ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM TRATAMENTOS PRINCIPAIS DISPOSTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS

ANTONIO FRANCISCO IEMMA

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo, Brasil
Abril, 1981

A Deus,

OFEREÇO.

*Às minhas quatro Anas,
aos meus pais
e ao meu irmão,*

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

- Ao Dr. Humberto de Campos, Professor Adjunto do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela orientação segura e amiga na execução deste trabalho.
- Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, na pessoa de seu Coordenador Prof. Humberto de Campos, por sua acolhida, seus ensinamentos e pela solicitude com a qual invariavelmente nos atenderam dentro e fora das salas de aula.
- Aos Professores Carlos Roberto Padovani, Clarice Garcia Borges Demétrio, Décio Barbin, Frederico Pimentel Gomes, Paulo Roberto Curi, Ubirajara Dorival Diniz e Waldenir Queiroz Ribeiro, pelas valiosas sugestões.
- Aos Professores Rui Vieira de Moraes e Sheila Zambello de Pinho, pelo auxílio na execução dos programas para o computador IBM 1130 da UNESP - Campus de Botucatu, utilizados neste estudo.
- Aos Professores do Departamento de Bioestatística, à Diretoria do Instituto Básico de Biologia Médica e Agrícola do Campus de Botucatu, à Reitoria da UNESP, bem como aos seus respectivos órgãos colegiados, pelo afastamento concedido.
- À CAPES - Coordenação do Aperfeiçoamento do Pessoal do Nível Superior, pela bolsa de estudos concedida.
- Ao Prof. Antonio Joaquim Rocha, ao Dr. Antonio Carlos Vilella Braga e ao Dr. Electro Bonini, pela confiança depositada em nossos primeiros passos.

Às Srtas. Maria Izalina Ferreira Alves e Rosa Maria Alves, bem como ao Sr. Octávio Frassetto, pela datilografia e impressão.

A Eng.^a Agr.^a Eliza Helena de Souza Faria, pela revisão final do trabalho.

Aos companheiros do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, pelo convívio.

Aos meus amigos Abraão Adolpho Angeli, Humberto Spinetti Jr., José Paulo Peter Lacorte e José Roberto Braga de Camargo, bem como às respectivas famílias, pelo apoio.

À minha família, pela paciência e dedicação.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram na execução deste trabalho.

I N D I C E

	Pág.
RESUMO	x
SUMMARY	xiii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 - Localização do Problema	1
1.2 - Objetivos	3
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 - Ensaio em Parcelas Subdivididas	4
2.1.1 - Generalidades	4
2.1.2 - Natureza do erro experimental	7
2.1.3 - Funções lineares estimáveis e suas variâncias	8
2.1.4 - Análise de variância	11
2.2 - Ensaio em Blocos Incompletos Balanceados	14
2.2.1 - Generalidades	14
2.2.2 - Matriz de variâncias e covariâncias	16
2.2.3 - Variância da função linear estimável	17
2.2.4 - Análise de variância	18
2.3 - Ensaio com Parcelas Subdivididas em Blocos Incompletos	19
2.3.1 - Generalidades	19
2.3.2 - O erro experimental	21
2.3.3 - Funções lineares estimáveis e suas variâncias	23
2.3.4 - Análise de variância	25

	Pág.
3. MATERIAL	30
4. MÉTODOS	36
4.1 - Introdução	36
4.2 - Modelo Matemático	39
4.3 - Equações Normais	41
4.4 - Solução do Sistema	49
4.5 - Dispersão	58
4.5.1 - Dispersão para tratamentos principais	60
4.5.2 - Dispersão para tratamentos secundários	66
4.5.3 - Dispersão para a interação txt'	68
4.6 - Análise de Variância	75
4.6.1 - Introdução	75
4.6.2 - Esperanças dos quadrados médios para os efei tos fixos	79
4.6.2.1 - Soma de quadrados dos parâmetros..	79
4.6.2.2 - Somas de quadrados por parâmetro..	83
4.6.2.2.1 - Média geral	83
4.6.2.2.2 - Tratamentos principais	87
4.6.2.2.3 - Blocos	89
4.6.2.2.4 - Tratamentos secundários	91
4.6.2.2.5 - Interação txt'	95
4.6.3 - Soma de quadrados devida às parcelas	98

	Pág.
4.6.4 - Soma de quadrados devida ao total	100
4.6.5 - Componentes de variância devidos aos efeitos aleatórios	102
4.6.5.1 - Resíduo (a)	102
4.6.5.2 - Resíduo (b)	102
4.6.6 - Testes de hipóteses e quadros de análise ..	103
4.6.7 - Comparações múltiplas	114
4.6.7.1 - Entre tratamentos principais	115
4.6.7.2 - Entre tratamentos secundários ...	115
4.6.7.3 - Entre tratamentos secundários den- tro do i-ésimo tratamento princi- pal	116
4.6.7.4 - Entre tratamentos principais den- tro do s-ésimo tratamento secundá- rio	117
4.7 - Testes Sobre a Estrutura da Matriz de Covariâncias..	117
4.7.1 - Teste de homogeneidade das matrizes de cova- riâncias para todos os tratamentos	118
4.7.2 - Teste de uniformidade da matriz comum de co- variâncias	120
5. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO	122
5.1 - Testes Sobre a Estrutura da Matriz de Covariân- cias	123

	Pág.
5.1.1 - Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias	123
5.1.2 - Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias	125
5.2 - Equações Normais	126
5.3 - Solução do Sistema	130
5.3.1 - Efeitos estimados de tratamentos principais	130
5.3.2 - Efeitos estimados de tratamentos secundários	130
5.3.3 - Efeitos estimados dos pares $(tt')_{is}$	131
5.4 - Análise de Variância	132
5.4.1 - Obtenção das somas de quadrados	132
5.4.2 - Testes de hipóteses e quadros de análise ..	133
5.5 - Comparações Múltiplas	135
5.5.1 - Entre médias de efeitos estimados de tratamentos principais	135
5.5.2 - Entre médias de efeitos estimados de tratamentos secundários	135
5.5.3 - Entre médias de efeitos estimados de tratamentos secundários dentro do i-ésimo tratamento principal	136
5.5.4 - Entre médias de efeitos estimados de tratamentos principais, dentro do s-ésimo tratamento secundário	137

	Pág.
6. CONCLUSÕES	138
6.1 - Em Relação ao Modelo Matemático	138
6.2 - Em Relação ao Sistema de Equações Normais	139
6.3 - Em Relação às Variâncias das Funções Lineares Estimáveis	139
6.4 - Em Relação à Análise de Variância	140
6.4.1 - Quadro da análise	140
6.4.2 - Testes de hipóteses	140
6.5 - Em Relação às Comparações Múltiplas	141
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	142

ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS
COM TRATAMENTOS PRINCIPAIS DISPOSTOS EM BLOCOS
INCOMPLETOS BALANCEADOS

Autor: Antonio Francisco Iemma
Orientador: Prof. Dr. Humberto de Campos

RESUMO

Neste estudo, analisou-se o comportamento dos experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados.

Para tanto, adotou-se o modelo matemático:

$$y_{ijs} = m + t_i + b_j + e_{k(ij)} + t'_s + (tt')_{is} + e_{ijs}$$

onde, para $i=1,2,\dots,v$; $j=1,2,\dots,a$; $s=1,2,\dots,u$; $k=1,2,\dots,K$,

y_{ijs} é o valor observado na subparcela que recebeu o s -ésimo tratamento secundário, dentro do i -ésimo tratamento principal, no bloco j ;

m é o efeito da média geral;

t_i é o efeito do i -ésimo tratamento principal;

b_j é o efeito do j -ésimo bloco;

$e_{k(ij)}$ é o erro atribuído à k -ésima parcela do bloco j , que recebeu o tratamento principal i : caracterizado como componente do erro (a);

t'_s é o efeito do s -ésimo tratamento secundário;

$(tt')_{is}$ é o efeito da interação entre o i -ésimo tratamento principal e o s -ésimo tratamento secundário;

e_{ijs} é o erro atribuído à observação y_{ijs} , caracterizado como componente do erro (b).

Ademais, considerou-se a existência de correlação constante, ρ , entre duas subparcelas de uma mesma parcela, e independência entre subparcelas de parcelas distintas, resultando

$$\text{Cov}(y_{ijs}, y_{i'j's'}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } i=i', j=j', s=s' \\ \rho\sigma^2, & \text{se } i=i', j=j', s \neq s' \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

No desenvolvimento da metodologia, supôs-se um ensaio com parcelas subdivididas no qual os v tratamentos principais estivessem presentes em r dos a blocos incompletos balanceados ($r < a$); cada bloco apresentasse k parcelas e cada par de tratamentos principais ocorresse em λ blocos.

Sob essas condições, foram determinados: o sistema de equações normais, as matrizes de dispersão para os parâmetros básicos, os componentes de variância para os efeitos fixos e aleatórios do modelo proposto, os critérios para os testes das hipóteses

de nulidade usuais e os critérios para comparações múltiplas pelo teste de Tukey baseados nas variâncias das funções lineares estimáveis.

A menos de constantes inerentes ao modelo, duas situações distintas ficaram caracterizadas, no tocante às determinações citadas. Assim, as estimativas referentes a tratamentos principais e blocos, obtidas neste estudo, foram análogas àquelas encontradas na bibliografia dos ensaios em blocos incompletos balanceados; enquanto que as estimativas referente a tratamentos secundários e à interação $t \times t'$, portaram-se de modo semelhante às suas correspondentes em ensaios com parcelas subdivididas em blocos casualizados.

ANALYSIS OF SPLIT-PLOT EXPERIMENTS WITH MAIN TREATMENTS DISPOSED IN BALANCED INCOMPLETE BLOCK

Author: Antonio Francisco Iemma
Adviser: Prof. Dr. Humberto de Campos

SUMMARY

In this paper, the conduct of the split-plot designs with the main treatments disposed in balanced incomplete blocks, was analised.

For this, the following mathematical model, was used:

$$y_{ijs} = m + t_i + b_j + e_{k(ij)} + t'_s + (tt')_{is} + e_{ijs}$$

where, for $i=1, \dots, v$; $j=1, \dots, a$; $s=1, \dots, u$; $k=1, \dots, K$,

y_{ijs} denotes the observation of the subplot containing the s th subplotreatment of the i th main treatment in the j th block;

m denotes the effect of general mean;

t_i denotes the effect of the i th main treatment;

b_j denotes the effect of the j th block;

$e_{k(ij)}$ denotes the error inherent at the k th whole-plot of the j th block in the i th mean treatment, characterized with a error (a) component;

t'_s denotes the effect of the s th sub treatment;

$(tt')_{is}$ denotes the effect for the interaction between i th main treatment and s th sub treatment;

e_{ijs} denotes the error inherent at the i - j - s th sub plot, characterized with a error (b) component.

Moreover, the presence of constant correlaction, ρ , between two subplots of same plot, and independence among subplots of the distincts plots, was considered, resulting:

$$\text{Cov}(y_{ijs}, y_{i'j's'}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{if } i=i', j=j', s=s' \\ \rho\sigma^2, & \text{if } i=i', j=j', s \neq s' \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

In methodology one split-plot design with the $\underline{v}$ main treatments disposed in $\underline{r}$ out of $\underline{a}$ balanced incomplete block ($r < a$), where every block was formed by $\underline{k}$ plots, and every pair of main treatments occurred in $\underline{\lambda}$ blocks, was considered.

Under these assumptions, the solution of the normal equations, the dispersion matrix for the effects in the mathematical model proposed, the criterion for the usual null hypothesis tests and the criterion of the multiple comparisons by Tukey's test based on linear functions variance, was obtained.

Except for constants inherent in the model, two main conclusions were obtained: estimates of main treatments and blocks, obtained in this study, were analogous to those existent in the literature of the balanced incomplete block design; while other estimates were analogous to those correspondents in the split-plot randomized block design.

1. INTRODUÇÃO

1.1 - Localização do Problema

Os experimentos em parcelas subdivididas, que segundo LEONARD e CLARK (1939) foram propostos por Yates, em 1933, têm sido de grande valia para os estudiosos das mais diversas áreas de pesquisa. No tocante à pesquisa agropecuária, sua aplicação vem sendo ressaltada por autores consagrados, como STELL e TORRIE (1960), SNEDECOR e COCHRAN (1967), PIMENTEL GOMES (1976), COCHRAN e COX (1976), dentre outros.

A farta bibliografia existente em relação a tais ensaios tem mostrado uma certa tendência dos autores para a disposição dos tratamentos principais em blocos casualizados e esse fato pode, de certo modo, ser justificado pela grande simplicidade e al-

ta eficiência desses delineamentos.

No entanto, se por um lado os blocos casualizados são recomendáveis, por outro eles podem apresentar o inconveniente de fugir ao controle do experimentador, quando num ensaio em parcelas subdivididas o número de tratamentos secundários for relativamente grande. É natural que se o efeito de blocos for significativo eles devem ser preferidos sobre um ensaio inteiramente casualizado, mesmo que o número de tratamentos secundários seja grande, apesar do risco da crescente perda de eficiência diretamente associada ao tamanho dos blocos.

Além do inconveniente citado, existem outros que, na pesquisa agropecuária, podem ser de caráter restritivo à formação dos blocos casualizados. Como ilustração, tomemos um ensaio com suinos no qual se deseja testar um grande número de tratamentos. Considerando-se que para experimentos desse tipo está consagrado o uso de leitegadas como blocos, o experimentador tem diante de si um impasse: ou diminui o número de tratamentos ou não usa leitegada como bloco. Na primeira escolha perderá a vantagem de comparar os tratamentos eliminados com os demais, na segunda fatalmente perderá em eficiência, dada a menor homogeneidade dos "novos" blocos.

Assim como esta, existem inúmeras outras situações, na pesquisa agropecuária, que sugerem uma nova utilização dos experimentos em parcelas subdivididas em blocos, que se torne mais geral e menos restritiva, permitindo ao experimentador uma maior abran

gência, no tocante a suas aplicações: os experimentos em parcelas subdivididas em blocos incompletos.

1.2 - Objetivos

No desenvolvimento da revisão bibliográfica, notou-se uma lacuna quanto aos ensaios com parcelas subdivididas em blocos incompletos. Assim, propôs-se como um dos objetivos deste trabalho, apresentar-se um estudo sobre esse tema. No entanto, dado a sua extensão, optou-se pelo caso em que os tratamentos principais estivessem dispostos em blocos incompletos balanceados, ficando os casos de blocos parcialmente balanceados, bem como o estudo dos tratamentos secundários em blocos incompletos e os casos não balanceados, para estudos posteriores.

Ademais, preocupou-se em redigir um trabalho que pudesse ser entendido e usado por profissionais da área agropecuária. Desse modo, apesar de adotar-se a sólida estrutura da Teoria dos Modelos Lineares, ela foi muitas vezes, dissimulada pelo uso da terminologia tradicional e já familiar para tais profissionais.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - Ensaios em Parcelas Subdivididas

2.1.1 - Generalidades

Segundo LEONARD e CLARK (1939), os Ensaios em Parcelas Subdivididas tiveram seu início com Yates, por volta de 1933, seguido de Le Clerg, em 1937, e Goulden em 1939.

Dentre suas múltiplas aplicações, PIMENTEL GOMES (1976) destaca o estudo de dois tipos de tratamentos, como por exemplo, variedades e espaçamentos. Nesse caso, cada parcela semeada com uma certa variedade seria repartida em subparcelas, cada qual com um dos espaçamentos de interesse.

COCHRAN e COX (1976), definindo os Ensaios em Parcelas Subdivididas através dos ensaios em fatorial com confundimento

de efeitos principais, ressaltam sua eficiência em experimentos de campo, quando se deseja introduzir um fator adicional dentro do ensaio. Assim, por exemplo, se existe o plano inicial para testar-se um fator A em I níveis, então a divisão de cada parcela, digamos, ao meio, permite a introdução de um novo fator B, a dois níveis que serão distribuídos casualmente dentro de cada parcela dos níveis de A.

Por sua vez, LEAL (1979) enfoca o uso dos experimentos em parcelas subdivididas, na análise dos ensaios com medidas repetidas sobre unidades experimentais, como uma alternativa para o uso da Análise Multivariada, quando se constata a uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias. Sob esse prisma, concorda com STEEL e TORRIE (1960), CALZADA BENZA (1970) e LITTLE e HILLS (1972), que argumentam que os experimentos nos quais observações sucessivas são feitas sob uma mesma unidade experimental durante um certo intervalo de tempo, em muitos aspectos se assemelham a experimentos em parcelas subdivididas, nos quais cada unidade experimental é dividida em subunidades distintas.

No entanto, para STEEL e TORRIE (1960) existem algumas diferenças fundamentais entre as análises desses dois tipos de experimentos. Por exemplo, na análise de ensaios com medidas repetidas, quando o delineamento é o de blocos casualizados, a soma de quadrados da interação blocos x medidas no tempo deve sempre ser separada do erro (b), dada a sua importância nas conclusões sobre o ensaio.

Outra diferença importante, também citada em LEAL (1979), consiste na composição da matriz de variâncias e covariâncias, que para medidas repetidas no tempo é do tipo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

correspondendo muito mais à estrutura exigida para a análise multivariada, enquanto que, para ensaios com parcelas subdivididas, existe a pressuposição mais restritiva que as observações têm variâncias homogêneas e são igualmente correlacionadas, gerando uma matriz de variâncias e covariâncias do tipo uniforme. Então

$$\sigma_{kk'} = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } k=k' \\ \rho\sigma^2, & \text{se } k \neq k' \end{cases}$$

resultando:

$$\Sigma^* = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

DINIZ (1980) cita Gill e Hafs (1971), ao salientar a necessidade de se verificar se as matrizes de dispersão para tratamentos são homogêneas, assim como, se a matriz de dispersão do expe

rimento é do tipo uniforme, para que seja adequado o uso da técnica das parcelas subdivididas.

2.1.2 - Natureza do erro experimental

Segundo COCHRAN e COX (1976), na análise estatística dos experimentos em parcelas subdivididas, deve ser considerado o fato de que as observações das diferentes subparcelas de uma mesma parcela podem estar correlacionadas. Para ressaltar sua colocação exemplificam alegando que, em experimentos de campo, essa correlação pode ser motivada pela proximidade das plantas, que nessas condições tendem a ser similares em suas propriedades agronômicas.

Assim como em CHAKRABARTI (1962), LEAL (1979) e DINIZ (1980), dentre outros, COCHRAN e COX (1976) mostram que se supõe existir uma correlação, ρ , constante entre erros experimentais do tipo e_{ijk} e $e_{ijk'}$, para quaisquer subparcelas de uma mesma parcela, tal que

$$E(e_{ijk}) = 0 \quad , \quad V(e_{ijk}) = \sigma^2$$

e

$$\text{Cov}(e_{ijk}, e_{i'j'k'}) = \begin{cases} \rho\sigma^2, & \text{se } i=i', j=j', k=k' \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Desse modo, exemplificam que, para duas subparcelas por parcela, a variância do erro de uma parcela total é

$$E(e_{ij_1} + e_{ij_2})^2 = \sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma^2 = 2(1+\rho) \sigma^2.$$

Por outro lado, mostram que para o tratamento principal, a variância é do tipo $[1 + (\beta-1)\rho] \sigma^2$.

No tocante à eficiência dos testes para tratamentos principais e secundários, KEMPTHORNE (1950), TAYLOR (1950), FEDERER (1955) e PIMENTEL GOMES (1976), dentre outros, são unânimes em afirmar a maior precisão existente no teste de tratamentos secundários. Sob esse aspecto, PIMENTEL GOMES (1976) ressalta que essa diferença de eficiências pode ser usada como uma vantagem adicional.

Para COCHRAN e COX (1976) a maior precisão obtida no teste dos tratamentos secundários pode ser justificada pelo coeficiente, ρ , de correlação que, na prática, é quase sempre positivo.

Este fato pode ser melhor interpretado quando se toma a estimativa não tendenciosa para ρ citada em LEAL (1979)

$$\hat{\rho} = \frac{QM \text{ Res (a)}}{QM \text{ Res (a)} + QM \text{ Res (b)}}$$

2.1.3 - Funções lineares estimáveis e suas variâncias

No tocante à variância das funções lineares estimáveis, os autores mostraram-se, de certo modo coerentes, a menos do coeficiente, ρ , de correlação que, para alguns autores, não é considerado.

Assim, em CHAKRABARTI (1962) encontra-se o seguinte quadro para estimadores e suas variâncias:

Funções Lineares dos Parâmetros	Melhor Estimador Linear	Variâncias
$\alpha_i - \alpha_{i'}$	$y_{i..} - y_{i'..}$	$2\sigma_2^2/\alpha\beta$
$\rho_j - \rho_{j'}$	$y_{.j.} - y_{.j'.$	$2\sigma_2^2/r\beta$
$\tau_k - \tau_{k'}$	$y_{..k} - y_{..k'}$	$2\sigma_1^2/r\alpha$
$\delta_{jk} - \delta_{j'k}$	$y_{.jk} - y_{.j'k} - (y_{.j.} - y_{.j'.})$	$2\sigma_1^2/r(1 - \frac{1}{\beta})$
$\delta_{jk} - \delta_{jk'}$	$y_{.jk} - y_{.jk'} - (y_{..k} - y_{..k'})$	$2\sigma_1^2/r(1 - \frac{1}{\alpha})$

obtido do modelo

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \rho_j + \tau_k + \delta_{jk} + e_{ijk} ,$$

onde, α_i denota o efeito do i -ésimo bloco;

ρ_j denota o efeito do j -ésimo tratamento principal;

τ_k denota o efeito do k -ésimo tratamento secundário;

δ_{jk} denota o efeito da interação do j -ésimo tratamento principal com o k -ésimo tratamento secundário;

e_{ijk} é o erro experimental, normalmente distribuído

$i = 1, 2, \dots, r$ blocos;

$j = 1, 2, \dots, \alpha$ tratamentos principais;

$k = 1, 2, \dots, \beta$ tratamentos secundários.

Ademais,

$$\sigma_2^2 = [1 + (\beta-1) \rho] \sigma^2 \quad , e \quad \sigma_1^2 = (1-\rho) \sigma^2 .$$

Por sua vez, PIMENTEL GOMES (1976) apresenta resultados que podem ser resumidos no seguinte quadro:

Comparação Entre Médias dos Efeitos Estimados	Estimativas das Variâncias
$\hat{m}_A - \hat{m}_{A'}$	$(2/br) \text{ QMRes}(a)$
$\hat{m}_B - \hat{m}_{B'}$	$(2/ar) \text{ QMRes}(b)$
$\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{AB'}$	$(2/r) \text{ QMRes}(b)$
$\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{A'B}$	$(2/br) \text{ QMRes}(a) + (b-1) \text{ QMRes}(b)$

onde, a = nº de tratamentos principais;

b = nº de tratamentos secundários;

r = nº de repetições;

A e B referem-se aos tratamentos principais e secundários, respectivamente;

e, no teste de $\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{A'B}$, a variável observada tem distribuição aproximada de "t", com n' graus de liberdade. Nesse caso, n' é obtido pela aproximação proposta por Satterthwaite em 1946

$$n' = \frac{[\text{QMRes}(a) + (b-1) \text{ QMRes}(b)]}{\frac{[\text{QMRes}(a)]^2}{n_a} + \frac{(b-1)^2 [\text{QMRes}(b)]^2}{n_b}}$$

Para COCHRAN e COX (1976), que apresentam resultados análogos aos de PIMENTEL GOMES (1976), os quocientes entre as diferenças de tratamentos principais dentro de tratamentos secundários e os respectivos erros-padrão, não têm distribuição "t", podendo, no entanto, ser obtida uma aproximação razoável através de:

$$t = \frac{(-1) E_b t_b + E_a t_a}{(-1) E_b + E_a},$$

onde t_a e t_b são, respectivamente, os níveis de significância de t correspondentes aos graus de liberdade do erro a (E_a) e do erro b (E_b), com β tratamentos secundários.

Também TAYLOR (1959), com base em estudos desenvolvidos por Whishart em 1940; Welch em 1947 e 1949; e Aspin em 1948; apresenta o mesmo resultado que Satterthwaite para o número de graus de liberdade da variável observada "t":

$$\frac{1}{F} = \frac{C^2}{(J-1)(K-1)} + \frac{(1-C)^2}{(J-1)K(L-1)},$$

onde: F = número de graus de liberdade;

J = número de blocos casualizados;

K = número de tratamentos principais;

L = número de tratamentos secundários;

e

$$C = \frac{\frac{2}{JL} \text{QRes}(a)}{\frac{2}{JL} \text{QRes}(a) + \frac{2(L-1)}{JL} \text{QRes}(b)}$$

2.1.4 - Análise de variância

Segundo CHAKRABARTI (1962), HARTER (1961), LEAL(1979), dentre outros, sob a hipótese de normalidade dos erros, as somas de quadrados de interesse são independentes e distribuídas como qui-

-quadrados, nos ensaios com parcelas subdivididas em blocos casualizados. Assim, para CHAKRABARTI (1962), num ensaio como aquele descrito em 2.1.3, encontra-se, através da Regra de Cochran, que a soma de quadrados devida aos tratamentos principais e a soma de quadrados devida ao resíduo (a) são independentes e distribuídas segundo qui-quadrados com $(\alpha-1)$ e $(\alpha-1)(r-1)$ graus de liberdade respectivamente.

