ANÁLISE DE FATORES (“FACTOR ANALYSIS”) PELO MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA: aplicação ao estudo da estrutura de florestas tropicais

WALDENEI TRAVASSOS DE QUEIROZ

Eng^o-Flor. - FCAP/MEC

Orientador : Dr. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Fevereiro - 1984

A Deus

OFEREÇO

À minha esposa Izabel e aos meus
filhos Anderson e Alex.

Ao meu pai e irmãos

DEDICO

AGRADECIMENTOS

- À Faculdade de Ciências Agrárias do Pará (FCAP/MEC) e à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" (ESALQ/USP), pela concessão da oportunidade para realização do curso.
- Ao Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, de um modo especial, pelo incentivo, amizade e dedicação na orientação deste trabalho.
- Ao Dr. Humberto de Campos, coordenador do curso de Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, por sua acolhida e amizade.
- Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelos ensinamentos recebidos.
- Ao Dr. Vivaldo Francisco da Cruz e ao Engenheiro Florestal Valter João Diehl, pela disposição na elucidação das dúvidas na elaboração dos programas computacionais.
- Ao Dr. Hilton Thadeu Zarate do Couto, pelas sugestões e amizade.
- Aos companheiros de Curso de Pós-Graduação, pelo Convívio.

- À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior, pela bolsa concedida que proporcionou a realização do curso.
- Ao Extinto Projeto de Desenvolvimento e Pesquisa Florestal (PNUD/FAO/IBDF/BR-45), pelo suporte financeiro alocado para os trabalhos de coleta de informações de campo no ano de 1975.
- Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelas disponibilidades e amizade.
- À Srta. Rosa Maria Alves pelo excelente trabalho de datilografia, e aos colegas e amigos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho.
- À minha família e à cunhada Lindalva pelo amor, paciência e dedicação.

Í N D I C E

	Pág.
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE FIGURAS	ix
CURRICULUM VITAE	x
RESUMO	xi
SUMMARY	xiii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Natureza e importância do problema	1
1.2. Objetivos	2
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
3. MATERIAL	9
3.1. Características do povoamento florestal	9
3.1.1. Localização	9
3.1.2. Clima, solo e topografia	9
3.1.3. Características da floresta	10
3.1.4. Estrutura de amostragem	11
3.1.5. Equação de volume	13
3.1.6. Definição do vetor $\underline{x}$ (variáveis respostas)	14
4. MÉTODO	15
4.1. Considerações gerais	15
4.2. Análise de fatores: Definições	18
4.3. Método da máxima verossimilhança	22

4.3.1. Desenvolvimento teórico	22
4.3.2. Procedimento iterativo para obter as estimativas dos pesos fatoriais ($\hat{A}$) e variâncias específicas ($\hat{\Psi}$)	35
4.3.3. Caso de variáveis sem componente residual	41
4.3.4. Teste de hipótese	43
4.3.5. Estimação dos escores fatoriais	46
4.3.6. Metodologia dos índices normalizados	48
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	50
5.1. Matriz das correlações das variáveis respostas	50
5.2. Estimativas de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais $\hat{A}$ e variâncias específicas $\hat{\Psi}$	50
5.3. Estimativas dos escores dos fatores	52
5.4. Interpretação dos fatores	53
5.5. Mapeamento com respeito aos índices normalizados	56
5.6. Experiências com outros procedimentos iterativos	58
6. CONCLUSÕES	60
7. LITERATURA CITADA	65
8. TABELAS E FIGURAS	69
9. APÊNDICE I - Códigos, classes de importância, nomes vulgares e científicos, família botânica das espécies encontradas ..	81
10. APÊNDICE II - Matriz dos dados	91
11. APÊNDICE III - Valores dos escores fatoriais	94

12. APÊNDICE IV - Valores dos índices normalizados condensan-	
do todos os fatores	97
13. APÊNDICE V - Listagens do programa principal e subrotinas	
utilizadas em linguagem FORTRAN	99
14. APÊNDICE VI - Diferenciação de matrizes	107

LISTA DE TABELAS

Tabela nº		Pág.
1	Matriz de correlação das variáveis respostas.....	70
2	Estimativas de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais $\hat{A} = [\hat{a}_{\sim j}]$ e variâncias específicas $\hat{\Psi}$ (soluções impróprias)	70
3	Valores das derivadas parciais de primeira ordem e da função $f_m(\Psi)$ após 30 iterações	71
4	Estimativas de máxima verossimilhança dos pesos dos fatores $\hat{A} = [\hat{a}_{\sim j}]$ e variâncias específicas $\hat{\Psi}$ (solução final)	71
5	Coeficientes dos escores fatoriais $(\hat{A}\hat{A}' + \hat{\Psi})^{-1}\hat{A}$	72
6	Estimativas das médias (estratificação pelo fator 1)	72
7	Estimativas das médias (estratificação pelo fator 2)	73
8	Estimativas das médias (estratificação pelo fator 3) ...	73
9	Estimativas das médias (estratificação pelo fator 4) ...	74
10	Estimativas das médias (estratificação pelos índices normalizados considerando todos os fatores)	74
11	Estimativas das médias (estratificação pelos índices normalizados considerando os fatores 2, 3 e 4)	75

LISTA DE FIGURAS

Figura nº		Pág.
1	Posição geográfica da floresta estudada	76
2	Caracterização espacial da unidade amostral con- glomerada	76
3	Croqui da área florestal inventariada	77
4	Mapa caracterizando a estratificação pelo fator 1	78
5	Mapa caracterizando a estratificação pelo fator 2	78
6	Mapa mostrando a estratificação pelo fator 3	79
7	Mapa evidenciando a estratificação pelo fator 4	79
8	Mapa evidenciando a estratificação pelos índices normalizados considerando todos os fatores	80

CURRICULUM VITAE

WALDENEI TRAVASSOS DE QUEIROZ, filho de Wagner Marques de Queiroz e Erecina Travassos de Queiroz, nasceu a 26 de fevereiro de 1950 em Belém, Pará. Em 1973 concluiu o Curso de Graduação em Engenharia Florestal pela Universidade Federal do Paraná (U.F.P.). Em fevereiro de 1974 foi contratado pelo Projeto RADAMBRASIL para exercer atividades técnicas em inventários florestais. Em 1975 foi contratado pelo Projeto de Desenvolvimento e Pesquisa Florestal (PNUD/FAO/IBDF/BR-45) para exercer função de Contraparte Nacional de Inventário Florestal. Em 1977 concluiu o Curso de Mestrado em Manejo Florestal pela Universidade Federal do Paraná, apresentando o trabalho de Dissertação de título: Efeitos da Variação Estrutural em Unidades Amostrais na Aplicação do Processo de Amostragem em Conglomerados nas Florestas do Planalto do Tapajós. Em 1977 foi contratado pela Faculdade de Ciências Agrárias do Pará (FCAP) como Professor do Curso de Engenharia Florestal para ministrar as disciplinas de Biometria e Inventário Florestal. Nessa FCAP, exerceu os cargos de Chefe do Departamento Florestal e Coordenações dos Cursos de Graduação em Engenharia Florestal e Pós-Graduação a nível de Especialização em Silvicultura e Exploração de Florestas Tropicais. Desde 1979 pertence à Comissão encarregada de traçar diretrizes básicas para o estabelecimento de um Sistema Nacional de Avaliação dos Recursos Florestais do País - Inventário Florestal - IBDF. Em março de 1981 iniciou o curso de Doutorado em Estatística e Experimentação Agrônômica na ESALQ/USP. Possui vários trabalhos publicados no setor de inventário aplicado ao estudo de florestas naturais.

ANÁLISE DE FATORES ("FACTOR ANALYSIS") PELO
MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA: Aplicação
ao Estudo da Estrutura de Florestas Tropicais

Autor: WALDENEI TRAVASSOS DE QUEIROZ

Orientador: Dr. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

RESUMO

Estudou-se a operacionalidade do estabelecimento do método da máxima verossimilhança na análise de fatores, direcionando-o com o fim de caracterizar em detalhes a estrutura de um povoamento florestal tropical de 5.324,04 hectares, localizado na Floresta Nacional do Tapajós.

A floresta foi dividida em 51 subpopulações de 104,04 hectares cada uma, nas quais implantou-se uma unidade conglomerada composta de quatro subunidades de 1 (um) hectare cada. Mediu-se nas subunidades as seguintes características:

ALT : altura comercial média (m)

VOLT: volume total sem casca (m^3/ha)

DAP : diâmetro a 1,30 m do solo

VOL1: volume sem casca (m^3/ha) das espécies com mercado de exportação definido.

VOL2: volume sem casca (m^3/ha) das espécies estabelecidas no mercado nacional.

VOL3: volume sem casca (m^3/ha) das espécies ocasionalmente empregadas no mercado local e as de valor potencial.

A partir das interpretações dos pesos dos fatores ortogonais relativos à matriz de correlações, concluiu-se sobre os efeitos das características envolvidas e suas interrelações. Outrossim, com base no significado florestal dos fatores produziu-se mapas, os quais, trazem informações importantes que poderão orientar o planejamento de diversas atividades florestais, principalmente no que concerne à elaboração de planos de explorações madeireiras.

No referente à obtenção de mapas construídos a partir de uma pós-estratificação multidimensional, através da aplicação da metodologia dos índices normalizados definidos como o módulo da resultante da soma vetorial dos escores dos fatores ponderados pela contribuição de cada fator à comunalidade total, mostrou-se consistente, eficiente e operacional.

Aspectos relevantes sobre amostragens são abordados no sentido de atender aos objetivos de caracterizar realmente a estrutura da floresta tropical.

Em face da inexistência de "pacotes" do método da máxima verossimilhança da análise de fatores nestes estudos, apresentou-se o desenvolvimento teórico e um programa em FORTRAN operacionalmente preciso e otimizado quanto ao tempo de execução.

FACTOR ANALYSIS BY MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION

METHOD: An Application on the Study of the Structure of a Tropical Forest

Author: WALDENEI TRAVASSOS DE QUEIROZ

Adviser: Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi

SUMMARY

An algorithm for maximum likelihood estimation method was implemented based on Newton-Raphson numerical method in Factor Analysis directed to characterize in detail the structure of a tropical forest of 5.324,04 ha, located at Tapajós National Forest.

The forest was divided in 51 subpopulations of 104,04 ha each, where clustered samples were established composed of four subunits of 1 ha each. The following data were collected:

ALT : averaged commercial height (m^3/ha)

VOLT: total barkless volume (m^3/ha)

DAP : 1,30 m from ground diameter

VOL1: barkless volume of export commercial class (m^3/ha)

VOL2: barkless volume of national commercial class (m^3/ha)

VOL3: barkless volume of local and potentially valuable class (m^3/ha)

From the orthogonal factor weights with respect to the correlations matrix, conclusions were obtained about the importance of the observable variables and their interrelations. Furthermore, based on the forest interpretations of the factors, charts were designed to classify the subunits in view of the planning of forest management, specially with respect to those activities related to wood exploitation.

In designing the charts the multidimensional normalized index was used as a criterion of unit classification, defined as the norm of the vector resultant of the individual factor scores, weighted by the corresponding part of the total communality.

Relevant aspects about sampling are treated with the scope of a real characterization of the tropical forest structure.

In view of the inexistence of confiable "packages" with detailed description of the calculation programs of the maximum likelihood method in factor analysis, the theoretical methodology and FORTRAN programs are included with complete data description and detailed examples exhibited.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Natureza e importância do problema

Os inventários florestais efetuados na região Amazônica geralmente produzem mapas tipológicos alicerçados sob uma estratificação estabelecida mediante pré interpretação de foto-coberturas, as quais, muitas vezes, não correspondem aos tipos florestais existentes. Esta situação se verifica particularmente no uso de imagens radar ou satélite.

As fotos radar e satélite, muitas vezes, geram interpretações que conduzem a definição de estratos que abrangem mais de um tipo florestal e normalmente nem permitem distinguir e definir os limites espaciais entre tipos florestais diferentes. Seguramente, essas imagens não oferecem subsídios suficientes para atingir-se uma estratificação ótima em função da complexidade da tipologia florestal tropical.

Entrementes, a obtenção de mapas tipológicos através de fotografias aéreas em escala ideal (1 : 10.000 a 1 : 5000) seria extremamente oneroso .

É notório que até o momento não se verificou na Amazônia brasileira, nenhuma aplicação a nível operacional de sistemas de manejo auto-sustentado, dirigida para comprovação da viabilidade econômica e em consequência, pode-se afirmar que não existem inventários florestais que atendam objetivamente esse propósito.

Inventários florestais delineados a atender à planificação de técnicas de manejo florestal de rendimento auto-sustentado, obrigatoriamente devem sintetizar e explicar todas as variáveis que compõem a estrutura florestal, e concluir sobre as suas interrelações. Assim, devem ser considerados na análise os segmentos fito-sociológicos, as dinâmicas de crescimento das espécies e a associação entre os aspectos ecológicos e econômicos.

Do exposto, surge a necessidade do estabelecimento de metodologias eficientes e não onerosas visando caracterizar em detalhes a estrutura das florestas tropicais, instrumento obrigatório para o planejamento de qualquer projeto de manejo auto-sustentado.

1.2. Objetivos

Devido ao número de variáveis requeridas para tornar possível caracterizar a estrutura das florestas tropicais, as quais estão interrelacionadas, depreende-se que conclusões adequadas só serão factíveis se essas informações multidimensionais forem investigadas sob os aspectos da análise estatística multivariada.

Preocupou-se em desenvolver um trabalho operacionalmente dirigido para ser entendido e utilizado por especialistas em manejo de florestas tropicais. Assim, os objetivos primordiais a serem desenvolvidos nesta pesquisa são:

1.2.1. Apresentar os fundamentos teóricos do método da máxima verossimilhança da análise de fatores, tornando-o viável computacionalmente.

1.2.2. Estabelecer metodologia de pós-estratificação multidimensional fundamentada na análise de fatores (método da máxima verossimilhança) para um conjunto de características florestais, visando a obter mapas tipológicos para um povoamento de 5.324,04 hectares, localizado na região do planalto da Floresta Nacional do Tapajós.

1.2.3. Apresentar recomendações sobre técnicas de amostragem adequadas e propor próximas pesquisas para solucionar satisfatoriamente os problemas centrais expostos.

2. REVISÃO DE BIBLIOGRAFIA

SPEARMAN (1904) apresenta pela primeira vez uma teoria sobre análise de fatores. O autor obtém um fator "g". A variável hipotética "g" explicaria as interrelações de uma série de características congênitas.

BARTLETT (1962) observa que a fatoração da matriz de dispersão proposta por SPEARMAN (1904) apresenta-se inadequada, pois, configura somente um fator comum, quando na realidade deveriam ser introduzidos mais fatores comuns no modelo.

LAWLEY (1940) aborda originalmente o problema da estimação na análise de fatores, tornando-a um método estatístico propriamente dito. O autor emprega o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo fatorial $\underline{x} = A\underline{f} + \underline{e}$, mostrando que as estimativas dos pesos fatoriais ($\hat{A}$) e as estimativas das variâncias específicas $\hat{\Psi}$ onde,

$$E(\underline{e} \underline{e}') = \Psi$$

são soluções das seguintes equações matriciais implícitas:

$$\hat{\Psi} = \text{diag}(S - \hat{A}\hat{A}') \quad \text{e} \quad S \hat{\Psi}^{-1} \hat{A} = \hat{A}(\mathbf{I} + \hat{A}' \hat{\Psi}^{-1} \hat{A})$$

$$S = {}_p \begin{bmatrix} s_{ij} \end{bmatrix}_p : \text{matriz de covariâncias amostrais de } \underline{x}.$$

Demonstra também que

$$\log_e \frac{|\Psi + AA'|}{|S|}$$

é aproximadamente a soma de quadrados dos seguintes resíduos:

$$\sum_{i < j} \sum \frac{(s_{ij} - \sigma_{ij})^2}{\psi_i \psi_j}$$

onde:

$$\sigma_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih} a_{jh} \quad (i \neq j)$$

$$A = {}_p \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_m$$

s_{ij} : é a covariância ou correlação entre as variáveis respostas x_i e x_j .

O teste estatístico aproximado obtido pelo autor para verificar se o número de fatores m está adequado para o modelo fatorial é:

$$\chi^2 = \left[N - 1 - \frac{1}{6} (2p + 5) - \frac{2}{3} m \right] \sum_{i < j} \frac{(S_{ij} - \sigma_{ij})^2}{\psi_i \psi_j}$$

A referida estatística possui distribuição assintótica idêntica a:

$$\chi^2 = \left[N - 1 - \frac{1}{6} (2p + 5) - \frac{2}{3} m \right] \log_e \frac{|\Psi + AA'|}{|S|}$$

N : número de observações.

LAWLEY (1942, 1943) apresenta um método iterativo para resolução das equações matriciais implícitas de máxima verossimilhança. Tal procedimento, contudo possui fraca convergência e pouca precisão. O método proposto é inicializado a partir de pesos fatoriais arbitrários e caso sejam mal escolhidos comprometem a eficiência do procedimento.

HARMAN (1976) indica que os pesos fatoriais computados pelo método matemático de "MINRES" poderão ser bons iniciadores para o método de LAWLEY (1942, 1943).

Também introduz uma modificação no método de LAWLEY (1942). O autor não descarta meramente os elementos fora da diagonal da matriz $\Lambda = A'\Psi^{-1}A$, mas a diagonaliza.

RAO (1955) e MAXWELL (1964) adotam um procedimento para a resolução numérica das equações matriciais de máxima verossimilhança com boa propriedade de convergência. O procedimento está descrito em detalhes em MORRISON (1976).

JÖRESKOG (1963) justifica, e a prática tem demonstrado, que a utilização nos processos iterativos das variâncias específicas iniciais calculadas pela expressão abaixo, reduzem o número de iterações necessárias para atingir-se a convergência.

$$\psi_i = \frac{1}{s_{ii}} \left(1 - \frac{m}{2p} \right)$$

onde:

s_{ii} : i-ésimo elemento diagonal da matriz S^{-1} . ($i = 1, \dots, p$)

m : número de fatores.

p : número de variáveis.

JÖRESKOG (1966) desenvolve um método computacional iterativo com boa convergência para resolução das equações matriciais implícitas de máxima verossimilhança.

BARTLETT (1937, 1938) apresenta um método para avaliação dos escores fatoriais através da minimização da soma de quadrados dos resíduos padronizados com respeito aos elementos de $\tilde{f}$. Ou seja,

$$\sum_{i=1}^p \frac{e_i^2}{\psi_i} = \underline{e}' \Psi^{-1} \underline{e} = (\underline{x} - A\tilde{f})' \Psi^{-1} (\underline{x} - A\tilde{f})$$

onde, diferenciando com respeito a $\tilde{f}$ e igualando a zero, resulta:

$$\tilde{f} = \Delta^{-1} A' \Psi^{-1} \underline{x} \quad \Delta = A' \Psi^{-1} A$$

FACHEL (1976) cita um estudo de autoria do Eng^o Nicolas Botto Corrêa, da SERETE ENGENHARIA, SP, o qual utiliza com pleno êxito o método do fator principal de análise de fatores na hierarquização de 98 municípios do Estado de Minas Gerais, visando estabelecer as regiões prioritárias em termos de investimento em saneamento básico.

O critério de classificação dos municípios ficou estabelecido através da construção de um índice definido como o módulo da resultante da soma vetorial dos escores fatoriais em cada município, ponderados pela contribuição dos respectivos fatores à comunalidade total.

3. MATERIAL

3.1. Características do povoamento florestal

3.1.1. Localização

Conforme mostra a figura 1 o povoamento florestal, objeto desta pesquisa, localiza-se na Floresta Nacional do Tapajós, no Município de Santarém, Estado do Pará. Inicia-se a 1500 metros do km 62 da rodovia BR-165 no sentido leste-oeste, estendendo-se no sentido norte-sul até o ponto localizado a 3,3 km no sentido leste-oeste do km 73 aproximadamente, abrangendo uma área de 5.324,04 ha.

3.1.2. Clima, solo e topografia

Segundo LIMA e SANTOS (1976), o clima da região, de acordo com a classificação de Köppen, insere-se no grupo A englobando os tipos climáticos Afi, Ami e Awi. Esse grupo é caracterizado por climas tropi-

picais úmidos, sem estação fria e com temperatura quente de baixa amplitude anual, onde a mínima média mensal anual é 16°C e a máxima média mensal anual é 34°C. A umidade relativa média gira em torno de 31% e o índice pluviométrico varia entre 1000 mm a 3600 mm.

De acordo com BRASIL (1977), o solo é do tipo latossolo amarelo distrófico com mais de 70% de argila no horizonte B. O relevo na maior parte da área é predominantemente plano.

3.1.3. Características da floresta

Trata-se basicamente de uma floresta alta e relativamente aberta, apresentando poucas árvores com grandes diâmetros e distribuídas aleatoriamente. Encontram-se, contudo, manchas com estrutura mais fechada e apresentando maior adensamento de árvores pertencentes às classes superiores de diâmetros.

A variação interna do conjunto florestal abrange áreas que fisionomicamente se aproximam estruturalmente às matas com árvores emergentes. Há ocorrências de pequenas manchas de matas cipoálicas que provavelmente são representativas de estágios dinâmicos.

CARVALHO (1982) afirma que na área foram processadas explorações seletivas, resultando na extração de espécies de alto valor comercial, tais como o pau rosa (Aniba duckei, Kostermans), o cedro vermelho (Cedrela odorata, L.), a maçaranduba (Manilkara huberi, Standley), empobrecendo a composição florística.

O povoamento florestal congrega árvores com diâmetros (DAP) de até 180 cm e considerando-se árvores com DAP maior ou igual a 30 cm abrange mais de 170 espécies.

