**UMA ANÁLISE BAYESIANA PARA UM GRUPO DE
EXPERIMENTOS COMPLETAMENTE
ALEATORIZADOS**

JOÃO GIL DE LUNA
Estatístico

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Tese apresentada à Escola Superior de
Agricultura "Luiz de Queiroz", da Uni-
versidade de São Paulo, para obtenção
do título de Doutor em Agronomia, Área
de Concentração: Estatística e Experi-
mentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Janeiro - 1996

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - Campus "Luiz de Queiroz"/USP

Luna, João Gil de

Uma análise bayesiana para um grupo de experimentos completamente
aleatorizados / João Gil de Luna. - - Piracicaba, 1996.
129p.

Tese (doutorado) - - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz,
1996.

Bibliografia.

1. Experimento agrícola - Método estatístico 2. Método de Bayes I. Título

CDD 519.542

**UMA ANÁLISE BAYESIANA PARA UM GRUPO DE
EXPERIMENTOS COMPLETAMENTE
ALEATORIZADOS**

JOÃO GIL DE LUNA

Aprovado em: 06/03/96

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Humberto de Campos	ESALQ/USP
Prof. Dr. Décio Barbin	ESALQ/USP
Prof ^ª Dr ^a . Clarice Garcia Borges Demétrio	ESALQ/USP
Prof. Dr. Sérgio do Nascimento Kronka	FCAV/UNESP
Prof. Dr. João Riboldi	UFRS/PORTO ALEGRE

Prof. Dr. Humberto de Campos
Orientador

DEDICAÇÃO

A meus pais e irmãos,
com gratidão,

Ao mano Leandro(in memorian),
com saudade,

À Lili, Iviane e Igor,
sentido do que faço,

dedico com carinho e amor.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Humberto de Campos, pela orientação e estímulo.

Aos Professores Doutores Décio Barbin, Clarice Garcia Borges Demétrio, Antônio Francisco Iemma, Maria Cristina S. Nogueira e José Eduardo Corrente, pela amizade e consideração.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelos ensinamentos e convívio.

Aos Colegas de curso, Claudia, Doris, Imaculada, Liciane, Luis, Pillar, Roseli e Silvio, pelo companheirismo e amizade.

À minha família, Lili, Iviane, Igor, por ter contornado a minha ausência.

Às secretárias do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, nas pessoas de Rosa e Solange, por terem me suportado.

Aos Colegas Professores do DME/UFPB-CAMPUS II, pela confiança e oportunidade que me deram para realização deste curso.

Ao Pesquisador Antônio Fernando Sobral da Costa, por ter cedido os dados experimentais usados neste trabalho.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram com esta importante etapa da minha vida.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO DE LITERATURA	5
2.1	Análise de Grupo de Experimentos	5
2.2	A Natureza do Método Bayesiano	7
2.2.1	O Teorema de Bayes	7
2.2.2	O Teorema de Bayes e a Função de Verossimilhança	8
2.2.3	A Natureza Sequencial do Teorema de Bayes	9
2.3	Inferência Bayesiana Básica	10
2.4	A Informação <i>a Priori</i>	11
2.5	Modelos Lineares Bayesianos	15
2.6	Testes Bayesianos de Homogeneidade de Variâncias	16
3	DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	17
3.1	Generalidades	17
3.2	As Análises Individuais	18
3.2.1	O Modelo Estatístico	18
3.2.2	A Função de Verossimilhança	19
3.2.3	A Função de Distribuição <i>a Priori</i> de (θ, σ^2)	21
3.2.4	A Função de Distribuição Conjunta <i>a Posteriori</i> de (θ, σ^2)	21
3.2.5	Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> de σ^2	22
3.2.6	A Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> de θ	23
3.2.7	Região de Alta Densidade <i>a Posteriori</i>	24
3.2.8	Propriedades da Distribuição <i>a Posteriori</i> de θ	25
3.2.9	Inferências Conjunta e Marginal	29
3.2.10	Comparação das Dispersões de K Populações Normais	31
3.3	A Análise Conjunta de J Experimentos	33

3.3.1	O Modelo Estatístico	34
3.3.2	A Função de Verossimilhança	35
3.3.3	A Distribuição <i>a priori</i> de $(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2)$	40
3.3.4	A Distribuição <i>a Posteriori</i> de $(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2)$	40
3.3.5	Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> dos Componentes da Vari- ância $(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2)$	43
3.3.6	Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> de ϕ	43
3.3.7	Aproximando a Distribuição $p(\phi \mathbf{y})$	45
3.3.8	Inferências Conjuntas e Marginais Sobre ϕ na Análise do Gru- po de J Experimentos Completamente Aleatorizados	51
3.3.9	Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> de σ_e^2	53
3.3.10	Composição das Estimativas das Variâncias para Estimar σ_e^2	59
3.3.11	Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> de σ_g^2	59
3.3.12	Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> de σ_b^2	60
3.4	Resumo da Teoria	63
3.4.1	Análises Individuais	63
3.4.2	A Análise Conjunta	65
3.4.3	Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> dos Componentes da Vari- ância, σ_e^2 , σ_g^2 e σ_b^2	66
4	EXEMPLO ILUSTRATIVO	68
4.1	A Origem dos Dados e Hipóteses de Interesse	68
4.2	Os Dados Experimentais	70
4.3	As Análises Individuais	72
4.3.1	A Homogeneidade das Variâncias Dentro dos Ensaios	72
4.3.2	As Distribuições Marginais <i>a Posteriori</i> de σ^2 , $p(\sigma^2 \mathbf{y})$, Re- lativas a Cada Experimento	75
4.3.3	Distribuição Conjunta <i>a Posteriori</i> para os Efeitos Médios dos Tratamentos, $p(\theta \mathbf{y})$, em Cada Experimento	77
4.3.4	Distribuição Marginal <i>a Posteriori</i> de θ_i , $p(\theta_i \mathbf{y})$	78

4.3.5	Comparações dos Efeitos Médios dos Tratamentos	80
4.3.6	Distribuições Marginais <i>a Posteriori</i> dos Contrastes ϕ_j , $p(\phi_j \mathbf{y})$	81
4.4	A Análise Conjunta dos Experimentos	84
4.4.1	A Distribuição <i>a Posteriori</i> Aproximada de ϕ , $p(\phi \mathbf{y})$	87
4.4.2	Inferências Conjunta e Marginais Sobre ϕ na Análise Conjunta	88
4.4.3	Ajuste dos Graus de Liberdade e Quadrados Médios para Construção das Densidades <i>a Posteriori</i> dos Componentes da Variância	90
4.4.4	Inferência Marginal <i>a Posteriori</i> Sobre σ_e^2	90
4.4.5	Inferência Marginal <i>a Posteriori</i> Sobre σ_g^2	92
4.4.6	Inferência Marginal <i>a Posteriori</i> Sobre σ_b^2	93
4.5	A Análise Clássica	95
4.5.1	As Análises Individuais Clássicas	95
4.5.2	A Análise Conjunta Clássica	96
5	CONCLUSÕES	104
6	APÊNDICE	111

UMA ANÁLISE BAYESIANA PARA UM GRUPO DE EXPERIMENTOS COMPLETAMENTE ALEATORIZADOS

Autor: João Gil de Luna

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Campos

RESUMO

Em experimentação agrônômica é muito freqüente a estruturação da análise estatística de um grupo de experimentos. Os motivos que levam a esta prática, quase sempre, estão associados ao desejo dos pesquisadores em obter conclusões mais gerais para os tratamentos envolvidos, bem como, acerca dos fatores ambientais (ano agrícola, estações do ano, épocas, regiões, tipos de solo, etc.) e da interação (tratamento) $\times$ (experimento).

Este estudo apresenta uma estratégia bayesiana para analisar um grupo de experimentos completamente aleatorizados, onde o interesse do pesquisador é obter conclusões genéricas acerca do fator tratamento, considerado de efeito fixo, e num segundo plano, obter informações sobre os componentes da variância devidos ao fator experimento e à interação (tratamento) $\times$ (experimento), considerados de efeitos aleatórios.

Nas análises individuais é adotado o modelo de médias de caselas, dado por $y_{ir} = \theta_i + e_{ir}$, onde y_{ir} é a r -ésima observação obtida da unidade experimental que recebeu o tratamento i , θ_i é o efeito médio do i -ésimo tratamento e e_{ir} é o erro experimental associado à observação y_{ir} . Além disso, supõe-se que e_{ir} é distribuído como $N(0, \sigma^2)$. Na análise conjunta é adotado um modelo misto, isto é, $y_{ijr} = \theta_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijr}$, ($i = 1, \dots, K$; $j = 1, \dots, J$; $r = 1, \dots, R$), onde y_{ijr} é a r -ésima observação que recebeu o tratamento i no experimento j , β_j é o efeito do

j -ésimo experimento, γ_{ij} é o efeito da interação do nível i do fator tratamento com o j -ésimo experimento, e_{ijr} é o erro experimental associado à observação y_{ijr} e θ_i como já definido. Ademais, supõe-se que e_{ijr} é distribuído como $N(0, \sigma_e^2)$.

Com base nas suposições, são construídas, de modo adequado, as funções de verossimilhança que combinadas com as distribuições *a priori* não-informativas para os parâmetros dos modelos geram-se densidades *a posteriori*, com a restrição de que os componentes da variância não assumem valores negativos.

A partir da densidade conjunta *a posteriori* dos parâmetros do modelo. $(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2)$, isto é, $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2 | \mathbf{y})$, são determinadas densidades marginais para o vetor de parâmetros de locação $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)'$, $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$, e para combinações lineares destes, isto é, $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{D}\boldsymbol{\theta} = (\phi_1, \dots, \phi_{(K-1)})'$, $p(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{y})$ de modo conveniente, para tornar possível a verificação de evidências de contrastes de interesse do pesquisador, bem como, estudar o comportamento da variável resposta em relação aos níveis do fator tratamento através de polinômios ortogonais. Também é determinada a densidade conjunta *a posteriori* dos componentes de variância, $p(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2 | \mathbf{y})$, bem como, aproximações para as densidades marginais *a posteriori* destes componentes, $p(\sigma_e^2 | \mathbf{y})$, $p(\sigma_g^2 | \mathbf{y})$ e $p(\sigma_b^2 | \mathbf{y})$.