De modo análogo, as somas de quadrados relativas aos tratamentos secundários e à interação tratamentos principais x tratamentos secundários são independentes da soma de quadrados do resíduo (b) e cada qual é distribuída segundo um qui-quadrado com $(\beta-1)$, $(\alpha-1)(\beta-1)$ e $\alpha(r-1)(\beta-1)$ graus de liberdade, respectivamente.

Com base nessas propriedades, são obtidos os valores adequados para os testes "F", envolvendo tratamentos principais, tratamentos secundários e interação tratamentos principais x tratamentos secundários.

Para LEAL (1979), geralmente as hipóteses de interesse, em ensaios com parcelas subdivididas, são:

$$\begin{aligned} H_0(1): t_i &= 0 & , i=1, \dots, a & \text{tratamentos principais;} \\ H_0(2): t'_k &= 0 & , k=1, \dots, b & \text{tratamentos secundários;} \\ H_0(3): \delta_{ik} &= 0 & , i=1, \dots, a ; k=1, \dots, b . \end{aligned}$$

Os resíduos apropriados para testar essas hipóteses são evidentes quando se observam as variâncias descritas em 2.1.3.

Se a hipótese de nulidade relativa aos efeitos de tratamentos principais é rejeitada, conclui-se pela significância de ao menos um dentre os contrastes entre tratamentos. Nesse caso torna-se possível a utilização dos métodos de comparações múltiplas, como os de Tukey, Duncan, Scheffé, etc.

Sobre a eficiência dos ensaios com parcelas subdivididas em blocos casualizados, em relação aos ensaios em blocos casualizados, KEMPTHORNE (1950) mostra que, para t tratamentos principais distribuídos em r blocos e s tratamentos secundários, com a de composição seguinte:

Fonte de Variação	G.L.	Q.M.
Blocos	$r-1$	
Tratamentos principais (T)	$t-1$	
Erro (a)	$(r-1)(t-1)$	W
Tratamentos secundários (S)	$s-1$	
T x S	$(t-1)(s-1)$	
Erro (b)	$(r-1)t(s-1)$	E
Total	$rst-1$	

a eficiência é calculada por

$$E' = \frac{(t-1) W + t(s-1) E}{ts - 1}$$

Confirmando esse resultado, CHAKRABARTI (1962) apresenta, para o experimento descrito em 2.1.3,

$$E = \frac{(\alpha-1) \sigma_z^2 + \alpha(\beta-1) \sigma_1^2}{\alpha\beta - 1} .$$

Por sua vez, FEDERER (1955) propõe uma fórmula para calcular a eficiência dos ensaios em parcelas subdivididas com relação aos ensaios em blocos casualizados:

$$E = \frac{(p-1) E_a + p(q-1) E_b}{(pq-1) E_b} ,$$

para p níveis do tratamento principal e q níveis do tratamento secundário, erro a (E_a) e erro b (E_b).

Naturalmente as três fórmulas acima são fundamentalmente iguais.

2.2 - Ensaios em Blocos Incompletos Balanceados

2.2.1 - Generalidades

Segundo TAYLOR (1957) e COCHRAN e COX (1976), dentre outros, os delineamentos em blocos incompletos foram introduzidos por Yates em 1936, com o objetivo de eliminar a heterogeneidade intrablocos, através da diminuição do número de parcelas.

Para PIMENTEL GOMES (1976), além da heterogeneidade

a ser eliminada, existem ainda outros tipos de limitações que induzem à formação dos blocos incompletos, como o exemplo que foi citado em 1.1, quando se tomam leitegadas como blocos e existe o interesse de se testar um grande número de tratamentos.

CHAKRABARTI (1962) define um delineamento em blocos incompletos balanceados (BIB), como um arranjo de v tratamentos distribuídos em b blocos de k parcelas cada ($k < v$), onde cada tratamento ocorre uma única vez em r dos b blocos ($r < b$), e dois tratamentos quaisquer ocorrem juntos λ vezes, no experimento.

Ademais, segundo RAGHAVARAO (1971), dentre outros, devem ser observadas as condições de balanceamento demonstradas por Fisher em 1940:

$$bk = rv \quad \text{e} \quad \lambda(v-1) = r(k-1) \quad .$$

Por sua vez, DEY (1975) define um ensaio em blocos incompletos como um BIB, se nele for possível estimar-se qualquer contraste entre tratamentos com a mesma precisão.

De modo geral, os autores são unânimes em apregoar a existência de três tipos básicos de ensaios em BIB, assim constituidos:

BIB tipo I: os blocos podem ser arranjados em repetições;

BIB tipo II: os blocos não podem ser arranjados em repetições
mas podem ser arranjados em grupos de repetições;

BIB tipo III: os blocos não podem ser arranjados em repetições
nem em grupos de repetições.

No entanto, alguns autores, como COCHRAN e COX (1976), acrescentam ainda dois tipos de ensaios em BIB:

BIB tipo IV: para casos em que o número de tratamentos é igual ao número de blocos;

BIB tipo V: para pequenos experimentos.

Sobre os ensaios em BIB tipo IV, CHAKRABARTI (1962) acrescenta que existe a vantagem adicional da simplificação inserida nos cálculos, dada a simetria resultante da igualdade.

2.2.2 - Matriz de variâncias e covariâncias

Segundo PIMENTEL GOMES (1967), dentre outros, a matriz de dispersão para tratamentos é dada por:

$$D(\hat{\tau}) = M^{-1} C M^{-1} \sigma^2,$$

onde, M^{-1} é uma matriz diagonal com elementos $m_{ii} = \frac{k}{\lambda v}$ e de dimensões $v \times v$ ($v = n^o$ de tratamentos);

C é uma matriz singular, de característica igual a $(v-1)$, e com elementos

$$c_{ii'} = \begin{cases} r(1 - 1/k) & , \text{ se } i=i' \\ -\lambda/k & , \text{ se } i \neq i' \end{cases}$$

Desse modo, $D(\hat{\tau})$ é constituída dos seguintes elementos:

$$d_{ii'} = \begin{cases} .k(v-1)/\lambda v^2 & , \text{ se } i=i' \\ -k/\lambda v^2 & , \text{ se } i \neq i' \end{cases}$$

A variância da diferença entre os efeitos estimados de um par qualquer de tratamentos, é obtida de

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 ,$$

que é um resultado análogo àquele obtido por CHAKRABARTI (1962).

2.2.3 - Variância da função linear estimável

Sob esse aspecto, PIMENTEL GOMES (1967) mostra que, dada a função linear estimável dos parâmetros $P'\hat{\tau}$, então $V(P'\hat{\tau})$ pode ser obtida diretamente da matriz M^{-1} :

$$V(P'\hat{\tau}) = P'M^{-1} P \sigma^2.$$

Assim, por exemplo, se a função linear estimável é um contraste do tipo $\hat{t}_1 - \hat{t}_2$, obtem-se

$$V(P'\hat{\tau}) = [1, -1, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} k/\lambda v & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k/\lambda v & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k/\lambda v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \sigma^2$$

$$\therefore V(P'\hat{\tau}) = V(\hat{t}_1 - \hat{t}_2) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 ,$$

resultado idêntico ao obtido em 2.2.2 para estimadores de variância mínima.

2.2.4 - Análise de Variância

A revisão da bibliografia mostrou que os autores são unânimes no tocante à decomposição da soma de quadrados, na análise de variância. Assim, tudo se passa como se a análise fosse feita para um ensaio em blocos casualizados (completos), com a diferença de que ocorre o ajuste da S.Q. de tratamentos e nos casos de BIB tipo I e II ocorre ainda a decomposição da S.Q. de blocos.

Para ensaios em BIB tipo III não há decomposição, pois não existe o arranjo dos blocos em repetições ou em grupos de repetições.

Existe, no entanto, uma diferença conceitual entre as linhas induzidas por Pimentel Gomes ou por Cochran e Cox, conforme descrito em 2.2.1, no sentido de que enquanto aquele ajusta a soma de quadrados devida aos efeitos de tratamentos, estes ajustam a soma de quadrados devida aos efeitos de blocos.

Neste estudo, adotou-se o ajuste para a soma de quadrados de tratamentos que, segundo PIMENTEL GOMES (1976), é obtida por

$$SQt(aj.) = \hat{\tau}'Q$$

onde,

$$\hat{\tau} = M^{-1} Q \quad \text{e} \quad Q = T - N A^{-1} B ,$$

sendo, T e B os vetores dos totais observados para tratamentos e blo
cos, respectivamente;

A, a matriz dos "tamanhos" dos blocos;

N, a matriz de incidência dos tratamentos nos blocos.

No tocante à eficiência dos ensaios em blocos incompletos balanceados em relação aos ensaios em blocos casualizados, CHAKRABARTI (1962), COCHRAN e COX (1976), PIMENTEL GOMES (1976), dentre outros, são concordantes ao apontar

$$E = \frac{\lambda v}{rk} < 1 \quad ,$$

2.3 - Ensaios com Parcelas Subdivididas em Blocos Incompletos

2.3.1 - Generalidades

Assim como citado em 1.2, notou-se uma certa lacuna no tocante às obras publicadas sobre os ensaios em parcelas subdivii
didas em blocos incompletos.

Para GILL (1978), um dos primeiros estudos realizados nessa área é devido a Robinson, e foi desenvolvido em 1967.

Em seu estudo, ROBINSON (1967) propôs um ensaio envolvendo t níveis do tratamento principal A e s níveis do tratament
to secundário B. Então, para $\ell = 1, \dots, s$, o autor distribui os s

níveis do tratamento secundário em k subparcelas ($k < s$) de cada parcela, segundo um esquema de blocos incompletos balanceados, considerando cada parcela como um bloco incompleto para tratamentos secundários. Sob essas condições, mostra que

$$\lambda = R(k-1)/(s-1) \quad ,$$

onde $R = \frac{rk}{s}$ e r representa o número de parcelas que receberam o tratamento A. Nesse estudo levanta a hipótese de se estudar o caso em que os tratamentos principais estão dispostos em blocos incompletos, mas não apresenta a discussão do problema.

Por sua vez, REES (1969), utilizando ensaios baseados no produto de Kronecker, enfoca o problema do confundimento nos ensaios em parcelas subdivididas e citando como precursores do processo Finey (1946) e Kempthorne (1947), alega que, sob certas condições, a análise de ensaios dessa natureza muito se assemelha à análise de ensaios com parcelas subdivididas em blocos incompletos.

Para GILL (1978), em determinadas áreas de pesquisa, como por exemplo a área de Fisiologia Reprodutiva, tem havido um interesse crescente em torno dos experimentos com parcelas subdivididas em blocos incompletos. O autor argumenta, citando exemplos nos quais animais são designados aleatoriamente aos níveis de um tratamento principal, A, ou à combinação de dois ou mais tratamentos. Sob essas condições, alega que cada animal poderia constituir um bloco incompleto, pois, como é desejável, nesse tipo de experimentos, um único animal não recebe todos os tratamentos.

2.3.2 - O erro experimental

Segundo GILL (1978), para aqueles ensaios por ele descritos e citados em 2.3.1, a estrutura devida às causas básicas de variação têm sido muitas vezes indevidamente simplificadas. Assim, para o autor, essa injustificada simplificação tem se processado geralmente de dois modos, nos ensaios em Fisiologia Reprodutiva:

a) Análise dos dados em fatorial como se o experimento fosse inteiramente casualizado, em lugar de uma análise considerando parcelas subdivididas.

b) Ignorância da correlação entre os erros, induzida pela repetição das observações.

Quando a estrutura de "split-plot" não é reconhecida, afirma o autor, o experimentador executa a análise como se cada observação houvesse sido obtida com base em diferentes indivíduos. Desse modo, falha na separação do erro aleatório existente dentro da variação entre diferentes indivíduos e também na variação dentro de cada indivíduo. Consequentemente, uma aparente significância observada na diferença entre duas médias dos tratamentos, aos quais os animais foram designados, muitas vezes pode ser grosseiramente exagerada. Sob esse aspecto, o autor exemplifica citando a diminuição de sensibilidade que ocorre nos testes que envolvem interações entre tratamentos principais e secundários.

Assim, considerando o caso em que os animais são to-

mados como blocos incompletos, o autor propõe o modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + D_{(i)j} + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + (D\beta)_{(i)jk} + E_{ijk}$$

para $i=1,2,\dots,a$; $j=1,2,\dots,r$ (por i); $k=1,2,\dots,b$ e $n=arb$;

onde α_i é o efeito do i -ésimo nível do tratamento A ao qual os animais são designados ao acaso;

$D_{(i)j}$ é o efeito aleatório dos indivíduos dentro de A, que corresponde ao erro (a);

β_k é o efeito do k -ésimo nível do tratamento B, nos animais;

$(\alpha\beta)_{ik}$ é o efeito da interação entre o i -ésimo nível do tratamento A e o k -ésimo nível do tratamento B, sobre os animais;

$(D\beta)_{(i)jk}$ é o efeito da interação entre animais e níveis do tratamento B, que segundo autor deve ser isolado do erro (b);

E_{ijk} é o erro casual atribuído à observação y_{ijk} , ou erro (b).

Então, concordando com CHAKRABARTI (1962) e COCHRAN e COX (1976), que desenvolveram seus estudos para ensaios em "Split-plot" com blocos completos, GILL (1978) defende a hipótese de que o erro experimental para parcelas, é do tipo

$$[1 + (b-1) \rho] \sigma^2$$

e para subparcelas, tem a forma

$$(1-\rho) \sigma^2$$

2.3.3 - Funções lineares estimáveis e suas variâncias

Para ROBINSON (1967), as diferenças entre médias estimadas para efeitos de tratamentos, envolvem quantidades do tipo

$$\bar{z}_{i\ell} = \frac{Y_{i..}}{rk} + \frac{W Q_{i\ell} + \frac{W'}{k} (T_{i\ell} - \frac{R}{r} Y_{i..})}{R E W + \frac{R - \lambda}{k} W'}$$

$$\text{com } Q_{i\ell} = y_{i..} - \frac{1}{k} \sum_j n_{ij}^{\ell} y_{ij}.$$

$$T_{i\ell} = \sum_j n_{ij}^{\ell} y_{ij}.$$

$$RE = R - \frac{R}{k} + \frac{\lambda}{k}$$

obtidas do desenvolvimento do modelo

$$y_{ij} = n_{ij}^{\ell} [\mu + \alpha_i + e_{ij} + \beta_{\ell} + (\alpha\beta)_{i\ell} + \delta_{ij\ell}] ,$$

onde, para $i=1, \dots, t$; $j=1, \dots, r$; $\ell=1, \dots, s$;

$y_{ij\ell}$ é o valor observado da subparcela que recebeu o ℓ -ésimo nível do tratamento secundário B, na j -ésima repetição do i -ésimo nível do tratamento principal A;

μ é o efeito médio;

α_i é o efeito do i -ésimo nível de A;

β_{ℓ} é o efeito do ℓ -ésimo nível de B;

$(\alpha\beta)_{ij}$ é o efeito da interação do i -ésimo nível de A com o ℓ -ésimo nível de B;

e_{ij} e δ_{ij} são variáveis aleatórias não correlacionadas, ambas com média zero e com variâncias σ_e^2 e σ_{δ}^2 , respectivamente;

$$n_{ij}^{\ell} = \begin{cases} 1, & \text{se o } \ell\text{-ésimo nível de B ocorre na } j\text{-ésima repetição} \\ & \text{do } i\text{-ésimo nível de A,} \\ 0, & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

Sob esse prisma, ROBINSON (1967) mostra que a variância para a diferença entre tratamentos é dada por

$$V(\bar{z}_{i\ell} - \bar{z}_{i'\ell'}) = \begin{cases} \frac{2}{R E W + \frac{R - \lambda}{k} W'} & , \text{ se } i=i' \\ \frac{2}{r k W'} + \frac{2(s-1)}{s(R E W + \frac{R - \lambda}{k} W')} & , \text{ se } i \neq i' \end{cases}$$

onde, $W = \frac{1}{\sigma_{\delta}^2}$ e $W' = \frac{1}{\sigma_{\delta}^2 + k \sigma_e^2}$,

e R, r, k, s e λ são definidas como em 2.3.1.

Mostra ainda, que para as diferenças marginais entre médias, as variâncias são obtidas de

$$V(\bar{z}_{i.} - \bar{z}_{i' .}) = \frac{2}{r k W'} \quad (i \neq i')$$

e

$$V(\bar{z}_{.\ell} - \bar{z}_{.\ell'}) = \frac{2}{t R E W + t \frac{R - \lambda}{k} W'} \quad (\ell \neq \ell')$$

Para GILL (1978), as estimativas dos erros-padrão pa ra as médias dos tratamentos A, B e interação AB, são dadas respectivamente por

$$s(\bar{y}_{i..}) = \left[(QM_{D/A}) / (br) \right]^{1/2}$$

$$s(\bar{y}_{..k}) = [(QM_E)/(ar)]^{1/2}$$

$$s(\bar{y}_{i.k}) = [(QM_E)/r]^{1/2}$$

onde, $QM_{D/A} = \bar{s}_k^2 + (b-1) \bar{s}_{kk'}$;

$$QM_E = \bar{s}_k^2 - \bar{s}_{kk'}$$

e

$\bar{s}_k^2$ = variância média amostral entre indivíduos para um dado grupo de tratamentos principais (A);

$\bar{s}_{kk'}$ = covariância média amostral dentro do grupo de tratamentos B, ($k \neq k'$).

Desse modo, o erro padrão adequado para testar-se a diferença entre duas médias de tratamentos principais é:

$$[(2QM_E)/r]^{1/2} .$$

E para tratamentos secundários

$$[(2QM_{D/A})/r]^{1/2} .$$

2.3.4 - Análise de variância

ROBINSON (1967) fornece, para o experimento citado em 2.3.1, o seguinte quadro para análise de variância, considerando as esperanças dos quadrados médios:

Causa da Variação	E(Q.M.)	G.L.	E(Q.M.)	Causa da Variação
A	$\sigma_{\delta}^2 + k\sigma_e^2 + \frac{rk}{t-1} \sum_i \alpha_i^2$	t-1	$\sigma_{\delta}^2 + k\sigma_e^2 + \frac{k}{t-1} \sum_i \alpha_i^2$	A
Parcelas eliminadas-se A	$\sigma_{\delta}^2 + k\sigma_e^2 + t \frac{R-\lambda}{k} \frac{r}{\ell} \beta_{\ell}^2 + \frac{R-\lambda}{k} \frac{R-\lambda}{\ell} \sum_{i\ell} (\alpha\beta)_{i\ell}^2$	t(r-1)	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{s(R-1)}{r-1} \sigma_e^2$	Parcelas eliminadas-se Tratamentos
B eliminando-se Parcelas	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{tRE}{s-1} \sum_{\ell} \beta_{\ell}^2$	s-1	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{s-k}{s-1} \sigma_e^2 + \frac{Rt}{s-1} \sum_{\ell} \beta_{\ell}^2$	B
A x B eliminadas-se Parcelas	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{RE}{(t-1)(s-1)} \sum_{i\ell} (\alpha\beta)_{i\ell}^2$	(s-1)(t-1)	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{s-k}{s-1} \sigma_e^2 + \frac{R}{(s-1)(t-1)} \sum_{i\ell} (\alpha\beta)_{i\ell}^2$	A x B
Dentro de Parcelas	σ_{δ}^2	t(Rs-s-r+1)	σ_{δ}^2	Dentro de Parcelas

Desse modo, para o autor, existem os testes exatos para $\beta_{\ell} = 0, \forall \ell$ e $(\alpha\beta)_{i\ell} = 0, \forall i, \ell$, com base no erro existente "dentro de Parcelas".

No entanto, para a hipótese $\alpha_i = 0, \forall i$, não existe um teste exato, a menos que o experimento seja repetido. Então, a soma de quadrados para "Parcelas eliminando-se A" pode ser partida em dois componentes, que podem ser calculados para a soma de quadrados da diferença entre totais de parcelas correspondentes em duas ou mais repetições do experimento.

Por sua vez, GILL (1978) apresenta o seguinte quadro de análise refletindo a correlação constante entre quaisquer duas subparcelas de uma mesma parcela.

Causa da Variação	G.L.	E(Q.M.)
Entre Indivíduos	$ar-1$	
Tratamentos (A)	$a-1$	$[1+(b-1)\rho]\sigma^2 + \left(\sum_{i=1}^a \alpha_i^2\right)/\gamma_A$
Erro (a)	$a(r-1)$	$[1+(b-1)\rho]\sigma^2$
Dentro de Indivíduos	$ar(b-1)$	
Tratamentos (B)	$b-1$	$(1-\rho)\sigma^2 + \sigma_{DB}^2 + \left(ar \sum_{k=1}^b \beta_k^2\right)/\gamma_B$
A x B	$(a-1)(b-1)$	$(1-\rho)\sigma^2 + \sigma_{DB}^2 + \left[r \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^b (\alpha\beta)_{ik}^2\right]/\gamma_{AB}$
Erro (b)	$a(r-1)(b-1)$	$(1-\rho)\sigma^2 + \sigma_{DB}^2$

Assim como COCHRAN e COX (1976), o autor ressalta que essa correlação é geralmente positiva e, sob essa condição, o erro (b) é considerado menor que o erro (a).

Desse modo, inferências sobre B e AB podem ser feitas com maior precisão, do que sobre efeitos médios do tratamento A.

No tocante à hipótese de nulidade para a interação $H_0: (\alpha\beta)_{ik} = 0$, GILL (1978) aconselha o teste estatístico:

$$F = \frac{QM_{AB}}{QM_E},$$

comparável a $F_{\alpha\%; (a-1)(b-1); [a(r-1)(b-1)]}$

Para testar $H_0: \alpha_i = 0, \forall i$, o autor recomenda

$$F = \frac{QM_A}{QM_{D/A}},$$

com valor crítico dado por $F_{\alpha\%; (a-1); [a(r-1)]}$

E, para $H_0: \beta_k = 0, \forall k$

$$F = \frac{QM_B}{QM_E}$$

com valor crítico $F_{\alpha\%; (b-1); [a(r-1)(b-1)]}$

Se a matriz de variâncias e covariâncias é uniforme para todos os níveis de A, mas não é homogênea para os níveis de B, a validade do teste $H_0: \alpha_i = 0, \forall i$, não é afetada, mas o teste estatístico para $H_0: \beta_k = 0, \forall k$, deve ser comparado com o valor crítico

$$F_{\alpha;1;[a(r-1)]}$$

para um teste conservativo ou, então, seguir os procedimentos usuais da análise multivariada.

3. MATERIAL

Apesar de inicialmente haver-se considerado este estudo sob o aspecto teórico, sentiu-se que a ilustração dos procedimentos aqui apresentados seria desejável, no sentido de complementação do trabalho.

No entanto, dada a escassez de publicações sobre o assunto, conforme citado em (1.2), três opções foram consideradas, para a obtenção dos dados:

i) Montar-se um experimento em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados.

ii) Simular-se um conjunto de dados de acordo com o modelo matemático que rege esse tipo de experimento, proposto em (4.2).

iii) Proceder-se à adequação, através de reagrupamentos, de dados publicados que envolvessem ensaio com parcelas subdivididas em

blocos (completos) casualizados.

Obviamente, a primeira opção mostrou-se mais adequada que as demais, mas foi descartada, pois envolveria, além do tempo necessário para obtenção dos dados de campo, o conhecimento de conceitos na área específica em que se desenvolveria a pesquisa.

Descartou-se, também, a segunda opção, considerando-se que seria mais desejável a utilização de dados experimentais, mormente no tocante à homogeneidade e uniformidade das matrizes de covariâncias. Sob esse aspecto considerou-se que, para dados simulados, com base no modelo matemático, as matrizes de covariâncias, sem dúvida, teriam a estrutura prevista, pairando, no entanto, a expectativa sobre seu comportamento com dados experimentais sobre o modelo proposto.

Assim, mostrou-se mais oportuna a obtenção dos dados a partir do reagrupamento de dados já existentes em algum experimento com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados. Naturalmente essa terceira opção foi possível apenas porque o objetivo buscado no manuseio dos dados foi estritamente o de ilustrar a aplicação da metodologia abordada neste estudo.

Tomou-se, então, o conjunto de dados referentes à duração do ciclo de ovulação de ratas, em horas, segundo a dieta e a idade, adaptados de GILL (1978), e que constam da Tabela 1.

Na disposição dos tratamentos principais (dietas), a-

dotou-se o plano número 11.6 para blocos incompletos balanceados do tipo II, publicado por COCHRAN e COX (1976) e que pressupõe:

$v = 6$ tratamentos;

$k = 4$ tratamentos por bloco;

$r = 10$ repetições por tratamento;

$a = 15$ blocos;

$\lambda = 6$ ocorrências de um mesmo par de tratamentos;

$E = 0,90$ de eficiência em relação aos blocos casualizados.

