ESTUDO SOBRE PARCELAS PERDIDAS NO DELINEAMENTO EM QUADRADO DE YODEN

MARINÉIA DE LARA HADDAD

Engenheira - Agrônoma

Orientador: Dr. IZAIAS RANGEL NOGUEIRA

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA

Estado de São Paulo - Brasil

Maio - 1982

*Aos meus pais, Paulo e Neja,
Ao meu esposo Cláudio,
Aos meus filhos,
Cecília e Cláudio,*

D E D I C O.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Izaias Rangel Nogueira, Professor Titular (aposentado) do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela orientação segura, o qual, mais do que orientador, foi amigo.

À Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), pela oportunidade oferecida para a realização do Curso de Pós-Graduação.

Ao Prof. Dr. Humberto de Campos, Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, pelas sugestões apresentadas.

Aos demais professores e funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos e constante disponibilidade.

Ao Prof. Dr. Irineu Umberto Packer, Docente-Livre do Departamento de Zootecnia da ESALQ, pela versão do Resumo para o Inglês.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação, pelo espírito de solidariedade e companheirismo.

A Srta. Maria Izalina Ferreira Alves, Secretária do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo trabalho datilográfico.

A todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

Í N D I C E

	Pág.
RESUMO	x
SUMMARY	xii
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
3. MATERIAL	12
4. MÉTODOS	14
4.1 - Modelo Matemático	15
4.2 - Sistema de Equações Normais	16
4.3 - Sistema de Equações Normais Para o Caso de Perda de Uma ou de Duas Parcelas na Mesma Linha	17
4.4 - Estimativas dos Efeitos dos Parâmetros	18
4.5 - Cálculo das $SQP(\hat{\ell}_k, \hat{c}_j, \hat{t}_{i(j,k)}, SQP(\tilde{\ell}_k, \tilde{c}_j)$ e $SQP(\hat{c}_j)$	19
4.6 - Estimativas dos Efeitos de Tratamentos $\hat{\tau}$, Através do Sistema Reduzido	22
4.7 - Estimativa de Uma Parcela Perdida	24
4.8 - Estimativas de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha	25
4.9 - Correção das Somas de Quadrados, Levando-se em Consi deração a Estimativa de Uma Parcela Perdida	26
4.10 - Correção das Somas de Quadrados, Levando-se em Consi deração as Estimativas de Duas Parcelas Perdidas ..	29
4.11 - Verdadeiras Somas de Quadrados	30
4.12 - Matriz de Dispersão	35
4.13 - Variância da Estimativa de Um Contraste Entre Duas Mé dias de Tratamentos Ajustadas para Linhas e Colunas	36

	Pág.
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	38
5.1 - Caso de Uma Parcela Perdida, Ignorando-se a Mesma ..	40
5.1.1 - Sistema de equações normais e estimativas dos parâmetros	40
5.1.2 - Cálculo das $SQP_{(1)}$, $SQP_{(2)}$ e $SQP_{(3)}$	42
5.1.3 - Análise da variância	43
5.1.4 - Variância da estimativa de um contraste en- tre duas médias de tratamentos, ajustadas pa- ra linhas e colunas	44
5.2 - Caso de Uma Parcela Perdida, Considerando-se a Sua Estimativa	45
5.2.1 - Fórmula para a estimativa de uma parcela per- dida	45
5.2.2 - Fórmulas para as correções das somas de qua- drados de tratamentos e de linhas: U_T e U_L ..	46
5.2.3 - Análise da variância	49
5.2.4 - Comparação entre duas médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas	49
5.3 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, Sendo que o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida de Uma Coluna Não Figure Dentre as Parcelas Remanescentes da Outra Coluna em que Ocorreu a Perda e Vice-Ver- sa. As Parcelas Perdidas São Ignoradas	51
5.3.1 - Sistema de equações normais e estimativas dos parâmetros	52
5.3.2 - Cálculo das $SQP_{(1)}$, $SQP_{(2)}$ e $SQP_{(3)}$	54

5.3.3 - Análise da variância	54
5.3.4 - Variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas	55
5.4 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida de Uma Coluna Não Figure Dentre as Parcelas Remanescentes da Outra Coluna em que Ocorreu a Perda e Vice-Versa. As Estimativas das Parcelas São Consideradas	56
5.4.1 - Fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas	56
5.4.2 - Fórmulas para as correções das somas de quadrados de tratamentos e de linhas: U_T e U_L ..	57
5.4.3 - Análise da variância	59
5.4.4 - Variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas	59
5.5 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que Apenas em Uma das Colunas com Parcela Perdida Figure o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida da Outra Coluna. As Parcelas São Ignoradas	60
5.5.1 - Sistema de equações normais e estimativas dos parâmetros	60
5.5.2 - Cálculo das $SQP_{(1)}$, $SQP_{(2)}$ e $SQP_{(3)}$	62
5.5.3 - Análise da variância	63
5.5.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas	64

5.6 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que Apenas em Uma das Colunas Com Parcela Perdida <u>Figure</u> o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida da Outra Coluna. As Estimativas das Parcelas Perdidas São Consideradas	64
5.6.1 - Fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas	64
5.6.2 - Fórmulas para as correções das somas de quadrados de tratamentos e de linhas: U_T e U_L ..	65
5.6.3 - Análise da variância	67
5.6.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos ajustadas para linhas e colunas	67
5.7 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que em Cada Uma das Colunas Com Parcela Perdida <u>Figure</u> o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida da Outra Coluna e Vice-Versa. As Parcelas São Ignoradas	67
5.7.1 - Sistema de equações normais e estimativas dos parâmetros	68
5.7.2 - Cálculo das $SQP_{(1)}$, $SQP_{(2)}$ e $SQP_{(3)}$	69
5.7.3 - Análise da variância	70
5.7.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas	71
5.8 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que em Cada Uma das Colunas Com Parcela Perdida <u>Figure</u> o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida da Outra Coluna e Vice-Versa. As Estimativas das Parcelas Perdidas São Consideradas	71

5.8.1 - Fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas	71
5.8.2 - Fórmulas para as correções das somas de quadrados de tratamentos e de linhas: U_T e U_L ..	72
5.8.3 - Análise da variância	74
5.8.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos ajustadas para linhas e colunas	74
5.9 - Exemplos Numéricos	75
5.9.1 - Caso de uma parcela perdida (y_{114})	75
5.9.2 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha sendo que o tratamento correspondente à parcela perdida de uma coluna não figure dentre as parcelas remanescentes da outra coluna em que ocorreu a perda e vice-versa (y_{117} e y_{132})	76
5.9.3 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que apenas em uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela da outra coluna (y_{114} e y_{121})	77
5.9.4 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que em cada uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela perdida da outra coluna e vice-versa (y_{114} e y_{143})	78

	Pág.
6. CONCLUSÕES	80
7. BIBLIOGRAFIA	82

ESTUDO SOBRE PARCELAS PERDIDAS NO DELINEAMENTO EM QUADRADO DE YOUDEN

Autora: Marinéia de Lara Haddad
Orientador: Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira

R E S U M O

O presente trabalho teve como objetivo principal a dedução da análise estatística do delineamento em Quadrado de Youden com perda de uma e de duas parcelas na mesma linha. O modelo matemático considerado foi:

$$y_{kji} = m + \ell_k + c_j + t_{i(j,k)} + e_{kji} ,$$

ou, admitindo-se que os efeitos de colunas incluem a média geral teórica, e usando-se a forma matricial,

$$Y = X\beta + \varepsilon .$$

Através do método dos quadrados mínimos foram determinadas as estimativas dos parâmetros e as suas respectivas somas de quadrados.

Eliminando-se do modelo matemático original os efeitos de tratamentos e, posteriormente, os efeitos de linhas, novas

somas de quadrados dos parâmetros foram determinadas. Das diferenças entre elas determinaram-se as corretas somas de quadrados de tratamentos e de linhas.

Tornando mínima a soma de quadrados do resíduo, SQR, deduziram-se fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas.

Através do método do resíduo condicional determinaram-se as expressões das correções das somas de quadrados de tratamentos, SQT, e de linhas, SQL.

Verificou-se que a SQR está corretamente estimada, pois a estimativa da parcela perdida oferece uma contribuição nula para essa soma de quadrados. Assim sendo, e levando-se em consideração que a SQT foi ajustada para linhas e colunas e a SQL foi ajustada para colunas, concluiu-se que a correta soma de quadrados de colunas é a usual.

Foram obtidas também a matriz de dispersão das estimativas dos parâmetros e a fórmula para a variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos ajustadas.

Embora não apresentado o estudo sobre os componentes de variância das diversas causas de variação, determinou-se que a SQR perde tantos graus de liberdade quantas forem as parcelas perdididas.

MISSING PLOTS IN THE YOUTDEN SQUARE DESIGN

Author: Marinêia de Lara Haddad
Adviser: Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira

S U M M A R Y

The objective of this study was concerned with the development of a statistical analysis for the Youden Square Design with one and two missing plots in the same row. Mathematical model used was:

$$Y_{kji} = m + \rho_k + c_j + t_{i(j,k)} + e_{kji} ,$$

wich in matrix notation, assuming that column effects includes the mean, could be represented by:

$$Y = X\beta + \epsilon .$$

Estimation of parameters and sum of squares were done by least squares. Delecting treatment effects from the original model and row effects two new sum of squares of parameters were determined.

By subtraction it was calculated correct values for treatment sum of squares and row sum of squares.

By minimization of residual sum of squares formulas were developed for estimation of missing plots as well as correct treatment and row sums of squares. Since the treatment sum of squares was adjusted for rows and columns effects and row sum of squares was adjusted for column it was shown that column sum of squares is the usual.

It was also determined the matrix dispersion of the parameters estimates and the variance for the contrast between two adjusted treatment means. Degrees of freedom lost by the residual sum of squares was equal to the number of missing plots.

1. INTRODUÇÃO

Nos delineamentos em quadrado latino, os tratamentos são dispostos em linhas e colunas, de tal forma, que cada linha ou cada coluna constitui um bloco completo.

Uma estrutura que apresenta uma certa similaridade com os quadrados latinos é aquela em que cada linha constitui um bloco completo, mas as colunas estão estruturadas segundo Blocos Incompletos Equilibrados.

Esta estrutura constitui os denominados "Quadrados de Youden", nos quais cada tratamento aparece uma vez em cada linha, e cada par de tratamentos aparece nas colunas um mesmo número de vezes.

A omissão de linhas ou de colunas em um quadrado latino pode originar um delineamento em Quadrado de Youden.

Sabe-se que em trabalhos experimentais é comum ocorrer perdas de parcelas devido a causas acidentais, normalmente alheias ao experimentador. A análise estatística de tais experimentos se torna mais complexa e é há muito tempo estudada.

A determinação de valores estimados para as parcelas perdidas é a solução mais usada para resolver estes casos.

Uma vez estimadas as parcelas, procede-se à análise estatística da maneira usual.

Deve-se salientar que este método citado acima traz um vício que, conforme o caso, pode prejudicar os resultados finais, sendo necessário proceder-se a uma correção das somas de quadrados viciadas.

Em delineamentos em Quadrado de Youden é pouco conhecido o estudo de parcela perdida, e ainda desconhecido o estudo de parcelas perdidas.

Para tanto, determinaram-se fórmulas para a estimação de uma e de duas parcelas perdidas na mesma linha.

Determinaram-se também as correções das somas de quadrados e as variâncias entre médias de tratamentos ajustadas para linhas e para colunas.

Também faz parte do objetivo deste trabalho a análise estatística de um delineamento em Quadrado de Youden com uma e duas parcelas perdidas na mesma linha, ignorando-se as suas estimativas.

Os demais casos de perda de parcelas no delineamento em Quadrado de Youden não foram citados devido a grande dificuldade em se agrupar as particularidades de cada um deles.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Nas análises estatísticas de experimentos onde ocorrem perdas de parcelas, a grande preocupação inicial é a determinação, sob um aspecto matemático rigoroso, de estimativas para essas observações perdidas.

ALLAN e WISHART (1930) foram os primeiros autores a se preocuparem com a determinação de valores para parcelas perdidas, e a conceituaram como sendo observações imperfeitas, devidas a causas além do controle do próprio experimentador.

Esses autores apresentaram fórmulas para a estimativa de parcela perdida em delineamentos em blocos ao acaso e em quadrado latino.

YATES (1933), substituindo os dados perdidos por incógnitas, e baseado no método dos quadrados mínimos, procurou minimizar a soma de quadrados do resíduo.