Um grupo de três experimentos de adubação com micronutrientes em cana-de-açúcar foi usado para ilustrar a metodologia Bayesiana e uma análise clássica foi também realizada para se comparar as metodologias.

A BAYESIAN ANALYSIS FOR A SERIES OF EXPERIMENTS IN COMPLETELY RANDOMIZED DESIGN

Author: João Gil de Luna

Adviser: Prof. Dr. Humberto de Campos

SUMMARY

Statistical analysis of a series of experiments is very common in agricultural experimentation. In this situation, the researcher is often interested not only in the determination of effects for the individual experiments given by particular choices of environments (agricultural year, seasons of the year, places, types of soils, etc.) but also in the general effects of treatments, environments and interaction.

The present study develops a Bayesian strategy to analyse a series of experiments in completely randomized design when the researcher is interested in getting generic conclusions about the treatment factor (a fixed factor) and in getting the components of variance for the experiment factor and for the interaction treatments $\times$ experiments (random effect).

For the individual analysis it is considered the model $y_{ir} = \theta_i + e_{ir}$, where y_{ir} is the r -th observation for the plot under the treatment i , θ_i is the mean effect of treatment i and e_{ir} is the error with $N(0, \sigma^2)$ distribution. A mixed model is considered for the analysis of series of experiments, that is, $y_{ijr} = \theta_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijr}$, where y_{ijr} is the observation for the r -th plot which received the treatment i , in the j -th experiment; β_j is the j -th experiment effect; γ_{ij} is the interaction effect and e_{ijr} is the error with $N(0, \sigma_e^2)$ distribution.

The likelihood functions are developed following the assumptions

and combined with the non-informative priori density for the model parameters generating the posteriori with the restriction that components of variance are non-negative. Using the posteriori joint density of the parameters, $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2 | \mathbf{y})$, the marginal density are developed for the parameter vector $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)'$, $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$, and for the linear combinations of them, that is, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_{(K-1)})'$, $p(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{y})$. This is used to test contrasts of experimenter's interest and to study the relationship between the response variable and the levels of the treatment factor using orthogonal polynomials. It is also developed the posteriori joint density for the components of variance, $p(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2 | \mathbf{y})$, as well as the approximations for the posterior marginal densities, $p(\sigma_e^2 | \mathbf{y})$, $p(\sigma_g^2 | \mathbf{y})$ e $p(\sigma_b^2 | \mathbf{y})$.

The Bayesian methodology was illustrated with a series of three experiments using micronutrients in sugarcane. The results were compared with classical analysis.

1 INTRODUÇÃO

Em **experimentação agronômica** é muito freqüente a estruturação de análises estatísticas de grupos de experimentos. Vários são os motivos que levam a essa prática. O desempenho da produção das plantas, por exemplo, depende do genótipo, do ambiente e da interação genótipo/ambiente. Genótipos e alguns outros fatores relativos a manejos, tais como, quantidade de adubo no solo, controle de pragas, densidade de plantio, preparo do solo, etc, podem ser controlados pelo pesquisador. Fatores ambientais, tais como, velocidade do vento, insolação, precipitação pluvial, taxas de nutrientes no solo, etc, além de serem, em geral, incontroláveis, podem modificar as produções das plantas de um determinado local ou época. Dada a impossibilidade de controle desses fatores, eles são considerados pelo pesquisador como fixados. Desse modo, com um único experimento, o pesquisador poderá obter conclusões apenas para os fatores controláveis, o que não ocorre com os fatores ambientais, que estão além do seu controle.

Os efeitos dos fatores ambientais incontroláveis no desempenho da produção das plantas cultivadas, são tão importantes quanto os fatores controláveis, e a avaliação quantitativa de seus efeitos é de fundamental importância, porque se espera que esses efeitos podem mudar com o local ou a época do cultivo. Além disso, o efeito do ambiente sobre a resposta das plantas aos tratamentos, poderá também ser avaliado. Em pesquisa agronômica, a maneira usada para medir o efeito do ambiente sobre a produção das plantas é através da repetição do experimento em vários locais ou em várias épocas ou ambos.

Um outro objetivo a ser alcançado com a prática da análise de

grupos de experimentos, associa-se ao interesse do pesquisador em inferir resultados da pesquisa para condições gerais de uma grande propriedade ou região. Nesse caso, ele deve considerar uma série de ensaios instalados em diferentes locais e em diferentes épocas e anos. Essa situação ocorre em programas de melhoramento genético de plantas onde o critério de lançamento de uma nova variedade comercial se baseia no comportamento relativo das cultivares em diversos locais e anos.

Observa-se, portanto, que a análise conjunta de experimentos procura fazer inferência sobre os efeitos do fator **tratamento** aplicados aos ensaios individuais e sobre o fator **experimento** que poderá estar representando na análise conjunta, épocas, estações do ano, tipos de solo, locais, etc, ou simplesmente repetições do ensaio.

É evidente que conclusões para cada situação experimental poderão ser obtidas, analisando-se individualmente cada ensaio e conclusões mais gerais, analisando-se o grupo conjuntamente.

Na ocasião do planejamento da pesquisa, algumas recomendações técnicas deverão ser seguidas, de modo a facilitar ou tornar possível, posteriormente, a verificação das hipóteses de interesse. Sob este aspecto, recomenda-se o balanceamento intra e inter ensaios e que o delineamento experimental seja o mesmo em todos eles. A não observância dessas características poderá levar a problemas de não estimabilidade das funções paramétricas que representam as hipóteses de interesse e, portanto, estas não poderão ser testadas.

Na literatura, do ponto de vista da inferência clássica, são encontrados vários trabalhos que se propõem a fornecer subsídios para análise de grupos de experimentos com as características recomendadas anteriormente e também para grupos, onde apenas alguns tratamentos são comuns a todos os ensaios. Porém, do ponto de vista **Bayesiano**, não se tem notícia de trabalhos dedicados especificamente a esse assunto, de tão grande importância na pesquisa.

A análise estatística de experimentos via **Inferência Bayesiana**, apresenta algumas vantagens importantes sobre a teoria clássica. Dentre elas podem

ser citadas:

- É possível incorporar na análise, informações *a priori* acerca dos tratamentos, obtidas de experimentos anteriores e as inferências serão feitas com base na densidade *a posteriori*, a qual combina informações do passado e do presente sobre os parâmetros de interesse;
- Facilidade de interpretação dos resultados ao enfocar questões práticas onde as comparações múltiplas não apresentam resultados satisfatórios;
- Possibilidade de avaliar a probabilidade *a posteriori* de que qualquer genótipo (ou tratamento) em particular tenha melhor produção ou que qualquer grupo de genótipos (ou tratamentos) seja melhor. Estas questões são de grande importância em programas de melhoramento onde se pretende selecionar o melhor genótipo ou selecionar o melhor subgrupo de um grande conjunto de genótipos.

Tendo em vista essas vantagens, pretende-se neste trabalho apresentar uma solução Bayesiana para a análise estatística de um grupo de experimentos completamente aleatorizados, onde o interesse do pesquisador é fazer inferência sobre os efeitos médios dos tratamentos, considerados fixos, sobre os efeitos de experimentos, considerados aleatórios e, ainda, avaliar o comportamento da variável resposta em relação aos tratamentos dentro dos experimentos.

O interesse no estudo deste caso, deve-se à grande frequência de sua ocorrência na prática e uma análise estatística mais elaborada trará, sem dúvida, contribuições importantes à pesquisa científica onde essa situação for encontrada.

Além do objetivo principal já citado acima, pretende-se alcançar, neste trabalho, os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar, as deduções teóricas, de modo a facilitar o desenvolvimento de outras análises empregando a metodologia Bayesiana;

- Definir apropriadamente os modelos, bem como, discutir as pressuposições usuais acerca de seus componentes, desenvolvendo-se metodologias para verificação de hipóteses sobre elas;
- Apresentar uma discussão relativa à incorporação de informação *a priori* para os parâmetros envolvidos no modelo, de modo a tornar clara a escolha desta, para o modelo em questão;
- Propor uma forma adequada de se incorporar a informação presente, através da verossimilhança, para determinação da densidade *a posteriori*;
- Discutir as propriedades relativas aos parâmetros sobre os quais se deseja fazer inferência, como também, relativas às combinações lineares deles;
- Realizar as análises estatísticas de um grupo de experimentos inteiramente casualizados, empregando as duas metodologias: a Clássica e a Bayesiana, discutindo-se os resultados obtidos, paralelamente.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Análise de Grupo de Experimentos

Os primeiros trabalhos contemplando a análise de grupo de experimentos, são devidos a COCHRAN (1937) e YATES & COCHRAN (1938). A técnica tornou-se possível, após BARTLETT (1937) ter proposto um teste para verificar a homogeneidade das variâncias de populações normais, a qual é uma condição necessária ao agrupamento dos ensaios numa análise de variância. Este assunto, é também abordado em vários livros textos que tratam de delineamentos experimentais. Dentre eles, COCHRAN & COX (1957), KEMPTHORNE (1973), GOMEZ & GOMEZ (1984), CAMPOS (1984), GOMES (1985).

A análise de grupo de experimentos sugerida por COCHRAN & COX (1957), considera o caso em que os ensaios individuais são instalados em blocos completos ao acaso com v tratamentos, ℓ locais e a anos, sendo que os ℓ locais são comuns a todos os anos. O modelo utilizado para análise, leva em conta apenas as médias dos tratamentos em cada local.