Desse modo, para $u = 3$ tratamentos secundários (idades) aleatorizados dentro de cada parcela, obteve-se o esquema para parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados, conforme consta da Tabela 1.

Tabela 1 - Duração do ciclo de ovulação, em horas, para certos ratos, segundo a dieta (t) e a idade (t').

REP. I e II

Bloco 1

t' _s	t ₁	t' _s	t ₂	t' _s	t ₃	t' _s	t ₄
3	13,9	2	15,7	1	14,5	1	15,2
2	13,9	3	16,1	3	19,1	3	20,0
1	14,6	1	21,4	2	16,4	2	18,0

REP. III e IV

Bloco 4

t' _s	t ₁	t' _s	t ₂	t' _s	t ₃	t' _s	t ₅
2	20,5	3	17,9	1	17,1	2	9,0
1	20,5	1	16,6	2	16,4	1	18,0
3	20,5	2	16,1	3	26,4	3	18,0

Bloco 2

t' _s	t ₁	t' _s	t ₄	t' _s	t ₅	t' _s	t ₆
1	15,4	2	15,2	3	22,6	2	15,0
3	15,6	3	16,0	2	17,3	3	15,6
2	16,1	1	16,9	1	17,3	1	16,1

Bloco 5

t' _s	t ₁	t' _s	t ₂	t' _s	t ₄	t' _s	t ₆
2	15,4	1	15,7	3	21,8	3	17,2
1	16,1	2	18,0	2	21,8	1	15,0
3	13,9	3	23,0	1	21,8	2	17,2

Bloco 3

t' _s	t ₂	t' _s	t ₃	t' _s	t ₅	t' _s	t ₆
3	15,0	1	16,6	3	12,0	2	18,0
1	16,5	3	19,1	2	9,0	3	23,0
2	17,9	2	17,6	1	12,0	1	23,0

Bloco 6

t' _s	t ₃	t' _s	t ₄	t' _s	t ₅	t' _s	t ₆
1	16,1	2	16,2	1	12,0	1	16,2
3	22,3	3	23,3	2	9,0	3	17,3
2	15,7	1	15,2	3	12,0	2	17,3

Tabela 1 - continuação.

REP. V e VI

Bloco 7

t' _s	t ₁	t' _s	t ₂	t' _s	t ₃	t' _s	t ₆
1	17,9	2	15,7	2	17,0	2	18,0
3	16,6	3	17,2	1	16,3	1	14,9
2	19,5	1	13,9	3	25,0	3	19,0

Bloco 8

t' _s	t ₁	t' _s	t ₃	t' _s	t ₄	t' _s	t ₅
1	23,0	3	21,1	1	19,9	1	15,9
2	20,0	1	16,1	3	23,6	2	15,1
3	18,5	2	18,2	2	15,2	3	15,1

Bloco 9

t' _s	t ₂	t' _s	t ₄	t' _s	t ₅	t' _s	t ₆
3	19,5	1	17,3	3	17,8	1	19,2
2	20,5	3	23,0	1	16,2	3	17,2
1	16,6	2	20,0	2	18,6	2	15,0

REP. VII e VIII

Bloco 10

t' _s	t ₁	t' _s	t ₂	t' _s	t ₄	t' _s	t ₅
1	18,5	3	23,6	2	15,0	2	9,0
2	15,0	2	22,7	1	23,0	3	12,0
3	14,3	1	22,2	3	23,0	1	12,0

Bloco 11

t' _s	t ₁	t' _s	t ₃	t' _s	t ₅	t' _s	t ₆
2	20,5	1	25,0	3	16,5	1	23,0
1	20,5	2	17,0	1	16,2	3	23,0
3	20,5	3	25,0	2	18,9	2	17,0

Bloco 12

t' _s	t ₂	t' _s	t ₃	t' _s	t ₄	t' _s	t ₆
3	23,0	2	18,6	3	21,8	1	15,8
1	23,0	1	17,6	2	21,8	3	17,6
2	17,0	3	20,1	1	21,8	2	15,4

Tabela 1 - continuação.

REP. IX e X

Bloco 13

t' _s	t ₁	t' _s	t ₂	t' _s	t ₅	t' _s	t ₆
1	17,0	1	16,7	2	17,4	1	18,0
3	17,2	2	16,2	3	17,9	3	15,2
2	17,8	3	18,0	1	15,2	2	19,2

Bloco 14

t' _s	t ₁	t' _s	t ₃	t' _s	t ₄	t' _s	t ₆
2	15,3	3	27,4	3	20,7	3	16,2
3	15,9	1	14,1	2	15,5	1	16,2
1	15,3	2	17,4	1	18,5	2	16,2

Bloco 15

t' _s	t ₂	t' _s	t ₃	t' _s	t ₄	t' _s	t ₅
2	17,9	1	15,1	1	17,2	3	17,6
3	19,4	2	14,7	3	18,9	2	18,2
1	16,4	3	21,3	2	16,9	1	17,6

4. MÉTODOS

4.1 - Introdução

Para o desenvolvimento da metodologia, supôs-se um ensaio em Parcelas Subdivididas, no qual os v tratamentos principais estivessem dispostos em a blocos incompletos balanceados. Considerou-se, também, que o experimento envolvesse:

- r repetições para cada tratamento principal;
- k tratamentos principais por bloco;
- u tratamentos secundários.

Ademais, supôs-se que o número de vezes em que cada par de tratamentos ocorresse num mesmo bloco fosse igual a λ , no experimento.

Tomando-se por base que num ensaio em blocos incom-

completos as generalizações tornam-se geralmente difíceis e pouco inteligíveis, houve-se por bem construir um exemplo inicial e usá-lo como suporte para a construção das matrizes mais elaboradas, a par das generalizações. Com esse objetivo, tomou-se, sem perda de generalidade, o delineamento em blocos incompletos do tipo I, que em COCHRAN e COX (1976) recebe o número 11.1, no qual estariam dispostos os tratamentos principais.

Assim, para

$v = 4$ tratamentos principais no ensaio;

$k = 2$ tratamentos principais por bloco;

$r = 3$ repetições para cada tratamento principal;

$a = 6$ blocos;

$\lambda = 1$ ocorrência de par de tratamentos principais por blo
co;

$u = 5$ tratamentos secundários no ensaio,

obteve-se o seguinte esquema:

R_1

t_1	t_2
t_1'	t_1'
t_2'	t_2'
t_3'	t_3'
t_4'	t_4'
t_5'	t_5'

 b_1

R_2

t_1	t_3
t_1'	t_1'
t_2'	t_2'
t_3'	t_3'
t_4'	t_4'
t_5'	t_5'

 b_3

R_3

t_1	t_4
t_1'	t_1'
t_2'	t_2'
t_3'	t_3'
t_4'	t_4'
t_5'	t_5'

 b_5

R_4

t_3	t_4
t_1'	t_1'
t_2'	t_2'
t_3'	t_3'
t_4'	t_4'
t_5'	t_5'

 b_2

R_5

t_2	t_4
t_1'	t_1'
t_2'	t_2'
t_3'	t_3'
t_4'	t_4'
t_5'	t_5'

 b_4

R_6

t_2	t_3
t_1'	t_1'
t_2'	t_2'
t_3'	t_3'
t_4'	t_4'
t_5'	t_5'

 b_6

onde, R_1 , R_2 e R_3 são as $r=3$ repetições nas quais estão agrupados os blocos;

t_i , $i=1,\dots,4$ representa o i -ésimo tratamento principal;

t'_s , $s=1, \dots, 5$ representa o s-ésimo tratamento secundário;

b_j , $j=1,\dots,6$ representa o j -ésimo bloco.

Naturalmente a fixação dos tratamentos secundários às subparcelas teve apenas o objetivo didático de facilitar a interpretação do diagrama. Na verdade, como abordado em 2.1 eles devem ser casualizados às subparcelas.

4.2 - Modelo Matemático

Tomou-se como modelo matemático, para esses ensaios, o modelo linear:

$$y_{ijs} = m + t_i + b_j + e_{k(ij)} + t'_s + (tt')_{is} + e_{ijs}$$

onde, para $i=1,2,\dots,v$; $j=1,2,\dots,a$; $s=1,2,\dots,u$,

y_{ijs} é o valor observado na subparcela que recebeu o s -ésimo tratamento secundário, dentro do i -ésimo tratamento principal, no j -ésimo bloco;

m é o efeito da média geral;

t_i é o efeito do i -ésimo tratamento principal;

b_j é o efeito do j -ésimo bloco;

$e_{k(ij)}$ é o erro atribuído à k -ésima parcela do bloco j , que recebeu o i -ésimo tratamento principal; caracterizado como componente do erro (a);

t'_s é o efeito do s -ésimo tratamento secundário;

$(tt')_{is}$ é o efeito da interação entre o i -ésimo tratamento principal e o s -ésimo tratamento secundário;

e_{ijs} é o erro atribuído à observação y_{ijs} , caracterizado como componente do erro (b).

Neste estudo, supôs-se como em CHAKRABARTI (1962), COCHRAN e COX (1976) e PIMENTEL GOMES (1976), entre outros, que:

$$\sum_{i=1}^v t_i = \sum_{j=1}^a b_j = \sum_{s=1}^u t'_s = \sum_{i=1}^v (tt')_{is} = \sum_{s=1}^u (tt')_{is} = 0.$$

Considerou-se, também, como em CHAKRABARTI (1962), GILL (1978), LEAL (1979) e DINIZ (1980), a existência de uma correlação constante, ρ , entre as subparcelas de uma mesma parcela e a independência entre subparcelas de parcelas distintas.

Então,

$$\text{Cov}(y_{ijs}; y_{i'j's'}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } i=i', j=j', s=s' \\ \rho\sigma^2, & \text{se } i=i', j=j', s \neq s' \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Tomou-se esse modelo linear como base para qualquer um dos três casos considerados neste estudo, no tocante à distribuição dos tratamentos principais: BIB tipo I, II ou III. Desse modo, para os três casos, apenas as análises de variâncias foram consideradas individualmente, pois ali se processaram as decomposições da SQ Blocos descritas em 2.2.

4.3 - Equações Normais

Tomando-se o modelo linear $Y = X\theta + \epsilon$, obteve-se o sistema de equações normais

$$X'X\hat{\theta} = X'Y,$$

onde, X é a matriz dos coeficientes dos parâmetros, de dimensões $(urv) \times (v+a+u+uv+1)$;

$\hat{\theta}$ é o vetor das soluções de mínimos quadrados, para os efeitos dos parâmetros, de dimensões $(v+a+u+uv+1) \times (1)$;

Y é o vetor dos valores observados, de dimensões $(urv) \times (1)$.

Desse modo, efetuando-se a partição da matriz X , conforme PIMENTEL GOMES (1967), resultou

$$X = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5],$$

onde, X_1 é o vetor que envolve a média geral, de dimensões $(urv) \times (1)$;

X_2 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos principais, de dimensões $(urv) \times (v)$;

X_3 é a matriz dos coeficientes associados aos blocos, de dimensões $(urv) \times (a)$;

X_4 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos secundários, de dimensões $(urv) \times (u)$;

X_5 é a matriz dos coeficientes associados às interações $(tt')_{is}$, de dimensões $(urv) \times (uv)$.

Assim, $X'X$ resultou do tipo

$$X'X = \begin{bmatrix} X'_1X_1 & X'_1X_2 & X'_1X_3 & X'_1X_4 & X'_1X_5 \\ X'_2X_1 & X'_2X_2 & X'_2X_3 & X'_2X_4 & X'_2X_5 \\ X'_3X_1 & X'_3X_2 & X'_3X_3 & X'_3X_4 & X'_3X_5 \\ X'_4X_1 & X'_4X_2 & X'_4X_3 & X'_4X_4 & X'_4X_5 \\ X'_5X_1 & X'_5X_2 & X'_5X_3 & X'_5X_4 & X'_5X_5 \end{bmatrix}$$

(v+a+u+uv+1) (v+a+u+uv+1)

e suas submatrizes foram designadas por:

$$X'_1X_1 = urv = n = \text{número de subparcelas};$$

$$X'_1X_2 = x = \begin{bmatrix} ur & ur & \dots & ur \\ (1) & (v) \end{bmatrix} = \text{vetor associado ao número de repetições dos tratamentos principais};$$

$$X'_1X_3 = y = \begin{bmatrix} uk & uk & \dots & uk \\ (1) & (a) \end{bmatrix} = \text{vetor associado ao número de subparcelas por bloco};$$

$$X'_1X_4 = z = \begin{bmatrix} rv & rv & \dots & rv \\ (1) & (u) \end{bmatrix} = \text{vetor associado ao número de repetições dos tratamentos secundários};$$

$$X'_1X_5 = w = \begin{bmatrix} r & r & \dots & r \\ (1) & (uv) \end{bmatrix} = \text{vetor associado ao número de repetições das interações};$$

$$X'_2X_2 = R = \begin{bmatrix} ur & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & ur & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & ur \end{bmatrix}_{(v)} = u.r.I_{(v)} \quad ,$$

onde $I_{(v)}$ é uma matriz identidade de dimensão $\underline{v}$
(matriz das repetições dos tratamentos principais).

$X_2'X_3 = N$, de dimensões $(v) \times (a)$, onde

$$n_{ij} = \begin{cases} u, & \text{se o tratamento } i \text{ ocorre no bloco } j, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é a matriz de incidência do i -ésimo tratamento principal no j -ésimo bloco.

No exemplo citado em (4.1), obteve-se:

$$N = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \qquad (6)$$

$$X_2'X_u = P = \begin{bmatrix} r & r & \dots & r \\ r & r & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & r & \dots & r \end{bmatrix} \begin{matrix} (v) \\ (u) \end{matrix} = r \cdot \begin{matrix} E \\ (v) \ (u) \end{matrix}$$

onde E é uma matriz cujos elementos são todos iguais à unidade $(v) \ (u)$ e P é a matriz do número de repetições de cada par $(tt')_{is}$.

$$X_2'X_5 = S = \begin{bmatrix} r & \dots & r & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r & \dots & r & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & r & \dots & r \end{bmatrix} \begin{matrix} (v) \\ (uv) \end{matrix}$$

é a matriz de incidência dos tratamentos principais nos pares $(tt')_{is}$.

No exemplo em questão, obteve-se

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

(4)

$$X_3' X_3 = A = \begin{bmatrix} uk & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & uk & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & uk \end{bmatrix}_{(a)} = u.k.I_{(a)}$$

é a matriz diagonal do número de subparcelas por bloco,

$$X_3' X_4 = K = \begin{bmatrix} k & k & \dots & k \\ k & k & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & k & \dots & k \end{bmatrix}_{(a)} = k \cdot E_{(a)(u)}$$

é a matriz controle do número de tratamentos principais por bloco,

$X_3' X_5 = V$, de dimensões $(a) \times (uv)$, onde

$$v_{j,is} = \begin{cases} 1, & \text{se } (tt')_{is} \text{ ocorre no bloco } j, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$\tilde{e}$ é a matriz de incidência da interação $(tt')_{is}$, no bloco j .

No exemplo inicial, obteve-se

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6) \quad (20)$$

$$X'_4 X_4 = U = \begin{bmatrix} rv & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & rv & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & rv \end{bmatrix} = r.v.I_{(u)} \quad (u) \quad (u)$$

$\tilde{e}$ é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos tratamentos secundários.

$$X'_4 X_5 = H = \begin{bmatrix} r.I_{(u)} & r.I_{(u)} & \dots & r.I_{(u)} \end{bmatrix} \quad (u) \quad (uv)$$

$\tilde{e}$ é a matriz de incidência dos tratamentos secundários nos pares $(tt')_{is}$.

No exemplo em questão obteve-se:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (5) \quad (20)$$

$$X_5'X_5 = L = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r \end{bmatrix} = r \cdot I_{(uv)} \quad (uv) \quad (uv)$$

é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos pares $(tt')_{1s}$.

Obteve-se, então, o sistema de equações normais:

$$\begin{bmatrix} n & x & y & z & w \\ x' & R & N & P & S \\ y' & N' & A & K & V \\ z' & P' & K' & U & H \\ w' & S' & V' & H' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\tau}^* \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'Y \\ X_2'Y \\ X_3'Y \\ X_4'Y \\ X_5'Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ T^* \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (\alpha.1)$$

onde,

$\hat{m}$ = efeito estimado da média geral;

G = total geral observado;

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \dots \\ \hat{\tau}_v \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{é o vetor dos efeitos estimados para os tratamen-} \\ \text{tos principais;} \end{array}$$

(v) (1)

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_v \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{é o vetor dos totais observados para os tratamen-} \\ \text{tos principais;} \end{array}$$

(v) (1)

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \dots \\ \hat{\beta}_a \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor dos efeitos estimados para blocos;}$$

(a) (1)

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_a \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor dos totais observados para blocos;}$$

(a) (1)

$$\hat{\tau}^* = \begin{bmatrix} \hat{\tau}'_1 \\ \hat{\tau}'_2 \\ \dots \\ \hat{\tau}'_u \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{é o vetor dos efeitos estimados para os tratamen-} \\ \text{tos secundários;} \end{array}$$

(u) (1)

$$T^* = \begin{bmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ \dots \\ T'_u \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{é o vetor dos totais observados para os tratamen-} \\ \text{tos secundários;} \end{matrix}$$

(u) (1)

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} \hat{tt}'_{11} \\ \hat{tt}'_{12} \\ \dots \\ \hat{tt}'_{1u} \\ \hat{tt}'_{21} \\ \hat{tt}'_{22} \\ \dots \\ \hat{tt}'_{2u} \\ \dots \\ \dots \\ \hat{tt}'_{v1} \\ \hat{tt}'_{v2} \\ \dots \\ \hat{tt}'_{vu} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{é o vetor dos efeitos estimados para a interação} \\ (tt')_{is}; \end{matrix}$$

(uv) (1)

$$\Delta = \begin{bmatrix} TT'_{11} \\ TT'_{12} \\ \dots \\ TT'_{1u} \\ TT'_{21} \\ TT'_{22} \\ \dots \\ TT'_{2u} \\ \dots \\ TT'_{v1} \\ TT'_{v2} \\ \dots \\ TT'_{vu} \end{bmatrix}$$

(uv) (1)

é o vetor dos totais observados para a interação $(tt')_{is}$.

4.4 - Solução do Sistema

Efetuando-se as multiplicações sugeridas em (α.1) foram obtidas as equações:

$$\begin{aligned} n\hat{m} + x\hat{t} + y\hat{\beta} + z\hat{t}^* + w\hat{\delta} &= G \\ x'\hat{m} + R\hat{t} + N\hat{\beta} + P\hat{t}^* + S\hat{\delta} &= T \\ y'\hat{m} + N'\hat{t} + A\hat{\beta} + K\hat{t}^* + V\hat{\delta} &= B \\ z'\hat{m} + P'\hat{t} + K'\hat{\beta} + U\hat{t}^* + H\hat{\delta} &= T^* \\ w'\hat{m} + S'\hat{t} + V'\hat{\beta} + H'\hat{t}^* + L\hat{\delta} &= \Delta \end{aligned} \tag{α.2}$$

No entanto, face às restrições impostas em (4.2) e às estruturas das matrizes envolvidas, conforme discutido em (4.3), resultou:

$$n\hat{m} = G \quad (1)$$

$$x'\hat{m} + R\hat{\tau} + N\hat{\beta} = T \quad (2)$$

$$y'\hat{m} + N'\hat{\tau} + A\hat{\beta} = B \quad (3) \quad (\alpha.3)$$

$$z'\hat{m} + U\hat{\tau}^* = T^* \quad (4)$$

$$w'\hat{m} + S'\hat{\tau} + V'\hat{\beta} + H'\hat{\tau}^* + L\hat{\delta} = \Delta \quad (5)$$

Então, de (1) obteve-se

$$\hat{m} = \frac{G}{n} = \frac{G}{urv} \quad (\alpha.4)$$

Por sua vez, (2) e (3) comportaram-se de modo análogo ao sistema de equações para blocos incompletos, discutido por PI-MENTEL GOMES (1967), resultando:

$$\text{de (3)} \implies \hat{\beta} = A^{-1}B - A^{-1}N'\hat{\tau} - A^{-1}y'\hat{m} \quad , \quad (\alpha.*)$$

e, substituindo-se $\hat{\beta}$ em (2), obteve-se

$$R\hat{\tau} = T - NA^{-1}B + NA^{-1}N'\hat{\tau} + NA^{-1}y'\hat{m} - x'\hat{m} \quad (\alpha.5)$$

$$\therefore (R - NA^{-1}N') \hat{\tau} = T - NA^{-1}B + (NA^{-1}y' - x') \hat{m}$$

Mas, desenvolvendo-se segundo (4.3) obteve-se

$$NA^{-1}y' = x'$$

resultando, então, o sistema de equações normais para efeitos esti-

mados dos tratamentos principais, ajustados para efeitos de blocos:

$$(R - NA^{-1}N')\hat{\tau} = T - NA^{-1}B \quad . \quad (\alpha.6)$$

Fazendo-se, como em PIMENTEL GOMES (1967) e RAGHAVARAO (1971)

$$R - NA^{-1}N' = C \quad \text{e} \quad T - NA^{-1}B = Q \quad (\alpha.6.1)$$

onde C tem dimensões (v) x (v) e é tal que

$$c_{ii'} = \begin{cases} ur(1 - \frac{1}{k}) & , \text{ se } i=i' \\ -\frac{\lambda u}{k} & , \text{ se } i \neq i' \end{cases} \quad (\alpha.7)$$

e Q é um vetor de dimensões (v) x (1), tal que

$$Q_i = T_i - \frac{1}{k} J_i \quad , \quad (\alpha.8)$$

com J_i sendo a soma dos totais dos blocos que contêm o i-ésimo tratamento principal, obteve-se o sistema de equações normais como de modo usual na teoria dos blocos incompletos:

$$C\hat{\tau} = Q \quad . \quad (\alpha.9)$$

Notadamente, C é uma matriz singular de característica $\lambda = v-1$. Desse modo, adotou-se uma matriz Z, de restrições, conforme PIMENTEL GOMES (1967), tal que:

$$Z\hat{\tau} = \phi \quad \text{e} \quad Z = -\frac{\lambda u}{k} \frac{E}{(v)(v)}$$

e obteve-se o sistema $M\hat{\tau} = Q$, onde $M = C - Z$ é do tipo

$$m_{ii'} = \begin{cases} \frac{\lambda_{uv}}{k} & , \quad \text{se } i=i' , \\ 0 & , \quad \text{se } i \neq i' , \end{cases}$$

pois:

$$\begin{aligned} i=i' \implies m_{ii} &= ur \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{\lambda u}{k} = \frac{urk - ur}{k} + \frac{\lambda u}{k} \\ &= \frac{ur(k-1)}{k} + \frac{\lambda u}{k} \end{aligned}$$

Mas, nos blocos incompletos balanceados $r(k-1) = \lambda(v-1)$

$$\therefore m_{ii} = \frac{u\lambda v - u\lambda + u\lambda}{k} \quad \therefore m_{ii} = \frac{\lambda_{uv}}{k}$$

$$i \neq i' \implies m_{ii'} = -\frac{\lambda u}{k} + \frac{\lambda u}{k} = 0$$

então

$$M = \frac{\lambda_{uv}}{k} I_{(v)} \quad (\alpha.10)$$

e, desse modo,

$$M^{-1} = \frac{k}{\lambda_{uv}} I_{(v)} \quad . \quad (\alpha.11)$$

Assim, uma solução para $C\hat{\tau} = Q$ pode ser obtida de

$$\hat{\tau} = M^{-1}Q \quad . \quad (\alpha.12)$$

Retomando-se o sistema dado em $(\alpha.3)$ e resolvendo-se

(4), obteve-se

$$\hat{\tau}^* = U^{-1}T^* - U^{-1}z'\hat{m} \quad (\alpha.13)$$

$$\therefore \hat{t}'_s = \frac{1}{rv} T^*_s - \hat{m} \quad , \quad (\alpha.14)$$

que é uma solução idêntica àquelas obtidas para tratamentos secundários nos ensaios em parcelas subdivididas com delineamentos em blocos (completos) casualizados.