As seis espécies que apresentaram os maiores volumes sem casca foram:

ESPÉCIE	VOLUME EM m ³ /ha
<u>Erisma uncinatum</u> , Warm.	10,449
<u>Holopyxidium jarana</u> , Ducke	9,342
<u>Manilkara huberi</u> , Ducke	6,676
<u>Berthollettia excelsa</u> , HBK	6,579
Espécie não identificada (código 84)	6,295
<u>Hyminea courbaril</u> , L.	6,040

No apêndice I estão descritos os códigos, classes de importância, nomes vulgares e científicos, família botânica das espécies encontradas.

3.1.4. Estrutura de amostragem

As informações a serem analisadas nesta pesquisa, foram inventariadas pelo autor, quando desenvolvia atividades científicas no Projeto de Desenvolvimento e Pesquisa Florestal (PNUD/FAO/IBDF/BR-45), atualmente vinculado à EMBRAPA.

O povoamento florestal de 5.324,04 hectares foi dividido em 51 subpopulações formando quadrados de 104,04 hectares (unidades primárias). Implantou-se sistematicamente em cada unidade primária uma unidade amostral conglomerada de quatro hectares, agregando quatro subunidades retangulares orientadas na forma de cruz para os sentidos norte-sul e leste-oeste (unidades secundárias). As unidades secundárias apresentam as seguintes dimensões: largura de 20 metros e 500 metros de comprimento. A figura 2 mostra a caracterização espacial da unidade amostral conglomerada.

Para facilitar a visualização mostra-se na figura 3 um croqui da área florestal definindo a localização das subunidades amostrais no conjunto do plano de amostragem. Codificou-se as subunidades por uma numeração em que o primeiro dígito associa-se ao eixo Y, os dois dígitos intermediários relacionam-se ao eixo X, o quarto dígito caracteriza a orientação geográfica da subunidade definidas como: oeste: 1, norte: 2, leste: 3 e sul: 4.

Identificou-se e mensurou-se em todas as subunidades as seguintes características por árvore:

- identificação botânica
- diâmetro a 1,30 m do solo (DAP)
- altura comercial até a primeira bifurcação ou até o diâmetro mínimo de 7 cm.

3.1.5. Equação de volume

As estimativas dos volumes individuais por árvore foram calculadas pela análise de regressão. A equação volumétrica baseou-se na coleta aleatória de 110 árvores, contudo, distribuídas de forma balanceada nas diversas classes de diâmetros de 10 em 10 cm.

Para calcular o volume real sem casca mediu-se os diâmetros com casca de 2 em 2 metros de fuste e, conjuntamente, as respectivas espessuras duplas de casca, DAP com casca e altura comercial. O volume real sem casca, a partir desses dados, foi calculado pelo Método de SMALIAN.

Definindo o volume sem casca como variável dependente V e o DAP com casca ao quadrado multiplicado pela altura comercial como a variável independente, calculou-se a regressão linear simples

$$\hat{V} = \hat{a} + \hat{b}(\text{DAP}^2 H) .$$

Os resultados pelo processo dos mínimos quadrados foram:

$$\hat{a} = 0,0774759688$$

$$\hat{b} = 0,517896768$$

$$R^2 = 0,9652 \text{ (coeficiente de determinação)}$$

$$F = 2994,78 \text{ (teste F da regressão linear) .}$$

3.1.6. Definição do vetor $\underline{x}$ (variáveis respostas)

A partir das informações coletadas no campo e da equação de volume sem casca por árvore, determinaram-se os valores das seguintes variáveis respostas, por subunidade conglomerada:

ALT : altura comercial média, por subunidade.

VOLT: volume total sem casca, por subunidade.

DAP: diâmetro médio com casca, por subunidade.

VOL 1: volume sem casca, por subunidade das espécies pertencentes à classe I, ou sejam, as espécies com mercado de exportação definido segundo QUEIROZ (1977).

VOL 2: volume sem casca por subunidade das espécies pertencentes à classe II, ou sejam, as espécies estabelecidas no mercado nacional segundo QUEIROZ (1977).

VOL 3 : volume sem casca por subunidade das espécies pertencentes à classe III, ou sejam, as espécies ocasionalmente empregadas no mercado local e as de valor potencial segundo QUEIROZ (1977).

No apêndice I, apresentam-se as espécies pertencentes às classes I, II e III.

No apêndice II, incluem-se os respectivos valores dessas variáveis (Matriz dos dados).

4. MÉTODO

4.1. Considerações gerais

Comumente ocorrem nos levantamentos e experimentos, mensurações compostas de várias características obtidas em uma mesma unidade amostral, dificultando a interpretação da pesquisa. Assim, é recomendável uma exploração dos dados visando simplificá-los, porém, conservando ao máximo as informações inerentes às variáveis respostas originais.

Para tratar do problema da diminuição da dimensão do vetor de dados na estatística multivariada, normalmente utilizam-se as técnicas de componentes principais e análise de fatores. Esses métodos visam gerar um número menor de variáveis hipotéticas, combinações lineares das variáveis originais, tal que, mesmo em menor número expliquem adequadamente a interdependência do conjunto original multidimensional dos dados.

Consiste a análise dos componentes principais em: dado um conjunto de variáveis aleatórias obter por transformação linear um número igual de novas variáveis não correlacionadas (componentes principais), tal que a soma das variâncias seja invariante.

Por outro lado, no caso dos primeiros componentes principais explicarem parte significativa da variância total, pode-se então avaliá-los para cada indivíduo ("score") ou unidade de amostra e processá-los nas análises em substituição às variáveis originais.

A análise de fatores estuda as relações internas de um conjunto de variáveis aleatórias, substituindo-as por um número menor de variáveis hipotéticas denominadas fatores, que podem ser correlacionados (fatores oblíquos) ou não correlacionados (fatores ortogonais). Esses fatores devem explicar parte significativa da variância do conjunto das variáveis originais.

Existem algumas similaridades entre as análises de fatores e de componentes principais. Ambas iniciam-se com um modelo linear e encerram-se com a fatoração da matriz de covariâncias ou correlações. Contudo, na análise dos componentes principais a fatoração da matriz é única se todos os componentes de variância são diferentes. Entretanto, na análise de fatores a fatoração da matriz não será única, pois, por transformação ortogonal (rotação) um número infinito de matrizes de pesos fatoriais podem ser obtidas para reproduzir a matriz de covariâncias ou correlações das variáveis respostas.

A equação básica do modelo linear dos componentes principais não possui componente residual, propriedade essa que a diferencia marcadamente da análise de fatores.

Uma grande desvantagem da análise dos componentes principais é que os componentes oriundos da matriz de correlações não são os mesmos computados sob a matriz de covariâncias. Entrementes, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da análise de fatores gozem da importantíssima propriedade: mudança nas escalas das variáveis originais somente implicam modificação na escala dos pesos fatoriais. Particularmente, os valores dos pesos obtidos da matriz de correlações diferem dos pesos computados da matriz de covariâncias pelo fator

$$1/S_i \quad (i = 1, \dots, p)$$

S_i : desvio padrão da variável resposta X_i ,

onde p é o número de variáveis originais, propriedade não apresentada pelos componentes principais.

Na análise de fatores existem outros métodos de estimação além da máxima verossimilhança, entretanto, são essencialmente não estatísticos e conseqüentemente sem as características probabilísticas desejáveis. Destacam-se entre esses métodos os seguintes: solução bi-fatorial, solução do fator principal e o método dos centróides. HARMAN (1976) e MULLAIK (1972) descrevem em detalhes os princípios e procedimentos operacionais para a obtenção dos pesos fatoriais e variâncias específicas para esses métodos.

4.2. Análise de fatores: definições

Seja o modelo m -dimensional linear

$$x_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} F_j + e_i \quad (i = 1, \dots, p)$$

escrito na forma matricial:

$$\underline{\tilde{x}} = A \underline{\tilde{f}} + \underline{\tilde{e}} \quad 4.2.1$$

$\underline{\tilde{x}}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$: vetor correspondente às variáveis respostas observadas.

$\underline{\tilde{f}}' = (F_1, \dots, F_m)$: vetor correspondente aos fatores comuns (variáveis hipotéticas) aleatórios, independentes e de variâncias iguais a um.

$\underline{\tilde{e}}' = (e_1, e_2, \dots, e_p)$: vetor correspondente aos resíduos específicos aleatórios de média zero.

$A = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}]$: é a matriz dos pesos correspondentes à i -ésima variável resposta e ao j -ésimo fator, sendo m o número de fatores do modelo. ($m \leq p$).

Seja a matriz $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ definida positiva de ordem p das covariâncias de $\underline{x}$.

Suponham-se as seguintes pressuposições:

$$E(\underline{f} \underline{e}') = \phi$$

$$E(\underline{f} \underline{f}') = {}_m I_m$$

$$E(\underline{e} \underline{e}') = {}_p \Psi_p = \text{diag}(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p)$$

Do exposto, pelas pressuposições acima,

$$\begin{aligned} \Sigma &= E(\underline{x} \underline{x}') = E[(\underline{A}\underline{f} + \underline{e})(\underline{A}\underline{f} + \underline{e})'] \\ &= E[(\underline{A}\underline{f} + \underline{e})(\underline{f}'\underline{A}' + \underline{e}')] \\ &= \underline{A} E(\underline{f} \underline{f}')\underline{A}' + E(\underline{e} \underline{e}') \\ &= \underline{A}\underline{A}' + \Psi \end{aligned}$$

Conclue-se que a matriz de covariância de $\underline{x}$ sob o modelo fatorial $\underline{x} = \underline{A}\underline{f} + \underline{e}$ é:

$$\Sigma = \underline{A}\underline{A}' + \Psi$$

4.2.2.

onde

$$V(X_i) = \sigma_{ii} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{im}^2 + \psi_i$$

$$\text{COV}(X_i, X_j) = \sigma_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{im}a_{jm}$$

Denominam-se communalidades das variáveis X_i ($i=1, \dots, p$) os elementos diagonais da matriz AA' :

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = \sigma_{ii} - \psi_i$$

Denota-se que, se obedecidas as pressuposições definidas anteriormente, tem-se que os parâmetros a_{ij} corresponderão às covariâncias entre X_i e F_j . Em consequência, se Σ exprimir a matriz das correlações entre as variáveis observáveis, os a'_{ij} s expressarão os coeficientes de correlação entre X_i e F_j , pois,

$$\begin{aligned} \text{COV}(\underline{x}, \underline{f}') &= E[(\underline{A}\underline{f} + \underline{e})\underline{f}'] \\ &= \underline{A} E(\underline{f} \underline{f}') + E(\underline{e} \underline{f}') \\ &= \underline{A} \end{aligned}$$

No caso dos fatores comuns serem correlacionados (fatores oblíquos) ou apresentarem variâncias não unitárias, a matriz de covariâncias de $\underline{x}$ sob o modelo fatorial m -dimensional $\underline{x} = \underline{A}\underline{f} + \underline{e}$ será dada por:

$$\Sigma = \underline{A} \Gamma \underline{A}' + \Psi$$

$$\text{onde: } \Gamma = E(\underline{f} \underline{f}')$$

Observe-se que as equações 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 são invariantes sob transformações ortogonais não singulares dos fatores. Essas expressões não são alteradas quando das substituições de $\underline{f}$ por $\underline{Mf}$, $\underline{A}$ por $\underline{AM'}$ e $\underline{\Gamma}$ por $\underline{M \Gamma M'}$, onde $\underline{M}$ é uma matriz ortogonal de ordem correspondente ao número de fatores, pois,

$$a) \quad \underline{x} = \underline{AM'}(\underline{Mf}) + \underline{e}$$

$$= \underline{A(M'M)}\underline{f} + \underline{e}$$

$$= \underline{Af} + \underline{e}$$

$$b) \quad \underline{Z} = (\underline{AM'})(\underline{MA'}) + \underline{\Psi}$$

$$= \underline{AA'} + \underline{\Psi}$$

$$c) \quad \underline{Z} = \underline{AM'}(\underline{M \Gamma M'})\underline{MA'} + \underline{\Psi}$$

$$= \underline{A'(M'M)} \underline{\Gamma} (\underline{M'M})\underline{A'} + \underline{\Psi}$$

$$= \underline{A \Gamma A'} + \underline{\Psi}$$

4.3. Método da máxima verossimilhança

4.3.1. Desenvolvimento teórico

Considera-se na aplicação do método da máxima verossimilhança em análise de fatores que $\underline{f}$ (vetor dos fatores comuns) e $\underline{e}$ (vetor dos resíduos específicos) são independentes e multinormalmente distribuídos com vetor de médias nulas (sem perda de generalidade) e respectivamente com matrizes de covariâncias $\underline{I}_m$ e $\underline{\Psi}_p$.

Não obstante, sendo $\underline{x}$ formado por funções lineares de $\underline{f}$ e $\underline{e}$, então $\underline{x}$ é multinormalmente distribuído com matriz de covariância $\underline{\Sigma} = \underline{A}\underline{A}' + \underline{\Psi}$ e, sem perda de generalidade, com vetor de médias nulas.

Seja $\underline{S} = [s_{ij}]$ a matriz usual de covariância amostral, tal que $E(\underline{S}) = \underline{\Sigma}$ e computada de uma amostra aleatória de $N(> p)$ observações de $\underline{x}$. Então, os elementos de $\underline{S}$ ou de $n \underline{S}$ seguem a distribuição de Wishart (ANDERSON, 1958) com $n = N-1$ graus de liberdade.

$$f(\underline{S}) = c \frac{1}{|\underline{S}|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}} \frac{1}{|\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}n}} \exp\left(-\frac{1}{2} n \text{tr } \underline{S} \underline{\Sigma}^{-1}\right) \quad 4.3.1$$

Seja o logaritmo neperiano da função de verossimilhança de $\underline{S}$, omitindo-se os termos independentes de $\underline{A}$ e $\underline{\Psi}$.

$$\text{Log}_e L(A, \Psi) = -\frac{1}{2} n \left[\log_e |\Sigma| + \text{tr}(S \Sigma^{-1}) \right] \quad 4.3.2$$

Por razões que se tornarão evidentes posteriormente, é conveniente minimizar a função:

$$F_m = \log_e |\Sigma| + \text{tr}(S \Sigma^{-1}) - \log |S| - p \quad 4.3.3$$

Tal procedimento é equivalente a maximizar a expressão 4.3.2, desde que $\log_e L(A, \Psi)$ é $-\frac{1}{2} n$ vezes F_m mais uma função (constante) das observações. O índice m indica o número de fatores.

Quanto às operações matriciais de diferenciação, conforme o apêndice VI, obtém-se:

$$\frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{ii}} = \Sigma_{ii}^{-1} - (\Sigma^{-1} S \Sigma^{-1})_{ii} = [\Sigma^{-1} (\Sigma - S) \Sigma^{-1}]_{ii}$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{ij}} = 2 \Sigma_{ij}^{-1} - 2(\Sigma^{-1} S \Sigma^{-1})_{ij} = 2 [\Sigma^{-1} (\Sigma - S) \Sigma^{-1}]_{ij} \quad i \neq j$$

Por outro lado, sendo

$$\sigma_{ii} = \sum_{k=1}^m a_{ik}^2 + \psi_i \quad \text{e} \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk} \quad ,$$

tem-se

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial a_{ir}} = 2 a_{ir}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_{ir}} = a_{jr}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \psi_i} = 1 \quad r = 1, \dots, m$$

Pela derivação de funções compostas, obtém-se

$$\frac{\partial F_m}{\partial a_{ir}} = \sum_{j=1}^p \left[\frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_{ir}} \right]$$

$$= 2 \sum_{j=1}^p \left[Z^{-1} (Z - S) Z^{-1} \right]_{ij} a_{jr}$$

$$= 2 \left[Z^{-1} (Z - S) Z^{-1} A \right]_{ir} \quad 4.3.4$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial \psi_i} = \frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{ii}} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \psi_i}$$

$$= \left[Z^{-1} (Z - S) Z^{-1} \right]_{ii}$$

Na notação matricial:

$$\frac{\partial F_m}{\partial A} = 2 Z^{-1} (Z - S) Z^{-1} A \quad 4.3.5$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial \Psi} = \text{diag} \left[Z^{-1} (Z - S) Z^{-1} \right] \quad 4.3.6$$

LAWLEY e MAXWELL (1971) recomendam a utilização de um procedimento em duas etapas para a determinação do mínimo da função F_m . A primeira etapa consiste em calcular o mínimo condicional para $F_m(\Psi)$, onde Ψ é uma matriz fixa e sob a condição de que $\Delta = A' \Psi^{-1} A$ seja diagonal.

Igualando-se a zero a expressão 4.3.5 e pré-multiplicando-a pela matriz Z ,

$$(Z - S) Z^{-1} A = \phi \quad 4.3.7$$

$$\text{Lema: } Z^{-1} = \Psi^{-1} - \Psi^{-1} A (I + \Delta)^{-1} A' \Psi^{-1} \quad 4.3.8$$

onde $\Delta = A' \Psi^{-1} A$

Prova:

Pós-multiplicando 4.3.8 pela matriz $AA' + \Psi$, tem-se:

$$[\Psi^{-1} - \Psi^{-1} A(I + \Delta)^{-1} A' \Psi^{-1}] (AA' + \Psi)$$

$$\Psi^{-1} AA' - \Psi^{-1} A(I + \Delta)^{-1} A' \Psi^{-1} AA' + I - \Psi^{-1} A(I + \Delta)^{-1} A'$$

$$\Psi^{-1} AA' - \Psi^{-1} A(I + \Delta)^{-1} (\Delta + I) A' + I$$

$$\Psi^{-1} AA' - \Psi^{-1} AA' + I$$

$$= I \quad \text{C.Q.D.}$$

Pós-multiplicando-se 4.3.8 pela matriz A, resulta:

$$\Sigma^{-1} A = \Psi^{-1} A - \Psi^{-1} A(I + \Delta)^{-1} A' \Psi^{-1} A$$

$$\Sigma^{-1} A = \Psi^{-1} A [I - (I + \Delta)^{-1} \Delta]$$

$$\Sigma^{-1} A = \Psi^{-1} A(I + \Delta)^{-1} [(I + \Delta) - \Delta]$$

$$\Sigma^{-1} A = \Psi^{-1} A(I + \Delta)^{-1} \quad 4.3.9$$

Assim, pode-se reescrever 4.3.7 da seguinte forma:

$$(\Sigma - S) \Psi^{-1} A(I + \Delta)^{-1} = \phi \quad 4.3.10$$

Pós-multiplicando 4.3.10 pela matriz $(I + \Delta)$ e substituindo a matriz Z por $AA' + \Psi$, tem-se:

$$(AA' + \Psi - S) \Psi^{-1} A = \phi$$

ou seja:

$$S \Psi^{-1} A = (AA' + \Psi) \Psi^{-1} A$$

$$S \Psi^{-1} A = A\Delta + A$$

$$S \Psi^{-1} A = A(\Delta + I) \quad 4.3.11$$

Finalmente, pré-multiplicando-se 4.3.11 por $\Psi^{-1/2}$, resulta:

$${}_p(\Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}) {}_p(\Psi^{-1/2} A)_m = {}_p(\Psi^{-1/2} A)_m (I + \Delta)_m \quad 4.3.12$$

Impondo-se a condição de que $\Delta = A' \Psi^{-1} A$ seja diagonal então a expressão 4.3.12 é um sistema de equações onde $\Psi^{-1/2} A$ é uma matriz com colunas iguais aos vetores próprios de $S^* = \Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$ e $(I + \Delta)$ matriz diagonal dos seus maiores valores próprios como mostrado adiante.

Justifica-se a imposição da matriz $\Delta = A' \Psi^{-1} A$ ser diagonal pela necessidade de remoção da indeterminação de A com relação a transformações ortogonais de $\tilde{x}$. De fato, seja

$$A_1 = A U, \quad \text{com} \quad U U' = U' U = I$$

então tem-se:

$$\tilde{x} = A_1 \tilde{f} + \tilde{e} \quad \text{e} \quad D(\tilde{x}) = A_1 A_1' + \Psi$$

$$D(\tilde{x}) = (A U)(A U)' + \Psi$$

$$= A(U U') A' + \Psi$$

$$= A A' + \Psi$$

Obtendo-se o mesmo modelo.

Seja $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ a matriz das m maiores raízes características de $S^* = \Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$, supondo-as distintas e maiores que a unidade, arranjadas na ordem decrescente e associadas respectivamente à matriz de vetores característicos $W = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_m)$ na forma normalizada ($W'W = I$) e satisfazendo à expressão

$$S^*W = W\Theta$$

Fazendo-se:

$$\Psi^{-1/2} A_0 = W(\Theta - I)^{1/2} \quad \text{e} \quad \Delta = A_0' \Psi^{-1} A_0$$

Obtêm-se de 4.3.12

$$S^*W(\Theta - I)^{1/2} = W(\Theta - I)^{1/2} \Theta$$

Pós-multiplicando-se por $(\Theta - I)^{-1/2}$ e pelo fato de $(\Theta - I)^{1/2}$ ser diagonal, tem-se

$$S^*W = W\Theta \quad 4.3.13$$

Pode-se, portanto escrever que

$$A_0 = \Psi^{1/2} W(\Theta - I)^{1/2} \quad 4.3.14$$

Essa conceituação não é válida quando pelo menos dois vetores próprios são iguais, pois os correspondentes vetores próprios são indeterminados e também quando pelo menos uma das raízes é menor do que a unidade, o que corresponderia a ter-se elementos imaginários na matriz A_0 . Entretanto, tais fatos são raros na prática.

No caso de ocorrerem raízes características menores que a unidade, pode-se em programas computacionais substituí-las pela unidade, onde a correspondente coluna da matriz A_0 tornar-se-á nula.

Teorema: $A_O = \Psi^{1/2} W(\Theta - I)^{1/2}$ minimiza a função $F_m(\Psi)$.

