMbx_a) = (1-\rho) \sigma^2 + \frac{1}{(v-1)(b-1)} \{b'N't + vkb'b + ba'B'ta + Kba'ba\}$$

... (4689)

4.6.9. Total

$$SQTotal = Y'Y - Co \quad (469.1)$$

$$E(SQTotal) = E(Y'Y) - E(Co) \quad (469.2)$$

resolvendo por partes tem-se

$$i) E(Y'Y) = E(Y'I Y) = E\{[\theta'X' + \epsilon'] I [X\theta + \epsilon]\}$$

$$= \theta'X'IX\theta + E\{\epsilon' I \epsilon\} \quad (469.3)$$

onde

$$a) \theta'X' I X\theta = \theta' \begin{bmatrix} n & g & c & d & e & f \\ g' & R & N & P & S & D \\ c' & N' & A & K & V & F \\ d' & P' & K' & U & H & G \\ e' & S' & V' & H' & L & B \\ f' & D' & F' & G' & B' & W \end{bmatrix} \theta$$

efetuando-se os produtos e de acordo com as restrições têm-se:

$$\theta'X' I X\theta = n m^2 + \tau'R\tau + 2b'N'\tau + b'Ab + a'Ua + \\ + ta'Lta + 2ta'Bba + ba'Wba \quad (469.4)$$

$$b) E(\varepsilon' I \varepsilon) = TR(I_{(bKv)}) \sigma^2 = bKv \sigma^2 \quad (469.5)$$

substituindo 469.4; 469.5 e 461.4 em 469.2

$$E(SQTotal) = [(bKv-1) - (v-1)\rho] \sigma^2 + \tau'R\tau + 2b'N'\tau + b'Ab + \\ + a'Ua + ta'Lta + ba'Wba + 2ta'Bba \quad (469.6)$$

ou ainda

$$E(SQTotal) = v[b \sum_i t_{i'}^2 + \sum_{i',j} t_{i',j}^2] + 2v \sum_j b_j \sum_{i',j} + Kv \sum_j b_j^2 + \\ + bK \sum_v a_v^2 + b \sum_{i,v} ta_{i,v}^2 + \sum_{i',j,v} ta_{i',j,v}^2 + K \sum_{j,v} ba_{j,v}^2 + \\ + 2 \sum_{j,v} ba_{j,v} \sum_{i'} ta_{i',j,v} + [bKv - (1 + (v-1)\rho)] \sigma^2 \quad (469.7)$$

4.6.10. Resíduo (b)

$$E(SQRes(b)) = E SQTotal - SQParcelas - SQParâmetros (b)$$

substituindo 469.6; 464.4; 466.4; 467.21; 468.7 tem-se

$$E(\text{SQRes}(b)) = (v-1) [b(k-1) - (\ell-1)] (1-\rho) \sigma^2 \quad (4610.1)$$

$$\therefore E(\text{QMRes}(b)) = (1-\rho) \sigma^2$$

4.6.11. QUADRO DE ANÁLISE DE VARIÂNCIA

CAUSAS DE VARIÂÇÃO	G.L.	SOMA DE QUADRADOS	ESPERANÇAS DOS QUADRADOS MÉDIOS	TESTE F
Blocos	b-1	$B'A^{-1}B - Co$	$[1+(v-1)\rho] \sigma^2 + f_1(\theta)$	$\frac{QM \text{ Trat ajust}}{Res(a)}$
Trat ajust(t)	$\ell-1$	$\hat{\tau}'Q$	$[1+(v-1)\rho] \sigma^2 + f_2(\theta)$	
Resíduo (a)	$b(K-1) - (\ell-1)$	Diferença	$[1+(v-1)\rho] \sigma^2$	
Parcelas	bK-1	$\frac{1}{v} Y' \phi Y - Co$	$[1+(v-1)\rho] \sigma^2 + f_3(\theta)$	
Trat secundários (anos)	v-1	$A'U^{-1}A - Co$	$(1-\rho) \sigma^2 + f_4(\theta)$	$\frac{QMa}{Res(b)}$
txa	$(v-1)(\ell-1)$	$TA' \left(L^{-1} + \frac{1}{c} L^{-1} BB' L^{-1} \right) TA - \frac{1}{c} BA' B' L^{-1} TA - SQa - SQ_{trat_{usual}} - Co$	$(1-\rho) \sigma^2 + f_5(\theta)$	
bxa	$(b-1)(v-1)$	$\frac{1}{c} BA' BA - \frac{1}{c} TA' L^{-1} BBA - SQ \text{ blocos}^*$	$(1-\rho) \sigma^2 + f_6(\theta)$	
Resíduo(b)	$(v-1)[b(K-1) - (\ell-1)]$	Diferença	$(1-\rho) \sigma^2$	$\frac{QM_{bxa}}{Res(b)}$
TOTAL	bKv - 1	$Y'Y - Co$		

onde: $f_\lambda(\theta)$, $\lambda = 1, \dots, 6$; são funções não negativas dos parâmetros, dadas por:

$$f_1(\theta) = \{\tau'R\tau - \tau'Q + 2b'N'\tau + b'Ab\} / (b-1)$$

$$f_2(\theta) = \{\tau'Q\} / (\ell-1)$$

$$f_3(\theta) = \{\tau'R\tau + 2b'N'\tau + b'Ab\} / (bK-1)$$

$$f_4(\theta) = \{a'Ua\} / (v-1)$$

$$f_5(\theta) = \{ta'Lta + ba'B'ta - b'N'\tau - vkb'b\} / (\ell-1) (v-1)$$

$$f_6(\theta) = \{Kba'ba + ba'B'ta + b'N'\tau + vkb'b\} / (v-1) (b-1)$$

4.7. Dispersão para Tratamentos

4.7.1. Tratamentos Principais

Para a determinação da matriz de dispersão para tratamentos principais, considerou-se como de modo usual

$$D(\hat{\tau}) = E\{[\hat{\tau} - E(\hat{\tau})][\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]'\} \quad (471.1)$$

onde por 441.1; $\hat{\tau} = M^{-1}Q$ e por 446; $Q = T - NA^{-1}B$

$$\therefore \hat{\tau} = M^{-1}T - M^{-1}NA^{-1}B \quad (471.2)$$

$$\text{mas } T = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} \quad (X\theta + \epsilon)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}_3' \mathbf{Y} = \mathbf{X}_3' (\mathbf{X}\theta + \epsilon)$$

$$\therefore \hat{\tau} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \hline \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} (\mathbf{X}\theta + \epsilon) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_3' (\mathbf{X}\theta + \epsilon)$$

$$\hat{\tau} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \hline \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \mathbf{X}\theta - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_3' \mathbf{X}\theta + \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \hline \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \epsilon - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_3' \epsilon$$

e desse modo

$$E(\hat{\tau}) = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \hline \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \mathbf{X}\theta - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_3' \mathbf{X}\theta$$

assim

$$\hat{\tau} - E(\hat{\tau}) = \mathbf{M}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \hline \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} - \mathbf{N} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_3' \right) \epsilon = \mathbf{M}^{-1} \Omega \epsilon$$

fazendo

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \hline \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} - \mathbf{N} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_3'$$

$$\therefore D(\hat{\tau}) = E[\mathbf{M}^{-1} \Omega \epsilon \epsilon' \Omega' \mathbf{M}^{-1}] \quad (4713)$$