Ao citar um experimento em blocos casualizados com uma parcela perdida, o autor afirmou que, se o valor estimado for inserido no lugar da parcela perdida, e se a análise for feita como se não tivesse ocorrido nenhuma perda, algumas importantes propriedades passam a existir:

a) As estimativas dos efeitos de tratamentos e blocos são as mesmas que as obtidas pelo correto método dos quadrados mínimos.

b) A soma de quadrados do resíduo é exatamente a mesma que a dada pelo procedimento correto.

c) O número de graus de liberdade associado ao total e ao resíduo fica reduzido de uma unidade.

Mostrou ainda o autor que a soma de quadrados de tratamentos, levando-se em consideração o valor estimado da unidade perdida, está sempre superestimada.

O mesmo autor apresentou, para delineamentos em blocos casualizados e em quadrado latino, fórmulas para a variância de um contraste de médias de dois tratamentos, sendo que em um dos tratamentos figura a parcela perdida.

ANDERSON (1946) definiu parcela perdida de maneira análoga a ALLAN e WISHART (1930), e apresentou uma completa revisão de literatura sobre o assunto.

Apresentou ainda determinações de fórmulas para estimativas de unidades perdidas em vários tipos de delineamentos: blocos ao acaso, blocos ao acaso com a aplicação dos esquemas fatoriais 2^n e 3^n , quadrado latino, lâtigo e parcelas subdivididas.

O referido autor aplicou o método da covariância em um experimento em parcelas subdivididas com r repetições, α parcelas e β subparcelas, onde a observação perdida recebeu os tratamentos a_1 , b_1 , na repetição r_1 , e estabeleceu como a melhor estimativa da subparcela perdida, a fim de minimizar o erro da mesma, o resíduo do coeficiente $\underline{b}$ de regressão:

$$y = \frac{r(R_1A_1) + \beta(A_1B_1) - A_1}{(r-1)(\beta-1)},$$

onde, y = subparcela perdida;

A_1 = total de todas as unidades com o tratamento a_1 ;

B_1 = total de todas as unidades com o tratamento b_1 ;

(R_1A_1) = total de todas as unidades existentes com o tratamento a_1 na repetição r_1 ;

(A_1B_1) = total de todas as unidades existentes com os tratamentos a_1 e b_1 .

Afirmou ainda que se esta estimativa for usada para a subparcela perdida, a soma de quadrados do resíduo (b) estará corretamente estimada, porém as demais estarão ligeiramente superestimadas.

COCHRAN e COX (1957) afirmaram que, quando algumas observações estão faltando, o procedimento correto é admitir que todas as observações presentes seguem o modelo matemático proposto e, pelo método dos quadrados mínimos, determinar as equações normais. O problema está na resolução desse sistema de equações normais, o

qual não apresenta a mesma simetria encontrada quando todas as observações estão presentes.

Assim, os autores adotaram o seguinte método para analisar um experimento com unidades perdidas.

Após "estimar" os valores das unidades perdidas, inseri-las no quadro de dados e proceder-se à análise estatística da maneira usual. As somas de quadrados devem ser corrigidas, quando necessário, através de métodos especiais, possibilitando, assim, a aplicação do exato teste F.

Esses autores ainda apresentaram fórmulas para o cálculo de parcelas perdidas em vários tipos de delineamentos.

Para os quadrados latinos incompletos, os autores determinaram, através da minimização da soma de quadrados do resíduo da análise intrablocos, a estimativa de uma parcela perdida:

$$x = \frac{\lambda [rC + tB + (t-1)T - G] - rT' - (r-1)B_t + B_t}{r(r-1)(r-2)},$$

onde: x = parcela perdida;

r = número de repetições dos tratamentos;

t = número de tratamentos;

λ = número de vezes que um par de tratamentos aparece na mesma linha (bloco incompleto);

C, B e T = totais da coluna (bloco completo), linha e tratamento que contêm a parcela perdida;

G = total das parcelas disponíveis;

T' = total de todos os tratamentos que aparecem na linha que contém a observação perdida;

B_t = totais das linhas que apresentam o tratamento correspondente ao da parcela perdida;

$B_{t'}$ = total dos valores B_t para os outros tratamentos que aparecem na linha que contém a parcela perdida.

Se o experimento for repetido p vezes:

$$x = \frac{p [pk\lambda C + pt\lambda B + k(k-1) T - p\lambda R - kT' - (k-1) B_t + B_{t'}]}{r(k-1)(pk-p-1)}$$

onde: k = número de colunas;

R = total da repetição em que aparece a observação perdida.

PANSE e SUKHATME (1957), baseados em YATES (1933), mostraram um método prático para estimar duas parcelas perdidas nos delineamentos em blocos casualizados e em quadrado latino.

STEEL e TORRIE (1960) sugeriram que a análise de variância em experimentos em parcelas subdivididas com unidades perdidas deva ser feita após a introdução das estimativas dos valores das unidades perdidas. Um grau de liberdade deve ser subtraído do erro (b) para cada subparcela perdida do experimento. A estimativa do quadrado médio para o erro (b) é imparcial, sendo que o mesmo não acontece com os demais quadrados médios. Se somente poucas observações forem perdidas, as tendências podem ser ignoradas, ou seja, as correções para as somas de quadrados podem ser desprezadas.

CAMPOS (1964) apresentou um completo estudo sobre a análise de experimentos com parcelas perdidas nos delineamentos em blocos casualizados, em quadrados latinos e em períodos sucessivos. O autor mostrou duas maneiras de se calcular os valores das parcelas perdidas: o método geral de estimação de parcelas perdidas e o método iterativo sob o ponto de vista de sucessões. Ainda salientou o autor que o mais acertado é analisar o experimento com os dados restantes, ignorando-se a perda ocorrida.

PINHO (1973) estudou um experimento em parcelas subdivididas com J blocos, I parcelas e K subparcelas, e determinou, através da minimização da soma de quadrados do resíduo (b), fórmulas para as estimativas de uma e de duas subparcelas perdidas, com a restrição $K > 2$.

Para o caso de uma subparcela perdida, a autora apresentou as corretas somas de quadrados, determinadas por dois métodos:

- calculadas diretamente através de matrizes;
- corrigidas através de fórmulas deduzidas pelo método do resíduo condicional.

Para o caso de duas subparcelas perdidas, a autora afirmou que o melhor é determinar as somas de quadrados diretamente através de matrizes.

PINHO (1975) apresentou um estudo sobre os componentes de variância das somas de quadrados das diversas causas de variação de um delineamento em parcelas subdivididas com uma subparcela perdida.

PIMENTEL GOMES (1978) estudou observações perdidas em vários tipos de delineamentos, apresentando fórmulas para suas estimativas e para as correções das somas de quadrados tendenciosas. Salientou que as correções são geralmente desprezíveis, porém, pode-se usar o método do resíduo condicional para se obterem os valores exatos das somas de quadrados das causas de variação.

HADDAD (1978) apresentou um estudo sobre parcela perdida em delineamentos em parcelas subdivididas. Determinou, através da minimização da soma de quadrados do resíduo (a) e da soma de quadrados do resíduo (b), fórmulas para as estimativas das subparcelas que compõem a parcela perdida. Através do método do resíduo condicional, a autora determinou a fórmula para a correção da soma de quadrados dos tratamentos principais, demonstrando ainda que a soma de quadrados dos tratamentos secundários é a usual.

SANCHES (1978) estudou perdas de parcelas, linhas e colunas em um delineamento em quadrado latino, deduzindo fórmulas para as somas de quadrados ajustadas e para as correções das somas de quadrados.

RIBEIRO (1980) deduziu fórmulas para estimativas de uma e de duas subparcelas perdidas, e para correções das somas de quadrados viciadas em delineamento inteiramente casualizadas com parcelas subdivididas.

SANCHES (1980) apresentou, para delineamentos em blocos ao acaso com parcelas subdivididas, fórmulas para estimativas

de uma e de duas subparcelas ou parcelas perdidas. Demonstrou, ainda, fórmulas para se obterem as somas de quadrados ajustadas das diversas causas de variação.

3. MATERIAL

Para comparação dos resultados utilizar-se-ão dados de dois experimentos em Quadrado de Youden, os quais estão apresentados nas Tabelas 1 e 2.

Os dados da Tabela 1 foram compilados de PIMENTEL GOMES (1978), relativos a um ensaio de competição de variedades de cana-de-açúcar, em quadrado latino 5x5, onde consideraram-se apenas as quatro primeiras linhas.

A Tabela 2 é composta por dados fictícios.

Tabela 1 - Produções de cana-planta, em quilos por parcela, onde A = C0290, B = C0421, C = C0419, D = P05-2878 e E = CP36-13 são as variedades de cana.

TOTAIS DE COLUNAS	D	A	B	C	E	TOTAIS DE LINHAS
	432	518	458	583	331	2.322
	C 724	E 478	A 524	B 550	D 400	2.676
	E 489	B 384	C 556	D 297	A 420	2.146
	B 494	D 500	E 313	A 486	C 501	2.294
	2.139	1.880	1.851	1.916	1.652	9.438

Tabela 2 - Rendimentos de tomate, em kg/parcela, onde A, B, C, D, E, F e G são tipos de inseticidas (dados fictícios).

LINHAS	C O L U N A S							TOTAIS DE LINHAS
	1	2	3	4	5	6	7	
I	G 22,7	A 32,6	B 37,6	C 37,2	D 34,5	E 44,4	F 33,6	238,60
II	A 18,1	B 26,8	C 32,2	D 41,2	E 26,8	F 33,1	G 23,6	201,80
III	C 19,5	D 25,9	E 26,3	F 44,5	G 24,5	A 32,2	B 23,0	195,90
TOTAIS DE COLUNAS	60,3	85,3	96,1	122,9	85,8	105,7	80,2	636,30

4. MÉTODOS

Os parâmetros que caracterizam os delineamentos em quadrados de Youden são representados, neste trabalho, por:

v : nº de tratamentos;

b : nº de colunas;

K : nº de linhas;

r : nº de repetições dos tratamentos;

λ : nº de vezes que um mesmo par de tratamentos aparece na mesma coluna.

Propriedades:

$n = bK = rv$: nº total de parcelas;

$r = K$;

$\lambda(v-1) = r(K-1)$, obtida da teoria sobre os delineamentos em

blocos incompletos equilibrados.

4.1 - Modelo Matemático

Cada parcela de um experimento em Quadrado de Youden é regida pelo modelo matemático

$$(4.1.a) \quad y_{kji} = m + \ell_k + c_j + t_{i(j,k)} + e_{kji},$$

onde:

y_{kji} = observação do i -ésimo tratamento na k -ésima linha e j -ésima coluna;

m = média geral

ℓ_k = efeito da k -ésima linha ($k = 1, 2, \dots, K$);

c_j = efeito da j -ésima coluna ($j = 1, 2, \dots, b$);

$t_{i(j,k)}$ = efeito do i -ésimo tratamento ($i = 1, 2, \dots, v$);

e_{kji} = erro experimental, onde se supõe $e_{kji} \cap N(0, \sigma^2)$.

Admitindo-se que os efeitos de colunas incluam a média geral teórica, e usando-se a forma matricial, o modelo (4.1.a) fica:

$$(4.1.b) \quad Y = X\beta + \varepsilon,$$

onde:

Y = vetor dos dados observados;

X = matriz da forma $\begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 & \vdots & X_3 \end{bmatrix}$;

X_1 = matriz correspondente aos tratamentos;

X_2 = matriz correspondente às linhas;

X_3 = matriz correspondente às colunas;

$$\beta = \text{vetor da forma} \begin{bmatrix} \tau \\ \ell \\ c \end{bmatrix} ;$$

τ = vetor dos efeitos de tratamentos;

ℓ = vetor dos efeitos de linhas;

c = vetor dos efeitos de colunas;

ε = vetor dos erros experimentais, sendo que $\varepsilon \cap N(\phi, \sigma^2 I_n)$.

