ANÁLISE DE COVARIÂNCIA INTRABLOCOS, COM p VARIÁVEIS AUXILIARES, PARA DELINEAMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS

JOSÉ FERNANDO SOARES DIAS
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. DÉCIO BARBIN

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Fevereiro, 1981

A Deus, por este trabalho

*Aos meus pais José Raimundo e Léa,
pela constante dedicação*

*Aos meus irmãos, sogros e parentes,
pela cooperação*

*À Amariles, minha esposa,
pelo amor que nos une,*

D E D I C O.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Décio Barbin, pela orientação segura e valiosa prestada durante todo seu Curso de Pós-Graduação.

À Empresa Maranhense de Pesquisa Agropecuária, Secretaria de Agricultura do Maranhão e Federação das Escolas Superiores do Maranhão, pela oportunidade de aperfeiçoamento.

À Eng.^a Agr.^a Amariles Santos Dias, pelos constantes incentivos e ajudas prestadas.

Aos irmãos Itaan e Vilma Santos da Fonseca; Gilson e Maria do Socorro Dias Caminha, pelo inesgotável apoio dispensado.

Ao Professor Dr. Frederico Pimentel Gomes, pelos ensinamentos e versão do resumo para o inglês.

Aos Professores Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, Dr. Humberto de Campos e Dr. Izaias Rangel Nogueira, pelos ensinamentos e considerações dispensadas.

Aos demais Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos e constante disponibilidade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo auxílio financeiro prestado.

Aos amigos Humberto Coelho, Mauro Sérgio Tenente, Renata Cesar Vilardi Tenente e Valdenir Queiroz Ribeiro, pelo excelente convívio mantido durante o Curso.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação, pela troca de idéias.

À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves e família, pela amizade.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, bem como às Srtas. Inês Fumiko Ubukata e Tiemi Matsuo, pela colaboração.

Às funcionárias da Seção de Pós-Graduação da ESALQ, e ao Sr. Luiz Carlos Veríssimo, pelas atenções dispensadas.

Í N D I C E

	Pág.
RESUMO	ix
SUMMARY	xi
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	20
3.1 - Modelo Matemático	20
3.2 - Sistema de Equações Normais	22
3.3 - Estimativas dos Efeitos dos Parâmetros	25
3.4 - Somas de Quadrados	33
3.4.1 - Soma de quadrados de parâmetros	33
3.4.2 - Soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão	35
3.4.3 - Soma de quadrados de tratamentos, ajustada pa ra blocos e regressão	35
3.5 - Esperança Matemática das Somas de Quadrados	38
3.5.1 - Esperança matemática de $\hat{\tau}'_0 Q$	38
3.5.2 - Esperança matemática da SQReg.	40
3.5.3 - Esperança matemática de $\tilde{a}' E_2$	42
3.5.4 - Esperança matemática da SQT*(aj.)	43
3.5.5 - Esperança matemática de $Y'Y$	43
3.5.6 - Esperança matemática de $B'K^{-1}B$	44
3.5.7 - Esperança matemática da SQRes*	46

	Pág.
3.6 - Distribuição de Formas Quadráticas	47
3.6.1 - Distribuição de $\hat{\tau}_0'Q/\sigma^2$	48
3.6.2 - Distribuição da $SQReg./\sigma^2$	49
3.6.3 - Distribuição de $\hat{a}'E_2/\sigma^2$	51
3.6.4 - Distribuição da $SQT*(aj.)/\sigma^2$	52
3.6.5 - Distribuição de $Y'Y/\sigma^2$	54
3.6.6 - Distribuição de $B'K^{-1}B/\sigma^2$	55
3.6.7 - Distribuição da $SQRes*/\sigma^2$	56
3.6.8 - Distribuição do quociente $\frac{SQReg./n_2}{SQRes*/n_7}$	59
3.6.9 - Distribuição do quociente $\frac{SQT*(aj.)/n_4}{SQRes*/n_7}$	60
3.7 - Estimativas das Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão	61
3.8 - Matriz de Dispersão dos Vetores das Estimativas dos Parâmetros	61
3.8.1 - Matriz de dispersão de $\hat{\tau}_0$	62
3.8.2 - Matriz de dispersão de $\hat{a}$	63
3.8.3 - Matriz de dispersão de $\hat{\tau}$	64
3.9 - Covariância entre $\hat{\tau}_0$ e $\hat{a}$	65
3.10 - Variância da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão	66
3.11 - Variância Média da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão	67

	Pág.
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	70
4.1 - Estimativas dos Efeitos dos Parâmetros	70
4.1.1 - Estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão	70
4.1.2 - Estimativas dos coeficientes de regressão ..	71
4.2 - Somas de Quadrados	71
4.2.1 - Soma de quadrados da regressão	71
4.2.2 - Soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão	72
4.2.3 - Soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão	72
4.3 - Esperança Matemática das Somas de Quadrados	72
4.3.1 - Esperança matemática da SQReg.	72
4.3.2 - Esperança matemática da SQT*(aj.)	73
4.3.3 - Esperança matemática da SQRes*	73
4.4 - Distribuição de Formas Quadráticas	74
4.4.1 - Distribuição da SQReg./ σ^2	74
4.4.2 - Distribuição da SQT*(aj.)/ σ^2	74
4.4.3 - Distribuição da SQRes*/ σ^2	75
4.5 - Testes de Significância	75
4.5.1 - Teste de significância para regressão	75
4.5.2 - Teste de significância para tratamentos ...	76
4.6 - Estimativas das Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão	77

	Pág.
4.7 - Matriz de Dispersão dos Vetores das Estimativas dos Parâmetros	78
4.7.1 - Matriz de dispersão de $\hat{\tau}_0$	78
4.7.2 - Matriz de dispersão de $\hat{a}$	78
4.7.3 - Matriz de dispersão de $\hat{\tau}$	79
4.8 - Variância da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão	79
4.9 - Variância Média da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão	80
4.10 - Exemplo Numérico	81
5. CONCLUSÕES	82
6. LITERATURA CITADA	84
APÊNDICE	86

ANÁLISE DE COVARIÂNCIA INTRABLOCOS, COM p VARIÁVEIS
AUXILIARES, PARA DELINEAMENTOS EM BLOCOS
INCOMPLETOS EQUILIBRADOS

Autor: JOSÉ FERNANDO SOARES DIAS

Orientador: Dr. Décio Barbin

R E S U M O

O presente trabalho teve como objetivo principal justificar os fundamentos teóricos da análise de covariância intrablo-
cos, com p variáveis auxiliares, para delineamentos em blocos incom-
pletos equilibrados.

O modelo matemático considerado foi:

$$y_{ij} = m + t_i + b_j + \sum_{w=1}^p a_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij} ,$$

ou, admitindo-se que os efeitos de blocos incluem a média geral teó-
rica e usando-se a forma matricial,

$$Y = X\beta + \epsilon .$$

Através do método dos quadrados mínimos, foram deter-
minadas as estimativas dos efeitos dos parâmetros.

A soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão, foi obtida pelo método do resíduo condicional.

Considerando-se o modelo de efeitos fixos, foram obtidas as esperanças matemáticas de todas as somas de quadrados.

Demonstrou-se que a soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão, tem distribuição de qui-quadrado central, e que as demais têm distribuição de qui-quadrado não central. Mostrou-se que é correta a utilização do teste F para testarem-se as hipóteses de nulidade de que todos os efeitos de tratamentos e de que todos os coeficientes de regressão sejam iguais a zero.

Foi obtida a matriz de dispersão dos vetores das estimativas: dos efeitos de tratamentos, ajustados para blocos; dos coeficientes de regressão; e dos efeitos de tratamentos, ajustados para blocos e regressão. Obteve-se, ainda, fórmula para a variância média da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos, ajustadas para blocos e regressão.

A aplicação de algumas fórmulas e procedimentos apresentados neste trabalho foi ilustrada através de um exemplo numérico, com duas variáveis auxiliares.

INTRABLOCK COVARIANCE ANALYSIS, WITH p AUXILIARY
VARIABLES, FOR BALANCED INCOMPLETE
BLOCK DESIGNS

Author: JOSÉ FERNANDO SOARES DIAS

Adviser: Dr. Décio Barbin

S U M M A R Y

This paper had in view mainly to justify the theoretical foundations of intrablock covariance analysis, with p auxiliary variables, for balanced incomplete block designs.

The mathematical model was:

$$y_{ij} = m + t_i + b_j + \sum_{w=1}^p a_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij} ,$$

or,

$$y_{ij} = t_i + b_j + \sum_{w=1}^p a_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij} ,$$

if we assume that the block effects include the mean $\underline{m}$. In matrix algebra the model is:

$$Y = X\beta + \epsilon .$$

Estimates of the parameters were obtained by the method of least squares.

The sum of squares for treatments, adjusted for blocks and regression, was obtained by the method of conditional residue.

Assuming fixed effects in the model, the expectations of every type of sums of squares were calculated.

It was proved that the error sum of squares, adjusted for regression, has a central chi-square distribution, while the other sums of squares have non-central chi-square distribution. It was proved also that the use of the F distribution, to test null hypotheses that all treatment effects or all regression coefficients are zero, is correct.

The author obtained the dispersion matrix for the vector of estimates of: treatment effects, adjusted for blocks; regression coefficients; and treatment effects, adjusted for blocks and regression. He obtained also a formula for the average variance of the estimate of a contrast between two treatment means, adjusted for blocks and regression.

Use of some of the formulas and proceedings presented in the paper was exemplified numerically, with two auxiliary variables.

1. INTRODUÇÃO

Em qualquer experimento é difícil controlarem-se todos os fatores que influenciam os resultados finais. Assim sendo, muitas vezes, as variações observadas na variável dependente podem ser, parcialmente, atribuídas às variações nas variáveis independentes.

A análise de covariância foi introduzida em 1934 por Fisher (ZELEN, 1957), e, segundo PIMENTEL GOMES (1978), é uma técnica bastante interessante, embora seja pouco utilizada. Ela reúne os conceitos da análise de variância e de regressão e tem como uma de suas finalidades ajudar na interpretação de dados experimentais, especialmente com respeito à natureza dos efeitos de tratamentos.

Com a aplicação da análise de covariância, as estimativas das médias de tratamentos, da variável dependente, são ajusta

das para as diferenças nas variáveis independentes, conhecidas como variáveis auxiliares, ou, às vezes, como variáveis concomitantes ou covariáveis. Com esse ajuste, a precisão das comparações entre as médias de tratamentos pode, frequentemente, ser aumentada.

A análise de covariância é muito bem estudada nos delineamentos inteiramente casualizados e em blocos completos casualizados. Existem trabalhos que tratam da análise de covariância nos delineamentos em parcelas subdivididas ("split plot") e em alguns tipos de "lâtes". Contudo, quase todos os trabalhos justificam apenas a análise de covariância com uma variável auxiliar. Os casos com mais de uma variável auxiliar têm recebido, por alguns pesquisadores, a denominação de análise de covariância múltipla.

Os delineamentos em blocos incompletos foram introduzidos em 1936 por Yates (YATES, 1940). Embora, atualmente, os mesmos venham merecendo uma maior atenção por parte dos pesquisadores, a literatura ainda deixa a desejar sobre o estudo da análise de covariância nesses delineamentos, principalmente com respeito às justificativas matemáticas. Assim sendo, o presente trabalho teve como objetivo principal justificar os fundamentos teóricos da análise de covariância intrablocos, com p variáveis auxiliares, para delineamentos em blocos incompletos equilibrados.

2. REVISÃO DE LITERATURA

FINNEY (1946), para o caso da análise de covariância com uma variável auxiliar, nos delineamentos em blocos completos casualizados e em quadrados latinos, propôs uma variância média da diferença entre duas médias de tratamentos, ajustadas para regressão. Como o valor médio de $(\bar{X}_u - \bar{X}_v)^2$, sobre todos os possíveis pares de diferenças entre médias de tratamentos, é igual a $2a/r(t-1)$, o autor apresentou, para a estimativa da variância média, a seguinte fórmula:

$$\hat{V}(\hat{m}_u - \hat{m}_v) = \frac{2}{r} s^2 \left[1 + \frac{a}{A(t-1)} \right],$$

onde:

s^2 : quadrado médio do resíduo, ajustado para regressão;

a: soma de quadrados de tratamentos, relativa à variável auxiliar;

A: soma de quadrados do resíduo, relativa à variável auxiliar;

t: número de tratamentos;

r: número de repetições.

As principais finalidades do uso da análise de covariância, citadas por COCHRAN (1957), são:

- a) aumentar a precisão nos experimentos casualizados;
- b) remover os efeitos de variáveis perturbadoras, em estudos estatísticos;
- c) contribuir para esclarecer a natureza dos efeitos de tratamentos;
- d) ajustar regressões em classificações múltiplas;
- e) analisar dados quando algumas observações são perdidas.

O mesmo autor ponderou que as hipóteses requeridas para o uso válido da análise de covariância são uma extensão natural das que são requeridas para uma análise de variância, a saber:

- a) os efeitos de tratamentos, de blocos e da regressão devem ser aditivos;
- b) os resíduos (e_{ij}) devem ser independentes e normalmente distribuídos, com média zero e mesma variância.

O autor recomendou que as precauções gerais que são tomadas para o uso da análise de variância devam ser igualmente observadas na análise de covariância. Observou que, na análise de co-

variância, se supõe que a forma correta da equação de regressão tenha sido ajustada.

Os casos de análise de covariância com mais de uma variável auxiliar são reportados, pelo autor, como covariância múltipla. Quando duas variáveis auxiliares, x e z , forem consideradas, observou que as estimativas dos coeficientes de regressão podem ser obtidas do sistema de equações:

$$\begin{cases} E_{xx} \hat{b}_{y.x} + E_{xz} \hat{b}_{y.z} = E_{xy} \\ E_{xz} \hat{b}_{y.x} + E_{zz} \hat{b}_{y.z} = E_{zy} \end{cases},$$

onde E_{xx} , E_{zz} , E_{xz} , E_{xy} e E_{zy} são as somas de quadrados do resíduo relativas às variáveis x , z , xz , xy e zy , respectivamente.

Para esse mesmo caso, a estimativa da variância da diferença entre dois efeitos de tratamentos é obtida, segundo o autor, por:

$$s_e^2 \left[\begin{aligned} & \frac{2}{r} + (x_{i.} - x_{j.})^2 c_{xx} + \\ & + 2(x_{i.} - x_{j.})(z_{i.} - z_{j.}) c_{xz} + \\ & + (z_{i.} - z_{j.})^2 c_{zz} \end{aligned} \right]$$

e, a estimativa da variância média, sobre todos os pares de tratamentos, por:

$$\frac{2}{r} s_e^2 (1 + t_{xx} c_{xx} + 2t_{xz} c_{xz} + t_{zz} c_{zz}),$$

onde:

t_{xx} , t_{zz} e t_{xz} : quadrados médios de tratamentos relativos às va
riáveis x , z e xz , respectivamente;

c_{xx} , c_{zz} e c_{xz} : elementos da inversa da matriz constituída pe-
las somas de quadrados E_{xx} , E_{zz} e E_{xz} ;

$x_{i.}$ e $z_{i.}$: médias do i -ésimo tratamento relativas às variá
veis x e z , respectivamente;

s_e^2 : quadrado médio do resíduo, ajustado para regres-
são;

r : número de repetições.

Para a análise de covariância intrablocos com p va-
riáveis auxiliares, nos delineamentos em blocos incompletos, ZELEN
(1957) referindo-se ao modelo matemático:

$$y_{ij} = \mu + t_i + b_j + \sum_{w=1}^p B_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij} \quad ,$$

embora sem as demonstrações, apresentou as seguintes fórmulas:

a) estimativa dos efeitos de tratamentos:

$$\hat{t}_i = \hat{t}_{i_0} - \sum_{w=1}^p \hat{B}_w \hat{t}_{iw} \quad (i=1,2,\dots,v) \quad ,$$

onde:

$\hat{t}_{i_0}$: estimativa do efeito do i -ésimo tratamento, relativa ao mo
delo sem variáveis auxiliares;

$\hat{t}_{iw}$: semelhante a $\hat{t}_{i_0}$, porém em relação à variável auxiliar $x^{(w)}$;

$\hat{B}_w$: estimativa do coeficiente de regressão, associado à variá-

vel auxiliar $x^{(w)}$, satisfazendo ao sistema de equações:

$$\sum_{u=1}^P E_{uw} \hat{B}_u = E_{0w} \quad (w=1,2,\dots,p) ;$$

E_{uw} : soma de produtos da variável $x^{(u)}$ com a variável $x^{(w)}$, relativa ao resíduo;

E_{0w} : soma de produtos da variável y com a variável $x^{(w)}$, relativa ao resíduo.

b) soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão:

$$S_e = E_{00} - \sum_{w=1}^P \hat{B}_w E_{0w} ,$$

com $n_e = (bk - b - v - p + 1)$ graus de liberdade, onde:

E_{00} : soma de quadrados do resíduo, relativa à variável y ;

b : número de blocos;

k : número de parcelas por bloco.

c) soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão:

$$S_t = T_{00} + \sum_{w=1}^P \hat{B}_w E_{0w} - \sum_{w=1}^P \tilde{B}_w [E_{0w} + T_{0w}] ,$$

com $(v-1)$ graus de liberdade, onde:

T_{00} : soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos, relativa à variável y ;

T_{0w} : soma de produtos da variável y com a variável $x^{(w)}$, ajustada para blocos, relativa a tratamentos;

$\tilde{B}_w$: estimativa do coeficiente de regressão associado à variável $x^{(w)}$, obtida do modelo sem efeitos de tratamentos.

d) variância e covariância das estimativas dos coeficientes de regressão:

$$V(\hat{B}_w) = c_{ww} \sigma^2$$

$$\text{Cov}(\hat{B}_u, \hat{B}_w) = c_{uw} \sigma^2 ,$$

onde c_{ww} e c_{uw} são elementos da inversa da matriz formada pelas somas de quadrados e de produtos das p variáveis auxiliares.

e) variância da diferença entre duas estimativas de efeitos de tratamentos:

$$V(\hat{t}_a - \hat{t}_b) = V(\hat{t}_{a0} - \hat{t}_{b0}) + \sum_{u,w=1}^p (\hat{t}_{au} - \hat{t}_{bu})(\hat{t}_{aw} - \hat{t}_{bw}) c_{uw} .$$

Segundo esse mesmo autor, a hipótese de nulidade de que todos os efeitos de tratamentos sejam iguais a zero, isto é:

$$H_0: t_1 = t_2 = \dots = t_v = 0 ,$$

pode ser testada pelo teste F, através da estatística:

$$F = \frac{S_t / (v-1)}{S_e / n_e} ,$$

com $(v-1)$ e n_e graus de liberdade. Por outro lado, a hipótese de nulidade de que as variáveis auxiliares não tenham efeito, isto é,

$$H_0: B_1 = B_2 = \dots = B_p = 0 ,$$

pode ser testada pelo teste F, através da estatística:

$$F = \frac{(\sum_{w=1}^p \hat{B}_w E_{0w}) / p}{S_e / n_e} ,$$

com p e n_e graus de liberdade.