Para a determinação dos efeitos estimados dos pares tt'_{is} , foram substituídos em (5) o valor

$$\hat{t} = R^{-1}T - R^{-1}N\hat{\beta} - R^{-1}x'\hat{m} \quad ,$$

obtido de (2), e os valores de $\hat{\beta}$ e $\hat{t}^*$, obtidos respectivamente de ($\alpha.*$) e ($\alpha.13$), resultando:

$$w'\hat{m} + S'(R^{-1}T - R^{-1}N\hat{\beta} - R^{-1}x'\hat{m}) + V'(A^{-1}B - A^{-1}N'\hat{t} - A^{-1}y'\hat{m}) + H'(U^{-1}T^* - U^{-1}z'\hat{m}) + L\hat{\delta} = \Delta \quad ,$$

então

$$w'\hat{m} + S'R^{-1}T - S'R^{-1}N(A^{-1}B - A^{-1}N'\hat{t} - A^{-1}y'\hat{m}) - S'R^{-1}x'\hat{m} + V'A^{-1}B - V'A^{-1}N'\hat{t} - V'A^{-1}y'\hat{m} + H'U^{-1}T^* - H'U^{-1}z'\hat{m} + L\hat{\delta} = \Delta$$

e

$$w'\hat{m} + S'R^{-1}T - S'R^{-1}NA^{-1}B + S'R^{-1}NA^{-1}N'\hat{t} + S'R^{-1}NA^{-1}y'\hat{m} - S'R^{-1}x'\hat{m} + V'A^{-1}B - V'A^{-1}N'\hat{t} - V'A^{-1}y'\hat{m} + H'U^{-1}T^* - H'U^{-1}z'\hat{m} + L\hat{\delta} = \Delta$$

$$\therefore \hat{\delta} = L^{-1}\Delta - L^{-1}S'R^{-1}T + L^{-1}(S'R^{-1}N - V')A^{-1}B - L^{-1}H'U^{-1}T^* + L^{-1}(V'A^{-1} - S'R^{-1}NA^{-1})N'\hat{t} + L^{-1}(S'R^{-1}x' + H'U^{-1}z' + V'A^{-1}y' - S'R^{-1}NA^{-1}y' - w')\hat{m} \quad .$$

Mas

$$V'A^{-1} = S'R^{-1}NA^{-1} \quad \therefore \quad V'A^{-1}y' = S'R^{-1}NA^{-1}y'$$

e

$$S'R^{-1}x' = H'U^{-1}z' = w'$$

$$\therefore \quad S'R^{-1}x' + H'U^{-1}z' + V'A^{-1}y' - S'R^{-1}NA^{-1}y' - w' = w'$$

então

$$\hat{\delta} = L^{-1}\Delta - L^{-1}S'R^{-1}T - L^{-1}H'U^{-1}T^* + L^{-1}w'\hat{m} \quad (\alpha.15)$$

onde,

$$L^{-1}S'R^{-1}T = \frac{1}{ur^2} \quad S'T = \frac{1}{ur}$$

$\tilde{m}_i$ = efeito médio do i-ésimo tratamento principal, sem a correção para o efeito de blocos;

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_1 \\ \dots \\ T_1 \\ T_2 \\ T_2 \\ \dots \\ T_2 \\ \dots \\ \dots \\ T_v \\ T_v \\ \dots \\ T_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_1 \\ \tilde{m}_1 \\ \dots \\ \tilde{m}_1 \\ \tilde{m}_2 \\ \tilde{m}_2 \\ \dots \\ \tilde{m}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{m}_v \\ \tilde{m}_v \\ \dots \\ \tilde{m}_v \end{bmatrix}$$

(uv) (1) (uv) (1)

e
$$L^{-1}H'U^{-1}T^* = \frac{1}{vr^2} H'T = \frac{1}{rv}$$

$\hat{m}'_s$ = efeito médio do s-ésimo tratamento secundário;

$$\begin{matrix} \begin{matrix} T'_1 \\ T'_2 \\ \dots \\ T'_u \\ T'_1 \\ T'_2 \\ \dots \\ T'_u \\ \dots \\ \dots \\ T'_1 \\ T'_2 \\ \dots \\ T'_u \end{matrix} \\ (uv) \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} \hat{m}'_1 \\ \hat{m}'_2 \\ \dots \\ \hat{m}'_u \\ \hat{m}'_1 \\ \hat{m}'_2 \\ \dots \\ \hat{m}'_u \\ \dots \\ \dots \\ \hat{m}'_1 \\ \hat{m}'_2 \\ \dots \\ \hat{m}'_u \end{matrix} \\ (1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L^{-1}w'\hat{m} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{m} \\ \dots \\ \dots \\ \hat{m} \end{bmatrix} \\ (uv) \end{matrix} = \hat{m} \cdot \begin{matrix} E \\ (uv) \end{matrix} \quad (1)$$

desse modo, de (a.15), obteve-se

$$\hat{\delta} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} TT'_{11} \\ TT'_{12} \\ \dots \\ TT'_{1u} \\ TT'_{21} \\ TT'_{22} \\ \dots \\ TT'_{2u} \\ \dots \\ TT'_{v1} \\ TT'_{v2} \\ \dots \\ TT'_{vu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{m}_1 \\ \tilde{m}_1 \\ \dots \\ \tilde{m}_1 \\ \tilde{m}_2 \\ \tilde{m}_2 \\ \dots \\ \tilde{m}_2 \\ \dots \\ \tilde{m}_v \\ \tilde{m}_v \\ \dots \\ \tilde{m}_v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{m}'_1 \\ \hat{m}'_2 \\ \dots \\ \hat{m}'_u \\ \hat{m}'_1 \\ \hat{m}'_2 \\ \dots \\ \hat{m}'_u \\ \dots \\ \hat{m}'_1 \\ \hat{m}'_2 \\ \dots \\ \hat{m}'_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{m} \\ \dots \\ \hat{m} \\ \hat{m} \\ \hat{m} \\ \dots \\ \hat{m} \\ \dots \\ \hat{m} \\ \hat{m} \\ \dots \\ \hat{m} \end{bmatrix}$$

Assim, o efeito estimado para um elemento qualquer

tt'_{is} , ficou

$$\hat{\delta}_{is} = (tt')_{is} \frac{TT'_{is}}{r} - \tilde{m}_i - \hat{m}'_s + \hat{m} \quad .$$

Mas

$$\tilde{m}_i = \hat{m} + \tilde{t}_i \quad \text{e} \quad \hat{m}'_s = \hat{m} + t'_s$$

onde $\tilde{t}_i$ é o efeito estimado do i -ésimo tratamento principal, obtido

de modo usual (sem o ajuste para efeitos de blocos)

$$\begin{aligned} \therefore \hat{\delta}_{is} &= \frac{TT'_{is}}{r} - \hat{m} - \tilde{t}_i - \hat{m} - \hat{t}'_s + \hat{m} \\ \therefore \hat{\delta}_{is} &= \frac{TT'_{is}}{r} - \hat{m} - \tilde{t}_i - \hat{t}'_s \end{aligned} \quad (\alpha.16)$$

onde $\tilde{t}_i = \frac{T_i}{ur} - \hat{m}$, que é um resultado idêntico àqueles obtidos para efeitos estimados dos elementos $(tt')_{is}$ em ensaios com parcelas subdivididas, envolvendo delineamentos em blocos (completos) casualizados.

4.5 - Dispersão

Considerando-se as pressuposições do modelo abordado, relatadas em (4.2) com base em estudos desenvolvidos por CHAKRABARTI (1962), GILL (1978), LEAL (1979) e DINIZ (1980), entre outros, obteve-se:

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots \\ \hline \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \phi & \dots & \phi \\ \hline \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots \\ \hline \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \phi & \dots & \phi \\ \hline \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots \\ \hline \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (\alpha.17)$$

Então, se o modelo é adequado, existem $ak = rv$ submatrizes uniformes do tipo

$$W = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (\alpha.18)$$

(u) (u)

na posição diagonal, e as demais submatrizes são todas nulas. Obviamente, existe uma matriz W para cada uma das rv parcelas, ou, ainda, uma matriz W para cada tratamento de cada repetição.

4.5.1 - Dispersão para tratamentos principais: $D(\hat{\tau})$

Para a determinação da matriz de dispersão para tratamentos principais, considerou-se como de modo usual

$$D(\hat{\tau}) = E \{ [\hat{\tau} - E(\hat{\tau})] [\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]' \} ,$$

onde, por $(\alpha.12)$, $\hat{\tau} = M^{-1}Q$, e, por $(\alpha.6.1)$, $Q = T - NA^{-1}B$,

$$\therefore \hat{\tau} = M^{-1}T - M^{-1}NA^{-1}B \quad (\alpha.19)$$

Mas, por $(\alpha.1)$, $T = X_2'Y$,

$$\therefore T = X_2'(X\theta + \varepsilon)$$

e

$$B = X_3'Y$$

$$\therefore B = X_3'(X\theta + \varepsilon)$$

então, de (α.19), obteve-se

$$\hat{\tau} = M^{-1} X_2' X \theta + M^{-1} X_2' \varepsilon - M^{-1} N A^{-1} X_3' X \theta - M^{-1} N A^{-1} X_3' \varepsilon$$

e, desse modo

$$E(\hat{\tau}) = M^{-1} X_2' X \theta - M^{-1} N A^{-1} X_3' X \theta$$

$$\therefore \hat{\tau} - E(\hat{\tau}) = M^{-1} (X_2' - N A^{-1} X_3') \varepsilon$$

e, fazendo-se $F = X_2' - N A^{-1} X_3'$, obteve-se

$$\hat{\tau} - E(\hat{\tau}) = M^{-1} F \varepsilon$$

$$\therefore D(\hat{\tau}) = M^{-1} F E(\varepsilon \varepsilon') F' M^{-1}$$

Mas, por (α.11), $M^{-1} = \frac{k}{\lambda_{uv}} I(v)$

$$\therefore D(\hat{\tau}) = \frac{k^2}{\lambda^2 u^2 v^2} F E(\varepsilon \varepsilon') F' \quad . \quad (\alpha.20)$$

Para melhor interpretar o produto $F E(\varepsilon \varepsilon') F'$, construiu-se a matriz $F = X_2' - N A^{-1} X_3'$, relativa ao exemplo descrito em 4.1. Essa matriz é apresentada a seguir, com partições a nível de subparcelas.

Recorrendo-se, então, ao exemplo de (4.1), onde usou-se

$v = 4$ tratamentos principais;

$u = 5$ tratamentos secundários;

$a = 6$ blocos;

$k = 2$ tratamentos principais por bloco;

$r = 3$ repetições para cada tratamento principal,

obteve-se a seguinte matriz F

[illegible]

Efetutando-se, então, o produto $E(\epsilon\epsilon') F$, obteve-se a própria matriz F , a menos de uma constante:

$$E(\epsilon\epsilon') F = [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \cdot F$$

então, de (α.20), resultou

$$D(\hat{\tau}) = \frac{k^2}{\lambda^2 u^2 v^2} [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 F F' \quad (\alpha.21)$$

Mas,

$$\begin{aligned} FF' &= (X_2' - NA^{-1}X_3')(X_2 - X_3A^{-1}N') \\ &= X_2'X_2 - X_2'X_3A^{-1}N' - NA^{-1}X_3'X_2 + NA^{-1}X_3'X_3A^{-1}N' \end{aligned}$$

onde, por (4.3)

$$\begin{aligned} X_2'X_2 &= R \\ X_2'X_3 &= N \quad \therefore (X_2'X_3)' = X_3'X_2 = N' \\ X_3'X_2 &= N' \\ X_3'X_3 &= A \end{aligned}$$

então

$$FF' = R - NA^{-1}N' - NA^{-1}N' + NA^{-1}AA^{-1}N'$$

$$\therefore FF' = R - NA^{-1}N' = C \quad , \text{ por } (\alpha.6.1) \quad .$$

Desse modo, de (α.21), obteve-se

$$D(\hat{\tau}) = \frac{k^2}{\lambda^2 u^2 v^2} [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \cdot C \quad (\alpha.22)$$

ou, reportando-se a (α.11)

$$D(\hat{\tau}) = M^{-1}CM^{-1}[1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \quad , \quad (\alpha.23)$$

resultado que, a menos do valor $[1 + (u-1) \rho]$, é idêntico àqueles obtidos por CHAKRABARTI (1962), PIMENTEL GOMES (1967) e RAGHAVARAO (1971), dentre outros, para a matriz de dispersão dos tratamentos em delineamentos com blocos incompletos balanceados.

Entretanto, lembrando-se (α.7), obteve-se, para um elemento genérico $d_{ii'}$, de $D(\tilde{\tau})$

$$d_{ii'} = \begin{cases} \frac{k(v-1)}{\lambda uv^2} [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 & , \text{ se } i=i' \\ -\frac{k}{\lambda uv^2} [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 & , \text{ se } i \neq i' \end{cases} \quad (\alpha.24)$$

pois,

$$a) \ i=i' \implies d_{ii} = \frac{k^2}{\lambda^2 u^2 v^2} \frac{ur(k-1)}{k} [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

mas, $r(k-1) = \lambda(v-1)$,

$$\therefore d_{ii} = \frac{k(v-1)}{\lambda uv^2} [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

$$b) \ i \neq i' \implies d_{ii'} = \frac{k^2}{\lambda^2 u^2 v^2} \cdot \frac{-\lambda u}{k u} [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

$$\therefore d_{ii'} = -\frac{k}{\lambda uv^2} [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

Assim, para a variância da diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos principais, observou-se

$$\begin{aligned} V(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}) &= V(\hat{\tau}_i) + V(\hat{\tau}_{i'}) - 2\text{Cov}(\hat{\tau}_i, \hat{\tau}_{i'}) \\ &= \left[\frac{2k(v-1)}{\lambda uv^2} + \frac{2k}{\lambda uv^2} \right] [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\therefore V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda_{uv}} [1 + (u-1)\rho] \sigma^2 \quad (\alpha.25)$$

Naturalmente, resultados análogos foram obtidos usando-se o conceito de função linear estimável, conforme abordado em (2.2.3). Então, por exemplo, para $i=1$ e $i'=2$,

$$V(P'\hat{\tau}) = [1, -1, 0, \dots, 0] \frac{k[1+(u-1)\rho]\sigma^2}{\lambda_{uv}^2} \begin{bmatrix} v-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & v-1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & v-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore V(P'\hat{\tau}) = \frac{2k}{\lambda_{uv}} [1 + (u-1)\rho] \sigma^2 \quad (\alpha.26)$$

e, usando-se os resultados obtidos por CHAKRABARTI (1962), COCHRAN e COX (1976) e GILL (1978), entre outros, bem como os resultados obtidos neste estudo, em (4.6.5.1), que indicam como uma estimativa não tendenciosa para $[1 + (u-1)\rho] \sigma^2$, o quadrado médio do Resíduo (a), obteve-se finalmente

$$\hat{V}(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda_{uv}} \text{QMRes}(a) \quad , \quad (\alpha.27)$$

que é um resultado coerente com aqueles tradicionalmente encontrados na bibliografia, para variância entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos em delineamentos em blocos incompletos balanceados:

$$\hat{V}(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda_v} \text{QMRes}(a) \quad .$$

4.5.2 - Dispersão para tratamentos secundários: $D(\hat{\tau}^*)$

Conforme (4.5.1), tomou-se

$$D(\hat{\tau}^*) = E\{[\hat{\tau}^* - E(\hat{\tau}^*)][\hat{\tau}^* - E(\hat{\tau}^*)]'\} \quad (\alpha.28)$$

onde, por (α.13), $\hat{\tau}^* = U^{-1}T^* - U^{-1}z'\hat{m}$

$$= U^{-1}T^* - \hat{m} \cdot E_{(u)}(1)$$

e por (α.1), $T^* = X_u'Y = X_u'(X\theta + \varepsilon)$, então,

$$\hat{\tau}^* = U^{-1}X_u'X\theta + U^{-1}X_u'\varepsilon - \hat{m} \cdot E_{(u)}(1)$$

$$\therefore E(\hat{\tau}^*) = U^{-1}X_u'X\theta - \hat{m} \cdot E_{(u)}(1)$$

e, desse modo,

$$\hat{\tau}^* - E(\hat{\tau}^*) = U^{-1}X_u'\varepsilon$$

Assim, de (α.28), obteve-se

$$D(\hat{\tau}^*) = U^{-1}X_u' E(\varepsilon\varepsilon') X_u U^{-1}$$

$$\therefore D(\hat{\tau}^*) = \frac{1}{r^2 v^2} X_u' E(\varepsilon\varepsilon') X_u \quad (\alpha.29)$$

Tomando-se como base o exemplo inicial, obteve-se

$$X_u' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5) \quad (60)$$

e, genericamente

$$X'_u = \begin{bmatrix} I_{(u)} & I_{(u)} & \dots & I_{(u)} \end{bmatrix}_{(urv)}$$

donde

$$X'_u E(\varepsilon \varepsilon') X_u = rv \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

ou, por (α.18),

$$X'_u E(\varepsilon \varepsilon') X_u = rv \cdot W_{(u)(u)}$$

Obteve-se, assim, de (α.29)

$$D(\hat{\tau}^*) = \frac{1}{rv} \cdot W_{(u)(u)} \quad (\alpha.30)$$

com elementos

$$d_{ii'}^* = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{rv} & , \quad \text{se } i=i' \\ \frac{\rho\sigma^2}{rv} & , \quad \text{se } i \neq i' \end{cases} \quad (\alpha.31)$$

E, para a variância da diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos secundários, obteve-se

$$V(\hat{\tau}_i^* - \hat{\tau}_{i'}^*) = \frac{2}{rv} (1 - \rho) \sigma^2 \quad (\alpha.32)$$

e, usando-se os resultados obtidos por CHAKRABARTI (1962), COCHRAN e COX (1976) e GILL (1978), entre outros, bem como os resultados obtidos neste estudo em (4.6.5.2), que indicam como uma estimativa não tendenciosa para $(1-\rho) \sigma^2$, o quadrado médio do Resíduo (b),

$$\hat{V}(\hat{\tau}'_i - \hat{\tau}'_{i'}) = \frac{2}{rv} \text{QMRes}(b) \quad , \quad (\alpha.33)$$

que é um resultado análogo àqueles encontrados tradicionalmente na literatura dos ensaios em parcelas subdivididas com delineamento em blocos (completos) casualizados, no tocante à variância estimada da diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos secundários, conforme pode ser observado em (2.1.3).

4.5.3 - Dispersão para a interação: $D(\hat{\delta})$

Tomando-se

$$D(\hat{\delta}) = E\{[\hat{\delta} - E(\hat{\delta})][\hat{\delta} - E(\hat{\delta})]'\} \quad , \quad (\alpha.34)$$

onde, de (α.15),

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= L^{-1}(\Delta - S'R^{-1}T - H'U^{-1}T^* + w'\hat{m}) \\ &= \frac{1}{r}(\Delta - \frac{1}{ur}S'T - \frac{1}{rv}H'T^* + \frac{1}{urv}w'G) \end{aligned}$$

e, como por (α.1)

$$\begin{aligned} \Delta &= X'_5 Y \\ T &= X'_2 Y \\ T^* &= X'_4 Y \\ G &= X'_1 Y \quad , \end{aligned}$$

ficou

$$\hat{\delta} = \frac{1}{r} (X'_5 - \frac{1}{ur} S'X'_2 - \frac{1}{rv} H'X'_4 + \frac{1}{urv} w'X'_1) Y$$

então,

$$\hat{\delta} - E(\hat{\delta}) = \frac{1}{r} (X'_5 - \frac{1}{ur} S'X'_2 - \frac{1}{rv} H'X'_4 + \frac{1}{urv} w'X'_1) \varepsilon$$

e, fazendo-se

$$\Gamma = X'_5 - \frac{1}{ur} S'X'_2 - \frac{1}{rv} H'X'_4 + \frac{1}{urv} w'X'_1$$

de (α.34), resultou

$$D(\hat{\delta}) = L^{-1} \Gamma E(\varepsilon\varepsilon') \Gamma' L^{-1}$$

$$\therefore D(\hat{\delta}) = \frac{1}{r^2} \Gamma E(\varepsilon\varepsilon') \Gamma' \quad . \quad (\alpha.35)$$

Para bem interpretar a matriz Γ , efetuou-se um estudo de suas componentes, com base no exemplo inicial. As generalizações, em termos de número de tratamentos principais e tratamentos secundários, resultaram como a seguir. No entanto, essa generalização foi apenas parcial, pois ficou "presa" ao esquema de blocos incompletos número 11.1, de COCHRAN e COX (1976), utilizado no exemplo. Como é fácil ver, a outros esquemas correspondem outras constituições matriciais, sem que, no entanto, ocorra perda de generalidade, isto é, sem que se altere o resultado final.

Assim,

$$X_5' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & \overbrace{b_1} & \overbrace{b_2} & \overbrace{b_3} & \overbrace{b_4} & \overbrace{b_5} & \overbrace{b_6} \\ t_1 & I(u) & \phi & \phi & \phi & I(u) & \phi & \phi & \phi & I(u) & \phi & \phi & \phi \\ t_2 & \phi & I(u) & \phi & \phi & \phi & \phi & I(u) & \phi & \phi & \phi & I(u) & \phi \\ t_3 & \phi & \phi & I(u) & \phi & \phi & I(u) & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & I(u) \\ t_4 & \phi & \phi & \phi & I(u) & \phi & \phi & \phi & I(u) & \phi & I(u) & \phi & \phi \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} (uv) & \underbrace{\hspace{2cm}} & \underbrace{\hspace{2cm}} & \underbrace{\hspace{2cm}} & \underbrace{\hspace{2cm}} & \underbrace{\hspace{2cm}} & (urv) \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & R_1 & & R_2 & & R_3 \end{array} \end{array}$$

onde $\phi = \begin{array}{c} \phi \\ (u) \end{array} \begin{array}{c} \phi \\ (u) \end{array}$

$$\frac{1}{ur} \quad 2 = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} \Omega & \phi & \phi & \phi & \Omega & \phi & \phi & \phi & \Omega & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \Omega & \phi & \phi & \phi & \phi & \Omega & \phi & \phi & \phi & \Omega & \phi \\ \phi & \phi & \Omega & \phi & \phi & \Omega & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \Omega \\ \phi & \phi & \phi & \Omega & \phi & \phi & \phi & \Omega & \phi & \Omega & \phi & \phi \end{array} \right] \\ (uv) \hspace{15cm} (urv) \end{array}$$

onde,

$$\Omega = \frac{1}{u} \cdot \begin{array}{c} E \\ (u) \end{array} \begin{array}{c} \\ (u) \end{array}$$

$$\phi = \begin{array}{c} \phi \\ (u) \end{array} \begin{array}{c} \phi \\ (u) \end{array}$$

$$\frac{1}{rv} H' X_4' = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \Psi & \Psi & \dots & \Psi \\ \Psi & \Psi & \dots & \Psi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi & \Psi & \dots & \Psi \end{array} \right] \\ (uv) \hspace{15cm} (urv) \end{array}$$

onde $\Psi = \frac{1}{v} I_{(u)}$

$$\frac{1}{uv} w' X'_1 = \frac{1}{uv} E = \frac{\Pi}{(uv) (urv)} .$$

Desse modo, a matriz Γ ficou assim constituída:

$$\Gamma = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \overbrace{}^{b_1} & \overbrace{}^{b_2} & \overbrace{}^{b_3} & \overbrace{}^{b_4} & \overbrace{}^{b_5} & \overbrace{}^{b_6} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 \\ \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} \\ \begin{array}{cc} (uv) & (urv) \end{array} \end{array}$$

e, de modo geral, Γ é tal que suas submatrizes são iguais a

Γ_1 , se o tratamento principal $\underline{i}$ ocorre no bloco $\underline{j}$,

Γ_2 , caso contrário,

sendo essa generalização facilmente exequível, com base no esquema de blocos incompletos que se queira adotar.

Por sua vez, as submatrizes Γ_1 e Γ_2 são do tipo:

$$\Gamma_1 = I_{(u)} - \Omega - \Psi + \Pi$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{uv} \begin{bmatrix} (u-1)(v-1) & -(v-1) & -(v-1) & \dots & -(v-1) \\ -(v-1) & (u-1)(v-1) & -(v-1) & \dots & -(v-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(v-1) & -(v-1) & -(v-1) & \dots & (u-1)(v-1) \end{bmatrix}$$

(u) (u)

$$\Gamma_2 = -\Omega + \Pi$$

$$\therefore \Gamma_2 = \frac{1}{uv} \begin{bmatrix} -(u-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(u-1) & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(u-1) \end{bmatrix}$$

(u) (u)

e, como de modo análogo a (4.5.1), analisando-se a expressão

$$E(\epsilon\epsilon') \Gamma'$$

obteve-se

$$E(\epsilon\epsilon') \Gamma' = (1-\rho) \sigma^2 \Gamma'$$

$$\therefore \Gamma E(\epsilon\epsilon') \Gamma' = (1-\rho) \sigma^2 \Gamma \Gamma'$$

assim, (α.35) ficou

$$D(\hat{\delta}) = \frac{(1-\rho) \sigma^2}{r^2} \Gamma \Gamma' \quad (\alpha.36)$$

com $\Gamma \Gamma'$ apresentando:

a) na diagonal principal

$$\gamma_{ss} = r \Gamma_1^2 + r(v-1) \Gamma_2^2 = r [\Gamma_1^2 + (v-1) \Gamma_2^2]$$

b) fora da diagonal principal

$$\gamma_{ss'} = r [2 \Gamma_1 \Gamma_2 + (v-2) \Gamma_2^2]$$

Desenvolvendo-se, obteve-se

$$\gamma_{ss} = \frac{urv}{u^2 v^2} \begin{bmatrix} (u-1)(v-1) & -(v-1) & \dots & -(v-1) \\ -(v-1) & (u-1)(v-1) & \dots & -(v-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(v-1) & -(v-1) & \dots & (u-1)(v-1) \end{bmatrix}$$

(u) (u)

e,

$$\gamma_{ss'} = \frac{urv}{u^2 v^2} \begin{bmatrix} -(u-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(u-1) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -(u-1) \end{bmatrix}$$

(u) (u)

então, a expressão (α.36) passou a ser

$$D(\hat{\beta}) = \frac{(1-\rho)\sigma^2}{urv} \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} (u-1)(v-1) & -(v-1) & \dots & -(v-1) \\ -(v-1) & (u-1)(v-1) & \dots & -(v-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(v-1) & -(v-1) & \dots & (u-1)(v-1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -(u-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(u-1) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -(u-1) \end{bmatrix} & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \quad (\alpha.37)$$

(uv) (uv)

Assim, a variância para a diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos secundários dentro de um mesmo tratamento primário ficou

$$\begin{aligned} V(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{is'}) &= 2 [(u-1)(v-1) + (v-1)] \frac{(1-\rho) \sigma^2}{urv} \\ &= \frac{2(v-1)}{rv} (1-\rho) \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\therefore V(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{is'}) = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{v}\right) (1-\rho) \sigma^2 \quad (\alpha.38)$$

que é um resultado idêntico àquele apresentado por CHAKRABARTI(1962) para a mesma variância quando o ensaio com parcelas subdivididas é delineado em blocos (completos) casualizados, como pode ser observado em (2.1.3).