4.2 - Sistema de Equações Normais

O sistema de equações normais de um delineamento em Quadrado de Youden, obtido através dos métodos dos quadrados mínimos, é:

$$(4.2.a) \quad X'X\beta = X'Y$$

ou seja,

$$(4.2.b) \quad \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{\ell} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'Y \\ X_2'Y \\ X_3'Y \end{bmatrix}$$

Para facilitar os desenvolvimentos posteriores, o sistema de equações normais (4.2.b) é representado por:

$$(4.2.c) \quad \begin{bmatrix} R_{vv} & E_{bK} & W_{vb} \\ E_{kb}' & N_{KK} & E_{Kb}' \\ W_{bv}' & E_{bK} & H_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{\ell} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ L \\ C \end{bmatrix}$$

onde:

$$R_{vv} = X_1' X_1 = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_v) = r I_v;$$

r_i = nº de repetições dos tratamentos ($i = 1, 2, \dots, v$);

$$N_{KK} = X_2' X_2 = \text{diag}(n_1, n_2, \dots, n_K) = b I_K;$$

n_k = tamanho da linha K ($k = 1, 2, \dots, K$);

$$H_{bb} = X_3' X_3 = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_b) = K I_b;$$

h_j = tamanho da coluna j ($j = 1, 2, \dots, b$);

$$E_{bK} = X_1' X_2 = X_3' X_2 = \text{matriz de incidência dos tratamentos em relação às linhas};$$

$$W_{vb} = X_1' X_3 = \text{matriz de incidência em relação às colunas};$$

$$T = X_1' Y = \text{vetor dos totais de tratamentos};$$

$$L = X_2' Y = \text{vetor dos totais de linhas};$$

$$C = X_3' Y = \text{vetor dos totais de colunas}.$$

4.3 - Sistema de Equações Normais para o Caso de Perda de Uma ou de Duas Parcelas na Mesma Linha

O sistema de equações normais de um delineamento em Quadrado de Youden, onde houve perda de uma ou de duas parcelas na mesma linha, foi obtido pela mesma metodologia de 4.2, e é representado por:

$$(4.3.a) \quad \begin{bmatrix} R_{vv} & E_{bK} & W_{vb} \\ E_{Kb}' & N_{KK} & B_{Kb}' \\ W_{bv}' & B_{bK}' & H_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t} \\ \hat{\lambda} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ L \\ C \end{bmatrix},$$

onde:

$$R_{vv} = X_1'X_1 = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_v);$$

$$N_{KK} = X_2'X_2 = \text{diag}(n_1, n_2, \dots, n_K);$$

$$H_{bb} = X_3'X_3 = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_b);$$

$$E_{bK} = X_3'X_2 = \text{matriz de incidência dos tratamentos em relação às linhas};$$

$$B_{Kb} = X_2'X_3 = \text{matriz de incidência das linhas em relação às colunas};$$

$$W_{vb}, T, L, C, r_i, n_k, h_j \text{ seguem a mesma definição de 4.2.}$$

Para maior facilidade nas demonstrações posteriores, o sistema (4.3.a) é representado por:

$$(4.3.b) \quad F\tilde{\beta} = X'Y$$

4.4 - Estimativas dos Efeitos dos Parâmetros

Do sistema de equações normais (4.3.b), tem-se que F é uma matriz singular e de característica igual a $(v+b+K-2)$, portanto, admitindo-se conjuntamente as restrições:

$$\sum_k \hat{\alpha}_k = 0 \quad \text{e} \quad \sum_j \hat{c}_j = 0,$$

tem-se:

$$(4.4.a) \quad F_1 \hat{\beta} = X'Y,$$

onde F_1 é uma matriz não-singular, e dada por:

$$F_1 = \begin{bmatrix} R_{vv} & (E_{bK} - A_{bK}) & (W_{vb} - A_{vb}) \\ E'_{Kb} & N_{KK} & (B_{Kb} - A_{Kb}) \\ W'_{bv} & (B'_{bK} - A_{bK}) & H_{bb} \end{bmatrix}$$

onde A_{bK} , A_{vb} , A_{Kb} são matrizes cujos elementos são todos iguais a um.

Assim sendo, obtêm-se as estimativas dos parâmetros:

$$(4.4.b) \quad \hat{\beta} = F_1^{-1} X'Y$$

4.5 - Cálculo das $SQP(\bar{x}_k, \bar{c}_j, \bar{t}_{i(j,k)})$, $SQP(\bar{x}_k, \bar{c}_j)$ e $SQP(\bar{c}_j)$

A partir da solução (4.4.b) determina-se a soma de quadrados dos parâmetros, $SQP(\bar{x}_k, \bar{c}_j, \bar{t}_{i(j,k)})$, que é denominada $SQP(1)$, dada por:

$$(4.5.a) \quad SQP(1) = \hat{\beta}'X'Y = \hat{\tau}'T + \hat{x}'L + \hat{c}'C$$

Eliminando-se do modelo matemático (4.1.a) os efeitos de tratamentos, tem-se o modelo matemático de um delineamento em blocos ao acaso, dado por:

$$(4.5.b) \quad y_{kj} = m + x_k + c_j + e_{kj}$$

Usando-se a forma matricial, e admitindo-se que os efeitos de colunas incluam a média geral teórica, o modelo (4.5.b) fica:

$$(4.5.c) \quad Y^* = X^*\beta^* + \epsilon^*,$$

onde:

Y^* = vetor dos dados observados;

X^* = matriz da forma $\begin{bmatrix} X_2 & \vdots & X_3 \end{bmatrix}$, onde X_2 e X_3 são dadas em 4.1;

β^* = vetor da forma $\begin{bmatrix} \ell \\ c \end{bmatrix}$, onde ℓ e c são dados em 4.1;

ϵ^* = vetor dos erros experimentais, onde $\epsilon^* \sim N(\phi, \sigma^2 I_n)$.

O sistema de equações normais de um delineamento em blocos ao acaso, onde houve perda de uma ou de duas parcelas no mesmo bloco, foi obtido pela mesma metodologia de 4.2, e é representado por:

$$(4.5.d) \quad \begin{bmatrix} N_{KK} & B_{Kb} \\ B'_{bK} & H_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\ell} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix},$$

onde o símbolo $(\sim)$ é utilizado para diferenciar das estimativas dos parâmetros do delineamento em Quadrado de Youden.

Pelo mesmo motivo discutido em 4.3, o sistema de equações (4.5.d) é representado por:

$$(4.5.e) \quad F^* \tilde{\beta}^* = X^{*'} Y^*.$$

Do sistema acima tem-se que F^* é uma matriz singular. Admitindo-se a restrição $\Sigma \tilde{c}_j = 0$, tem-se o novo sistema:

$$(4.5.f) \quad F_1^* \tilde{\beta}_1^* = X_1^{*'} Y^*,$$

onde a matriz F_1^* , não-singular, é dada por:

$$F^* = \begin{bmatrix} N_{KK} & (B_{Kb} - A_{Kb}) \\ B'_{bK} & H_{bb} \end{bmatrix},$$

onde A_{Kb} foi definida em 4.4.

Assim sendo, obtêm-se:

$$(4.5.g) \quad \tilde{\beta}^* = (F^*)^{-1} X^{*'} Y^*$$

ou seja, as estimativas dos parâmetros $\tilde{\ell}_k$ e $\tilde{c}_j$.

A soma de quadrados de parâmetros, $SQP(\tilde{\ell}_k, \tilde{c}_j)$, denominada $SQP(2)$, é:

$$(4.5.h) \quad SQP(2) = \tilde{\beta}^{*'} X^{*'} Y^* = \tilde{\ell}' L + \tilde{c}' C.$$

Eliminando-se do modelo matemático (4.1.a) os efeitos de tratamentos e de linhas, tem-se o modelo matemático de um de lineamento inteiramente casualizado, dado por:

$$(4.5.i) \quad y_j = m + c_j + e_j.$$

Admitindo-se que os efeitos de colunas incluem a média geral, matricialmente (4.5.i) é dado por:

$$(4.5.j) \quad Y^{**} = X^{**} \beta^{**} + \epsilon^{**},$$

onde:

Y^{**} = vetor dos dados observados;

X^{**} = matriz correspondente às colunas;

β^{**} = vetor dos efeitos de colunas;

ϵ^{**} = vetor dos erros experimentais.

O sistema de equações normais para esse caso é:

$$(4.5.l) \quad H_{bb} \underline{\hat{c}} = C \quad ,$$

onde o símbolo () é utilizado para indicar as estimativas dos efeitos de colunas do modelo (4.5.j).

Como já foi visto, H_{bb} é uma matriz diagonal, portanto tem-se que:

$$(4.5.m) \quad \underline{\hat{c}} = H_{bb}^{-1} C \quad .$$

Assim, a soma de quadrados dos parâmetros, $SQP(\underline{\hat{c}}_j)$, denominada $SQP(3)$, é

$$(4.5.n) \quad SQP(3) = \underline{\hat{c}}' C \quad .$$

4.6 - Estimativas dos Efeitos de Tratamentos $\hat{\tau}$, Através do Sistema Reduzido

Do sistema de equações normais (4.3.a), obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} (4.6.a) \quad R_{vv} \hat{\tau} + E_{bK} \hat{\tau} + W_{vb} \hat{c} &= T \\ (4.6.b) \quad E'_{Kb} \tau + N_{KK} \hat{\tau} + B_{Kb} \hat{c} &= L \\ (4.6.c) \quad W'_{bv} \hat{\tau} + B'_{bK} \hat{\tau} + H_{bb} \hat{c} &= C \end{aligned} \right\} \quad .$$

Admitindo-se a restrição $\sum_k \hat{\tau}_k = 0$, então o produto $(B'_{bK} \cdot \hat{\tau})$ será igual a $[(B'_{bK} - A_{bK}) \hat{\tau}]$, onde A_{bK} é uma matriz definida em 4.4.

Para eliminarem-se os efeitos das estimativas de colunas das equações (4.6.a) e (4.6.b), deve-se somar à equação (4.6.a) a equação (4.6.c) pré-multiplicada por $(-W_{vb} H_{bb}^{-1})$, e à equação (4.6.b) a equação (4.6.c) pré-multiplicada por $(-B_{kb} H_{bb}^{-1})$.

Assim sendo, obtêm-se

$$(4.6.d) \quad (R - WH^{-1}W') \hat{\tau} + [E - WH^{-1}(B' - A)] \hat{\lambda} + \phi \hat{c} = T - WH^{-1}C$$

$$(4.6.e) \quad (E' - BH^{-1}W') \hat{\tau} + [N - BH^{-1}(B' - A)] \hat{\lambda} + \phi \hat{c} = L - BH^{-1}C$$

$$(4.6.f) \quad H^{-1}W' \hat{\tau} + H^{-1}(B' - A) \hat{\lambda} + I_b \hat{c} = H^{-1}C$$

Como a matriz $[N - BH^{-1}(B' - A)]$ é não-singular, então, se (4.6.e) for pré-multiplicada por $[N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1}$, obtêm-se:

$$(4.6.g) \quad [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} [E' - BH^{-1}W'] \hat{\tau} + \\ + I_K \hat{\lambda} + \phi = [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} [L - BH^{-1}C]$$

Para isolar-se o vetor das estimativas dos parâmetros $\hat{\tau}$, deve-se pré-multiplicar (4.6.g) por $\{-[E - WH^{-1}(B' - A)]\}$ e somar-se em (4.6.d). Assim sendo, obtêm-se o sistema reduzido:

$$(4.6.h) \quad P \hat{\tau} = Q,$$

onde:

$$P = [R - WH^{-1}W'] - [E - WH^{-1}(B' - A)][N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1}[E' - BH^{-1}W']$$

$$Q = [T - WH^{-1}C] - [E - WH^{-1}(B' - A)][N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1}[L - BH^{-1}C]$$

Como a matriz P tem característica igual a $(v-1)$, se gundo CHAKRABARTI (1962), deve-se introduzir uma restrição que não seja função linear estimável dos parâmetros. Sendo assim, obtém-se um novo sistema de equações:

$$(4.6.i) \quad S\hat{\tau} = \phi \quad .$$

Subtraindo-se (4.6.j) de (4.6.i), obtém-se:

$$[P - S] \hat{\tau} = Q \quad .$$

Seja $[P - S] = M$, não-singular, logo:

$$(4.6.j) \quad \hat{\tau} = M^{-1}Q \quad .$$

4.7 - Estimativa de Uma Parcela Perdida

A estimativa de uma parcela perdida de um delineamento em Quadrado de Youden será determinada através do método dos quadrados mínimos, ou seja, através da minimização da soma de quadrados do resíduo (SQR).

Tornando mínima essa soma de quadrados, obtém-se uma equação relativa à incôgnita x , onde x representa a parcela perdida do experimento.

4.8 - Estimativas de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha

Serão abordados três casos distintos:

4.8.1) Caso em que o tratamento correspondente à parcela perdida de uma coluna não figure dentre as parcelas remanescentes da outra coluna em que ocorreu a perda, e vice-versa.

4.8.2) Caso em que apenas em uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela perdida da outra coluna.

4.8.3) Caso em que em cada uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela perdida da outra coluna e vice-versa.

As estimativas de duas parcelas perdidas na mesma linha são determinadas pela mesma metodologia dada em 4.7.

Minimizando-se a SQR obtêm-se duas equações relativas às incógnitas x_1 e x_2 .

Verifica-se que esse sistema de equações é determinado, de onde se obtém a solução imediata para as incógnitas x_1 e x_2 , onde x_1 , x_2 representam as parcelas perdidas do experimento.