PASTERNAK (1960) estudou a análise de covariância intrablocos, com uma variável auxiliar, em um "látice" retangular triplo 3x4, utilizando a metodologia da análise de variância dos delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados, com três classes de associados. Apresentou, para a estimativa da média de tratamentos ajustada para blocos e regressão, a seguinte fórmula:

$$\hat{m}_i = \hat{t}_i + \hat{m} \quad (i=1,2,\dots,v) ,$$

onde:

$$\hat{t}_i = \hat{t}_{iy} - \hat{b} \hat{t}_{ix} ;$$

$\hat{t}_{iy}$: estimativa do i -ésimo tratamento, relativa ao modelo sem variável auxiliar;

$\hat{t}_{ix}$: semelhante a $\hat{t}_{iy}$, porém em relação à variável auxiliar;

$\hat{b}$: estimativa do coeficiente de regressão;

$$\hat{m} = y_{..}/vr ;$$

r : número de repetições dos tratamentos.

O autor ponderou que a estimativa da variância da diferença entre duas médias de tratamentos, ajustadas para blocos e regressão, é obtida por:

$$\hat{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \hat{V}(\hat{t}_{iy} - \hat{t}_{i'y}) + \frac{(\hat{t}_{ix} - \hat{t}_{i'x})^2}{E_{xx}} s_e^2 ,$$

onde:

$\hat{V}(\hat{t}_{iy} - \hat{t}_{i'y})$: proveniente da análise de variância do delineamento, a qual é distinta para as três classes de associados;

E_{xx} : soma de quadrados do resíduo, relativa à variável au
xiliar;

s_e^2 : quadrado médio do resíduo, ajustado para regressão.

GRAYBILL (1961), para a análise de covariância baseaa
da no modelo matemático:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta x_{ij} + e_{ij} \quad ,$$

justificou que a esperança matemática da soma de quadrados de tratamen
tos, ajustada para a regressão, é:

$$E(T_{ss}) = r \sum_{i=1}^t (\tau_i - \bar{\tau}.)^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^t (\tau_i - \bar{\tau}.) X_{i.} \right]^2}{(T_{xx} + E_{xx})} + (t-1) \sigma^2 \quad ,$$

onde:

T_{xx} : soma de quadrados de tratamentos, relativa à variável au
xiliar;

E_{xx} : soma de quadrados do resíduo, relativa à variável auxiliar;

$$X_{i.} = \sum_{j=1}^r x_{ij} \quad ;$$

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^t \tau_i}{t} \quad ;$$

t: número de tratamentos;

r: número de repetições.

O autor observou que:

$$\frac{T_{ms}}{\hat{\sigma}^2} = \frac{T_{ss}/(t-1)}{\hat{\sigma}^2} \cap F(t-1, n_e, \lambda) ,$$

ou seja, $T_{ms}/\hat{\sigma}^2$ tem distribuição de F não central, com $(t-1)$ e n_e graus de liberdade e parâmetro de não centralidade λ , onde:

$\hat{\sigma}^2$: quadrado médio do resíduo, ajustado para regressão;

$$\lambda = \frac{r \sum_{i=1}^t (\tau_i - \bar{\tau}.)^2}{2\sigma^2} - \frac{\left[\sum_{i=1}^t (\tau_i - \bar{\tau}.) X_{i.} \right]^2}{2\sigma^2 (T_{xx} + E_{xx})} ;$$

$$n_e = t(r-1) - 1.$$

Para a análise de covariância em qualquer tipo de de lineamento, com p variáveis auxiliares, KATTI (1965) utilizou o seguinte modelo matemático:

$$Y = X\beta + Z\underline{b} + \varepsilon , \quad (2.a)$$

onde:

Y: vetor das n observações da variável dependente;

$$X = \begin{bmatrix} x_{ik} \end{bmatrix}_{n \times q} ;$$

β : vetor da média geral μ e efeitos correspondentes aos níveis de fatores e suas interações;

Z: matriz dos valores observados das p variáveis auxiliares;

b: vetor dos coeficientes de regressão;

ε : vetor dos erros experimentais, onde $\varepsilon \cap N(\Phi, \sigma^2 I)$.

Para obter as soluções, o autor reescreveu o modelo (2.a) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Y &= X(\beta + \Delta \underline{b}) + (Z - X\Delta) \underline{b} + \varepsilon \\ &= X\beta^* + (Z - X\Delta) \underline{b} + \varepsilon, \end{aligned}$$

onde Δ é uma matriz escolhida tal que $X'(Z - X\Delta) = \Phi$.

O autor justificou que a estimativa do vetor β , do modelo (2.a), é:

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}^* - \Delta \hat{\underline{b}},$$

onde:

$\hat{\beta}^*$: vetor das estimativas, obtido do modelo $Y = X\beta^* + \varepsilon$;

$$\Delta = (X'X)^{-} X'Z;$$

$(X'X)^{-}$: uma inversa generalizada da matriz $X'X$;

$$\underline{b} = R_1^{-1} R_2;$$

R_1^{-1} : inversa da matriz constituída pelas somas de quadrados e de produtos do resíduo, relativas às variáveis auxiliares;

R_2 : vetor constituído pelas somas de produtos das variáveis auxiliares com a variável dependente, relativa ao resíduo.

Segundo esse autor, a matriz de variâncias e covariâncias de $\underline{b}$ é:

$$\text{Var}(\underline{b}) = R_1^{-1} \sigma^2$$

e, a de $\hat{\beta}$ é:

$$\text{Var}(\beta) = \text{Var}(\beta^*) + \hat{\Delta} \text{Var}(\hat{b}) \hat{\Delta}',$$

onde $\text{Var}(\beta^*) = (X'X)^{-1} \sigma^2$.

PIMENTEL GOMES (1968), estudando os experimentos em blocos incompletos, através de matrizes, eliminou inicialmente os efeitos de blocos, os quais considerou, por simplicidade, incluírem o efeito da média geral teórica. Assim procedendo, obteve o sistema $C\hat{\tau} = Q$, onde a matriz C é singular. As soluções desse sistema foram obtidas introduzindo restrições, as quais deram um novo sistema, $A\hat{\tau} = \Phi$. Observou que a matriz $M = (C - A)$ é, por hipótese, não singular, e que será sempre simétrica se for utilizado $A_1\hat{\tau} = \Phi$, onde $A_1 = A'A$.

REISCH e WEBSTER (1969) observaram, para a análise de covariância baseada no modelo matemático

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + e_{ij},$$

com a restrição $\sum_{i=1}^t \tau_i = 0$, que:

$$a) \frac{SQT^*}{\sigma^2} \cap \chi^2(t-1, \lambda),$$

ou seja, SQT^*/σ^2 tem distribuição de qui-quadrado não central, com $(t-1)$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade λ , onde:

$$SQT^*: \text{soma de quadrados de tratamentos, ajustada para regressão;}$$

$$\lambda = \frac{r}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^t \tau_i^2 - \frac{r \left[\sum_{i=1}^t (\bar{X}_i - \bar{X}) \tau_i \right]^2}{(T_{xx} + E_{xx})} \right\};$$

T_{xx} e E_{xx} : somas de quadrados de tratamentos e do resíduo, relativas à variável auxiliar, respectivamente;
 r : número de repetições.

$$b) \frac{SQRes^*}{\sigma^2} \cap \chi^2_{n_e},$$

ou seja, $SQRes^*/\sigma^2$ tem distribuição de qui-quadrado central, com $n_e = t(r-1) - 1$ graus de liberdade, onde $SQRes^*$ é a soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão.

c) sendo SQT^* e $SQRes^*$ independentes, então:

$$\frac{SQT^*/(t-1)}{SQRes^*/n_e} \cap F(t-1, n_e, \lambda),$$

ou seja, $\frac{SQT^*/(t-1)}{SQRes^*/n_e}$ tem distribuição de F não central com $(t-1)$ e n_e graus de liberdade e parâmetro de não centralidade λ .

Para estudar a análise de covariância em qualquer tipo de delineamento, com p variáveis auxiliares, SEARLE (1971) utilizou o seguinte modelo matemático:

$$Y = X\underline{a} + Z\underline{b} + \epsilon,$$

onde:

Y : vetor das n observações da variável dependente;

X : matriz de incidência para a variável binária (0, 1), de característica k ;

- Z : matriz dos valores observados das p variáveis auxiliares, de característica p , e cujas colunas são, por hipótese, linearmente independentes das colunas da matriz X ;
- $\underline{a}$: vetor da média geral μ e dos efeitos correspondentes, aos níveis de fatores e suas interações;
- $\underline{b}$: vetor dos coeficientes de regressão;
- ε : vetor dos erros experimentais, onde $\varepsilon \in N(\Phi, \sigma^2 I)$.

As soluções, obtidas pelo autor, são:

$$\underline{a}^0 = \underline{a}^* - (X'X)^{-} X' Z \underline{b}^0$$

$$\underline{b}^0 = \underline{\hat{b}} = (Z'PZ)^{-1} Z' PY ,$$

onde:

$$\underline{a}^* = (X'X)^{-} X'Y;$$

$$P = I - X(X'X)^{-} X';$$

$(X'X)^{-}$: uma inversa generalizada, simétrica, de $X'X$;

$Z'PZ$: matriz constituída pelas somas de quadrados e de produtos do resíduo, relativas às variáveis auxiliares;

$Z'PY$: vetor constituído pelas somas de produtos das variáveis auxiliares com a variável dependente, relativas ao resíduo.

A matriz de variâncias e covariâncias do vetor $\underline{a}^0$ e a do vetor $\underline{\hat{b}}$, apresentadas pelo autor, são:

$$\text{Var}(\underline{a}^0) = [(X'X)^{-} + (X'X)^{-} X'Z(Z'PZ)^{-1} Z'X(X'X)^{-}] \sigma^2 ,$$

$$\text{Var}(\underline{\hat{b}}) = (Z'PZ)^{-1} \sigma^2 .$$

Esse autor justificou que:

$$\underline{\hat{b}}' Z'PY/\sigma^2 \cap \chi^2(p, \lambda),$$

$$SSE/\sigma^2 \cap \chi_{n_e}^2,$$

onde:

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{b}' Z'PZ \underline{b};$$

$$SSE = (Y'Y - \underline{a}'^* X'Y) - \underline{\hat{b}}' Z'PY: \text{ soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão;}$$

$$n_e = (n - k - p).$$

O autor testou a hipótese de nulidade:

$$H_0: \underline{b} = \Phi,$$

pelo teste F, através da estatística:

$$F = \frac{\underline{\hat{b}}' Z'PY/p}{SSE/n_e},$$

com p e n_e graus de liberdade.

Para o caso da análise de covariância em qualquer tipo de delineamento, com p variáveis auxiliares, x_s , RAO (1974) observou que a soma de produtos de duas variáveis quaisquer, inclusive a variável dependente y , relativa a tratamentos, é igual ao somatório dos produtos das estimativas dos efeitos de tratamentos de uma variável com os correspondentes totais de tratamentos ajustados da outra variável, ou vice-versa.

Segundo esse autor, a soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão, é:

$$E_{00} = \sum_{s=1}^p b_s E_{0s} ,$$

onde:

E_{00} : soma de quadrados do resíduo, relativa à variável dependente y ;

E_{0s} : soma de produtos da variável dependente y com a variável auxiliar x_s , relativa ao resíduo;

b_s : estimativa do coeficiente de regressão, associado à variável auxiliar x_s , satisfazendo ao sistema de equações:

$$E_{0j} = \sum_{s=1}^p b_s E_{sj} \quad (j=1,2,\dots,p) .$$

Para a análise de covariância nos delineamentos em blocos completos casualizados e com apenas uma variável auxiliar, PIMENTEL GOMES (1978) sugeriu, para o cálculo da soma de quadrados de tratamentos, ajustada para regressão, o seguinte procedimento:

$$SQT^* = R'(y^2) - \frac{[R'(xy)]^2}{R'(x^2)} - SQRes^* ,$$

onde:

$$R'(y^2) = R(y^2) + SQT(Y) ;$$

$$R'(x^2) = R(x^2) + SQT(X) ;$$

$$R'(xy) = R(xy) + SPT ;$$

$R(y^2)$ e $SQT(Y)$: somas de quadrados do resíduo e de tratamentos, relativas à variável dependente Y , respectivamente;

$R(x^2)$ e $SQT(X)$: somas de quadrados do resíduo e de tratamentos, relativas à variável auxiliar X , respectivamente;

$R(xy)$ e SPT : somas de produtos da variável dependente Y com a variável auxiliar X , relativas ao resíduo e a tratamentos, respectivamente;

$SQRes^*$: soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão.

Esse autor testou o coeficiente de correlação linear, que é equivalente a testar o coeficiente de regressão linear, pelo teste t , através da estatística:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{n_e} \quad ,$$

com n_e graus de liberdade, onde:

$$r = \frac{R(xy)}{\sqrt{R(x^2) R(y^2)}} : \text{estimativa do coeficiente de correlação linear};$$

n_e : número de graus de liberdade do resíduo, depois de ajustado para regressão.

Observou que a análise de covariância pode ser efetuada independentemente da significância do valor de r obtido.

Segundo o autor, o procedimento de utilizar-se uma estimativa média para a variância da diferença entre duas médias de tratamentos, ajustadas para regressão, só deve ser utilizado quando os tratamentos não produzem efeitos significativos na variável auxiliar.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Os parâmetros que caracterizam os delineamentos em blocos incompletos equilibrados serão representados, neste trabalho, por:

v: número de tratamentos;

b: número de blocos;

r: número de repetições dos tratamentos;

k: número de parcelas por bloco;

λ : número de blocos em que dois tratamentos quaisquer ocorrem juntos.

3.1 - Modelo Matemático

Para o caso de p variáveis auxiliares $x^{(w)}$ ou x_w ($w=1,2,\dots,p$) associadas a cada valor observado, e com as quais a va-

variável dependente y mantém, por hipótese, relação linear, o modelo matemático para a análise intrablocos é semelhante ao mencionado por ZELEN (1957), ou seja:

$$y_{ij} = m + t_i + b_j + \sum_{w=1}^p a_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij} \quad , \quad (3.1.a)$$

onde:

y_{ij} : valor observado, relativo ao i -ésimo tratamento no j -ésimo bloco;

m : média geral teórica;

t_i : efeito do i -ésimo tratamento;

b_j : efeito do j -ésimo bloco;

a_w : coeficiente da regressão linear múltipla, associado à variável auxiliar $x^{(w)}$;

$x_{ij}^{(w)}$: semelhante a y_{ij} , porém em relação à variável auxiliar $x^{(w)}$;

e_{ij} : erro experimental, onde se supõem as hipóteses que

$$e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

e todos os erros experimentais sejam independentes;

$i = 1, 2, \dots, v$;

$j = 1, 2, \dots, b$.

Admitindo-se que os efeitos de blocos incluem a média geral teórica e usando-se a forma matricial, o modelo (3.1.a) fica:

$$Y = X\beta + \epsilon \quad , \quad (3.1.b)$$

onde:

Y : vetor dos valores observados da variável dependente, de di

- mensões $(bk \times 1)$, sendo que $Y \in N(X\beta, \sigma^2 I)$;
- X : matriz da forma $[X_1 \quad X_2 \quad X_3]$, de dimensões $[bk \times (v+b+p)]$;
- X_1 : matriz dos coeficientes dos efeitos de tratamentos, de dimensões $(bk \times v)$;
- X_2 : matriz dos coeficientes dos efeitos de blocos, de dimensões $(bk \times b)$;
- X_3 : matriz dos valores observados das variáveis auxiliares, de característica p , cujas colunas são, por hipótese, independentes das colunas das matrizes X_1 e X_2 , e de dimensões $(bk \times p)$;
- β' : vetor da forma $[\tau' \quad \underline{b}' \quad \underline{a}']$, de dimensões $[1 \times (v+b+p)]$;
- τ : vetor dos efeitos de tratamentos, de dimensões $(v \times 1)$;
- $\underline{b}$: vetor dos efeitos de blocos, os quais incluem, por simplicidade, a média geral teórica, e de dimensões $(b \times 1)$;
- $\underline{a}$: vetor dos coeficientes da regressão linear múltipla, de dimensões $(p \times 1)$;
- ε : vetor dos erros experimentais, de dimensões $(bk \times 1)$, sendo que $\varepsilon \in N(0, \sigma^2 I)$.