Em situação semelhante, KEMPTHORNE (1973) sugere um modelo onde todas as observações de cada experimento individual são consideradas na análise conjunta.

GOMEZ & GOMEZ (1984) apresentam a análise conjunta como uma técnica utilizada em experimentação agrônômica para controlar os efeitos de fatores que fogem ao controle do pesquisador. Nesse sentido, os autores consideram como fatores: local, ano, tipo de solo, estação do ano, etc., além dos tratamentos considerados em cada ensaio.

CAMPOS (1984), dentre outros, apresenta uma análise conjunta de experimentos em blocos ao acaso com apenas alguns tratamentos comuns a todos os ensaios. É, sem dúvida, uma sugestão bastante aplicável em programas de melhoramento genético de plantas cultiváveis.

GOMES (1985) apresenta as análises de grupos de experimentos inteiramente ao acaso e de experimentos em blocos ao acaso e, ao contrário de GOMEZ & GOMEZ (1984), o autor considera local, ano, tipo de solo, estação do ano, etc., indistintamente, como ensaios e não como fontes de variação nas quais se tem interesse em tirar conclusões sobre os efeitos delas.

A análise de grupo de experimentos pressupõe, além de normalidade para os erros experimentais e aditividade dos componentes no modelo, a homogeneidade das variâncias dos erros residuais dos ensaios envolvidos. Nesse sentido, COCHRAN & COX (1957) e KEMPTHORNE (1973) afirmam que o teste proposto por BARTLETT (1937) pode ser empregado para verificar essa hipótese. Contrariamente, BOX (1953), em estudo sobre não-normalidade e teste sobre variâncias, conclui que o teste de Bartlett é tão sensível à falta de normalidade que não deve ser considerado. No entanto, segundo BOX (1954), se em todos os experimentos considerados no grupo, os tratamentos forem igualmente repetidos, e a relação entre o maior e o menor quadrado médio residual não for maior que *quatro*, a análise poderá ser realizada sem grandes prejuízos para a validade do teste de Bartlett. Recomenda ainda, que se essa relação for superior a *quatro*, os experimentos devem ser agrupados em sub-grupos cujos quadrados médios residuais sejam homogêneos.

Uma sugestão proposta por COCHRAN (1954), bastante utilizada na prática, e que é recomendada por GOMES (1985), admite o agrupamento de ensaios onde a relação entre os quadrados médios residuais é superior a *quatro*. Neste caso, procede-se a um ajuste dos graus de liberdade.

Observa-se, portanto, que a análise de grupo de experimentos é um tema bastante estudado do ponto de vista da inferência clássica. Porém, ainda não é um assunto completamente esgotado devido a diversidade da natureza dos

problemas práticos. E, deste modo, novas teorias poderão ser implementadas para solucionar problemas específicos.

Nos últimos anos, a teoria Bayesiana tem sido bastante difundida nos meios científicos das diversas áreas do conhecimento. Porém na literatura estatística não foi encontrado nenhum artigo que tratasse a análise de grupo de experimentos fundamentada nessa teoria.

2.2 A Natureza do Método Bayesiano

Conforme BOX & TIAO (1973), a natureza do método Bayesiano compreende, dentre outros, os seguintes aspectos:

2.2.1 O Teorema de Bayes

Supõe-se que $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_n)$ é um vetor de n observações cuja distribuição de probabilidade $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ depende dos valores de k parâmetros $\boldsymbol{\theta}' = (\theta_1, \dots, \theta_k)$. Supõe-se também, que $\boldsymbol{\theta}$ tem uma distribuição de probabilidade $p(\boldsymbol{\theta})$. Então.

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})p(\mathbf{y}). \quad (1)$$

Dadas as observações $\mathbf{y}$, a distribuição condicional de $\boldsymbol{\theta}$ é

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}. \quad (2)$$

Na expressão (2) $p(\mathbf{y}) = W^{-1}$ é chamada de constante normalizadora e é dada por

$$p(\mathbf{y}) = E[p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})] = W^{-1} = \begin{cases} \int p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}, & \boldsymbol{\theta} \text{ contínuo} \\ \sum p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}), & \boldsymbol{\theta} \text{ discreto,} \end{cases} \quad (3)$$

onde a integral ou soma é tomada sobre a amplitude admissível de $\boldsymbol{\theta}$, e onde $E[f(\boldsymbol{\theta})]$

é a esperança matemática de $f(\boldsymbol{\theta})$ relativa à distribuição $p(\boldsymbol{\theta})$. Dessa forma, pode-se escrever (2), alternativamente, como

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = Wp(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}) \quad (4)$$

A expressão (2) ou equivalente em (4), é normalmente conhecida como o **Teorema de Bayes**. Nestas expressões, $p(\boldsymbol{\theta})$, diz o que é conhecido sobre $\boldsymbol{\theta}$ sem o conhecimento dos dados, e é chamada de distribuição *a priori* de $\boldsymbol{\theta}$, ou a distribuição de $\boldsymbol{\theta}$ *a priori*. Correspondentemente, $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ diz o que é conhecido sobre $\boldsymbol{\theta}$ dado o conhecimento das observações, e é chamada distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$. $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$, encerra todo conhecimento, do "passado" e do "presente", acerca de $\boldsymbol{\theta}$. É com base nesta distribuição que os Estatísticos Bayesianos fazem todas as inferências sobre o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. É importante notar que uma vez conhecida a densidade *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$, pode-se obter "tudo" sobre ele, a saber, média, moda, mediana, variância, intervalos de credibilidades, fazer testes de hipóteses, etc. A quantidade W é simplesmente uma constante normalizadora para garantir que a densidade *a posteriori*, $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$, seja uma função de densidade própria.

2.2.2 O Teorema de Bayes e a Função de Verossimilhança

Dadas as observações $\mathbf{y}$, $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ em (4) pode ser considerada como uma função não de $\mathbf{y}$, mas sim de $\boldsymbol{\theta}$. Quando assim for considerada, ela é chamada de função de verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$ dado $\mathbf{y}$ e pode ser escrita como $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Assim, pode-se escrever a fórmula de Bayes como

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})p(\boldsymbol{\theta}) \quad (5)$$

Em outras palavras, o teorema de Bayes diz que a distribuição de probabilidade de $\boldsymbol{\theta}$ posterior aos dados $\mathbf{y}$ é proporcional ao produto da verossimilhança pela distribuição *a priori* de $\boldsymbol{\theta}$.

A função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ representa na fórmula de Bayes, a função através da qual os dados modificam o conhecimento *a priori* sobre $\boldsymbol{\theta}$. Ela

pode ser compreendida como representante da informação sobre θ proveniente dos dados.

2.2.3 A Natureza Sequencial do Teorema de Bayes

A expressão (5) é uma formulação matemática recorrente de como o conhecimento prévio pode ser combinado com os novos conhecimentos. Sem dúvida, o teorema de Bayes permite que contínuas informações acerca do conjunto de parâmetros θ sejam incorporadas a $p(\theta|\mathbf{y})$ à medida que mais observações forem tomadas. Desse modo, tem-se que, para uma amostra inicial de observações $\mathbf{y}_1$, a fórmula de Bayes será dada por

$$p(\theta|\mathbf{y}_1) \propto p(\theta)\ell(\theta|\mathbf{y}_1). \quad (6)$$

Se for obtida uma segunda amostra de observações $\mathbf{y}_2$, distribuída independentemente da primeira amostra $\mathbf{y}_1$, então

$$p(\theta|\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \propto p(\theta)\ell(\theta|\mathbf{y}_1)\ell(\theta|\mathbf{y}_2) = p(\theta|\mathbf{y}_1).\ell(\theta|\mathbf{y}_2). \quad (7)$$

A expressão dada em (7) é exatamente a mesma de (6), exceto que $p(\theta|\mathbf{y}_1)$, a distribuição *a posteriori* de θ dado $\mathbf{y}_1$, faz o papel da distribuição *a priori* para a segunda amostra. Obviamente, esse processo pode ser repetido várias vezes. Em particular, para n observações independentes, a distribuição *a posteriori* pode, se desejada, ser calculada após cada nova observação, desde que no m -ésimo estágio a verossimilhança associada à m -ésima observação seja combinada com a distribuição *a posteriori* de θ após a $(m - 1)$ -ésima observação para gerar a nova distribuição *a posteriori*, ou seja,

$$p(\theta|y_1, \dots, y_m) \propto p(\theta|y_1, \dots, y_{m-1}).\ell(\theta|y_m), \quad m = 2, \dots, n \quad (8)$$

onde $p(\theta|\mathbf{y}_1)$ é de acordo como já definida em (6)

Dessa forma, o teorema de Bayes descreve, de maneira fundamental, o processo de aprender por experiência, e mostra como o conhecimento sobre o estado de natureza representado por θ é modificado à medida que novos dados são avaliados.

2.3 Inferência Bayesiana Básica

Em livro texto com primeira edição em 1939, JEFFREYS (1961) sintetiza e amplia os conceitos relativos à inferência indutiva e utiliza o teorema de Bayes para formalizar diversos empregos da estatística matemática sob esse novo enfoque. O autor é considerado como o precursor de métodos alternativos à estatística clássica.

Uma importante contribuição para inferência Bayesiana é, sem dúvida, o trabalho de BARNARD (1958) o qual apresenta uma edição mais recente dos trabalhos de Thomas Bayes, de 1763, onde é desenvolvida uma série de proposições relativas à adição e multiplicação de probabilidades e conclui com o teorema da probabilidade inversa.

LINDLEY (1965) dedica livro texto ao enfoque Bayesiano, sendo que a primeira parte aborda conceitos da teoria das probabilidades, com ênfase especial à interpretação do teorema de Bayes e suas aplicações. A segunda parte é dedicada à teoria Bayesiana com aplicações, com resultados comparados com aqueles da inferência clássica.