Determinando-se a esperança temos.

$$D(\hat{\tau}) = [1 + (\nu - 1) \rho] \sigma^2 \mathbf{M}^{-1} \Omega \Omega' \mathbf{M}^{-1'} \quad (471.4)$$

efetuando-se o produto $\Omega \Omega'$ e lembrando-se

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \hline x_2' \end{pmatrix} [x_1 \mid x_2] = R$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \hline x_2' \end{pmatrix} x_3 = N$$

$$x_3' x_3 = A$$

temos

$$\Omega \Omega' = R - N A^{-1} N' - N A^{-1} N' + N A^{-1} A A^{-1} N'$$

$$\Omega \Omega' = R - N A^{-1} N' = \mathbf{C}.$$

Desse modo (471.4)

$$D(\hat{\tau}) = [1 + (\nu - 1) \rho] \sigma^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1'} \quad (471.5)$$

onde

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1'} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} D_1^* & D_2^* & D_2^* & \dots & D_2^* \\ D_2^{*'} & D_3^* & D_4^* & \dots & D_4^* \\ D_2^{*'} & D_4^{*'} & D_3^* & \dots & D_4^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_2^{*'} & D_4^{*'} & D_4^{*'} & \dots & D_3^* \end{pmatrix}$$

sendo

$$D_1^* = d_{st} = \begin{cases} \frac{K-1}{bv} & \text{para } s = t \\ -\frac{1}{bv} & \text{para } s \neq t \end{cases}$$

$$D_2^* = -\frac{1}{bv} \mathbf{E}_{(cxk)}$$

$$D_3^* = d_{st} = \begin{cases} \frac{K}{v} + \frac{K}{cv} - \frac{K}{bcv} - \frac{1}{bv} & \text{para } s = t \\ \frac{K}{cv} - \frac{1}{bv} - \frac{K}{bcv} & \text{para } s \neq t \end{cases}$$

$$D_4^* = -\frac{K+c}{bcv} \mathbf{E}_{(kxk)}$$

Assim, na diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos principais, serão considerados os seguintes casos:

a) Entre dois tratamentos comuns:

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_i - \hat{x}_{i'}) &= V(\hat{x}_i) + V(\hat{x}_{i'}) - 2 \text{COV}(\hat{x}_i; \hat{x}_{i'}) = \\ &= \frac{1}{K} \left[\frac{K-1}{bv} + \frac{K-1}{bv} - 2 \left(-\frac{1}{bv} \right) \right] [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 = \\ &= \frac{2}{bv} [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 \end{aligned}$$

assim

$$\hat{V}(\hat{x}_i - \hat{x}_{i'}) = \frac{2}{bv} \text{QMRes(a)} \quad (471.6)$$

b) Entre um tratamento comum e um regular:

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_i - \hat{x}_{i',j}) &= V(\hat{x}_i) + V(\hat{x}_{i',j}) - 2 \text{COV}(\hat{x}_i, \hat{x}_{i',j}) \\ &= \frac{1}{K} \left[\left(\frac{K-1}{bv} \right) + \left(\frac{K}{v} + \frac{K}{cv} - \frac{1}{bv} - \frac{K}{bcv} \right) - 2 \left(-\frac{1}{bv} \right) \right] \cdot \\ &\quad \cdot [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 \\ &= \frac{1}{v} \left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{bc} \right) [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{V}(\hat{x}_i - \hat{x}_{i',j}) = \frac{1}{v} \left[1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{bc} \right] \text{QMRes(a)} \quad (471.7)$$

c) Entre dois tratamentos regulares dentro do mesmo bloco.

$$\begin{aligned}
 V(\hat{x}_{i'j} - \hat{x}_{i''j}) &= V(\hat{x}_{i'j}) + V(\hat{x}_{i''j}) - 2 \text{COV}(\hat{x}_{i'j}; \hat{x}_{i''j}) \\
 &= \frac{2}{K} \left\{ \left[\frac{K}{v} + \frac{K}{cv} - \frac{1}{bv} - \frac{K}{bcv} \right] - \left[\frac{K}{cv} - \frac{K}{bcv} - \frac{1}{bv} \right] \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 = \\
 &= \frac{2}{v} [1 + (v-1)\rho] \sigma^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{V}(\hat{x}_{i'j} - \hat{x}_{i''j}) = \frac{2}{v} \text{QMRes(a)} \quad (471.8)$$

d) Entre dois tratamentos regulares em blocos diferentes:

$$\begin{aligned}
 V(\hat{x}_{i'j} - \hat{x}_{i''j'}) &= V(\hat{x}_{i'j}) + V(\hat{x}_{i''j'}) - 2\text{COV}(\hat{x}_{i'j}; \hat{x}_{i''j'}) \\
 &= \frac{1}{K} \left\{ 2 \left[\frac{K}{v} + \frac{K}{cv} - \frac{1}{bv} - \frac{K}{bcv} \right] - 2 \left[-\frac{K+c}{bcv} \right] \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot [1 + (v-1)\rho] \sigma^2 \\
 &= \frac{2}{v} \left[1 + \frac{1}{c} \right] [1 + (v-1)\rho] \sigma^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{V}(\hat{x}_{i'j} - \hat{x}_{i''j'}) = \frac{2}{v} \left(1 + \frac{1}{c} \right) \text{QMRes(a)} \quad (471.9)$$

e) Variância entre contraste de médias de efeitos estimados para tratamentos principais.

Seja o contraste $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}'\hat{\mathbf{t}}$, onde $\mathbf{P}'$ é a matriz de coeficientes do contraste, de dim $1 \times \ell$, assim como de forma usual, tem-se:

$$V(\hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{P}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} [1 + (\nu - 1) \rho] \sigma^2 \quad (471.10)$$

4.7.2. Tratamentos Secundários

Considerando como de forma usual, tem-se

$$D(\hat{\mathbf{a}}) = E\{[\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}})][\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}})]'\} \quad (472.1)$$

onde, por 44.16, tem-se

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{U}^{-1}[\mathbf{A} - \hat{\mathbf{m}}] = [\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A} - \hat{\mathbf{m}} \mathbf{E}_{(\nu \times 1)}]$$

mas $\mathbf{A} = \mathbf{X}_4' \mathbf{Y} = \mathbf{X}_4' (\mathbf{X}\theta + \epsilon)$, então