3.2 - Sistema de Equações Normais

O sistema de equações normais, obtido através do método dos quadrados mínimos, é:

$$X'X\beta = X'Y, \quad (3.2.a)$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \underline{\hat{b}} \\ \underline{\hat{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'Y \\ X_2'Y \\ X_3'Y \end{bmatrix} \quad (3.2.b)$$

Para facilitar os desenvolvimentos posteriores, o sistema de equações normais (3.2.b) é também representado por:

$$\begin{bmatrix} R & N & T_x \\ N' & K & B_x \\ T_x' & B_x' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \underline{\hat{b}} \\ \underline{\hat{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ B \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.2.c)$$

onde: $R = rI_v$; $K = kI_b$; $N = \sqrt[n_{ij}]_b$;

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo tratamento ocorre no } j\text{-ésimo bloco} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$T_x = \begin{bmatrix} x_{1.}^{(1)} & x_{1.}^{(2)} & \dots & x_{1.}^{(p)} \\ x_{2.}^{(1)} & x_{2.}^{(2)} & \dots & x_{2.}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{v.}^{(1)} & x_{v.}^{(2)} & \dots & x_{v.}^{(p)} \end{bmatrix}_p \quad ;$$

$$B_x = \begin{bmatrix} x_{.1}^{(1)} & x_{.1}^{(2)} & \dots & x_{.1}^{(p)} \\ x_{.2}^{(1)} & x_{.2}^{(2)} & \dots & x_{.2}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{.b}^{(1)} & x_{.b}^{(2)} & \dots & x_{.b}^{(p)} \end{bmatrix}_p ;$$

$$L = \begin{bmatrix} \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(1)} & \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(2)} & \dots & \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(p)} \\ \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(1)} & \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(2)} & \dots & \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(p)} x_{ij}^{(1)} & \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(p)} x_{ij}^{(2)} & \dots & \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(p)} x_{ij}^{(p)} \end{bmatrix}_p ;$$

$$T = \begin{bmatrix} y_{1.} \\ y_{2.} \\ \dots \\ y_{v.} \end{bmatrix}_1 ; \quad B = \begin{bmatrix} y_{.1} \\ y_{.2} \\ \dots \\ y_{.b} \end{bmatrix}_1 ; \quad Z = \begin{bmatrix} \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(1)} y_{ij} \\ \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(2)} y_{ij} \\ \dots \\ \sum_{i,j} n_{ij} x_{ij}^{(p)} y_{ij} \end{bmatrix}_1 ;$$

$$x_{i.}^{(w)} = \sum_j n_{ij} x_{ij}^{(w)}, \quad \begin{cases} i=1,2,\dots,v \\ w=1,2,\dots,p \end{cases};$$

$$x_{.j}^{(w)} = \sum_i n_{ij} x_{ij}^{(w)}, \quad \begin{cases} j=1,2,\dots,b \\ w=1,2,\dots,p \end{cases};$$

$$y_{i.} = \sum_j n_{ij} y_{ij}, \quad i=1,2,\dots,v;$$

$$y_{.j} = \sum_i n_{ij} y_{ij}, \quad j=1,2,\dots,b;$$

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \dots \\ \hat{\tau}_v \end{bmatrix}_1; \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \dots \\ \hat{b}_b \end{bmatrix}_1; \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \dots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix}_1.$$

3.3 - Estimativas dos Efeitos dos Parâmetros

Do sistema de equações normais (3.2.c), obtêm-se:

$$\begin{cases} R \hat{\tau} + N \hat{b} + T_x \hat{a} = T & (3.3.a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N' \hat{\tau} + K \hat{b} + B_x \hat{a} = B & (3.3.b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_x' \hat{\tau} + B_x' \hat{b} + L \hat{a} = Z & (3.3.c) \end{cases}.$$

Para eliminarem-se os efeitos de blocos do sistema (3.2.a), deve-se pré-multiplicar (3.3.b) por $(-NK^{-1})$ e por $(-B'_x K^{-1})$ e somar-se em (3.3.a) e (3.3.c), respectivamente. Assim sendo, obtêm-se:

$$\begin{cases} (R - NK^{-1} N') \hat{\tau} + (T_x - NK^{-1} B_x) \hat{\underline{a}} = (T - NK^{-1} B) \\ (T'_x - B'_x K^{-1} N') \hat{\tau} + (L - B'_x K^{-1} B_x) \hat{\underline{a}} = (Z - B'_x K^{-1} B) \end{cases}$$

Considerando-se:

$$\left. \begin{aligned} (R - N K^{-1} N') &= C_{(v \times v)} \\ (T_x - N K^{-1} B_x) &= Q_{\underline{x} (v \times p)} \\ (T - N K^{-1} B) &= Q_{(v \times 1)} \\ (L - B'_x K^{-1} B_x) &= E_1_{(p \times p)} \\ (Z - B'_x K^{-1} B) &= E_2_{(p \times 1)} \end{aligned} \right\} , \quad (3.3.d)$$

obtêm-se:

$$\begin{cases} C \hat{\tau} + Q_{\underline{x}} \hat{\underline{a}} = Q \end{cases} \quad (3.3.e)$$

$$\begin{cases} Q'_x \hat{\tau} + E_1 \hat{\underline{a}} = E_2 \end{cases} , \quad (3.3.f)$$

que é o sistema de equações normais livre dos efeitos de blocos.

A matriz $B'_x K^{-1} B_x$ é constituída pelas somas de quadrados e de produtos de blocos, relativas às variáveis auxiliares.

O vetor $B'_x K^{-1} B$ é constituído pelas somas de produtos das variáveis auxiliares com a variável dependente, relativas a blocos.

O vetor Q é constituído pelos totais de tratamentos, ajustados para blocos, relativos à variável dependente, os quais serão representados por Q_{i0} ($i=1,2,\dots,v$). Os elementos da matriz Q_x são semelhantes aos do vetor Q , porém em relação às variáveis auxiliares, sendo que serão representados por Q_{iw} ($i=1,2,\dots,v$; $w=1,2,\dots,p$).

A matriz E_1 e o vetor E_2 serão representados por:

$$E_1 = \begin{bmatrix} R'(x_u \ x_w) \end{bmatrix}_p ,$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} R'(x_w \ y) \end{bmatrix}_1 ;$$

cujos elementos constituintes serão definidos posteriormente.

Uma outra maneira de chegar-se a (3.3.e) e (3.3.f) é pré-multiplicando-se o sistema (3.2.a) pela matriz

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_v & -N K^{-1} & \Phi \\ \Phi & -B'_x K^{-1} & I_p \end{bmatrix} ;$$

obtendo-se o sistema:

$$W X'X \beta = W X'Y .$$

Podem-se comprovar, entre outras, as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned}
 W_1 X'X W_1' &= C \\
 W_1 X'X W_2' &= Q_X \\
 W_2 X'X W_2' &= E_1 \\
 W_1 X'X \hat{\beta} &= C \hat{\tau} + Q_X \hat{a} \\
 W_2 X'X \hat{\beta} &= Q_X' \hat{\tau} + E_1 \hat{a} \\
 W_1 X'Y &= Q \\
 W_2 X'Y &= E_2 \\
 W_1 X' &= X_1' - N K^{-1} X_2' \\
 W_2 X' &= X_3' - B_X' K^{-1} X_2'
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.g)$$

Como a matriz C tem característica igual a $(v-1)$, CHAKRABARTI (1962), deve-se introduzir uma restrição, a qual não pode ser função linear estimável dos parâmetros. Sendo assim, obtém-se um novo sistema de equações:

$$A \hat{\tau} = \phi \quad . \quad (3.3.h)$$

Subtraindo-se (3.3.h) de (3.3.e), obtém-se:

$$(C - A) \hat{\tau} + Q_X \hat{a} = Q \quad .$$

Seja $(C - A) = M$, logo:

$$M \hat{\tau} + Q_X \hat{a} = Q \quad . \quad (3.3.i)$$

Como a matriz M é não singular, por hipótese, tem-se:

$$\hat{\tau} = M^{-1} Q - M^{-1} Q_X \hat{a} \quad ,$$

ou,

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_X \hat{a} \quad . \quad (3.3.j)$$

Portanto:

$$\hat{t}_i = \hat{t}_{i0} - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w \hat{t}_{iw} \quad (i=1,2,\dots,v) \quad , \quad (3.3.k)$$

onde:

$\hat{t}_i$: estimativa do efeito do i-ésimo tratamento ajustado para blocos e regressão;

$\hat{t}_{i0}$: estimativa do efeito do i-ésimo tratamento ajustado para blocos relativo à variável y;

$\hat{t}_{iw}$: semelhante à $\hat{t}_{i0}$, porém em relação à variável auxiliar $x^{(w)}$;

$\hat{a}_w$: estimativa do coeficiente da regressão linear múltipla, associada à variável auxiliar $x^{(w)}$.

Se a restrição admitida for $\sum_{i=1}^v \hat{t}_i = 0$, e tomando-

-se a matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{k} & -\frac{\lambda}{k} & \dots & -\frac{\lambda}{k} \\ -\frac{\lambda}{k} & -\frac{\lambda}{k} & \dots & -\frac{\lambda}{k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\lambda}{k} & -\frac{\lambda}{k} & \dots & -\frac{\lambda}{k} \end{bmatrix}_{v \times v} \quad ,$$

têm-se:

$$M = \frac{\lambda v}{k} I_v \quad ; \quad M^{-1} = \frac{k}{\lambda v} I_v \quad ;$$

$$\hat{t}_{i0} = \frac{k}{\lambda v} Q_{i0} \quad ; \quad \hat{t}_{iw} = \frac{k}{\lambda v} Q_{iw} \quad .$$

Substituindo-se o valor de $\hat{\tau}$, (3.3.j), em (3.3.f), segue-se que:

$$Q'_x (\hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_x \underline{\hat{a}}) + E_1 \underline{\hat{a}} = E_2 \quad ,$$

ou ainda:

$$(E_1 - Q'_x \hat{\tau}_x) \underline{\hat{a}} = (E_2 - Q'_x \hat{\tau}_0) \quad . \quad (3.3.l)$$

A matriz $Q'_x \hat{\tau}_x$ é constituída pelas somas de quadrados e de produtos de tratamentos, ajustadas para blocos, referentes às variáveis auxiliares. Será representada por:

$$Q'_x \hat{\tau}_x = \frac{1}{p} \left[T(x_u \ x_w) \right]_p \quad .$$

Sendo a matriz $Q'_x \hat{\tau}_x$ simétrica, logo:

$$Q'_x \hat{\tau}_x = \hat{\tau}'_x Q_x \quad .$$

O vetor $Q'_x \hat{\tau}_0$ é constituído pelas somas de produtos das variáveis auxiliares com a variável dependente, ajustadas para blocos, relativas a tratamentos. Será representado por:

$$Q'_x \hat{\tau}_0 = \frac{1}{p} \left[T(x_w \ y) \right]_1 \quad .$$

Sendo a matriz M simétrica, segue-se que:

$$Q'_x \hat{\tau}_0 = \hat{\tau}'_x Q \quad .$$

Considerando-se:

$$\left. \begin{aligned} (E_1 - Q'_x \hat{\tau}_x) &= (E_1 - \hat{\tau}'_x Q_x) = E_3 \\ (E_2 - Q'_x \hat{\tau}_0) &= (E_2 - \hat{\tau}'_x Q) = E_4 \end{aligned} \right\} \quad , \quad (3.3.m)$$

logo, de (3.3.l), tem-se:

$$E_3 \hat{a} = E_4 \quad . \quad (3.3.n)$$

A matriz E_3 é constituída pelas somas de quadrados e de produtos dos resíduos, relativas às variáveis auxiliares. Será representada por:

$$E_3 = \underset{p}{\left[R(x_u \ x_w) \right]}_p \quad .$$

O vetor E_4 é constituído pelas somas de produtos das variáveis auxiliares com a variável dependente, relativas ao resíduo. Será representado por:

$$E_4 = \underset{p}{\left[R(x_w \ y) \right]}_1 \quad .$$

De (3.3.m), pode-se verificar que:

$$E_1 = \underset{p}{\left[R(x_u \ x_w) + T(x_u \ x_w) \right]}_p \quad ,$$

$$E_2 = \underset{p}{\left[R(x_w \ y) + T(x_w \ y) \right]}_1 \quad .$$

Colocando-se a matriz E_3 em função das matrizes X_1 , X_2 , X_3 e M , tem-se:

$$E_3 = X_3' \left[I - X_2 K^{-1} X_2' - (X_1 - X_2 K^{-1} N') M^{-1} (X_1' - N K^{-1} X_2') \right] X_3,$$

ou,

$$E_3 = X_3' G_1 X_3 \quad ,$$

onde:

$$G_1 = I - X_2 K^{-1} X_2' - (X_1 - X_2 K^{-1} N') M^{-1} (X_1' - N K^{-1} X_2') .$$

Agora:

$$\begin{aligned} G_1^2 = G_1 &- X_2 K^{-1} X_2' + X_2 K^{-1} X_2' + \\ &+ X_2 K^{-1} X_2' (X_1 - X_2 K^{-1} N') M^{-1} (X_1' - N K^{-1} X_2') - \\ &- (X_1 - X_2 K^{-1} N') M^{-1} (X_1' - N K^{-1} X_2') + \\ &+ (X_1 - X_2 K^{-1} N') M^{-1} (X_1' - N K^{-1} X_2') X_2 K^{-1} X_2' + \\ &+ (X_1 - X_2 K^{-1} N') M^{-1} (X_1' - N K^{-1} X_2') (X_1 - X_2 K^{-1} N') M^{-1} (X_1' - N K^{-1} X_2') . \end{aligned}$$

Cancelando-se os termos semelhantes e substituindo-se, onde convier, $(X_1' - N K^{-1} X_2')$ pelo valor apresentado em (3.3.g), segue-se que:

$$\begin{aligned} G_1^2 = G_1 &+ X_2 K^{-1} (N' - N') M^{-1} (X_1' - N K^{-1} X_2') - X W_1' M^{-1} W_1 X' + \\ &+ (X_1 - X_2 K^{-1} N') M^{-1} (N - N) K^{-1} X_2' + X W_1' M^{-1} W_1 X' X W_1' M^{-1} W_1 X' . \end{aligned}$$

Sendo $W_1 X' X W_1' = C$, (3.3.g), vem:

$$G_1^2 = G_1 - X W_1' M^{-1} W_1 X' + X W_1' M^{-1} C M^{-1} W_1 X' .$$

Por outro lado, $C = (M + A)$, logo:

$$G_1^2 = G_1 + X W_1' M^{-1} A M^{-1} W_1 X' .$$

De (3.3.h) e (3.3.j), obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} A \hat{\tau}_0 &= \Phi \\ A \hat{\tau}_x &= \Phi \end{aligned} \right\} . \quad (3.3.o)$$

Sendo $\hat{\tau}_0 = M^{-1} Q$ e, por (3.3.g), $Q = W_1 X' Y$, tem-se:

$$A M^{-1} W_1 X' Y \equiv \Phi , \quad (3.3.p)$$

donde segue-se que:

$$AM^{-1}W_1X' = \Phi \quad . \quad (3.3.q)$$

Portanto, $G_1^2 = G_1$, isto é, G_1 é uma matriz idempotente. Sendo a matriz G_1 também simétrica, pode-se escrever:

$$E_3 = X_3'G_1'G_1X_3 = (G_1X_3)'(G_1X_3) \quad .$$

Portanto:

$$\text{caract.}(E_3) = \text{caract.}(G_1X_3) \quad ,$$

onde, $\text{caract.}(E_3)$ significa característica de E_3 .

Como as colunas de X_3 são, por hipótese, linearmente independentes das colunas de X_1 e das de X_2 , tem-se:

$$\text{caract.}(E_3) = p \quad ,$$

logo, a matriz E_3 é não singular.

Sendo E_3 não singular, então, de (3.3.n) obtém-se:

$$\underline{\hat{a}} = E_3^{-1}E_4 \quad . \quad (3.3.r)$$

3.4 - Somas de Quadrados

3.4.1 - Soma de quadrados de parâmetros

A soma de quadrados de parâmetros, relativa ao modelo (3.1.b), SQP_1 , é obtida por:

$$\begin{aligned} SQP_1 &= \underline{\hat{\beta}}'X'Y \\ &= \underline{\hat{\tau}}'T + \underline{\hat{b}}'B + \underline{\hat{a}}'Z \quad . \end{aligned}$$

De (3.3.b), tem-se:

$$\underline{\hat{b}} = K^{-1}B - K^{-1}N'\hat{\tau} - K^{-1}B_X'\underline{\hat{a}},$$

logo:

$$\begin{aligned} \text{SQP}_1 &= \hat{\tau}'T + (B'K^{-1} - \hat{\tau}'NK^{-1} - \underline{\hat{a}}'B_X'K^{-1})B + \underline{\hat{a}}'Z \\ &= \hat{\tau}'(T - NK^{-1}B) + B'K^{-1}B + \underline{\hat{a}}'(Z - B_X'K^{-1}B) \\ &= \hat{\tau}'Q + B'K^{-1}B + \underline{\hat{a}}'E_2. \end{aligned}$$

Substituindo-se o valor de $\hat{\tau}$, obtido em (3.3.j), tem-

se:

$$\begin{aligned} \text{SQP}_1 &= (\hat{\tau}'_0 - \underline{\hat{a}}'\hat{\tau}'_X)Q + B'K^{-1}B + \underline{\hat{a}}'E_2 \\ &= \hat{\tau}'_0Q + B'K^{-1}B + \underline{\hat{a}}'(E_2 - \hat{\tau}'_XQ) \\ &= \hat{\tau}'_0Q + B'K^{-1}B + \underline{\hat{a}}'E_4 \quad (3.4.1.a) \\ &= \hat{\tau}'_0Q + B'K^{-1}B + \sum_{w=1}^p \hat{a}_w R(x_w y), \end{aligned}$$

onde:

$\hat{\tau}'_0Q = \text{SQT(aj.)}$: soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos, referente à variável dependente;

$B'K^{-1}B = \text{SQB}$: soma de quadrados de blocos, relativa à variável dependente;

$\underline{\hat{a}}'E_4 = \text{SQReg.}$: soma de quadrados da regressão.