4.9 - Correção das Somas de Quadrados, Levando-se em Consideração a Estimativa de Uma Parcela Perdida

Para obtenção das verdadeiras somas de quadrados é utilizado o método do resíduo condicional, que é baseado no método dos quadrados mínimos.

As somas de quadrados são representadas pelos seguintes termos e expressões:

$$SQ_{\text{Tratamentos}}(x) = SQT_{(x)} = \frac{r}{\lambda v} V'V ,$$

a qual corresponde à soma de quadrados de tratamentos ajustados para coluna de um delineamento completo em Quadrado de Youden (CHAKRA BARTI, 1962), onde:

r , λ e v : dados no Item 4;

V : uma matriz, dada por $V = \left[T - \frac{1}{K} W C \right]$;

T : vetor dos totais de tratamentos;

W : matriz de incidência dos tratamentos em relação às colunas;

C : vetor dos totais de colunas;

K : nº de linhas.

$$SQ_{\text{Coluna}}(x) = SQ_{(x)} = \sum_{j=1}^J \frac{C_j^2}{K} - Corr_{(x)}$$

$$SQ_{\text{Linha}}(x) = SQL_{(x)} = \sum_{k=1}^K \frac{L_k^2}{b} - Corr_{(x)}$$

$$SQTotal_{(x)} = \sum_{kji} y_{kji}^2 - Corr_{(x)}$$

$$SQResíduo_{(x)} = SQR_{(x)} = SQTotal_{(x)} - SQL_{(x)} - SQC_{(x)} - \\ - SQT_{(x)}$$

$$Corr_{(x)} = \frac{(G^* + x)^2}{bK} ,$$

onde: G^* = total geral das parcelas existentes.

Utilizou-se a notação (x) para indicar as somas de quadrados que contêm a estimativa da parcela perdida.

Utilizar-se-ão as notações (aj) e $(usual)$ para indicar as somas de quadrados ajustadas e as determinadas ignorando-se a parcela perdida, respectivamente.

A estimativa da parcela perdida oferece uma contribuição nula para a SQR , conseqüentemente esta está corretamente estimada.

Para a correção da $SQT_{(x)}$ considera-se o delineamento como sendo em blocos ao acaso, onde as linhas são os blocos e as colunas os tratamentos, cujo modelo matemático foi dado em (4.5.b). Para esse caso tem-se:

$$SQR_{(y)} = SQTotal_{(y)} - SQC_{(y)} - SQL_{(y)} ,$$

onde y representa a parcela perdida quando se considera o delineamento como sendo em blocos ao acaso.

Conforme YATES (1933), tem-se:

$$SQT_{(x)} > SQT_{(aj)} ,$$

então existe um número real U , tal que:

$$U_T = SQT_{(x)} - SQT_{(aj)} \quad .$$

Sabe-se também que:

$$(4.9.1) \quad SQR_{(y)} - SQR_{(x)} = SQT_{(aj)}$$

Assim,

$$(4.9.2) \quad SQT_{(aj)} = SQT_{(x)} - U_t \quad .$$

Para a correção da $SQL_{(x)}$ considera-se o delineamento como sendo inteiramente casualizado, onde as colunas são os tratamentos e as linhas as repetições, cujo modelo matemático foi dado em (4.5.i).

Tem-se, então:

$$SQR_{(z)} = SQT_{total(z)} - SQC_{(z)} \quad ,$$

onde z representa a parcela perdida para o delineamento inteiramente casualizado.

Sabe-se também que:

$$(4.9.3) \quad SQR_{(z)} - SQR_{(y)} = SQL_{(aj)} \quad .$$

Desenvolvendo-se as somas de quadrados da expressão

(4.9.3), tem-se:

$$(4.9.4) \quad SQL_{(aj)} = SQL_{(x)} - U_L \quad .$$

Como têm-se $SQR_{correta}$, $SQL_{(aj)}$ e $SQT_{(aj)}$, então a SQC só poderá ser a usual, ou seja, $SQC_{(usual)}$.

4.10 - Correção das Somas de Quadrados, Levando-se em Consideração as Estimativas de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha

As verdadeiras somas de quadrados são obtidas pelo mêtodo descrito em 4.9.

As somas de quadrados apresentadas em 4.9 são válidas para 4.10, somente com a diferença de que são acompanhadas da notação (x_1, x_2) , que indicam a presença das duas estimativas das parcelas perdidas.

Seguindo a mesma metodologia de 4.9, tem-se:

$$SQR_{(y_1, y_2)} = SQT_{total}(y_1, y_2) - SQC_{(y_1, y_2)} - SQL_{(y_1, y_2)},$$

onde y_1, y_2 representam as parcelas perdidas na mesma linha, quando se considera o modelo matemático (4.5.b).

Agora,

$$(4.10.1) \quad SQR_{(y_1, y_2)} - SQR_{(x_1, x_2)} = SQT_{(aj)}.$$

Desenvolvendo-se a expressão acima, tem-se:

$$(4.10.2) \quad SQT_{(aj)} = SQT_{(x_1, x_2)} - U_T.$$

Ainda seguindo a mesma metodologia de 4.9, tem-se:

$$SQR_{(z_1, z_2)} = SQT_{total}(z_1, z_2) - SQC_{(z_1, z_2)},$$

onde z_1, z_2 representam as parcelas perdidas na mesma linha, quando se considera o modelo matemático (4.5.i).

$$(4.10.3) \quad \text{SQR}_{(z_1, z_2)} - \text{SQR}_{(y_1, y_2)} = \text{SQL}_{(aj)}$$

Desenvolvendo-se as somas de quadrados da expressão (4.10.3), tem-se:

$$(4.10.4) \quad \text{SQL}_{(aj)} = \text{SQL}_{(x_1, x_2)} - U_L \quad .$$

Como já descrito em 4.9, a SQC correta é também a usual. Todas as correções das somas de quadrados mencionadas em 4.10 são válidas para todos os casos descritos em 4.8, ou seja, (4.8.1), (4.8.2) e (4.8.3).

4.11 - Verdadeiras Somas de Quadrados

4.11.1 - Soma de quadrados de tratamentos, ajustada para linhas e colunas

Um dos métodos de obtenção da soma de quadrados de tratamentos ajustada para linhas e colunas, $\text{SQT}_{(aj)}$ ou $\text{SQ}(T|l, c)$, é através da diferença entre a $\text{SQP}_{(1)}$ e a $\text{SQP}_{(2)}$, dadas em (4.5.a) e (4.5.h), respectivamente, ou seja:

$$(4.11.1.a) \quad \text{SQT}_{(aj)} = \text{SQP}_{(1)} - \text{SQP}_{(2)} \quad .$$

A $\text{SQT}_{(aj)}$ pode ser também determinada através da solução do sistema reduzido, dado em (4.6.j), ou seja:

$$\hat{\tau} = M^{-1}Q$$

E, portanto:

$$(4.11.1.b) \quad SQT_{(aj)} = \hat{\tau}'Q = Q'(M^{-1})'Q$$

Levando-se em consideração a estimativa ou estimativas das parcelas perdidas, a $SQT_{(aj)}$ é determinada como dado em (4.9.2) e (4.10.2), respectivamente.

4.11.2 - Soma de quadrados de linhas ajustada para colunas

A soma de quadrados de linhas ajustada para colunas, $SQL_{(aj)}$ ou $SQ(L|c)$, pode ser determinada através da diferença entre a $SQP_{(2)}$ e a $SQP_{(3)}$, dadas em (4.5.h) e (4.5.n), respectivamente. Assim,

$$(4.11.2.a) \quad SQL_{(aj)} = SQP_{(2)} - SQP_{(3)}$$

Do sistema de equações normais (4.5.d) tem-se:

$$(4.11.2.b) \quad N_{KK} \tilde{\ell} + B_{kb} \tilde{c} = L$$

$$(4.11.2.c) \quad B'_{bK} \tilde{\ell} + H_{bb} \tilde{c} = C$$

Considerando a restrição $\sum_{k=1}^K \tilde{\ell}_k = 0$, então o produto $(B'_{bK} \tilde{\ell})$ é igual a $(\beta'_{bK} - A_{bK}) \tilde{\ell}$. Se a equação (4.11.2.c) for pré-multiplicada por $(-B H^{-1})$ e somada à equação (4.11.2.b), obtêm-se as estimativas:

$$(4.11.2.d) \quad \tilde{x} = [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} [L - BH^{-1}C]$$

$$(4.11.2.e) \quad \tilde{c} = H^{-1}C - [H^{-1}(B' - A)] \tilde{x}$$

Então, (4.5.h) é dada por:

$$\begin{aligned} SQP_{(2)} = & [L - BH^{-1}C]' \{ [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} \}' L + C'(H^{-1})' C - \\ & - [L - BH^{-1}C]' \{ [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} \}' [H^{-1}(B' - A)]' C \end{aligned}$$

ou, reagrupando-se e simplificando-se:

$$\begin{aligned} (4.11.2.f) \quad SQP_{(2)} = & C'H^{-1}C + [L - BH^{-1}C]' \{ [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} \}' \times \\ & \times [L - (B' - A)' H^{-1}C] \end{aligned}$$

Do sistema (4.5.e), tem-se:

$$\underline{\hat{c}} = H^{-1}C \quad .$$

Assim, (4.5.n) é dado por:

$$(4.11.2.g) \quad SQP_{(3)} = C'H^{-1}C \quad .$$

Substituindo-se em (4.11.2.a) as expressões (4.11.2.g) e (4.11.2.g), obtêm-se:

$$SQL_{(aj)} = [L - BH^{-1}C]' \{ [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} \}' [L - (B' - A)' H^{-1}C]$$

Como a expressão acima é uma matriz de dimensão (1x1), tem-se:

$$\begin{aligned} (4.11.2.h) \quad SQL_{(aj)} = & [L - (B' - A)' H^{-1}C]' [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} \times \\ & \times [L - BH^{-1}C] \end{aligned}$$

Levando-se em consideração a estimativa ou estimativas das parcelas perdidas, a obtenção da $SQP_{(aj)}$ é dada em (4.9.4) e (4.10.4), respectivamente.

4.11.3 - Soma de quadrados de colunas

Como a soma de quadrados de tratamentos foi ajustada para linhas e colunas, e a soma de quadrados de linhas foi ajustada para colunas, a soma de quadrados de colunas é a usual.

4.11.4 - Soma de quadrados do resíduo

Como visto em (4.5.a), a $SQP_{(1)}$ é dada por:

$$SQP_{(1)} = \hat{\tau}'T + \hat{\lambda}'L + \hat{c}'C$$

Das equações (4.6.e) e (4.6.f) obtêm-se, respectivamente que:

$$(4.11.4.a) \quad \hat{\lambda} = [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} [L - BH^{-1}C] - [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} [E' - BH^{-1}W'] \hat{\tau}$$

$$(4.11.4.b) \quad \hat{c} = H^{-1}C - H^{-1}(B' - A) \hat{\lambda} - H^{-1}W' \hat{\tau}$$

Substituindo-se (4.11.4.a) e (4.11.4.b) em (4.5.a), e fazendo-se as devidas simplificações, obtêm-se:

$$(4.11.4.c) \quad SQP_{(1)} = \hat{\tau}'Q + C'H^{-1}C + [L - (B - A)'H^{-1}C]' [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} [L - BH^{-1}C]$$

Ignorando-se a estimativa ou estimativas das parcelas perdidas, tem-se:

$$(4.11.4.d) \quad SQR = \sum_{kji} y_{kji}^2 - SQP_{(1)}$$

onde $\sum_{kji} y_{kji}^2$ = somatório dos quadrados das parcelas existentes.

Somando-se e subtraindo-se uma correção, $(Corr_{(usual)})$, da expressão (4.11.4.d), e ainda substituindo-se a $SQP_{(1)}$ pela expressão (4.11.4.c), tem-se:

$$(4.11.4.e) \quad SQR = \left(\sum_{kji} y_{kji}^2 - Corr_{(usual)} \right) - \hat{T}'Q - \\ - [L - (B - A)'H^{-1}C]' [N - BH^{-1}(B' - A)]^{-1} [L - BH^{-1}C] - \\ - [C'H^{-1}C - Corr_{(usual)}]$$

$$\text{onde, } Corr_{(usual)} = \frac{G^2}{bK - 1};$$

G^* = total geral das parcelas existentes.