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' \mathbf{X}\theta + \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' \epsilon - \hat{\mathbf{m}} \mathbf{E}_{(\nu \times 1)}$$

$$E(\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' \mathbf{X}\theta - \hat{\mathbf{m}} \mathbf{E}_{(\nu \times 1)}$$

$$\therefore \hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}_4' \epsilon$$

assim para (472.1), tem-se

$$\begin{aligned} D(\hat{a}) &= E\{U^{-1} X_4' \varepsilon \varepsilon' X_4 U^{-1}\} \\ &= \left(\frac{1}{bK}\right)^2 X_4' E(\varepsilon \varepsilon') X_4 \end{aligned} \quad (472.2)$$

onde

$$X_4' E(\varepsilon \varepsilon') X_4 = bK \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}_{(v \times v)} = bK W^*$$

$$D(\hat{a}) = \frac{1}{bK} W^*$$

Assim para a variância da diferença entre duas médias

de efeitos estimados de tratamentos secundários, tem-se

$$V(\hat{a}_v - \hat{a}_{v'}) = \frac{2}{bK} (1-\rho) \sigma^2$$

$$\therefore \hat{V}(\hat{a}_v - \hat{a}_{v'}) = \frac{2}{bK} \text{QMRes}(b) \quad (472.3)$$

4.7.3. Dispersão para a Interação txa

Como a dispersão de txa, não tem uso prático pelo modelo adotado, pois o que interessa são comparações de médias de tratamentos dentro de anos e médias de anos dentro de tratamentos, o que necessitaria de uma reestruturação do modelo, deixamos de fazer esse desenvolvimento sugerindo esse tema para trabalhos futuros.

4.8. Ajuste de Médias

- a) O ajuste para as médias de tratamentos comuns, não se faz necessário, por estarem repetidos em todos os blocos.
- b) O ajuste para as médias de tratamentos regulares, é dado por:

$$\hat{m}_{i'j} = \hat{t}_{ij} + \hat{m} = \frac{T_{i'j}}{v} + \frac{1}{cv} \left(\sum_i T_i \right) / j + \frac{1}{bcv} \sum_i T_i \quad (4821)$$

- c) O ajuste para as médias dos tratamentos secundários, também não se faz necessário.

4.9. Comparações Múltiplas

Pode-se usar quaisquer dos testes para comparações múltiplas. Neste trabalho optou-se pelo teste TUKEY, citado em PIMENTEL GOMES(1976).

$$D.M.S = q \sqrt{\frac{1}{2} \hat{V}(\hat{Y})}$$

onde

D.M.S = é a diferença mínima significativa.

q = é o valor da amplitude total estudentizada

$\hat{V}(\hat{Y})$ = é a variância estimada do controle estimado $\hat{Y}$, entre os efeitos médios.

Têm-se então as seguintes D.M.S.

4.9.1. Para os Tratamentos Principais

a) Se $\hat{Y}_1$, é o contraste entre dois tratamentos comuns, isto é,

$$\hat{Y}_1 = \hat{m}_{t_i} - \hat{m}_{t_{i'}}.$$

$$D.M.S_1 = q \cdot \sqrt{\frac{QMRes(a)}{bv}}; \quad q(\alpha, \ell, \text{ graus Res}(a)) \quad (4911)$$

b) Se $\hat{Y}_1$, é o contraste entre um tratamento comum e um regular, isto é,

$$\hat{Y}_2 = \hat{m}_{t_i} - \hat{m}_{t_{i'j}}$$

$$D.M.S_2 = q \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{bv} + \frac{1}{cv} - \frac{1}{bcv} \right) QMRes(a)};$$

$$q(\alpha, \ell, \text{ graus Res}(a)). \quad (4912)$$

c) Se $\hat{Y}_1$, é o contraste entre dois tratamentos regulares dentro do mesmo bloco;

$$\hat{Y}_3 = \hat{m}_{t_{i'j}} - \hat{m}_{t_{i''j}}$$

$$D.M.S_3 = q \cdot \sqrt{\frac{QMRes(a)}{v}}; \quad q(\alpha, \ell, \text{ graus Res}(a)); \quad (4913)$$

- d) Se $\hat{Y}$, é o contraste entre dois tratamentos regulares em blocos diferentes;

$$\hat{Y}_4 = \hat{m}_{t_{i'j}} - \hat{m}_{t_{i''j}},$$

$$D.M.S_4 = q \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{cv} \right) QMRes(a)}; q(\alpha, l, \text{ graus Res}(a)) \quad (4914)$$

4.9.2. Para os Tratamentos Secundários

Se $\hat{Y}$, é o contraste entre dois tratamentos secundários, (anos);

$$\hat{Y}_5 = \hat{m}_{a_v} - \hat{m}_{a_{v'}},$$

$$D.M.S_5 = q \cdot \sqrt{\frac{QMRes(b)}{bK}}; q(\alpha, v, \text{ graus Res}(b)) \quad (4921)$$

4.10. Testes sobre a Estrutura da Matriz de Covariâncias

Além das tradicionais hipóteses de normalidade, in dependência, aditividade, etc., em experimentos envolvendo parcelas subdivididas no tempo, faz-se também necessário os testes de homogeneidade e de uniformidade das matrizes de covariância entre tratamentos secundários dentro de cada tratamento principal, pois não é raro encontrar correlações entre a produção de vários anos sucessivos.

Quando não se verificam as hipóteses de homogeneidade e de uniformidade das matrizes de covariâncias, IEMMA (1981), citando GILL(1978) e LEAL(1979), recomenda como alternativa ao modelo univariado, o uso da análise de perfil abordada por LEAL(1979).

4.10.1. Teste de Homogeneidade para as Matrizes de Covariâncias

Adotaremos o critério de BOX(1950) abordado por DINIZ(1980), descrito por DANFORD et alii,(1960), dentre outros.

Sendo $H_0 = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_c = \Sigma$ e

$H_a = \Sigma_i \neq \Sigma_{i'}$ para algum $i \neq i'$

Calcula-se inicialmente $G_i = (gss', c)$ que é a estimativa não tendenciosa de $\Phi_i, i = 1 \dots c$. (matriz de covariância entre tratamentos secundários, para o i-ésimo tratamento principal).

$$G_i = g(ss'c) = (b-1)^{-1} \sum_j (y_{ijv} - y_{i.v} - y_{.jv} + y_{..v}) \times \\ \times (y_{ijv'} - y_{i.v'} - y_{.jv'} + y_{..v'}) \quad (41011)$$

onde $i = 1 \dots c$

$j = 1 \dots b$

$v = 1 \dots \hat{v}$

$y_{i.v}$ = média do bloco j , no ano v , (sô com os tratamentos comuns).

$y_{.jv}$ = média do tratamento i no ano v .

$y_{..v}$ = média geral do experimento, no ano v , (sô com os tratamentos comuns).