Prova:

Seja a função 4.3.3 escrita da seguinte forma:

$$f_m(\Psi) = \log_e |\Sigma_O| + \text{tr}(S \Sigma_O^{-1}) - \log_e |S| - p \quad 4.3.15$$

onde $\Sigma_O = A_O A_O' + \Psi$. Assim,

$$\begin{aligned} \Psi^{-1/2} \Sigma_O \Psi^{-1/2} &= \Psi^{-1/2} (A_O A_O' + \Psi) \Psi^{-1/2} \\ &= I + \Psi^{-1/2} A_O A_O' \Psi^{-1/2} \\ &= I + \Psi^{-1/2} \Psi^{1/2} W(\Theta - I)^{1/2} (\Theta - I)^{1/2} W' \Psi^{1/2} \Psi^{-1/2} \\ &= I + W(\Theta - I)W' \end{aligned}$$

Sejam $[\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_m, \tilde{u}_{m+1}, \dots, \tilde{u}_p] = [W \cdot U]$ um conjunto ortonormal de vetores. Então:

$$\begin{aligned} [I + W(\Theta - I)W']W &= W + W\Theta - W \\ &= W\Theta \end{aligned}$$

mostrando que $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ são autovalores de $\Psi^{-1/2} \Sigma_O \Psi^{-1/2}$. Ademais como, por construção $W'U = \phi$, tem-se:

$$[I + W(\Theta - I)W']U = U + \phi = U$$

mostrando que os restantes $p-m$ autovalores de $\Psi^{-1/2} \Sigma_O \Psi^{-1/2}$ são iguais a unidade. Então:

$$|\mathbb{Z}_O|/|\Psi| = \theta_1 \dots \theta_m$$

e

$$|\mathbb{Z}_O| = (\theta_1 \dots \theta_m) |\Psi|$$

Como $S^* = \Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$, então

$$|S| = |\Psi^{1/2} S^* \Psi^{1/2}| = |S^*| \cdot |\Psi| = (\theta_1 \dots \theta_p) |\Psi|$$

Seja a expressão 4.3.7 descrita da seguinte forma:

$$(\mathbb{Z}_O - S) \mathbb{Z}_O^{-1} A = \phi$$

Então,

$$A_O - S \mathbb{Z}_O^{-1} A_O = \phi$$

$$S \mathbb{Z}_O^{-1} A_O = A_O \quad 4.3.16$$

Pode-se escrever

$$\begin{aligned} S \mathbb{Z}_O^{-1} &= S \mathbb{Z}_O^{-1} \Psi \Psi^{-1} \\ &= S \mathbb{Z}_O^{-1} (\mathbb{Z}_O - A_O A_O') \Psi^{-1} \\ &= S \Psi^{-1} - (S \mathbb{Z}_O^{-1} A_O) A_O' \Psi^{-1} \end{aligned}$$

Usando 4.3.16

$$S \Sigma_O^{-1} = S \Psi^{-1} - A_O A_O' \Psi^{-1}$$

Daí

$$\begin{aligned} \text{tr}(S \Sigma_O^{-1}) &= \text{tr}(S \Psi^{-1}) - \text{tr}(A_O A_O' \Psi^{-1}) \\ &= \text{tr}(\Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}) - \text{tr}(A_O' \Psi^{-1} A_O) \\ &= \text{tr}(S^*) - \text{tr}(\Theta - I) \\ &= (\theta_1 + \dots + \theta_p) - [(\theta_1 - 1) + \dots + (\theta_m - 1)] \\ &= \sum_{k=m+1}^p \theta_k + m \end{aligned}$$

Substituindo-se $|\Sigma_O|$, $|S|$ e $\text{tr}(S \Sigma_O^{-1})$ na expressão 4.3.15, resulta

$$\begin{aligned} f_m(\Psi) &= \log_e(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) + \log_e(\Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_p) + \sum_{k=m+1}^p \theta_k + m - \\ &\quad - \log_e(\theta_1 \theta_2 \dots \theta_p) - \log_e(\Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_p) - p \\ f_m(\Psi) &= \sum_{k=m+1}^p \theta_k + m - \sum_{k=m+1}^p \log_e \theta_k - p \\ f_m(\Psi) &= \sum_{k=m+1}^p (\theta_k - \log_e \theta_k) - (p - m) \end{aligned}$$

Demonstrando que θ deve corresponder na expressão 4.3.14 às m maiores raízes características da matriz $S^* = \Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$, pois, caso θ seja definido por outro conjunto de autovalores que não os maiores, todas as passagens seriam válidas, mas ter-se-ia um valor de $f_m(\Psi)$ maior, devido $\theta - \log_e \theta$ ser uma função crescente em relação a $\theta > 1$. (C.Q.D)

Alternativamente a partir de $|\Sigma_o|$ e $\text{tr}(S \Sigma_o^{-1})$, pode-se escrever a expressão 4.3.15 em função das m maiores raízes características da matriz $S^* = \Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} f_m(\Psi) = & \log_e (\theta_1 \cdot \theta_2 \cdots \theta_m) - (\theta_1 + \cdots + \theta_m) - \log_e |S| + \\ & + \log_e (\Psi_1 \cdot \Psi_2 \cdots \Psi_p) + \text{tr}(S^*) - (p - m) \end{aligned} \quad 4.3.17$$

A segunda etapa na minimização de F_m consiste em determinar $\hat{\Psi}$ que minimize $F_m(\Psi)$.

Igualando a zero a expressão 4.3.6 definida por

$$\text{diag} \left[\Sigma_o^{-1} (\Sigma_o - S) \Sigma_o^{-1} \right] = \phi$$

Utilizando a identidade 4.3.8

$$\begin{aligned} \Sigma_o^{-1} (\Sigma_o - S) \Sigma_o^{-1} = & \left[\Psi^{-1} - \Psi^{-1} A_o (I + \Delta_o)^{-1} A_o' \Psi^{-1} \right] (\Sigma_o - S) \cdot \\ & \cdot \left[\Psi^{-1} - \Psi^{-1} A_o (I + \Delta_o)^{-1} A_o' \Psi^{-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi^{-1}(\Sigma_O - S)\Psi^{-1} - \Psi^{-1}(\Sigma_O - S)\Psi^{-1}A_O(I + \Delta_O)^{-1}A_O'\Psi^{-1} - \\
&\quad - \Psi^{-1}A_O(I + \Delta_O)^{-1}A_O'\Psi^{-1}(\Sigma_O - S)\Psi^{-1} + \\
&\quad + \Psi^{-1}A_O(I + \Delta_O)^{-1}A_O'\Psi^{-1}(\Sigma_O - S)\Psi^{-1}A_O(I + \Delta_O)^{-1}A_O'\Psi^{-1}
\end{aligned}$$

Usando a expressão 4.3.10

$$\Sigma_O^{-1}(\Sigma_O - S)\Sigma_O^{-1} = \Psi^{-1}(\Sigma_O - S)\Psi^{-1}$$

donde, igualando-se a zero a derivada em relação a Ψ tem-se:

$$\begin{aligned}
\text{diag} [\Sigma_O^{-1}(\Sigma_O - S)\Sigma_O^{-1}] &= \text{diag} [\hat{\Psi}^{-1}(\Sigma_O - S)\hat{\Psi}^{-1}] = \phi \\
&= \text{diag} (\hat{\Sigma} - S) = \phi \\
&= \text{diag} (A_O A_O' + \hat{\Psi} - S) = \phi
\end{aligned}$$

e finalmente

$$\hat{\Psi} = \text{diag} (S - A_O A_O') \quad 4.3.18$$

Resume-se que o método da máxima verossimilhança da análise de fatores consiste em calcular

$$\hat{A} = \hat{\Psi}^{1/2} W(\Theta - I)^{1/2} \quad \text{e} \quad \hat{\Psi} = \text{diag} (S - \hat{A}\hat{A}'),$$

tal que $F_m(\Psi)$ seja mínimo. Os procedimentos e demonstrações nas obtenções de $\hat{A}$ e $\hat{\Psi}$ mostram que é operacionalmente mais fácil minimizar a expressão 4.3.3 em vez de maximizar a 4.3.2.

Do ponto de vista computacional as estimativas $\hat{A}$ e $\hat{\Psi}$ somente são obtidas por procedimentos iterativos, ressaltando-se que nem sempre verificam-se convergências.

4.3.2. Procedimento para obter as estimativas dos pesos fatoriais ($\hat{A}$) e variâncias específicas ($\hat{\Psi}$)

A função 4.3.3 posta em função das m maiores raízes características da matriz $S^* = \Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$ (4.3.17) é minimizada nesta pesquisa pelo processo de minimização de NEWTON-RAPHSON.

Não utiliza-se diretamente a expressão

$$\Psi = \text{diag}(S - AA'),$$

mas calcula-se os valores da função $f_m(\Psi)$ e de suas derivadas parciais de primeira ordem em cada iteração. Uma sequência de matrizes $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \dots, \Psi^{(s)}, \dots$ será obtida, tal que, $f_m[\Psi^{(s+1)}] < f_m[\Psi^{(s)}]$ até atingir-se a convergência para $\hat{\Psi}$. Em cada iteração calcula-se pela expressão 4.3.14. os pesos fatoriais $A_o^{(s)}$, os quais, em sequência deverão convergir para $\hat{A}$, obtendo-se assim o valor mínimo para $f_m(\Psi)$.

Seja a expressão (4.3.6) das derivadas parciais de primeira ordem em relação a Ψ , assim definida:

$$\frac{\partial F_m}{\partial \Psi} = \text{diag} \left[Z_o^{-1} (Z_o - S) Z_o^{-1} \right]$$

Como visto anteriormente:

$$Z_o^{-1} (Z_o - S) Z_o^{-1} = \Psi^{-1} (Z_o - S) \Psi^{-1}$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial \Psi} = \text{diag} \left[\Psi^{-1} (Z_o - S) \Psi^{-1} \right]$$

$$= \text{diag} \left[\Psi^{-1} Z_o \Psi^{-1} - \Psi^{-1} S \Psi^{-1} \right]$$

$$= \text{diag} \left[\Psi^{-1/2} \Psi^{-1/2} Z_o \Psi^{-1/2} \Psi^{-1/2} - \Psi^{-1} S \Psi^{-1} \right]$$

De resultados anteriores:

$$\Psi^{-1/2} Z_o \Psi^{-1/2} = I + W(\Theta - I)W'$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial \Psi} = \text{diag} \left\{ \Psi^{-1/2} [I + W(\Theta - I)W'] \Psi^{-1/2} - \Psi^{-1} S \Psi^{-1} \right\}$$

$$= \text{diag} \left[\Psi^{-1} W(\Theta - I)W' + \Psi^{-1} - \Psi^{-1} S \Psi^{-1} \right]$$

Então:

$$g_i = \frac{\partial F_m}{\partial \psi_i} = \frac{1}{\psi_i} \left[\sum_{r=1}^m (\theta_r - 1) w_{ir}^2 + 1 - S_{ii}/\psi_i \right] \quad 4.3.19$$

onde:

w_{ir} : é o i -ésimo elemento do vetor característico $\tilde{w}_r$ associado à r -ésima raiz característica θ_r da matriz $S = \Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$.

LAWLEY e MAXWELL (1971) mostram que a matriz $G = t_{ij}^2$ ($i, j = 1, \dots, p$) tal que, os t_{ij}^2 são elementos da matriz

$$\Psi^{-1/2} (I - WW') \Psi^{-1/2}$$

converge assintoticamente para a matriz Hessiana, ou seja,

$$\frac{\partial^2 f_m(\Psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j} = E \left(\frac{\partial^2 f_m(\Psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \right) = t_{ij}^2.$$

Suponha-se que $\tilde{\psi}(s)$ pertença à vizinhança de $\hat{\tilde{\psi}}' = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ dentro da qual $f_m(\tilde{\psi})$ é aproximadamente uma função quadrática dos parâmetros e G uma matriz definida positiva. Então, se

$$\underline{g} = [g_i] = \frac{\partial f_m(\tilde{\psi})}{\partial \tilde{\psi}} = \phi \quad \text{para } \tilde{\psi} = \hat{\tilde{\psi}}$$

tem-se pelo método de minimização de funções de Newton-Raphson, aproximadamente:

$$- \underline{g}^{(s)} = G^{(s)} \left[\underline{\hat{\Psi}} - \underline{\Psi}^{(s)} \right]$$

onde $\underline{g}^{(s)}$ e $G^{(s)}$ são avaliadas para $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}^{(s)}$.

Resultando:

$$\underline{\hat{\Psi}} \approx \underline{\Psi}^{(s)} - E^{(s)} \underline{g}^{(s)} \quad \text{onde} \quad E = G^{-1}$$

Tal aproximação sugere definir $\underline{\Psi}^{(s+1)}$ como:

$$\underline{\Psi}^{(s+1)} = \underline{\Psi}^{(s)} - E^{(s)} \underline{g}^{(s)}$$

Apresentam-se os passos básicos que nortearam a elaboração do programa computacional em linguagem FORTRAN, visando obterem-se as estimativas de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais ($\hat{A}$) e variâncias específicas ($\hat{\Psi}$).

Primeiro passo: definição das seguintes variâncias específicas iniciais.

$$\Psi_i^{(1)} = \frac{2p - m}{2p} (1/S^{ii}) \quad i = 1, \dots, p$$

S^{ii} = é o i-ésimo elemento diagonal da matriz S^{-1} .

Segundo passo: cálculo do valor da função $f_m^{(s)}(\psi)$ pela expressão 4.3.17.

Terceiro passo: obtenção da matriz dos pesos fatoriais $A_o^{(s)}$ correspondente a $\psi^{(s)}$, através da expressão 4.3.14.

Quarto passo: computação da matriz $E^{(s)} = [G^{(s)}]^{-1}$ conforme exposto anteriormente.

Quinto passo: obtenção do vetor das derivadas parciais de primeira ordem $g^{(s)}$ pela expressão 4.3.19.

Sexto passo: cálculo do vetor gradiente $\underline{d}^{(s)} = E^{(s)} g^{(s)}$.

Sétimo passo: obtenção das novas aproximações para as variâncias específicas pela expressão $\underline{\psi}^{(s+1)} = \underline{\psi}^{(s)} - \underline{d}^{(s)}$ e retornar ao segundo passo, prosseguindo-se até o atingimento das convergências desejadas.

Inclui-se no Apêndice III, o programa computacional elaborado segundo os passos expostos. O programa em linguagem FORTRAN atende os requisitos requeridos pelo computador IBM-1130.

Objetivando oferecer flexibilidades operacionais na utilização do programa, optou-se pela apresentação de um exemplo explanando os sete passos descritos e aplicado para o caso de uma matriz de correlação que resulte na obtenção de soluções próprias (definidas no item seguinte).

No entanto, em face da ocorrência neste trabalho de soluções impróprias (definidas no item seguinte), processou-se a matriz da Tabela 4.1. da página 43 do livro de LAWLEY e MAXWELL (1971), mostrando-se os resultados concernentes às interações 1, 2, 3, 28, 29 e 30.

Por outro lado, ressaltam-se que foram utilizadas as seguintes subrotinas: MINV (SLU, P, DD, L, M) da biblioteca científica IBM-1130 e AUVAL (A, AA, C, NR, N) desenvolvida por DEPIZZOLATTI (1983).

- Subrotina MINV: inverte e calcula determinante de matrizes.

SLU: matriz de entrada (correlações), destruída durante a computação; na saída expressa a matriz inversa resultante.

P : ordem da matriz (definido inteiro no programa).

DD : determinante resultante.

L e M: vetor de comprimento p para uso interno da subrotina.

- Subrotina AUVAL: Calcula valores próprios e vetores próprios de matrizes simétricas pelo método de Jacobi, conforme exposto em NOBLE (1969).

A : matriz de entrada, destruída durante a computação; na saída expressa na diagonal os valores próprios na ordem decrescente de magnitude.

AA : expressa os vetores próprios associados aos valores próprios correspondentes.

C : na saída expressa a matriz de entrada.

NR : número de rotações realizadas (método de Jacobi).

N : ordem da matriz.

Destaca-se que a subrotina original AUVAL não ordena os valores próprios na ordem decrescente de magnitude, assim teve-se que adaptar tal requisito.

4.3.3. Caso de variáveis sem componente residual

O modelo fatorial representado pelas equações $\tilde{x} = A\tilde{f} + \tilde{e}$ e $\tilde{Z} = AA' + \Psi$, pode ser generalizado para o caso de existirem $k < m$ variáveis que possuem variâncias específicas nulas, isto é, essas k variáveis são combinações lineares exclusivamente dos fatores comuns. Entretanto, o valor k não poderá exceder ao número m de fatores, pois, excedendo-o torna a matriz $\tilde{Z}$ singular.

Geometricamente, significa dizer que essas k variáveis estão totalmente inseridas no espaço vetorial gerado pelos fatores.

Por outro lado, esse fato acarreta dificuldades na aplicação do método da máxima verossimilhança, pois a função de verossimilhança não possuirá ponto de máximo no sentido de anular as derivadas parciais de primeira ordem dentro da região em que todos os elementos de Ψ são positivos. As variâncias específicas nos procedimentos iterativos podem tornar-se negativas.

Entretanto, contorna-se esse problema obtendo-se o mínimo da função $f_m(\Psi)$ dentro da região R_ϵ tal que $\Psi_i \geq \epsilon$ para todo i , onde ϵ é um valor positivo. Em aplicações práticas utiliza-se $\epsilon = 0,005$ no caso de variáveis estandarizadas.

Denominam-se soluções próprias às estimativas de máxima verossimilhança obtidas quando o mínimo da função $f_m(\Psi)$ ocorre no interior da região R_ϵ , enquanto que, são chamadas soluções impróprias aquelas originadas quando o mínimo se situa na fronteira de R_ϵ .

Na literatura sobre análise de fatores as soluções impróprias são conhecidas como "casos de Heiwood".

Do exposto, se soluções impróprias são ocorrentes, então as hipóteses sobre o modelo deverão ser redefinidas, ou seja, o procedimento iterativo deverá prosseguir utilizando-se a matriz de dispersão condicional: $S_{22 \cdot 1} = S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$. Onde:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

tal que $x' = (x_1, x_2) : x_1 = (X_1, X_2, \dots, X_k)$

$$x_2 = (X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_p)$$

resultando

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \phi \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

4.3.4. Teste de hipótese

A mais importante vantagem do método da máxima verossimilhança resume-se na possibilidade de verificar se um determinado número de fatores m está adequado para reproduzir o modelo. No presente trabalho, consideram-se que os fatores são não correlacionados.

O teste estatístico baseia-se no critério da razão de máxima verossimilhança, onde o negativo do dobro do logaritmo da razão de verossimilhança distribui-se aproximadamente como um qui-quadrado quando o número de observações N é $\geq 50 + p$. ANDERSON e RUBIN (1956) exprimem a estatística da seguinte forma:

$$-2 \log_e \lambda = N \log_e \frac{|\hat{\Sigma}|}{|\Sigma|}$$

A razão de verossimilhança λ é definida como o quociente da função de verossimilhança com respeito aos parâmetros em um subconjunto especificado ω e a função de verossimilhança considerando o conjunto total Ω .

Do exposto, seja Ω o conjunto formado por todas as matrizes simétricas, definidas positivas de ordem p e ω um subconjunto de Ω , formado pelas matrizes $\hat{\Sigma} = AA' + \Psi$ originadas do modelo fatorial m -dimensional.

Seja a função de verossimilhança 4.3.2, escrita com relação somente aos elementos de Σ .

$$\log_e L = - \frac{1}{2} n \left[\log_e |Z| + \text{tr}(Z^{-1} S) \right] \quad 4.3.4.1.$$

De acordo com a análise estatística multivariada, a função 4.3.4.1 atingirá o máximo em Ω quando $Z = S$.

Sejam L_Ω e L_ω os máximos respectivamente das funções de verossimilhança em Ω e ω . Então:

$$\log_e L_\Omega = - \frac{1}{2} n (\log_e |S| + p)$$

$$\log_e L_\omega = - \frac{1}{2} n \left[\log \hat{Z} + \text{tr}(\hat{Z}^{-1} S) \right] \quad \text{onde} \quad \hat{Z} = AA' + \Psi$$

Assim, se $\lambda = \frac{L_\omega}{L_\Omega}$, implica $-2 \log_e \lambda = -2 \log_e L_\omega + 2 \log_e L_\Omega$. Logo:

$$U_m = -2 \log_e \lambda = n \left[\log_e |\hat{Z}| + \text{tr}(S \hat{Z}^{-1}) - \log |S| - p \right] \quad 4.3.4.2$$

Contudo, se $\hat{Z}$ é obtido com boa precisão pode-se considerar que $\text{tr}(S \hat{Z}^{-1}) = p$. Então:

$$U_m = n \left[\log |\hat{Z}| - \log |S| \right] \quad 4.3.4.3.$$

Por outro lado, BARTLETT (1954) introduz uma modificação visando aumentar a convergência para a distribuição de χ^2 . O autor sugere usar o fator multiplicativo $(n - \frac{2p+5}{6} - \frac{2}{3} m)$ em vez de n .

O número de graus de liberdades associados à distribuição de χ^2 é a diferença entre a dimensionalidade do conjunto total Ω , definido por $p(p+1)/2$ parâmetros gerado pelas p variáveis e a dimensionalidade do subconjunto ω com $pm+p-m(m-1)/2$ parâmetros. Assim, o número de graus de liberdade v sob a hipótese da nulidade H_0 para o modelo fatorial m -dimensional, é:

$$v = \frac{1}{2} [(p - m)^2 - p - m] \quad 4.3.4.4.$$

Rejeita-se H_0 para um determinado número de fatores se ocorrer do valor de U_m exceder ao valor do χ^2 a um nível de significância estipulado, resultando que outro modelo com maior número de fatores deve ser assumido para explicar as covariâncias ou correlações observadas.

Devido à propriedade de invariância na estimação dos fatores e variâncias específicas, decorre que o valor do teste estatístico é o mesmo para as matrizes de covariâncias e correlações.