A expressão (4.11.4.e) é, portanto, a correta soma de quadrados do resíduo, ou seja:

$$(4.11.4.f) \quad SQR = SQTotal_{(usual)} - SQT_{(aj)} - SQL_{(aj)} - \\ - SQC_{(usual)}$$

4.12 - Matriz de Dispersão

A matriz de dispersão D das estimativas dos parâmetros $\hat{\beta}$, por definição:

$$D = E \{ [\hat{\beta} - E(\hat{\beta})] [\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]' \} ,$$

onde $\hat{\beta}$ é dado em (4.4.b), ou seja:

$$\hat{\beta} = F_1^{-1} X' Y .$$

Como no modelo (4.1.b) tem-se que:

$$(4.12.a) \quad \begin{cases} Y = X\beta + \varepsilon \\ \varepsilon \cap N(\Phi, \sigma^2 I_n) \end{cases}$$

logo:

$$E(\hat{\beta}) = E [F_1^{-1} X' X \beta + F_1^{-1} X' \varepsilon]$$

Pelas propriedades de esperança e por (4.12.a), tem-se:

$$E(\hat{\beta}) = F_1^{-1} X' X \beta + \Phi ,$$

logo:

$$D = E \{ [F_1^{-1} X' \varepsilon] [F_1^{-1} X' \varepsilon]' \} .$$

Ainda considerando-se (4.12.a), tem-se:

$$(4.12.b) \quad D = F_1^{-1} X' X (F_1^{-1})' \sigma^2$$

4.13 - Variância da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos Ajustadas para Linhas e Colunas

As estimativas das médias de tratamentos ajustadas para linhas e colunas são obtidas por:

$$(4.13.a) \quad \hat{m}_i = \hat{m} + \hat{t}_i \quad ; \quad (i=1,2,\dots,v) \quad ,$$

$$\text{onde: } \hat{m} = \frac{G}{bk} \quad .$$

De (4.13.a) obtêm-se:

$$(4.13.b) \quad \hat{m}_i - \hat{m}_{i'} = \hat{t}_i - \hat{t}_{i'} \quad .$$

Aplicando as propriedades de variância em (4.13.b), tem-se:

$$(4.13.c) \quad V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = V(\hat{t}_i) + V(\hat{t}_{i'}) - 2\text{COV}(\hat{t}_i, \hat{t}_{i'}) \quad .$$

De posse da matriz de dispersão (4.12.b), determina-se (4.13.c).

Seja $P'\hat{\beta}$ uma função linear dos parâmetros, então a $V(P'\hat{\beta})$ é, por definição:

$$V(P'\hat{\beta}) = E \{ [P'\hat{\beta} - E(P'\hat{\beta})] [P'\hat{\beta} - E(P'\hat{\beta})]' \}$$

$$V(P'\hat{\beta}) = E \{ P' [\hat{\beta} - E(\hat{\beta})] [\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]' P \} \quad .$$

Logo:

$$(4.13.d) \quad V(P'\hat{\beta}) = P'DP \quad .$$

Se $P'\hat{\beta}$ for uma função linear estimável, ou seja, existe λ tal que: $P' = \lambda'(X'X)$, então,

$$V(P'\hat{\beta}) = \lambda'(X'X) F_1^{-1} (X'X) (F_1^{-1})' (X'X) \lambda \sigma^2.$$

Mas, $(X'X) F_1^{-1} (X'X) = (X'X)$, logo,

$$(4.13.e) \quad V(P'\hat{\beta}) = P' F_1^{-1} P \sigma^2.$$

Por (4.13.e) facilmente então se determina a $V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'})$, dado que $\hat{\beta}' = [\hat{\tau}', \hat{\eta}', \hat{c}']$.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Tornando mínima a SQR deduziram-se fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas.

Considerou-se neste trabalho o caso de perda de uma e de duas parcelas na mesma linha.

As correções das somas de quadrados foram obtidas através do método do resíduo condicional.

Para maior clareza será deduzido detalhadamente a análise estatística de um delineamento em Quadrado de Youden, para cada caso seguinte:

- 5.1 - Caso de uma parcela perdida, ignorando-se a mesma.
- 5.2 - Caso de uma parcela perdida, considerando-se a sua estimativa.
- 5.3 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que o tratamento correspondente a uma das parcelas perdidas não

figure dentre as parcelas remanescentes da outra coluna em que ocorreu a perda e vice-versa. As parcelas perdidas são ignoradas.

- 5.4 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que o tratamento correspondente a uma das parcelas perdidas não figura dentre as parcelas remanescentes da outra coluna em que ocorreu a perda e vice-versa. As estimativas das parcelas perdidas são consideradas.
- 5.5 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que apenas em uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela perdida da outra coluna. As parcelas perdidas são ignoradas.
- 5.6 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que apenas em uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela perdida da outra coluna. As estimativas das parcelas perdidas são consideradas.
- 5.7 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que em cada uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela perdida da outra coluna e vice-versa. As parcelas perdidas são ignoradas.
- 5.8 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que em cada uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela perdida da outra coluna e vice-versa. As estimativas das parcelas perdidas são consideradas.

5.1 - Caso de Uma Parcela Perdida, Ignorando-se a Mesma

Seja um experimento em Quadrado de Youden, onde A, B, C e D são os tratamentos

(5.1.a)

LINHAS	COLUNAS				TOTAIS DE LINHAS
	(1)	(2)	(3)	(4)	
I	x(A)	B	C	D	L*
II	B	C	D	A	
III	C	D	A	B	
TOTAIS DE COLUNAS	C*				G*

onde:

- x: representa a parcela perdida que continha o tratamento A;
- L*: total das parcelas existentes na linha (I);
- C*: total das parcelas existentes na coluna (1);
- G*: total geral das parcelas disponíveis;
- T*: total das parcelas existentes com o tratamento A.

5.1.1 - Sistema de equações normais e estimativas dos parâmetros

O sistema de equações normais é o descrito em (4.3.a),

onde:

$$R_{vv} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad E_{bK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad W_{vb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_{KK} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} ; \quad B'_{bK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad H_{bb} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{t}' = [\hat{t}^*, \hat{t}_B, \hat{t}_C, \hat{t}_D]$$

$$\hat{x}' = [\hat{x}^*, \hat{x}_2, \hat{x}_3]$$

$$\hat{c}' = [\hat{c}^*, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4]$$

$$T' = [T^*, T_B, T_C, T_D]$$

$$L' = [L^*, L_2, L_3]$$

$$C' = [C^*, C_2, C_3, C_4]$$

Nota-se que para o particular exemplo literal (5.1.a),

tem-se:

$$X_1'X_1 = X_3'X_3 \quad e \quad X_1'X_2 = X_3'X_2$$

ou seja:

$$R_{vv} = H_{bb} \quad e \quad E_{bK} = B'_{bK} \quad .$$

Considerando-se as restrições $\sum_j \hat{c}_j = 0$ e $\sum_k \hat{l}_k = 0$,
 as estimativas dos parâmetros são dadas por $\hat{\beta} = (F_1)^{-1} X'Y$, (4.4.b),
 ou seja:

$$(5.1.1.a) \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^* \\ T_B \\ T_C \\ T_D \\ L^* \\ L_2 \\ L_3 \\ C^* \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

5.1.2 - Cálculo das $SQP_{(1)}$, $SQP_{(2)}$ e $SQP_{(3)}$

A $SQP_{(1)}$, (4.5.a), é obtida com a solução (5.1.1.a).
 Considerando-se o sistema de equações normais (4.5.e), cuja solução,
 (4.5.g), é:

$$(5.1.2.a) \quad \tilde{\beta}^* = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L^* \\ L \\ L \\ C^* \\ C \\ C \\ C \end{bmatrix}$$

determina-se a $SQP_{(2)}$.

Determina-se a $SQP_{(3)}$, (4.5.n), com a solução:

$$(5.1.2.b) \quad \begin{bmatrix} \underline{\hat{c}^*} \\ \underline{\hat{c}} \\ \underline{\hat{c}} \\ \underline{\hat{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C^* \\ C \\ C \\ C \end{bmatrix}$$

5.1.3 - Análise da variância

O quadro da análise da variância é dado a seguir:

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (aj)	v-1=3	$SQ(T \ell, c)$	$QM(T \ell, c)$ (a)	a/b
Linhas (aj)	K-1=2	$SQ(L c)$	$QM(L c)$	
Colunas	b-1=3	$SQC_{(usual)}$	$QMC_{(usual)}$	
Resíduo	$[(b-1)(K-2)-1]=2$	SQR	QMR (b)	
Total	$[(bK-1)-1]=10$			

onde:

$$SQ(T|\ell, c) = SQP_{(1)} - SQP_{(2)} \quad \text{ou} \quad SQ(T|\ell, c) = \hat{\tau}'Q, \quad (4.11.1.b) ;$$

$$SQ(L|c) = SQP_{(2)} - SQP_{(3)} \quad , \quad \text{ou obtida através da expressão} \\ (4.11.2.h) ;$$

$$SQC_{(usual)} = \sum_j \frac{C_j^2}{h_j} - Corr_{(usual)} ; \quad Corr_{(usual)} = \frac{G^{*2}}{bK - 1} ;$$

$$SQTotal_{(usual)} = \sum_{kji} y_{kji}^2 - Corr_{(usual)} ;$$

e a SQR é obtida por diferença entre a $SQTotal_{(usual)}$ e as demais somas de quadrados.

5.1.4 - Variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas

Como visto em (4.13.e), tem-se:

$$v(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = P' F_1^{-1} P \sigma^2 ,$$

onde F_1^{-1} é dado em (5.1.1.a) e $QMR = \sigma^2$.

5.2 - Caso de Uma Parcela Perdida, Considerando-se a Sua Estimativa

5.2.1 - Fórmula para a estimativa de uma parcela perdida

Considerando-se o experimento (5.1.a) e as somas de quadrados dadas em 4.9, tem-se:

$$SQT_{(x)} = \frac{3}{8} \left[\begin{aligned} & \left[T^* + x - \frac{1}{K} (C^* + x + C_3 + C_4) \right]^2 + \\ & + \left[T_B - \frac{1}{K} (C^* + x + C_2 + C_4) \right]^2 + \\ & + \left[T_C - \frac{1}{K} (C^* + x + C_2 + C_3) \right]^2 + \\ & + \left[T_D - \frac{1}{K} (C_2 + C_3 + C_4) \right]^2 \end{aligned} \right] ;$$

$$SQCol_{(x)} = \frac{(C^* + x)^2}{K} + \frac{C_2^2}{K} + \frac{C_3^2}{K} + \frac{C_4^2}{K} - Corr_{(x)} ;$$

$$SQL_{(x)} = \frac{(L^* + x)}{b} + \frac{L_2^2}{b} + \frac{L_3^2}{b} - Corr_{(x)} ;$$

$$SQTotal_{(x)} = x + \sum_{kji} y_{kji}^2 - Corr_{(x)} ;$$

$$SQR_{(x)} = SQTotal_{(x)} - SQL_{(x)} - SQC_{(x)} - SQT_{(x)} .$$

Tornando mínima a $SQR_{(x)}$, obtêm-se a fórmula para a estimativa de uma parcela perdida, que para um caso geral, é dada por:

$$(5.2.1.a) \quad x = \frac{\lambda K L^* + (\lambda v + 1 - K) C^* - K \left[\sum_j C_j + \sum_i T_i - (K-1) T^* \right]}{K(K-1)(K-2)}$$

onde:

L^* , C^* e T^* : dados em 5.1;

λ , K , v : dados em 4;

$\sum_j C_j$: somatório dos totais de colunas onde aparece o tratamento correspondente à parcela perdida;

$\sum_i T_i$: somatório dos totais de todos os tratamentos que aparecem na coluna que contém a parcela perdida.

Este resultado se assemelha ao apresentado por COCHRAN e COX (1957).

5.2.2 - Fórmulas para as correções das somas de quadrados de tratamentos e de linhas: U_T e U_L

Considerando-se (5.1.a) um delineamento em blocos ao acaso, obtêm-se:

$$SQC(y) = \frac{(C^* + y)^2}{K} + \frac{C_2^2}{K} + \frac{C_3^2}{K} + \frac{C_4^2}{K} - Corr(y)$$

$$SQL(y) = \frac{(L^* + y)^2}{b} + \frac{L_2^2}{b} + \frac{L_3^2}{b} - Corr(y)$$

$$SQTotal_{(y)} = y^2 + \sum_{kji} y_{kji}^2 - Corr_{(y)} \quad , \text{ onde } Corr_{(y)} = \frac{(G^* + y)}{bK}$$

$$SQR_{(y)} = SQTotal_{(y)} - SQC_{(y)} - SQL_{(y)} \quad .$$

Tornando mínima a $SQR_{(y)}$, obtêm-se a fórmula para a estimativa da parcela perdida de um delineamento em blocos ao acaso, que para um caso geral é dada por:

$$(5.2.2.a) \quad y = \frac{KL^* + bC^* - G^*}{(K-1)(b-1)} \quad .$$

Sabe-se que:

$$(5.2.2.b) \quad SQR_{(y)} - SQR_{(x)} = SQP_{(1)} - SQP_{(2)} = SQT_{(aj)} \quad .$$

Desenvolvendo-se a expressão (5.2.2.b), obtêm-se:

$$(5.2.2.c) \quad SQT_{(aj)} = SQT_{(x)} - U_T \quad ,$$

onde U_T é dado por:

$$(5.2.2.e) \quad U_T = \frac{(b-1)(K-1)}{bK} (x - y)^2 \quad ,$$

onde x e y são dados em (5.2.1.a) e (5.2.2.a), respectivamente.