A seguir calcula-se a matriz $G = (gss')$, que é sob H_0 , uma estimativa não tendenciosa da matriz de covariância comum Φ .

$$G = (c-1)^{-1} \sum_i G_i = [(c-1)(b-1)]^{-1} \sum_j (y_{ijv} - y_{i.v} - y_{.jv} + y_{..v}) \times \\ \times (y_{ijv'} - y_{i.v'} - y_{.jv'} + y_{..v'}) \quad (41012)$$

Calculando-se a seguir, g_1, g_2, g_3 , onde

$$g_1 = \frac{(c-1)v(v+1)}{2} \quad (41013)$$

$$g_2 = \frac{(2v^2+3v-1)(c^2-c-1)}{6(v+1)(b-1)(c-1)^2} \quad (41014)$$

$$g_3 = [(b-1)c] \ln |G| - \sum_{\lambda} (b-1) \ln |G_{\lambda}| \quad (41015)$$

onde $| |$, indica o determinante da matriz e $\ln$, o logarítmo neperiano; assim tem-se a distribuição aproximada;

$(1-g_2)g_3 \sim \chi_{g_1}^2$, se $(1-g_2)g_3 < \chi_{g_1}^2$, aceita-se a hipótese de

igualdade das matrizes de covariâncias para tratamentos.

4.10.2. Teste de Uniformidade da Matriz Comum de Covariâncias.

Para o teste de uniformidade da matriz comum de co variâncias, utilizou-se o critério descrito por DINIZ(1980).

Seja $H_0 = \Phi = \Phi^*$, onde Φ^* é uma matriz uniforme calcula-se assim

$$a) \quad \Upsilon = \frac{|G|}{|\bar{G}|} \quad (41021)$$

onde

$\bar{G}$, é uma matriz onde os elementos da diagonal principal são iguais a média aritmética dos elementos da diagonal principal de G , e os elementos fora da diagonal principal, são também iguais a média aritmética dos elementos de G , que estão fora da diagonal principal.

$$b) g_4 = -(c-1)(b-1) \ln T \quad (41022)$$

$$c) g_5 = \frac{v(v+1)^2(2v-3)}{6(c-1)(b-1)(v-1)(v^2+v-4)} \quad (41023)$$

$$d) g_6 = \frac{v^2+v-4}{2} \quad (41024)$$

Como $(1-g_5)g_4 \sim x_{g_6}^2$, se $(1-g_5)g_4 < x_{g_6}^2$, aceita-se a hipótese

de que a matriz de covariância, G é do tipo "uniforme".

É importante salientar, que de acordo com IEMMA (1982), após a aceitação das hipóteses de homogeneidade e uniformidade das matrizes de covariâncias, os valores singulares, λ_1 de multiplicidade de 1 e λ_2 de multiplicidade $(v-1)$, da matriz uniforme $\bar{G}$, formam os $QMRes(a)$ e $QMRes(b)$, ou seja, se

$$QMRes(a) = [1+(v-1)\rho] \sigma^2, \text{ então } \lambda_1 + (v-1)\lambda_2 = QMRes(a) \quad (41025)$$

e

$$QMRes(b) = (1-\rho) \sigma^2, \text{ então } \lambda_1 - (v-1)\lambda_2 = QMRes(b). \quad (41026)$$

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considerando os dados da tabela 1, aplicando-se o método descrito no capítulo anterior, chegou-se aos seguintes resultados:

5.1. Testes de Homogeneidade e Uniformidade da Matriz de Covariâncias

Segundo DINIZ (1980), e outros, estes testes fazem necessários, por serem eles umas das exigências do modelo matemático.

Considerando a metodologia descrita em 4.10 têm-se as 5 estimativas das matrizes de covariâncias, para os 5 tra-

tamentos comuns, uma vez que os tratamentos regulares não tem repetições.

De (410.11)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_1 &= \begin{vmatrix} 12,9089 & 13,4347 \\ 13,4347 & 19,9322 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} |\mathbf{G}_1| &= 76,8116 \\ \ln|\mathbf{G}_1| &= 4,3414 \end{aligned} \\
 \mathbf{G}_2 &= \begin{vmatrix} 13,2541 & 18,0046 \\ 18,0046 & 49,1399 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} |\mathbf{G}_2| &= 327,1395 \\ \ln|\mathbf{G}_2| &= 5,7904 \end{aligned} \\
 \mathbf{G}_3 &= \begin{vmatrix} 25,0137 & 21,9439 \\ 21,9439 & 62,6415 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} |\mathbf{G}_3| &= 1.085,3609 \\ \ln|\mathbf{G}_3| &= 6,9897 \end{aligned} \\
 \mathbf{G}_4 &= \begin{vmatrix} 21,0569 & -7,0743 \\ -7,0743 & 29,9761 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} |\mathbf{G}_4| &= 581,1580 \\ \ln|\mathbf{G}_4| &= 6,3650 \end{aligned} \\
 \mathbf{G}_5 &= \begin{vmatrix} 11,6403 & 8,2234 \\ 8,2234 & 36,2699 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} |\mathbf{G}_5| &= 354,5682 \\ \ln|\mathbf{G}_5| &= 5,8709 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

a estimativa $\mathbf{G}$, para a matriz comum de covariância $\mathbf{\Sigma}$, usando (4101.2)

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 20,9685 & 13,6331 \\ 13,6331 & 49,4899 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} |\mathbf{G}| &= 851,8576 \\ \ln|\mathbf{G}| &= 6,7474 \end{aligned}$$

de (4101.3); (4101.4) e (4101.5) tem-se

$$g_1 = 12$$

$$g_2 = 0,2144$$

$$g_3 = 17,5184$$

$$\therefore (1-g_2)g_3 = 13,76$$

$$\chi^2_{(5\%, g_1)} = 21,00$$

como $13,76 < 21,00$ aceitamos H_0 , as matrizes são homogêneas.

Para testar a uniformidade, usando 4102.1 obteve-se

$$\bar{G} = \begin{vmatrix} 35,2292 & 13,6331 \\ 13,6331 & 35,2292 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad |\bar{G}| = 1055,2351$$

$$\therefore \Upsilon = \frac{|\bar{G}|}{|\bar{G}|} = \frac{851,8676}{1055,2351} = 0,8073 ; \quad \ln|\Upsilon| = -0,2141$$

de (4102.2); (4102.3); (4102.4) obteve-se

$$g_4 = 3,4256$$

$$g_5 = 0,0938$$

$$g_6 = 1$$

$$\text{assim } (1-g_5)g_4 = 3,1037 \text{ e } \chi^2_{(5\%, 1)} = 3,84$$

aceitando-se assim a uniformidade das matrizes.

Satisfeitas as exigências do modelo matemático adota-se então a matriz $\bar{G}$, da matriz uniforme de covariância Φ^* , para todos os tratamentos.

5.2. Equações Normais

Considerando o modelo matemático (42.2) e sendo $\ell = 40$ tratamentos principais, onde

$c = 5$ tratamentos comuns

$z = 35$ tratamentos regulares.

$b = 5$ blocos

$v = 2$ tratamentos secundários (cortes)

$K = 12$ parcelas por blocos, sendo $K = c + k$; e

$c = 5$ para os comuns

$k = 7$ para os regulares

$n = bKv = 120$, total de sub-parcelas.