De modo análogo a (α.27) e (α.33), uma estimativa para essa variância foi obtida por

$$\hat{V}(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{is'}) = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \text{QMRes}(b) \quad (\alpha.39)$$

Também, para a variância da diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos principais dentro de um mesmo tratamento secundário, obteve-se

$$\begin{aligned} V(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{i's}) &= 2 [(u-1)(v-1) + (u-1)] \frac{(1-\rho) \sigma^2}{urv} \\ &= \frac{2(u-1)}{ur} (1-\rho) \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\therefore V(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{i's}) = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{u}\right) (1-\rho) \sigma^2 \quad (\alpha.40)$$

resultado idêntico àquele apresentado por CHAKRABARTI (1962) e citado em (2.1.3) para essa variância, quando o experimento com parcelas subdivididas é delineado em blocos (completos) casualizados.

Naturalmente

$$\widehat{V}(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{i's}) = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{u}\right) \text{QMRes}(b) \quad (\alpha.41)$$

4.6 - Análise de Variância

4.6.1 - Introdução

De $Y = X\theta + \varepsilon$, obteve-se

$$\varepsilon'\varepsilon = Y'Y - \theta'X'Y$$

e, tomando-se a estimativa para θ , resultou a soma de quadrados do resíduo:

$$\text{SQRes} = Y'Y - \hat{\theta}'X'Y \quad (\alpha.42)$$

então, $\text{SQRes} = \text{SQTotal} - \text{SQParâmetros}$,

$$\text{SQRes} = \text{SQT} - \text{SQP}.$$

Por outro lado, reportando-se a (4.3), onde $X'Y = X'X\hat{\theta}$, (4.42) ficou

$$\text{SQRes} = Y'Y - \hat{\theta}'X'X\hat{\theta} \quad , \quad (\alpha.43)$$

onde

$$\hat{\theta}'X'X\hat{\theta} = [\hat{m}, \hat{\tau}', \hat{\beta}', \hat{\tau}^*', \hat{\delta}'] \begin{bmatrix} n & x & y & z & w \\ x' & R & N & P & S \\ y' & N' & A & K & V \\ z' & P' & K' & U & H \\ w' & S' & V' & H' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\tau}^* \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}$$

e a partição efetuada refere-se às duas "partes" encontradas nos esquemas usuais de análises de variância para ensaios com parcelas subdivididas em blocos casualizados.

Assim, para

$$\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} ; \quad \hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\tau}^* \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} ; \quad (X'X)_a = \begin{bmatrix} n & x & y \\ x' & R & N \\ y' & N' & A \end{bmatrix} ;$$

$$(X'X)_c = \begin{bmatrix} z & w \\ P & S \\ K & V \end{bmatrix} ; \quad (X'X)_d = \begin{bmatrix} z' & P' & K' \\ w' & S' & V' \end{bmatrix} ; \quad (X'X)_b = \begin{bmatrix} U & H \\ H' & L \end{bmatrix} ;$$

resultou

$$\begin{aligned} \hat{\theta}'X'X\hat{\theta} &= [\hat{\theta}_1' \quad \hat{\theta}_2'] \begin{bmatrix} (X'X)_a & (X'X)_c \\ \hline (X'X)_d & (X'X)_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hline \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &= \hat{\theta}_1'(X'X)_a \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2'(X'X)_b \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_2'(X'X)_d \hat{\theta}_1 + \\ &\quad + \hat{\theta}_1'(X'X)_c \hat{\theta}_2 \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\theta}'_1 (X'X)_d \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}'_1 (X'X)_c \hat{\theta}_2 = \phi$$

pois,

$$[\hat{\tau}^*, \hat{\delta}'] \begin{bmatrix} z' & p' & k' \\ w' & s' & v' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (\hat{\tau}^* z' + \hat{\delta} w') \hat{m} + (\hat{\tau}^* p' + \hat{\delta} s') \hat{\tau} + (\hat{\tau}^* k' + \hat{\delta} v') \hat{\beta} = \\ &= \hat{\tau}^* z' \hat{m} + \hat{\delta} w' \hat{m} + \hat{\tau}^* p' \hat{\tau} + \hat{\delta} s' \hat{\tau} + \hat{\tau}^* k' \hat{\beta} + \hat{\delta} v' \hat{\beta} \end{aligned}$$

e, desde que

$$\hat{\tau}^* z' = r v \sum_s \hat{t}_s' = 0$$

$$\hat{\delta} w' = r \sum_{is} (\hat{t} \hat{t}')_{is} = 0$$

$$\hat{\tau}^* p' = \begin{matrix} \phi \\ (1) \quad (v) \end{matrix} \implies \hat{\tau}^* p' \hat{\tau} = 0$$

$$\hat{\delta} s' = \begin{matrix} \phi \\ (1) \quad (v) \end{matrix} \implies \hat{\delta} s' \hat{\tau} = 0$$

$$\hat{\tau}^* k' = \begin{matrix} \phi \\ (1) \quad (a) \end{matrix} \implies \hat{\tau}^* k' \hat{\beta} = 0$$

$$\hat{\delta} v' = \begin{matrix} \phi \\ (1) \quad (a) \end{matrix} \implies \hat{\delta} v' \hat{\beta} = 0$$

$$\text{então, } \hat{\theta}'_2 (X'X)_d \hat{\theta}_1 = 0 ,$$

e, de modo análogo para a transposta

$$\hat{\theta}_1'(X'X)_c \hat{\theta}_2' = 0 \quad ,$$

desse modo, obteve-se

$$\hat{\theta}'X'X\hat{\theta} = \hat{\theta}_1'(X'X)_a \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2'(X'X)_b \hat{\theta}_2 \quad (\alpha.44)$$

ou

$$SQP = [\hat{m}, \hat{\tau}', \hat{\beta}'] \begin{bmatrix} n & x & y \\ x' & R & N \\ y' & N' & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} + [\hat{\tau}^{*'}, \hat{\delta}'] \begin{bmatrix} U & H \\ H' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau}^* \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}$$

que, convencionou-se chamar por

$$SQParâmetros = SQParâmetros(a) + SQParâmetros(b)$$

$$SQP = SQP(a) + SQP(b)$$

assim, de (α.43), resultou

$$SQRes = SQT - SQP(a) - SQP(b) \quad . \quad (\alpha.45)$$

Mas,

$$SQTotal = SQTtotal + SQParcelas - SQParcelas$$

$$\therefore SQRes = \{SQParc - SQP(a)\} + \{SQT - SQParc - SQP(b)\}$$

onde, SQParcelas foi definida por

$$SQParc = \frac{1}{u} Y' \Phi Y - C_o \quad (\alpha.45^*)$$

com

$$\Phi = \begin{bmatrix} E & \phi & \dots & \phi \\ (u) & (u) & & \\ \dots & E & \dots & \phi \\ & (u) & (u) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi & \phi & \dots & E \\ & & & (u) & (u) \end{bmatrix}$$

(urv) (urv)

ou, como é usualmente encontrado na literatura

$$SQ_{\text{Parc}} = \frac{1}{u} \sum_{ij} y_{ij}^2 - C_o \quad .$$

Assim, obteve-se, de acordo com a terminologia tradicional dos experimentos em parcelas subdivididas:

$$SQ_{\text{Res}} = SQ_{\text{Res}}(a) + SQ_{\text{Res}}(b) \quad . \quad (\alpha.46)$$

4.6.2 - Esperanças dos quadrados médios para os efeitos fixos

4.6.2.1 - Soma de quadrados dos parâmetros

Retomando-se (α.42) obteve-se

$$SQP = [\hat{m}, \hat{\tau}', \hat{\beta}', \hat{\tau}*', \hat{\delta}'] \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ T* \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{SQP} = \hat{m} G + \hat{\tau}' T + \hat{\beta}' B + \hat{\tau}^* T^* + \hat{\delta}' \Delta \quad (\alpha.47)$$

Então, por $(\alpha.*)$, $(\alpha.15)$, obteve-se

$$\begin{aligned} \text{SQP} = & \hat{m} G + \hat{\tau}' T + B' A^{-1} B - \hat{\tau}' N A^{-1} B - \hat{m} y A^{-1} B + T^* U^{-1} T^* - \\ & - \hat{m} z U^{-1} T^* + \Delta' L^{-1} \Delta - T' R^{-1} S L^{-1} \Delta - T^* U^{-1} H L^{-1} \Delta + \\ & + \hat{m} w L^{-1} \Delta \end{aligned}$$

Agrupando-se os termos em $\hat{\tau}$ e usando-se o fato de que

$$\hat{m} y A^{-1} B = \hat{m} z U^{-1} T^* = \hat{m} w L^{-1} \Delta = \hat{m} G ,$$

resultou

$$\begin{aligned} \text{SQP} = & \hat{m} G + \hat{\tau}' (T - N A^{-1} B) + B' A^{-1} B - \hat{m} G + T^* U^{-1} T - \\ & - \hat{m} G + \Delta' L^{-1} \Delta - T' R^{-1} S L^{-1} \Delta - T^* U^{-1} H L^{-1} \Delta + \\ & + \hat{m} G \end{aligned} \quad (\alpha.48)$$

onde:

$$i) \quad T' R^{-1} S L^{-1} \Delta = \begin{bmatrix} \tilde{m}_1 & E & \vdots & \tilde{m}_2 & E & \vdots & \dots & \tilde{m}_v & E & \vdots \\ (1) & (u) & & (1) & (u) & & & (1) & (u) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T T'_{11} \\ T T'_{12} \\ \dots \\ T T'_{1u} \\ T T'_{21} \\ T T'_{22} \\ \dots \\ T T'_{2u} \\ \dots \\ T T'_{v1} \\ T T'_{v2} \\ \dots \\ T T'_{vu} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 T'R^{-1}SL^{-1}\Delta &= \tilde{m}_1 TT'_1 + \tilde{m}_2 TT'_2 + \dots + \tilde{m}_V TT'_V \\
 &= (\hat{m} + \tilde{t}_1) T_1 + (\hat{m} + \tilde{t}_2) T_2 + \dots + \\
 &\quad + (\hat{m} + \tilde{t}_V) T_V \\
 \therefore T'R^{-1}SL^{-1}\Delta &= \hat{m} G + \tilde{t}'T \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } T^*U^{-1}HL^{-1}\Delta &= \begin{bmatrix} TT'_{11} \\ TT'_{12} \\ \dots \\ TT'_{1u} \\ \dots \\ \dots \\ TT'_{v1} \\ TT'_{v2} \\ \dots \\ TT'_{vu} \end{bmatrix} \\
 &= [\hat{m}'_1, \hat{m}'_2, \dots, \hat{m}'_u \quad ; \dots ; \hat{m}'_1, \hat{m}'_2, \dots, \hat{m}'_u]
 \end{aligned}$$

e, de modo análogo a (i), obteve-se

$$T^*U^{-1}HL^{-1}\Delta = \hat{m} G + \hat{t}^*T^*$$

E, desde que $\hat{m} G = C_o$ = correção, de (α.48), resultou:

$$\begin{aligned}
 SQP &= \{C_o\} + \{\hat{t}'Q\} + \{B'A^{-1}B - C_o\} + \{T^*U^{-1}T^* - C_o\} + \\
 &\quad + \{\Delta'L^{-1}\Delta - C_o - \tilde{t}'T - \hat{t}^*T^*\} \quad (\alpha.49)
 \end{aligned}$$

onde, $\hat{\tau}'Q$ = soma de quadrados devida aos efeitos dos tratamentos principais, ajustada para efeitos de blocos:

$$\hat{\tau}'Q = SQt(aj.) \quad ; \quad (\alpha.49.1)$$

$B'A^{-1}B - C_o$ = soma de quadrados devida aos efeitos de blocos, obtida de modo usual:

$$B'A^{-1}B - C_o = \frac{1}{uk} \sum_{j=1}^a B_j^2 - C_o = SQb \quad ; \quad (\alpha.49.2)$$

$T^*U^{-1}T^* - C_o$ = soma de quadrados devida aos efeitos dos tratamentos secundários, obtida de modo usual:

$$T^*U^{-1}T^* - C_o = \frac{1}{rv} \sum_{s=1}^u T_s^2 - C_o = SQt' \quad ; \quad (\alpha.49.3)$$

$\Delta'L^{-1}\Delta - C_o - \tilde{\tau}'T - \hat{\tau}^*T^*$ = soma de quadrados devida aos efeitos da interação, $SQ\delta$, onde

$$\Delta'L^{-1}\Delta = \frac{1}{r} \sum_{i,s} (TT')_{is}^2$$

$\tilde{\tau}'T = T'R^{-1}T - C_o = \frac{1}{ur} \sum_{i=1}^v T_i^2 - C_o$ = soma de quadrados devida aos efeitos dos tratamentos principais, obtida de modo usual, sem a correção para efeitos de blocos

$$\hat{\tau}^*T^* = T^*U^{-1}T^* - C_o = SQt'$$

$$\therefore \quad SQ\delta = \frac{1}{r} \sum_{i,s} (TT')_{is}^2 - C_o - SQt(usual) - SQt' \quad (\alpha.49.4)$$

Tendo-se em conta que na análise de variância, o primeiro termo da SQP (em α.49) é usado na correção da SQTotal, obtém-se

$$SQP = SQ_t(aj.) + SQ_b(usual) + SQ_t'(usual) + SQ\delta \quad (\alpha.50)$$

então

$$E[SQP] = E[SQ_t(aj.)] + E[SQ_b] + E[SQ_t'] + E[SQ\delta] \quad (\alpha.51)$$

4.6.2.2 - Somas de quadrados por parâmetro

4.6.2.2.1 - Média geral

$$SQ\hat{m} = \hat{m} G = C_o = \frac{G^2}{urv}$$

$$\begin{aligned} \therefore E[SQ\hat{m}] &= \frac{1}{urv} E[G^2] = \frac{1}{urv} [(X_1'Y)'(X_1'Y)] \\ &= \frac{1}{urv} E[(\theta'X' + \epsilon') X_1 X_1' (X\theta + \epsilon)] \\ &= \frac{1}{n} E[\theta'X'X_1 X_1'X\theta + \theta'X'X_1 X_1'\epsilon + \epsilon'X_1 X_1'X\theta + \epsilon'X_1 X_1'\epsilon] \\ \therefore E[SQ\hat{m}] &= \frac{1}{n} \{ \theta'X'X_1 X_1'X\theta + E[\epsilon'X_1 X_1'\epsilon] \} \end{aligned} \quad (\alpha.52)$$

onde,

$$i) \quad X_1 X_1' = \begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} (urv) & & & (urv) \end{matrix} & \end{matrix} = \begin{matrix} E \\ (urv) & (urv) \end{matrix} \quad \text{e } TR(X_1 X_1') = urv$$

Considerando-se que para blocos incompletos balanceados $ak = rv$, então,

$$\begin{matrix} E \\ (urv) & (urv) \end{matrix} = \begin{matrix} E \\ (uak) & (uak) \end{matrix}$$

e partindo-se a matriz $\begin{matrix} E \\ (uak) & (uak) \end{matrix}$ em $\underline{a}$ submatrizes quadradas de dimensão uk , ($\underline{a}$ blocos, cada qual com $\underline{k}$ parcelas de $\underline{u}$ subparcelas), obteve-se, sem perda de generalidade, para a 1.^a submatriz e considerando-se o exemplo inicial:

$$\begin{matrix} (1) & \begin{bmatrix} e_{111} & e_{112} & e_{113} & e_{114} & e_{115} \\ e_{211} & e_{212} & e_{213} & e_{214} & e_{215} \end{bmatrix} & (10) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{113} \\ e_{114} \\ e_{115} \\ e_{211} \\ e_{212} \\ e_{213} \\ e_{214} \\ e_{215} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (a.53)$$

Como é fácil ver, a partição proposta para $X_1 X_1'$ corresponderam partições análogas em ε e ε' .

Caracterizando-se, então, (α.53) por

$$[\varepsilon'_1 \quad \vdots \quad \varepsilon'_2] \begin{bmatrix} (X_1 X_1')_a & \vdots & (X_1 X_1')_b \\ \hline (X_1 X_1')_c & \vdots & (X_1 X_1')_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \hline \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (\alpha.54)$$

e efetuando-se o produto, obteve-se

$$\begin{aligned} & \{ \varepsilon'_1 (X_1 X_1')_a + \varepsilon'_2 (X_1 X_1')_c \} \varepsilon_1 + \{ \varepsilon'_1 (X_1 X_1')_b + \varepsilon'_2 (X_1 X_1')_d \} \varepsilon_2 = \\ & = \varepsilon'_1 (X_1 X_1')_a \varepsilon_1 + \varepsilon'_2 (X_1 X_1')_c \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 (X_1 X_1')_b \varepsilon_2 + \varepsilon'_2 (X_1 X_1')_d \varepsilon_2 \end{aligned}$$

onde, $\text{TR}(X_1 X_1')_a = \text{TR}(X_1 X_1')_b = \text{TR}(X_1 X_1')_c = \text{TR}(X_1 X_1')_d = u = 5$.

Por outro lado, considerando-se que uma matriz quadrada $(u)^{E(u)}$ tem $\text{TR} [(u)^{E(u)}] = u$ elementos na diagonal principal e $u^2 - \text{TR} [(u)^{E(u)}] = u(u-1)$ elementos fora da diagonal principal, obteve-se, para (α.54), em termos de esperanças, e usando-se o fato de que:

$$\text{Cov}(y_{ijs}, y_{i'j's'}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } s=s' \\ \rho\sigma^2, & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } s \neq s' \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases} \quad (\text{por 4.2})$$

$$e \quad [\varepsilon'_1 \quad \vdots \quad \varepsilon'_2] \begin{bmatrix} (X_1 X_1')_a & \vdots & (X_1 X_1')_b \\ \hline (X_1 X_1')_c & \vdots & (X_1 X_1')_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \hline \varepsilon_2 \end{bmatrix} = 5.2. [1+(u-1)\rho] \sigma^2$$

e genericamente, para um bloco qualquer com k parcelas de u subparcelas, ficou

$$u_k [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

e, desse modo, para os a blocos de um ensaio qualquer, obteve-se pa ra o 2º termo de (α.52):

$$E [\varepsilon' X_1 X_1' \varepsilon] = uak [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

$$\text{Mas, } uak = urv = n \quad ,$$

$$\therefore E [\varepsilon' X_1 X_1' \varepsilon] = n [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \quad (\alpha.55)$$

ii) No desenvolvimento do termo $\theta' X' X_1 X_1' X \theta$ de (α.52), tomou-se

$$X_1' X = X_1' [X_1' \mid X_2' \mid X_3' \mid X_4' \mid X_5'] = [n, x, y, z, w]$$

$$\therefore X' X_1 X_1' X = \begin{bmatrix} n^2 & nx & ny & nz & nw \\ x'n & x'x & x'y & x'z & x'w \\ y'n & y'x & y'y & y'z & y'w \\ z'n & z'x & z'y & z'z & z'w \\ w'n & w'x & w'y & w'z & w'w \end{bmatrix}$$

donde,

$$\begin{aligned} \theta' X' X_1 X_1' X \theta &= (m n^2 + \tau' x' n + \beta' y' n + \tau^* z' n + \delta' w' n) m + \\ &+ (m nx + \tau' x' x + \beta' y' x + \tau^* z' x + \delta' w' x) \tau + \\ &+ (m ny + \tau' x' y + \beta' y' y + \tau^* z' y + \delta' w' y) \beta + \\ &+ (m nz + \tau' x' z + \beta' y' z + \tau^* z' z + \delta' w' z) \tau^* + \\ &+ (m nw + \tau' x' w + \beta' y' w + \tau^* z' w + \delta' w' w) \delta \end{aligned}$$

que, ao efetuar-se os produtos e aplicar-se as restrições impostas em (4.2), resultou:

$$\theta'X'X_1X_1'X = n^2m^2 \quad . \quad (\alpha.56)$$

Substituindo-se, então, (α.55) e (α.56) em (α.52), resultou:

$$E [SQ\hat{m}] = \frac{1}{n} \{n [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + n^2m^2\}$$

$$\therefore E [SQ\hat{m}] = E [C_0] = [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + n m^2 \quad (\alpha.57)$$

4.6.2.2.2 - Tratamentos principais

$$SQ\hat{t}(aj.) = \hat{\tau}'Q = Q'M^{-1}Q \quad .$$

Para minimizar os cálculos devidos à substituição de $Q = T - NA^{-1}B$ (α.6.1), adotou-se o uso da matriz que em CHAKRABARTI (1962), PIMENTEL GOMES (1967) e DINIZ (1980), recebeu o nome de matriz W e que neste estudo foi definida por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (v)^\phi(1); & I_{(v)}; & \begin{matrix} (-NA^{-1}) \\ (v) \end{matrix} \begin{matrix} (a) \end{matrix}; & (v)^\phi(u); & (v)^\phi(uv) \end{bmatrix} \quad .$$

Usando-se a propriedade demonstrada por PIMENTEL GOMES (1967) de que $Q = \Lambda X'Y$, obteve-se:

$$SQ\hat{t}(aj.) = Y'X\Lambda'M^{-1}\Lambda X'Y$$

$$= (\theta'X' + \epsilon') X\Lambda'M^{-1}\Lambda X'(\theta + \epsilon)$$

donde,

$$E [SQ_t(aj.)] = \theta' X' X \Lambda' M^{-1} \Lambda X' X \theta + E [\varepsilon' X \Lambda' M^{-1} \Lambda X' \varepsilon] .$$

Em sequência, para outros resultados obtidos por PIMENTEL GOMES (1967)

$$\Lambda X' X \theta = C \tau = Q \quad e \quad \Lambda X' X \Lambda' = C ,$$

resultou

$$E [SQ_t(aj.)] = \tau' C' M^{-1} C \tau + E [\varepsilon' X \Lambda' M^{-1} \Lambda X' \varepsilon]$$

e, desde que $C' M^{-1} C = C M^{-1} C = C$, e, ainda, $C \tau = Q$,

$$E [SQ_t(aj.)] = \tau' Q + E [\varepsilon' X \Lambda' M^{-1} \Lambda X' \varepsilon] . \quad (\alpha.58)$$

Para o desenvolvimento de $E [\varepsilon' X \Lambda' M^{-1} \Lambda X' \varepsilon]$ definiu-se $\Pi = X \Lambda' M^{-1} \Lambda X'$, obtendo-se $E [\varepsilon' \Pi \varepsilon]$ e com raciocínio análogo ao desenvolvido para demonstrar-se ($\alpha.55$), provou-se que

$$E [\varepsilon' \Pi \varepsilon] = TR(\Pi) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \quad (\alpha.59)$$

Partindo-se, então, a matriz Π em

$$\Pi_1 = X \Lambda' \quad e \quad \Pi_2 = M^{-1} \Lambda X' ,$$

e usando-se a propriedade de que se existem os produtos $\Pi_1 \Pi_2$ e $\Pi_2 \Pi_1$ então $TR(\Pi_1 \Pi_2) = TR(\Pi_2 \Pi_1)$ resultou

$$TR(\Pi) = TR(M^{-1} \Lambda X' X \Lambda') = TR(M^{-1} C) ,$$

onde $M^{-1} C$ é idempotente.

Então

$$\ell(M^{-1} C) = TR(M^{-1} C) .$$

Tendo-se em conta que C é singular de característica $\ell = v-1$, então, como M^{-1} é diagonal e, por consequência, não singular, o produto $M^{-1}C$ preserva a característica de C .

$$\therefore \text{TR}(M^{-1}C) = \ell(C) = v-1$$

obtendo-se, para (α.59)

$$E [\varepsilon' \Pi \varepsilon] = (v-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \quad (\alpha.60)$$

Assim, de (α.58) e (α.60), resultou

$$E [SQ_t(aj.)] = (v-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + \tau' Q \quad (\alpha.61)$$

Da característica de C , obteve-se o número de graus de liberdade para tratamentos principais.