Analisando-se a fórmula (5.2.2.e) verifica-se que esta será sempre positiva, o que indica que a $SQT_{(x)}$ estará sempre superestimada. Considerando-se (5.1.a) um delineamento inteiramente casualizado, tem-se:

$$SQC_{(z)} = \frac{(C^* + z)^2}{K} + \frac{C_2^2}{K} + \frac{C_3^2}{K} + \frac{C_4^2}{K} - Corr_{(z)}$$

$$SQTotal_{(z)} = z^2 + \sum_{kji} y_{kji}^2 - Corr_{(z)}$$

$$SQR_{(z)} = SQTotal_{(z)} - SQC_{(z)} \quad .$$

Tornando mínima a $SQR_{(z)}$, obtêm-se a fórmula para a estimativa da parcela perdida de um delineamento inteiramente casualizado, que para um caso geral é dada por:

$$(5.2.2.f) \quad z = \frac{C^*}{K-1} \quad .$$

Sabe-se que:

$$(5.2.2.g) \quad SQR_{(z)} - SQR_{(y)} = SQP_{(2)} - SQP_{(3)} = SQL_{(aj)} \quad .$$

Desenvolvendo-se a expressão (5.2.2.g) e somando-se e subtraindo-se da mesma $\frac{(L^* + x)^2}{b}$ e $\frac{(G^* + x)^2}{bK}$, obtêm-se:

$$(5.2.2.h) \quad SQL_{(aj)} = SQL_{(x)} - U_L \quad ,$$

onde:

$$(5.2.2.i) \quad U_L = \frac{K-1}{bK} \left\{ [x^2 - (b-1)y^2 + bz^2] + 2x \frac{(KL^* - G^*)}{K-1} \right\} .$$

5.2.3 - Análise da variância

O quadro da análise da variância para um caso geral é o dado a seguir:

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos(aj)	v-1	$SQ(T \ell, c) = SQT_{(x)} - U_T$	$QM(T \ell, c) \quad (a)$	a/b
Linhas(aj)	K-1	$SQ(L c) = SQL_{(x)} - U_L$	$QM(L c)$	
Colunas	b-1	$SQC_{(usual)}$	$QMC_{(usual)}$	
Resíduo	$(v-1)(K-2)-1$	SQR	QMR	(b)
Total	$(bK-1)-1$	$SQTotal_{(usual)}$		

onde a SQR é obtida por diferença entre a $SQTotal_{(usual)}$ e as demais somas de quadrados.

5.2.4 - Comparação entre duas médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas

Como visto em (5.1.4), tem-se

$$V(\hat{e}_i - \hat{e}_{i,1}) = P' F_1^{-1} P \sigma^2 \quad .$$

Será definido, a seguir, algumas expressões que serão utilizadas para os casos de duas parcelas perdidas na mesma linha.

$\sum_{kji} y_{kji}^2$ = somatório dos quadrados das parcelas existentes;

G^* = total geral das parcelas disponíveis;

L^* = total da linha que contém as parcelas perdidas;

x_1, x_2 = representam as parcelas perdidas no delineamento em Quadrado de Youden;

y_1, y_2 = representam as parcelas perdidas admitindo-se o delineamento em blocos casualizados;

z_1, z_2 = representam as parcelas perdidas admitindo-se o delineamento inteiramente casualizado;

T_1^* = total do tratamento correspondente à parcela perdida x_1 ;

C_1^* = total da coluna que contém a parcela perdida x_1 ;

T_2^* = total do tratamento correspondente à parcela perdida x_2 ;

C_2^* = total da coluna que contém a parcela perdida x_2 ;

T_1' = somatório do total de todos os tratamentos que aparecem na coluna que contém a parcela perdida x_1 ;

T_2' = somatório do total de todos os tratamentos que aparecem na coluna que contém a parcela perdida x_2 ;

Q_1 = somatório do total de todas as colunas que apresentam o tratamento correspondente ao da parcela perdida x_1 ;

Q_2 = somatório do total de todas as colunas que apresentam o tratamento correspondente ao da parcela perdida x_2 ;

Q_1' = total dos valores Q_1 para os outros tratamentos que aparecem na coluna que contém x_1 ;

Q'_2 = total dos valores Q_2 para os outros tratamentos que aparecem na coluna que contém x_2 ;

u = número de tratamentos em comum que as colunas com parcela perdida apresentam, excluindo-se os tratamentos correspondentes aos das parcelas perdidas ($u=0,1,\dots,\lambda$).

Deve-se salientar ainda que Q_1 é um somatório de K colunas, portanto inclui sempre C_1^* . O mesmo ocorre com Q_2 , que sempre inclui C_2^* .

A SQR de todos os quadros das análises de variância são obtidas por diferença entre a $SQ_{Total}(\text{usual})$ e as demais corretas somas de quadrados.

5.3 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida de uma Coluna não Figure Dentre as Parcelas Remanescentes da outra Coluna em que Ocorreu a Perda e Vice-Versa. As Parcelas Perdidas são Ignoradas

Seja um experimento em Quadrado de Youden, onde A, B, C, D, E, F e G são os tratamentos:

LINHAS	C O L U N A S							TOTAIS DE LINHAS
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
I	$x_1(G)$	A	$x_2(B)$	C	D	E	F	L^*
II	A	B	C	D	E	F	G	
III	C	D	E	F	G	A	B	
TOTAIS DE COLUNAS	C_1^*		C_2^*					G^*

(5.3.a)

Tem-se: $v = 7$; $K = 3$; $b = 7$; $r = 3$; $\lambda = 1$ e $u = 1$.

5.3.1 - Sistema de equações normais e estimativas dos parâmetros

O sistema de equações normais é o (4.3.a), onde:

$$R_{vv} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; E_{bK} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{vb} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; N_{KK} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ;$$

$$H_{bb} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; B_{Kb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando-se as restrições $\Sigma \hat{c}_j = 0$ e $\Sigma \hat{x}_k = 0$,
tem-se as estimativas dos parâmetros, (4.4.b), ou seja:

$$(5.3.1.a) \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} [R_{vv}] & [E_{bK} - A_{bK}] & [W_{vb} - A_{vb}] \\ [E'_{Kb}] & [N_{KK}] & [B_{Kb} - A_{Kb}] \\ [W'_{bv}] & [B'_{bK} - A'_{bK}] & [H_{bb}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T \\ L \\ C \end{bmatrix}$$

5.3.2 - Cálculo das SQP₍₁₎, SQP₍₂₎ e SQP₍₃₎

A SQP₍₁₎, (4.5.a), é obtida com a solução (4.1.1.a).

Para determinar-se a SQP₍₂₎ utiliza-se a solução (4.5.g) do sistema (4.5.e), que para o caso é:

$$\tilde{\beta}^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L^* \\ L_2 \\ L_3 \\ C_1^* \\ C_3 \\ C_2^* \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix}$$

Determina-se a SQP₍₃₎, (4.5.n), com a solução abaixo:

$$\underline{\tilde{c}} = H^{-1}C \quad .$$

5.3.3 - Análise da variância

O quadro da análise da variância é o dado a seguir.

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (aj)	$v-1=6$	$SQ(T \ell, c) = SQP_{(1)} - SQP_{(2)}$	$QM(T \ell, c) \text{ (a) } a/b$	
Linhas (aj)	$K-1=2$	$SQ(L c) = SQP_{(2)} - SQP_{(3)}$	$QM(L c)$	
Colunas	$b-1=6$	$SQC_{(usual)}$	$QMC_{(usual)}$	
Resíduo	$[(b-1)(K-2)-2]=4$	SQR	$QMR \text{ (b)}$	
Total	$[(bK-1)-2]=18$	$SQTotal_{(usual)}$		

A $SQ(T|\ell, c)$ também pode ser obtida por (4.11.1.b) e a $SQ(L|c)$ por (4.11.2.e), respectivamente.

5.3.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas

Como visto em (4.13.e), tem-se:

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = P' F_1^{-1} P \sigma^2, \quad ,$$

onde F_1^{-1} é dado em (5.3.1.a) e $QMR \neq \sigma^2$.

5.4 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida de Uma Coluna Não Figure Dentre as Parcelas Remanescentes da Outra Coluna em que Ocorreu a Perda e Vice-Versa. As Estimativas das Parcelas Perdidas São Consideradas

5.4.1 - Fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas

Como descrito em 4.9, tem-se:

$$SQR_{(x_1, x_2)} = SQTotal_{(x_1, x_2)} - SQL_{(x_1, x_2)} - SQC_{(x_1, x_2)} - SQT_{(x_1, x_2)}$$

Minimizando-se a $SQR_{(x_1, x_2)}$, ou seja, diferenciando a $SQR_{(x_1, x_2)}$ em relação às variáveis x_1 e x_2 , e igualando-se a zero as diferenciais parciais, obtêm-se um sistema de equações determinado.

A solução desse sistema são as estimativas das parcelas perdidas:

$$K(K-1)(K-2) x_1 - [\lambda(K-1) + u] x_2 = \begin{bmatrix} \lambda KL^* + \lambda b C_1^* + K(K-1) T_1^* - \\ - \lambda G^* - K T_1' - \\ - (K-1) Q_1 + Q_1' \end{bmatrix}$$

$$K(K-1)(K-2) x_2 - [\lambda(K-1) + u] x_1 = \begin{bmatrix} \lambda KL^* + \lambda b C_2^* + K(K-1) T_2^* - \\ - \lambda G^* - K T_2' - \\ - (K-1) Q_2 + Q_2' \end{bmatrix}$$

(5.4.1.a)

5.4.2 - Fórmulas para as correções das somas de quadrados de tratamentos e de linhas: U_T e U_L

Como já descrito em 4.10, tem-se:

$$SQR_{(y_1, y_2)} = SQT_{Total}(y_1, y_2) - SQC_{(y_1, y_2)} - SQL_{(y_1, y_2)}.$$

Minimizando-se a $SQR_{(y_1, y_2)}$, ou seja, igualando-se a zero as suas diferenciais parciais, obtêm-se um sistema de equações. A solução deste são as estimativas das parcelas perdidas de um delineamento em blocos ao acaso.

$$(5.4.2.a) \quad \begin{cases} (b-1) y_1 - y_2 = \frac{KL^* - b C_1^* - G^*}{K-1} \\ (b-1) y_2 - y_1 = \frac{KL^* - b C_2^* - G^*}{K-1} \end{cases}$$

Como dado em (4.10.2), tem-se:

$$SQT_{(aj)} = SQT_{(x_1, x_2)} - U_T,$$

onde:

$$(5.4.2.b) \quad U_T = \left[\begin{aligned} & \frac{(b-1)(K-1)}{bK} (x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2) - 2 \frac{(KL^* + bC_1^* - G^*)}{bK} (x_1 - y_1) \\ & - 2 \frac{(KL^* + bC_2^* - G^*)}{bK} (x_2 - y_2) \\ & - \frac{2(K-1)}{bK} (x_1 x_2 - y_1 y_2) \end{aligned} \right]$$

De 4.10, tem-se:

$$SQR_{(z_1, z_2)} = SQTotal_{(z_1, z_2)} - SQC_{(z_1, z_2)} .$$

Tornando mínima a $SQR_{(z_1, z_2)}$, obtêm-se as estimativas de um delineamento inteiramente casualizado:

$$(5.4.2.c) \quad c \begin{cases} z_1 = \frac{C_1^*}{K-1} \\ z_2 = \frac{C_2^*}{K-1} \end{cases}$$

De (4.10.4) tem-se:

$$SQL_{(a_j)} = SQL_{(x_1, x_2)} - U_L ,$$

onde:

$$(5.4.2.d) \quad U_L = \left[\begin{aligned} & \frac{K-1}{bK} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{(b-1)(K-1)}{bK} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{K-1}{K} (z_1^2 + z_2^2) + \\ & + 2 \frac{(KL^* - G^*)}{bK} (x_1 + x_2) + \frac{2(K-1)}{bK} (x_1 x_2 - y_1 y_2) - \\ & - 2 \frac{(KL^* + bC_1^* - G^*)}{bK} y_1 - 2 \frac{(KL^* + bC_2^* - G^*)}{bK} y_2 \end{aligned} \right]$$

5.4.3 - Análise da variância

O quadro da análise da variância é o dado a seguir.