3.4.2 - Soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão

A soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão, $SQRes^*$, é obtida por:

$$\begin{aligned} SQRes^* &= Y'Y - SQP_1 \\ &= (Y'Y - \hat{\tau}'_0 Q - B'K^{-1}B) - \hat{a}'E_u \end{aligned} \quad (3.4.2.a)$$

$$\begin{aligned} &= [Y'Y - SQT(aj.) - SQB] - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w R(x_w y) \\ &= R(y^2) - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w R(x_w y) \end{aligned} \quad (3.4.2.b)$$

onde $R(y^2)$ é a soma de quadrados do resíduo, sem serem consideradas as variáveis auxiliares.

3.4.3 - Soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão

É obtida pelo método do resíduo condicional. Assim, o modelo matemático reduzido é:

$$y_{ij} = m + b_j + \sum_{w=1}^p a_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij} \quad , \quad (3.4.3.a)$$

onde y_{ij} , m , b_j , a_w , $x_{ij}^{(w)}$ e e_{ij} têm significados semelhantes aos do modelo (3.1.a).

Admitindo-se que os efeitos de blocos incluem a média geral teórica e usando-se a forma matricial, o modelo (3.4.3.a) fica:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad , \quad (3.4.3.b)$$

onde:

Y : semelhante ao do modelo (3.1.b);

X^* : matriz da forma $\begin{bmatrix} X_2 & X_3 \end{bmatrix}$, de dimensões $[bk \times (b+p)]$;

β^* : vetor da forma $\begin{bmatrix} \underline{b}' & \underline{a}' \end{bmatrix}$, de dimensões $[1 \times (b+p)]$;

X_2 , X_3 , $\underline{b}$, $\underline{a}$ e ε : semelhantes aos do modelo (3.1.b).

O sistema de equações normais, obtido através do método dos quadrados mínimos, é:

$$X^* X^* \tilde{\beta}^* = X^* Y \quad , \quad (3.4.3.c)$$

donde, usando-se a mesma representação adotada em 3.2, obtêm-se:

$$\begin{cases} K \underline{\tilde{b}} + B_X \underline{\tilde{a}} = B & (3.4.3.d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_X' \underline{\tilde{b}} + L \underline{\tilde{a}} = Z & (3.4.3.e) \end{cases}$$

Pré-multiplicando-se (3.4.3.d) por $(-B_X' K^{-1})$ e somando-se em (3.4.3.e), tem-se:

$$(L - B_X' K^{-1} B_X) \underline{\tilde{a}} = (Z - B_X' K^{-1} B) \quad ,$$

ou, por (3.3.d):

$$E_1 \underline{\tilde{a}} = E_2 \quad . \quad (3.4.3.f)$$

A matriz E_1 , em função das matrizes X_2 e X_3 , é:

$$E_1 = X_3' (I - X_2 K^{-1} X_2') X_3 \quad ,$$

ou,

$$E_1 = X_3' G_2 X_3 \quad ,$$

onde $G_2 = I - X_2 K^{-1} X_2'$.

Facilmente comprova-se que G_2 é simétrica e idempotente. Assim, por raciocínio análogo ao usado com a matriz E_j , verifica-se que E_1 é não singular. Portanto, de (3.4.3.f), vem:

$$\underline{\tilde{a}} = E_1^{-1} E_2 \quad . \quad (3.4.3.g)$$

A soma de quadrados de parâmetros, relativa ao modelo (3.4.3.b), SQP_2 , é obtida por:

$$\begin{aligned} SQP_2 &= \underline{\beta}'^* X'^* Y \\ &= \underline{\tilde{b}}' B + \underline{\tilde{a}}' Z \quad . \end{aligned}$$

De (3.4.3.d), tem-se:

$$\underline{\tilde{b}} = K^{-1} B - K^{-1} B_X \underline{\tilde{a}} \quad ,$$

logo:

$$\begin{aligned} SQP_2 &= (B' K^{-1} - \underline{\tilde{a}}' B_X' K^{-1}) B + \underline{\tilde{a}}' Z \\ &= B' K^{-1} B + \underline{\tilde{a}}' (Z - B_X' K^{-1} B) \\ &= B' K^{-1} B + \underline{\tilde{a}}' E_2 \quad (3.4.3.h) \\ &= SQB + \sum_{w=1}^P \tilde{a}_w R'(x_w y) \quad . \end{aligned}$$

Finalmente, a soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão, $SQT^*(aj.)$, é obtida por:

$$SQT^*(aj.) = SQP_1 - SQP_2 \quad .$$

Assim, de (3.4.1.a) e (3.4.3.h), obtém-se:

$$SQT^*(aj.) = \hat{\tau}_0' Q + \hat{a}' E_4 - \underline{\tilde{a}}' E_2 \quad (3.4.3.i)$$

$$= SQT(aj.) + \sum_{w=1}^P \hat{a}_w R(x_w y) - \sum_{w=1}^P \tilde{a}_w R'(x_w y) \quad (3.4.3.j)$$

Somando-se e subtraindo-se $R(y^2)$ ao segundo membro de (3.4.3.j), tem-se:

$$\begin{aligned} \text{SQT}^*(aj.) &= [\text{SQT}(aj.) + R(y^2)] - [R(y^2) - \sum_{w=1}^P \hat{a}_w R(x_w y)] - \\ &\quad - \sum_{w=1}^P \tilde{a}_w R'(x_w y) \\ &= R'(y^2) - \text{SQRes}^* - \sum_{w=1}^P \tilde{a}_w R'(x_w y) , \end{aligned}$$

onde $R'(y^2) = \text{SQT}(aj.) + R(y^2)$.

3.5 - Esperança Matemática das Somas de Quadrados

Será considerado modelo tipo I ou modelo de efeitos fixos.

3.5.1 - Esperança matemática de $\hat{\tau}'_0 Q$

Tem-se:

$$\hat{\tau}'_0 Q = Q' M^{-1} Q .$$

Mas $Q = W_1 X' Y$, (3.3.g), logo:

$$\hat{\tau}'_0 Q = Y' X W_1' M^{-1} W_1 X' Y . \quad (3.5.1.a)$$

Assim:

$$E(\hat{\tau}'_0 Q) = E(Y' X W_1' M^{-1} W_1 X' Y) .$$

Como no modelo (3.1.b) têm-se :

$$\left. \begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon \\ \varepsilon &\cap N(\phi, \sigma^2 I) \end{aligned} \right\} , \quad (3.5.1.b)$$

logo:

$$E(\hat{\tau}'_0 Q) = \beta' X' X W_1' M^{-1} W_1 X' X \beta + \sigma^2 \text{tr}(X W_1' M^{-1} W_1 X') .$$

De (3.3.g), tem-se:

$$W_1 X' X \hat{\beta} = C \hat{\tau} + Q_{\underline{X}} \hat{\underline{a}} ,$$

logo, de maneira análoga, segue-se que:

$$W_1 X' X \beta = C \tau + Q_{\underline{X}} \underline{a} . \quad (3.5.1.c)$$

Portanto:

$$E(\hat{\tau}'_0 Q) = (\tau' C + \underline{a}' Q_{\underline{X}}') M^{-1} (C \tau + Q_{\underline{X}} \underline{a}) + \sigma^2 \text{tr}(M^{-1} W_1 X' X W_1')$$

Sendo $W_1 X' X W_1' = C$, (3.3.g), vem:

$$\begin{aligned} E(\hat{\tau}'_0 Q) &= \tau' C M^{-1} C \tau + \tau' C M^{-1} Q_{\underline{X}} \underline{a} + \underline{a}' Q_{\underline{X}}' M^{-1} C \tau + \underline{a}' Q_{\underline{X}}' M^{-1} Q_{\underline{X}} \underline{a} + \\ &+ \sigma^2 \text{tr}(M^{-1} C) . \end{aligned}$$

Como $M^{-1} Q_{\underline{X}} = \hat{\tau}_{\underline{X}}$, logo:

$$E(\hat{\tau}'_0 Q) = \tau' C M^{-1} C \tau + 2 \tau' C \hat{\tau}_{\underline{X}} \underline{a} + \underline{a}' Q_{\underline{X}}' \hat{\tau}_{\underline{X}} \underline{a} + \sigma^2 \text{caract.}(C) .$$

Sendo $C = (M + A)$, logo:

$$C M^{-1} C = C + A M^{-1} C \quad (3.5.1.d)$$

$$C \hat{\tau}_{\underline{X}} = C M^{-1} Q_{\underline{X}} = Q_{\underline{X}} + A M^{-1} Q_{\underline{X}} . \quad (3.5.1.e)$$

Pós-multiplicando-se (3.3.q), primeiramente por XW_1' e posteriormente por XW_2' , obtêm-se:

$$AM^{-1}W_1X'XW_1' = AM^{-1}C = \Phi \quad (3.5.1.f)$$

$$AM^{-1}W_1X'XW_2' = AM^{-1}Q_X = \Phi \quad , \quad (3.5.1.g)$$

respectivamente.

Assim, de (3.5.1.d) e (3.5.1.e), têm-se:

$$CM^{-1}C = C \quad (3.5.1.h)$$

$$C\hat{\tau}_X = CM^{-1}Q_X = Q_X \quad . \quad (3.5.1.i)$$

Finalmente:

$$E(\hat{\tau}_0'Q) = \tau'C\tau + 2\tau'Q_X\underline{a} + \underline{a}'Q_X'\hat{\tau}_X\underline{a} + (v-1)\sigma^2 \quad (3.5.1.j)$$

3.5.2 - Esperança matemática da SQReg.

De (3.3.r) e (3.3.m), têm-se:

$$\underline{\hat{a}} = E_3^{-1}E_4$$

$$E_4 = E_2 - \hat{\tau}_X'Q \quad ,$$

respectivamente.

Logo:

$$\underline{\hat{a}} = E_3^{-1}(E_2 - \hat{\tau}_X'Q) \quad ,$$

que, por (3.3.g), fica:

$$\underline{\hat{a}} = E_3^{-1}(W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X')Y \quad . \quad (3.5.2.a)$$

Portanto:

$$\hat{\underline{a}}'E_4 = Y'(XW_2' - XW_1'\hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X') Y \quad . \quad (3.5.2.b)$$

Assim:

$$E(\hat{\underline{a}}'E_4) = E[Y'(XW_2' - XW_1'\hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X') Y] \quad ,$$

que, por (3.5.1.b), fica:

$$\begin{aligned} E(\hat{\underline{a}}'E_4) &= \beta'X'(XW_2' - XW_1'\hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X') X\beta + \\ &+ \sigma^2 \text{tr} [(XW_2' - XW_1'\hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X')] \quad . \end{aligned}$$

De (3.3.g), tem-se:

$$W_2X'X\hat{\beta} = Q_X'\hat{\tau} + E_1\hat{\underline{a}} \quad ,$$

logo, de maneira análoga, segue-se que:

$$W_2X'X\beta = Q_X'\tau + E_1\underline{a} \quad . \quad (3.5.2.c)$$

Assim, usando-se (3.5.2.c) e (3.5.1.c), tem-se:

$$(W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X') X\beta = Q_X'\tau + E_1\underline{a} - \hat{\tau}_X'C\tau - \hat{\tau}_X'Q_X\underline{a} \quad .$$

Como $(E_1 - \hat{\tau}_X'Q_X) = E_3$, (3.3.m), e $C\hat{\tau}_X = Q_X$, (3.5.1.i) ,

tem-se:

$$(W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X') X\beta = E_3\underline{a} \quad , \quad (3.5.2.d)$$

portanto:

$$E(\hat{\underline{a}}'E_4) = \underline{a}'E_3\underline{a} + \sigma^2 \text{tr} [E_3^{-1} (W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X') (XW_2' - XW_1'\hat{\tau}_X)] \quad .$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} (W_2X' - \hat{\tau}_X'W_1X') (XW_2' - XW_1'\hat{\tau}_X) &= W_2X'XW_2' - W_2X'XW_1'\hat{\tau}_X - \\ &- \hat{\tau}_X'W_1X'XW_2' + \hat{\tau}_X'W_1X'XW_1'\hat{\tau}_X \quad . \end{aligned}$$

Usando-se (3.3.g), tem-se:

$$(W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) = E_1 - Q_X' \hat{\tau}_X - \hat{\tau}_X' Q_X + \hat{\tau}_X' C \hat{\tau}_X ,$$

que, por (3.3.m) e (3.5.1.i), fica:

$$(W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) = E_3 . \quad (3.5.2.e)$$

Finalmente:

$$E(\underline{\hat{a}}' E_4) = \underline{a}' E_3 \underline{a} + \sigma^2 \text{tr}(E_3^{-1} E_3) .$$

Como $SQReg. = \underline{\hat{a}}' E_4$, logo:

$$E(SQReg.) = E(\underline{\hat{a}}' E_4) = \underline{a}' E_3 \underline{a} + p \sigma^2 , \quad (3.5.2.f)$$

3.5.3 - Esperança matemática de $\underline{\tilde{a}}' E_2$

De (3.4.3.g) e (3.3.g), têm-se:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{a}} &= E_1^{-1} E_2 \\ E_2 &= W_2 X' Y , \end{aligned}$$

respectivamente.

Logo:

$$\underline{\tilde{a}} = E_1^{-1} W_2 X' Y \quad (3.5.3.a)$$

$$\underline{\tilde{a}}' E_2 = Y' XW_2' E_1^{-1} W_2 X' Y . \quad (3.5.3.b)$$

Assim:

$$E(\underline{\tilde{a}}' E_2) = E(Y' XW_2' E_1^{-1} W_2 X' Y) ,$$

que, por (3.5.1.b), fica:

$$E(\underline{\tilde{a}}' E_2) = \beta' X' XW_2' E_1^{-1} W_2 X' X \beta + \sigma^2 \text{tr}(XW_2' E_1^{-1} W_2 X') .$$

Usando-se (3.5.2.c), tem-se:

$$E(\underline{\tilde{a}}'E_2) = (\tau'Q_X + \underline{a}'E_1) E_1^{-1} (Q_X'\tau + E_1\underline{a}) + \sigma^2 \text{tr}(E_1^{-1}W_2X'XW_2') .$$

Como $W_2X'XW_2' = E_1$, (3.3.g), logo:

$$\begin{aligned} E(\underline{\tilde{a}}'E_2) &= \tau'Q_X E_1^{-1} Q_X'\tau + \tau'Q_X \underline{a} + \underline{a}'Q_X'\tau + \underline{a}'E_1 \underline{a} + \sigma^2 \text{tr}(E_1^{-1}E_1) \\ &= \tau'Q_X E_1^{-1} Q_X'\tau + 2\tau'Q_X \underline{a} + \underline{a}'E_1 \underline{a} + p \sigma^2 . \end{aligned} \quad (3.5.3.c)$$

3.5.4 - Esperança matemática da SQT*(aj.)