Desse modo,

$$E [QM_t(aj.)] = [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + \frac{\tau' Q}{v-1} \quad (\alpha.62)$$

4.6.2.2.3 - Blocos

$$\begin{aligned} SQ_b &= B' A^{-1} B - C_o \\ &= (X_3' Y)' A^{-1} (X_3' Y) - C_o \\ &= (\theta' X' + \varepsilon') X_3 A^{-1} X_3' (X\theta + \varepsilon) - C_o \end{aligned}$$

$$\therefore E [SQ_b] = \theta' X' X_3 A^{-1} X_3' X \theta + E [\varepsilon' X_3 A^{-1} X_3' \varepsilon] - E [C_o] \quad (\alpha.63)$$

Mas,

$$X'X_3 = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \\ X'_4 \\ X'_5 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} y \\ N \\ A \\ K' \\ V' \end{bmatrix}$$

$$\therefore X'X_3A^{-1}X'_3X = \begin{bmatrix} yA^{-1}y' & yA^{-1}N' & y & yA^{-1}K & yA^{-1}V \\ NA^{-1}y' & NA^{-1}N' & N & NA^{-1}K & NA^{-1}V \\ y' & N' & A & K & V \\ K'A^{-1}y' & K'A^{-1}N' & K' & K'A^{-1}K & K'A^{-1}V \\ V'A^{-1}y' & V'A^{-1}N' & V' & V'A^{-1}K & V'A^{-1}V \end{bmatrix}$$

Então, de modo análogo ao usado na obtenção de (α.56), efetuando-se o produto e aplicando-se as restrições, obteve-se:

$$\theta'X'X_3A^{-1}X'_3X\theta = n m^2 + \tau'NA^{-1}N'\tau + 2\beta'N'\tau + \beta'AB$$

e como, de (α.6.1) $R - C = NA^{-1}N'$, (α.63) resultou

$$E [SQb] = n m^2 + \tau'R\tau - \tau'Q + 2\beta'N'\tau + \beta'AB + \\ + E [\varepsilon'X_3A^{-1}X'_3\varepsilon] - E [C_0] \quad (\alpha.64)$$

Por sua vez, como em (α.59), fazendo-se

$$\Pi_3 = X_3A^{-1}X'_3,$$

obteve-se

$$E [\varepsilon'\Pi_3\varepsilon] = \text{TR}(\Pi_3) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \quad (\alpha.65)$$

e, para $\Pi_4 = X_3$ e $\Pi_5 = A^{-1}X'_3$,

$$\text{TR}(\Pi_3) = \text{TR}(\Pi_5 \Pi_4) = \text{TR}(I_a) = a$$

Assim, (α.64) ficou:

$$\begin{aligned} E [\text{SQb}] &= n m^2 + \tau' R \tau - \tau' Q + 2\beta' N' \tau + \beta' A \beta + a [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 - \\ &\quad - n m^2 - [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore E [\text{SQb}] &= (a-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + \tau' R \tau - \tau' Q + 2\beta' N' \tau + \\ &\quad + \beta' A \beta \end{aligned} \quad (\alpha.66)$$

4.6.2.2.4 - Tratamentos secundários

$$\begin{aligned} \text{SQt}' &= T^{*'} U^{-1} T^* - C_o \\ &= Y' X_u U^{-1} X_u' Y - C_o \end{aligned}$$

$$\therefore \text{SQt}' = (\theta' X' + \epsilon') X_u U^{-1} X_u' (X\theta + \epsilon) - C_o$$

Então,

$$E [\text{SQt}'] = \theta' X' X_u U^{-1} X_u' X \theta + E [\epsilon' X_u U^{-1} X_u' \epsilon] - E [C_o] \quad (\alpha.67)$$

onde,

$$X' X_u = \begin{bmatrix} z \\ P \\ K \\ U \\ H' \end{bmatrix}$$

então,

$$X'X_u U^{-1} X'_u X = \begin{bmatrix} n & x & y & z & w \\ x' & PU^{-1}P' & PU^{-1}K' & P & PU^{-1}H \\ y' & KU^{-1}P' & KU^{-1}K' & K & KU^{-1}H \\ z' & P' & K' & U' & H \\ w' & H'U^{-1}P' & H'U^{-1}K' & H' & H'U^{-1}H \end{bmatrix}$$

e, de modo análogo a (α.56), efetuando-se o produto e aplicando-se as restrições, foi obtido

$$\theta'X'X_u U^{-1} X'_u X\theta = n m^2 + \tau'^* U \tau^* .$$

Assim, (α.67) passou a ser

$$E [SQ\tau'] = n m^2 + \tau'^* U \tau^* + E [\varepsilon' X_u U^{-1} X'_u \varepsilon] - E [C_\theta] \quad (\alpha.68)$$

Por sua vez, no desenvolvimento do termo $E[\varepsilon' X_u U^{-1} X'_u \varepsilon]$, adotou-se $\Pi_6 = X_u U^{-1} X'_u$, $\Pi_7 = X_u$ e $\Pi_8 = U^{-1} X'_u$,

$$\therefore TR(X_u U^{-1} X'_u) = TR(U^{-1} X'_u X_u) = TR(U^{-1} U) = TR[I_{(u)}] = u$$

No entanto, se para a correção (α.55), tratamentos principais (α.60) e para blocos (α.65) foram obtidas

$$E [\varepsilon' \Pi^* \varepsilon] = [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + f(P) ,$$

onde Π^* é uma das matrizes ali definidas, e $f(P)$ é uma função dos parâmetros envolvidos, aqui o resultado obtido para o termo que envolve a variância foi diferente.

Este fato foi devido à estrutura da matriz X_u , que é composta de submatrizes $I_{(u)}$

então, para as rv submatrizes, isto é, para todas as parcelas do ensaio

$$E [\varepsilon' X_u U^{-1} X_u'] = u\sigma^2 \quad (\alpha.69)$$

Portanto, (α.68) resultou:

$$\begin{aligned} E [SQ_t'] &= n m^2 + \tau^{*'} U \tau^* + u\sigma^2 - n m^2 - [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \\ &= (u-1) \sigma^2 - (u-1) \rho \sigma^2 + \tau^{*'} U \tau^* \end{aligned}$$

$$\therefore E [SQ_t'] = (u-1)(1-\rho) \sigma^2 + \tau^{*'} U \tau^* \quad (\alpha.70)$$

e, obviamente

$$\tau^{*'} U \tau^* = rv \sum_{s=1}^u t_s^2, \quad ,$$

obtendo-se, assim, em (α.70), um resultado idêntico àqueles encontrados na metodologia usual da análise de variância para experimentos com parcelas subdivididas delineados em blocos (completos) casualizados, fornecida pelos autores que, como CHAKRABARTI (1962) adotam correlação constante entre subparcelas de uma mesma parcela.

De modo análogo aos anteriores:

$$E [QM_t'] = (1-\rho) \sigma^2 + \frac{\tau^{*'} U \tau^*}{u-1} \quad (\alpha.70.1)$$

4.6.2.2.5 -Interação $t \times t'$

Reportando-se a (α.49), tomou-se

$$SQ\delta = \Delta' L^{-1} \Delta - C_0 - \tilde{\tau}' T - \tilde{\tau}^*{}' T^* .$$

Então,

$$E [SQ\delta] = E [\Delta' L^{-1} \Delta] - E [C_0] - E [\tilde{\tau}' T] - E [\tilde{\tau}^*{}' T^*] \quad (\alpha.71)$$

com

$$i) \Delta' L^{-1} \Delta = Y' X_5 L^{-1} X_5' Y = (\theta' X' + \varepsilon') X_5 L^{-1} X_5' (X\theta + \varepsilon)$$

$$\therefore E [\Delta' L^{-1} \Delta] = \theta' X' X_5 L^{-1} X_5' X\theta + E [\varepsilon' X_5 L^{-1} X_5' \varepsilon]$$

onde,

$$i.1) \quad X_5 = \begin{bmatrix} I_{(uv)} \\ I_{(uv)} \\ \dots \\ I_{(uv)} \end{bmatrix} \quad , \text{ isto é, existe "dentro" de } X_5 \text{ uma sub} \\ \text{matriz } I_{(uv)} \text{ para cada repetição,} \\ (uv) \quad (uv)$$

então, de modo análogo ao desenvolvido na obtenção de (α.69), obté-ve-se

$$E [\varepsilon' X_5 L^{-1} X_5' \varepsilon] = uv\sigma^2 . \quad (\alpha.72)$$

$$i.2) \quad X'X_5 L^{-1} X_5' X = \begin{bmatrix} n & x & y & z & w \\ x' & R & N & P & S \\ y' & N' & N'R^{-1}N & K & V \\ z' & P' & K' & U & H \\ w' & S' & V' & H' & L \end{bmatrix}$$

Assim, dadas as restrições citadas em 4.2, resultou

$$\begin{aligned} \theta'X'X_5 L^{-1} X_5' X \theta &= n m^2 + \tau'R\tau + \beta'N'\tau + \tau'N\beta + \beta'N'R^{-1}N\beta + \\ &+ \tau^*U\tau^* + \delta'H'\tau^* + \tau^*H\delta + \delta'L\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore E[\Delta'L^{-1}\Delta] &= uv\sigma^2 + C_0 + \tau'R\tau + \beta'N'\tau + \tau'N\beta + \beta'N'R^{-1}N\beta + \\ &+ \tau^*U\tau^* + \delta'H'\tau^* + \tau^*H\delta + \delta'L\delta \quad (\alpha.73) \end{aligned}$$

ii) $\tilde{\tau}'T$

Usando-se o fato de que por (α.48.i),

$$\tilde{\tau}'T + C_0 = T'R^{-1}SL^{-1}\Delta \quad ,$$

obteve-se

$$\tilde{\tau}'T = T'R^{-1}SL^{-1}\Delta - C_0 \quad ,$$

onde $SL^{-1}\Delta = T$,

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{\tau}'T &= T'R^{-1}T - C_0 \\ &= Y'X_2R^{-1}X_2'Y - C_0 \\ &= (\theta'X' + \varepsilon')X_2R^{-1}X_2'(X\theta + \varepsilon) - C_0 \end{aligned}$$

$$\therefore E [\tilde{\tau}'T] = \theta'X'X_2R^{-1}X_2'X\theta + E [\varepsilon'X_2R^{-1}X_2'\varepsilon] - E [C_0] \quad (\alpha.74)$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{ii.1)} \quad E [\varepsilon'X_2R^{-1}X_2'\varepsilon] &= \text{TR} [R^{-1}X_2'X_2] \cdot [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \\ &= \text{TR} [I_{(v)}] \cdot [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \\ E [\varepsilon'X_2R^{-1}X_2'\varepsilon] &= v [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \end{aligned} \quad (\alpha.75)$$

$$\text{ii.2)} \quad X'X_2R^{-1}X_2'X = \begin{bmatrix} xR^{-1}x' & x & xR^{-1}N & xR^{-1}P & xR^{-1}S \\ x & R & N & P & S \\ N'R^{-1}x' & N' & N'R^{-1}N & N'R^{-1}P & N'R^{-1}S \\ P'R^{-1}x' & P' & P'R^{-1}N & P'R^{-1}P & P'R^{-1}S \\ S'R^{-1}x' & S' & S'R^{-1}N & S'R^{-1}P & S'R^{-1}S \end{bmatrix}$$

$$\therefore \theta'X'X_2R^{-1}X_2'X\theta = n m^2 + \tau'R\tau + \beta'N'\tau + \tau'N\beta + \beta'N'R^{-1}N\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore E [\tilde{\tau}'T] &= (v-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + \tau'R\tau + \\ &\quad + 2\beta'N'\tau + \beta'N'R^{-1}N\beta \end{aligned} \quad (\alpha.76)$$

$$\text{iii)} \quad \hat{\tau}^{*'}T^{*} = T^{*'}U^{-1}T^{*} - \hat{m} U^{-1}zT^{*} \quad (\text{por } \alpha.13)$$

$$= T^{*'}U^{-1}T^{*} - C_0$$

Então, usando-se (4.6.2.2.4) e (α.70), obteve-se

$$E [\hat{\tau}^{*'}T^{*}] = E [SQ\tau'] = (u-1)(1-\rho) \sigma^2 + \tau^{*'}U\tau^{*} \quad (\alpha.76*)$$

Desse modo, (α.71) passou a ser, por (α.73), (α.57),

(α.76) e (α.76*)

$$E [SQ\delta] = (u-1)(v-1)(1-\rho) \sigma^2 + \delta' L \delta \quad (\alpha.77)$$

$$\therefore E [QM\delta] = (1-\rho) \sigma^2 + \frac{1}{(u-1)(v-1)} \delta' L \delta \quad (\alpha.77.1)$$

4.6.3 - Soma de quadrados devida às parcelas

Tomando-se como em ($\alpha.45.*$)

$$SQ_{\text{Parc}} = \frac{1}{u} Y' \Phi Y - C_o$$

resultou

$$E [SQ_{\text{Parc}}] = \frac{1}{u} E [Y' \Phi Y] - E [C_o] \quad (\alpha.78)$$

$$\therefore E [SQ_{\text{Parc}}] = \frac{1}{u} \{ \theta' X' \Phi X \theta + E[\varepsilon' \Phi \varepsilon] \} - E [C_o]$$

i) Analisando-se o termo $E [\varepsilon' \Phi \varepsilon]$, obteve-se, sem perda de generalidade, para a primeira parcela

$$[e_{111}, e_{112}, \dots, e_{11u}] \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ \dots \\ e_{11u} \end{bmatrix}$$

então, em termos de esperanças, para essa parcela, resultou

$$u\sigma^2 + u(u-1) \rho\sigma^2$$

assim, considerando-se o comportamento análogo para as rv parcelas do experimento:

$$E [\varepsilon' \Phi \varepsilon] = urv [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

ii) No tocante ao termo $\theta'X'\Phi X\theta$, obteve-se

$$X'\Phi X = \begin{bmatrix} un & ux & uy & uz & uw \\ ux' & uR & uN & uP & uS \\ uy' & uN' & uA & uK & uV \\ uz' & uP' & uK' & U^* & H \\ uw' & uS' & uV' & H' & L^* \end{bmatrix}$$

onde

$$U^* = rv \cdot (u)E(u)$$

então $\tau^*U^*\tau^* = \phi$, e

$$L^* = \begin{bmatrix} (u)E(u) & \phi & \dots & \phi \\ \phi & (u)E(u) & \dots & \phi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi & \phi & \dots & (u)E(u) \end{bmatrix}$$

(uv) (uv)

resultando $\delta'L^*\delta = \phi$.

Então,

$$\theta'X'\Phi X\theta = u(n m^2 + \tau'R\tau + \beta'A\beta + 2\beta'N'\tau) \quad .$$

Obteve-se, desse modo, para (α.78)

$$E [SQParc] = \frac{1}{u} \{ unm^2 + u\tau'R\tau + u\beta'A\beta + 2u\beta'N'\tau + urv[1 + (u-1)\rho]\sigma^2 \} - \\ - nm^2 - [1 + (u-1)\rho] \sigma^2$$

$$\therefore E [SQParc] = (rv-1)[1 + (u-1)\rho] \sigma^2 + \tau'R\tau + \beta'A\beta + \\ + 2\beta'N'\tau \quad (\alpha.78.1)$$

$$\therefore E [QMParc] = [1 + (u-1)\rho] \sigma^2 + \frac{1}{rv-1} \left\{ \begin{array}{l} \tau'R\tau + \beta'A\beta + \\ + 2\beta'N'\tau \end{array} \right\} \quad (\alpha.78.2)$$

4.6.4 - Soma de quadrados devida ao total

$$SQT = Y'Y - C_o$$

onde $Y'Y = Y'\Phi Y + Y'(I-\Phi)Y$

$$\therefore E [SQT] = E [Y'\Phi Y] + E [Y'(I-\Phi)Y] - E [C_o] \\ = \theta'X'\Phi X\theta + E [\epsilon'\Phi\epsilon] + \theta'X'(I-\Phi) X\theta + \\ + E [\epsilon'(I-\Phi)\epsilon] - E [C_o] \quad ,$$

com

$$i) \theta'X'\Phi X\theta + \theta'X'(I-\Phi) X\theta = \theta'X'X\theta = n m^2 + \tau'R\tau + \beta'A\beta + 2\beta'N'\tau + \\ + \tau^*U\tau^* + \delta'LD$$

$$ii) E [\epsilon'\Phi\epsilon] = urv [1 + (u-1)\rho] \sigma^2$$

$$iii) E [\epsilon'(I-\Phi)\epsilon] = - urv(u-1) \rho \sigma^2 \quad , \text{ pois, com raciocínio análogo}$$

ao desenvolvido em (4.6.3.i), obteve-se para a primeira parcela

$$\begin{matrix} [e_{111}, e_{112}, \dots, e_{11u}] & \begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ \dots \\ e_{11u} \end{bmatrix} \\ & (u) & (u) \end{matrix}$$

então, em termos de esperança:

$$- u(u-1) \rho \sigma^2.$$

E, para as rv parcelas do ensaio

$$E [\varepsilon' (I - \Phi) \varepsilon] = - u v (u-1) \rho \sigma^2.$$

De fato,

$$u v [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 - u v (u-1) \rho \sigma^2 = u v \sigma^2 = E [\varepsilon' \varepsilon]$$

Assim, resultou

$$\begin{aligned} E [SQT] &= u v \sigma^2 - [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + \tau' R \tau + \\ &+ \beta' A \beta + 2 \beta' N' \tau + \tau^* U \tau^* + \delta' L \delta \end{aligned} \quad (\alpha.79)$$

ou

$$\begin{aligned} E [SQT] &= [(u v - 1) - (u-1) \rho] \sigma^2 + \tau' R \tau + \beta' A \beta + \\ &+ 2 \beta' N' \tau + \tau^* U \tau^* + \delta' L \delta \end{aligned} \quad (\alpha.79.1)$$

4.6.5 - Componentes de variâncias devidos aos efeitos aleatórios

4.6.5.1 - Resíduo (a)

$$SQRes(a) = SQParc - SQt(aj) - SQb$$

$$\begin{aligned} \therefore E [SQRes(a)] &= E [SQParc] - E [SQt(aj)] - [SQb] \\ &= (rv-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + \tau'R\tau + \\ &\quad + \beta'A\beta + 2\beta'N'\tau - (v-1) [1 + (u-1)\rho] \sigma^2 - \\ &\quad - \tau'Q - (a-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 - \\ &\quad - \tau'R\tau + \tau'Q - 2\beta'N'\tau - \beta'A\beta \end{aligned}$$

$$\therefore E [SQRes(a)] = (rv-v-a+1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \quad (\alpha.80)$$

$$\therefore E [QMRes(a)] = [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 \quad (\alpha.80.1)$$

4.6.5.2 - Resíduo (b)

$$SQRes(b) = SQT - SQParc - SQt' - SQ\delta$$

$$\begin{aligned} \therefore E [SQRes(b)] &= E [SQT] - E[SQParc] - E [SQt'] - E [SQ\delta] \\ &= [(urv-1) - (u-1) \rho] \sigma^2 + \tau'R\tau + \beta'A\beta + \\ &\quad + 2\beta'N'\tau + \tau*'U\tau* + \delta'L\delta - \\ &\quad - (rv-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 - \tau'R\tau - \beta'A\beta - \\ &\quad - 2\beta'N'\tau - (u-1)(1-\rho) \sigma^2 - \tau*'U\tau* - \\ &\quad - (u-1)(v-1)(1-\rho) \sigma^2 - \delta'L\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore E [SQRes(b)] &= (urv-1-rv+1-u+1-uv+v+u-1) \sigma^2 + \\
&\quad + (-u+1-urv+u+rv-1+u-1+uv-v-u+1) \rho \sigma^2 \\
&= v(u-1)(r-1) \sigma^2 - v(u-1)(r-1) \rho \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\therefore E [SQRes(b)] = v(u-1)(r-1) [1-\rho] \sigma^2 \quad (\alpha.81)$$

Assim, ficou

$$E [QMRes(b)] = (1-\rho) \sigma^2 \quad (\alpha.81.1)$$

4.6.6 - Testes de hipóteses e quadros de análise

Conforme citado em (2.1.4), nos ensaios com parcelas subdivididas existe geralmente interesse em se testar as três hipóteses básicas:

$$H_o(1): t_i = 0 ; \quad i=1,2,\dots,v$$

$$H_o(2): t'_s = 0 ; \quad s=1,2,\dots,u$$

$$H_o(3): \delta_{is} = 0 ; \quad i=1,2,\dots,v ; s=1,2,\dots,u ,$$

que são, respectivamente, as hipóteses de nulidade para efeitos de tratamentos principais, efeitos de tratamentos secundários e efeitos de interação.

Os erros adequados para cada teste, ficaram evidentes quando se observou a coluna relativa às esperanças dos quadros médios, no quadro da análise de variância:

Causas da Variação	Graus de liberdade	Somas de quadrados	Esperança dos quadrados médios*
Blocos	a-1	$B'A^{-1}B - C_o$	$[1+(u-1)\rho]\sigma^2 + f_1(\theta)$
Trat (aj.) t	v-1	$\hat{\tau}'Q$	$[1+(u-1)\rho]\sigma^2 + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	rv-v-a+1	DIFERENÇA	$[1+(u-1)\rho]\sigma^2$
Parcelas	rv-1	$\frac{1}{u} Y'\Phi Y - C_o$	
Trat. t'	u-1	$T*'U^{-1}T* - C_o$	$(1-\rho)\sigma^2 + f_3(\theta)$
t x t'	(u-1)(v-1)	$\Delta'L^{-1}\Delta - C_o - SQ_t - SQ_{t'}$	$(1-\rho)\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo	v(u-1)(r-1)	DIFERENÇA	$(1-\rho)\sigma^2$
Total	urv-1	$Y'Y - C_o$	

$$(*) f_1(\theta) = \{\beta'A\beta + \tau'R\tau - \tau'Q - 2\beta'N'\tau\}/(a-1)$$

$$f_2(\theta) = \{\tau'Q\}/(v-1)$$

$$f_3(\theta) = \{\tau*'U\tau*\}/(u-1)$$

$$f_4(\theta) = \{\delta'L\delta\}/(u-1)(v-1)$$

Então, no tocante às três hipóteses básicas, o experimento com parcelas subdivididas, com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados, comportou-se de modo análogo ao seu equivalente em blocos (completos) casualizados.

Assim, ficaram determinados os critérios para os respectivos testes:

Hipóteses	G.L.	F (observado)
$H_o(1)$	(v-1); (rv-v-a+1)	$QM_t(aj.) / QM_{Res}(a)$
$H_o(2)$	(u-1); $[v(u-1)(r-1)]$	$QM_{t'} / QM_{Res}(b)$
$H_o(3)$	(u-1)(v-1); $[v(u-1)(r-1)]$	$QM_{\delta} / QM_{Res}(b)$

No entanto, se for desejável testar-se uma hipótese adicional, relativa aos efeitos de blocos, então o esquema incompleto passa a ser o agente diferenciador, e o tipo do BIB em questão deve ser considerado.

Sob esse aspecto, como citado em (2.2.4), PIMENTEL GOMES (1976), dentre outros, recomenda a decomposição da soma de quadrados de blocos conforme o BIB seja do tipo I ou do tipo II, do seguinte modo:

$$\text{TIPO I: } \text{SQBlocos} = \text{SQRepetições} + \text{SQBlocos/Repetições}$$

$$\text{TIPO II: } \text{SQBlocos} = \text{SQGrupos} + \text{SQBlocos/Grupos}$$

com:

$$\text{SQRepetições} = \frac{1}{v} \sum_d R_d^2 - C_o$$

$$\text{SQGrupos} = \frac{1}{f.v} \sum_g G_g^2 - C_o$$

onde, R_d , $d=1, \dots, f, \dots, r$ representa o total da d -ésima repetição;

G_g ; $g=1, \dots, h$ representa o total do g -ésimo grupo de repetições;

f representa o número de repetições por grupo.

Neste estudo, como cada tratamento principal está ainda repetido em u subparcelas, adotou-se

$$SQRepetições = \frac{1}{uv} \sum_d R_d^2 - C_o \quad (\alpha.82)$$

$$SQGrupos = \frac{1}{u.f.v} \sum_g G_g^2 - C_o \quad (\alpha.83)$$

Para os testes das hipóteses adicionais,

$$H_o(4): b_p/R_d = 0 \quad ; \quad p=1,\dots,a^* \quad ; \quad d=1,\dots,r$$

onde, $a^* = \frac{a}{r}$ é o número de blocos por repetição,

$$H_o(5): b_{p'}/G_g = 0 \quad ; \quad p'=1,\dots,a^{*'} \quad ; \quad g=1,\dots,h$$

onde $a^{*'} = \frac{a}{h}$ é o número de blocos por grupo.

Tomou-se o resíduo (a) como polo de referência, resultando os seguintes critérios:

Hipóteses	G.L.	F (observado)
$H_o(4)$	$(a-r); (rv-v-a+1)$	$(QMb/Rep)/[QMRes(a)]$
$H_o(5)$	$(a-h); (rv-v-a+1)$	$(QMb/Gru)/[QMRes(a)]$

que corresponderam exatamente aos resultados apresentados por PIMENTEL GOMES (1976) para ensaios em blocos incompletos balanceados.