4.3.5. Estimação dos escores fatoriais

Empregando-se a análise de fatores preliminarmente à outra técnica de análise estatística multivariada, ou se existir interesse em calcular índices que caracterize a importância da unidade amostral, então, além de estimar os parâmetros A e Ψ , determinam-se os valores dos fatores em função das variáveis respostas.

É óbvio que, os escores fatoriais não são estimados no sentido estatístico usual, pois, não são parâmetros do modelo fatorial, mas valores atribuídos às variáveis hipotéticas. Assim, há a necessidade de introduzir um princípio de quadrados mínimos para prever os escores fatoriais. Na linguagem estatística dir-se-á que os escores fatoriais são preditores dos fatores.

Neste trabalho, aplicar-se-á o método de regressão devido a THOMSON (1951) para prever os escores fatoriais.

Supondo que os fatores são não correlacionados e que os erros de amostragem na estimação de A e Ψ são desprezíveis. Sejam:

$\tilde{x}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$: vetor das observações

$\tilde{f}'_i = (f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{im})$: vetor dos escores fatoriais para a i -ésima unidade amostral.

$\tilde{e}' = (e_1, e_2, \dots, e_p)$: vetor dos resíduos específicos.

e as pressuposições:

$$E(\underline{\underline{ff'}}) = I_m$$

$$E(\underline{\underline{x}} \underline{\underline{f'}}) = A$$

$$E(\underline{\underline{x}} \underline{\underline{x'}}) = AA' + \Psi$$

O método devido a THOMSON (1951) consiste em obter m regressões lineares de $\underline{\underline{f}}$ sobre $\underline{\underline{x}}$.

Sejam $\hat{\underline{\underline{f}}}_r = \underline{\underline{c}}_r' \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}' \underline{\underline{c}}_r$ ($r = 1, 2, \dots, m$). Onde: $\underline{\underline{c}}_r$ é um vetor de ordem p e definido tal que a variância de $\hat{\underline{\underline{f}}}_r - \underline{\underline{f}}_r$ é minimizada.

$$E(\hat{\underline{\underline{f}}}_r - \underline{\underline{f}}_r)^2 = E(\underline{\underline{x}}' \underline{\underline{c}}_r - \underline{\underline{f}}_r)^2$$

Diferenciando e igualando a zero as derivadas parciais com relação ao vetor $\underline{\underline{c}}_r$, resulta:

$$\underline{\underline{c}}_r = \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{a}}_r \quad \underline{\underline{a}}_r : \text{é a } r\text{-ésima coluna da matriz dos pesos fatoriais } \hat{A};$$

e assim:

$$\hat{\underline{\underline{f}}}_r = \underline{\underline{a}}_r' \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{x}}.$$

No entanto, se $\underline{f}' = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, então:

$$\underline{\hat{f}} = A' \underline{\Sigma}^{-1} \underline{x} = A' (AA' + \Psi)^{-1} \underline{x} \quad 4.3.5.1.$$

HARMAN (1976) sugere a fórmula $\underline{\hat{f}} = A' S^{-1} \underline{x}$.

Entretanto, usando a identidade 4.3.9 resulta:

$$\underline{\hat{f}} = (I + \Delta)^{-1} A' \Psi^{-1} \underline{x}$$

Generalizando para a matriz F de ordem $N \times m$ dos escores fatoriais:

$$F = X \Psi^{-1} A (I + \Delta)^{-1} \quad 4.3.5.2.$$

4.3.6. Metodologia dos índices normalizados

Como critério de pós-estratificação envolvendo todas as variáveis respostas, utilizar-se-á um índice que caracterize a importância da subunidade conglomerada. Este índice é definido como o módulo da resultante da soma vetorial dos escores fatoriais ponderados pela contribuição em percentagem do respectivo fator à comunalidade total. Esses índices serão divididos pelo de maior magnitude, implicando numa normalização entre 0 e 1.

A justificativa da aplicação desses índices prende-se ao fato dos fatores serem ortogonais. A seguinte expressão sintetiza o exposto:

$$I_i = \sqrt{\sum_{j=1}^m p_j f_{ij}^2} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

N : número de subunidades conglomeradas.

m : número de fatores

f_{ij} : valor do escore fatorial do j -ésimo fator correspondente à i -ésima subunidade conglomerada.

p_j : contribuição em percentagem do j -ésimo fator à comunalidade total.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1. Matriz das correlações das variáveis respostas

A matriz das correlações das variáveis resposta está apresentada na Tabela 1. Verifica-se que a variável VOLT correlaciona-se igualmente com as variáveis VOL1, VOL2 e VOL3, as quais, basicamente são independentes entre si.

5.2. Estimativas de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais $\hat{A} = [\hat{a}_j]$ e variâncias específicas ($\hat{\Psi}$)

Os resultados concernentes às estimativas de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais e variâncias específicas estão incluídos na Tabela 2.

Destacam-se que soluções impróprias foram detectadas, as quais foram obtidas minimizando a função $f_m(\Psi)$ dentro da região R_ϵ tal que $\epsilon \geq 0,005$. Calculou-se a cada ocorrência de solução imprópria a matriz de dispersão $S_{22.1} = S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$ visando obter os pesos fatoriais dos fatores subsequentes.

Estão apresentados na Tabela 3, os resultados das derivadas parciais de primeira ordem e os valores da função $f_m(\Psi)$ calculados respectivamente pelas expressões 4.3.19 e 4.3.17 após 30 iterações, onde constata-se convergências satisfatórias. Os valores absolutos das derivadas correspondentes ao quarto e último fator são praticamente nulos, sendo a maior magnitude atingida de 0,000244 assegurando a convergência da função $f^m(\Psi)$ para o valor mínimo.

Os pesos fatoriais (Tabela 2) correspondentes ao primeiro fator ($\hat{a}_1$), são praticamente iguais aos valores dos coeficientes de correlação associados à variável VOLT. Depreendendo-se que os pesos fatoriais relativos ao primeiro fator ($\hat{a}_1$), simplesmente correspondem aos elementos da segunda coluna da matriz de correlações. Assim, resulta como solução final de máxima verossimilhança para $\hat{A}$ e $\sim \Psi$ os valores contidos na Tabela 4.

No referente a verificação da suficiência do número de fatores para a reprodução do modelo, salienta-se que, pela utilização da expressão 4.3.4.2., resulta $U_4 = 0,1314$ concluindo-se pela não rejeição da hipótese de que os quatro fatores computados são adequados para exprimir a matriz de correlações original.

O número de graus de liberdade ao aplicar a expressão 4.3.4.4., é igual a 1 (um), ressaltando-se que foram subtraídos o número de soluções impróprias ocorridas dos valores de N, p e m. Verifica-se a rejeição da hipótese da nulidade para U_3 .

5.3. Estimativas dos escores fatoriais

Os escores fatoriais foram calculados através da expressão 4.3.5.1. Na Tabela 5 estão inseridos os coeficientes dos escores fatoriais, isto é, os valores correspondentes a matriz $(\hat{A}\hat{A} + \hat{\Psi})^{-1}\hat{A}$. Esses valores foram computados de modo que $\hat{A}$ e $\hat{\Psi}$ reproduzissem a matriz das covariâncias.

Os valores dos pesos fatoriais associados à matriz de covariâncias foram computados pela multiplicação daqueles relativos à matriz de correlações pelo fator S_i (desvio padrão da i-ésima variável resposta, $i = 1, 2, \dots, p$) e, no que se refere às variâncias específicas pelo fator S_i^2 . O motivo dessa transformação foi dar condições para aplicação da metodologia concernente aos índices normalizados, a qual não funciona para dados estandarizados (matriz X).

Os resultados dos escores fatoriais obtidos pelo método de regressão devido a THOMSON (1951) estão expostos no Apêndice III. Em decorrência da variável VOLT estar 100% correlacionada com o fator 1, tem-se que, os valores dos escores fatoriais concernentes a esse fator serão

proporcionais aos valores assumidos pela variável VOLT, onde o fator multiplicativo é igual ao inverso do desvio padrão da variável VOLT ($\frac{1}{35.0316}$).

Por outro lado, se a matriz de correlações fosse utilizada, então os valores dos escores do fator 1 seriam exatamente os valores estandarizados associados à variável VOLT.

5.4. Interpretação dos fatores

Quando a matriz de correlações é utilizada na análise de fatores os pesos fatoriais são os coeficientes de correlação entre as variáveis respostas e os fatores. Assim, conclusões importantes poderão surgir dessa interpretação em relação à magnitude dos pesos fatoriais.

Fator 1: explica totalmente a variável VOLT e está igualmente correlacionado com as variáveis VOL1 (0,5728), VOL2 (0,5711) e VOL3 (0,5920). O fator 1 explica a densidade florestal no que se refere ao volume total sem casca congregando todas as espécies indistintamente. O mapeamento com referência à partição pelo fator 1, corresponderá à estratificação da floresta com respeito à variável VOLT. A contribuição do fator 1 à comunidade total é de 70,08%.

A Tabela 6 e a Figura 4 condensam os resultados e representam respectivamente os seguintes critérios de estratificação pelo fator 1, onde os valores 6,678910 e 1,089360 correspondem ao maior e menor escores fatoriais respectivamente.

Estrato I : (4,815727 ; 6,678910)

Estrato II : (2,952544 ; 4,815727]

Estrato III: (1,089360 ; 2,952544]

Fator 2: é bem correlacionado positivamente com a variável VOL3 (0,8018) apresentando as seguintes correlações negativas com as variáveis VOL1 (-0,3388) e VOL2 (-0,4362).

Do exposto, se for efetuado o mapeamento baseado no fator 2, ter-se-á uma estratificação da floresta com respeito a um contraste linear da variável VOL3 contra as variáveis VOL1 e VOL2. Observa-se que o fator 2 independe da variável VOLT. A contribuição do fator 2 à comunalidade total é de 15,42%.

A tabela 7 e a Figura 5 comprovam os resultados e caracterizam respectivamente os seguintes critérios de estratificação do fator 2, onde os valores 3,796392 e -2,724250 correspondem ao maior e menor escores fatoriais respectivamente.

Estrato I : (1,622845 ; 3,796392)

Estrato II : (-0,550703 ; 1,622845]

Estrato III: (-2,724250 ; -0,550703]

Fator 3: O fator em questão encontra-se positivamente correlacionado com a variável VOL2 (0,6903) e negativamente correlacionado com a variável VOL1 (-0,5565).

No contexto de um inventário florestal, implica que estruturando-se um mapa com respeito ao fator 3, resultará na estratificação da floresta concernente a um contraste linear da variável VOL2 versus VOL1. Note-se que, o fator 3 independe das variáveis VOLT e VOL2, e, sua contribuição a comunalidade total é 11,62%.

A Tabela 8 e a Figura 6 decorrem dos seguintes critérios de estratificação pelo fator 3, onde os valores 3,274426 e -3,080471 correspondem ao maior e menor escores fatoriais respectivamente.

Estrato I : (+1,156127 ; 3,274426)

Estrato II : (-0,962172 ; +1,156127]

Estrato III : (-3,080471 ; -0,962172]

Fator 4: é relativamente correlacionado com a variável VOL1 (0,4935). Assim, produzindo-se um mapa com relação ao fator 4, ter-se-á uma estratificação da floresta com referência à variável VOL1. O fator 4 independe das variáveis VOLT, VOL2 e VOL3 e sua contribuição à comunalidade total é de 2,87%.

Na Tabela 9 e Figura 7 constam os resultados decorrentes dos seguintes critérios de estratificação pelo fator 4, onde os valores 1,153570 e -4,706075 correspondem ao maior e menor escores fatoriais respectivamente.

Estrato I : (-0,799645 ; 1,153570)

Estrato II : (-2,752860 ; -0,799645]

Estrato III : (-4,706075 ; -2,752860]

5.5. Mapeamento com respeito aos índices normalizados

O apêndice IV apresenta os índices normalizados resultantes da inclusão dos quatro fatores.

A estratificação reunindo todos os fatores corresponde exatamente estratificar a floresta univariadamente com relação à variável VOLT, confirmando o que realmente deve acontecer: "Nas extensões mais densas da floresta provavelmente tem-se maior ocorrência volumétrica das espécies desejáveis", o que é lógico.

Na Tabela 10 e Figura 8 mostram os resultados decorrentes dos seguintes critérios de partição dos índices normalizados.

Estrato I : $[0,7 ; 1,0)$

Estrato II : $[0,4 ; 0,7)$

Estrato III: $< 0,4$

Confrontando as Tabelas 10 e Figura 8 com Tabela 6 e Figura 4 respectivamente, percebe-se similaridades. No apêndice III apresentam-se os valores dos escores fatoriais.

Apresentam-se as correlações entre o índice normalizado e as variáveis respostas. A importância da variável VOLT na construção do índice normalizado é confirmada pela correlação existente (0,9987).

$$\text{CORR}(\text{Índice}, \text{VOLT}) = 0,9987$$

$$\text{CORR}(\text{Índice}, \text{ALT}) = 0,3353$$

$$\text{CORR}(\text{Índice}, \text{DAP}) = 0,5078$$

$$\text{CORR}(\text{Índice}, \text{VOL1}) = 0,5622$$

$$\text{CORR}(\text{Índice}, \text{VOL2}) = 0,5710$$

$$\text{CORR}(\text{Índice}, \text{VOL3}) = 0,5951$$

Reune-se alguns resultados que despertaram atenção:

- a) Os coeficientes de correlação entre o fator 1 e as variáveis VOL1 (0,5739), VOL2 (0,5720) e VOL3 (0,5934) são próximos.
- b) Os coeficientes de correlação das variáveis DAP e ALT são basicamente nulos com relação aos fatores 2, 3 e 4.

De conformidade com os itens a e b e devido à variável VOLT independender dos fatores 2, 3 e 4, poder-se-ia pensar em computar um índice normalizado abrangendo os fatores 2, 3 e 4 e obter um mapa estruturado sob uma estratificação multidimensional reunindo as variáveis VOL1, VOL2 e VOL3. No entanto, essas variáveis são independentes entre si como mostra a Tabela 1, tornando sem interesse tal procedimento.

A Tabela 11 comprova o exposto para os seguintes critérios de estratificação pelo índice normalizado reunindo os fatores 2, 3 e 4.

Estrato I : $[0,7 ; 1,0)$

Estrato II : $[0,4 ; 0,7)$

Estrato III: $< 0,4$

5.6. Experiências com outros procedimentos iterativos

Elaborou-se um programa baseado no procedimento devido a LAWLEY (1942), citado em HARMAN (1976), o qual mostrou-se ineficiente e desvantajoso em alguns testes.

Posteriormente elaborou-se um programa que apresentou boa eficiência, mas convergência lenta baseado no algoritmo:

1. Cálculo das variâncias específicas iniciais.

$$\psi_i = \frac{2p - m}{2p} (1/S^{ii}) \quad i = 1, \dots, p$$

S^{ii} : é o i-ésimo elemento diagonal da matriz S .

2. Obter as m maiores raízes características e vetores próprios associados à matriz $\Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$.

3. Calcular $A_O = \Psi^{1/2} W(\Theta - I)^{1/2}$

W : matriz formada em colunas pelos vetores próprios associados às m maiores raízes características $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ da matriz $S^* = \Psi^{-1/2} S \Psi^{-1/2}$.

4. Obter as novas aproximações das variâncias específicas através da expressão

$$\Psi_i = \text{diag} (S - A_O A_O') \quad i = 1, 2, \dots, p$$

e retornar ao item 2 e prosseguir até atingir-se a convergência desejada.

6. CONCLUSÕES

Baseando-se na experiência adquirida e no significado dos resultados do presente trabalho, as principais conclusões extraídas foram as seguintes:

- a) Os resultados refletiram uma adequação aos objetivos propostos, isto é, demonstraram haver flexibilidade e eficiência da aplicação do método da máxima verossimilhança da análise de fatores na descrição da estrutura florestal tropical, pois pela observação detalhada da matriz dos pesos fatoriais, pode um pesquisador florestal com alguma experiência em análise estatística multivariada, interpretar o significado das variáveis envolvidas e suas interrelações.

- b) Apesar do exemplo florestal exposto nesta pesquisa não envolver todas as variáveis necessárias para descrever de forma completa a estrutura da floresta tropical estudada, destaquem-se que resultados importantes foram obtidos, principalmente no que se refere à orientação ao planejamento de explorações madeireiras; tais resultados podem ser observados nas estratificações isoladas dos fatores 2, 3 e 4, onde as seguintes conclusões foram evidenciadas.
- b.1) A partição pelo fator 2 evidencia a estratificação volumétrica das espécies da classe III, onde verifica-se que quanto maior é a sua ocorrência, menores corresponderão às classes I e II, embora o decréscimo na classe II seja menos acentuado.
- b.2) A partição pelo fator 3 evidencia a estratificação volumétrica das espécies da classe II, onde verifica-se que quanto maior é a sua ocorrência menor corresponderá à classe I.
- b.3) A partição pelo fator 4 evidencia a estratificação volumétrica das espécies da classe I.
- c) No referente a utilização da metodologia dos índices normalizados, o qual correspondeu nesta pesquisa na estratificação univariada da variável VOLT, vindo a confirmar o que ocorre na floresta tropical em termos das variáveis envolvidas, demonstrou perfeita adequação e operacionalidade.

Devido aos aspectos envolvidos na construção dos índices normalizados e nas experiências adquiridas dos resultados deste trabalho, conclui-se que em inventários florestais direcionados a descrever completamente a estrutura florestal tropical, a obtenção de mapas baseados nos índices normalizados possibilitará a identificação precisa das unidades tipológicas existentes, considerando-se os efeitos das características envolvidas e suas interdependências. Assim, terão os silvicultores tropicais a oportunidade de estabelecer e aplicar corretamente o tratamento silvicultural específico a cada tipo florestal.

- d) Considerando o alto custo da confecção de mapas florestais através de fotografias aéreas em escala operacionalmente adequada (1:10.000 a 1:5000), técnica que exige também levantamento de campo para comprovar as respectivas interpretações fotográficas, recomenda-se descartar o levantamento aerofotogramétrico em benefício de uma maior intensidade de amostragem de campo.

Outro aspecto importante, é que nos levantamentos de campo podem ser qualificadas e quantificadas todas as características importantes na descrição da estrutura florestal tropical, e logicamente, se associadas a uma análise estatística adequada dos seus efeitos e interações, obviamente resultarão conclusões importantes e fundamentais para definição do plano de manejo específico.

- e) Relativamente ao processo de amostragem visando estudar multidimensionalmente as características florestais tropicais e depois descrevê-las em forma de mapas, recomenda-se a utilização de unidades amostrais conglomeradas distribuídas sistematicamente em faixas equidistantes. Contudo, observando-se os resultados desta pesquisa e os respectivos mapas, conclui-se ser mais preciso e eficiente, estabelecer uma estrutura espacial conglomerada com maior número de subunidades.

Por outro lado, as dimensões da subunidade devem estar adequadas para absorver as variações das características dentro dos conglomerados e por razões inerentes às peculiaridades das características florestais, aspectos de subamostragem devem ser considerados.

- f) Concernente ao objetivo delineado de apresentar os fundamentos teóricos sobre o método da máxima verossimilhança da análise de fatores associado ao desenvolvimento de um programa FORTRAN para computador, conclui-se que o referido objetivo foi atingido eficientemente.

- g) Finalmente, pelos resultados apresentados nos testes, eficiência e rápida convergência, conclui-se ser vantajosa a adaptação

do método de minimização de funções de NEWTON-RAPHSON na estima
ção de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais e variâncias
específicas na análise de fatores.

7. LITERATURA CITADA

ANDERSON, T.W., 1958. An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. New York, Wiley.

ANDERSON, T.W. e N. RUBIN, 1956. Statistical Inference in Factor Analysis. Proceedings Third Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., 5: 111-150.

BARTLETT, M.S., 1937. The Statistical Conception of Mental Factors. British Journal of Psychology, 28: 97-104.

BARTLETT, M.S., 1938. Methods of Estimating Mental Factors. Nature, 141: 609-610.

BARTLETT, M.S., 1962. Factor Analysis in Psychology as a Statistician See it, In Essays on Probability and Statistics. New York, Wiley.

BRASIL, 1977. Departamento Nacional de Produção Mineral. Projeto RADAM-BRASIL. Folha SA-21 - Santarém. 522 p. Rio de Janeiro.

CARVALHO, J.O.P., 1982. Análise Estrutural da Regeneração Natural em Floresta Tropical Densa na Região do Tapajós no Estado do Pará. Curitiba, 123 p. (Dissertação de Mestrado - U.F.P.)

DEPIZZOLATTI, A.L.V., 1983. Pontos Críticos de Superfícies de Resposta com Raiz Quadrada em Função das Doses de Nutrientes Usadas nos Experimentos de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 110 p. (Tese de Doutorado)

FACHEL, J.H.G., 1976. Análise Fatorial. São Paulo, IME/USP, 81 p. (Dissertação de Mestrado)

HARMAN, H.H., 1976. Modern Factor Analysis. 3^a ed. Chicago. University of Chicago Press.

JÖRESKOG, K.G., 1963. Estatistical Estimation in Factor Analysis. Almqvist and Wikseel, Stockholm.

JÖRESKOG, K.G., 1966. UMFLA - A Computer Program for Restricted Maximum Likelihood Factor Analysis. Research Memorandum, 66-20. Princeton, N. J., Educational Testing Service.

LAWLEY, D.N., 1940. The Estimation of Factor Loading by The Method of Maximum Likelihood. Proceedings of The Royal Society of Edinburger, 60: 64-82.

LAWLEY, D.N., 1942. Further Investigations in Factor Estimation. Proceedings of The Royal Society of Edinburger, Section B, 61: 176-185.