De (3.4.3.i), tem-se:

$$E[SQT^*(aj.)] = E(\hat{\tau}'Q) + E(\underline{\tilde{a}}'E_4) - E(\underline{\tilde{a}}'E_2) .$$

Usando-se os resultados obtidos em (3.5.1.j), (3.5.2.f)

e (3.5.3.c), tem-se:

$$\begin{aligned} E[SQT^*(aj.)] &= \tau'CT + 2\tau'Q_X \underline{a} + \underline{a}'Q_X'\hat{\tau}_X \underline{a} + \underline{a}'E_3 \underline{a} - \tau'Q_X E_1^{-1} Q_X'\tau - \\ &\quad - 2\tau'Q_X \underline{a} - \underline{a}'E_1 \underline{a} + (v-1+p-p) \sigma^2 . \end{aligned}$$

Como $(E_1 - Q_X'\hat{\tau}_X) = E_3$, (3.3.m.), logo:

$$E[SQT^*(aj.)] = \tau'(C - Q_X E_1^{-1} Q_X') \tau + (v-1) \sigma^2 \quad (3.5.4.a)$$

3.5.5 - Esperança matemática de Y'Y

De (3.5.1.b), tem-se:

$$E(Y'Y) = \beta'X'X\beta + bk \sigma^2 .$$

Sendo:

$$\beta' = [\tau' \quad \underline{b}' \quad \underline{a}']$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} R & N & T'_x \\ N' & K & B'_x \\ T'_x & B'_x & L \end{bmatrix},$$

logo:

$$\begin{aligned} \beta'X'X\beta &= \tau'R\tau + \underline{b}'N'\tau + \underline{a}'T'_x\tau + \tau'Nb + \underline{b}'K\underline{b} + \underline{a}'B'_x\underline{b} + \\ &+ \tau'T'_x\underline{a} + \underline{b}'B'_x\underline{a} + \underline{a}'L\underline{a} \\ &= \tau'R\tau + \underline{b}'K\underline{b} + \underline{a}'L\underline{a} + 2\underline{b}'N'\tau + 2\underline{a}'T'_x\tau + \\ &+ 2\underline{a}'B'_x\underline{b} \end{aligned} \quad (3.5.5.a)$$

Assim:

$$\begin{aligned} E(Y'Y) &= \tau'R\tau + \underline{b}'K\underline{b} + \underline{a}'L\underline{a} + 2\underline{b}'N'\tau + 2\underline{a}'T'_x\tau + \\ &+ 2\underline{a}'B'_x\underline{b} + bk \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.5.5.b)$$

3.5.6 - Esperança matemática de $B'K^{-1}B$

Em (3.2.c), B está representando $X_2'Y$, logo:

$$B'K^{-1}B = Y'X_2K^{-1}X_2'Y \quad (3.5.6.a)$$

Assim:

$$E(B'K^{-1}B) = E(Y'X_2K^{-1}X_2'Y),$$

que, por (3.5.1.b), fica:

$$\begin{aligned}
 E(B'K^{-1}B) &= \beta'X'X_2K^{-1}X_2'X\beta + \sigma^2 \text{tr}(X_2K^{-1}X_2') \\
 &= \beta'X'X_2K^{-1}X_2'X\beta + \sigma^2 \text{tr}(K^{-1}X_2'X_2) \\
 &= \beta'X'X_2K^{-1}X_2'X\beta + \sigma^2 \text{tr}(K^{-1}K) \quad .
 \end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
 X_2'X &= \begin{bmatrix} N' & K & B_x' \end{bmatrix} \\
 \beta' &= \begin{bmatrix} \tau' & \underline{b}' & \underline{a}' \end{bmatrix} \quad ,
 \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned}
 \beta'X'X_2K^{-1}X_2'X\beta &= (\tau'N + \underline{b}'K + \underline{a}'B_x') K^{-1} (N'\tau + K\underline{b} + B_x'\underline{a}) \\
 &= \tau'NK^{-1}N'\tau + \tau'N\underline{b} + \tau'NK^{-1}B_x'\underline{a} + \underline{b}'N'\tau + \\
 &\quad + \underline{b}'K\underline{b} + \underline{b}'B_x'\underline{a} + \underline{a}'B_x'K^{-1}N'\tau + \\
 &\quad + \underline{a}'B_x'\underline{b} + \underline{a}'B_x'K^{-1}B_x'\underline{a} \\
 &= \tau'NK^{-1}N'\tau + \underline{b}'K\underline{b} + \underline{a}'B_x'K^{-1}B_x'\underline{a} + \\
 &\quad + 2\underline{b}'N'\tau + 2\underline{a}'B_x'K^{-1}N'\tau + \\
 &\quad + 2\underline{a}'B_x'\underline{b} \quad . \quad (3.5.6.b)
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 E(B'K^{-1}B) &= \tau'NK^{-1}N'\tau + \underline{b}'K\underline{b} + \underline{a}'B_x'K^{-1}B_x'\underline{a} + 2\underline{b}'N'\tau + \\
 &\quad + 2\underline{a}'B_x'K^{-1}N'\tau + 2\underline{a}'B_x'\underline{b} + \\
 &\quad + b \sigma^2 \quad . \quad (3.5.6.c)
 \end{aligned}$$

3.5.7 - Esperança matemática da SQRes*

De (3.4.2.a), tem-se:

$$E(\text{SQRes}^*) = E(Y'Y) - E(\hat{\tau}'_0 Q) - E(B'K^{-1}B) - E(\hat{a}'E_4) .$$

Usando-se os valores obtidos em (3.5.5.b), (3.5.1.j), (3.5.6.c) e (3.5.2.f), tem-se, após algumas simplificações:

$$\begin{aligned} E(\text{SQRes}^*) &= \tau'R\tau + \underline{a}'L\underline{a} + 2\underline{a}'T'_X\tau - \tau'C\tau - 2\tau'Q_X\underline{a} - \\ &\quad - \underline{a}'Q'_X\hat{\tau}_X\underline{a} - \tau'NK^{-1}N'\tau - \underline{a}'B'_XK^{-1}B_X\underline{a} - \\ &\quad - 2\underline{a}'B'_XK^{-1}N'\tau - \underline{a}'E_3\underline{a} + (bk-b-v-p+1) \sigma^2 \\ &= \tau'(R - NK^{-1}N')\tau + \underline{a}'(L - B'_XK^{-1}B_X)\underline{a} + \\ &\quad + 2\underline{a}'(T'_X - B'_XK^{-1}N')\tau - \\ &\quad - \tau'C\tau - 2\tau'Q_X\underline{a} - \underline{a}'Q'_X\hat{\tau}_X\underline{a} - \\ &\quad - \underline{a}'E_3\underline{a} + (bk-b-v-p+1) \sigma^2 . \end{aligned}$$

Usando-se (3.3.d), tem-se:

$$\begin{aligned} E(\text{SQRes}^*) &= \tau'C\tau + \underline{a}'E_1\underline{a} + 2\underline{a}'Q'_X\tau - \tau'C\tau - 2\tau'Q_X\underline{a} - \\ &\quad - \underline{a}'Q'_X\hat{\tau}_X\underline{a} - \underline{a}'E_3\underline{a} + (bk-b-v-p+1) \sigma^2 \\ &= \underline{a}'(E_1 - Q'_X\hat{\tau}_X)\underline{a} - \underline{a}'E_3\underline{a} + (bk-b-v-p+1) \sigma^2 . \end{aligned}$$

Como $(E_1 - Q'_X\hat{\tau}_X) = E_3$, (3.3.m), logo:

$$E(\text{SQRes}^*) = (bk-b-v-p+1) \sigma^2 . \quad (3.5.7.a)$$

3.6 - Distribuição de Formas Quadráticas

Os três teoremas apresentados a seguir serão utilizados posteriormente.

Teorema 1 (GRAYBILL, 1961):

Se $Y \sim N(\mu, \sigma^2 I)$, então:

$$Y'A_i Y / \sigma^2 \sim \chi^2(n_i, \lambda_i) \quad ,$$

isto é, $Y'A_i Y / \sigma^2$ tem distribuição de qui-quadrado não central, com n_i graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\lambda_i = \mu'A_i \mu / 2\sigma^2$, se e somente se A_i for uma matriz idempotente de característica n_i .

Teorema 2 (SEARLE, 1971):

Se $Y \sim N(\mu, V)$, então as formas quadráticas $Y'A_i Y$ e $Y'A_j Y$ são independentes se e somente se $A_i V A_j = \Phi$, ou, de modo equivalente, $A_j V A_i = \Phi$.

Teorema 3 (SEARLE, 1971):

Se as variáveis aleatórias U_i e U_j são independentes, onde $U_i \sim \chi^2(n_i, \lambda_i)$ e $U_j \sim \chi^2_{n_j}$, então:

$$\frac{U_i/n_i}{U_j/n_j} \sim F(n_i, n_j, \lambda_i) \quad ,$$

isto é, $\frac{U_i/n_i}{U_j/n_j}$ tem distribuição de F não central com n_i e n_j graus de liberdade e parâmetro de não centralidade λ_i .

3.6.1 - Distribuição de $\hat{\tau}'_0 Q / \sigma^2$

De (3.5.1.a), tem-se:

$$\hat{\tau}'_0 Q = Y' X W_1' M^{-1} W_1 X' Y = Y' A_1 Y, \quad (3.6.1.a)$$

onde $A_1 = X W_1' M^{-1} W_1 X'$.

Tem-se:

$$A_1^2 = X W_1' M^{-1} W_1 X' X W_1' M^{-1} W_1 X',$$

que, por (3.3.g), fica:

$$A_1^2 = X W_1' M^{-1} C M^{-1} W_1 X'.$$

Sendo $C = (M + A)$, logo:

$$A_1^2 = X W_1' M^{-1} W_1 X' + X W_1' M^{-1} A M^{-1} W_1 X',$$

que, por (3.3.q), fica:

$$A_1^2 = X W_1' M^{-1} W_1 X' = A_1, \quad (3.6.1.b)$$

isto é, A_1 é uma matriz idempotente. Assim sendo, segue-se que:

$$\text{caract.}(A_1) = \text{tr} (X W_1' M^{-1} W_1 X'),$$

que, por 3.5.1, fica:

$$\text{caract.}(A_1) = \text{tr} (A_1) = (v-1). \quad (3.6.1.c)$$

No modelo (3.1.b), tem-se:

$$Y \cap N(X\beta, \sigma^2 I) \quad , \quad (3.6.1.d)$$

então:

$$\mu' A_1 \mu = \beta' X' X W_1' M^{-1} W_1 X' X \beta \quad ,$$

que, por 3.5.1, fica:

$$\mu' A_1 \mu = \tau' C \tau + 2\tau' Q_{\underline{x}} \underline{a} + \underline{a}' Q_{\underline{x}}' \hat{\tau}_{\underline{x}} \underline{a} \quad . \quad (3.6.1.e)$$

Pelo teorema 1, tem-se:

$$\hat{\tau}_0' Q / \sigma^2 \cap \chi^2(n_1, \lambda_1) \quad , \quad (3.6.1.f)$$

onde:

$$n_1 = (v-1);$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2} (\tau' C \tau + 2\tau' Q_{\underline{x}} \underline{a} + \underline{a}' Q_{\underline{x}}' \hat{\tau}_{\underline{x}} \underline{a}) \quad .$$

3.6.2 - Distribuição da SQReg./ σ^2

De (3.5.2.b), tem-se:

$$\hat{\underline{a}}' E_4 = Y' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') Y \quad ,$$

ou:

$$\hat{\underline{a}}' E_4 = Y' A_2 Y \quad , \quad (3.6.2.a)$$

$$\text{onde } A_2 = (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') \quad .$$

Tem-se:

$$A_2^2 = (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') \quad .$$

De (3.5.2.e), tem-se:

$$(W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) = E_3 \quad ,$$

logo:

$$A_2^2 = (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') = A_2 \quad , \quad (3.6.2.b)$$

isto é, A_2 é uma matriz idempotente. Então:

$$\text{caract.}(A_2) = \text{tr} \left[(XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') \right] \quad ,$$

que, por 3.5.2, fica:

$$\text{caract.}(A_2) = \text{tr}(A_2) = p \quad . \quad (3.6.2.c)$$

Por (3.6.1.d), segue-se que:

$$\mu' A_2 \mu = \beta' X' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') X \beta \quad ,$$

que, por 3.5.2, fica:

$$\mu' A_2 \mu = \underline{a}' E_3 \underline{a} \quad . \quad (3.6.2.d)$$

Pelo teorema 1, tem-se:

$$\underline{\hat{a}}' E_4 / \sigma^2 = \text{SQReg.} / \sigma^2 \cap \chi^2(n_2, \lambda_2) \quad , \quad (3.6.2.e)$$

onde:

$$n_2 = p;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{a}' E_3 \underline{a} \quad .$$

3.6.3 - Distribuição de $\tilde{\underline{a}}'E_2/\sigma^2$

De (3.5.3.b), tem-se:

$$\tilde{\underline{a}}'E_2 = Y'XW_2'E_1^{-1}W_2X'Y = Y'A_3Y \quad , \quad (3.6.3.a)$$

onde $A_3 = XW_2'E_1^{-1}W_2X'$

Tem-se:

$$A_3^2 = XW_2'E_1^{-1}W_2X'XW_2'E_1^{-1}W_2X' \quad ,$$

mas, $W_2X'XW_2' = E_1$, (3.3.g), logo:

$$A_3^2 = XW_2'E_1^{-1}W_2X' = A_3 \quad , \quad (3.6.3.b)$$

isto é, A_3 é uma matriz idempotente. Então:

$$\text{caract.}(A_3) = \text{tr}(XW_2'E_1^{-1}W_2X') \quad ,$$

que, por 3.5.3, fica:

$$\text{caract.}(A_3) = \text{tr}(A_3) = p \quad . \quad (3.6.3.c)$$

Por (3.6.1.d), segue-se que:

$$\mu'A_3\mu = \beta'X'XW_2'E_1^{-1}W_2X'X\beta \quad ,$$

que, por 3.5.3, fica:

$$\mu'A_3\mu = \tau'Q_XE_1^{-1}Q_X'\tau + 2\tau'Q_X\underline{a} + \underline{a}'E_1\underline{a} \quad . \quad (3.6.3.d)$$

Pelo teorema 1, tem-se:

$$\tilde{\underline{a}}'E_2/\sigma^2 \cap \chi^2(n_3, \lambda_3) \quad , \quad (3.6.3.e)$$

onde:

$$n_3 = p;$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2\sigma^2} (\tau'Q_XE_1^{-1}Q_X'\tau + 2\tau'Q_X\underline{a} + \underline{a}'E_1\underline{a}) \quad .$$

3.6.4 - Distribuição da $SQT^*(aj.)/\sigma^2$

De (3.4.3.i), tem-se:

$$SQT^*(aj.) = \hat{\tau}'_0 Q + \hat{a}' E_4 - \tilde{a}' E_2 ,$$

que, por (3.6.1.a), (3.6.2.a) e (3.6.3.a), fica:

$$SQT^*(aj.) = Y'(A_1 + A_2 - A_3) Y = Y'A_4 Y , \quad (3.6.4.a)$$

onde $A_4 = (A_1 + A_2 - A_3)$.

Tem-se:

$$A_4^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1 A_2 - A_1 A_3 + A_2 A_1 - A_2 A_3 - A_3 A_1 - A_3 A_2 .$$

Mas:

$$A_1 A_2 = XW_1' M^{-1} W_1 X' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') .$$

Por (3.3.g), tem-se:

$$W_1 X' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) = (Q_X - C \hat{\tau}_X) ,$$

que, por (3.5.1.i), fica:

$$W_1 X' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) = \Phi . \quad (3.6.4.b)$$

Assim, por (3.6.4.b), tem-se:

$$A_1 A_2 = \Phi . \quad (3.6.4.c)$$

Sendo $A_2 A_1 = (A_1 A_2)'$, logo:

$$A_2 A_1 = \Phi . \quad (3.6.4.d)$$

Agora:

$$A_1 A_3 = XW_1' M^{-1} W_1 X' XW_2' E_1^{-1} W_2 X' ,$$

que, por (3.3.g), fica:

$$A_1 A_3 = XW_1' M^{-1} Q_{X_1} E_1^{-1} W_2 X' .$$

Sendo $M^{-1} Q_X = \hat{\tau}_X$, logo:

$$A_1 A_3 = XW_1' \hat{\tau}_X E_1^{-1} W_2 X' . \quad (3.6.4.e)$$

Como $A_3 A_1 = (A_1 A_3)'$, logo:

$$A_3 A_1 = XW_2' E_1^{-1} \hat{\tau}_X' W_1 X' . \quad (3.6.4.f)$$

Por outro lado, tem-se:

$$A_2 A_3 = (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') XW_2' E_1^{-1} W_2 X' .$$

Por (3.3.g), vem:

$$(W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') XW_2' = (E_1 - \hat{\tau}_X' Q_X) ,$$

que, por (3.3.m), fica:

$$(W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') XW_2' = E_3 . \quad (3.6.4.g)$$

Portanto:

$$A_2 A_3 = (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_1^{-1} W_2 X' ,$$

que, por (3.6.3.a) e (3.6.4.e), fica:

$$A_2 A_3 = A_3 - A_1 A_3 . \quad (3.6.4.h)$$

Como $A_3 A_2 = (A_2 A_3)'$, logo:

$$A_3 A_2 = A_3' - (A_1 A_3)' = A_3 - A_3 A_1 . \quad (3.6.4.i)$$

Finalmente, tem-se:

$$\begin{aligned} A_4^2 &= A_1 + A_2 + A_3 + \Phi - A_1 A_3 + \Phi - (A_3 - A_1 A_3) - \\ &\quad - A_3 A_1 - (A_3 - A_3 A_1) . \end{aligned}$$

Após as simplificações, obtêm-se:

$$A_4^2 = (A_1 + A_2 - A_3) = A_4 \quad , \quad (3.6.4.j)$$

isto é, A_4 é uma matriz idempotente. Assim sendo, segue-se que:

$$\begin{aligned} \text{caract.}(A_4) &= \text{tr}(A_4) = \text{tr}(A_1 + A_2 - A_3) \\ &= \text{tr}(A_1) + \text{tr}(A_2) - \text{tr}(A_3) \quad , \end{aligned}$$

que, por (3.6.1.c), (3.6.2.c) e (3.6.3.c), fica:

$$\text{caract.}(A_4) = (v - 1) \quad . \quad (3.6.4.k)$$

Por (3.6.1.e), (3.6.2.d) e (3.6.3.d), após as simplificações, tem-se:

$$\mu' A_4 \mu = \mu' (A_1 + A_2 - A_3) \mu = \tau' (C - Q_X E_1^{-1} Q_X') \tau \quad . \quad (3.6.4.l)$$

Pelo teorema 1, tem-se:

$$SQT^*(aj.)/\sigma^2 \cap \chi^2(n_4, \lambda_4) \quad , \quad (3.6.4.m)$$

onde:

$$n_4 = (v-1);$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2\sigma^2} \tau' (C - Q_X E_1^{-1} Q_X') \tau.$$

3.6.5 - Distribuição de $Y'Y/\sigma^2$

Tem-se:

$$Y'Y = Y' I Y = Y' A_5 Y \quad , \quad (3.6.5.a)$$

onde $A_5 = I_{bk}$.