Tem-se assim o sistema de equações normais (43.2), cujas soluções são vistas na tabela 2, obtidas utilizando-se das seguintes equações:

a) para a média, usou-se (44.1)

b) para os tratamentos principais, usou-se (44.11)

c) para os blocos, usou-se (44.15)

d) para os anos, usou-se (44.18)

e) para as interações txa , usou-se nas interações (comuns x anos) a (44.26); para (regulares x anos) a (44.28)

f) para as interações bxa , usou-se (44.23).

5.3. Quadro de Análise de Variância

Para obtenção das somas de quadrados usou-se as seguintes equações:

- a) Soma de quadrados para blocos (45 2.4a)
- b) Soma de quadrados tratamentos ajustados (45 2.7)
- c) Soma de quadrados para parcelas (451.6)
- d) Soma de quadrados do resíduo (a) (452.10)
- e) Soma de quadrados para os anos (452.13)
- f) Soma de quadrados da interação txa, usou-se $t\hat{a}'TA$
- g) Soma de quadrados da interação bxa, usou-se $b\hat{a}'BA$
- h) Soma de quadrados do Total ; $Y'Y - C_o$
- i) Soma de quadrados do resíduo (b), usou-se

$$SQRes (b) = SQTotal - SQP(b) - SQParcelas.$$

Obtendo-se assim o quadro de análise de variância

C.Variação	GL	S.Quadrados	Q.Médio	F
Blocos	4	2714,713000	678,67825	15,190 **
trat.ajust.	39	28946,869060	742,22741	
Res (a)	16	781,786940	48,86168	
Parcelas	59	32.443,369000		
anos	1	25708,134000	25.708,13400	1190,00 **
txa	39	5350,785269	137,19962	
bx a	4	169,644826	42,41121	
Res (b)	16	345,6539050	21,60337	
Total	119	64.017,587000		

** significativo a 1%

Obs.:

- 1) Não foram realizados os testes "F", para blocos por não ter interesse prático, e igualmente para as interações txa, bxa.
- 2) Observou-se também, que de acordo com FEDERER (1956), para experimentos envolvendo modelos aumentados, onde os tratamentos regulares não tem repetições, os resíduos (a) e (b) podem ser obtidos fazendo-se uma análise somente com os tratamentos comuns.

- 3) Segundo IFMMA (1981), os resíduos (a) e (b), podem também ser obtidos dos valores singulares da matriz uniforme $\bar{G}$ (4102.5) sendo $\lambda_1 = 35,2292$ e $\lambda_2 = 13,6331$, assim
- $$\text{Res}(a) = \lambda_1 + \lambda_2$$
- $$\text{Res}(b) = \lambda_1 - \lambda_2$$

5.4. Comparações Múltiplas

Para as comparações múltiplas, entre os tratamentos principais, tem-se as seguintes D.M.S., considerando $\alpha = 5\%$

- a) para contrastes entre dois tratamentos comuns, usou-se (491.1)

$$\text{DMS}_1 = q \sqrt{\frac{48,86168}{10}} = 14,5670$$

- b) para contrastes entre um tratamento comum e um regular, usou-se (491.2)

$$\begin{aligned} \text{DMS}_2 &= q \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{50} \right) 48,86168} = \\ &= 26,8602 \end{aligned}$$

- c) para dois tratamentos regulares dentro do mesmo bloco, usou-se (491.3)

$$\text{DMS}_3 = q \sqrt{\frac{48,86168}{2}} = 32,5728$$

6. CONCLUSÕES

- 1) A análise de delineamentos aumentados (Blocos de FEDERER) no esquema de parcelas subdivididas no tempo é perfeitamente viável.
- 2) Nesse contexto, deve ser feita após o teste de homogeneidade e uniformidade de variâncias ter-se mostrado não significativo.
- 3) Quando os tratamentos regulares aparecem somente uma vez em todo o experimento os resíduos podem ser obtidos da seguinte forma:
 - 3.1. Através dos valores singulares da matriz uniforme
 - 3.2. Através de uma análise, feita somente com os tratamentos comuns
 - 3.3. Através do modelo adotado.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AFONJA, A., 1968. Analysis of a Group of Balanced Block Experiments Having Erros Variance and Some Treatments in Common. Biometrics, 24: 389-411.
- ANDERSON, R.L. e T.A. BANCROFT, 1952. Statistical theory in research. McGraw-Hill Book Co., Inc., Nova York . 399 pp.
- BOX, G.E.P., 1949. A General Distribution Theory for a Class of Likelihood Criteria. Biometrika, Londres, 36: 317-346.
- BOX, G.E.P., 1950. Problems in the Analysis of Growth and Wear Curves. Biometrics, Carolina do Norte, 6: 362-389.

- CHAKRABART, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. 1ª ed. Asia Publishing House , Londres, 120 pp.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1976. Diseños Experimentales. 3ª ed. Trillas, México, 661 pp.
- CORSTEN, L.C.A., 1962. Balanced Block Design with two Different Number of Replicates. Biometrics, 18: 499-519.
- DANFORD, M.B.; H.M. HUGHES e R.C. McNEE, 1960. On the Analysis of Repeated-Measurements Experiments. Biometrics, Raleigh, 16: 547-565.
- DINIZ, U.D., 1980. Análise de Experimentos com Parcelas Medidas Sucessivamente no Tempo. ESALQ/USP, Piracicaba, 104 pp. (Tese de Doutorado).
- FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design. 1ª ed., McMillan Co., Nova York, 544 pp.
- FEDERER, W.T., 1956. Augmented (or Hoonuiaku) designs. Hawaiian Planter's Record 55: 191-208.

FEDERER, W.T., 1961a. Augmented designs With one way eli
mination of heterogeneity. Biometrics 17: 447-473.

FEDERER, W.T., 1961b. Augmented designs With two three
and higher way elimination of heterogeneity (abstract).
Biometrics 17: 166.

FEDERER, W.T.; RAGHAVARAO, D., 1975. On augmented desi-
gns. Biometrics 31: 29-35.

FEDERER, W.T.; NAIR, R.C.; RAGHAVARAO, D., 1975. Some
augmented row - column designs. Biometrics 31: 361-
373.

GEISSER, S., 1963. Multivariate Analysis of Variance for
a Special Covariance Case. Journal of the American S-
tatistical Association, Washington, 58: 660-669.

GILL, L.C., 1978. Design and Analysis of Experiments in
the Animal and Medical Sciences. The Iowa State Uni-
versity Press. 1st ed. Ames, 3 vol. 882 pp.