- LAWLEY, D.N., 1943. The Application of Maximum Likelihood Method to Factor Analysis. British Journal of Psychology, 33: 172-175.
- LAWLEY, D.N. e A.E. MAXWELL, 1971. Factor Analysis as Statistical Method. Butterworths . London.
- LIMA, A.A. e P. SANTOS, 1976. Pesquisas Bibliográficas Polo XI - Tapajós. Serviço Nacional de Levantamento e Conservação do Solo. EMBRAPA.
- MAXWELL, A.E., 1964. Calculating Maximum Likelihood Factor Loading. Journal of The Royal Statistical Society, Series A, 127: 238-241.
- MORRISON, D.F., 1976. Multivariate Statistical Methods. 2^a ed. New York. McGraw-Hill.
- MULAİK, S.A., 1972. The Foundations of Factor Analysis. New York, McGraw-Hill.
- NOBLE, B., 1969. Applied Linear Algebra. New York, Prentice Hall.
- QUEIROZ, W.T., 1977. Efeitos da Variação Estrutural em Unidades Amostrais na Aplicação do Processo de Amostragem em Conglomerados nas Florestas do Planalto do Tapajós. Curitiba, U.F.P, 109 p. (Dissertação de Mestrado)
- RAO, C.R., 1955. Estimation and Tests of Significance in Factor Analysis. Psychometrika, 20: 93-111.

SPEARMAN, C., 1904. General Intelligence Objectively Determined and Measured. Amer. J. Psychol., 15: 201-293.

THOMSON, G.H., 1951. The Factorial Analysis of Human Ability. London, University of London.

TABELAS E FIGURAS

TABELA 1. Matriz de correlações das variáveis respostas.

	ALT	VOLT	DAP	VOL1	VOL2	VOL3
ALT	1,0000	0,3362	0,1797	0,1370	0,2723	0,1404
VOLT	0,3362	1,0000	0,5067	0,5739	0,5720	0,5934
DAP	0,1797	0,5067	1,0000	0,2980	0,3799	0,2676
VOL1	0,1370	0,5739	0,2980	1,0000	0,0927	0,0670
VOL2	0,2723	0,5720	0,3799	0,0927	1,0000	-0,0126
VOL3	0,1404	0,5934	0,2676	0,0670	-0,0126	1,0000

TABELA 2. Estimativas de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais $\hat{A} = [\hat{a}_{\sim j}]$ e variâncias específicas $\hat{\Psi}$ (soluções impróprias).

VARIÁVEIS	$\hat{a}_{\sim 1}$	$\hat{a}_{\sim 2}$	$\hat{a}_{\sim 3}$	$\hat{a}_{\sim 4}$	$\hat{\Psi}$
ALT	0,3371	-0,0735	0,0703	-0,0864	0,8694
VOLT	0,9975	0,0000	0,0000	0,0000	0,0050
DAP	0,5078	-0,0415	0,1032	0,1027	0,7204
VOL1	0,5728	-0,3388	-0,5565	0,4935	0,0050
VOL2	0,5711	-0,4362	0,6903	0,0000	0,0050
VOL3	0,5920	0,8018	0,0000	0,0000	0,0050

TABELA 3. Valores das derivadas parciais de primeira ordem e da função $f_m(\Psi)$ após 30 iterações.

	FATOR 1	FATOR 2	FATOR 3	FATOR 4
f_m	1,435914	1,050173	0,022933	0,000101
$\partial f_m / \partial \text{ALT}$	0,049678	0,015659	0,000006	0,000118
$\partial f_m / \partial \text{VOLT}$	1,095772	xxx	xxx	xxx
$\partial f_m / \partial \text{DAP}$	0,138107	0,007033	0,000021	0,000244
$\partial f_m / \partial \text{VOL1}$	0,195605	0,393584	0,005380	0,000029
$\partial f_m / \partial \text{VOL2}$	0,193895	0,517048	0,003588	xxx
$\partial f_m / \partial \text{VOL3}$	0,216426	0,451803	xxx	xxx

TABELA 4. Estimativas de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{bmatrix}$ e variâncias específicas $\hat{\Psi}$ (solução final).

VARIÁVEIS	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$	Ψ
ALT	0,3362	-0,0735	0,0703	-0,0864	0,8694
VOLT	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
DAP	0,5067	-0,0415	0,1032	0,1027	0,7204
VOL1	0,5739	-0,3388	-0,5565	0,4935	0,0050
VOL2	0,5720	-0,4362	0,6903	0,0000	0,0050
VOL3	0,5934	0,8018	0,0000	0,0000	0,0050

TABELA 5. Coeficientes dos escores fatoriais $(\hat{A}\hat{A}' + \hat{\Psi})^{-1}\hat{A}$.

VARIÁVEIS	FATOR 1	FATOR 2	FATOR 3	FATOR 4
ALT	0,000000	-0,001139	-0,000957	-0,003601
VOLT	0,028545	-0,019866	-0,034847	-0,084375
DAP	0,000000	0,000467	0,001142	0,002374
VOL1	0,000000	-0,001306	0,002248	0,118712
VOL2	0,000000	-0,001234	0,072190	0,078890
VOL3	0,000000	0,062322	0,037956	0,083819

TABELA 6. Estimativas das médias (estratificação pelo fator 1).

VARIÁVEIS	ESTRATO I	ESTRATO II	ESTRATO III	POPULAÇÃO
ALT	14,77	14,64	13,94	14,45
VOLT	185,50	130,99	82,55	122,80
DAP	52,53	50,39	47,57	49,20
VOL1	36,97	17,17	7,82	16,60
VOL2	54,32	44,55	24,87	39,91
VOL3	65,02	44,22	29,18	42,12

TABELA 7. Estimativas das médias (estratificação pelo fator 2).

VARIÁVEIS	ESTRATO I	ESTRATO II	ESTRATO III	POPULAÇÃO
ALT	14,59	14,40	14,59	14,45
VOLT	149,15	117,46	132,87	122,80
DAP	51,24	49,36	50,87	49,20
VOL1	13,66	13,63	27,39	16,60
VOL2	25,61	36,96	54,00	39,91
VOL3	84,96	43,51	24,81	42,12

TABELA 8. Estimativas das médias (estratificação pelo fator 3).

VARIÁVEIS	ESTRATO I	ESTRATO II	ESTRATO III	POPULAÇÃO
ALT	14,7	14,39	14,50	14,45
VOLT	138,23	117,15	140,78	122,80
DAP	51,49	49,39	50,31	49,20
VOL1	8,96	14,29	42,98	16,60
VOL2	69,40	35,72	28,64	39,91
VOL3	40,90	43,30	35,59	42,12

TABELA 9. Estimativa das médias (estratificação pelo fator 4).

VARIÁVEIS	ESTRATO I	ESTRATO II	ESTRATO III	POPULAÇÃO
ALT	14,40	14,44	14,59	14,45
VOLT	135,37	117,92	130,88	122,80
DAP	51,45	49,36	49,84	49,20
VOL1	34,71	13,07	10,10	16,60
VOL2	39,76	40,22	38,50	39,91
VOL3	45,74	41,13	42,27	42,12

TABELA 10. Estimativas das médias (estratificação pelos índices normalizados considerando todos os fatores).

VARIÁVEIS	ESTRATO I	ESTRATO II	ESTRATO III	POPULAÇÃO
ALT	14,82	14,56	13,90	14,45
VOLT	180,99	125,43	76,77	122,80
DAP	52,44	50,11	47,12	49,20
VOL1	36,50	15,98	5,58	16,60
VOL2	54,16	41,74	24,96	39,91
VOL3	60,91	43,44	25,78	42,12

TABELA 11. Estimativas das médias (estratificação pelos índices normalizados considerando os fatores 2, 3 e 4).

VARIÁVEIS	ESTRATO I	ESTRATO II	ESTRATO III	POPULAÇÃO
ALT	14,85	14,60	14,35	14,45
VOLT	156,30	140,26	111,31	122,80
DAP	51,06	50,94	49,12	49,20
VOL1	21,98	17,28	15,87	16,60
VOL2	44,01	46,54	36,15	39,91
VOL3	56,66	48,41	37,80	42,12

FIGURA 1 - Posição geográfica da floresta estudada.

FIGURA 2 - Caracterização espacial da unidade amostral conglomerada.

FIGURA 3 - Croqui da área florestal inventariada.

FIGURA 4 - Mapa caracterizando a estratificação pelo fator 1.

FIGURA 5 - Mapa caracterizando a estratificação pelo fator 2.

FIGURA 6 - Mapa mostrando a estratificação pelo fator 3.

FIGURA 7 - Mapa evidenciando a estratificação pelo fa
tor 4.

FIGURA 8 - Mapa evidenciando a estratificação pelos índices normalizados congregando todos os fatores.

APÊNDICE I - Códigos, classes de importância, nomes vulgares e científicos, família botânica das espécies en contradas.

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
001		Alexa grandiflora Ducke	Melancieira	Leguminoseae
002	III	Anacardium spruceanum Engl.	Caju-Açu	Anacardiaceae
003	II	Aniba burcherllii Kersterm	Louro amarelo	Lauraceae
004		Aniba canelilla Mez.	Preciosa	Lauraceae
005		Annonaceae Gr. Envira	Envira Pinaúba	Annonaceae
006		Annonaceae Gr. Pimenta	Pimenta de Jacu	Annonaceae
007		Apeiba echinata Ducke	Pente de Macaco	Tiliaceae
008		Apuleia molaris Benth	Muiratauã	Leguminoseae
009	III	Aspidosperma sp.	Araracanga	Apocynaceae
010	II	Aspidosperma duckei Huber ex Ducke	Bucheira	Apocynaceae
011	I	Astronium lecointei Ducke	Muiracatiara	Anacardiaceae
012	II	Astronium fraxinifolium Mattick	Aroeira	Anacardiaceae
013	II	Bagasa guianensis Aubl.	Tatajuba	Moraceae
014		Bellutia	Muuba da Mata	Melastomataceae
015	II	Berthollettia excelsa HBK	Castanha do Pará	Lecythidaceae
016	III	Bixa arborea Huber.	Urucu da Mata	Bixaceae
017	III	Bocageopsis multiflora R.E. Fries	Envira Preta	Annonaceae
018	III	Bombax sp.	Mamorana	Bombacaceae

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
019	III	Bombax paraense Ducke	Mungubarana	Bombacaceae
020	I	Bowdichia nitida Spruce	Sucupira	Leguminoseae
021	III	Brosimum spp.	Janitã	Moraceae
022	III	Brosimum spp.	Amapã folha larga	Moraceae
023	III	Brosimum amplicoma Ducke	Amapã Amar- goso	Moraceae
024		Brosimum obovatum Ducke	Mururé	Moraceae
025	III	Brosimum spp.	Amapã doce folha miúda	Moraceae
026		Brosimum vellutinum Ducke	Caxinguba	Moraceae
027	I	Calophyllum brasiliense Camb.	Jacareúba	Guttiferaceae
028	I	Carapa guianensis Aubl.	Andiroba	Meliaceae
029	II	Caryocar villosum Wittm.	Piquiã	Cariocaraceae
030		Cassia apoucouita Benth.	Irari	Leguminoseae
031		Cassia leiandra Sandwith	Mari-mari	Leguminoseae
032		Cassia lucens Huber	Cassia	Leguminoseae
033		Cassia spruceana D.C.	Fava mari-mari	Leguminoseae
034	I	Cedrela odorata L.	Cedro vermelho	Meliaceae
035	I	Ceiba pentandra Bakh	Sumatã	Bombacaceae
036		Chaunochi Kappleri Ducke	Lacrão	Olacaceae
037	I	Clarisia racemosa R. Pav.	Guariúba	Moraceae
038		Coccoloba sp.	Tinteiro	Poligonaceae

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
039		Connarus angustifolius Schellenb	Connarua	Connaraceae
040	II	Copaifera duckei Dwyer	Copaíba	Leguminoseae
041	I	Cordia goeldiana Huber	Freijó verda deiro	Borraginaceae
042	II	Cordia bicolor A.DC.	Freijó branco	Borraginaceae
043		Conceveiba guianensis Ducke	Maravuvia	Euphorbiaceae
044		Couepia bracteosa Ducke	Pajurá da mata	Rosaceae
045		Couma spp.	Marfim preto	Apocynaceae
046	II	Couma guianensis Aubl.	Sorva	Apocynaceae
047	III	Crudia glaberrima Macbr.	Fava-Ipê	Leguminoseae
048		Dialium guianensis Aubl.	Jutai-pororoca	Leguminoseae
049	II	Didymopanax morototoni Mar_ chal	Morototó	Araliaceae
050	II	Dinizzia excelsa Ducke	Angelim pedra	Leguminoseae
051	III	Diospyros guianensis Ducke	Caqui	Ebenaceae
052	III	Diospyros praetermissa San_ dwith	Caqui	Ebenaceae
053	II	Dipteryx odorata Ducke	Cumaru	Leguminoseae
054	I	Diplotropis spp.	Sucupira	Leguminoseae
055	III	Endopleura uchi Cuatr.	Uchi liso	Humiriaceae
056	III	Enterolobium maximum Ducke	Fava timbaúba	Leguminoseae
057	II	Enterolobium schomburgkii Benth	Fava de rosca	Leguminoseae

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
058	III	<i>Erisma uncinatum</i> Warm.	Quarubarana	Vochysiaceae
059		<i>Eschweilera amara</i> Ndz.	Matã-matã ver- melho	Lecytidaceae
060		<i>Eschweilera amazonica</i> R. Knuth	Matã-matã	Lecythidaceae
061		<i>Eschweilera odora</i> Warm.	Matã-matã branco	Lecythidaceae
062		<i>Eschweilera</i> spp.	Matã-matã preto	Lecythidaceae
063		<i>Eugenia</i> spp.	Goiabinha	Mirtaceae
064	III	<i>Fagara</i> spp.	Tamanqueira	Rutaceae
065		<i>Fusaea longifolia</i> Safford	Envira suru- cucu	Annonaceae
066	III	<i>Glycydendron amazonicum</i> Ducke	Mirindiba do ce	Euphorbiaceae
067		<i>Guarea costata</i> C. DC.	Jatuauba preta	Meliaceae
068		<i>Guatteria amazonica</i> R.E. Fries	Envira branca	Annonaceae
069	II	<i>Goupia glabra</i> Aubl.	Cupiúba	Celastraceae
070		<i>Heisteria flexuosa</i> Engl.	Não encontra- da	Oleaceae
071	III	<i>Hevea</i> spp.	Seringa fraca da mata	Euphorbiaceae
072	III	<i>Hevea</i> spp.	Seringueira	Euphorbiaceae
073	III	<i>Hevea spruceana</i> Ducke	Seringa barri- guda	Euphorbiaceae

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
074		Hippecratea volubitis Ubr.	Fava de arara	Hippocrateaceae
075	II	Holopyxidium jarana Ducke	Jarana	Lecythidaceae
076		Hymattanthus sucuuba Warm	Sucuuba	Apocynaceae
077	II	Hymenaea courbaril L.	Jutai-açu	Leguminoseae
078	II	Hymenaea parvifolia Huber	Jutai mirim	Leguminoseae
079	III	Hymenolobium spp.	Angelim da mata	Leguminoseae
080		Inga alba Wille	Ingã-chichi	Leguminoseae
081		Inga gracilifolia Ducke	Ingã	Leguminoseae
082	III	Jacaranda copaia Bur.	Paraparã	Bignoniaceae
083		Laetia procera (Poepp) Eichl	Pau Jacaré	Flacourtiaceae
084	III	Não identificado Nº 1		
085	II	Lecythis usitata var. paraensis R. Knuth	Castanha sapucaia	Lecythidaceae
086		Licania heterophylla Aubl.	Macucu	Rosaceae
087		Licania incana Aubl.	Caraípe	Rosaceae
088		Licania micrantha	Caraíperana	Rosaceae
089		Luhea procera Mart.	Açoita cavalo	Tiliaceae
090	II	Manilkara huberi Ducke	Maçaranduba	Sapotaceae
091	II	Manilkara paraensis	Maparajuba	Sapotaceae
092	III	Maquira sclerophylla Aubl.	Muiratinga Folha larga	Moraceae
093		Maytenus guianensis	Chichuá	Celastraceae

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
094	II	Mezilaurus itauba Taubert ex Mez.	Itauba	Lauraceae
095	II	Mezilaurus lindaviana Mez	Itauba amarela	Lauraceae
096		Micropholis spp.	Abiurana	Sapotaceae
097		Micropholis guyanensis	Rosadinha	Sapotaceae
098		Myrcia falax	Murta	Myrtaceae
099		Neea spp.	João mole	Nyctaginaceae
100	III	Nectandra spp.	Louro	Lauraceae
101		Não identificado Nº 2		
102	III	Ocotea guianensis Kosterm	Louro branco	Lauraceae
103	III	Ocotea spp.	Louro preto	Lauraceae
104	I	Ocotea rubra Mez.	Louro verme- lho	Lauraceae
105		Ormosia coccinea Rudd.	Tento	Leguminoseae
106	III	Brosimum spp.	Amapá doce	Apocynaceae
107	II	Hymenolobium excelsum Benth	Angelim da mata	Leguminoseae
108	III	Parkia pendula R. Benoist	Visgueiro	Leguminoseae
109	III	Parkia multijuga Benth.	Paracá Grd.da Terra firme	Leguminoseae
110	III	Vataireopsis Ducke	Fava amargosa	Leguminoseae
111	III	Peltogyne spp.	Coatá-quicaua	Leguminoseae
112	III	Perebea spp.	Muiratinga <u>pe</u> luda	Moraceae
113		Piptadenia spp.	Fava folha fina	Leguminoseae

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
114		Pithecelobium cauliflorum Lindm.	Ingarana	Leguminoseae
115	I	Pithecelobium recemosum Ducke	Angelim <u>raja</u> do	Leguminoseae
116	I	Platymiscium filipes Benth	Macacaúba	Leguminoseae
117		Phyllanthus sp.	Ginja	Euphorbiaceae
118		Pogonophora schomburgkiana Benth	Amarelinho	Euphorbiaceae
119		Pouteria spp.	Abiurana	Sapotaceae
120		Pouteria spp.	Abiurana	Sapotaceae
121		Pouteria spp.	Abiurana fru <u>ta</u> tão	Sapotaceae
122		Pouteria spp.	Abiurana pelu <u>da</u>	Sapotaceae
123		Pouteria spp.	Abiu pitomba	Sapotaceae
124		Pouteria spp.	Abiurana cas <u>ca fina</u>	Sapotaceae
125		Pouteria engleri Eyma	Abiurana C. grossa	Sapotaceae
126		Pouteria laurifolia Ducke	Abiu seco	Sapotaceae
127		Pouteria macrophylla Eyma	Abiurana cu <u>tite</u>	Sapotaceae
128		Protium spp.	Breu	Burseraceae
129		Protium giganteum Engl.	Breu vermelho	Burseraceae

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
130		<i>Protium pallidum</i> Cuatr.	Breu branco	Burseraceae
131	II	<i>Qualea alboflora</i> Warm.	Mandioqueira	Vochysiaceae
132		<i>Rollinia exsucca</i> R.E.Fries	Envira preta	Annonaceae
133	III	<i>Roupala</i> spp.	Faiera	Proteaceae
134	III	<i>Saccoglottis guianensis</i> Ducke	Achua	Humiriaceae
135		<i>Sclerolobium guianensis</i> Dwyer	Tachi	Leguminoseae
136		<i>Sclerolobium</i> aff. <i>chrysophyllum</i> , Poepp. & Endl.	Tachi <u>vermelho</u>	Leguminoseae
137	III	<i>Tachigalia alba</i> Ducke	Tachi branco	Leguminoseae
138	II	<i>Simaruba amara</i> Engl.	Marupá	Simarubaceae
139		<i>Symplocos</i> spp.	Não encontrado	Symplocaceae
140		<i>Symplocos</i> spp.	Não encontrado	Symplocaceae
141		<i>Simaruba guianensis</i> A.Dc.	Capitu	Monimiaceae
142		<i>Sloanea grandiflora</i> L.	Urucurana	Tiliaceae
143		<i>Sterculia</i> spp.	Achichá	Sterculiaceae
144		<i>Stryphnodendron pulcherrimum</i>	Fava <u>barbatimão</u>	Leguminoseae
145		<i>Swartzia</i> spp.	Não encontrado	Leguminoseae
146	III	<i>Swartzia</i> spp.	Não encontrado	Leguminoseae
147		<i>Swartzia</i> spp.	Não encontrado	Leguminoseae

CÓDIGO	CLASSE	NOME CIENTÍFICO	N. VULGAR	FAMÍLIA
148		Swartzia spp.	Não encontra <u>do</u>	Leguminosae
149	III	Symphonia globulifera Ducke	Anani	Guttiferaceae
150	II	Tabebuia serratifolia Rolfe.	Pau d'arco <u>a</u> marelo	Bignoniaceae
151		Sclerolobium spp.	Tachi preto folha miúda	Leguminosae
152	III	Tachigalia myrmecophila Ducke	Tachi preto folha grande	Leguminosae
153		Talisia spp.	Pitomba	Sapindaceae
154		Talisia spp.	Pitomba de leite	Sapindaceae
155	III	Terminalia spp.	Cuiarana	Combretaceae
156		Tapirira guianensis Engler	Tatapiririca	Anacardiaceae
157	III	Trattinickia rhoifolia Engler	Breu Sucuruba	Burseraceae
158		Trichilia hirsuta Benth	Chachuá	Meliaceae
159		Trichilia spp.	Não encontrado	Meliaceae
160	III	Vantanea spp.	Uchirana	Humiriaceae
161	III	Vatairea guianensis Aubl.	Fava Grd. do Igapô	Leguminosae
162	III	Virola spp.	Ucuuba terra firme	Myristicaceae
163	III	Virola spp.	Ucuuba folha peluda	Myristicaceae
164	III	Virola sebifera Aubl.	Ucuuba verme <u>l</u> ha	Myristicaceae
165		Vitex spp.	Taruma	Verbenaceae
166	I	Vochysia maxima Ducke	Quaruba ver- dadeira	Vochysiaceae
167	III	Byrsonima crispa Juss	Muruci da mata	Malpighyaceae

APÊNDICE III - Matriz dos dados.