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos(aj)	v-1	$SQ(T \ell, c) = SQT_{(x_1, x_2)} - U_T$	$QM(T \ell, c)$ (a)	a/b
Linhas (aj)	K-1	$SQ(L c) = SQL_{(x_1, x_2)} - U_L$	$QM(L c)$	
Colunas	b-1	$SQC_{(usual)}$	$QMC_{(usual)}$	
Resíduo	$[(b-1)(K-2)-2]$	SQR	QMR (b)	
Total	$[(bK-1)-2]$	$SQTotal_{(usual)}$		

5.4.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas

Como dado em (5.3.4), tem-se:

$$V(\hat{e}_i - \hat{e}_{i'}) = P' F_1^{-1} P \sigma^2 \quad .$$

5.5 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que Apenas em Uma das Colunas Com Parcela Perdida Figure o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida da Outra Coluna. As Parcelas Perdidas são Ignoradas

Seja um delineamento em Quadrado de Youden, onde 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são os tratamentos.

LINHAS	C O L U N A S							TOTAIS DE LINHAS
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
I	$x_1(3)$	4	$x_2(5)$	6	7	1	2	L^*
II	5	6	7	1	2	3	4	
III	6	7	1	2	3	4	5	
IV	7	1	2	3	4	5	6	
TOTAIS DE COLUNAS	C_1^*		C_2^*					G^*

Tem-se: $v=7$, $K=4$, $r=4$, $b=7$, $\lambda=2$ e $u=1$.

5.5.1 - Sistema de equações normais e estimativas dos parâmetros

O sistema de equações normais é o (4.3.a), onde:

$$R_{vv} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$; E_{bK} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{vb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; N_{KK} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B_{Kb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{bb} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Considerando-se as restrições $\Sigma \hat{c}_j = 0$ e $\Sigma \hat{x}_k = 0$, tem-se as estimativas dos parâmetros, (4.4.b), ou seja:

$$(5.5.1.a) \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} [R_{vv}] & [E_{bK} - A_{bK}] & [W_{vb} - A_{vb}] \\ [E'_{Kb}] & [N_{KK}] & [B_{Kb} - A_{Kb}] \\ [W'_{bv}] & [B'_{bK} - A_{bK}] & [H_{bb}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T \\ L \\ C \end{bmatrix}$$

5.2.2 - Cálculo das SQP₍₁₎, SQP₍₂₎ e SQP₍₃₎

A SQP₍₁₎, (4.5.a), é obtida com a solução (5.5.1.a). Para determinar-se a SQP₍₂₎ utiliza-se a solução (4.5.g), que para o caso é dada por:

$$\tilde{\beta}^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L^* \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ C_1^* \\ C_3 \\ C_2^* \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix}$$

A $SQP_{(3)}$, (4.5.n), é determinada com a solução:

$$\hat{c} = H^{-1}C.$$

5.5.3 - Análise da variância

O quadro da análise da variância é o dado a seguir.

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos(aj)	v-1=6	$SQ(T \ell, c) = SQP_{(1)} - SQP_{(2)}$	$QM(T \ell, c)$	(a) a/b
Linhas (aj)	K-1=3	$SQ(L c) = SQP_{(2)} - SQP_{(3)}$	$QM(L c)$	
Colunas	b-1=6	$SQC_{(usual)}$	$QMC_{(usual)}$	
Resíduo	$[(b-1)(K-2)-2]=10$	SQR	QMR	(b)
Total	$[(bK-1)-2]=25$	$SQTotal_{(usual)}$		

A $SQ(T|\ell, c)$ e a $SQ(L|c)$ podem ser obtidas também por (4.11.1.b) e (4.11.2.e), respectivamente.

5.5.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas

Como visto em (4.13.e), tem-se:

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}'_i) = P' F_1^{-1} P \sigma^2 ,$$

onde F_1^{-1} é dado em (5.5.1.a), e $QMR \approx \sigma^2$.

5.6 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que Apenas em Uma das Colunas com Parcela Perdida Figure o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida da Outra Coluna. As Estimativas das Parcelas Perdidas são Consideradas

5.6.1 - Fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas

Minimizando-se a $SQR_{(x_1, x_2)}$, dada em 4.9, obtêm-se um sistema de equações determinado, cuja solução são as estimativas das parcelas perdidas:

$$\begin{aligned} K(K-1)(K-2) x_1 - [(\lambda-1)(K-1)+u] x_2 &= \begin{bmatrix} \lambda KL^* + \lambda bC_1^* + K(K-1) T_1^* - \\ - \lambda G^* - KT_1' - (K-1) Q_1 + Q_1' \end{bmatrix} \\ K(K-1)(K-2) x_2 - [(\lambda-1)(K-1)+u] x_1 &= \begin{bmatrix} \lambda KL^* + \lambda bC_2^* + K(K-1) T_2^* - \\ - \lambda G^* - KT_2' - (K-1) Q_2 + Q_2' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(5.6.1.a)

5.6.2 - Fórmulas para as correções das somas de quadrados de tratamentos e de linhas: U_T e U_L

Minimizando-se a $SQR(y_1, y_2)$, dada em 4.10, obtêm-se um sistema de equações, cuja solução são as estimativas das parcelas perdidas de um delineamento em blocos casualizados:

$$(5.6.2.a) \quad \begin{cases} (b-1) y_1 - y_2 = \frac{KL^* + bC_1^* - G^*}{K-1} \\ (b-1) y_2 - y_1 = \frac{KL^* + bC_2^* - G^*}{K-1} \end{cases}$$

Como dado em (4.10.2), tem-se:

$$SQT_{(aj)} = SQT_{(x_1, x_2)} - U_T,$$

onde:

$$(5.6.2.b) \quad U_T = \begin{bmatrix} \frac{(b-1)(K-1)}{bK} (x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2) - \\ - 2 \frac{KL^* + bC_1^* - G^*}{bK} (x_1 - y_1) - \\ - 2 \frac{KL^* + bC_2^* - G^*}{bK} (x_2 - y_2) - \\ - 2 \frac{(K-1)}{bK} (x_1 x_2 - y_1 y_2) \end{bmatrix}$$

Tornando mínima a $SQR(z_1, z_2)$, dada em 4.10, obtêm-se as estimativas das parcelas perdidas de um delineamento inteiramente casualizado:

$$(5.6.2.c) \quad \begin{cases} z_1 = \frac{C_1^*}{K-1} \\ z_2 = \frac{C_2^*}{K-1} \end{cases}$$

De (4.10.4), tem-se:

$$SQL_{(aj)} = SQL_{(x_1, x_2)} - U_L$$

onde:

$$(5.6.2.d) \quad U_L = \left[\begin{aligned} & \frac{(K-1)}{bK} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{(b-1)(K-1)}{bK} (y_1^2 + y_2^2) + \\ & + \frac{K-1}{K} (z_1^2 + z_2^2) + 2 \frac{(KL^* - G^*)}{bK} (x_1 + x_2) + \\ & + \frac{2(K-1)}{bK} (x_1 x_2 - y_1 y_2) - 2 \frac{(KL^* + bC_1^* - G^*)}{bK} y_1 - \\ & - 2 \frac{(KL^* + bC_2^* - G^*)}{bK} y_2 \end{aligned} \right]$$

5.6.3 - Análise da variância

O quadro da análise da variância é o dado a seguir.

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (aj)	v-1	$SQ(T \ell, c) = SQT_{(x_1, x_2)}^{-U_T}$	$QM(T \ell, c) \text{ (a)}$	a/b
Linhas (aj)	K-1	$SQ(L c) = SQL_{(x_1, x_2)}^{-U_L}$	$QM(L c)$	
Colunas	b-1	$SQC_{(usual)}$	$QMC_{(usual)}$	
Resíduo	$[(b-1)(K-2)-2]$	SQR	QMR (b)	
Total	$[(bK-1)-2]$	$SQTotal_{(usual)}$		

5.6.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos ajustadas para linhas e colunas

Como dado em (5.5.4), tem-se:

$$V(\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_i') = P' F_1^{-1} P \sigma^2 .$$

5.7 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que em Cada Uma das Colunas com Parcela Perdida Figure o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida da Outra Coluna e Vice-Versa. As Parcelas São Ignoradas.

Seja um delineamento em quadrado de Youden, onde A, B, C, D e E são os tratamentos:

LINHAS	C O L U N A S					TOTAIS DE LINHAS
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
I	$x_1(D)$	A	B	$x_2(C)$	E	L^*
II	C	E	A	B	D	
III	E	B	C	D	A	
IV	B	D	E	A	C	
TOTAIS DE COLUNAS	C_1^*			C_2^*		G^*

Tem-se: $v=5$, $K=4$, $r=4$, $b=5$, $\lambda=3$ e $u=1$.

5.7.1 - Sistema de equações normais e estimativas dos parâmetros

O sistema de equações normais é o (4.3.a), onde:

$$R_{VV} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad E_{bK} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$N_{KK} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad W_{vb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B_{Kb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; H_{bb} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

Considerando-se as restrições $\Sigma \hat{c}_j = 0$ e $\Sigma \hat{x}_k = 0$, têm-se as estimativas dos parâmetros, (4.4.b), ou seja:

$$(5.7.1.a) \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} [R_{vv}] & [E_{bK} - A_{bK}] & [W_{vb} - A_{vb}] \\ [E'_{Kb}] & [N_{KK}] & [B_{Kb} - A_{Kb}] \\ [W'_{bv}] & [B'_{bK} - A_{bK}] & [H_{bb}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T \\ L \\ C \end{bmatrix}$$

5.7.2 - Cálculo das SQP₍₁₎, SQP₍₂₎ e SQP₍₃₎

A SQP₍₁₎, (4.5.a), é obtida com a solução (5.7.1.a). Para determinar-se a SQP₍₂₎ utiliza-se a solução (4.5.g), que para o caso é dada por:

$$\tilde{\beta}^* = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L^* \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ C_1^* \\ C_3 \\ C_4 \\ C_2^* \\ C_5 \end{bmatrix}$$

A $SQP_{(3)}$, (4.5.n), é determinada com a solução:

$$\hat{c} = H^{-1} C \quad .$$

5.7.3 - Análise da variância

O quadro da análise da variância é o dado a seguir.

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos(aj)	$v-1=4$	$SQ(T \ell, c) = SQP_{(1)} - SQP_{(2)}$	$QM(T \ell, c) \text{ (a)}$	a/b
Linhas (aj)	$K-1=3$	$SQ(L c) = SQP_{(2)} - SQP_{(3)}$	$QM(L c)$	
Colunas	$b-1=4$	$SQC_{(usual)}$	$QMC_{(usual)}$	
Resíduo	$[(b-1)(K-2)-2]=6$	SQR	QMR	(b)
Total	$[(bK-1)-2]=17$	$SQTotal_{(usual)}$		

A $SQ(T|l,c)$ e a $SQ(L|c)$ podem ser obtidas também por (4.11.1.b) e (4.11.2.e), respectivamente.

5.7.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos, ajustadas para linhas e colunas

Como visto em (4.13.e), tem-se:

$$V(\hat{e}_i - \hat{e}_{i'}) = P' F^{-1} P \sigma^2 ,$$

onde F_1^{-1} é dado em (5.7.1.a) e $QMR = \sigma^2$.