ZACKS (1971) apresenta uma abordagem mais profunda sobre os métodos da inferência estatística, incluindo no seu conteúdo dedicações ao processo minimax e ao método Bayesiano.

LINDLEY (1972) apresenta uma monografia abordando os mais variados aspectos da inferência Bayesiana e compara a eficiência deste enfoque com a teoria clássica. Apresenta também as conquistas e limitações com base nos trabalhos até então publicados. É um artigo de grande importância, pois, sintetiza as conquistas do método Bayesiano até aquele momento e apresenta, no seu final,

indicação bibliográfica com 270 referências.

Os fundamentos do método Bayesiano, nos seus aspectos gerais, e os elementos necessários a um estudo inicial, são encontrados nos trabalhos de STUART & ORD (1961), BOX & TIAO (1973,1992), MOOD & GRAYBILL (1974), BAKMAN & NETO (1980), SIMÕES (1981), PEREIRA & VIANA (1982), DEGROOT (1988), HOGG & CRAIG (1989), dentre outros.

Além dos trabalhos citados no parágrafo anterior, ao leitor que desejar aprofundar seus conhecimentos relativos aos métodos Bayesianos, é recomendável a leitura dos livros texto, publicados mais recentemente, com autoria de LEE (1992), O'HAGAN (1994) e BERNARDO & SMITH (1994). Estes três trabalhos apresentam a teoria Bayesiana com maior profundidade do que os anteriores.

2.4 A Informação *a Priori*

Com relação à distribuição *a priori* $p(\theta)$, ela deverá representar o conhecimento (ou desconhecimento) do Pesquisador/Estatístico a respeito do comportamento probabilístico de θ . Neste sentido, LEANDRO (1994), apresenta três situações de escolha da distribuição *a priori* para o(s) parâmetro(s), as quais são descritas a seguir.

Distribuições Ajustadas às Frequências Relativas: São baseadas em quantidades significativas de evidências, onde distribuições de frequências, de valores de θ observados no passado, sejam determinadas. A partir destas, pode-se escolher uma distribuição *a priori* para o vetor de parâmetros θ apropriadamente, sendo possível selecionar um elemento da família de conjugadas naturais. Isto é, uma *priori* para θ que, ao ser combinada com a verossimilhança, gera uma densidade *a posteriori* para θ que pertence à mesma família de densidades de probabilidade.

Distribuições Ajustadas a Expectativas Subjetivas: São empregadas em situações onde não se tem nenhuma base objetiva sólida para a escolha da

distribuição *a priori* de θ . Neste caso, $p(\theta)$ representará apenas as expectativas subjetivas do pesquisador. Sendo assim, cabe ao Estatístico esclarecer ao pesquisador as implicações de sua escolha na distribuição *a posteriori*.

Distribuições Objetivas: Este tipo de *priori* é admitida quando o Pesquisador acha que o seu conhecimento sobre θ não é suficiente para avaliá-lo, ou ainda, quando ele deseja expressar através da *priori* sua indiferença ou ignorância a respeito do comportamento probabilístico do parâmetro θ . Neste caso, deve ser admitida *priori's* não-informativas.

RAIFFA & SCHLAIFFER (1961), em livro texto, apresentam uma forma especial de distribuição *a priori* para representar a informação que se obtém mediante experimentos anteriores. É chamada de *priori* conjugada e tem a característica de que, ao ser combinada com a verossimilhança, gera uma densidade *a posteriori* que pertence à mesma família de distribuições.

TIAO & ZELLNER (1964) citam vários trabalhos que empregaram o teorema de Bayes na inferência estatística e destacam os trabalhos de JEFFREYS (1961), RAIFFA & SCHLAIFFER (1961), BOX & TIAO (1962,1964). Os autores afirmam, ainda, que uma das vantagens da inferência Bayesiana é que conhecimentos *a priori* sobre os parâmetros de interesse podem ser combinados com informações obtidas do experimento. Estes conhecimentos podem surgir de considerações teóricas gerais assim como de resultados prévios ou experimentos em andamento, e são usualmente, um componente importante para o pesquisador compreender melhor o que está em estudo. O trabalho ilustra como os conhecimentos *a priori* podem ser utilizados em conjunto com as informações amostrais ao fazer inferência sobre os parâmetros de um modelo de regressão linear simples. Em particular, o trabalho contempla o uso da informação de uma amostra como o conhecimento *a priori* na análise de uma amostra subsequente.

OWEN (1970) trabalha com um modelo de blocos casualizados onde o interesse é fazer inferência sobre os efeitos médios dos tratamentos. Os efeitos dos blocos foram considerados na análise como parâmetros de perturbação. Assumindo

para os erros uma distribuição esfericamente normal multivariada $N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$ e a distribuição *a priori* para os parâmetros do modelo aproximadamente independentes e localmente uniformes, o autor determina a função de densidade *a posteriori* para os efeitos médios dos tratamentos e as inferências foram feitas a partir dela. Com uma função de perda quadrática, um algoritmo foi determinado para a alocação ótima dos tratamentos sobre uma amostra particular.

Mais tarde, ZELLNER (1971) apresenta a importância das regras de JEFFREYS (1961) para inferência indutiva e discute suas implicações no processo indutivo. Além disso, dedica todo conteúdo do livro aos modelos econométricos, com bastante aplicações.

BOX & TIAO (1973) também discutem as idéias de JEFFREYS (1961), sobre a distribuição *a priori* para representar o estado de ausência de informação (ou estado de ignorância) a respeito do comportamento probabilístico dos parâmetros, o estudo abrange os casos uniparamétrico e multiparamétrico. É, talvez, a discussão mais difundida sobre *priori* não-informativa. Trabalhando com esse tipo de *priori* para os parâmetros, os autores desenvolvem a teoria Bayesiana para o modelo com um fator, abordando duas situações: (a) o fator é de efeito fixo; (b) o fator é de efeito aleatório. Além disso, desenvolvem a teoria Bayesiana para um modelo hierárquico de efeito aleatório com três componentes de variância.

Considerando uma *priori* informativa Normal-Gama para os parâmetros do modelo, BROEMELING (1985) apresenta em seu livro texto o desenvolvimento teórico para análises estatísticas, do ponto de vista Bayesiano, para os modelos inteiramente casualizado com um fator, blocos ao acaso, modelos para experimentos inteiramente casualizado com uma covariável e modelos de regressão.

YE & BERGER (1993) estudando um modelo de regressão exponencial, afirmam que há dificuldades para se fazer inferência acerca dos parâmetros da regressão no enfoque clássico. Tais dificuldades também são enfrentadas na aproximação Bayesiana com *priori* não informativa. Uma *priori* de referência é adotada no artigo para produzir inferências satisfatórias. Estimação e regiões de credibilidade

são determinadas a partir de um exemplo especial.

CLARKE & WASSERMAN (1993) abordam o conflito entre *priori's* que são não-informativas para os parâmetros de interesse versus *priori's* que são não-informativas para todos os parâmetros envolvidos no modelo. A pesquisa leva os autores a maximizar uma função que tinha dois termos: uma aproximação assintótica para a distância de Kullback-Leibler esperada padronizada entre a *priori* marginal e *posteriori* marginal dos parâmetros de interesse, e, um termo penalizador medindo a distância da *priori a priori* de Jeffreys. Uma constante positiva multiplicando o segundo termo determina o termo ausente entre não informação para os parâmetros de interesse e a não informação para todos os parâmetros do modelo. Os autores constataram que conforme aumenta a constante, a *priori* aproxima-se da *priori* de Jeffreys e quando a constante tende para zero a *priori* torna-se degenerada. Exceto para alguns casos especiais, essa *priori* não tem uma forma fechada, mas apresenta um algoritmo bastante simples para determiná-la.

LISEO (1993) afirma que o problema de parâmetros *nuisance* é tratado de diferentes maneiras. As técnicas de verossimilhança padrão, tais como perfil de verossimilhança e suas modificações, são comparadas pelo autor com a análise Bayesiana baseada em *priori* de referência. O autor apresenta exemplos numéricos para ilustrar o que acontece em problemas multiparamétricos e discute as vantagens e desvantagens das técnicas Bayesiana e verossimilhança.

BESAG & HIGDON (1993) trabalhando com experimentos agrícolas com delineamentos espaciais, assumem que os dados são provenientes de populações normais, pressupõem *priori* informativa normal para os efeitos dos tratamentos e fertilidade das unidades experimentais e *priori* informativa gama para as variâncias associadas aos efeitos do modelo.

Nos últimos anos, as pesquisas em inferência Bayesiana têm dado bastante atenção ao estudo de *priori's* robustas. Para mostrar a importância e dimensão dessa tendência, BERGER (1994), editou no *Journal of Statistical Planning and Inference*, em edição especial, 16 importantes trabalhos sobre o assunto.

2.5 Modelos Lineares Bayesianos

BOX & TIAO (1965) apresentam a teoria Bayesiana para analisar um experimento associado a um modelo linear com um fator de efeito fixo admitindo-se que os dados do ensaio são provenientes de populações normais com *priori* não informativa para (θ, σ^2) , onde θ e $\log\sigma$ são aproximadamente independentes e localmente uniformes. Ainda, para esse mesmo modelo, TIAO & TAN (1965), estudaram o caso onde o efeito do fator foi considerado aleatório, os dados também provenientes de populações normais e a distribuição *a priori* para $(\mu, \sigma_a^2, \sigma_e^2)$ não-informativa com $(\mu, \log\sigma_a, \log\sigma_e)$ aproximadamente independentes e localmente uniformes. Com essas suposições eles desenvolvem toda teoria necessária para se fazer inferência sobre os componentes de variância e algumas relações entre eles. Posteriormente, BOX & TIAO (1971), além dos dois artigos anteriormente citados, discutem modelos para experimentos hierárquicos com fatores aleatórios, para experimentos com dois fatores aleatórios cruzados, modelo de regressão e o modelo linear geral. Ainda, DRAPER & GUTTMAN (1966), BOX & TIAO (1968), PORTNOY (1971), dentre outros, apresentaram sugestões teóricas, do ponto de vista Bayesiano, para solucionar problemas relativos ao modelo associado a um ensaio completamente aleatorizado com um fator.