SUBUN.	ALT	VOLT	DAP	VOL1	VOL2	VOL3	SUBUN.	ALT	VOLT	DAP	VOL1	VOL2	VOL3
1084	15.53	89.8851	55.79	15.2679	10.7658	28.6743	2073	14.08	87.3460	46.99	6.3934	32.5355	27.3946
2074	15.47	92.9546	49.49	7.2540	27.2398	36.5445	3093	13.15	91.0013	57.36	5.1683	24.5330	42.2641
3081	15.50	84.7461	46.14	1.5574	38.4199	19.8515	3071	14.62	89.1716	45.89	10.4342	16.5319	30.5634
3063	14.16	82.3655	45.65	6.1081	26.6914	29.6269	3052	13.86	84.6550	44.80	1.2375	22.4687	31.2414
3031	14.13	84.9615	41.61	0.0000	39.9998	27.5241	3011	13.19	88.3770	44.58	17.9806	20.7922	27.2778
4091	9.72	87.0492	56.68	0.0774	22.9414	40.7123	4073	14.12	87.3697	49.91	10.4762	41.5436	16.3283
4051	15.01	85.9341	51.45	2.7446	26.1756	37.1840	6012	13.74	88.7029	46.72	8.7071	41.6384	17.0835
3094	12.25	72.4822	49.87	0.0774	38.2430	20.6669	3053	14.20	80.8730	47.56	0.7753	29.2549	28.6446
3054	12.74	65.6325	40.53	0.0774	26.9830	19.2505	3041	14.06	78.1216	43.62	2.3745	35.4283	23.2113
3042	13.20	63.4088	47.28	1.0718	31.3277	13.6232	3043	14.33	74.5058	44.78	0.0774	36.7021	23.7121
3044	13.60	78.2701	44.89	0.0774	43.1480	10.8030	3013	12.98	69.5204	47.12	8.7256	6.5238	31.5082
4092	11.15	72.6587	48.38	2.5664	15.5194	33.7492	4081	16.23	76.2249	52.53	0.0000	28.4890	30.3104
5093	12.65	74.0780	47.54	2.9823	12.6812	30.1949	5094	13.67	69.2628	48.96	0.0774	29.2520	33.0644
5083	15.32	74.1394	53.94	3.5618	49.6914	7.7010	5084	15.26	82.6435	41.52	5.1622	15.8929	22.2207
5071	14.39	47.6141	47.74	6.1304	6.4729	18.2585	5063	14.50	58.1335	44.46	5.2470	11.8895	26.2124
5011	13.61	76.0414	44.79	10.6266	25.8694	33.6238	4043	14.04	57.1273	41.75	0.0000	25.9226	19.2886
4011	14.32	77.0563	44.72	7.1669	26.4809	26.3816	2084	13.92	51.0670	44.49	0.0774	9.7262	4.2638
3032	14.63	82.4319	45.47	4.6462	9.5904	31.3315	5064	12.86	72.1965	42.79	9.5151	10.3720	32.1308
5013	14.82	71.8078	45.70	0.7669	39.0680	19.6414	5091	9.83	38.1624	41.67	0.0774	14.8841	13.0421
3083	15.17	73.9907	52.10	11.3591	27.1167	16.8583	5074	14.48	84.7171	47.09	33.8907	8.3538	29.4744
7043	12.11	84.1006	44.63	15.0258	20.8044	44.1243	6004	14.90	87.7631	50.37	14.2702	25.5776	19.9925
4082	16.19	82.5853	46.81	0.0000	29.8752	36.0793	7021	14.73	151.5317	49.50	62.1996	47.1538	19.8894
2082	16.37	135.6723	53.27	3.2244	92.1153	14.0669	3073	14.79	147.4200	51.60	33.5772	67.2972	5.2004
3023	14.02	160.3199	54.08	31.6570	84.2509	29.2683	4041	16.05	158.4658	54.53	4.4768	83.8970	48.7633
5092	13.76	143.6806	53.22	4.6275	105.6106	16.3237	5061	13.82	119.2915	47.44	13.6330	15.0533	73.4709
5022	14.02	155.9681	52.37	26.5148	33.0360	42.2030	1092	13.74	106.8638	50.71	1.3564	26.7196	51.2078
1093	16.36	124.3266	52.86	6.0365	17.7037	69.3617	1094	14.73	142.3630	51.72	4.6805	31.9872	66.2923
1081	14.33	147.0148	50.53	19.8713	34.3694	64.1428	1082	15.04	100.1466	48.47	22.4583	15.8294	51.7815
1083	15.71	136.6623	49.78	8.5763	75.0470	39.9125	1071	14.17	118.0881	48.47	5.2203	54.8197	38.4261
1073	14.11	123.5931	49.91	21.6139	56.9794	18.6747	1074	12.85	95.9810	46.13	8.6363	21.1922	44.1845
2091	15.01	139.4928	52.97	22.4750	69.5577	26.4975	2092	15.92	133.1722	60.02	21.9564	42.3582	52.7679
2093	14.87	104.9206	49.18	16.7420	27.4609	34.8551	2094	17.17	146.1662	50.38	33.1571	37.8690	42.9480
2081	14.15	92.3027	46.53	2.0001	39.4984	41.5949	2083	14.79	93.0565	48.36	1.7363	15.8952	50.7546
2071	14.19	119.9535	47.10	18.7486	34.6817	26.0058	2072	15.12	93.5265	48.09	9.4892	27.3802	22.6131
3092	13.45	102.6573	57.32	0.0774	22.1095	61.1405	3082	15.01	108.3500	48.15	0.0000	46.2664	42.9437
1084	15.30	95.8986	48.52	7.7383	37.4491	14.9458	3072	14.51	123.4915	53.99	46.6880	38.2052	20.5622
3061	14.27	110.2936	49.87	8.9703	14.4849	48.9802	3062	14.38	113.8704	48.44	26.9067	38.4209	19.5625
3064	14.66	120.7561	50.39	7.6971	33.1025	37.9056	3051	14.35	93.6166	53.34	1.3833	49.5993	29.4743
3033	14.17	124.4213	45.63	15.8269	37.9844	37.2945	3034	14.53	135.6467	48.31	3.9164	63.2318	36.4611
3022	14.56	141.4310	49.35	13.0945	50.1650	40.9648	3024	14.27	152.4819	50.44	16.4891	54.8845	45.6139
3012	15.09	115.3424	51.49	13.4876	56.2303	36.6396	3014	13.75	101.7829	42.73	20.6011	25.3289	44.8429
4093	12.91	124.1640	61.28	4.4261	63.0769	43.4054	4094	12.74	106.2688	53.69	2.0463	46.6643	46.6541
4083	13.42	109.4735	53.81	9.8511	44.0797	17.9092	4084	16.48	110.8475	50.12	0.0000	54.1409	25.2098
4071	16.14	142.0389	49.99	8.9206	37.0585	72.9176	4072	15.18	120.0408	47.17	3.3443	67.4079	28.4943
4061	16.10	142.4737	52.11	34.6782	38.0564	46.8064	4062	14.93	138.3378	46.99	39.5423	35.4655	32.5993
4064	14.19	97.0012	50.44	29.9728	18.5346	27.9765	4052	16.39	105.4220	49.49	5.8572	47.6144	33.4651
4053	13.93	131.2556	46.95	3.9462	59.4662	43.0441	4054	15.85	129.0052	46.15	3.7490	47.8593	39.3315
4042	15.50	109.8839	45.52	0.0000	39.7119	52.6233	4031	14.21	128.3197	46.55	0.0000	42.8942	58.2900
4032	15.91	107.8687	47.08	6.1357	41.3867	42.8492	4033	15.24	113.3725	47.53	12.3586	43.8531	31.1848
4034	16.30	107.8452	52.71	10.1926	44.3293	39.4747	4023	14.95	147.8282	54.81	21.5066	63.0677	38.9677
4024	15.13	132.0014	53.33	16.3090	57.8445	27.6792	4012	15.17	132.2373	51.45	38.3197	15.9460	51.5835
4013	14.63	127.4818	46.30	11.9614	42.6362	39.5313	4014	14.77	143.6209	50.47	17.8829	36.9973	58.1086

SUBUN.	ALT	VOLT	DAP	VOL1	VOL2	VOL3	SUBUN.	ALT	VOLT	DAP	VOL1	VOL2	VOL3
5081	16.12	145.2978	50.15	29.2437	53.2640	35.4701	5082	16.12	118.0885	51.52	22.2611	36.7247	35.5321
5072	14.87	114.2653	47.18	12.4699	38.6020	43.7271	5073	15.86	140.1567	50.87	24.0284	38.1754	40.5642
5062	14.55	103.8129	53.05	31.4390	44.1253	15.6844	5052	15.25	146.4219	54.91	14.3301	69.1138	48.9432
5054	13.65	108.1405	48.49	7.0833	38.2959	42.2432	5041	16.02	147.3414	48.86	26.7845	31.3972	66.3163
5031	16.12	142.2186	48.19	8.1464	44.0537	71.4139	5033	14.23	122.3332	48.20	6.6462	21.6540	64.6908
5034	13.83	94.4741	45.93	3.1607	26.3829	37.6851	5021	14.54	142.6302	49.56	22.2449	53.4363	54.0428
5023	14.55	123.4919	48.67	10.3392	55.6053	36.3155	5024	13.95	103.2139	46.76	26.6664	10.1832	33.6497
5012	14.06	129.9865	48.81	25.1185	53.3690	35.2665	5014	15.79	125.1054	50.10	34.5274	58.2045	21.6430
6084	15.42	104.9161	47.95	2.3083	31.7143	45.4582	6071	13.88	128.1377	55.34	1.2829	40.9985	64.8186
6072	13.88	111.3443	48.49	19.8017	13.3325	55.3935	6074	15.48	118.7605	50.33	27.3882	31.9830	37.3789
6073	13.58	98.1044	51.72	27.8618	19.9010	26.7871	6062	12.63	135.9918	48.49	6.2778	66.0183	46.0725
6051	14.51	117.7313	49.29	32.6333	51.1232	19.0515	6053	14.59	122.0495	51.90	13.5464	41.2633	54.6440
6054	13.68	128.1096	51.86	11.8591	36.3472	53.8252	6041	15.82	139.2592	52.82	19.8206	36.0940	68.4554
6042	13.59	155.8163	49.74	29.3602	47.6030	56.9500	6044	15.21	130.9545	50.58	30.8801	32.6031	46.0150
6032	13.80	110.9276	46.58	23.7692	21.6373	44.0845	6033	14.93	107.4037	48.15	19.9123	35.7552	28.2109
6013	14.67	149.9336	47.21	8.0299	57.8774	55.6765	6014	13.80	104.3351	49.18	15.8469	53.0706	20.0345
6002	14.23	117.1640	51.59	14.2765	42.7034	42.9534	7081	14.96	139.2249	50.08	1.7760	46.4421	64.9704
7083	14.20	110.2373	47.27	0.0774	34.4876	37.5018	7084	15.94	152.5922	53.07	3.3674	46.7469	64.8066
7071	13.83	134.0900	49.69	6.8716	23.8618	68.9984	7073	12.74	114.0076	50.86	0.6479	18.7070	59.1405
7074	14.19	97.6840	52.63	19.8348	21.3725	48.5455	7061	14.07	154.1652	56.70	36.4179	32.1698	63.3242
7062	12.69	126.5169	48.81	1.4659	41.8506	63.2533	7063	12.38	104.8449	50.48	7.2708	24.4101	35.9781
7052	13.95	120.3177	51.04	7.0017	38.9577	41.5474	7053	14.86	141.0435	49.66	7.5205	39.9944	61.0401
7054	13.81	98.6302	47.18	19.2651	20.1532	36.5241	7041	12.27	138.3084	52.28	39.8827	44.7659	38.1772
7044	12.40	99.3037	46.11	20.6760	22.9849	40.6504	7031	13.92	114.7302	46.51	12.3465	37.0931	38.1871
7033	14.87	120.2857	49.07	22.5298	46.0195	30.3399	7023	15.08	106.1605	45.44	9.1042	33.2062	48.5514
7024	14.90	147.9737	55.38	45.5158	37.4199	54.3350	7011	14.17	130.8649	56.60	40.8214	46.5548	23.7270
7012	13.45	103.4606	45.81	4.6785	29.3462	47.8953	7013	14.18	104.5969	51.97	8.5792	45.3514	33.1761
7014	14.22	139.0050	55.20	26.8539	60.5616	38.2213	7003	14.39	103.8877	47.71	18.2607	50.1108	13.6916
7032	14.30	127.4943	47.73	16.3781	8.4507	87.3599	7034	13.05	107.4352	46.96	37.2648	24.2413	18.2660
4044	14.94	137.4869	51.82	3.3673	74.1001	31.0338	6064	14.23	162.4811	49.06	23.4058	76.5185	47.8821
6034	14.45	161.5088	47.39	41.8210	47.3613	29.0165	7051	15.05	134.8249	49.47	17.0811	23.2726	84.2229
5044	13.85	156.5022	52.37	21.0401	20.5239	87.4305	6003	12.59	114.2937	49.83	25.2443	48.2847	23.5637
1072	13.75	104.0773	48.97	1.6883	21.5769	25.1269	4074	15.81	155.5606	50.63	2.0195	74.1248	51.9068
7064	12.34	124.5726	48.43	39.6629	10.6375	47.7221	5032	15.58	157.4042	47.69	10.0500	19.6607	89.5121
6082	15.76	158.7056	53.45	1.0171	49.3309	66.2350	6031	14.60	161.1587	47.14	8.7907	59.1864	69.2818
6001	13.53	147.5419	50.32	13.4533	84.0116	31.8273	6043	15.32	134.9714	52.84	26.0673	21.3607	72.4747
3021	14.73	174.5112	48.88	35.8678	40.2023	60.4328	3091	13.56	168.3202	57.93	25.3648	68.2460	32.9853
4022	15.15	188.3988	52.21	24.7425	89.0981	53.4130	7042	12.83	168.8829	53.28	59.9964	48.9424	51.7712
4021	14.86	203.7607	53.92	27.1744	89.1957	43.7629	6011	14.83	165.1668	51.02	19.6487	89.5267	42.7502
1091	15.20	172.0574	55.49	8.5507	73.9206	61.1076	5051	14.02	177.5481	53.08	10.4463	46.4134	87.7188
5053	13.76	195.1255	53.59	39.5388	62.9655	76.4975	6022	15.11	172.2741	49.12	55.9260	38.6973	39.1861
6023	13.81	180.1233	50.25	56.4178	45.9902	41.7042	6024	16.05	203.7940	50.28	41.9683	60.9771	64.6545
7022	14.96	163.0658	51.07	71.8191	36.7770	35.8166	7001	13.96	173.8114	50.41	22.1655	59.1912	58.1298
7002	15.25	170.6683	52.16	33.7601	55.5909	60.5571	3074	15.31	159.9600	48.73	45.7654	37.5979	15.0127
4063	15.14	187.0222	61.57	71.4591	42.1592	40.0595	5043	13.57	174.5297	53.13	10.0110	22.7086	117.0595
6083	15.98	174.4017	52.87	56.7822	13.5527	55.3577	6061	16.07	198.9912	53.41	13.9154	94.8083	78.6493
6063	14.30	201.2051	50.91	20.3709	49.5092	91.7233	6021	15.86	233.9733	54.39	92.3114	67.9557	48.9128
7072	13.96	186.0994	51.30	17.4207	29.1065	110.0468	7004	14.23	195.2550	49.56	69.7999	34.6837	62.6225
7082	15.32	163.8518	53.30	5.8497	51.9188	77.2190	6052	15.08	171.9045	52.12	36.4603	52.6268	71.1386
6081	16.00	176.7127	53.64	8.1713	76.7397	55.8455	5042	16.07	166.2186	50.69	40.3640	37.2456	71.2320

APÊNDICE III - Valores dos escores fatoriais.

SUBUN.	FATOR 1	FATOR 2	FATOR 3	FATOR 4	SUBUN.	FATOR 1	FATOR 2	FATOR 3	FATOR 4
1084	2.56532	-0.02350	-1.25216	-2.44229	2073	2.49334	-0.07054	0.37058	-1.68709
2074	2.65744	0.39327	0.13944	-1.70838	3093	2.59768	0.80091	0.24539	-1.49794
3081	2.41913	-0.49195	0.60821	-2.21698	3071	2.54545	0.10401	-0.73391	-2.36291
3043	2.35117	0.17438	0.20602	-1.57813	3052	2.41653	0.24103	-0.10705	-2.54825
3031	2.42527	-0.01853	1.00562	-1.65811	3011	2.52277	-0.09906	-0.54517	-1.33727
4091	2.42497	0.79492	0.22326	-2.01373	4073	2.49402	-0.77582	0.59414	-1.41453
4051	2.45304	0.58123	0.34464	-1.67507	6012	2.53208	-0.75410	0.58338	-1.67246
3094	2.06905	-0.18990	1.06446	-1.28295	3053	2.30857	0.14746	0.41994	-1.96098
3054	1.37352	-0.13312	0.42539	-1.73597	3041	2.23003	-0.13550	0.02510	-2.30509
3042	1.31004	-0.44368	0.60797	-1.54485	3043	2.12681	-0.04316	0.99018	-1.33959
3044	2.23426	-0.92954	0.83548	-2.22782	3013	1.98450	0.57032	-0.73393	-1.60918
4092	2.07408	0.64725	-0.09179	-1.69807	4081	2.17588	0.34559	0.59533	-1.57714
5093	2.11460	0.39840	-0.48438	-2.29767	5094	1.97715	0.46881	0.58190	-0.94016
5083	2.11635	-1.05116	1.33491	-1.19415	5084	2.35911	-0.28131	-0.86796	-3.20030
5071	1.35917	0.18190	-0.47194	-1.18712	5063	1.65945	0.46144	-0.14715	-1.09373
5011	2.17064	0.54445	0.50815	-0.23802	4043	1.63073	0.03855	0.64690	-1.10909
4011	2.19962	0.07586	0.24906	-1.29588	2084	1.45773	-0.75596	-0.87825	-3.11942
3032	2.35307	0.30169	-0.96348	-2.96562	5064	2.06089	0.54841	-0.53222	-1.39510
5013	2.04979	-0.24721	1.09982	-1.18423	5091	1.08936	0.04446	0.27767	-0.87985
3083	2.11211	-0.46052	0.03851	-1.27316	5074	2.41830	0.10481	-1.26663	0.06442
7043	2.40070	1.04090	0.25159	0.08980	6004	2.50525	-0.54120	-0.44183	-1.95148
4082	2.35744	0.57442	0.68622	-1.53433	7021	4.32556	-1.90417	-1.21906	0.04956
2082	3.87285	-1.93028	2.49385	-2.55103	3073	4.20819	-2.72425	-0.11232	-2.63834
3023	4.57643	-1.49693	1.58345	-0.59123	4041	4.52350	-0.21129	2.42216	-2.06154
5092	4.10145	-1.96427	3.27442	-1.79657	5061	3.40525	2.17901	-0.27129	-1.03816
5022	4.45220	-0.53524	-1.46155	-3.79474	1092	3.05049	1.04167	0.19035	-2.38462
1093	3.54898	1.82917	-2.49642	-2.49642	1094	4.06384	1.30246	-0.07835	-3.25617
1081	4.19663	1.01580	-0.20944	-1.89086	1082	2.85874	1.19422	-0.39120	-0.13384
1083	3.90111	-0.32600	2.19281	-1.18529	1071	3.37089	-0.01852	1.33134	-1.73354
1073	3.52804	-1.38280	0.51019	-1.73427	1074	2.73983	0.81636	-0.11675	-1.63457
2091	3.98191	-1.22738	1.16178	-1.32156	2092	3.80148	0.57191	0.42396	-0.78017
2093	2.99502	0.03813	-0.34652	-1.71409	2094	4.11720	-0.31324	-0.76302	-1.75152
2081	2.63486	0.71280	1.24875	-0.88872	2083	2.65635	1.29830	-0.13165	-2.07582
2071	3.42414	-0.82375	-0.69124	-2.91887	2072	2.66977	-0.48967	-0.40513	-2.64968
3092	2.93041	1.75505	0.39185	-1.69594	3082	3.09291	0.47212	1.23492	-1.83229
3084	2.73748	-1.02478	-0.04769	-2.90563	3072	3.52514	-1.27003	-0.82127	-0.06205
3061	3.14840	0.83886	-0.91553	-2.92597	3062	3.25050	-1.11932	-0.47088	-1.67972
3064	3.44705	-0.08069	-0.35338	-3.41958	3051	2.67234	-0.07736	1.48111	-1.27634
3033	3.55168	-0.20989	-0.17512	-2.43934	3034	3.87212	-0.49960	1.25413	-2.87343
3022	4.03723	-0.32924	0.26078	-2.92291	3024	4.35269	-0.26809	0.36597	-2.68621
3012	3.29252	-0.08811	1.44465	-0.55588	3014	2.90545	0.71878	-0.02696	-0.33352
4093	3.54433	0.16879	1.91833	-1.24153	4094	3.03351	0.75918	1.48846	-1.03332
4083	3.12499	-1.11611	0.07349	-3.00940	4084	3.16421	-0.69318	1.04404	-2.90890
4071	4.05459	1.67016	0.51485	-1.82959	4072	3.42664	-0.69172	1.79647	-1.96791
4061	4.06700	0.00038	-0.47479	-0.91323	4062	3.94893	-0.80710	-1.07117	-1.38842
4064	2.76896	-0.23812	-1.00368	-0.75054	4052	3.00933	0.24377	1.25593	-1.39789
4053	3.74677	0.00255	1.38418	-2.24575	4054	3.68253	-0.16898	0.48336	-3.31076
4042	3.13670	1.05120	1.07219	-1.67552	4031	3.66296	1.05487	0.83639	-2.47273
4032	3.07918	0.47227	0.87992	-1.46200	4033	3.23628	-0.37421	0.41060	-1.96729
4034	3.07850	0.25569	0.96202	-1.01716	4023	4.21984	-0.60560	0.83045	-1.60199
4024	3.76806	-0.98236	0.63627	-2.24604	4012	3.77479	0.52475	-1.54096	-0.95933
4013	3.63904	-0.13220	0.14795	-2.60205	4014	4.09974	0.70596	-0.12507	-2.13916
5081	4.14761	-0.77483	0.10431	-1.55186	5082	3.37091	-0.20024	-0.12137	-1.38132
5072	3.26177	0.39630	0.47618	-1.39188	5073	4.00086	-0.32915	-0.59963	-2.49791
5062	2.96340	-1.17220	0.13911	-0.15778	5052	4.17970	0.04564	1.76053	-1.02300
5054	3.08693	0.43492	0.62597	-1.65538	5041	4.20595	1.13668	-0.37051	-1.15850
5031	4.34517	1.36577	0.60773	-2.35880	5033	3.49207	1.58472	-0.21027	-2.32235
5034	2.69682	0.44077	0.07492	-2.29674	5021	4.07146	0.44610	0.93127	-0.58295
5023	3.52515	-0.26603	1.10761	-1.69847	5024	2.94630	0.00519	-1.60428	-1.85844