- IEEMMA, A.F., 1981. Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados. ESALQ/USP, Piracicaba, 145 pp. (Tese de doutoramento).
- IEEMMA, A.F., 1982. Valores singulares de matrizes Unifomes, *Ciência e Natura* (4):21-26.
- LEAL, M.L.S., 1979. Análise de Dados Experimentais com Medidas Repetidas. Universidade Federal de Brasília, Brasília, 99 pp. (Dissertação de Mestrado).
- LEONARD, W.H. e A.G. CLARK, 1939. Field Plot Technique. Burgess. Minneapolis, 288 pp.
- MARTINEZ, G.A., 1972. Diseños y análisis de experimentos con cana-de-azúcar. Colégio de Post-Graduados, Escuela Nacional de Agricultura, Chapingo, México.
- NOGUEIRA, M.C.S., 1976. Análise Conjunta para Experimentos em Blocos casualizados completos aumentados, ESALQ/USP, Piracicaba, SP, (Dissertação de Mestrado).
- PARKER, E.R., 1942. Adjustment of Yields in an Experiment With Orange Trees. Proc. Amer. Soc. Hort. Sci., Maryland, 42: 23-33.

- PATTERSON, H.D. e B.I. LOWE, 1970. The Errors of Long-Term Experiments. J. Agric. Sci., Cambridge, 74: 53-60.
- PAVATE, M.V., 1961. Combined Analysis of Balanced Incomplet Block Designs with Some Common Treatments . Biometrics, 17: 111-119.
- PIMENTEL GOMES, F.; GUIMARÃES, R.F., 1958. Join Analysis of experiments in complete randomized blocks with some common treatments. Biometrics 14: 521-526.
- PIMENTEL GOMES, F., 1967. The solution of normal equations of experimental design models. Ciência e Cultura 19: 567-573.
- PIMENTEL GOMES, F., 1968. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. Apost. mimeografada, ESALQ/USP.
- PIMENTEL GOMES, F., 1970. An extension of the method of joint analysis of experiments in complete randomised blocks. Biometrics 26: 332-336.
- PIMENTEL GOMES, F., 1976. Curso de Estatística. Experimental, 6ª edição, Livraria Nobel, São Paulo.

SNEDECOR, G.W., 1956. Statistical Methods. 5ª ed. The Iowa State College Press, Ames. Iowa. 534 pp.

SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1967. Statistical Methods. 6ª edição. The Iowa State University Press, Ames, Iowa. 593 pp.

STEEL, R.G.D., 1955. An Analysis of Perennial Crop Data. Biometrics, Carolina do Norte, 11: 201-212.

STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. McGraw-Hill Book, Nova York, Toronto e Londres, 481 pp.

WILKS, S.S., 1932. Certain Generalizations in the Analysis of Variance. Biometrika, Londres, 24:471-494.

8. APÊNDICE

Tabela 1 - Dados adaptados de um experimento para melhoria de variedades de cana-de-açúcar, realizado em delineamentos de Blocos casualizados completos aumentados (Blocos de FEDERER), com parcelas subdivididas no tempo.

1º BLOCO				2º BLOCO			
Variedades	Prod. Agric. 1º corte	Prod. Agric. 2º corte	Prod. Total Agrícola	Variedades	Prod. Agric. 1º corte	Prod. Agric. 2º corte	Prod. Total Agrícola
CB 41-76	112,75	87,52	200,27	CB 41-76	112,46	83,95	196,41
CB 36-24	115,43	91,03	206,51	CB 36-24	117,81	82,96	200,77
CB 40-13	121,97	78,61	200,58	CB 40-13	119,00	86,92	205,92
CB 40-69	106,80	82,76	189,56	CB 40-69	114,83	73,66	188,49
CB 41-14	117,51	90,50	208,01	CB 41-14	117,21	89,50	206,71
CB 61-2	75,86	53,26	129,12	CB 40-11	100,85	65,34	166,19
CB 53-98	82,41	87,91	170,32	IAC 50-134	145,77	84,74	230,51
CB 58-11	102,34	55,04	157,38	IAC 48-65	91,04	55,04	146,08
CB 47-31	90,14	53,86	144,00	CP 53-18	97,28	48,51	145,79
CB 61-4	77,94	50,49	128,43	Co 453	97,28	71,87	169,15
IAC 51-205	105,31	78,41	183,72	PR 980	83,90	70,69	154,59
Co 678	100,85	90,29	191,14	CB 55-21	82,41	57,40	139,81

3º BLOCO				4º BLOCO			
Variedades	Prod. Agric. 1º corte	Prod. Agric. 2º corte	Prod. Total Agrícola	Variedades	Prod. Agric. 1º corte	Prod. Agric. 2º corte	Prod. Total Agrícola
CB 41-76	100,55	79,20	179,75	CB 41-76	126,44	101,75	228,19
CB 36-24	104,42	78,80	183,22	CB 36-24	121,68	94,65	216,33
CB 40-13	118,10	76,43	194,53	CB 40-13	135,36	95,45	230,81
CB 40-69	112,45	80,20	192,65	CB 40-69	125,25	79,60	204,85
CB 41-14	110,37	93,65	204,02	CB 41-14	120,48	89,30	209,78
CB 55-49	82,11	63,15	145,26	NA 56-62	118,70	87,12	205,82
CB 55-65	68,13	49,10	117,23	CP 48-117	117,72	101,00	218,72
CB 55-72	96,09	56,80	152,89	CP 50-28	85,68	58,00	143,68
IAC 52-172	124,95	114,84	239,79	CB 52-46	91,33	59,20	150,53
IAC 52-179	125,25	84,55	209,80	CB 56-30	77,05	72,25	149,30
IAC 55-26	82,70	91,08	173,78	CB 58-179	136,25	103,55	239,80
CB 61-14	84,19	60,40	144,59	CB 61-150	136,85	85,55	222,40

5º BLOCO			
Variedades	Prod. Agric. 1º corte	Prod. Agric. 2º corte	Prod. Total Agrícola
CB 41-76	105,31	86,50	191,81
CB 36-24	104,72	71,10	175,82
CB 40-13	128,22	96,60	224,82
CB 40-69	105,31	84,35	189,66
CB 41-14	114,83	82,75	197,58
CB 55-27	58,31	31,28	89,59
IANE 55-34	129,41	88,70	218,11
IANE 55-45	121,38	57,42	178,80
CB 60-9	73,18	66,50	139,68
CB 61-99	124,95	82,55	207,50
CB 61-76	86,87	70,90	157,77
CB 61-81	119,60	62,35	181,95

Tabela 2 - Valores observados dos parâmetros e suas estimativas.