TIAO & DRAPER (1968) apresentam soluções analíticas para as análises estatísticas do ponto de vista Bayesiano para experimentos com dois fatores. Nesse sentido, os autores consideraram os modelos associados aos ensaios em blocos completos ao acaso, como também, em blocos incompletos. Do mesmo modo, BROEMELING (1985) considera em seu livro texto a mesma metodologia para solução de iguais problemas. Outros trabalhos relacionados com o emprego da inferência Bayesiana na experimentação agrícola que poderão ser recomendados, são devidos a BESAG & HIGDON (1993) e LAUD & IBRAHIN(1994).

2.6 Testes Bayesianos de Homogeneidade de Variâncias

BOX & TIAO (1964) estudam os fundamentos teóricos Bayesianos para o teste de homogeneidade das variâncias de populações normais, proposto por BARTLETT (1937). Os autores tornam esse artigo, parte integrante de um livro texto em 1973, onde apresentam, além da teoria, um exemplo prático para ilustrar o método.

Dada a sensibilidade do teste de Bartlett à falta de normalidade das populações amostradas, SAMIUDDIN (1976) propõe um teste Bayesiano mais adequado a situações de não-normalidade. Nesse trabalho, o autor expõe os fundamentos teóricos do teste e apresenta exemplos ilustrativos, comparando os resultados obtidos pelo teste proposto com as duas versões do teste de Bartlett.

3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1 Generalidades

Na ocasião do planejamento de um ensaio, o pesquisador deverá ter ciência das hipóteses básicas a serem verificadas. Esta preocupação é de fundamental importância no que se refere a considerar se os fatores envolvidos nos ensaios serão de efeitos fixos ou de efeitos aleatórios. Quando um fator é considerado de efeito fixo, em geral, o pesquisador estará interessado em construir densidades *a posteriori* para os efeitos médios dos K tratamentos $(\theta_1, \dots, \theta_K)$ ou para combinações lineares desses parâmetros e testar hipóteses sobre eles ou sobre combinações lineares deles. Caso um fator seja considerado de efeito aleatório, o interesse do pesquisador estará mais voltado a determinação de densidades *a posteriori* para os componentes de variância, relações ou combinações lineares deles. Finalmente, se o modelo estatístico associado ao ensaio envolver fatores fixos e aleatórios, estes devem ser tratados adequadamente conforme a natureza de cada um.

Neste trabalho, pretende-se apresentar uma análise Bayesiana para um grupo de J experimentos inteiramente casualizados, cada um com K tratamentos repetidos R vezes, onde o fator tratamento será considerado de efeito fixo, o fator experimento e a interação tratamento $\times$ experimento serão considerados de efeitos aleatórios. Além disso, recomenda-se que as análises estatísticas sejam realizadas quando as variâncias dos erros experimentais dos J experimentos envolvidos, são homogêneas. Caso isso não ocorra, deve-se agrupá-los em subgrupos homogêneos, conforme recomendação de BOX (1953).

Uma análise conjunta de experimentos é precedida das análises in-

dividuais de cada ensaio e este procedimento será também adotado, neste trabalho.

3.2 As Análises Individuais

3.2.1 O Modelo Estatístico

O modelo estatístico associado a um experimento inteiramente casualizado, com um fator em K níveis, repetidos R vezes, é dado por

$$y_{ir} = \mu + \alpha_i + e_{ir}, \quad i = 1, \dots, K \quad e \quad r = 1, \dots, R, \quad (9)$$

onde y_{ir} é a r -ésima observação da unidade experimental que recebeu o tratamento i , μ é a média geral, α_i é o efeito do i -ésimo tratamento, aqui considerado fixo, e e_{ir} é o erro experimental associado à observação y_{ir} .

Alternativamente, pode-se trabalhar com o modelo de médias das caselas, o qual é dado por

$$y_{ir} = \theta_i + e_{ir}, \quad i = 1, \dots, K \quad e \quad r = 1, \dots, R, \quad (10)$$

onde θ_i corresponde à resposta média do tratamento i , e os demais termos no modelo, conforme já definidos.

Neste trabalho preferiu-se o modelo (10) por ser matematicamente mais conveniente. Sua forma matricial é como segue

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (11)$$

onde $\mathbf{y}$ é um vetor de realizações de variáveis aleatórias com dimensões $n \times 1$, $n = KR$; $\mathbf{X}$ é uma matriz de constantes (ou a matriz de planejamento) com dimensões $n \times K$; $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)'$ é o vetor dos parâmetros com dimensões $K \times 1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um vetor $n \times 1$ dos erros experimentais. Dessa forma, (11) tem o seguinte aspecto,

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1R} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2R} \\ \vdots \\ y_{K1} \\ y_{K2} \\ \vdots \\ y_{KR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1R} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{2R} \\ \vdots \\ e_{K1} \\ e_{K2} \\ \vdots \\ e_{KR} \end{bmatrix}$$

Além disso, supõe-se que no modelo (11), ε tem distribuição normal esfericamente multivariada $N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$ e que a matriz X tem posto K .

3.2.2 A Função de Verossimilhança

Levando-se em consideração o modelo (11) e a suposição de independência e normalidade dos erros experimentais, isto é,

$$\varepsilon = \mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n) \iff \mathbf{y} \sim N_n(X\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 I_n), \quad (12)$$

então, a distribuição conjunta de $\mathbf{y}$ dado $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$, será

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta})' (\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}) \right]. \quad (13)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}) &= (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{y}} - X\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{y}} - X\boldsymbol{\theta}) = \\
&= [\nu S^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})'X'X(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})],
\end{aligned} \tag{14}$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{y}$ é o estimador de máxima verossimilhança ou de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\theta}$ (o vetor dos efeitos médios dos tratamentos ou parâmetros de locação), $\hat{\mathbf{y}} = X\hat{\boldsymbol{\theta}}$ são estimadores das observações individuais (valores preditos), $\nu = K(R - 1)$ são os graus de liberdade associados ao resíduo e $S^2 = m_e = \frac{1}{\nu}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ é o estimador da variância residual cujo valor do quadrado médio residual é sua estimativa.

Dessa forma (13) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\nu S^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})'X'X(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})]\right\}, \\
\sigma^2 &> 0, \quad -\infty < \theta_i < +\infty, \quad i = 1, \dots, K.
\end{aligned} \tag{15}$$

Agora, a função de verossimilhança fica,

$$\ell(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2|\mathbf{y}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\nu S^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})'X'X(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})]\right\}. \tag{16}$$

Por BOX & TIAO (1973), as estatísticas $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e S^2 têm as seguintes propriedades:

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é um vetor $K \times 1$ de estatísticas conjuntamente suficientes para $\boldsymbol{\theta}$ se σ^2 for conhecido;
- $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e S^2 são estatísticas conjuntamente suficientes para $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$;
- $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tem distribuição normal multivariada $N_K(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2(X'X)^{-1})$;
- νS^2 é distribuída independentemente de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ como $\sigma^2\chi_{\nu}^2$.

Devido ao fato de que na experimentação agrônômica σ^2 é raramente conhecida, decidiu-se neste trabalho focar apenas o caso onde esta é desconhecida.

3.2.3 A Função de Distribuição *a Priori* de (θ, σ^2)

Neste trabalho é considerado o caso onde o conhecimento do Pesquisador acerca dos parâmetros (θ, σ^2) não é suficiente para avaliar o comportamento probabilístico destes parâmetros. Esta é uma situação bastante realística em se tratando de experimentos agrônômicos. Por esta razão decidiu-se admitir uma *priori* não-informativa para (θ, σ^2) , onde $(\theta, \log \sigma)$ são aproximadamente independentes e localmente uniformes, isto é, conforme BOX & TIAO (1973),

$$p(\theta, \sigma^2) \doteq p(\theta)p(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}. \quad (17)$$

3.2.4 A Função de Distribuição Conjunta *a Posteriori* de (θ, σ^2)

Combinando a verossimilhança com a distribuição *a priori*, conforme a fórmula de Bayes em (4), tem-se

$$\begin{aligned} p(\theta, \sigma^2 | y) &\propto p(\theta, \sigma^2) p(y | \theta, \sigma^2) \\ &\propto (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + (\theta - \hat{\theta})' X' X (\theta - \hat{\theta})] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} p(\theta, \sigma^2 | y) &= W (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + (\theta - \hat{\theta})' X' X (\theta - \hat{\theta})] \right\}, \\ \sigma^2 &> 0, \quad -\infty < \theta_i < +\infty, \quad i = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (19)$$

onde W é a constante normalizadora, obtida por

$$\begin{aligned} W^{-1} &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{\nu s^2}{2\sigma^2} \right\} \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\theta - \hat{\theta})' X' X (\theta - \hat{\theta}) \right\} d\theta d\sigma^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Mas, sendo $\hat{\theta} \sim N_K(\theta, \sigma^2 (X' X)^{-1})$, então

$$\frac{|X' X|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{K}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\theta - \hat{\theta})' X' X (\theta - \hat{\theta}) \right\} d\theta = 1, \quad (21)$$

então

$$W^{-1} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{K}{2}}}{|X' X|^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)+\frac{K}{2}} \exp \left\{ -\frac{\nu s^2}{2\sigma^2} \right\} d\sigma^2. \quad (22)$$

Fazendo a substituição $U = \sigma^2/\nu S^2$ e integrando, encontra-se

$$W = \frac{|X'X|^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}(\nu S^2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}}. \quad (23)$$