SUBUN.	FATOR 1	FATOR 2	FATOR 3	FATOR 4	SUBUN.	FATOR 1	FATOR 2	FATOR 3	FATOR 4
5012	3.71054	-0.47635	0.64743	-0.75422	5014	3.57121	-1.24806	0.62817	0.01097
6084	2.99489	0.71143	0.39365	-2.20778	6071	3.65777	1.45177	1.00174	-1.91054
6072	3.17839	1.20476	-0.81746	-1.28402	6074	3.39009	-0.09917	-0.42977	-1.04917
6073	2.80045	-0.33180	-0.98184	-1.08089	6062	3.88197	0.08826	1.80484	-1.58950
6051	3.36071	-1.25077	0.28013	-0.36486	6053	3.48398	0.91986	0.81465	-0.78367
6054	3.65696	0.75772	0.22211	-1.94858	6041	3.97524	1.43593	0.35176	-0.74331
6042	4.44787	0.36440	0.14609	-1.06356	6044	3.73817	0.19165	-0.47500	-0.87338
6032	3.16649	0.49200	-0.64369	-1.07486	6033	3.06590	-0.44022	-0.09485	-1.45251
6013	4.27994	0.41467	1.08849	-2.40548	6014	2.97831	-0.90310	0.96314	-0.98899
6002	3.34452	0.28587	0.64347	-1.15051	7081	3.97426	1.22992	1.00597	-2.36170
7083	3.14679	0.11042	0.11184	-3.36693	7084	4.35584	0.95197	0.55483	-3.28677
7071	3.82768	1.60528	-0.30310	-2.76413	7073	3.25441	1.40616	-0.33320	-3.03474
7074	2.78845	1.04097	-0.01659	-0.05850	7061	4.40074	0.80699	-0.67693	-0.75486
7062	3.61150	1.38343	1.05359	-1.82726	7063	2.99286	0.12920	-0.49634	-2.96655
7052	3.43454	0.14977	0.22579	-2.69387	7053	4.02617	0.94922	0.31465	-2.67193
7054	2.81546	0.27311	-0.59845	-1.32135	7041	3.94810	-0.46529	-0.18065	-0.12372
7044	2.83468	0.51266	-0.26393	-0.63889	7031	3.27504	0.04459	0.14155	-2.02693
7033	3.43363	-0.57902	0.27327	-1.23807	7023	3.03041	0.86798	0.55758	-1.13379
7024	4.22400	0.34984	-0.44612	0.50217	7011	3.73562	-1.22156	-0.33959	-0.45090
7012	2.95334	0.89330	0.36004	-1.78413	7013	2.98578	-0.06940	0.91474	-1.37604
7014	3.96798	-0.47971	0.96780	-0.47945	7003	2.96554	-1.29037	0.51664	-1.43546
7032	3.63940	2.88579	-0.51291	-0.76215	7034	3.06680	-1.06736	-1.13297	-1.13297
4044	3.92465	-0.88592	1.77349	-2.68453	6064	4.63812	-0.36208	1.66907	-0.81560
6034	4.61037	-1.50761	-1.16151	-2.43372	7051	3.84866	2.52540	0.18225	-0.38943
5044	4.46745	2.29560	-0.65426	-1.68526	6003	3.26258	-0.88443	0.38610	-0.78783
1072	2.97095	-0.52329	-1.07648	-4.70607	4074	4.44057	0.05617	1.93863	-2.62380
7064	3.55400	0.44297	-1.80741	-0.89260	5032	4.49320	2.41867	-0.65130	-2.97699
6082	4.53035	0.91981	0.58844	-3.75647	6031	4.60037	1.03615	1.35704	-1.96332
6001	4.21167	-1.06072	2.14569	-1.48564	6043	3.85284	1.78221	-0.42340	-0.46354
3021	4.98153	0.20899	-0.92415	-2.16648	3091	4.80480	-1.39393	0.30933	-2.95351
4022	5.37796	-0.54912	1.88367	-1.38356	7042	4.82086	-0.25708	-0.47322	1.15357
4021	5.81647	-1.45789	0.98587	-3.18709	6011	4.71479	-0.74618	2.32986	-0.88966
1091	4.91148	0.29640	1.68960	-2.47065	5051	5.06822	1.87749	0.51671	-2.65096
5053	5.56994	0.77106	0.60859	-0.31302	6022	4.91767	-1.09524	-1.80639	-1.49660
6023	5.14173	-1.10200	-1.45651	-1.30710	5024	5.81742	-0.14410	-0.29798	-1.92166
7022	4.65481	-1.13973	-1.78546	0.73794	7001	4.96155	0.07542	0.41692	-2.42266
7002	4.87193	0.27778	0.33338	-0.86210	3074	4.56615	-2.34305	-2.35205	-3.77873
4063	5.33866	-1.35270	-2.05806	-0.52160	5043	4.98206	3.79639	0.02577	-1.85699
6083	4.97840	-0.09911	-3.08047	-2.19725	6061	5.68032	0.81982	2.90949	-0.99732
6063	5.74352	1.63896	0.04274	-2.89513	6021	6.67891	-1.79694	-1.55167	0.74984
7072	5.31232	3.11062	-0.20083	-2.04237	7004	5.57367	-0.10326	-2.03732	-0.13698
7082	4.67725	1.49304	1.00223	-2.49093	6052	4.90712	0.91299	0.47200	0.00760
6081	5.04437	-0.12877	1.52915	-3.13549	5042	4.74481	1.04385	-0.44804	-0.26164

APÊNDICE IV - Valores dos índices normalizados condensando
todos os fatores.

SUBUN.	INDICE	SUBUN.	INDICE	SUBUN.	INDICE	SUBUN.	INDICE	SUBUN.	INDICE	SUBUN.	INDICE
1084	0.393649	2073	0.372806	2074	0.396682	3093	0.390948	3081	0.367220	3071	0.385599
3063	0.351263	3052	0.365793	3031	0.367048	3011	0.376654	4091	0.376621	4073	0.376768
4051	0.368949	6012	0.382944	3094	0.315194	3053	0.347424	3054	0.283159	3041	0.337004
3042	0.275774	3043	0.322589	3044	0.346798	3013	0.303210	4092	0.314129	4081	0.328015
5093	0.322647	5094	0.300219	5083	0.333128	5084	0.366003	5071	0.206437	5063	0.249758
5011	0.324687	4043	0.246508	4011	0.327923	2084	0.246413	3032	0.364323	5064	0.311765
5013	0.312720	5091	0.164094	3083	0.316236	5074	0.365688	7043	0.362560	6004	0.377812
4082	0.356237	7021	0.657183	2082	0.611732	3073	0.655090	3023	0.691421	4041	0.687489
5092	0.654288	5061	0.526863	5022	0.674818	1092	0.462477	1093	0.545521	1094	0.615412
1081	0.627182	1082	0.431393	1083	0.593227	1071	0.507484	1073	0.533815	1074	0.412023
2091	0.600288	2092	0.564543	2093	0.446298	2094	0.621233	2081	0.400731	2083	0.407795
2071	0.518612	2072	0.404802	3092	0.453531	3082	0.467703	3084	0.420066	3072	0.530927
3061	0.480418	3062	0.490255	3064	0.520318	3051	0.406902	3033	0.530503	3034	0.584882
3022	0.603954	3024	0.649271	3012	0.494857	3014	0.432599	4093	0.538054	4094	0.461457
4083	0.477098	4084	0.482424	4071	0.613831	4072	0.523618	4061	0.602642	4062	0.591561
4064	0.414790	4052	0.453588	4053	0.564246	4054	0.554327	4042	0.476550	4031	0.554098
4032	0.461604	4033	0.483454	4034	0.460207	4023	0.629427	4024	0.566601	4012	0.567694
4013	0.543823	4014	0.611566	5081	0.617394	5082	0.500378	5072	0.485705	5073	0.597797
5062	0.445749	5052	0.627788	5054	0.461644	5041	0.628220	5031	0.654270	5033	0.532612
5034	0.405809	5021	0.605652	5023	0.528251	5024	0.449673	5012	0.551475	5014	0.536420
6084	0.451059	6071	0.556372	6072	0.481393	6074	0.502931	6073	0.420151	6062	0.586148
6051	0.504828	6053	0.521914	6054	0.546549	6041	0.596945	6042	0.652972	6044	0.554239
6032	0.472132	6033	0.456460	6013	0.640920	6014	0.449543	6002	0.497622	7081	0.601043
7083	0.476177	7084	0.655708	7071	0.582994	7073	0.499713	7074	0.418577	7061	0.654753
7062	0.548974	7063	0.452417	7052	0.514473	7053	0.604548	7054	0.420142	7041	0.584766
7044	0.421374	7031	0.488114	7033	0.510890	7023	0.454614	7024	0.625785	7011	0.559343
7012	0.444802	7013	0.446826	7014	0.590702	7003	0.450655	7032	0.575423	7034	0.467752
4044	0.598646	6064	0.693998	6034	0.697012	7051	0.595624	5044	0.682481	6003	0.487413
1072	0.467253	4074	0.671494	7064	0.538474	5032	0.692095	6082	0.683131	6031	0.691353
6001	0.641779	6043	0.583658	3021	0.741645	3091	0.722651	4022	0.805197	7042	0.714436
4021	0.873201	6011	0.713478	1091	0.737305	5051	0.765373	5053	0.826173	6022	0.740483
6023	0.770095	6024	0.862374	7022	0.701422	7001	0.737631	7002	0.721343	3074	0.717094
4063	0.804679	5043	0.784266	6083	0.761986	6061	0.860365	6063	0.861181	6021	1.000000
7072	0.816949	7004	0.833240	7082	0.705832	6052	0.728875	6081	0.757407	5042	0.705849

APÊNDICE V - Listagens do programa computacional e subrotinas
utilizadas.

PAGE 1

// JOR

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE
0000 0002 0002 0000

V2 M11 ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION

```
      SUBROUTINE MINV(A,N,D,L,M)
      DIMENSION A(1),L(1),M(1)
      D=1.0
      NK=-N
      DO 80 K=1,N
      NK=NK+N
      L(K)=K
      M(K)=K
      KK=NK+K
      BIGA=A(KK)
      DO 20 J=K,N
      IZ=N*(J-1)
      DO 20 I=K,N
      IJ=IZ+I
      IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ))) 15,20,20
15     BIGA=A(IJ)
      L(K)=I
      M(K)=J
20     CONTINUE
      J=L(K)
      IF(J-K) 35,35,25
25     KI=K-N
      DO 30 I=1,N
      KI=KI+N
      HOLD=-A(KI)
      JI=KI-K+J
      A(KI)=A(JI)
30     A(JI)=HOLD
35     I=M(K)
      IF(I-K) 45,45,38
38     JP=N*(I-1)
      DO 40 J=1,N
      JK=NK+J
      JI=JP+J
      HOLD=-A(JK)
      A(JK)=A(JI)
40     A(JI)=HOLD
45     IF(ABS(BIGA)-1.E-20)46,46,48
46     D=0.0
      RETURN
48     DO 55 I=1,N
      IF(I-K) 50,55,50
50     IK=NK+I
      A(IK)=A(IK)/(-BIGA)
55     CONTINUE
      DO 65 I=1,N
      IK=NK+I
      HOLD=A(IK)
```

PAGE 2

```
      IJ=I-N
      DO 65 J=1,N
      IJ=IJ+N
      IF(I-K) 60,65,60
60     IF(J-K) 62,65,62
62     KJ=IJ-I+K
      A(IJ)=HOLD*A(KJ)+A(IJ)
65     CONTINUE
      KJ=K-N
      DO 75 J=1,N
      KJ=KJ+N
      IF(J-K) 70,75,70
70     A(KJ)=A(KJ)/BIGA
75     CONTINUE
      D=D*BIGA
      A(KK)=1.0/BIGA
80     CONTINUE
      K=N
100    K=(K-1)
      IF(K) 150,150,105
105    I=L(K)
      IF(I-K) 120,120,108
108    JO=N*(K-1)
      JR=N*(I-1)
      DO 110 J=1,N
      JK=JO+J
      HOLD=A(JK)
      JI=JR+J
      A(JK)=-A(JI)
110    A(JI)=HOLD
120    J=M(K)
      IF(J-K) 100,100,125
125    KI=K-N
      DO 130 I=1,N
      KI=KI+N
      HOLD=A(KI)
      JI=KI-K+J
      A(KI)=-A(JI)
130    A(JI)=HOLD
      GO TO 100
150    RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR MINV
COMMON D VARIABLES 26 PROGRAM 764

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0024 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE
0000 0002 0002 0000

V2 M11 ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE AUVAL(A,AA,C,NR,N)
REAL MAX
DIMENSION A(11,11),AA(11,11)
DIMENSION B(11,11),BB(11,11)
DIMENSION C(11,11)
EPS=1.E-20
IF(N-1)15,15,68
68 CONTINUE
XNOR=0.
DO 53 I=1,N
DO 53 J=1,N
C(I,J)=A(I,J)
IF(I-J)57,53,57
57 XNOR=XNOR+ABS(A(I,J))
53 CONTINUE
XNNR=XNOR*1.E-24
NR=0
DO 31 I=1,N
DO 31 J=1,N
IF(I-J)51,52,51
52 AA(I,J)=1.
GO TO 31
51 AA(I,J)=0.
31 CONTINUE
26 MAX=0
NN=N-1
DO 2 I=1,NN
JJ=I+1
DO 2 J=JJ,N
IF(MAX-ABS(A(I,J)))13,13,2
13 MAX=ABS(A(I,J))
NI=I
NJ=J
2 CONTINUE
IF(MAX-EPS)15,15,16
16 IF(ABS(A(NI,NI)-A(NJ,NJ))-XNNR)19,19,18
19 CONTINUE
Y=0.
X=A(NI,NJ)/ABS(A(NI,NJ))
XSIN=X*SORT(0.5)
XCOS=SQRT(0.5)
GO TO 20
18 ALFA=(2*A(NI,NJ))/(A(NI,NI)-A(NJ,NJ))
RR=SQRT(1+ALFA*ALFA)
SI=ALFA/ABS(ALFA)
X=ALFA/RR
Y=1./RR
XCOS=SQRT(0.5*(1.+Y))

```

PAGE 2

```

XSIN=SI*SORT(0.5*(1.-Y))
20 AUX=XCOS*XCOS
NR=NR+1
BUX=XCOS*XSIN
CUX=XSIN*XSIN
R(NI,NI)=A(NI,NI)*AUX+2*A(NI,NJ)*BUX+A(NJ,NJ)*CUX
R(NJ,NJ)=A(NI,NI)*CUX-2*A(NI,NJ)*BUX+A(NJ,NJ)*AUX
R(NI,NJ)=A(NI,NJ)*Y+((A(NJ,NJ)-A(NI,NI))*X)/2.
A(NI,NI)=B(NI,NI)
A(NJ,NJ)=R(NJ,NJ)
A(NI,NJ)=R(NI,NJ)
A(NJ,NI)=A(NI,NJ)
DO 24 K=1,N
IF(K-NI)22,24,22
22 IF(K-NJ)23,24,23
23 R(NI,K)=A(NI,K)*XCOS+A(NJ,K)*XSIN
R(NJ,K)=-A(NI,K)*XSIN+A(NJ,K)*XCOS
A(NI,K)=R(NI,K)
A(NJ,K)=R(NJ,K)
A(K,NI)=A(NI,K)
A(K,NJ)=A(NJ,K)
24 CONTINUE
DO 25 K=1,N
BB(NI,K)=AA(NI,K)*XCOS+AA(NJ,K)*XSIN
BB(NJ,K)=-AA(NI,K)*XSIN+AA(NJ,K)*XCOS
AA(NI,K)=BB(NI,K)
AA(NJ,K)=BB(NJ,K)
25 CONTINUE
GO TO 26
15 CONTINUE
N1=N-1
55 K=0
DO 99 J=1,N1
IF(A(J+1,J+1)-A(J,J))99,99,21
21 K=1
AAR=A(J,J)
A(J,J)=A(J+1,J+1)
A(J+1,J+1)=AAR
KK=J
DO 10 I=1,N
AAV=AA(KK,I)
AA(KK,I)=AA(KK+1,I)
AA(KK+1,I)=AAV
10 CONTINUE
99 CONTINUE
IF(K)55,50,55
50 RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR AUVAL
COMMON 0 VARIABLES 796 PROGRAM 1010

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0331 (HEX)

END OF COMPILATION

PAGE 1

// JOR

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE
0000 0002 0002 0000

V2 M11 ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK)

C PROGRAMADOR WALDENEI TRAVASSOS DE QUEIROZ

 INTEGER P

 DIMENSION S(11,11),S1(11,11),L(11),M(11),V(11)

 DIMENSION SIU(121),EU(121),A(11,11),A1(11,11)

 DIMENSION C(11,11),SS(11),T(11),Q(11,11),AA(11,11)

 DIMENSION FAT(11,3),G(11),D(11),E(11,11)

1999 READ(2,1) P,NP,IT

1 FORMAT(3I2)

 READ(2,2)((S(I,J),J=1,P),I=1,P)

2 FORMAT(6F8.4)

 NIO=1

 N=P

 WRITE(3,110)

110 FORMAT('1 MATRIZ DAS CORRELACOES')

 WRITE(3,111)((S(I,J),J=1,P),I=1,P)

111 FORMAT(1X,9F6.3)

 DO 3 I=1,P

 DO 3 J=1,P

3 S1(I,J)=S(I,J)

 K=0

 DO 91 J=1,P

 DO 91 I=1,P

 K=K+1

91 S1U(K)=S1(I,J)

 CALL MINV(S1U,P,DD,L,M)

 K=0

 DO 191 J=1,P

 DO 191 I=1,P

 K=K+1

191 S1(I,J)=S1U(K)

 DO 888 I=1,P

888 V(I)=(1.-NP/2./N)*(1./S1(I,I))

 WRITE(3,1950) DD

1950 FORMAT(1X,/, ' DETERMINANTE DA MATRIZ S=',E17.9,/,)

 WRITE(3,109)

109 FORMAT(1X, 'PRIMEIRO PASSO-VAR. ESP. INICIAIS')

 WRITE(3,108)(V(I),I=1,P)

108 FORMAT(1X,12F10.6)

1000 DO 5 I=1,P

5 V(I)=SQRT(V(I))

 WRITE(3,1951)NIO

1951 FORMAT('1',/, ' ITERCAO=',I2,/,)

 DO 6 I=1,P

 DO 6 J=1,P

6 A(I,J)=(1./V(I))*S(I,J)*(1./V(J))

 CALL AUVAL(A,AA,C,NR,N)

 DO 7 I=1,NP

PAGE 2

DO 7 J=1,P

7 FAT(J,I)=V(J)*AA(I,J)

DO 189 I=1,P

189 A1(I,I)=A(I,I)

DO 8 J=1,NP

8 A1(J,J)=SQRT(A1(J,J)-1.)

DO 9 J=1,NP

DO 9 I=1,P

9 FAT(I,J)=FAT(I,J)*A1(J,J)

 TV=1

 TS=0.

 PA=1.

 SA=0.

 ALFA=1.

DO 10 I=1,NP

10 SA=SA+A(I,I)

DO 11 I=1,NP

11 PA=PA*A(I,I)

DO 12 I=1,P

12 SS(I)=S(I,I)/V(I)**2

DO 13 I=1,P

13 TS=TS+SS(I)

DO 14 I=1,P

14 TV=TV*V(I)**2

 F=ALOG(PA)-SA-ALOG(DD)+ALOG(TV)+TS-P*NP

 WRITE(3,55)

55 FORMAT(1X, 'SEGUNDO PASSO-VALOR DA FUNCAO F')

 WRITE(3,65)F

65 FORMAT(1X,E17.9)

 WRITE(3,100)

100 FORMAT(1X,/, ' TERCEIRO PASSO-MATRIZ DOS FATORES')

DO 1098 I=1,P

 WRITE(3,101)(FAT(I,J),J=1,NP)

101 FORMAT(7F10.6)

1098 CONTINUE

DO 15 I=1,P

 T(I)=0.

DO 15 J=1,NP

15 T(I)=T(I)+(A(J,J)-1)*AA(J,I)**2

DO 16 I=1,P

16 G(I)=(1./V(I)**2)*(T(I)+1-SS(I))

DO 17 I=1,P

DO 17 J=1,P

 C(I,J)=0.

DO 17 K=1,NP

17 C(I,J)=C(I,J)+AA(K,I)*AA(K,J)

DO 18 I=1,P

DO 18 J=1,P

 Q(I,J)=0.

DO 19 I=1,P

19 Q(I,I)=1.

DO 20 I=1,P

DO 20 J=1,P

20 C(I,J)=Q(I,J)-C(I,J)

DO 21 I=1,P

DO 21 J=1,P

21 C(I,J)=(1./V(I))*C(I,J)*(1./V(J))

DO 22 I=1,P

DO 22 J=1,P