Parâmetros	Valor Observado	Valor de Q	δ	Solução das Eq. Normais	Ajuste
G	10 970,27	-	$\hat{m}$	91,4189	-
T_1 =CB 41-76	996,43	82,2408	$\hat{\epsilon}_1$	8,22408	99,6430
T_2 =CB 36-24	982,65	68,4608	$\hat{\epsilon}_2$	6,84608	98,2650
T_3 =CB 40-13	1 056,66	142,4708	$\hat{\epsilon}_3$	14,24708	105,6660
T_4 =CB 40-69	965,21	51,0208	$\hat{\epsilon}_4$	5,10208	96,5210
T_5 =CB 41-14	1 026,10	111,9108	$\hat{\epsilon}_5$	11,19108	102,6100
T'_{11} =CB 61-2	129,12	-46,6333	$\hat{\epsilon}'_{11}$	-26,8109	64,6080
T'_{21} =CB 53-98	170,32	-5,4333	$\hat{\epsilon}'_{21}$	-6,2109	85,2080
T'_{31} =CB 58-11	157,38	-18,3733	$\hat{\epsilon}'_{31}$	-12,6809	78,7380
T'_{41} =CB 47-31	144,00	-31,7533	$\hat{\epsilon}'_{41}$	-19,3709	72,0480
T'_{51} =CB 61-4	128,43	-47,3233	$\hat{\epsilon}'_{51}$	-27,1559	64,2630
T'_{61} =IAC 51-205	183,72	7,9667	$\hat{\epsilon}'_{61}$	0,4892	91,9081
T'_{71} =Co 678	191,14	15,3867	$\hat{\epsilon}'_{71}$	4,1992	95,6181
T'_{12} =CB 40-11	166,19	-13,0117	$\hat{\epsilon}'_{12}$	-7,6130	83,8059
T'_{22} =IAC 50-134	230,51	51,3083	$\hat{\epsilon}'_{22}$	24,5471	115,9660
T'_{32} =IAC 48-65	146,08	-33,1217	$\hat{\epsilon}'_{32}$	-17,6680	73,7509
T'_{42} =CP 53-18	145,79	-33,4117	$\hat{\epsilon}'_{42}$	-17,8130	73,6059
T'_{52} =Co 453	169,15	-10,0517	$\hat{\epsilon}'_{52}$	-6,1330	85,2859
T'_{62} =PR 980	154,59	-24,6117	$\hat{\epsilon}'_{62}$	-13,4130	78,0059
T'_{72} =CB 55-21	139,81	-39,3917	$\hat{\epsilon}'_{72}$	-20,8030	70,6159
T'_{13} =CB 55-49	145,26	-32,8658	$\hat{\epsilon}'_{13}$	-13,6649	77,7540
T'_{23} =CB 55-65	117,23	-60,8958	$\hat{\epsilon}'_{23}$	-27,6799	63,7390
T'_{33} =CB 55-72	152,89	-25,2358	$\hat{\epsilon}'_{43}$	-9,8499	81,5690
T'_{43} =IAC 52-172	239,79	61,6642	$\hat{\epsilon}'_{43}$	33,6001	125,0190
T'_{53} =IAC 52-179	209,80	31,6742	$\hat{\epsilon}'_{53}$	18,6051	110,0240
T'_{63} =IAC 55-26	173,78	-4,3458	$\hat{\epsilon}'_{63}$	0,5951	92,0140
T'_{73} =CB 61-14	144,59	-33,5358	$\hat{\epsilon}'_{73}$	-13,9999	77,4190
T'_{14} =NA 56-62	205,82	4,1358	$\hat{\epsilon}'_{14}$	3,0361	94,4550
T'_{24} =CP 48-117	218,72	17,0358	$\hat{\epsilon}'_{24}$	9,4861	100,9050
T'_{34} =CP 50-28	143,68	-58,0042	$\hat{\epsilon}'_{34}$	-28,0339	63,3850
T'_{44} =CB 52-46	150,53	-51,1542	$\hat{\epsilon}'_{44}$	-24,6089	66,8100
T'_{54} =CB 56-30	149,30	-52,3842	$\hat{\epsilon}'_{54}$	-25,2239	66,1950
T'_{64} =CB 58-179	239,80	38,1158	$\hat{\epsilon}'_{64}$	20,0261	111,4450
T'_{74} =CB 61-150	222,40	20,7158	$\hat{\epsilon}'_{74}$	11,3261	102,7450
T'_{15} =CB 55-27	89,59	-89,8342	$\hat{\epsilon}'_{15}$	-44,0519	47,3670
T'_{25} =IANE 65-34	218,11	38,6858	$\hat{\epsilon}'_{25}$	20,2081	111,6270
T'_{35} =IANE 55-45	178,80	-0,6242	$\hat{\epsilon}'_{35}$	0,5531	91,9720
T'_{45} =CB 60-9	139,68	-39,7442	$\hat{\epsilon}'_{45}$	-19,0069	72,4120
T'_{55} =CB 61-99	207,50	28,0758	$\hat{\epsilon}'_{55}$	14,8031	106,3220
T'_{65} =CB 61-76	157,77	-21,6542	$\hat{\epsilon}'_{65}$	-9,9619	81,4573
T'_{75} =CB 61-81	181,95	2,5258	$\hat{\epsilon}'_{75}$	2,1281	93,5470

Parâmetros	Valor Observado	Valor de Q	θ	Solução das Eq. Normais	Ajuste
δ_1	2 109,04	-	$\hat{b}_1$	-0,0480	
δ_2	2 150,42	-	$\hat{b}_2$	-0,7110	
δ_3	2 137,51	-	$\hat{b}_3$	-5,1240	
δ_4	2 420,21	-	$\hat{b}_4$	8,4550	
δ_5	2 153,09	-	$\hat{b}_5$	-2,5720	
λ_1	6 363,34	-	$\hat{a}_1$	14,6368	
λ_2	4 606,93	-	$\hat{a}_2$	-14,6368	
TA_{11}	557,51	-	$\hat{ta}_{11}$	-2,7778	
TA_{21}	564,06	-	$\hat{ta}_{21}$	-0,0898	
TA_{31}	622,65	-	$\hat{ta}_{31}$	4,2272	
TA_{41}	564,64	-	$\hat{ta}_{41}$	1,7702	
TA_{51}	580,40	-	$\hat{ta}_{51}$	-1,1668	
TA_{12}	438,92	-	$\hat{ta}_{12}$	2,7778	
TA_{22}	418,59	-	$\hat{ta}_{22}$	0,0898	
TA_{32}	434,01	-	$\hat{ta}_{32}$	-4,2272	
TA_{42}	400,57	-	$\hat{ta}_{42}$	-1,7702	
TA_{52}	445,70	-	$\hat{ta}_{52}$	1,1668	
$T'A_{111}$	75,86	-	$\hat{ta}_{111}$	-2,7064	
$T'A_{211}$	82,41	-	$\hat{ta}_{211}$	-16,7564	
$T'A_{311}$	102,34	-	$\hat{ta}_{311}$	9,6436	
$T'A_{411}$	90,14	-	$\hat{ta}_{411}$	4,1336	
$T'A_{511}$	77,94	-	$\hat{ta}_{511}$	-0,2814	
$T'A_{611}$	105,31	-	$\hat{ta}_{611}$	-0,5564	
$T'A_{711}$	100,85	-	$\hat{ta}_{711}$	-8,7264	
$T'A_{121}$	100,85	-	$\hat{ta}_{121}$	1,7156	
$T'A_{221}$	145,77	-	$\hat{ta}_{221}$	14,4756	
$T'A_{321}$	91,04	-	$\hat{ta}_{321}$	1,9606	
$T'A_{421}$	97,28	-	$\hat{ta}_{421}$	8,3456	
$T'A_{521}$	97,28	-	$\hat{ta}_{521}$	-3,3344	
$T'A_{621}$	83,90	-	$\hat{ta}_{621}$	-9,4344	
$T'A_{721}$	82,41	-	$\hat{ta}_{721}$	-3,5344	
$T'A_{131}$	82,11	-	$\hat{ta}_{131}$	-3,8884	
$T'A_{231}$	68,13	-	$\hat{ta}_{231}$	-3,8534	
$T'A_{331}$	96,09	-	$\hat{ta}_{331}$	6,2766	
$T'A_{431}$	124,95	-	$\hat{ta}_{431}$	-8,3134	
$T'A_{531}$	125,25	-	$\hat{ta}_{531}$	6,9816	
$T'A_{631}$	82,70	-	$\hat{ta}_{631}$	-17,5584	
$T'A_{731}$	84,19	-	$\hat{ta}_{731}$	-1,4734	
$T'A_{141}$	118,70	-	$\hat{ta}_{141}$	-0,6633	
$T'A_{241}$	117,72	-	$\hat{ta}_{241}$	-8,0933	