Finalmente, substituindo-se (23) em (19) obtém-se a distribuição conjunta *a posteriori* de $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$, a saber,

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \mathbf{y}) &= \\ &= \frac{|X'X|^{\frac{1}{2}}(\nu S^2)^{\frac{\nu}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{K}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}} (\sigma^2)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\nu S^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' X' X (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})] \right\}, \\ \sigma^2 &> 0, \quad -\infty < \theta_i < +\infty, \quad i = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (24)$$

3.2.5 Distribuição Marginal *a Posteriori* de σ^2

A distribuição marginal *a posteriori* de σ^2 é obtida integrando-se (24) em relação a $\boldsymbol{\theta}$, isto é,

$$\begin{aligned} p(\sigma^2 | \mathbf{y}) &= \frac{(\nu S^2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}} (\sigma^2)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{\nu S^2}{2\sigma^2} \right\} \times \\ &\quad \underbrace{\frac{|X'X|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{K}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' X' X (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\} d\boldsymbol{\theta}}_{=1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Portanto,

$$p(\sigma^2 | \mathbf{y}) = \frac{(\nu S^2)^{-1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}} \left(\frac{\sigma^2}{\nu S^2} \right)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{\nu S^2}{2\sigma^2} \right\} I_{(0,\infty)}(\sigma^2) \quad (26)$$

e segue que

$$\begin{aligned} E(\sigma^2 | \mathbf{y}) &= \frac{\nu S^2}{\nu - 1}, \quad Var(\sigma^2 | \mathbf{y}) = \frac{2(\nu S^2)^2}{(\nu - 2)^2(\nu - 4)}, \\ Mo(\sigma^2 | \mathbf{y}) &= \frac{\nu S^2}{\nu + 2} \quad e \quad \int_0^{Md} p(\sigma^2 | \mathbf{y}) d\sigma^2 = 0,5. \end{aligned}$$

Fazendo a transformação $Z = \frac{\nu S^2}{\sigma^2}$, conclui-se que a distribuição *a posteriori* de Z é

$$p\left(Z = \frac{\nu S^2}{\sigma^2} | \mathbf{y}\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}} z^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-z/2} I_{(0,\infty)}(z), \quad (27)$$

a qual é a densidade de uma variável aleatória com distribuição de qui-quadrado com ν graus de liberdade, ou seja, $Z = \frac{\nu s^2}{\sigma^2} = \frac{SQRes.}{\sigma^2}$ é distribuída *a posteriori* como uma χ^2_ν . Intervalos de credibilidade *a posteriori* de conteúdo $(1 - \alpha)$ de probabilidade para σ^2 poderão ser feitos através de Z utilizando as tabelas usuais da distribuição de χ^2 . Assim, para $0 < \eta_1 < \eta_2 < \infty$, tem-se

$$Pr \left\{ \eta_1 < \frac{\nu s^2}{\sigma^2} | \mathbf{y} < \eta_2 \right\} = 1 - \alpha \quad (28)$$

e conseqüentemente

$$Pr \left\{ \frac{\nu s^2}{\eta_2} < \sigma^2 | \mathbf{y} < \frac{\nu s^2}{\eta_1} \right\} = 1 - \alpha, \quad (29)$$

onde η_1 e η_2 são obtidos das tabelas usuais da distribuição da qui-quadrado com ν graus de liberdade.

3.2.6 A Distribuição Marginal *a Posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$

De modo análogo, a distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ é obtida integrando-se (24) em relação a σ^2 , ou seja,

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{|X'X|^{\frac{1}{2}} (\nu s^2)^{\frac{\nu}{2}}}{(2\pi)^{\frac{K}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2}) 2^{\frac{\nu}{2}}} \int_0^\infty (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{M(\boldsymbol{\theta})}{2\sigma^2} \right\} d\sigma^2, \quad (30)$$

onde $M(\boldsymbol{\theta}) = [\nu s^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' X' X (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})]$, $n = \nu + K$. Fazendo a mudança de variável $\sigma^2 = M(\boldsymbol{\theta}) U$ em (30) e fazendo algumas operações algébricas encontra-se a densidade *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$, isto é,

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+K}{2}) |X'X|^{\frac{1}{2}} s^{-K}}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^K \Gamma(\frac{\nu}{2}) \nu^{\frac{K}{2}}} \left[1 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' \frac{X'X}{\nu s^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right]^{-\frac{\nu+K}{2}} \\ -\infty < \theta_i < +\infty, \quad i = 1, \dots, K, \quad (31)$$

a qual é a densidade de uma t-Student multivariada K-dimensional com média $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, matriz de dispersão $s^2(X'X)^{-1}$ e ν graus de liberdade. Esta densidade é comumente denotada por $\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y} \sim t_K(\hat{\boldsymbol{\theta}}, s^2(X'X)^{-1}, \nu)$.

3.2.7 Região de Alta Densidade *a Posteriori*

Para facilitar as discussões posteriores acerca do vetor de parâmetros θ , achou-se conveniente introduzir, neste momento, o conceito de **Intervalos ou Região de Alta Densidade *a posteriori*** (intervalos ou Regiões H.P.D.).

Do ponto de vista Bayesiano, todos os problemas inferenciais acerca de θ poderão ser resolvidos através da densidade *a posteriori* $p(\theta|\mathbf{y})$.

Uma maneira de pesquisar a informação contida em $p(\theta|\mathbf{y})$ é observar que, apesar da densidade ser não nula sobre toda amplitude do espaço paramétrico, há uma parte substancial do espaço onde a densidade é negligenciável. Assim, é possível delimitar uma região de interesse (ou regiões), relativamente pequena, a qual contém a maior parte das probabilidades *a posteriori*. Obviamente existem inúmeras maneiras de se escolherem tais regiões. Em alguns casos, uma região pode ser escolhida pela natureza do problema. Quando este não for o caso, pode-se decidir que propriedades devem ter estas regiões. Tais como os intervalos ou regiões H.P.D. definidos por BOX & TIAO (1973) como,

Definição: Seja $p(\theta|\mathbf{y})$ uma função de densidade *a posteriori*. Uma região $\mathcal{R}$ no espaço paramétrico de θ é chamada região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se

$$(a) \Pr\{\theta \in \mathcal{R}|\mathbf{y}\} = 1 - \alpha,$$

$$(b) \text{ Para } \theta_1 \in \mathcal{R} \text{ e } \theta_2 \notin \mathcal{R}, p(\theta_1|\mathbf{y}) \geq p(\theta_2|\mathbf{y}).$$

Com as propriedades,

1. Pela definição tem-se que para um dado conteúdo $(1 - \alpha)$, a região H.P.D. tem o menor volume possível no espaço paramétrico de θ ;
2. Suponha que $p(\theta|\mathbf{y})$ seja não uniforme sobre toda região no espaço de θ , então a região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ é única. Além disso, se θ_1 e θ_2 forem dois pontos tais que $p(\theta_1|\mathbf{y}) = p(\theta_2|\mathbf{y})$, então estes dois pontos estarão simultaneamente incluídos (ou excluídos) da região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$. A recíproca também é verdadeira. Isto é, se $p(\theta_1|\mathbf{y}) \neq p(\theta_2|\mathbf{y})$, então existe

uma região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ a qual inclui um ponto mas não inclui o outro.

3.2.8 Propriedades da Distribuição *a Posteriori* de θ

De acordo com ZELLNER (1971), BOX & TIAO (1973), dentre outros, $p(\theta|\mathbf{y})$ tem as seguintes propriedades:

P.1) A função $p(\theta|\mathbf{y})$ é monotonicamente decrescente da forma quadrática $Q(\theta) = (\theta - \hat{\theta})'X'X(\theta - \hat{\theta})$. Assim, $Q(\theta) = c$, $c > 0$, define os contornos da distribuição no espaço K -dimensional de θ . Para $K = 2$, $Q(\theta) = c$ é a equação de uma elipse; para $K = 3$ ela é uma elipsóide e para $K > 3$ ela é a equação de uma hiper-elipsóide;

P.2) A quantidade $Q(\theta)/Ks^2$ é distribuída *a posteriori* como uma $F_{[K,\nu]}$. Os contornos elipsoidais de $p(\theta|\mathbf{y})$ serão definidos por

$$\frac{Q(\theta)}{Ks^2} = F_{[K,\nu,\alpha]} \quad (32)$$

onde $F_{[K,\nu,\alpha]}$ é o ponto superior de uma distribuição F com (K, ν) graus de liberdade que delimita uma região elipsoidal no espaço K -dimensional de θ , a qual contém $(1 - \alpha)$ de probabilidade *a posteriori*. Tal região é definida pela inequação

$$\frac{Q(\theta)}{Ks^2} < F_{[K,\nu,\alpha]} \quad (33)$$

P.3) Seja a partição

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ K-r \end{matrix}; \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \dots \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ K-r \end{matrix}; \quad (34)$$

$$X'X = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ K-r \end{matrix} \quad e \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ K-r \end{matrix}. \quad (35)$$

De conformidade com as propriedades da distribuição t-Student multivariada, ZELLNER (1971), se $\boldsymbol{\theta}$ tem distribuição t-Student multivariada K -dimensional, com vetor de médias $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, matriz de dispersão $s^2(X'X)^{-1}$ e ν graus de liberdade, então um subconjunto r -dimensional $\boldsymbol{\theta}_1$, tem distribuição t-Student multivariada r -dimensional com vetor de médias $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$, matriz de dispersão s^2C_{11} e ν graus de liberdade, denotada por $\boldsymbol{\theta}_1|\mathbf{y} \sim t_r[\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, s^2C_{11}, \nu]$, cuja função de densidade *a posteriori* é

$$p(\boldsymbol{\theta}_1|\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+r}{2})|C_{11}^{-1}|^{\frac{1}{2}}s^{-r}}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^r\Gamma(\frac{\nu}{2})\nu^{\frac{r}{2}}} \left[1 + (\boldsymbol{\theta}_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)' \frac{C_{11}^{-1}}{\nu s^2} (\boldsymbol{\theta}_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) \right]^{-\left(\frac{\nu+r}{2}\right)},$$

$$-\infty < \theta_i < +\infty, \quad i = 1, \dots, r. \quad (36)$$

Em particular, a distribuição marginal *a posteriori* de θ_i , $\forall i, i=1, \dots, K$ é dada por

$$p(\theta_i|\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})|c_{ii}^{-1}|^{\frac{1}{2}}s^{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})\nu^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{(\theta_i - \hat{\theta}_i)^2}{\nu s^2 c_{ii}} \right]^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)},$$

$$-\infty < \theta_i < +\infty, \forall \theta_i, \quad i = 1, \dots, K, \quad (37)$$

isto é, $\theta_i|\mathbf{y} \sim t_1[\hat{\theta}_i, s^2 c_{ii}, \nu]$, $\forall i, \quad i = 1, \dots, K$.