```

22  E(I,J)=C(I,J)**2
    K=0
    DO 92 J=1,P
    DO 92 I=1,P
    K=K+1
92  EU(K)=E(I,J)
    CALL MINV(EU,P,DDD,L,M)
    K=0
    DO 192 J=1,P
    DO 192 I=1,P
    K=K+1
192  E(I,J)=EU(K)
    WRITE(3,381)
381  FORMAT(1X,/, ' QUARTO PASSO-MATRIZ E')
    DO 1700 I=1,P
    WRITE(3,382)(E(I,J),J=1,P)
382  FORMAT(1X,12F10.6)
1700 CONTINUE
    WRITE(3,214)
214  FORMAT(1X,/, ' QUINTO PASSO-DERIVADAS PARCIAIS PRIM. ORDEM')
    WRITE(3,215)(G(I),I=1,P)
215  FORMAT(1X,12F10.6)
    DO 23 I=1,P
    D(I)=0.
    DO 23 J=1,P
    D(I)=(D(I)+E(I,J)*G(J))
    WRITE(3,391)
391  FORMAT(1X,/, ' SEXTO PASSO-VETOR GRADIENTE')
    WRITE(3,392)(D(I),I=1,P)
392  FORMAT(1X,12F12.8)
    DO 24 I=1,P
    V(I)=V(I)**2-ALFA*D(I)
    DO 1155 I=1,P
    IF(V(I)-0.005)1023,1023,1155
1023 V(I)=0.005
1155 CONTINUE
    WRITE(3,102)
102  FORMAT(1X,/, ' SETIMO PASSO-NOVAS VAR. ESPECIFICAS')
    WRITE(3,103)(V(I),I=1,P)
103  FORMAT(1X,12F10.6)
    NIO=NIO+1
    IF(NIO-1)1000,1000,1001
1001 GO TO 1999
    END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 3962 PROGRAM 1910

END OF COMPILATION

// XEQ

EXEMPLO ILUSTRATIVO

MATRIZ DAS CORRELACOES

```

1.000 0.523 0.395 0.471 0.346 0.426 0.576 0.434 0.639
0.523 1.000 0.479 0.506 0.418 0.462 0.547 0.283 0.645
0.395 0.479 1.000 0.355 0.270 0.254 0.452 0.219 0.504
0.471 0.506 0.355 1.000 0.691 0.791 0.443 0.285 0.505
0.346 0.418 0.270 0.691 1.000 0.679 0.383 0.149 0.409
0.426 0.462 0.254 0.791 0.679 1.000 0.372 0.314 0.472
0.576 0.547 0.452 0.443 0.383 0.372 1.000 0.385 0.680
0.434 0.283 0.219 0.285 0.149 0.314 0.385 1.000 0.470
0.639 0.645 0.504 0.505 0.409 0.472 0.680 0.470 1.000

```

DETERMINANTE DA MATRIZ S= 0.896244592E-02

PRIMEIRO PASSO-VAR. ESP. INICIAIS

```

0.424463 0.413747 0.565607 0.250407 0.379735 0.267078 0.393891 0.594689 0.289554

```

ITERCAO= 1

SEGUNDO PASSO-VALOR DA FUNCAO F
0.863575637E-01

TERCEIRO PASSO-MATRIZ DOS FATORES

0.684884	0.292344	0.134908
0.708716	0.213555	-0.189490
0.519184	0.284249	-0.258932
0.816404	-0.331928	-0.001906
0.694197	-0.367785	-0.119482
0.777843	-0.389768	0.096770
0.687932	0.358584	-0.035766
0.455031	0.253102	0.399222
0.777717	0.361644	0.016526

QUARTO PASSO-MATRIZ E

0.326844	0.006025	0.016494	-0.001422	0.004008	0.001607	-0.010127	-0.159316	-0.023788
0.006025	0.344924	-0.065579	-0.002067	-0.006713	0.002788	-0.015700	-0.040928	-0.015836
0.016494	-0.065579	0.665751	0.005781	0.001914	-0.016565	-0.017334	-0.140892	-0.009315
-0.001422	-0.002067	0.005781	0.197625	-0.037510	-0.095163	0.000511	0.027553	-0.001084
0.004008	-0.006713	0.001914	-0.037510	0.307110	-0.019802	0.000301	-0.072292	0.001990
0.001607	0.002788	-0.016565	-0.095163	-0.019802	0.287011	-0.001238	-0.049188	0.002088
-0.010127	-0.015700	-0.017334	0.000511	0.000301	-0.001238	0.262201	0.010936	-0.028427
-0.159316	-0.040928	-0.140892	0.027553	-0.072292	-0.049188	0.010936	1.684174	-0.037633
-0.023788	-0.015836	-0.009315	-0.001084	0.001990	0.002088	-0.028427	-0.037633	0.196899

QUINTO PASSO-DERIVADAS PARCIAIS PRIM. ORDEM

-0.015566	-0.014373	-0.053129	0.432256	0.077581	0.468278	-0.019313	0.071206	0.303651
-----------	-----------	-----------	----------	----------	----------	-----------	----------	----------

SEXTO PASSO-VETOR GRADIENTE

-0.02397379	-0.00909579	-0.05232080	0.03931952	-0.00627791	0.08970065	-0.01194837	0.10210687	0.05941448
-------------	-------------	-------------	------------	-------------	------------	-------------	------------	------------

SETIMO PASSO-NOVAS VAR. ESPECIFICAS

0.448437	0.422843	0.617927	0.211087	0.386013	0.177377	0.405839	0.492582	0.230140
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

ITERCAO= 2

SEGUNDO PASSO-VALOR DA FUNCAO F
0.354005098E-01

TERCEIRO PASSO-MATRIZ DOS FATORES

0.663929	0.321431	0.084375
0.689579	0.251191	-0.191628
0.492778	0.304788	-0.222985
0.837948	-0.291792	-0.038790
0.704972	-0.311313	-0.154257
0.818865	-0.376481	0.103817
0.660527	0.396115	-0.068004
0.454637	0.285753	0.471654
0.765404	0.429324	-0.000841

QUARTO PASSO-MATRIZ E

0.291827	0.004492	0.006601	-0.004130	0.007557	0.009759	-0.004751	-0.127215	-0.018296
0.004492	0.310265	-0.019564	-0.005108	-0.001334	0.006786	-0.012010	-0.074057	-0.018135
0.006601	-0.019564	0.570538	0.002122	0.004142	-0.005518	-0.010667	-0.104123	-0.011350
-0.004130	-0.005108	0.002122	0.150668	-0.022668	-0.103679	0.002386	0.090672	-0.003338
0.007557	-0.001334	0.004142	-0.022668	0.275006	-0.002301	-0.001524	-0.159356	0.006227
0.009759	0.006786	-0.005518	-0.103679	-0.002301	0.254799	-0.005759	-0.215413	0.007852
-0.004751	-0.012010	-0.010667	0.002386	-0.001524	-0.005759	0.267194	0.029901	-0.033265
-0.127215	-0.074057	-0.104123	0.090672	-0.159356	-0.215413	0.029901	2.509953	-0.089515
-0.018296	-0.018135	-0.011350	-0.003338	0.006227	0.007852	-0.033265	-0.089515	0.163511

QUINTO PASSO-DERIVADAS PARCIAIS PRIM. ORDEM

-0.001603	-0.010172	0.008845	-0.002416	0.024907	0.013817	0.022266	0.013975	0.005758
-----------	-----------	----------	-----------	----------	----------	----------	----------	----------

SEXTO PASSO-VETOR GRADIENTE

-0.00211126	-0.00467039	0.00349508	-0.00098281	0.00468575	0.00048686	0.00606605	0.02809876	-0.00066504
-------------	-------------	------------	-------------	------------	------------	------------	------------	-------------

SETIMO PASSO-NOVAS VAR. ESPECIFICAS

0.450548	0.427513	0.614428	0.212070	0.381327	0.176891	0.399751	0.464483	0.230805
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

ITERCAO= 3.

SEGUNDO PASSO-VALOR DA FUNCAO F
0.350241214E-01

TERCEIRO PASSO-MATRIZ DOS FATORES

0.664138	0.370867	0.074670
0.688804	0.247474	-0.192581
0.492717	0.302805	-0.223290
0.837328	-0.292342	-0.035976
0.704931	-0.314281	-0.152971
0.818764	-0.376684	0.104407
0.661442	0.396219	-0.076712
0.457605	0.294440	0.489516
0.765611	0.427654	-0.010398

QUARTO PASSO-MATRIZ E

0.289857	0.004280	0.006716	-0.004888	0.008961	0.011278	-0.005200	-0.142982	-0.016393
0.004280	0.307509	-0.015703	-0.005386	0.000290	0.007959	-0.011895	-0.084410	-0.017774
0.006716	-0.015703	0.554018	0.000610	0.005998	-0.001939	-0.010918	-0.120593	-0.011591
-0.004888	-0.005386	0.000610	0.149163	-0.021369	-0.101334	0.002568	0.104451	-0.003549
0.008961	0.000290	0.005998	-0.021369	0.268405	-0.002695	-0.001895	-0.189893	0.006893
0.011278	0.007959	-0.001939	-0.101334	-0.002695	0.248309	-0.006137	-0.244345	0.008074
-0.005200	-0.011895	-0.010918	0.002568	-0.001895	-0.006137	0.262943	0.034580	-0.033631
-0.142982	-0.084410	-0.120593	0.104451	-0.189893	-0.244345	0.034580	2.930267	-0.098241
-0.016393	-0.017774	-0.011591	-0.003549	0.006893	0.008074	-0.033631	-0.098241	0.162273

QUINTO PASSO-DERIVADAS PARCIAIS PRIM. ORDEM

0.000787	0.001620	-0.003314	-0.001164	0.002954	0.001862	0.000833	0.000963	-0.000683
----------	----------	-----------	-----------	----------	----------	----------	----------	-----------

SEXTO PASSO-VETOR GRADIENTE

0.00013518	0.00049657	-0.00196042	-0.00033488	0.00061113	0.00035457	0.00026824	0.00193296	-0.00019733
------------	------------	-------------	-------------	------------	------------	------------	------------	-------------

SETIMO PASSO-NOVAS VAR. ESPECIFICAS

0.450413	0.427017	0.616389	0.212405	0.380716	0.176536	0.399483	0.462550	0.231002
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

ITERCAO=28

SEGUNDO PASSO-VALOR DA FUNCAO F
0.350174308E-01

TERCEIRO PASSO-MATRIZ DOS FATORES

0.664136	0.320970	0.073430
0.588773	0.247271	-0.193307
0.492578	0.302269	-0.222412
0.837242	-0.292248	-0.035517
0.704978	-0.314594	-0.152821
0.818635	-0.376625	0.104475
0.661448	0.396202	-0.077798
0.457945	0.295625	0.491500
0.765565	0.427498	-0.011733

QUARTO PASSO-MATRIZ E

0.289460	0.004349	0.006625	-0.005004	0.009163	0.011508	-0.005262	-0.145423	-0.016219
0.004349	0.306984	-0.015266	-0.005467	0.000537	0.008192	-0.011970	-0.087318	-0.017823
0.006625	-0.015266	0.554480	0.000455	0.006122	-0.001578	-0.010835	-0.120686	-0.011627
-0.005004	-0.005467	0.000455	0.149076	-0.021206	-0.101179	0.002596	0.106698	-0.003569
0.009163	0.000537	0.006122	-0.021206	0.267697	-0.002735	-0.001938	-0.194444	0.006970
0.011508	0.008192	-0.001578	-0.101179	-0.002735	0.247854	-0.006193	-0.248938	0.008083
-0.005262	-0.011970	-0.010835	0.002596	-0.001938	-0.006193	0.262861	0.035174	-0.033668
-0.145423	-0.087318	-0.120686	0.106698	-0.194444	-0.248938	0.035174	2.992405	-0.099113
-0.016219	-0.017823	-0.011627	-0.003569	0.006970	0.008083	-0.033668	-0.099113	0.162270

QUINTO PASSO-DERIVADAS PARCIAIS PRIM. ORDEM

0.000002	-0.000002	0.000001	0.000018	-0.000002	-0.000017	0.000001	0.000000	-0.000006
----------	-----------	----------	----------	-----------	-----------	----------	----------	-----------

SEXTO PASSO-VETOR GRADIENTE

0.00000027	-0.00000111	0.00000075	0.00000464	-0.00000120	-0.00000636	0.00000023	0.00000951	-0.00000142
------------	-------------	------------	------------	-------------	-------------	------------	------------	-------------

SETIMO PASSO-NOVAS VAR. ESPECIFICAS

0.450495	0.427070	0.616571	0.212350	0.380681	0.176751	0.399455	0.461109	0.231017
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

ITERACAO=29

SEGUNDO PASSO-VALOR DA FUNCAO F
0.350174457E-01

TERCEIRO PASSO-MATRIZ DOS FATORES

0.664138	0.320988	0.073426
0.688774	0.247267	-0.193309
0.492540	0.302266	-0.222413
0.837242	-0.292253	-0.035513
0.704977	-0.314599	-0.152815
0.818832	-0.376624	0.104476
0.661450	0.396199	-0.077802
0.457947	0.295630	0.491506
0.765566	0.427494	-0.011737

QUARTO PASSO-MATRIZ E

0.289459	0.004350	0.006626	-0.005005	0.009164	0.011508	-0.005262	-0.145437	-0.016218
0.004350	0.306985	-0.015265	-0.005467	0.000538	0.008193	-0.011970	-0.087330	-0.017823
0.006626	-0.015265	0.554478	0.000454	0.006123	-0.001576	-0.010835	-0.120700	-0.011627
-0.005005	-0.005467	0.000454	0.149075	-0.021208	-0.101177	0.002596	0.106702	-0.003569
0.009164	0.000538	0.006123	-0.021208	0.267696	-0.002733	-0.001938	-0.194453	0.006970
0.011508	0.008193	-0.001576	-0.101177	-0.002733	0.247848	-0.006193	-0.248942	0.008082
-0.005262	-0.011970	-0.010835	0.002596	-0.001938	-0.006193	0.262860	0.035176	-0.033668
-0.145437	-0.087330	-0.120700	0.106702	-0.194453	-0.248942	0.035176	2.992657	-0.099115
-0.016218	-0.017823	-0.011627	-0.003569	0.006970	0.008082	-0.033668	-0.099115	0.162270

QUINTO PASSO-DERIVADAS PARCIAIS PRIM. ORDEM

0.000000	0.000001	0.000001	-0.000014	0.000003	0.000013	-0.000003	0.000001	-0.000006
----------	----------	----------	-----------	----------	----------	-----------	----------	-----------

SEXTO PASSO-VECTOR GRADIENTE

0.00000022	0.00000072	0.00000089	-0.00000352	0.00000098	0.00000448	-0.00000073	-0.00000099	-0.00000120
------------	------------	------------	-------------	------------	------------	-------------	-------------	-------------

SETIMO PASSO-NOVAS VAR. ESPECIFICAS

0.450495	0.427079	0.616570	0.212353	0.380680	0.176747	0.399456	0.461310	0.231018
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

ITERACAO=30

SEGUNDO PASSO-VALOR DA FUNCAO F
0.350174309E-01

TERCEIRO PASSO-MATRIZ DOS FATORES

0.664137	0.320990	0.073427
0.688773	0.247270	-0.193308
0.492538	0.302268	-0.222413
0.837242	-0.292249	-0.035515
0.704978	-0.314595	-0.152818
0.818835	-0.376624	0.104475
0.661449	0.396202	-0.077801
0.457946	0.295629	0.491505
0.765565	0.427497	-0.011736

QUARTO PASSO-MATRIZ E

0.289459	0.004350	0.006625	-0.005004	0.009164	0.011508	-0.005262	-0.145432	-0.016218
0.004350	0.306984	-0.015265	-0.005467	0.000538	0.008193	-0.011970	-0.087329	-0.017823
0.006625	-0.015265	0.554476	0.000455	0.006122	-0.001577	-0.010835	-0.120694	-0.011627
-0.005004	-0.005467	0.000455	0.149075	-0.021206	-0.101178	0.002596	0.106701	-0.003569
0.009164	0.000538	0.006122	-0.021206	0.267696	-0.002735	-0.001938	-0.194452	0.006970
0.011508	0.008193	-0.001577	-0.101178	-0.002735	0.247851	-0.006193	-0.248944	0.008083
-0.005262	-0.011970	-0.010835	0.002596	-0.001938	-0.006193	0.262861	0.035175	-0.033668
-0.145432	-0.087329	-0.120694	0.106701	-0.194452	-0.248944	0.035175	2.992657	-0.099115
-0.016218	-0.017823	-0.011627	-0.003569	0.006970	0.008083	-0.033668	-0.099115	0.162271

QUINTO PASSO-DERIVADAS PARCIAIS PRIM. ORDEM

-0.000001	0.000000	-0.000002	-0.000003	0.000001	-0.000001	0.000001	-0.000002	0.000016
-----------	----------	-----------	-----------	----------	-----------	----------	-----------	----------

SEXTO PASSO-VECTOR GRADIENTE

-0.00000037	-0.00000004	-0.00000156	-0.00000060	0.00000088	0.00000054	-0.00000030	-0.00000797	0.00000289
-------------	-------------	-------------	-------------	------------	------------	-------------	-------------	------------

SETIMO PASSO-NOVAS VAR. ESPECIFICAS

0.450495	0.427079	0.616571	0.212354	0.380680	0.176746	0.399456	0.461318	0.231016
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

APÊNDICE VI - Diferenciação de matrizes.

Diferenciação de matrizes

Sejam:

$Y = [y_{ij}]$: matriz de variáveis de ordem $p \times p$, tal que seus elementos são funcionalmente independentes.

$C = [c_{ij}]$: matriz de constantes de ordem $p \times p$.

Seja v uma das possíveis variáveis independentes de Y . Então:

$\frac{\partial Y}{\partial v}$: matriz $p \times p$ cujo elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna é $\frac{\partial y_{ij}}{\partial v}$

Teorema 1: Se Y é uma matriz não-singular então:

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial v} = - Y^{-1} \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right) Y^{-1}$$

Prova:

$$Y Y^{-1} = I$$

$$Y \left(\frac{\partial Y^{-1}}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right) Y^{-1} = \phi$$

$$Y^{-1} Y \left(\frac{\partial Y^{-1}}{\partial v} \right) + Y^{-1} \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right) Y^{-1} = \phi$$

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial v} = - Y^{-1} \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right) Y^{-1} \quad \text{C.Q.D.}$$

Teorema 2: $\left(\frac{\partial}{\partial Y} \right) \text{tr} (C Y) = C'$

Prova:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}} \right) \text{tr} (C Y) = \frac{\partial}{\partial y_{ij}} \sum_{h,k}^p (c_{hk} y_{hk}) = c_{ji}$$

Daí

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y} \right) \text{tr} (C Y) = C'$$

Se C é simétrica, obviamente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right) \text{tr}(CY) = C \quad \text{C.Q.D.}$$

Teorema 3: $\frac{\partial |Y|}{\partial y_{ij}} = Y_{ij}$ onde Y_{ij} é o cofator de y_{ij} .

Prova:

$$\text{Desde } |Y| = \sum_{k=1}^p y_{ik} Y_{ik}$$

$$\text{Então } \frac{\partial |Y|}{\partial y_{ij}} = Y_{ij} \quad \text{C.Q.D.}$$

Teorema 4: Se $Y^{-1} = [y^{ij}]$, tem-se $\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right) \log_e |Y| = (Y^{-1})'$.

Prova:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right) \log_e |Y| = |Y|^{-1} \frac{\partial |Y|}{\partial y_{ij}}$$

Usando o teorema 3:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right) \log_e |Y| = \frac{Y_{ij}}{|Y|^{-1}}$$

Dai

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right) \log_e |Y| = (Y^{-1})'$$

Se C é simétrica, obviamente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right) \log_e |Y| = Y^{-1} \quad \text{C.Q.D.}$$

Teorema 5: $\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right) \text{tr} (C Y^{-1}) = - (Y^{-1} C Y^{-1})'$

Prova:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right) \text{tr} (C Y^{-1}) = \text{tr} \left[C \left(\frac{\partial Y^{-1}}{\partial y_{ij}}\right) \right]$$

Usando o teorema 1

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right) \text{tr} (C Y^{-1}) = \text{tr} \left[- C Y^{-1} \left(\frac{\partial Y}{\partial y_{ij}}\right) Y^{-1} \right]$$

Da propriedade de traço de matriz

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right) \text{tr} (C Y^{-1}) &= - \text{tr} \left[Y^{-1} C Y^{-1} (\partial Y / \partial y_{ij}) \right] \\ &= - (Y^{-1} C Y^{-1})_{ij} \end{aligned}$$

Daí

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right) \text{tr} (C Y^{-1}) = - (Y^{-1} C Y^{-1})'$$

Se C e Y são simétricas:

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right) \text{tr} (C Y^{-1}) = - (Y^{-1} C Y^{-1}) \quad \text{C.Q.D.}$$

Observação: Se C e Y são simétricas, pode-se demonstrar que as derivadas parciais com respeito a y_{ij} ($i \neq j$) são dados por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right) \text{tr} (C Y) = 2 c_{ij}$$

$$\frac{\partial |Y|}{\partial y_{ij}} = 2 y_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right) \log |Y| = 2 y^{ij}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right) \text{tr} (C Y^{-1}) = - 2 (Y^{-1} C Y^{-1})_{ij}$$