Parâmetros	Valor Observado	Valor de Q	δ	Solução das Eq. Normais	Ajuste
$T'A_{341}$	85,68	-	$\hat{\epsilon}a_{341}$	-2,6133	
$T'A_{441}$	91,33	-	$\hat{\epsilon}a_{441}$	-0,3883	
$T'A_{541}$	77,05	-	$\hat{\epsilon}a_{541}$	-14,0533	
$T'A_{641}$	136,25	-	$\hat{\epsilon}a_{641}$	-0,1033	
$T'A_{741}$	136,85	-	$\hat{\epsilon}a_{741}$	9,1967	
$T'A_{151}$	58,31	-	$\hat{\epsilon}a_{151}$	0,1987	
$T'A_{251}$	129,41	-	$\hat{\epsilon}a_{251}$	7,0387	
$T'A_{351}$	121,38	-	$\hat{\epsilon}a_{351}$	18,6637	
$T'A_{451}$	73,18	-	$\hat{\epsilon}a_{451}$	-9,9763	
$T'A_{551}$	124,95	-	$\hat{\epsilon}a_{551}$	7,8837	
$T'A_{651}$	86,87	-	$\hat{\epsilon}a_{651}$	-5,3313	
$T'A_{751}$	119,60	-	$\hat{\epsilon}a_{751}$	15,3087	
$T'A_{112}$	53,26	-	$\hat{\epsilon}u_{112}$	2,7064	
$T'A_{212}$	87,91	-	$\hat{\epsilon}u_{212}$	16,7564	
$T'A_{312}$	55,04	-	$\hat{\epsilon}u_{312}$	-9,6436	
$T'A_{412}$	53,86	-	$\hat{\epsilon}u_{412}$	-4,1336	
$T'A_{512}$	50,49	-	$\hat{\epsilon}u_{512}$	0,2814	
$T'A_{612}$	78,41	-	$\hat{\epsilon}a_{612}$	0,5564	
$T'A_{712}$	90,29	-	$\hat{\epsilon}u_{712}$	8,7264	
$T'A_{122}$	65,34	-	$\hat{\epsilon}u_{122}$	-1,7156	
$T'A_{222}$	84,74	-	$\hat{\epsilon}u_{222}$	-14,4756	
$T'A_{322}$	55,04	-	$\hat{\epsilon}u_{322}$	-1,9606	
$T'A_{422}$	48,51	-	$\hat{\epsilon}a_{422}$	-8,3456	
$T'A_{522}$	71,87	-	$\hat{\epsilon}u_{522}$	3,3334	
$T'A_{622}$	70,69	-	$\hat{\epsilon}u_{622}$	9,4344	
$T'A_{722}$	57,40	-	$\hat{\epsilon}a_{722}$	3,5344	
$T'A_{132}$	63,15	-	$\hat{\epsilon}u_{132}$	3,8884	
$T'A_{232}$	49,10	-	$\hat{\epsilon}u_{232}$	3,8534	
$T'A_{332}$	56,80	-	$\hat{\epsilon}a_{332}$	-6,2766	
$T'A_{432}$	114,84	-	$\hat{\epsilon}a_{432}$	8,3134	
$T'A_{532}$	84,55	-	$\hat{\epsilon}u_{532}$	-6,9816	
$T'A_{632}$	91,08	-	$\hat{\epsilon}a_{632}$	17,5584	
$T'A_{732}$	60,40	-	$\hat{\epsilon}u_{732}$	1,4734	
$T'A_{142}$	87,12	-	$\hat{\epsilon}a_{142}$	0,6633	
$T'A_{242}$	101,00	-	$\hat{\epsilon}a_{242}$	8,0933	
$T'A_{342}$	58,00	-	$\hat{\epsilon}u_{342}$	2,6133	
$T'A_{442}$	59,20	-	$\hat{\epsilon}a_{442}$	0,3883	
$T'A_{542}$	72,25	-	$\hat{\epsilon}a_{542}$	14,0533	
$T'A_{642}$	103,55	-	$\hat{\epsilon}a_{642}$	0,1033	
$T'A_{742}$	85,55	-	$\hat{\epsilon}a_{742}$	-9,1967	
$T'A_{152}$	31,28	-	$\hat{\epsilon}u_{152}$	-0,1987	
$T'A_{252}$	88,70	-	$\hat{\epsilon}a_{252}$	-7,0387	
$T'A_{352}$	57,42	-	$\hat{\epsilon}u_{352}$	-18,6637	

Tabela 2 - (continuação).

Parâmetros	Valor Observado	Valor de Q	$\hat{\theta}$	Solução das Eq. Normais	Ajuste
$T'A_{452}$	66,50	-	$\hat{t}a_{452}$	9,9763	
$T'A_{552}$	82,55	-	$\hat{t}a_{552}$	-7,8837	
$T'A_{652}$	70,90	-	$\hat{t}a_{652}$	5,3313	
$T'A_{752}$	62,35	-	$\hat{t}a_{752}$	-15,3087	
BA_{11}	1 209,31	-	$\hat{b}a_{11}$	-0,6304	
BA_{21}	1 279,84	-	$\hat{b}a_{21}$	1,4026	
BA_{31}	1 209,31	-	$\hat{b}a_{31}$	-1,2684	
BA_{41}	1 392,79	-	$\hat{b}a_{14}$	1,8166	
BA_{51}	1 272,09	-	$\hat{b}a_{51}$	-1,3204	
BA_{12}	899,73	-	$\hat{b}a_{12}$	0,6304	
BA_{22}	870,58	-	$\hat{b}a_{22}$	-1,4026	
BA_{32}	928,20	-	$\hat{b}a_{32}$	1,2684	
BA_{42}	1 027,42	-	$\hat{b}a_{42}$	-1,8166	
BA_{52}	881,00	-	$\hat{b}a_{52}$	1,3204	