De modo análogo, pode haver interesse em se testar, ainda, efeitos de repetições e efeitos de grupos

$$H_o(6): R_d = 0 \quad ; \quad d=1,\dots,r$$

$$H_o(7): G_g = 0 \quad ; \quad g=1,\dots,h$$

Para essas hipóteses foram obtidos os seguintes critérios:

Hipóteses	G.L.	F (observado)
$H_0(6)$	$(r-1); (rv-v-a+1)$	$QMRep/QMRes(a)$
$H_0(7)$	$(g-1); (rv-v-a+1)$	$QMGrU/QMRes(a)$

De fato, vejamos como foram obtidos os critérios para o experimento citado no exemplo inicial (BIB tipo I), e de modo análogo, os critérios para o teste de $H_0(5)$ e $H_0(7)$, de um experimento com parcelas subdivididas em BIB tipo II,

$$SQRep = \frac{1}{uv} \sum_d R_d^2 - C_0 \quad . \quad (\text{por } \alpha.82)$$

Como as hipóteses de maior interesse em ensaios do tipo "Split-plot" são, geralmente, relacionadas aos tratamentos principais, $H_0(1)$, aos tratamentos secundários, $H_0(2)$, e à interação, $H_0(3)$, não se cogitou em acrescentar ao modelo matemático descrito em (4.2), parâmetros relativos às repetições ou grupos.

Supôs-se, no entanto, para os testes de $H_0(4)$ e $H_0(6)$, a existência do parâmetro R_d , relativo à d-ésima repetição.

Sob esse aspecto, a R_d correspondeu a submatriz X_6 , que foi anexada à já existente matriz X do modelo citado em (4.2), resultando

$$X^* = [X_1' \mid X_2' \mid X_3' \mid X_4' \mid X_5' \mid X_6']$$

onde, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 e X_5 continuaram sendo as mesmas submatrizes de (4.3), e

$$X_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(urv) (r)

Através do uso de X_6 , (4.82) passou a ser

$$SQRep = \frac{1}{uv} R^{*'} R^* - C_0, \quad ,$$

onde $R^* = X_6' Y$, então

$$\begin{aligned} E [SQRep] &= \frac{1}{uv} E [Y' X_6 X_6' Y] - E [C_0] \\ &= \frac{1}{uv} \{ \theta' X' X_6 X_6' X \theta + E [\epsilon' X_6 X_6' \epsilon] \} - E [C_0] \end{aligned}$$

$$\therefore E [SQRep] = \frac{1}{uv} f(\theta) + \frac{1}{uv} E [\varepsilon' X_b X_b' \varepsilon] - E [C_o] \quad , \quad (\alpha.84)$$

onde $f(\theta)$ é uma função não negativa dos parâmetros, como as descritas em 4.6.6.

No tocante à parte aleatória, obteve-se

$$X_b X_b' = \begin{bmatrix} E & \phi & \dots & \phi \\ (uv) & (uv) & & \\ \phi & E & \dots & \phi \\ & (uv) & (uv) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi & \phi & \dots & E \\ & & & (uv) & (uv) \end{bmatrix}$$

(urv) (urv)

onde a cada repetição correspondeu uma submatriz E .

Assim, para a primeira repetição, sem perda de generalidade, foi obtido:

$$\begin{bmatrix} e_{111} & \dots & e_{11u} & e_{211} & \dots & e_{21u} & \dots & \dots & e_{va*u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{111} \\ \vdots \\ e_{va*u} \end{bmatrix}$$

que, em termos de esperança, resultou

$$ua*k [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 = u \frac{a}{r} k [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

e, desse modo, para as $\underline{r}$ repetições do experimento, onde $ak = rv$

$$E [\varepsilon' X_6 X_6' \varepsilon] = urv [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

então, a parte aleatória de (α.84), ficou:

$$\frac{1}{uv} E [\varepsilon' X_6 X_6' \varepsilon] - E [C_0] = (r-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2$$

$$\therefore E [SQRep] = (r-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + f(\theta) \quad (\alpha.84.1)$$

e

$$E [QMRep] = [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + \frac{1}{r-1} f(\theta) \quad (\alpha.84.2)$$

tornando-se, assim, justificado o critério adotado para o teste de $H_0(6)$.

Tomando-se, então, como em PIMENTEL GOMES (1976)

$$SQb/Rep = SQb - SQRep ,$$

obteve-se

$$E [SQb/Rep] = (a-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + f_1(\theta) \\ - (r-1) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 - f(\theta)$$

$$\therefore E [SQb/Rep] = (a-r) [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + f^*(\theta). \quad (\alpha.85)$$

Obviamente, em se tratando de BIB, ocorre sempre $a > r$ e, desse modo:

$$E [QMb/Rep] = [1 + (u-1) \rho] \sigma^2 + \frac{1}{a-r} f^*(\theta)$$

comprovando-se, assim, a validade do teste para $H_0(4)$.

Então, para ensaios com parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados do

tipo I, para os testes de $H_0(1)$, $H_0(2)$, $H_0(3)$, $H_0(4)$ e $H_0(6)$, obteve-se o seguinte quadro de análise:

Causa da Variação	Graus de liberdade	Somas de quadrados	Esperanças dos quadrados médios
Repetições	$r-1$	$(1/uv) \sum_d R_d^2 - C_o$	$[1+(u-1)\rho]\sigma^2 + [f(\theta)/(r-1)]$
BL/Repet.	$a-r$	$SQb - SQRep$	$[1+(u-1)\rho]\sigma^2 + [f^*(\theta)/(a-r)]$
Trat.(aj.) t	$v-1$	$\hat{T}'Q$	$[1+(u-1)\rho]\sigma^2 + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	$rv-v-a+1$	DIFERENÇA	$[1+(u-1)\rho]\sigma^2$
Parcelas	$(rv-1)$	$(1/u) \sum_{ij} y_{ij}^2 - C_o$	
Trat. t'	$u-1$	$(1/rv) \sum_s T_s^2 - C_o$	$(1-\rho)\sigma^2 + f_3(\theta)$
t x t'	$(u-1)(v-1)$	$(1/r) \sum_{is} (TT')_{is}^2 - C_o - SQ_t - SQ_{t'}$	$(1-\rho)\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo (b)	$v(u-1)(r-1)$	DIFERENÇA	$(1-\rho)\sigma^2$
Total	$urv-1$	$\sum_{ijs} y_{ijs}^2 - C_o$	

no qual observou-se que a "parte superior", correspondente aos tratamentos principais, comportou-se como numa análise de experimentos em blocos incompletos balanceados. Por sua vez, a "parte inferior", correspondente aos tratamentos secundários, portou-se como num en-

saio em parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados, inclusive no termo SQt da $SQ\delta$, que não é ajustado para efeito de blocos.

De modo análogo, obteve-se o quadro da análise da variância para o caso de "Split-plot" em BIB tipo II, que mostrou-se idêntico ao caso anterior, com exceção do desdobramento da SQ_{blocos} , resultando então, para a "parte superior":

Causa da Variação	Graus de liberdade	Somas de quadrados	Esperanças dos quadrados médios
Grupos	$g-1$	$(1/u.f.v) \sum_g G_g^2 - C_o$	$[1+(u-1)\rho] \sigma^2 + f_1^*(\theta)$
BL/Grupos	$a-g$	$SQ_b - SQ_{\text{Gru}}$	$[1+(u-1)\rho] \sigma^2 + f_5(\theta)$
Trat.(aj.) t	$v-1$	$\hat{\tau}'Q$	$[1+(u-1)\rho] \sigma^2 + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	$rv-v-a+1$	DIFERENÇA	$[1+(u-1)\rho] \sigma^2$
Parcelas	$rv-1$	$(1/u) \sum_{ij} y_{ij}^2 - C_o$	

onde se verificaram os critérios adotados para os testes de $H_o(5)$ e $H_o(7)$.

Por outro lado, segundo PIMENTEL GOMES (1976) e LEAL (1979), dentre outros, quando a interação tt' é significativa, o esquema da análise de variância deve ser modificado, pois este fato pode ser um indício de que os tratamentos principais comportam-se de

modos diferentes em relação aos tratamentos secundários. Assim, recomendam que seja estudado o efeito dos tratamentos secundários dentro de cada tratamento principal, isoladamente.

Sob esse aspecto, se $H_0(3)$ resulta significativa, então $H_0(2)$ deve ser decomposta em v subhipóteses do tipo:

$$H_0(2.1): t'/t_1 = 0$$

$$H_0(2.2): t'/t_2 = 0$$

$$\dots \quad \dots$$

$$H_0(2.v): t'/t_v = 0$$

com o seguinte critério para os respectivos testes:

Hipóteses	G.L.	F (observado)
$H_0(2.1)$	$(1); [v(u-1)(r-1)]$	$(QMt'_s/t_1) / [QMRes(b)]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$H_0(2.v)$	$(1); [v(u-1)(r-1)]$	$(QMt'_s/t_v) / [QMRes(b)]$

onde,

$$SQ t'/t_i = \frac{1}{r} \left[\sum_{s=1}^u y_{i.s}^2 - \frac{(\sum y_{i.s})^2}{u} \right]$$

Assim, a adoção desse procedimento modificaria apenas a "parte inferior" dos quadros de análise, que passaria a ser:

Causa da Variação	Graus de liberdade
t'/t_1	$u-1$
t'/t_2	$u-1$
...	...
t'/t_v	$u-1$
Resíduo (b)	$v(u-1)(r-1)$
Total	$urv-1$

4.6.7 - Comparações múltiplas

Considerando a possibilidade de rejeição de ao menos uma das hipóteses de nulidade, formularam-se as regras para os testes de contrastes entre efeitos dos parâmetros envolvidos.

Naturalmente são utilizáveis quaisquer dos testes usuais para comparações múltiplas. Neste estudo, optou-se pelo teste Tukey, por sua versatilidade e grande aplicação na estatística experimental. Ademais, foram estudados os quatro casos clássicos, citados em PIMENTEL GOMES (1976).

4.6.7.1 - Comparação entre efeitos estimados de tratamentos principais

Considerou-se o critério do teste de Tukey, citado em PIMENTEL GOMES (1976)

$$D.M.S. = q \sqrt{(1/2) \hat{V}(\hat{\gamma})}$$

onde D.M.S. é a diferença mínima significativa, q é o valor da amplitude total estudentizada e $\hat{V}(\hat{\gamma})$ é a variância estimada do contraste estimado, $\hat{\gamma}$, entre efeitos médios.

Então, para um contraste $\hat{\gamma}_1(i, i') = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$, resultou, segundo (α.25)

$$D.M.S. = q \sqrt{(k/\lambda uv) QMRes(a)} ; q_{\alpha, v, rv-r-a+1} \quad (\alpha.86)$$

que é um valor idêntico àqueles encontrados na literatura, para a diferença mínima significativa entre dois efeitos de tratamentos em ensaios com blocos incompletos balanceados.

4.6.7.2 - Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários

Para $\hat{\gamma}_2(s, s') = \hat{m}_s - \hat{m}_{s'}$, com base em (α.33) obteve-se

$$D.M.S. = q \sqrt{(1/rv) QMRes(b)} ; q_{\alpha, u, v(u-1)(r-1)} \quad (\alpha.87)$$

que é um resultado idêntico àqueles encontrados na literatura para a diferença mínima significativa entre dois efeitos de tratamentos

secundários em ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados.

4.6.7.3 - Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários, dentro do i-ésimo tratamento principal

Tomando-se o contraste

$$\hat{\gamma}_{3,i}(s,s') = \hat{m}_{is} - \hat{m}_{is'}$$

obteve-se, segundo (α.39):

$$D.M.S. = q \sqrt{(1/r) \left(1 - \frac{1}{v}\right) Q_{MRes}(b)} \quad (\alpha.88)$$

$$q_{\alpha, u, v(u-1)(r-1)}$$

Este valor não foi integralmente encontrado na literatura pesquisada. No entanto, CHAKRABARTI (1962) demonstra que a variância para contrastes do tipo de γ_3 para "Split-plot" em blocos (completos) casualizados, é a mesma obtida neste estudo em (α.39). Além disso, recomenda que para o teste de tais contrastes seja usado o quadrado médio do erro (b).

4.6.7.4 - Comparação entre efeitos estimados de tratamentos principais, dentro do s-ésimo tratamento secundário

Tomando-se o contraste

$$\hat{\gamma}_{u,s}(i,i') = \hat{m}_{is} - \hat{m}_{i's}$$

resultou, segundo (α.41)

$$D.M.S. = q \sqrt{(1/r) \left(1 - \frac{1}{u}\right) QMRes(b)} \quad (\alpha.89)$$

$$q_{\alpha,u,v(u-1)(r-1)}$$

Este resultado foi contrastante com aquele encontrado por PIMENTEL GOMES (1976), que apresenta como variância para contrastes como γ_u , uma combinação linear entre os resíduos (a) e (b), quando o experimento em parcelas subdivididas é delineado em blocos (completos) casualizados. Em seu estudo, o autor apresenta um valor aproximado, n' , derivado da fórmula de Satterthwaite, para os graus de liberdade relativos à combinação linear dos resíduos.

4.7 - Testes sobre a Estrutura da Matriz de Covariâncias

De acordo com GILL (1978) e LEAL (1979), dentre outros, a adequação do modelo proposto em (4.2), aos dados experimentais, está diretamente associada à realização das pressuposições sobre as matrizes de covariâncias entre tratamentos secundários den-

tro de cada tratamento principal, além das tradicionais hipóteses de normalidade, independência, aditividade, etc.

Assim, se não se verificam as hipóteses de homogeneidade e de uniformidade para as matrizes de covariâncias, esses autores recomendam como alternativa ao modelo univariado, o uso das técnicas da análise multivariada, mais especificamente a análise de perfil, conforme amplamente abordado em LEAL (1979).

Com base em tais resultados, julgou-se recomendável que se apresentassem testes sobre a estrutura dessas matrizes que, segundo entendeu-se, devem ser parte integrante do processo de análise descrito neste estudo.

4.7.1 - Teste de homogeneidade para as matrizes de covariâncias

Testes dessa natureza têm por objetivo verificar se as v matrizes de covariâncias $Z_{i(u)}$ podem ser representadas por uma única matriz Z , comum aos v tratamentos principais.

Dentre os mais usuais, optou-se, neste estudo, pelo critério de Box (1950), descrito por DANFORD *et alii* (1960) e GILL (1978), entre outros,

$$H_0: Z_1 = Z_2 = \dots = Z_v = Z,$$

toma-se o seguinte critério:

$$g_3 = (r-1) \left[v \ln |G| - \sum_{i=1}^v \ln |G_i| \right]$$

onde, r = número de repetições por tratamento principal;

v = número de tratamentos principais;

$G = (g_{ss'})$ é, sob a hipótese de nulidade, uma estimativa não tendenciosa da matriz de covariâncias comum Σ ;

$G_i = (g_{ss',i})$ é a estimativa não tendenciosa para Σ_i , $i=1, \dots, v$; a matriz de covariâncias entre tratamentos secundários, para o i -ésimo tratamento principal.

Ademais:

$\ln$ = logaritmo neperiano ,

$| |$ = determinante

$$g_{ss'} = \frac{1}{n-v} \sum_{i,j} (y_{ijk} - \bar{y}_{.jk})(y_{ijk'} - \bar{y}_{.jk'})$$

(LEAL, 1979)

$$g_{ss',i} = \frac{1}{r-1} \sum_i (y_{ijk} - \bar{y}_{.jk})(y_{ijk'} - \bar{y}_{.jk'})$$

Obs.: Aqui, G não se refere ao total geral.

Se os valores dos determinantes são próximos de zero, GILL (1978) recomenda que sejam usados logaritmos em base 10 e que se multiplique g_3 por 2,3026.

A distribuição probabilística de g_3 , não tem interesse prático para este estudo, no entanto, $(1-g_1) g_3$ tem distribuição aproximada de um χ^2 com f_1 graus de liberdade, onde

$$g_1 = \left[(v+1)/(n-v) \right] (2u^2+3u-1) / \left[6(u+1) \right]$$

e

$$f_1 = [u + u(u-1)/2] (v-1)$$

pois, dentro de cada tratamento existem u variâncias e $u(u-1)/2$ covariâncias diferentes, conforme visto no comentário de (α.54), dentre outros.

Então, se $(1-g_1) g_3 < \chi^2_{\alpha, f_1}$, aceita-se H_0 , caso contrário, conclui-se pela existência de ao menos um par $Z_i \neq Z_{i'}$, para algum $i \neq i'$.

Por outro lado, essa aproximação é considerada adequada (MORRISON, 1976), se $v < 5$, $u < 5$ e $rv > 20$. Para GILL(1978), se $v \geq 5$ ou $u \geq 5$, ou ambos, uma melhor aproximação seria obtida através da distribuição F, com

$$g_3 [(1-g_1) - (f_1/f_2)] / f_1 \sim F_{\alpha, f_1, f_2}$$

onde, $f_2 = (f_1+2)/(g_2-g_1^2)$

$$g_2 = (v^2+v+1)(u^2+u-2)/[6(n-v)^2]$$

4.7.2 - Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias

Segundo LEAL (1979), a pressuposição da uniformidade da matriz comum de covariâncias pode ser testada através do critério de Wilks (1946), modificado por Box em 1949.

A hipótese de nulidade a ser testada é

$$H_0: Z = Z^*$$

onde Z^* é uma matriz uniforme, definida de modo análogo à matriz W em (α.18).

O critério do teste é dado por

$$g_4 = \frac{|G|}{|G^*|}$$

com

$$G^* = (g_{ss'}^*) = \begin{cases} (1/u) \sum_{s=1}^u g_{ss'}, & \text{se } s=s' \\ 1/[u(u-1)] \sum_{s \neq s'}^u g_{ss'}, & \end{cases}$$

Determina-se, então, $g_5 = -(n-v) \ln g_4$ e, sob a hipótese de nulidade $(1-g_6) g_5$ é aproximadamente distribuída segundo um χ^2 com f_3 graus de liberdade, onde, segundo LEAL (1979),

$$g_6 = \frac{u(u+1)^2(2u-3)}{6(n-v)(u-1)(u^2+u-4)}$$

$$f_3 = (u^2+u-4)/2.$$

Desta feita, rejeita-se H_0 , se $(1-g_6) g_5 > \chi_{\alpha, f_3}^2$

5. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Conforme comentado em (3), julgou-se adequada a ilustração dos resultados obtidos neste estudo. Assim, com base nos dados ali descritos (Tabela 1) foram efetuados os cálculos inerentes às fórmulas demonstradas e entendidas como mais importantes.

Inicialmente buscou-se informações sobre o cumprimento das exigências do modelo, através dos testes de homogeneidade e uniformidade das matrizes de covariâncias. A seguir foram ilustrados os resultados.

5.1 - Testes Sobre a Estrutura das Matrizes de Covariâncias

5.1.1 - Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias para todos os tratamentos principais

Denominando-se por G_i , $i=1,\dots,6$, as estimativas das matrizes de covariâncias Σ_i para os 6 tratamentos principais, obtiveram-se, com base em (4.7.1):

$$G_1 = \begin{bmatrix} 7,54 & 5,71 & 5,13 \\ 5,71 & 6,52 & 5,83 \\ 5,13 & 5,83 & 6,18 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \therefore |G_1| &= 16,0061 \\ \text{e } \ln |G_1| &= 2,7730 \end{aligned}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 9,62 & 2,00 & 3,93 \\ 2,00 & 5,14 & 3,84 \\ 3,93 & 3,84 & 9,19 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \therefore |G_2| &= 256,7814 \\ \text{e } \ln |G_2| &= 5,5482 \end{aligned}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 9,41 & 0,59 & 1,87 \\ 0,59 & 1,35 & -0,30 \\ 1,87 & -0,30 & 9,30 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \therefore |G_3| &= 108,6755 \\ \text{e } \ln |G_3| &= 4,6884 \end{aligned}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} 7,90 & 1,99 & 2,40 \\ 1,99 & 7,37 & 1,18 \\ 2,40 & 1,18 & 5,71 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \therefore |G_4| &= 267,6614 \\ \text{e } \ln |G_4| &= 5,5897 \end{aligned}$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} 5,69 & 6,80 & 7,03 \\ 6,80 & 20,69 & 10,50 \\ 7,03 & 10,50 & 11,75 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \therefore |G_5| &= 194,0047 \\ \text{e } \ln |G_5| &= 5,2679 \end{aligned}$$

$$G_6 = \begin{bmatrix} 9,37 & 0,75 & 6,51 \\ 0,75 & 1,97 & 0,91 \\ 6,51 & 0,91 & 7,73 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \therefore |G_6| &= 55,9772 \\ \text{e } \ln |G_6| &= 4,0249 \end{aligned}$$

Desse modo, a estimativa G para a matriz comum de co variâncias Z , ficou:

$$G = \begin{bmatrix} 8,255 & 2,973 & 4,478 \\ 2,973 & 7,173 & 3,660 \\ 4,478 & 3,660 & 8,310 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \therefore |G| &= 261,6459 \\ \text{e } \ln |G| &= 5,5670 \end{aligned}$$

Então, para o teste de

$$H_0: Z_1 = Z_2 = \dots = Z_6 = Z$$

$$H_a: Z_i \neq Z_{i'}, \text{ para algum par } i, i' \text{ (} i \neq i' \text{)}$$

foram obtidos, conforme (4.7.1).

$$g_3 = 9(6 \ln |G| - \sum_{i=1}^6 \ln |G_i|) = 49,5891$$

$$g_1 = \frac{7}{54} \cdot \frac{26}{24} = 0,1404$$

$$\therefore (1-g_1) g_3 = \chi_{\text{obs}}^2 = 42,62$$

$$f_{11} = \left(3 + \frac{3 \cdot 2}{2}\right) 5 = 30 \text{ g.l.}$$

Assim, como $\chi^2_{\text{obs}} = 42,62 < \chi^2_{\text{tab}} = \chi^2_{5\%,30} = 43,77$, não houveram evidências que indicassem a rejeição de H_0 .

Adotou-se, então, a matriz comum de covariâncias $\hat{\Sigma}$, estimada pela matriz G, para representar as covariâncias entre tratamentos secundários, dentro de cada tratamento principal.

5.1.2 - Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias

Reportando-se a (4.7.2), determinou-se a estimativa G^* , da matriz uniforme Σ^* :

$$G^* = \begin{bmatrix} 7,9127 & 3,7037 & 3,7037 \\ 3,7037 & 7,9127 & 3,7037 \\ 3,7037 & 3,7037 & 7,9127 \end{bmatrix} \quad \therefore |G^*| = 271,4060$$

Assim, para o teste de

$$H_0: \Sigma = \Sigma^*$$

$$H_a: \Sigma \neq \Sigma^*$$

foram obtidos:

$$g_4 = \frac{|G|}{|G^*|} = 0,9640 \quad \therefore \ln g_4 = -0,0367$$

$$g_5 = -(n-v) \ln g_4 = 1,9818$$

$$g_6 = \frac{144}{5184} = 0,0278$$

$$\therefore (1-g_6) g_5 = \chi_{\text{obs}}^2 = 1,9267$$

$$f_{\alpha} = \frac{8}{2} = 4 \text{ g.l.}$$

Entao, como $\chi_{\text{obs}}^2 \cong 1,93 < \chi_{\text{tab}}^2 = \chi_{5\%,4}^2 = 9,49$, não houveram evidências que induzissem à rejeição de H_0 .

Adotou-se, então, a estimativa G^* , da matriz uniforme de covariâncias Z^* , para todos os tratamentos.