Além disso, a variável $t = \frac{\theta_i - \hat{\theta}_i}{\sqrt{s^2 c_{ii}}}$ é distribuída *a posteriori* como uma t-Student padrão com ν graus de liberdade e intervalos H.P.D. para θ_i podem ser construídos empregando as tabelas usuais da distribuição t-Student padrão, a partir da expressão

$$Pr \left[\hat{\theta}_i - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{s^2 c_{ii}} \leq \theta_i \leq \hat{\theta}_i + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{s^2 c_{ii}} \right] = 1 - \alpha, \quad (38)$$

onde, para o modelo aqui considerado, $\hat{\theta}_i = \bar{y}_i$ é a média das observações que receberam o tratamento i , $c_{ii} = 1/R$ é o i -ésimo elemento da diagonal da matriz $(X'X)^{-1}$ e $s^2 = \text{QM.Resíduo}$.

P.4) A distribuição condicional *a posteriori* de um subconjunto $(K - r)$ dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}_2$ dado $\boldsymbol{\theta}_1$ é também t-Student multivariada $(K - r)$ -dimensional. Especificamente, $\boldsymbol{\theta}_2$ dado $\boldsymbol{\theta}_1$ é distribuída como

$$t_{(K-r)} \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,1}, s_{2,1}^2 (X_2' X_2)^{-1}, \nu + r \right], \quad (39)$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{2.1} &= \hat{\theta}_2 - (X_2'X_2)^{-1}(X_2'X_1)(\theta_1 - \hat{\theta}_1) \quad e \\ s_{2.1}^2 &= (\nu + r)^{-1} \left[\nu s^2 + (\theta_1 - \hat{\theta}_1)' C_{11}^{-1} (\theta_1 - \hat{\theta}_1) \right].\end{aligned}$$

P.5) Suponha que $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$, $m < K$, seja um conjunto de combinações lineares tais que

$$\phi = D\theta, \quad (40)$$

onde D é uma matriz $m \times k$ de posto m . Então ϕ é distribuído *a posteriori* como

$$t_m \left[D\hat{\theta}, s^2 D(X'X)^{-1}D', \nu \right]. \quad (41)$$

Esta propriedade é de grande importância para os objetivos deste trabalho, pois, ela permite que os parâmetros sejam comparados entre si, o que na grande maioria das aplicações práticas é mais interessante do que simplesmente determinar seus valores absolutos.

Suponham-se K parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)'$. Em geral, na prática, definem-se $(K - 1)$ comparações não redundantes através de $(K - 1)$ funções independentes do tipo

$$\phi_j = f_j(\theta), \quad j = 1, 2, \dots, (K - 1), \quad (42)$$

as quais serão todas iguais a *zero* se, e somente se, $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_K$. Obviamente existe uma infinidade de funções com estas características, dentre elas, os contrastes ortogonais são de particular interesse na estatística experimental. Assim, afirmações sobre os valores comparativos dos θ_i 's poderão ser feitas através de $(K - 1)$ contrastes ortogonais $\phi_1, \dots, \phi_{(K-1)}$. Em particular, a probabilidade de que todos os θ_i 's são iguais, é igual à probabilidade de que todos os ϕ_i 's são nulos, isto é, à probabilidade de que $\theta_1 = \dots = \theta_K$ é igual a probabilidade de $\phi_1 = \dots = \phi_{(K-1)} = 0$.

De acordo com (41), segue que *a posteriori*

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{(K-1)} \end{bmatrix} \sim t_{(K-1)} \left[\hat{\phi} = D\hat{\theta}, s^2 D(X'X)^{-1} D', \nu \right], \quad (43)$$

cuja função de densidade *a posteriori* é

$$p(\phi|\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+K-1}{2}) |D(X'X)^{-1} D'|^{-\frac{1}{2}} s^{-(K-1)}}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{K-1} \Gamma(\frac{\nu}{2}) 2^{\frac{K-1}{2}}} \times \left\{ 1 + \frac{(\phi - \hat{\phi})' [D(X'X)^{-1} D']^{-1} (\phi - \hat{\phi})}{\nu s^2} \right\}^{-(\frac{\nu+K-1}{2})}, \quad (44)$$

onde $-\infty < \phi_j < +\infty$, $D = d_{ji}$, $j = 1, 2, \dots, (K-1)$, $i = 1, 2, \dots, K$, é uma matriz com dimensões $(K-1) \times K$ de posto $(K-1)$, correspondente a $(K-1)$ contrastes não redundantes sobre os K parâmetros (tratamentos).

Em particular, a distribuição marginal *a posteriori* de $\phi_j = \sum_{i=1}^K d_{ji} \theta_i$, $\forall j$, com $\sum_{i=1}^K d_{ji} = 0$ é t-Student univariada com média $\hat{\phi}_j$, variância $s^2 h_{jj}$ e ν graus de liberdade. Isto é, $\phi_j|\mathbf{y} \sim t_1[\hat{\phi}_j, s^2 h_{jj}, \nu]$, onde h_{jj} é o j -ésimo elemento da diagonal da matriz $H = [D(X'X)^{-1} D']$, ou seja, $h_{jj} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2$. A densidade *a posteriori* de ϕ_j é

$$p(\phi_j|\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2}) |h_{jj}|^{-\frac{1}{2}} s^{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2}) (\nu)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{(\phi_j - \hat{\phi}_j)^2}{\nu s^2 h_{jj}} \right]^{-(\frac{\nu+1}{2})}, \quad -\infty < \phi_j < +\infty, \quad \forall j, \quad (45)$$

onde, neste trabalho, $\hat{\phi}_j = \sum_{i=1}^K d_{ji} \hat{\theta}_i = \sum_{i=1}^K d_{ji} \bar{y}_i$.

Tal como em **P.3**), a variável aleatória

$$t = \frac{\phi_j - \hat{\phi}_j}{s \sqrt{h_{jj}}}, \quad \forall j, \quad (46)$$

segue uma distribuição t-Student univariada padrão com ν graus de liberdade. A partir deste resultado, intervalos H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ podem ser construídos,

empregando as tabelas usuais da distribuição t-Student padronizada, através da expressão

$$Pr \left[\hat{\phi}_j - t_{\frac{\alpha}{2}} s \sqrt{h_{jj}} \leq \phi_j \leq \hat{\phi}_j + t_{\frac{\alpha}{2}} s \sqrt{h_{jj}} \right] = 1 - \alpha. \quad (47)$$

3.2.9 Inferências Conjunta e Marginal

Conforme foi dito anteriormente, toda informação acerca dos parâmetros de interesse θ , estará contida na distribuição *a posteriori* $p(\theta|\mathbf{y})$, e consequentemente, todos os problemas inferenciais acerca de θ poderão ser resolvidos através de $p(\theta|\mathbf{y})$. Neste trabalho, as inferências sobre os efeitos médios dos tratamentos θ ou sobre combinações lineares deles $\phi = D\theta$, serão feitas verificando se um determinado ponto θ_0 (ou ϕ_0), está ou não incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$.

A distribuição marginal *a posteriori* de θ em (31) é t-Student multivariada K -dimensional. Além disso, conforme **P.2**), a quantidade $\frac{Q(\theta)}{Ks^2}$ é distribuída *a posteriori* como uma $F_{[K,\nu]}$. Suponha agora que o interesse é verificar se o ponto $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{K0})'$, está ou não incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$. Para verificar isto, BOX & TIAO (1973) sugerem que seja calculada a probabilidade do evento $p(\theta|\mathbf{y}) > p(\theta_0|\mathbf{y})$. Segue, portanto, que o ponto θ_0 estará incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se, $Pr[p(\theta|\mathbf{y}) > p(\theta_0|\mathbf{y})] \leq (1 - \alpha)$. Mas, sendo $p(\theta|\mathbf{y})$ uma função monotonicamente decrescente da quantidade $\frac{Q(\theta)}{Ks^2} = \frac{(\theta - \hat{\theta})' X' X (\theta - \hat{\theta})}{Ks^2}$, o ponto θ_0 estará incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$(\theta_0 - \hat{\theta})' X' X (\theta_0 - \hat{\theta}) < Ks^2 F_{[K,\nu,\alpha]}. \quad (48)$$

Equivalentemente, a quantidade

$$Pr \left\{ F_{[K,\nu]} < \frac{(\theta_0 - \hat{\theta})' X' X (\theta_0 - \hat{\theta})}{Ks^2} \right\}, \quad (49)$$

onde $F_{[K,\nu]}$ é uma variável aleatória distribuída como uma F com (K, ν) graus de liberdade, fornece o conteúdo da região H.P.D. a qual inclui o ponto θ_0 .