Como A_5 é uma matriz idempotente, de característica bk , então, pelo teorema 1 e por (3.5.5.a), tem-se:

$$Y'Y/\sigma^2 \sim \chi^2(n_5, \lambda_5) \quad , \quad (3.6.5.b)$$

onde:

$$n_5 = bk;$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2\sigma^2} [\tau'R\tau + \underline{b}'K\underline{b} + \underline{a}'L\underline{a} + 2\underline{b}'N'\tau + 2\underline{a}'T'_X\tau + 2\underline{a}'B'_X\underline{b}] \quad .$$

3.6.6 - Distribuição de $B'K^{-1}B/\sigma^2$

De (3.5.6.a), tem-se:

$$B'K^{-1}B = Y'X_2K^{-1}X_2'Y = Y'A_6Y \quad , \quad (3.6.6.a)$$

onde $A_6 = X_2K^{-1}X_2'$.

Como:

$$\begin{aligned} A_6^2 &= X_2K^{-1}X_2'X_2K^{-1}X_2' \\ &= X_2K^{-1}KK^{-1}X_2' \\ &= X_2K^{-1}X_2' = A_6 \quad , \end{aligned} \quad (3.6.6.b)$$

logo A_6 é uma matriz idempotente. Sendo assim, segue-se que:

$$\text{caract.}(A_6) = \text{tr}(X_2K^{-1}X_2') \quad ,$$

que, por 3.5.6, fica:

$$\text{caract.}(A_6) = \text{tr}(A_6) = b \quad , \quad (3.6.6.c)$$

Usando-se (3.6.1.d), tem-se:

$$\mu'A_6\mu = \beta'X'X_2K^{-1}X_2'X\beta \quad ,$$

que, por 3.5.6, fica:

$$\begin{aligned} \mu' A_6 \mu = & \tau' N K^{-1} N' \tau + \underline{b}' K \underline{b} + \underline{a}' B_X' K^{-1} B_X \underline{a} + 2 \underline{b}' N' \tau + \\ & + 2 \underline{a}' B_X' K^{-1} N' \tau + 2 \underline{a}' B_X' \underline{b} \quad . \end{aligned} \quad (3.6.6.d)$$

Pelo teorema 1, tem-se:

$$B' K^{-1} B / \sigma^2 \cap \chi^2(n_6, \lambda_6) \quad , \quad (3.6.6.e)$$

onde:

$$n_6 = b;$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\tau' N K^{-1} N' \tau + \underline{b}' K \underline{b} + \underline{a}' B_X' K^{-1} B_X \underline{a} + 2 \underline{b}' N' \tau + \right. \\ \left. + 2 \underline{a}' B_X' K^{-1} N' \tau + 2 \underline{a}' B_X' \underline{b} \right] \quad .$$

3.6.7 - Distribuição da SQRes*/ σ^2

De (3.4.2.a), tem-se:

$$SQRes^* = Y'Y - \hat{\tau}' Q - \hat{\underline{a}}' E_4 - B' K^{-1} B \quad ,$$

que, por (3.6.5.a), (3.6.1.a), (3.6.2.a) e (3.6.6.a), fica:

$$SQRes^* = Y'(I - A_1 - A_2 - A_6) Y = Y' A_7 Y \quad , \quad (3.6.7.a)$$

onde $A_7 = (I - A_1 - A_2 - A_6)$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} A_7^2 = & I^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_6^2 - A_1 - A_2 - A_6 - A_1 + A_1 A_2 + \\ & + A_1 A_6 - A_2 + A_2 A_1 + A_2 A_6 - A_6 + A_6 A_1 + A_6 A_2 \quad . \end{aligned}$$

De (3.6.4.c) e (3.6.4.d), têm-se $A_1 A_2 = \Phi$ e $A_2 A_1 = \Phi$,

respectivamente.

Como $W_1 X' = (X'_1 - NK^{-1}X'_2)$, (3.3.g), então:

$$\begin{aligned} W_1 X' X_2 &= (X'_1 X_2 - NK^{-1}X'_2 X_2) \\ &= (N - N) = \Phi \end{aligned} \quad (3.6.7.b)$$

Agora:

$$A_1 A_6 = XW'_1 M^{-1} W_1 X' X_2 K^{-1} X'_2 ,$$

que, por (3.6.7.b), fica:

$$A_1 A_6 = \Phi \quad (3.6.7.c)$$

Como $A_6 A_1 = (A_1 A_6)'$, logo:

$$A_6 A_1 = \Phi \quad (3.6.7.d)$$

Como $W_2 X' = (X'_3 - B'_X K^{-1}X'_2)$, (3.3.g), então:

$$\begin{aligned} W_2 X' X_2 &= (X'_3 X_2 - B'_X K^{-1}X'_2 X_2) \\ &= (B'_X - B'_X) = \Phi \end{aligned} \quad (3.6.7.e)$$

Agora:

$$A_2 A_6 = (XW'_2 - XW'_1 \hat{\tau}_X) E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') X_2 K^{-1} X'_2 ,$$

que, por (3.6.7.e) e (3.6.7.b), fica:

$$A_2 A_6 = \Phi \quad (3.6.7.f)$$

Como $A_6 A_2 = (A_2 A_6)'$, logo:

$$A_6 A_2 = \Phi \quad (3.6.7.g)$$

Finalmente, tem-se:

$$A_7^2 = I + A_1 + A_2 + A_6 - A_1 - A_2 - A_6 - A_1 + \Phi + \Phi - A_2 + \\ + \Phi + \Phi - A_6 + \Phi + \Phi .$$

Após as simplificações, obtém-se:

$$A_7^2 = (I - A_1 - A_2 - A_6) = A_7 , \quad (3.6.7.h)$$

isto é, A_7 é uma matriz idempotente. Assim sendo, segue-se que:

$$\begin{aligned} \text{caract.}(A_7) &= \text{tr}(A_7) = \text{tr}(I_{bk} - A_1 - A_2 - A_6) \\ &= \text{tr}(I_{bk}) - \text{tr}(A_1) - \text{tr}(A_2) - \\ &\quad - \text{tr}(A_6) . \end{aligned}$$

Como $\text{tr}(I_{bk}) = bk$ e usando-se (3.6.1.c), (3.6.2.c) e (3.6.6.c), tem-se:

$$\text{caract.}(A_7) = (bk - b - v - p + 1) . \quad (3.6.7.i)$$

Por (3.5.5.a), (3.6.1.e), (3.6.2.d) e (3.6.6.d), após todas as simplificações já mostradas em 3.5.7, obtém-se:

$$\mu' A_7 \mu = \mu' (I - A_1 - A_2 - A_6) \mu = 0 . \quad (3.6.7.j)$$

Pelo teorema 1, tem-se:

$$SQRes^*/\sigma^2 \cap \chi^2(n_7, 0) ,$$

ou, de modo equivalente:

$$SQRes^*/\sigma^2 \cap \chi_{n_7}^2 , \quad (3.6.7.k)$$

onde $n_7 = (bk - b - v - p + 1)$. Tem, portanto, distribuição de qui-quadrado central, com n_7 graus de liberdade.

3.6.8 - Distribuição do quociente $\frac{\text{SQReg.}/n_2}{\text{SQRes}^*/n_7}$

De (3.6.2.a) e (3.6.7.a), têm-se:

$$\text{SQReg.} = \underline{\hat{a}}' E_4 = Y' A_2 Y, \quad ,$$

$$\text{SQRes}^* = Y' (I - A_1 - A_2 - A_6) Y, \quad ,$$

respectivamente.

Como:

$$\begin{aligned} A_2 (I - A_1 - A_2 - A_6) &= A_2 - A_2 A_1 - A_2^2 - A_2 A_6 \\ &= A_2 - \Phi - A_2 - \Phi \\ &= \Phi \quad , \end{aligned} \quad (3.6.8.a)$$

então, pelo teorema 2, com $V = \sigma^2 I$, conforme (3.6.1.d), SQReg. e SQRes^* são independentes. Sendo assim, de (3.6.2.e) e (3.6.7.k), usando-se o teorema 3, tem-se:

$$\frac{\text{SQReg.}/n_2}{\text{SQRes}^*/n_7} \cap F(n_2, n_7, \lambda_2) \quad , \quad (3.6.8.b)$$

onde:

$$n_2 = p;$$

$$n_7 = (bk - b - v - p + 1);$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{a}' E_3 \underline{a} \quad .$$

3.6.9 - Distribuição do quociente $\frac{SQT^*(aj.)/n_4}{SQRes^*/n_7}$

De (3.6.4.a) e (3.6.7.a), têm-se:

$$SQT^*(aj.) = Y'(A_1 + A_2 - A_3) Y$$

$$SQRes^* = Y'(I - A_1 - A_2 - A_6) Y ,$$

respectivamente.

Tem-se:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2 - A_3)(I - A_1 - A_2 - A_6) &= A_1 - A_1^2 - A_1A_2 - A_1A_6 + \\ &+ A_2(I - A_1 - A_2 - A_6) - \\ &- A_3 + A_3A_1 + A_3A_2 + \\ &+ A_3A_6 \end{aligned} \quad (3.6.9.a)$$

Mas:

$$A_3A_6 = XW'_2E_1^{-1}W_2X'X_2K^{-1}X'_2 ,$$

que, por (3.6.7.e), fica:

$$A_3A_6 = \Phi . \quad (3.6.9.b)$$

Substituindo-se os valores obtidos em (3.6.1.b), (3.6.4.c), (3.6.7.c), (3.6.8.a), (3.6.4.i) e (3.6.9.b) em (3.6.9.a), e fazendo-se as simplificações, obtém-se:

$$(A_1 + A_2 - A_3)(I - A_1 - A_2 - A_6) = \Phi . \quad (3.6.9.c)$$

Então, pelo teorema 2, com $V = \sigma^2 I$, conforme (3.6.1.d), $SQT^*(aj.)$ e $SQRes^*$ são independentes. Sendo assim, de (3.6.4.m) e (3.6.7.k), usando-se o teorema 3, tem-se:

$$\frac{SQT^*(aj.)/n_u}{SQRes^*/n_7} \cap F(n_u, n_7, \lambda_u) \quad , \quad (3.6.9.d)$$

onde: $n_u = (v - 1)$;

$$n_7 = (bk - b - v - p + 1);$$

$$\lambda_u = \frac{1}{2\sigma^2} \tau' (C - Q_X E^{-1} Q_X') \tau.$$

3.7 - Estimativas das Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão

As estimativas das médias de tratamentos, ajustadas para blocos e regressão, $\hat{m}_i$, são obtidas por:

$$\hat{m}_i = \hat{t}_i + \hat{m} \quad (i=1,2,\dots,v) \quad , \quad (3.7.a)$$

onde $\hat{m} = \frac{y_{..}}{bk}$.

De (3.7.a) e (3.3.k), tem-se:

$$\hat{m}_i = \hat{m}_{i0} - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w \hat{t}_{iw} \quad (i=1,2,\dots,v) \quad , \quad (3.7.b)$$

onde $\hat{m}_{i0} = \hat{t}_{i0} + \hat{m}$ é a média do i-ésimo tratamento, ajustada para blocos.

3.8 - Matriz de Dispersão dos Vetores das Estimativas dos Parâmetros

O termo matriz de dispersão, aqui usado, tem o mesmo significado do termo matriz de variâncias e covariâncias.

3.8.1 - Matriz de dispersão de $\hat{\tau}_0$

A matriz de dispersão do vetor $\hat{\tau}_0$ é, por definição:

$$D(\hat{\tau}_0) = E\{[\hat{\tau}_0 - E(\hat{\tau}_0)][\hat{\tau}_0 - E(\hat{\tau}_0)]'\} \quad (3.8.1.a)$$

Como $\hat{\tau}_0 = M^{-1}Q$ e, por (3.3.g), $Q = W_1X'Y$, logo:

$$\hat{\tau}_0 = M^{-1}W_1X'Y \quad (3.8.1.b)$$

De (3.8.1.b) e (3.5.1.b), obtêm-se:

$$\hat{\tau}_0 = M^{-1}W_1X'X\beta + M^{-1}W_1X'\varepsilon \quad (3.8.1.c)$$

$$E(\hat{\tau}_0) = M^{-1}W_1X'X\beta \quad (3.8.1.d)$$

Portanto:

$$\hat{\tau}_0 - E(\hat{\tau}_0) = M^{-1}W_1X'\varepsilon \quad (3.8.1.e)$$

Substituindo-se (3.8.1.e) em (3.8.1.a), tem-se:

$$D(\hat{\tau}_0) = E(M^{-1}W_1X'\varepsilon\varepsilon'XW_1M^{-1}) \quad ,$$

que, por (3.5.1.b), fica:

$$D(\hat{\tau}_0) = M^{-1}W_1X'XW_1M^{-1}\sigma^2 \quad ,$$

ou, ainda, por (3.3.g):

$$D(\hat{\tau}_0) = M^{-1}CM^{-1}\sigma^2 \quad (3.8.1.f)$$

3.8.2 - Matriz de dispersão de $\underline{\hat{a}}$

A matriz de dispersão do vetor $\underline{\hat{a}}$ é, por definição:

$$D(\underline{\hat{a}}) = E \{ [\underline{\hat{a}} - E(\underline{\hat{a}})] [\underline{\hat{a}} - E(\underline{\hat{a}})]' \} \quad (3.8.2.a)$$

De (3.5.2.a), tem-se:

$$\underline{\hat{a}} = E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') Y \quad ,$$

que, por (3.1.b), fica:

$$\underline{\hat{a}} = E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') X\beta + E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') \varepsilon \quad ,$$

ou, ainda, por (3.5.2.d):

$$\underline{\hat{a}} = \underline{a} + E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') \varepsilon \quad (3.8.2.b)$$

De (3.8.2.b) e (3.5.1.b), seguem-se:

$$E(\underline{\hat{a}}) = \underline{a} \quad , \quad (3.8.2.c)$$

$$\underline{\hat{a}} - E(\underline{\hat{a}}) = E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') \varepsilon \quad (3.8.2.d)$$

Substituindo-se (3.8.2.d) em (3.8.2.a), obtém-se:

$$D(\underline{\hat{a}}) = E \left[E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') \varepsilon \varepsilon' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} \right] \quad ,$$

que, por (3.5.1.b), fica:

$$D(\underline{\hat{a}}) = \left[E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1} \right] \sigma^2 \quad ,$$

ou, ainda, por (3.5.2.e):

$$D(\underline{\hat{a}}) = E_3^{-1} \sigma^2 \quad (3.8.2.e)$$

3.8.3 - Matriz de dispersão de $\hat{\tau}$

A matriz de dispersão do vetor $\hat{\tau}$ é, por definição:

$$D(\hat{\tau}) = E \{ [\hat{\tau} - E(\hat{\tau})] [\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]' \} . \quad (3.8.3.a)$$

De (3.3.j), tem-se:

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_x \hat{a} ,$$

que, por (3.8.1.c) e (3.8.2.b), fica:

$$\hat{\tau} = M^{-1} W_1 X' X \beta + M^{-1} W_1 X' \varepsilon - \hat{\tau}_x \underline{a} - \hat{\tau}_x E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_x' W_1 X') \varepsilon ,$$

ou, ainda, por (3.5.1.c), lembrando-se que $M^{-1} Q_x = \hat{\tau}_x$, tem-se:

$$\hat{\tau} = M^{-1} C \tau + [M^{-1} W_1 X' - \hat{\tau}_x E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_x' W_1 X')] \varepsilon . \quad (3.8.3.b)$$

Assim, de (3.8.3.b) e (3.5.1.b), seguem-se:

$$E(\hat{\tau}) = M^{-1} C \tau , \quad (3.8.3.c)$$

$$\hat{\tau} - E(\hat{\tau}) = [M^{-1} W_1 X' - \hat{\tau}_x E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_x' W_1 X')] \varepsilon . \quad (3.8.3.d)$$

Substituindo-se (3.8.3.d) em (3.8.3.a), obtêm-se:

$$D(\hat{\tau}) = E \{ [M^{-1} W_1 X' - \hat{\tau}_x E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_x' W_1 X')] \varepsilon \varepsilon' [X W_1' M^{-1} - (X W_2' - X W_1' \hat{\tau}_x) E_3^{-1} \hat{\tau}_x'] \}$$

que, por (3.5.1.b), fica:

$$D(\hat{\tau}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} M^{-1} W_1 X' X W_1' M^{-1} - M^{-1} W_1 X' (X W_2' - X W_1' \hat{\tau}_x) E_3^{-1} \hat{\tau}_x' - \\ - \hat{\tau}_x E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_x' W_1 X') X W_1' M^{-1} + \\ + \hat{\tau}_x E_3^{-1} (W_2 X' - \hat{\tau}_x' W_1 X') (X W_2' - X W_1' \hat{\tau}_x) E_3^{-1} \hat{\tau}_x' \end{bmatrix}$$

Por (3.3.g) e (3.5.1.i), obtêm-se:

$$W_1 X' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) = (Q_X - C \hat{\tau}_X) = \Phi \quad , \quad (3.8.3.e)$$

$$(W_2 X' - \hat{\tau}_X' W_1 X') XW_1' = (Q_X' - \hat{\tau}_X' C) = \Phi \quad . \quad (3.8.3.f)$$

Finalmente, usando-se (3.3.g), (3.8.3.e), (3.8.3.f) e (3.5.2.e), tem-se:

$$D(\hat{\tau}) = (M^{-1} C M^{-1} + \hat{\tau}_X' E_3^{-1} \hat{\tau}_X) \sigma^2 \quad . \quad (3.8.3.g)$$

Comparando-se (3.8.3.g) com (3.8.1.f) e (3.8.2.e), verifica-se que:

$$D(\hat{\tau}) = D(\hat{\tau}_0) + \hat{\tau}_X' D(\underline{\hat{a}}) \hat{\tau}_X \quad . \quad (3.8.3.h)$$