5.8 - Caso de Duas Parcelas Perdidas na Mesma Linha, sendo que em Cada Uma das Colunas com Parcela Perdida Figura o Tratamento Correspondente à Parcela Perdida da Outra Coluna e Vice-Versa. As Estimativas das Parcelas Perdidas são Consideradas

5.8.1 - Fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas

Minimizando-se a $SQR_{(x_1, x_2)}$, dada em 4.9, obtém-se um sistema de equações determinado, cuja solução são as estimativas das parcelas perdidas:

$$K(K-1)(K-2) x_1 - [(\lambda-2)(K-1) + u] x_2 = \begin{bmatrix} \lambda KL^* + \lambda bC_1^* + K(K-1) T_1^* - \\ - \lambda G^* - KT_1' - (K-1) Q_1 + Q_1' \end{bmatrix}$$

$$K(K-1)(K-2) x_2 - [(\lambda-2)(K-1) + u] x_1 = \begin{bmatrix} \lambda KL^* + \lambda bC_2^* + K(K-1) T_2^* - \\ - \lambda G^* - KT_1' - (K-1) Q_2 + Q_2' \end{bmatrix}$$

(5.8.1.a)

5.8.2 - Fórmulas para as correções das somas de quadrados de tratamentos e de linhas: U_T e U_L

Minimizando-se a $SQR_{(y_1, y_2)}$, dada em 4.10, obtêm-se um sistema de equações, cuja solução são as estimativas das parcelas perdidas de um delineamento em blocos casualizados:

$$(5.8.2.a) \quad \begin{cases} (b-1) y_1 - y_2 = \frac{KL^* + bC_1^* - G^*}{K-1} \\ (b-1) y_2 - y_1 = \frac{KL^* + bC_2^* - G^*}{K-1} \end{cases}$$

Como dado em (4.10.2), tem-se:

$$SQT_{(aj)} = SQT_{(x_1, x_2)} - U_T ,$$

onde:

$$(5.8.2.b) \quad U_T = \begin{bmatrix} \frac{(b-1)(K-1)}{bK} (x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2) - \\ - 2 \frac{KL^* + bC_1^* - G^*}{bK} (x_1 - y_1) - \\ - 2 \frac{KL^* + bC_2^* - G^*}{bK} (x_2 - y_2) - \\ - 2 \frac{(K-1)}{bK} (x_1 x_2 - y_1 y_2) \end{bmatrix}$$

Minimizando-se a $SQR_{(z_1, z_2)}$, dada em 4.10, obtêm-se as estimativas das parcelas perdidas de um delineamento inteiramente casualizado:

$$(5.8.2.c) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{C_1^*}{K-1} \\ z = \frac{C_2^*}{K-1} \end{array} \right.$$

De (4.10.4), tem-se:

$$SQL_{(aj)} = SQL_{(x_1, x_2)} - U_L ,$$

onde:

$$(5.8.2.d) \quad U_L = \begin{bmatrix} \frac{(K-1)}{bK} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{(b-1)(K-1)}{bK} (y_1^2 + y_2^2) + \\ + \frac{K-1}{K} (z_1^2 + z_2^2) + 2 \frac{(KL^* - G^*)}{bK} (x_1 + x_2) + \\ + 2 \frac{(K-1)}{bK} (x_1 x_2 - y_1 y_2) - 2 \frac{(KL^* + bC_1^* - G^*)}{bK} y_1 - \\ - 2 \frac{(KL^* - bC_2^* - G^*)}{bK} y_2 \end{bmatrix}$$

5.8.3 - Análise da variância

O quadro da análise da variância é o dado a seguir:

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos(aj)	v-1	$SQ(T \ell, c) = SQT_{(x_1, x_2)} - U_T$	$QM(T \ell, c) \quad (a)$	a/b
Linhas(aj)	K-1	$SQ(L c) = SQL_{(x_1, x_2)} - U_L$	$QM(L c)$	
Colunas	b-1	$SQC_{(usual)}$	$QMC_{(usual)}$	
Resíduo	$[(b-1)(K-2)-2]$	SQR	$QMR \quad (b)$	
Total	$[(bK-1)-2]$	$SQTotal_{(usual)}$		

5.8.4 - Variância da estimativa de um contraste entre médias de tratamentos ajustadas para linhas e colunas

Como dado em (5.7.4), tem-se:

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = P' F_1^{-1} P \sigma^2 .$$

5.9 - Exemplos Numéricos

Para ilustrar os resultados obtidos neste trabalho, serão usados os experimentos apresentados em 3, onde as corretas somas de quadrados serão obtidas:

- a) diretamente através de matrizes $[SQ_{(a)}]$;
- b) através das fórmulas deduzidas $[SQ_{(b)}]$.

5.9.1 - Caso de uma parcela perdida (y_{114})

Considerando-se os dados da Tabela 1, tem-se:

$$x = 512,1666667$$

$$y = 590,75$$

$$z = 569,00$$

$$SQP_{(1)} = 4.433.810,437$$

$$SQP_{(2)} = 4.342.808,182$$

$$SQP_{(3)} = 4.311.473,250$$

$$U_T = 3.705,204164$$

$$U_L = -1.282,683405$$

Análise da variância

C.V.	G.L.	S.Q. (a)	S.Q. (b)	Q.M.	F
Tratam. (aj)	4	91.002,245	91.002,245	22.750,5613	6,93*
Linhas (aj)	3	31.334,932	31.334,932	10.444,9773	
Colunas	4	42.629,25	42.629,25	10.657,3125	
Resíduo	7	22.987,573	22.987,573	3.283,9290	
Total	18	187.954,00	187.954,00		

5.9.2 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha sendo que o tratamento correspondente à parcela perdida de uma coluna não figure dentre as parcelas remanescentes da outra coluna em que ocorreu a perda e vice-versa (y_{117} e y_{132})

Considerando-se os dados da Tabela 2, tem-se:

$$x_1 = 23,60 \quad ; \quad x_2 = 35,30$$

$$y_1 = 24,30 \quad ; \quad y_2 = 34,75$$

$$z_1 = 18,80 \quad ; \quad z_2 = 29,25$$

$$SQP_{(1)} = 18.353,25142$$

$$SQP_{(2)} = 18.303,54809$$

$$SQP_{(3)} = 18.200,22833$$

$$U_T = 0,526191$$

$$U_L = 39,235476$$

Análise da variância

C.V.	G.L.	S.Q. (a)	S.Q. (b)	Q.M.	F
Tratam. (aj)	6	49,70333	49,70333	8,2839	0,39
Linhas (aj)	2	103,31976	103,31976	51,6599	
Colunas	6	738,33359	738,33359	123,0556	
Resíduo	4	84,74858	84,74858	21,1871	
Total	18	976,10526	976,10526		

5.9.3 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que apenas em uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela da outra coluna (y_{114} e y_{121})

Considerando-se os dados da Tabela 1, tem-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= 530,625 & ; & & x_2 &= 573,375 \\ y_1 &= 576,666667 & ; & & y_2 &= 461,66667 \\ z_1 &= 569,00 & ; & & z_2 &= 454,00 \end{aligned}$$

$$SQP_{(1)} = 4.166.576,508$$

$$SQP_{(2)} = 4.076.268,649$$

$$SQP_{(3)} = 4.046.221,250$$

$$U_T = 10.302,123420$$

$$U_L = 1.490,1499$$

Análise da variância

C.V.	G.L.	S.Q. (a)	S.Q. (b)	Q.M.	F
Tratam. (aj)	4	90.307,8590	90.307,8590	22.576,9648	6,19*
Linhas (aj)	3	30.047,3990	30.047,3990	10.015,7997	
Colunas	4	43.657,6940	43.657,6940	10.914,4235	
Resíduo	6	21.897,4920	21.897,4920	3.659,5820	
Total	17	185.910,4440	185.910,4440		

5.9.4 - Caso de duas parcelas perdidas na mesma linha, sendo que em cada uma das colunas com parcela perdida figure o tratamento correspondente à parcela perdida da outra coluna e vice-versa (y_{114} e y_{143})

Considerando-se os dados da Tabela 1, tem-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= 513,20 & ; & & x_2 &= 589,20 \\ y_1 &= 551,777778 & ; & & y_2 &= 427,111111 \\ z_1 &= 569 & ; & & z_2 &= 444,333333 \end{aligned}$$

$$SQP_{(1)} = 4.093.935,676$$

$$SQP_{(2)} = 4.016.588,126$$

$$SQP_{(3)} = 3.986.005,583$$

$$U_T = 18.532,539230$$

$$U_L = -457,549340$$

Análise da variância

C.V.	G.L.	S.Q. (a)	S.Q. (b)	Q.M.	F
Tratam. (aj)	4	77.347,5500	77.347,5500	19.336,8875	5,05*
Linhas (aj)	3	30.582,5430	30.582,5430	10.194,1810	
Colunas	4	44.509,5270	44.509,5270	11.127,3818	
Resíduo	6	22.973,3240	22.973,3240		
Total	17	175.412,9440	175.412,9440		

Embora a demonstração não esteja presente, estudaram-se os componentes de variância e constatou-se, como é usual ocorrer, que a SQR perde tantos graus de liberdade quantas forem as parcelas perdidas.

6. CONCLUSÕES

De um modo geral, conclui-se:

6.1 - As corretas somas de quadrados podem ser obtidas:

- a) diretamente através de matrizes;
- b) através de fórmulas deduzidas.

6.2 - Para o caso de uma parcela perdida, a correção para $SQT_{(x)}$,

U_T , e para a $SQL_{(x)}$, U_L , são:

$$U_T = \frac{(b-1)(K-1)}{bk} (x - y)^2 ;$$

$$U_L = \frac{K-1}{bK} \left[\left| x^2 - (b-1)y + bz^2 \right| + 2x \frac{(KL^* - G^*)}{K-1} \right]$$

Analisando-se a expressão U_T , verifica-se que é sempre positiva, o que indica que a $SQT_{(x)}$ está sempre superestimada.

6.3 - A expressão para a correção da $SQT_{(x_1, x_2)}$, U_T , é a mesma para todos os casos estudados de duas parcelas perdidas na mesma linha. O mesmo ocorre para a correção da $SQL_{(x_1, x_2)}$, U_L . O que diferencia os casos são as fórmulas para as estimativas das parcelas perdidas.

6.4 - Como a SQT é ajustada para linhas e colunas, e a SQL é ajustada para colunas, então a SQC é a usual.

6.5 - A SQR pode ser obtida por diferença entre a $SQTotal_{(usual)}$ e as demais corretas somas de quadrados.

6.6 - Só se chegou a uma única maneira de se obter a variância entre médias de tratamentos ajustadas para linhas e colunas, ou seja, através de matrizes.

7. BIBLIOGRAFIA

ALLAN, F.E. d J. WISHART, 1930. A method of estimating the yield of a missing plot in field experimental work. Jour. Agr. Sci., Cambridge, 20: 399-406.

ANDERSON, R.L., 1946. Missing-plot techniques. Biometrics, Raleigh, 2: 41-57.

CAMPOS, H., 1964. Estudo sobre análise de experimentos com parcelas perdidas. Piracicaba, ESALQ/USP. 84 p. (Tese de Doutorado).

CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. Asia Publishing House, Londres, 120 p.

CLARKE, G.M., 1963. A second set of treatments in a Youden Square design. Biometrics, Raleigh, 19: 98-104.

CLARKE, G.M., 1967. Four-way Balanced Designs based on Youden Squares with 5, 6 or 7 treatments. Biometrics, Raleigh, 23: 803-812.

- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Design. 2.^a ed., John Wiley, Nova York. 611 p.
- FABRE SANCHES, S., 1978. Análise de um experimento em quadrado latino com perda de parcelas, linha, coluna ou tratamento. Piracicaba, ESALQ/USP. 100 p. (Dissertação de Mestrado).
- FABRE SANCHES, S., 1980. Análise de experimentos em parcelas subdivididas em blocos casualizados, com perda de uma ou duas subparcelas ou parcelas. Piracicaba, ESALQ/USP. 119 p. (Tese de Doutorado).
- FINNEY, D.J., 1946. A note on missing-plot techniques. Biometrics, Raleigh, 2: 94.
- HADDAD, M.L., 1978. Estudo sobre parcela perdida em delineamento em parcelas subdivididas. Piracicaba, ESALQ/USP. 53 p. (Dissertação de Mestrado).
- KEMPTHORNE, O., 1952. The Design of Experiments. John Willey, Nova York.
- PANSE, V.G. e P.V. SUKTHAME, 1957. Statistical methods of agricultural works. New Delhi, Indian Council of Agricultural Research, 361 p.
- PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. Livraria Nobel, Piracicaba. 430 p.
- PINHO, S.Z., 1973. Observações perdidas em delineamentos em parcelas subdivididas e sub-subdivididas. Botucatu, UNESP. 173 p. (Tese de Doutorado).

- PINHO, S.Z., 1975. Estudo sobre os componentes de variância de um delineamento em parcelas subdivididas com uma parcela perdida. Piracicaba, ESALQ/USP. (Dissertação de Mestrado).
- RIBEIRO, V.Q., 1980. Análise de ensaios em parcelas subdivididas com observações perdidas. Piracicaba, ESALQ/USP. 85 p. (Dissertação de Mestrado).
- SMITH, C.A.B. e H.O. HARTHEY, 1948. The construction of Youden Squares. Journ. Roy. Stat., Londres, 13: 10.
- YODEN, W.J., 1937. Use of incomplete block replications in estimating tobacco-mosaic. Contr. Boyce Thompson Inst., Menasha, 9: 41-48.
- YODEN, W.J., 1940. Experimental design to increase accuracy of greenhouse studies. Contr. Boyce Thompson Inst., Menasha, 11: 219-228.
- YATES, F., 1933. The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete. Empire Journal Exp. Agr., Oxford, 1: 129-142.
- YATES, F., 1936. Incomplete latin square. Journ. Agr. Sci., Cambridge, 26: 301-315.