5.2 - Equações Normais

Verificadas as exigências do modelo matemático, determinou-se o sistema de equações normais, conforme (α.1)

$$\begin{bmatrix} n & x & y & z & w \\ x' & R & N & P & S \\ y' & N' & A & K & V \\ z' & P' & K' & U & H \\ w' & S' & V' & H' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\tau}^* \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ T^* \\ \Delta \end{bmatrix}$$

onde, para $i = 1, \dots, v=6$ tratamentos principais,
 $j = 1, \dots, a=15$ blocos,
 $s = 1, \dots, u=3$ tratamentos secundários,
 $r = 10$ repetições por tratamento principal,
 $k = 4$ parcelas por bloco,

$$n = urv = 180$$

$$x = 30 \cdot \begin{matrix} E \\ (1) \end{matrix} (6)$$

$$y = 12 \cdot \begin{matrix} E \\ (1) \end{matrix} (15)$$

$$z = 60 \cdot \begin{matrix} E \\ (1) \end{matrix} (3)$$

$$w = 10 \cdot \begin{matrix} E \\ (1) \end{matrix} (18)$$

$$R = 30 \cdot I_{(6)}$$

$$P = 10 \cdot \begin{matrix} E \\ (6) \end{matrix} (3)$$

$$A = 12 \cdot I_{(15)}$$

$$K = 4 \cdot \begin{matrix} E \\ (15) \end{matrix} (3)$$

$$U = 60 \cdot I_{(3)}$$

$$L = 10 \cdot \begin{matrix} E \\ (18) \end{matrix} (18)$$

$$H = \begin{matrix} (3) \end{matrix} \left[\begin{matrix} 10 \cdot I_{(3)} \\ 10 \cdot I_{(3)} \\ \dots \\ 10 \cdot I_{(3)} \end{matrix} \right] \begin{matrix} (18) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} N \\ (6) \end{matrix} \begin{matrix} (15) \end{matrix} \Rightarrow n_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{se o tratamento principal } i, \text{ ocorre no bloco } \underline{j} \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

$$S = \begin{matrix} (6) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccccccccc} 10 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 10 & 10 & 10 \end{array} \right] \begin{matrix} (18) \end{matrix}$$

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33 & \dots & 61 & 62 & 63 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ 15 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (18)$$

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \dots \\ \hat{\tau}_6 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \dots \\ \hat{\delta}_{15} \end{bmatrix} \quad \hat{\tau}^* = \begin{bmatrix} \hat{\tau}'_1 \\ \hat{\tau}'_2 \\ \hat{\tau}'_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\delta} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}'_{11} \\ \hat{\tau}'_{12} \\ \hat{\tau}'_{13} \\ \dots \\ \dots \\ \hat{\tau}'_{61} \\ \hat{\tau}'_{62} \\ \hat{\tau}'_{63} \end{bmatrix}$$

$$G = 3190,3$$

$$\begin{aligned}
 T = \begin{bmatrix} 519,7 \\ 549,4 \\ 564,3 \\ 574,5 \\ 455,4 \\ 527,0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 198,8 \\ 199,1 \\ 199,7 \\ 217,0 \\ 216,9 \\ 192,6 \\ 211,0 \\ 221,7 \\ 220,9 \\ 210,3 \\ 243,1 \\ 233,5 \\ 205,8 \\ 208,7 \\ 211,2 \end{bmatrix} ; \quad T^* = \begin{bmatrix} 1042,9 \\ 1006,1 \\ 1141,3 \end{bmatrix} ; \quad \Delta = \begin{bmatrix} 178,8 \\ 174,0 \\ 166,9 \\ 179,0 \\ 177,7 \\ 192,7 \\ 168,5 \\ 169,0 \\ 226,8 \\ 186,8 \\ 175,6 \\ 212,1 \\ 152,4 \\ 141,5 \\ 161,6 \\ 177,4 \\ 168,3 \\ 181,3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5.3 - Solução do Sistema

5.3.1 - Efeitos estimados de tratamentos principais

Reportando-se a (α.12), para a solução $\hat{\tau} = M^{-1}Q$, obteve-se

$$M^{-1} = \frac{1}{27} I_{(6)} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} -13,400 \\ 18,125 \\ 29,975 \\ 46,075 \\ -74,900 \\ -5,825 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sum_{i=1}^6 Q_i = 0$$

$$\therefore \quad \hat{\tau} = \begin{bmatrix} -0,4965 \\ 0,6711 \\ 1,1101 \\ 1,7063 \\ -2,7743 \\ -0,2159 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sum_{i=1}^6 \hat{\tau}_i = 0$$

5.3.2 - Efeitos estimados de tratamentos secundários

De acordo com (α.4), obteve-se

$$\hat{m} = 17,7239 \text{ h}$$

e, segundo (α.13) ou (α.14), resultou:

$$\hat{\tau}^* = \begin{bmatrix} -0,3422 \\ -0,9555 \\ 1,2977 \end{bmatrix} ; \quad \sum_{s=1}^3 \hat{\tau}_s' = 0 .$$

5.3.3 - Efeitos estimados dos pares $(tt')_{is}$

Segundo (A.16), foram obtidas as estimativas dos efeitos de tratamentos principais de modo usual, isto é, sem considerar-se o ajuste para efeitos estimados de blocos, obtendo-se:

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} -0,4006 \\ 0,5894 \\ 1,0861 \\ 1,4261 \\ -2,5439 \\ -0,1572 \end{bmatrix} ; \quad \sum_{i=1}^6 \tilde{t}_i = 0$$

Assim, através das estimativas $\tilde{t}_i$, determinaram-se os componentes do vetor $\hat{\delta}$:

$\hat{tt}'_{11} = 0,8989$	$\hat{tt}'_{12} = 1,0321$	$\hat{tt}'_{13} = -1,9310$
$\hat{tt}'_{21} = -0,0711$	$\hat{tt}'_{22} = 0,4122$	$\hat{tt}'_{23} = -0,3411$
$\hat{tt}'_{31} = -1,6178$	$\hat{tt}'_{32} = -0,9545$	$\hat{tt}'_{33} = 2,5723$
$\hat{tt}'_{41} = -0,1278$	$\hat{tt}'_{42} = -0,6345$	$\hat{tt}'_{43} = 0,7623$
$\hat{tt}'_{51} = 0,4022$	$\hat{tt}'_{52} = -0,0745$	$\hat{tt}'_{53} = -0,3177$
$\hat{tt}'_{61} = 0,5155$	$\hat{tt}'_{62} = 0,2188$	$\hat{tt}'_{63} = -0,7343$

onde observou-se

$$\sum_i (tt')_{is} = 0, \forall s$$

$$\sum_s (tt')_{is} = 0, \forall i$$

$$\sum_{i,s} (tt')_{is} = 0$$

5.4 - Análise de Variância

5.4.1 - Obtenção das somas de quadrados

Reportando-se a (4.6), foram determinadas:

$$SQ_t(aj.) = \hat{\tau}'Q = 339,7625$$

$$SQ_b = B'A^{-1}B - C_o = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{15} B_j^2 - C_o$$

onde $C_o = \frac{(3190,3)^2}{180} = 56544,5220$

$\therefore SQ_b = 213,9050$

$$SQ_{\text{Grupos}} = \frac{1}{36} \sum_{g=1}^5 G_g^2 - C_o = 126,3940$$

$$SQ_b/\text{Gru} = 213,9050 - 126,3940 = 87,5110$$

$$SQ_{\text{Parc}} = \frac{1}{3} \sum_{ij} y_{ij}^2 - C_o = 1133,9340$$

$$SQRes(a) = 580,2665$$

$$SQt' = T'^* U^{-1} T^* - C_o = \frac{1}{60} \sum_s T_s'^2 - C_o$$

$$\therefore SQt' = 162,8630$$

$$\begin{aligned} SQ\delta &= \Delta' L^{-1} \Delta - C_o - SQt - SQt' \\ &= \frac{1}{10} \sum_{i,s} (TT')_{is}^2 - C_o - SQt - SQt' \\ &= 181,6670 \end{aligned}$$

$$SQT = Y'Y - C_o = 1937,4400$$

$$SQRes(b) = 458,9760$$

5.4.2 - Testes de hipóteses e quadros de análise

Obteve-se, então, o seguinte quadro para a análise de variância:

Causa da Variação	Graus de liberdade	Somas de quadrados	Quadrados médios	F(observado)
Grupos	4	126,3940	31,5985	2,25
BL/Gru	10	87,5110	8,7511	0,62
Trat.(aj.): t	5	339,7625	67,9525	4,83**
Resíduo (a)	40	580,2665	14,0667	
<hr/>				
Parcelas	(59)	(11 33,9340)		
<hr/>				
Trat.: t'	2	162,8630	81,4315	19,16**
t x t'	10	181,6670	18,1667	4,27**
Resíduo (b)	108	458,9760	4,2498	
<hr/>				
Total	179	1937,4400		

que forneceu evidências para a rejeição de $H_0(1)$, $H_0(2)$ e $H_0(3)$; ao nível de 1% de probabilidade. Concluiu-se, então, pela existência de efeito diferencial significativo entre tratamentos principais, entre tratamentos secundários e efeito significativo da interação δ , respectivamente.

De acordo com (4.6.6), a rejeição de $H_0(3)$ motivou, segundo PIMENTEL GOMES (1976), a aplicação dos testes para $H_0(2.i)$, resultando:

Causa da Variação	Graus de liberdade	Somas de quadrados	Quadrados médios	F(observado)
Grupos	4	126,3940	31,5985	2,25
Bl/Gru	10	87,5110	8,7511	0,62
Trat.(aj.): t	5	339,7625	67,9525	4,83**
Resíduo (a)	40	580,2665	14,0667	
<hr/>				
Parcelas	(59)	(1133,9340)		
<hr/>				
t'/t_1	2	7,1687	3,5843	0,84
t'/t_2	2	13,8130	6,9065	1,62
t'/t_3	2	224,6660	112,3330	26,43**
t'/t_4	2	69,9260	34,9630	8,23**
t'/t_5	2	20,0540	10,0270	2,36
t'/t_6	2	8,9007	4,4503	1,05
Resíduo (b)	108	458,9760	4,2498	
<hr/>				
Total	179	1937,4400		

rejeitando-se, desse modo, as hipóteses $H_0(2.3)$ e $H_0(2.4)$, ao nível de 1% de probabilidade.

5.5 - Comparações Múltiplas

Segundo (4.6.7), dadas as rejeições das três hipóteses básicas: $H_0(1)$, $H_0(2)$ e $H_0(3)$, foram efetuadas as comparações múltiplas, como a seguir.

5.5.1 - Entre médias de efeitos estimados de tratamentos principais

Foram tomados os contrastes $\hat{\gamma}_1(i, i') = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$, e determinadas, segundo (A.86)

$$D.M.S. (5\%) = (4, 23) \left[(4)(14,0667)/(108) \right]^{1/2} = 3,05$$

$$D.M.S. (1\%) = (5, 11) \left[(4)(14,0667)/(108) \right]^{1/2} = 3,69$$

resultando:

$$\hat{\gamma}_1(1, 2) = 0,99$$

$$\hat{\gamma}_1(1, 3) = 1,49 \quad \hat{\gamma}_1(2, 3) = 0,50$$

$$\hat{\gamma}_1(1, 4) = 1,83 \quad \hat{\gamma}_1(2, 4) = 0,84 \quad \hat{\gamma}_1(3, 4) = 0,34$$

$$\hat{\gamma}_1(1, 5) = 2,14 \quad \hat{\gamma}_1(2, 5) = 3,13^* \quad \hat{\gamma}_1(3, 5) = 3,63^* \quad \hat{\gamma}_1(4, 5) = 3,97^{**}$$

$$\hat{\gamma}_1(1, 6) = 0,25 \quad \hat{\gamma}_1(2, 6) = 0,74 \quad \hat{\gamma}_1(3, 6) = 1,24 \quad \hat{\gamma}_1(4, 6) = 1,58 \quad \hat{\gamma}_1(5, 6) = 2,39$$

5.5.2 - Entre médias de efeitos estimados de tratamentos secundários

Para os contrastes $\hat{\gamma}_2(s, s') = \hat{m}_s - \hat{m}_{s'}$, foram obtidas, segundo (A.87):

$$D.M.S. (5\%) = 3,37 \left[(4,2498)/(60) \right]^{1/2} = 0,90$$

$$D.M.S. (1\%) = 4,22 \left[(4,2498)/(60) \right]^{1/2} = 1,12$$

resultando

$$\hat{\gamma}_1(1,2) = 0,61$$

$$\hat{\gamma}_1(1,3) = 1,64^{**} \quad \hat{\gamma}_2(2,3) = 2,25^{**}$$

5.5.3 - Entre médias de efeitos estimados de tratamentos secundários, dentro do i-ésimo tratamento principal

Para os contrastes do tipo $\hat{\gamma}_{3,i}(s,s') = \hat{m}_{is} - \hat{m}_{is'}$, foram obtidas, segundo ($\alpha.88$):

$$D.M.S. (5\%) = 3,37 \left[(1/10) \left(1 - \frac{1}{6}\right) (4,2498) \right]^{1/2} = 2,00$$

$$D.M.S. (1\%) = 4,22 \left[(1/10) \left(1 - \frac{1}{6}\right) (4,2498) \right]^{1/2} = 2,51$$

resultando:

i=1

$$\hat{\gamma}_{3,1}(1,2) = 0,38 \quad \hat{\gamma}_{3,1}(1,3) = 1,09 \quad \hat{\gamma}_{3,1}(2,3) = 0,71$$

i=2

$$\hat{\gamma}_{3,2}(1,2) = 0,13 \quad \hat{\gamma}_{3,2}(1,3) = 1,37 \quad \hat{\gamma}_{3,2}(2,3) = 1,50$$

i=3

$$\hat{\gamma}_{3,3}(1,2) = 0,05 \quad \hat{\gamma}_{3,3}(1,3) = 5,75^{**} \quad \hat{\gamma}_{3,3}(2,3) = 5,78^{**}$$

i=4

$$\hat{\gamma}_{3,4}(1,2) = 1,12^{**} \quad \hat{\gamma}_{3,4}(1,3) = 2,53^{**} \quad \hat{\gamma}_{3,4}(2,3) = 3,65^{**}$$

$$i=5$$

$$\hat{\gamma}_{3,5}(1,2) = 1,09* \quad \hat{\gamma}_{3,5}(1,3) = 0,91* \quad \hat{\gamma}_{3,5}(2,3) = 2,00**$$

$$i=6$$

$$\hat{\gamma}_{3,6}(1,2) = 0,91* \quad \hat{\gamma}_{3,6}(1,3) = 0,39 \quad \hat{\gamma}_{3,6}(2,3) = 1,30*$$

5.5.4 - Entre médias de efeitos estimados de tratamentos principais dentro do s-ésimo tratamento secundário

Para os contrastes $\hat{\gamma}_{i,s}(i,i') = \hat{m}_{i,s} - \hat{m}_{i',s}$, foram obtidas, segundo (α.89):

$$D.M.S.(5\%) = 4,11 \left[(1/10) \left(1 - \frac{1}{3} \right) 4,2498 \right]^{1/2} = 2,19$$

$$D.M.S.(1\%) = 4,90 \left[(1/10) \left(1 - \frac{1}{3} \right) 4,2498 \right]^{1/2} = 2,61$$

resultando:

$$s=1$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{4,1}(1,2) &= 0,02 \\ \hat{\gamma}_{4,1}(1,3) &= 1,03 \quad \hat{\gamma}_{4,1}(2,3) = 1,05 \\ \hat{\gamma}_{4,1}(1,4) &= 0,80 \quad \hat{\gamma}_{4,1}(2,4) = 0,78 \quad \hat{\gamma}_{4,1}(3,4) = 1,83 \\ \hat{\gamma}_{4,1}(1,5) &= 2,64** \quad \hat{\gamma}_{4,1}(2,5) = 2,66** \quad \hat{\gamma}_{4,1}(3,5) = 1,61 \quad \hat{\gamma}_{4,1}(4,5) = 3,44** \\ \hat{\gamma}_{4,1}(1,6) &= 0,14 \quad \hat{\gamma}_{4,1}(2,6) = 0,16 \quad \hat{\gamma}_{4,1}(3,6) = 0,89 \quad \hat{\gamma}_{4,1}(4,6) = 0,94 \quad \hat{\gamma}_{4,1}(5,6) = 2,50* \end{aligned}$$

$$s=2$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{4,2}(1,2) &= 0,37 \\ \hat{\gamma}_{4,2}(1,3) &= 0,50 \quad \hat{\gamma}_{4,2}(2,3) = 0,87 \\ \hat{\gamma}_{4,2}(1,4) &= 0,16 \quad \hat{\gamma}_{4,2}(2,4) = 0,21 \quad \hat{\gamma}_{4,2}(3,4) = 0,66 \\ \hat{\gamma}_{4,2}(1,5) &= 3,25** \quad \hat{\gamma}_{4,2}(2,5) = 3,62** \quad \hat{\gamma}_{4,2}(3,5) = 2,75** \quad \hat{\gamma}_{4,2}(4,5) = 3,41** \\ \hat{\gamma}_{4,2}(1,6) &= 0,57 \quad \hat{\gamma}_{4,2}(2,6) = 0,94 \quad \hat{\gamma}_{4,2}(3,6) = 0,07 \quad \hat{\gamma}_{4,2}(4,6) = 0,73 \quad \hat{\gamma}_{4,2}(5,6) = 2,68** \end{aligned}$$

$$s=3$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{4,3}(1,2) &= 2,58* \\ \hat{\gamma}_{4,3}(1,3) &= 5,99** \quad \hat{\gamma}_{4,3}(2,3) = 3,41** \\ \hat{\gamma}_{4,3}(1,4) &= 4,52** \quad \hat{\gamma}_{4,3}(2,4) = 1,94 \quad \hat{\gamma}_{4,3}(3,4) = 1,47 \\ \hat{\gamma}_{4,3}(1,5) &= 0,54 \quad \hat{\gamma}_{4,3}(2,5) = 3,12** \quad \hat{\gamma}_{4,3}(3,5) = 6,53** \quad \hat{\gamma}_{4,3}(4,5) = 5,06** \\ \hat{\gamma}_{4,3}(1,6) &= 1,44 \quad \hat{\gamma}_{4,3}(2,6) = 1,14 \quad \hat{\gamma}_{4,3}(3,6) = 4,55** \quad \hat{\gamma}_{4,3}(4,6) = 3,08** \quad \hat{\gamma}_{4,3}(5,6) = 1,98 \end{aligned}$$

6. CONCLUSÕES

Considerando-se os objetivos deste estudo, citados em (1.2) julgou-se desejável que as conclusões se dessem em termos de comparações dos resultados aqui obtidos, com aqueles encontrados na literatura para ensaios em blocos incompletos balanceados e/ou ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados.

Sob esse aspecto, de modo geral concluiu-se

6.1 - Em Relação ao Modelo Matemático

O modelo matemático tradicionalmente utilizado para experimentos com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados, foi adotado para o delineamento proposto neste estudo, sem apresentar desvantagens aparentes, mormente quando se desejou testar as hipóteses básicas de nulidade sobre os tratamentos princi-

país, os tratamentos secundários e a interação tt' .

6.2 - Em Relação ao Sistema de Equações Normais

O sistema de equações normais, obtido através do método dos mínimos quadrados:

- i) portou-se de modo análogo aos ensaios em blocos incompletos balanceados, quando das estimativas para efeitos de tratamentos principais ajustados para efeitos de blocos;
- ii) portou-se como nos ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados, quando das estimativas para efeitos de tratamentos secundários e interação.

6.3 - Em Relação às Variâncias das Funções Lineares Estimáveis

O estudo das variâncias das funções lineares estimáveis, através das matrizes de dispersão determinadas neste estudo, para os parâmetros básicos, realçou as conclusões de 6.2, isto é:

- i) a variância obtida para contrastes entre médias de tratamentos principais, mostrou-se semelhante àquelas obtidas para contrastes entre médias de tratamentos, nos ensaios em blocos incompletos balanceados;
- ii) as variâncias obtidas para contrastes entre médias de tratamentos secundários, entre médias de tratamentos secundá-

rios "dentro" de um mesmo tratamento principal e entre médias de tratamentos principais "dentro" de um mesmo tratamento secundário, foram semelhantes às aquelas encontradas na bibliografia dos ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados.

6.4 - Em Relação à Análise de Variância

6.4.1 - Quadro da análise

A análise de variância para ensaios como o aqui proposto, mostrou-se divisível em duas análises independentes:

- i) a primeira envolvendo blocos, tratamentos principais e o resíduo (a). Nesta análise, que é semelhante às análises de ensaios em blocos incompletos balanceados, deve ser considerado o tipo de BIB envolvido;
- ii) a segunda, envolvendo tratamentos secundários, a interação tt' e o resíduo (b), que é semelhante às suas correspondentes em ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados, inclusive na determinação da $SQ_{txt'}$.

6.4.2 - Testes de hipóteses

Os testes das três hipóteses básicas das análises de ensaios em parcelas subdivididas, portaram-se como de modo usual, no tocante aos resíduos adequados, inclusive para os efeitos de trata-

mentos principais ajustados para efeitos de blocos.

Os testes das hipóteses adicionais, com respeito às repetições ou aos grupos, induzidas pelo uso do delineamento incompleto, portaram-se como nos ensaios em blocos incompletos balanceados.

6.5 - Em Relação às Comparações Múltiplas

O uso do teste de Tukey, com base nas variâncias dos contrastes citados em (6.3), permitiu concluir pela coerência com os resultados anteriores: o procedimento usado para as comparações múltiplas entre tratamentos principais mostrou-se análogo ao procedimento usual dos ensaios em blocos incompletos balanceados, enquanto que as demais comparações seguiram os princípios dos ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados.

Ademais, face aos resultados obtidos, concluiu-se que se $a=r$, onde a representa o número de blocos e r o número de repetições, recai-se sobre a teoria dos ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados, que ficaram caracterizados como casos particulares do delineamento proposto.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRADLEY, R.A.; R.E. WALPOLE e C.Y. KRAMER, 1960. Intra and Inter Block Analysis for Factorials in Incomplete Block Designs. Biometrics, Raleigh, 16: 566-581.

CALZADA BENZA, J., 1970. Métodos Estadísticos para la Investigación. 3.^a ed., Editorial Jurídica, Lima, Peru, 643 pp.

CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. 1.^a ed. Asia Publishing House, Londres, 120 pp.

COCHRAN, W.G., 1951. Testing a Linear Relation Among Variances. Biometrics, Raleigh, 7: 17-32.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1976. Diseños Experimentales. 3.^a ed. Trillas, México, 661 pp.

DANFORD, M.B.; H.M. HUGHES e R.C. McNEE, 1960. On the Analysis of Repeated-Measurements Experiments. Biometrics, Raleigh, 16: 547-565.

DEY, A., 1975. A Note on Balanced Designs. Sankyā, Calcutā, 37: 461-462.

DINIZ, U.D., 1980. Análise de Experimentos com Parcelas Medidas Sucessivamente no Tempo. ESALQ/USP, Piracicaba, 104 pp. (Tese de Doutorado).

FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design. 1.^a ed., McMillan Co., Nova York, 544 pp.

GILL, L.G., 1978. Design and Analysis of Experiments in the Animal and Medical Sciences. The Iowa State University Press. 1.^a ed. Ames, 3 vol. 882 pp.

GILL, J.L. e H.D. HAFS, 1971. Analysis of Repeated Measurements of Animals. J. An. Sci., Albany, 33: 331-336.

GOULDEN, C.H., 1939. Methods of Statistical Analysis. 1.^a ed. Wiley, Nova York, 277 pp.

GRAYBILL, F.A., 1976. Theory and Application of the Linear Model. 1.^a ed., Duxbury Press, Massachusetts, 703 pp.

HARTER, H.L., 1961. On the Analysis of Split-Plot Experiments. Biometrics, Raleigh, 18: 144-149.

HICKS, C.R., 1973. Fundamental Concepts in the Design of Experiments. 2.^a ed. Holt, Rinehart and Winston Co., Nova York, 349 pp.

KEMPTHORNE, O., 1950. The Design and Analysis of Experiments. 1.^a ed. Wiley, Nova York, 473 pp.

- LEAL, M.L.S., 1979. Análise de Dados Experimentais com Medidas Repetidas. Universidade Federal de Brasília, Brasília, 99 pp. (Dissertação de Mestrado).
- LEONARD, W.H. e A.G. CLARK, 1939. Field Plot Technique. Burgess. Minneapolis, 288 pp.
- LITTLE, T.M. e F.J. HILLS, 1972. Statistical Methods in Agricultural Research. 1.^a ed., Univ. of California Press, Davis, 242 pp.
- LI, S.H. e J.H. KLOTZ, 1978. Components of Variance Estimation for the Split-Plot Design. J.A.S.A., 73: 147-152.
- MORRISON, D.F., 1976. Multivariate Statistical Methods. 2.^a ed. McGraw Hill, Nova York, 415 pp.
- PIMENTEL GOMES, F., 1967. The Solution of Normal Equations of Experiments in Incomplete Blocks. Ciência e Cultura, São Paulo, 20: 733-746.
- PIMENTEL GOMES, F., 1976. Curso de Estatística Experimental. 6.^a ed. Nobel, Piracicaba, 430 pp.
- PURI, P.D., 1975. A Note on Efficiency Balanced Design. Sankyā, Calcutā, 37: 457-460.
- RAGHAVARAO, D., 1971. Combinatorial Problems in Design of Experiments. 1.^a ed. Willey, Nova York, 386 pp.
- RAO, R., 1967. Least Squares Theory Using An Estimated Dispersion Matrix and Its Application to Measurement of Signals. Fifth Berk. Symp. V. 1.
- REES, D.H., 1969. The Analysis of Variance of Some Non Ortogonal Designs With Split-Plots. Biometrika, Londres, 56: 43-54.

- ROBINSON, J., 1966. Balanced Incomplete Block Designs with Double Grouping of Blocks Into Replications. Biometrics, Raleigh, 22: 368-373.
- ROBINSON, J., 1967. Incomplete Split Plot Designs. Biometrics, Raleigh, 23: 793-802.
- SCHEFFÉ, H., 1959. The Analysis of Variance. 1^a ed., Willey, Nova York, 477 pp.
- SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. 1^a ed., Willey, Nova York, 531 pp.
- SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1969. Statistical Methods. 6^a ed. The Iowa State University Press, Ames, 593 pp.
- STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. 1^a ed. McGraw-Hill, Londres, 481 pp.
- TAYLOR, J., 1950. The Comparison of Pairs of Treatments in Split-Plot Experiments. Biometrika, Londres, 37: 443-444.
- TAYLOR, W.B., 1957. Incomplete Block Designs with row balanced and recovery of inter-block information. Biometrics, Raleigh, 13:1-12.