3.9 - Covariância entre $\hat{\tau}_0$ e $\underline{\hat{a}}$

A covariância entre os vetores $\hat{\tau}_0$ e $\underline{\hat{a}}$ é, por definição:

$$\text{Cov}(\hat{\tau}_0, \underline{\hat{a}}) = E \{ [\hat{\tau}_0 - E(\hat{\tau}_0)] [\underline{\hat{a}} - E(\underline{\hat{a}})]' \} \quad .$$

Usando-se (3.8.1.e) e (3.8.2.d), tem-se:

$$\text{Cov}(\hat{\tau}_0, \underline{\hat{a}}) = E [M^{-1} W_1 X' \varepsilon \varepsilon' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1}] \quad ,$$

que, por (3.5.1.b), fica:

$$\text{Cov}(\hat{\tau}_0, \underline{\hat{a}}) = [M^{-1} W_1 X' (XW_2' - XW_1' \hat{\tau}_X) E_3^{-1}] \sigma^2 \quad ,$$

ou, ainda, por (3.8.3.e):

$$\text{Cov}(\hat{\tau}_0, \underline{\hat{a}}) = \Phi \quad . \quad (3.9.a)$$

De (3.9.a), tem-se:

$$\text{Cov}(\hat{t}_{i0}, \hat{a}_w) = 0, \quad \forall i, w. \quad (3.9.b)$$

3.10 - Variância da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão

De (3.7.a), obtém-se:

$$\hat{m}_i - \hat{m}_{i'} = \hat{t}_i - \hat{t}_{i'},$$

ou, usando-se (3.3.k):

$$\hat{m}_i - \hat{m}_{i'} = (\hat{t}_{i0} - \hat{t}_{i'0}) - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w (\hat{t}_{iw} - \hat{t}_{i'w}). \quad (3.10.a)$$

Aplicando-se propriedades de variância em (3.10.a) e usando-se (3.9.b), tem-se:

$$\begin{aligned} V(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) &= V(\hat{t}_{i0} - \hat{t}_{i'0}) + \\ &+ \sum_{u,w=1}^p (\hat{t}_{iu} - \hat{t}_{i'u}) (\hat{t}_{iw} - \hat{t}_{i'w}) \text{Cov}(\hat{a}_u, \hat{a}_w). \end{aligned} \quad (3.10.b)$$

Da análise intrablocos dos delineamentos em blocos in completos equilibrados, tem-se:

$$V(\hat{t}_{i0} - \hat{t}_{i'0}) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2. \quad (3.10.c)$$

Seja $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} c_{uw} \end{bmatrix}_p$. Então, de (3.10.b), (3.10.c) e

(3.8.2.e), obtém-se:

$$V(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \left[\frac{2k}{\lambda v} + \sum_{u,w=1}^p (\hat{t}_{iu} - \hat{t}_{i'u})(\hat{t}_{iw} - \hat{t}_{i'w}) c_{uw} \right] \sigma^2 \quad (3.10.d)$$

Em 3.3 foi visto que:

$$\hat{t}_{iw} = \frac{k}{\lambda v} Q_{iw} \quad ,$$

logo:

$$V(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \left[\frac{2k}{\lambda v} + \frac{k^2}{\lambda^2 v^2} \sum_{u,w=1}^p (Q_{iu} - Q_{i'u})(Q_{iw} - Q_{i'w}) c_{uw} \right] \sigma^2 \quad (3.10.e)$$

3.11 - Variância Média da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão

A variância média da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos, ajustadas para blocos e regressão, é obtida por:

$$\bar{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{1}{v(v-1)} \sum_{\substack{i,i'=1 \\ i \neq i'}}^v V(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) \quad (3.11.a)$$

Substituindo-se o valor de (3.10.e) em (3.11.a), obtém-se:

$$\bar{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{1}{v(v-1)} \sum_{\substack{i,i'=1 \\ i \neq i'}}^v \left[\frac{2k}{\lambda v} + \frac{k^2}{\lambda^2 v^2} \sum_{u,w=1}^p (Q_{iu} - Q_{i'u})(Q_{iw} - Q_{i'w}) c_{uw} \right] \sigma^2$$

$$\bar{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 + \frac{2k^2 \sigma^2}{\lambda^2 v^3 (v-1)} \left[\begin{aligned} & \sum_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^v \left(\sum_{u, w=1}^p Q_{iu} Q_{i'w} c_{uw} \right) - \\ & - \sum_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^v \left(\sum_{u, w=1}^p Q_{iu} Q_{i'w} c_{uw} \right) \end{aligned} \right] . \quad (3.11.b)$$

Tem-se:

$$\sum_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^v \left(\sum_{u, w=1}^p Q_{iu} Q_{i'w} c_{uw} \right) = (v-1) \sum_{u, w=1}^p \left(\sum_{i=1}^v Q_{iu} Q_{iw} \right) c_{uw} , \quad (3.11.c)$$

$$\sum_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^v \left(\sum_{u, w=1}^p Q_{iu} Q_{i'w} c_{uw} \right) = \sum_{u, w=1}^p \left(\sum_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^v Q_{iu} Q_{i'w} \right) c_{uw}$$

$$= \sum_{u, w=1}^p \left[\begin{aligned} & Q_{1u} \sum_{i'=2}^v Q_{i'w} + \\ & + Q_{2u} \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq 2}}^v Q_{i'w} + \dots + \\ & + Q_{vu} \sum_{i'=1}^{v-1} Q_{i'w} \end{aligned} \right] c_{uw} .$$

Mas, do estudo dos delineamentos em blocos incompletos equilibrados, tem-se:

$$\sum_{i=1}^v Q_{iw} = 0 \quad \forall \quad w ,$$

logo:

$$\sum_{i'=2}^v Q_{i'w} = -Q_{1w}, \quad \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq 2}}^v Q_{i'w} = -Q_{2w}, \quad \dots, \quad \sum_{i'=1}^{v-1} Q_{i'w} = -Q_{vw},$$

portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^v \left(\sum_{u,w=1}^p Q_{iu} Q_{i'w} c_{uw} \right) &= - \sum_{u,w=1}^p (Q_{1u} Q_{1w} + Q_{2u} Q_{2w} + \dots + Q_{vu} Q_{vw}) c_{uw} \\ &= - \sum_{u,w=1}^p \left(\sum_{i=1}^v Q_{iu} Q_{iw} \right) c_{uw}. \quad (3.11.d) \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores obtidos em (3.11.c) e (3.11.d) em (3.11.b), segue-se que:

$$\begin{aligned} \bar{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) &= \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 + \frac{2k^2 \sigma^2}{\lambda^2 v^2 (v-1)} \sum_{u,w=1}^p \left(\sum_{i=1}^v Q_{iu} Q_{iw} \right) c_{uw} \\ &= \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 + \frac{2k \sigma^2}{\lambda v (v-1)} \sum_{u,w=1}^p \left(\frac{k}{\lambda v} \sum_{i=1}^v Q_{iu} Q_{iw} \right) c_{uw}. \end{aligned}$$

Como:

$$Q'_x \hat{T}_x = Q'_x M^{-1} Q_x = \frac{k}{\lambda v} Q'_x Q_x,$$

logo:

$$\frac{k}{\lambda v} \sum_{i=1}^v Q_{iu} Q_{iw} = T(x_u x_w);$$

$$\bar{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{v-1} \sum_{u,w=1}^p c_{uw} T(x_u x_w) \right]. \quad (3.11.e)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 - Estimativas dos Efeitos dos Parâmetros

4.1.1 - Estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão

As estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão podem ser obtidas através de (3.3.k), ou seja:

$$\hat{t}_i = \hat{t}_{i_0} - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w \hat{t}_{iw} \quad (i=1,2,\dots,v) ,$$

onde $\hat{t}_{i_0} = \frac{k}{\lambda v} Q_{i_0}$ e $\hat{t}_{iw} = \frac{k}{\lambda v} Q_{iw}$ para a restrição $\sum_{i=1}^v \hat{t}_i = 0$.

Esse resultado é o mesmo apresentado por ZELEN (1957).

4.1.2 - Estimativas dos coeficientes de regressão

As estimativas dos coeficientes de regressão podem ser obtidas do sistema de equações (3.3.n), ou seja:

$$E_3 \underline{\hat{a}} = E_4 ,$$

cujo resultado é concordante com ZELEN (1957) e RAO (1974) para o caso de p variáveis auxiliares e com COCHRAN (1957) para o caso de duas variáveis auxiliares.

Como a matriz E_3 é não singular, o vetor das estimativas dos coeficientes de regressão é a única solução de (3.3.n), ou seja:

$$\underline{\hat{a}} = E_3^{-1} E_4 ,$$

o qual está de acordo com KATTI (1965) e SEARLE (1971).

4.2 - Somas de Quadrados

4.2.1 - Soma de quadrados da regressão

Pode ser obtida através de:

$$SQReg. = \underline{\hat{a}}' E_4 = \sum_{w=1}^p \hat{a}_w R(x_w y) . \quad (4.2.1.a)$$

Esse resultado concorda com o apresentado por ZELEN (1957) e SEARLE (1971).

4.2.2 - Soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão

De acordo com (3.4.3.j), pode ser obtida por:

$$SQT^*(aj.) = SQT(aj.) + \sum_{w=1}^p \hat{a}_w R(x_w y) - \sum_{w=1}^p \tilde{a}_w R'(x_w y) ,$$

onde $R'(x_w y) = R(x_w y) + T(x_w y)$.

Esse resultado é idêntico ao de ZELEN (1957).

4.2.3 - Soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão

Pode ser obtida através de (3.4.2.b), ou seja:

$$SQRes^* = R(y^2) - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w R(x_w y) .$$

Esse resultado é concordante com o apresentado por ZELEN (1957), SEARLE (1971) e RAO (1974).

4.3 - Esperança Matemática das Somas de Quadrados

4.3.1 - Esperança matemática da SQReg.

De (3.5.2.f), tem-se:

$$E(SQReg.) = \underline{a}' E_3 \underline{a} + p \sigma^2 ,$$

justificando-se, assim, a associação de p graus de liberdade à soma de quadrados da regressão.

4.3.2 - Esperança matemática da $SQT^*(aj.)$

De (3.5.4.a), tem-se:

$$E [SQT^*(aj.)] = \tau'(C - Q_X E^{-1} Q_X') \tau + (v - 1) \sigma^2 ,$$

justificando-se, assim, a associação de $(v-1)$ graus de liberdade à soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão.

Particularizando-se esse resultado para a análise de covariância nos delineamentos inteiramente casualizados, com uma variável auxiliar e mesmo número de repetições, verifica-se que é concordante com o obtido por GRAYBILL (1961).

4.3.3 - Esperança matemática da $SQRes^*$

De (3.5.7.a), tem-se:

$$E(SQRes^*) = (bk - b - v - p + 1) \sigma^2 ,$$

justificando-se, assim, a associação de $(bk-b-v-p+1)$ graus de liberdeade à soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão.

Portanto, um estimador imparcial de σ^2 é:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQRes^*}{(bk - b - v - p + 1)} = QMRes^* . \quad (4.3.3.a)$$

4.4 - Distribuição de Formas Quadráticas

4.4.1 - Distribuição da $SQReg./\sigma^2$

De (3.6.2.e), tem-se:

$$SQReg./\sigma^2 \sim \chi^2(n_2, \lambda_2) \quad ,$$

onde:

$$n_2 = p;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{a}' E_3 \underline{a} \quad .$$

Esse resultado é concordante com SEARLE (1971).

4.4.2 - Distribuição da $SQT^*(aj.)/\sigma^2$

De (3.6.4.m), tem-se:

$$SQT^*(aj.)/\sigma^2 \sim \chi^2(n_4, \lambda_4) \quad ,$$

onde:

$$n_4 = (v - 1);$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2\sigma^2} \tau' (C - Q_x E_1^{-1} Q_x') \tau.$$

Particularizando-se esse resultado para a análise de covariância nos delineamentos inteiramente casualizados, com uma variável auxiliar e mesmo número de repetições, chega-se ao indicado por REISCH e WEBSTER (1969), desde que seja acrescentada a restrição $\sum_{i=1}^t \tau_i = 0$ usada por esses autores.

4.4.3 - Distribuição da $SQRes^*/\sigma^2$

De (3.6.7.k), tem-se:

$$SQRes^*/\sigma^2 \cap \chi_{n_7}^2 \quad ,$$

onde $n_7 = (bk-b-v-p+1)$.

Esse resultado é concordante com SEARLE (1971). Particularizando-o para a análise de covariância nos delineamentos inteiramente casualizados, com uma variável auxiliar e mesmo número de repetições, verifica-se que é idêntico ao de REISCH e WEBSTER (1969).

4.5 - Testes de Significância

4.5.1 - Teste de significancia para regressão

De (3.6.8.b), tem-se:

$$\frac{SQReg./n_2}{SQRes^*/n_7} \cap F(n_2, n_7, \lambda_2) \quad ,$$

onde:

$$n_2 = p;$$

$$n_7 = (bk-b-v-p+1);$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{a}' E_3 \underline{a} \quad .$$

Particularizando-se esse resultado para a análise de covariância nos delineamentos inteiramente casualizados, com uma variável auxiliar e mesmo número de repetições, verifica-se que é i-

gual ao de GRAYBILL (1961).

Em virtude da distribuição do quociente $\frac{SQReg./n_2}{SQRes*/n_7}$, para testar-se a hipótese de nulidade de que todos os coeficientes de regressão sejam iguais a zero, isto é,

$$H_0: a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0 ,$$

ou,

$$H_0: \underline{a} = \underline{\phi} ,$$

pode-se utilizar o teste F central, através da estatística:

$$F_1 = \frac{SQReg./n_2}{SQRes*/n_7} ,$$

com n_2 e n_7 graus de liberdade, pois, sob a hipótese H_0 , $\lambda_2 = 0$.

Esse procedimento é o mesmo utilizado por ZELEN(1957) e SEARLE (1971).

4.5.2 - Teste de significância para tratamentos

De (3.6.9.d), tem-se:

$$\frac{SQT*(aj.)/n_u}{SQRes*/n_7} \cap F(n_u, n_7, \lambda_u) ,$$

onde:

$$n_u = (v-1);$$

$$n_7 = (bk-b-v-p+1);$$

$$\lambda_u = \frac{1}{2\sigma^2} \tau' (C - Q_x E_1^{-1} Q_x') \tau .$$

Particularizando-se esse resultado para a análise de covariância nos delineamentos inteiramente casualizados, com uma variável auxiliar e mesmo número de repetições, verifica-se que é i-dêntico ao apresentado por GRAYBILL (1961) e REISCH e WEBSTER (1969).

Em virtude da distribuição do quociente $\frac{SQT*(aj.)/n_4}{SQRes*/n_7}$, para testar-se a hipótese de nulidade de que todos os efeitos de tratamentos sejam iguais a zero, isto é,

$$H_0: t_1 = t_2 = \dots = t_v = 0 ,$$

ou,

$$H_0: \tau = \phi ,$$

pode-se utilizar o teste F central, através da estatística:

$$F_2 = \frac{SQT*(aj.)/n_4}{SQRes*/n_7} ,$$

com n_4 e n_7 graus de liberdade, pois, sob a hipótese H_0 , $\lambda_4 = 0$.

Esse procedimento é idêntico ao utilizado por ZELENN (1957).

4.6 - Estimativas das Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão

Podem ser obtidas através de (3.7.a), ou seja:

$$\hat{m}_i = \hat{t}_i + \hat{m} \quad (i=1,2,\dots,v) ,$$

onde $\hat{m} = \frac{y_{..}}{bk}$.

Esse procedimento é o mesmo utilizado por PASTERNAK (1960) para a análise de covariância intrablocos em um "lattice" rectangular triplo 3x4.

As estimativas das médias de tratamentos, ajustadas para blocos e regressão, também podem ser obtidas através de (3.7.b), ou seja:

$$\hat{m}_i = \hat{m}_{i_0} - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w \hat{t}_{iw} \quad (i=1,2,\dots,v) ,$$

onde $\hat{m}_{i_0} = \hat{t}_{i_0} + \hat{m}$ é a média do i-ésimo tratamento, ajustada para blocos.

4.7 - Matriz de Dispersão dos Vetores das Estimativas dos Parâmetros

4.7.1 - Matriz de dispersão de $\hat{\tau}_0$

De acordo com (3.8.1.f), tem-se:

$$D(\hat{\tau}_0) = M^{-1} C M^{-1} \sigma^2 ,$$

onde a matriz M^{-1} é simétrica.

Esse resultado é o mesmo da análise intrablocos dos delineamentos em blocos incompletos equilibrados.

4.7.2 - Matriz de dispersão de $\hat{\underline{a}}$

Pode ser obtida através de (3.8.2.e), ou seja:

$$D(\hat{\underline{a}}) = E_3^{-1} \sigma^2 .$$

Esse resultado é idêntico ao apresentado por ZELEN (1957), KATTI (1965) e SEARLE (1971).

4.7.3 - Matriz de dispersão de $\hat{\tau}$

Pode ser obtida através de (3.8.3.h), ou seja:

$$D(\hat{\tau}) = D(\hat{\tau}_0) + \hat{\tau}_X D(\hat{a}) \hat{\tau}_X',$$

onde:

$$D(\hat{\tau}_0) = M^{-1} C M^{-1} \sigma^2;$$

$$D(\hat{a}) = E_3^{-1} \sigma^2.$$

4.8 - Variância da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão

Pode ser obtida através de (3.10.d), ou seja:

$$V(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \left[\frac{2k}{\lambda v} + \sum_{u,w=1}^P (\hat{e}_{iu} - \hat{e}_{i'u}) (\hat{e}_{iw} - \hat{e}_{i'w}) c_{uw} \right] \sigma^2,$$

onde:

$$\frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 = V(\hat{e}_{i0} - \hat{e}_{i'0});$$

c_{uw} : elemento da inversa da matriz constituída pelas somas de quadrados e de produtos dos resíduos, relativas às variáveis auxiliares.

Esse resultado é idêntico ao indicado por ZELEN (1957).

De acordo com (3.10.d) e (4.3.3.a), tem-se:

$$\hat{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \left[\frac{2k}{\lambda v} + \sum_{u,w=1}^p (\hat{t}_{iu} - \hat{t}_{i'u})(\hat{t}_{iw} - \hat{t}_{i'w}) c_{uw} \right] s^2 \quad (4.8.a)$$

onde $s^2 = \text{QMRes}^*$

Particularizando-se esse resultado para a análise de covariância nos delineamentos em blocos completos casualizados, com duas variáveis auxiliares, verifica-se que é concordante com o apresentado por COCHRAN (1957). Resultado semelhante é indicado por PASTERNAK (1960), para a análise de covariância intrablocos em um "lattice" retangular triplo 3x4.

4.9 - Variância Média da Estimativa de Um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos e Regressão

Pode ser obtida através de (3.11.e), ou seja:

$$\bar{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{v-1} \sum_{u,w=1}^p c_{uw} T(x_u x_w) \right],$$

onde:

$$\frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 = V(\hat{t}_{i0} - \hat{t}_{i'0});$$

c_{uw} : elemento da inversa da matriz constituída pelas somas de quadrados e de produtos dos resíduos, relativas às variáveis auxiliares.

De acordo com (3.11.e) e (4.3.3.a), tem-se:

$$\hat{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda v} s^2 \left[1 + \frac{1}{v-1} \sum_{u,w=1}^p c_{uw} T(x_u x_w) \right], \quad (4.9.a)$$

onde $s^2 = \text{QMRes}^*$

Particularizando-se esse resultado para a análise de covariância nos delineamentos em blocos completos casualizados, com uma e duas variáveis auxiliares, percebe-se que é concordante com o apresentado por FINNEY (1946) e COCHRAN (1957), respectivamente.

4.10 - Exemplo Numérico

Para ilustrar a aplicação de algumas fórmulas e procedimentos apresentados neste trabalho, foi incluído, no Apêndice, um exemplo numérico com duas variáveis auxiliares. Ressalte-se que no mesmo não será levado em consideração a validade do uso da análise de covariância aos dados, como, também, de nenhum procedimento particular.

5. CONCLUSÕES

As fórmulas que existem citadas na literatura, mesmo sem as correspondentes demonstrações, não serão aqui mencionadas. Assim, as conclusões que serão apresentadas são referentes às justificativas teóricas deste trabalho, as quais não se encontram na literatura.

a) As esperanças matemáticas das somas de quadrados, usadas nos testes de significância, são:

$$E(\text{SQReg.}) = \underline{a}' E_3 \underline{a} + p \sigma^2 \quad ;$$

$$E [\text{SQT}^*(\text{aj.})] = \tau' (C - Q_X E_1^{-1} Q_X') \tau + (v - 1) \sigma^2 \quad ;$$

$$E(\text{SQRes}^*) = (bk - b - v - p + 1) \sigma^2.$$

b) Um estimador imparcial de σ^2 é:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{SQRes}^*}{(bk - b - v - p + 1)} = \text{QMRes}^*$$

c) Sob a hipótese H_0 :

$$F_1 = \frac{\text{SQReg.}/n_2}{\text{SQRes}^*/n_7} \cap F(n_2, n_7) \quad ;$$

$$F_2 = \frac{\text{SQT}^*(\text{aj.})/n_4}{\text{SQRes}^*/n_7} \cap F(n_4, n_7) \quad .$$

d) A matriz de dispersão do vetor $\hat{\tau}$ pode ser obtida através de:

$$D(\hat{\tau}) = D(\hat{\tau}_0) + \hat{\tau}_x' D(\hat{a}) \hat{\tau}_x \quad ,$$

onde:

$$D(\hat{\tau}_0) = M^{-1} C M^{-1} \sigma^2;$$

$$D(\hat{a}) = E_3^{-1} \sigma^2.$$

e) A variância média da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos, ajustadas para blocos e regressão, pode ser obtida através da fórmula:

$$\bar{V}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{v-1} \sum_{u,w=1}^p c_{uw} T(x_u x_w) \right] \quad .$$

f) Todos os resultados obtidos podem ser particularizados para a análise de covariância nos delineamentos inteiramente casualizados e em blocos completos casualizados.

6. LITERATURA CITADA

- CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. Londres, Asia Publishing House. 120 p.
- COCHRAN, W.G., 1957. Analysis of covariance: its nature and uses. Biometrics, Raleigh, 13: 261-281.
- FINNEY, D.J., 1946. Standard errors of yields adjusted for regression on an independent measurement. Biometrics, Raleigh, 2: 53-55.
- GRAYBILL, F.A., 1961. An Introduction to Linear Statistical Models. Nova York, McGraw-Hill Book Company, Inc. Vol. 1. 463 p.
- KATTI, S.K., 1965. Multiple covariate analysis. Biometrics, Raleigh, 21: 957-974.
- PASTERNAK, B.S., 1960. Analysis of covariance for a 3x4 triple rectangular lattice design (3 associate P.B.I.B.). Biometrics, Raleigh, 16: 7-18.

- PIMENTEL GOMES, F., 1968. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. Ciência e Cultura, São Paulo, 20: 733-746.
- PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. 8a. ed. São Paulo, Livraria Nobel. 430 p.
- RAO, C.R., 1974. Advanced Statistical Methods in Biometric Research. 2a. ed. Nova York, Hafner Press. 390 p.
- REISCH, J.S. e J.T. WEBSTER, 1969. The power of a test in covariance analysis. Biometrics, Raleigh, 25: 701-714.
- SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. Nova York, John Wiley & Sons, Inc. 532 p.
- YATES, F., 1940. The recovery of inter-block information in balanced incomplete block designs. Annals of Eugenics, Londres, 10: 317-325.
- ZELEN, M., 1957. The analysis of covariance for incomplete block designs. Biometrics, Raleigh, 13: 309-332.

A P Ê N D I C E

Os dados utilizados neste exemplo encontram-se na Tabela 1. Os referentes às variáveis y e $x^{(1)}$ foram obtidos de ZELEN (1957) e são provenientes de um experimento em blocos incompletos equilibrados, tendo como parâmetros: $v = 4$, $b = 12$, $r = 9$, $k = 3$ e $\lambda = 6$. Por outro lado, os referentes à segunda variável auxiliar, $x^{(2)}$, são fictícios, porém, baseados na amplitude da primeira variável auxiliar, $x^{(1)}$.

As estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos, relativas às variáveis y , $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$, encontram-se nas Tabelas 2, 3 e 4, respectivamente.

Na Tabela 5 são apresentadas as somas de quadrados e de produtos e seus respectivos graus de liberdade, relativos às variáveis y , $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

Tabela 1 - Dados utilizados no exemplo numérico, provenientes de um experimento em blocos incompletos equilibrados.

BLOCO	VARIÁVEL	OBSERVAÇÕES		
1	y	1,11	0,95	0,82
	x ⁽¹⁾	(a) 0,98	(c) 0,66	(d) 0,47
	x ⁽²⁾	1,03	0,82	0,92
2	y	1,22	0,97	1,70
	x ⁽¹⁾	(b) 0,88	(d) 0,58	(a) 1,14
	x ⁽²⁾	0,98	0,61	0,77
3	y	1,52	1,60	1,11
	x ⁽¹⁾	(c) 0,79	(a) 1,08	(b) 0,84
	x ⁽²⁾	1,01	0,90	0,85
4	y	1,18	1,22	1,54
	x ⁽¹⁾	(d) 0,58	(b) 0,88	(c) 0,80
	x ⁽²⁾	0,64	0,73	0,79
5	y	1,57	1,33	0,93
	x ⁽¹⁾	(a) 1,08	(c) 0,79	(d) 0,49
	x ⁽²⁾	0,72	0,60	0,89
6	y	1,12	0,93	1,69
	x ⁽¹⁾	(b) 0,82	(d) 0,51	(a) 1,11
	x ⁽²⁾	0,80	0,43	0,78

(continua)

Tabela 1 - continuação:

BLOCO	VARIÁVEL	OBSERVAÇÕES		
7	y	1,26	1,35	1,06
	x ⁽¹⁾	(c) 0,69	(a) 1,00	(b) 0,80
	x ⁽²⁾	0,91	1,02	0,69
8	y	1,12	1,09	1,29
	x ⁽¹⁾	(d) 0,48	(b) 0,79	(c) 0,70
	x ⁽²⁾	0,68	1,10	0,93
9	y	1,60	1,82	1,09
	x ⁽¹⁾	(a) 1,12	(c) 0,82	(d) 0,57
	x ⁽²⁾	0,95	0,90	0,75
10	y	1,03	0,94	1,66
	x ⁽¹⁾	(b) 0,80	(d) 0,52	(a) 1,10
	x ⁽²⁾	0,66	1,05	0,68
11	y	1,24	1,31	1,11
	x ⁽¹⁾	(c) 0,71	(a) 1,00	(b) 0,82
	x ⁽²⁾	0,49	0,73	0,86
12	y	0,93	1,09	1,27
	x ⁽¹⁾	(d) 0,47	(b) 0,78	(c) 0,68
	x ⁽²⁾	0,81	1,12	1,00

FONTE: Os dados das variáveis y e x⁽¹⁾ foram obtidos de ZELEN(1957) e os da variável x⁽²⁾ são fictícios.

Obs.: As letras a, b, c e d, entre parênteses, correspondem aos quatro tratamentos.

Tabela 2 - Estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e valores de $y_{i.}$, A_{i_0} e Q_{i_0} , relativos à variável y.

TRATAMENTO	$y_{i.}$	A_{i_0}	Q_{i_0}	$\hat{t}_{i_0}$
a	13,59	34,04	2,24	0,28
b	10,05	33,55	-1,13	-0,14
c	12,22	33,51	1,05	0,13
d	8,91	33,21	-2,16	-0,27

onde: $A_{i_0} = \sum_{j=1}^{12} n_{ij} y_{.j}$, $Q_{i_0} = y_{i.} - \frac{1}{3} A_{i_0}$ e $\hat{t}_{i_0} = \frac{1}{8} Q_{i_0}$.

Tabela 3 - Estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e valores de $x_{i.}^{(1)}$, A_{i_1} e Q_{i_1} , relativos à variável auxiliar $x^{(1)}$.

TRATAMENTO	$x_{i.}^{(1)}$	A_{i_1}	Q_{i_1}	$\hat{t}_{i_1}$
a	9,61	22,17	2,22	0,28
b	7,41	21,35	0,29	0,04
c	6,64	20,87	-0,32	-0,04
d	4,67	20,60	-2,20	-0,28

onde: $A_{i_1} = \sum_{j=1}^{12} n_{ij} x_{.j}^{(1)}$, $Q_{i_1} = x_{i.}^{(1)} - \frac{1}{3} A_{i_1}$ e $\hat{t}_{i_1} = \frac{1}{8} Q_{i_1}$.

Tabela 4 - Estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e valores de $x_{i.}^{(2)}$, A_{i2} e Q_{i2} , relativos à variável auxiliar $x^{(2)}$.

TRATAMENTO	$x_{i.}^{(2)}$	A_{i2}	Q_{i2}	$\hat{t}_{i2}$
a	7,58	21,80	0,31	0,04
b	7,79	22,02	0,45	0,06
c	7,45	22,84	-0,16	-0,02
d	6,78	22,14	-0,60	-0,08

onde: $A_{i2} = \sum_{j=1}^{12} n_{ij} x_{.j}^{(2)}$, $Q_{i2} = x_{i.}^{(2)} - \frac{1}{3} A_{i2}$ e $\hat{t}_{i2} = \frac{1}{8} Q_{i2}$.

Tabela 5 - Somas de quadrados e de produtos e seus respectivos graus de liberdade, relativos às variáveis y , $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

Causas de Variação	G.L.	SOMAS DE QUADRADOS E DE PRODUTOS					
		y^2	$x_1 y$	$x_2 y$	$x_1 x_2$	x_1^2	x_2^2
Blocos	11	0,6419	0,2586	-0,1177	-0,1097	0,2226	0,3428
Tratamentos (aj.p/Blocos)	3	1,5078	1,1326	0,1642	0,2737	1,2444	0,0855
Resíduo	21	0,2817	0,0386	0,0159	-0,0071	0,0092	0,5425
Total	35	2,4314	1,4298	0,0624	0,1569	1,4762	0,9708
Tratamentos (aj.p/Blocos) + Resíduo	24	1,7895	1,1712	0,1801	0,2666	1,2536	0,6280

As matrizes E_3 e E_3^{-1} , e o vetor E_4 são:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0,0092 & -0,0071 \\ -0,0071 & 0,5425 \end{bmatrix} ; \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 109,8047 & 1,4371 \\ 1,4371 & 1,8621 \end{bmatrix} ;$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0,0386 \\ 0,0159 \end{bmatrix} .$$

Como $\hat{\underline{a}} = E_3^{-1}E_4$, (3.3.r), então o vetor das estimativas dos coeficientes de regressão $\hat{\underline{a}}$ é:

$$\hat{\underline{a}} = \begin{bmatrix} 4,2613 \\ 0,0851 \end{bmatrix} .$$

Utilizando-se (4.2.1.a), obtém-se:

$$SQReg. = 0,1658 .$$

Sendo:

$$\hat{\tau}_0 = \begin{bmatrix} 0,28 \\ -0,14 \\ 0,13 \\ -0,27 \end{bmatrix} \quad (\text{Tabela 2}) \text{ e}$$

$$\hat{\tau}_x = \begin{bmatrix} 0,28 & 0,04 \\ 0,04 & 0,06 \\ -0,04 & -0,02 \\ -0,28 & -0,08 \end{bmatrix} \quad (\text{Tabelas 3 e 4}) ,$$

então:

$$\hat{\tau}_{\underline{x}} \hat{\underline{a}} = \begin{bmatrix} 1,20 \\ 0,17 \\ -0,17 \\ -1,20 \end{bmatrix} .$$

Como $\hat{\tau} = \hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_{\underline{x}} \hat{\underline{a}}$, (3.3.j), então o vetor das estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão é:

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} -0,92 \\ -0,31 \\ 0,30 \\ 0,93 \end{bmatrix} .$$

Usando-se (3.4.2.b), tem-se:

$$SQRes^* = 0,2817 - 0,1658 = 0,1159 .$$

As matrizes E_1 e E_1^{-1} , e o vetor E_2 são:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1,2536 & 0,2666 \\ 0,2666 & 0,6280 \end{bmatrix} ; \quad E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8769 & -0,3723 \\ -0,3723 & 1,7504 \end{bmatrix} ;$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1,1712 \\ 0,1801 \end{bmatrix} .$$

Sendo $\tilde{\underline{a}} = E_1^{-1} E_2$, (3.4.3.g), logo:

$$\underline{\tilde{a}} = \begin{bmatrix} 0,9600 \\ -0,1208 \end{bmatrix} \quad e$$

$$\underline{\tilde{a}}' E_2 = \sum_{w=1}^2 \tilde{a}_w R'(x_w, y) = 1,1026 .$$

Usando-se (3.4.3.j), tem-se:

$$SQT^*(aj.) = 1,5078 + 0,1658 - 1,1026 = 0,5710 .$$

Os testes de significância para regressão e para tratamentos são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 - Testes de significância para regressão e para tratamentos.

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	2	0,1658	0,0829	13,59**
Tratamentos (aj.p/ Blocos e Regressão)	3	0,5710	0,1903	31,20**
Resíduo (aj.p/ Regressão)	19	0,1159	0,0061	

** : Significativo ao nível de 1% de probabilidade.

As estimativas das médias de tratamentos ajustadas para blocos, e para blocos e regressão, obtidas através de (3.7.b), encontram-se na Tabela 7.

Tabela 7 - Estimativas das médias de tratamentos ajustadas para blocos, e para blocos e regressão.

TRATAMENTO	ESTIMATIVAS DAS MÉDIAS DE TRATAMENTOS AJUSTADAS	
	$\hat{m}_{i0} = \hat{t}_{i0} + \hat{m}$	$\hat{m}_i = \hat{t}_i + \hat{m}$
a	1,52	0,32
b	1,10	0,93
c	1,37	1,54
d	0,97	2,17

onde: $\hat{m} = 1,24$.

De acordo com (4.8.a), a estimativa da variância da estimativa do contraste ($m_a - m_b$), por exemplo, é:

$$\hat{V}(\hat{m}_a - \hat{m}_b) = 0,0061 \left[\begin{array}{l} \frac{2 \times 3}{6 \times 4} + (0,28 - 0,04)^2 109,8047 + \\ + 2 \times (0,28 - 0,04)(0,04 - 0,06) 1,4371 + \\ + (0,04 - 0,06)^2 1,8621 \end{array} \right]$$

$$\hat{V}(\hat{m}_a - \hat{m}_b) = 0,0400 .$$

Usando-se (4.9.a), obtém-se:

$$\hat{\bar{v}}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2 \times 3 \times 0,0061}{6 \times 4} \left[1 + \frac{1}{3} (109,8047 \times 1,2444 + 2 \times \right. \\ \left. \times 1,4371 \times 0,2737 + 1,8621 \times \right. \\ \left. \times 0,0855) \right]$$

$$\hat{\bar{v}} = (\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = 0,0715 .$$