Também, a quantidade $\frac{Q(\phi)}{(K-1)s^2} = \frac{(\phi - \hat{\phi})' D[(X'X)^{-1}D']^{-1}(\phi - \hat{\phi})}{(K-1)s^2}$ é distribuída *a posteriori* como uma $F_{[(K-1), \nu]}$. Sendo assim, $p(\phi|\mathbf{y})$ em (44) é uma função monotonicamente decrescente da quantidade $\frac{Q(\phi)}{(K-1)s^2}$. Um ponto particular ϕ_0 estará incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$(\phi_0 - \hat{\phi})' [D(X'X)^{-1}D']^{-1}(\phi_0 - \hat{\phi}) < (K-1)s^2 F_{[(K-1), \nu, \alpha]}. \quad (50)$$

Análogo a (49), a quantidade

$$Pr \left\{ F_{[(K-1), \nu, \alpha]} < \frac{(\phi_0 - \hat{\phi})' [D(X'X)^{-1}D']^{-1}(\phi_0 - \hat{\phi})}{(K-1)s^2} \right\}, \quad (51)$$

onde $F_{[(K-1), \nu]}$ é uma variável aleatória distribuída como uma F com $[(K-1), \nu]$ graus de liberdade, fornece o conteúdo da região H.P.D. a qual inclui o ponto ϕ_0 .

Os resultados (48) e (49) fornecem uma justificativa Bayesiana da análise da variância, bem como, (50) e (51). Também, (48) e (50) são apropriados para decidir se um determinado ponto θ_0 ou ϕ_0 está fora ou dentro da região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$. Além disso, os complementos das probabilidades em (49) e (51), fornecem o nível de significância associado às hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_0 : \phi = \phi_0$, respectivamente.

Caso haja interesse em calcular probabilidades acerca dos parâmetros θ_i , $i = 1, 2, \dots, K$ individualmente, ou de um subconjunto dos K parâmetros, isso pode ser feito usando as distribuições marginais *a posteriori*. É importante não cometer o engano de dizer que as probabilidades conjuntas podem ser obtidas a partir das distribuições marginais, pois os intervalos marginais de alta densidade *a posteriori* de conteúdo $(1 - \alpha)$ podem incluir um determinado ponto e este estar excluído da região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ quando considerada a distribuição conjunta *a posteriori*. Quando se leva em conta as densidades marginais *a posteriori*, o interesse será responder, por exemplo, a questão: qual a probabilidade de θ_1 assumir um determinado valor independentemente do valor assumido pelos demais parâmetros? E, quando se considera a distribuição conjunta, o interesse estará no cálculo da probabilidade de que os parâmetros assumam determinados valores conjuntamente.

Com relação à justificativa Bayesiana da análise de variância, pode ser tomado qualquer conjunto de $(K-1)$ contrastes não redundantes dos parâmetros θ para verificar a hipótese $H_0 : \phi = \mathbf{0}$ vs $H_1 : \phi \neq \mathbf{0}$ a um nível de significância α , a qual é equivalente a verificar a hipótese $H_0 : \theta_1 = \dots = \theta_K$ contra a hipótese alternativa H_1 : a igualdade não prevalece para algum θ_i . Neste sentido, é conveniente considerar o particular conjunto de contrastes $\phi = D\theta$ dado por

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{(K-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} K-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & K-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & K-1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 - \bar{\theta} \\ \theta_2 - \bar{\theta} \\ \vdots \\ \theta_{(K-1)} - \bar{\theta} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Usando o conjunto de contrastes não redundantes em (52), a densidade *a posteriori* em (44) pode ser escrita como

$$p(\phi|y) \propto \left\{ 1 + \frac{Q(\phi)}{\nu s^2} \right\}^{-\frac{\nu+K-1}{2}}, \quad -\infty < \phi_j < +\infty, \quad j = 1, \dots, (K-1), \quad (53)$$

onde $Q(\phi) = R \sum_{i=1}^K [\phi_i - (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})]^2$; $\bar{y}_{i.} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R y_{ir}$; $\bar{y}_{..} = \frac{1}{KR} \sum_{i=1}^K \sum_{r=1}^R y_{ir}$; $\phi_K = \theta_K - \bar{\theta}$; $\sum_{i=1}^K \phi_i = 0$.

Assim, o ponto particular $\phi_0 = \mathbf{0}$ estará incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$\frac{Q(\phi_0)}{(K-1)s^2} = \frac{Q(0)}{(K-1)s^2} = \frac{R \sum_{i=1}^K (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{(K-1)s^2} < F_{[(K-1), \nu, \alpha]}, \quad (54)$$

o qual é um resultado paralelo ao teste de significância, cujos cálculos são equivalentes aos da análise da variância, podem ser vistos na **tabela 1**.

Para testar hipóteses do tipo $H_0 : \phi_j = 0$ vs $H_1 : \phi_j \neq 0, \forall j$, ao nível de significância α , basta construir o intervalo H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ através da expressão (47) e verificar se o mesmo contém o ponto *zero*. Caso afirmativo, aceita-se H_0 , caso contrário rejeita-se H_0 em favor de H_1 .

3.2.10 Comparação das Dispersões de K Populações Normais

No modelo definido em (9), supõe-se que os erros experimentais são

Tabela 1: Esquema da análise de variância para determinar se o ponto $\phi_0 = \mathbf{0}$ $(\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_K)'$ está incluído na região H.P.D. que contém $100(1 - \alpha)\%$ de probabilidade.

F. Variação	GL	SQ	QM	Razão
Igualdade das médias	$K - 1$	$Q(0) = R \sum_{i=1}^K (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$	$\frac{Q(0)}{K-1}$	$\frac{Q(0)}{(K-1)S^2}$
Resíduo	$\nu = K(R - 1)$	$\nu s^2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^R (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	s^2	-

distribuídos independentemente como uma normal multivariada $N_n(\mathbf{0}, I_n \sigma^2)$, isto é, supõe-se que a variância dentro de cada tratamento é a mesma ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_K^2$). Para verificar a hipótese de homogeneidade das variâncias, decidiu-se, neste trabalho, apresentar dois testes Bayesianos, a saber: O **Teste de Bartlett Modificado**, adaptado para o enfoque Bayesiano por BOX & TIAO(1973) e o **Teste da Raiz Cúbica** proposto por SAMIYUDDIN (1976). Ambos são apropriados para verificar a hipótese de homogeneidade das variâncias de K populações normais independentes $N(\theta_i, \sigma_i^2)$, $(i = 1, 2, \dots, K)$ e admitem que as distribuições *a priori* para θ_i e $\log \sigma_i$ são aproximadamente independentes e localmente uniformes. A idéia da apresentação do **Teste da Raiz Cúbica** é que ele é menos sensível à ausência de normalidade nos dados do que o **Teste de Bartlett Modificado** e, portanto, apresenta melhor desempenho nestes casos.

Os testes são baseados na escolha de $(K - 1)$ contrastes lineares independentes em $\log \sigma_i$, isto é,

$$\varphi_i = \log \sigma_i^2 - \log \sigma_K^2 = 2(\log \sigma_i - \log \sigma_K), \quad i = 1, 2, \dots, (K - 1). \quad (55)$$

Com base na distribuição *a posteriori* de $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{(K-1)})$, os autores concluem que verificar a hipótese $H_0 : \sigma_1^2 = \dots = \sigma_K^2$ a um nível de significância α é equivalente a verificar se o ponto $\varphi_0 = \mathbf{0}$ está dentro ou fora da região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$. E, portanto, o ponto $\varphi_0 = \mathbf{0}$ estará incluído na região

H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$\frac{-2\log W_0}{1 + A} < \chi^2_{[(K-1), \alpha]}, \quad (\text{Teste de Bartlett Modificado}), \quad (56)$$

$$\sum_{i=1}^K \frac{(m_i - m)^2}{a_i^2} < \chi^2_{[(K-1), \alpha]}, \quad (\text{Teste da Raiz Cúbica}), \quad (57)$$

onde,

$$\begin{aligned} -2\log W_0 &= -\sum_{i=1}^K \nu_i (\log s_i^2 - \log \bar{s}^2), & \nu_i &= R - 1, \\ s_i^2 &= \frac{1}{\nu_i} \sum_{r=1}^R (y_{ir} - \bar{y}_i)^2, & \bar{y}_i &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R y_{ir}, \\ \bar{s}^2 &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^K \nu_i s_i^2, & \nu &= \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_K, \\ A &= \frac{1}{3(K-1)} \left(\sum_{i=1}^K \nu_i^{-1} - \nu^{-1} \right), & m_i &= (\nu_i / s_i^2)^{\frac{1}{3}} (1 - 2/9\nu_i), \\ a_i^2 &= \frac{2}{9} (s_i^2)^{\frac{2}{3}} (\nu_i)^{\frac{1}{3}} & m &= \frac{\sum_{i=1}^K (m_i / a_i^2)}{\sum_{i=1}^K (1/a_i^2)}. \end{aligned} \quad (58)$$

Estes dois testes serão usados na verificação das hipóteses de homogeneidade das variâncias dentro e entre os ensaios.

3.3 A Análise Conjunta de J Experimentos

Do ponto de vista Bayesiano, é possível se fazer a análise conjunta de um grupo de J experimentos levando-se em consideração a natureza sequencial do **Teorema de Bayes**, ou seja, admitir, por exemplo, distribuição *a priori* não informativa para os parâmetro (θ, σ^2) no primeiro ensaio, determinar a densidade *a posteriori* e esta servir de *priori* para o segundo ensaio e assim por diante até o J -ésimo experimento. Porém esta análise contemplaria apenas as informações provenientes dos efeitos dos tratamentos e do erro experimental. A análise proposta neste trabalho, leva em consideração, além dos efeitos do fator tratamento e do erro experimental, os efeitos do fator experimento e da interação tratamento $\times$ experimento, os quais são de grande importância na experimentação. Considera também, a homocedasticidade das variâncias dentro e entre os experimentos envolvidos na análise. Quando a suposição de homogeneidade das variâncias entre os experimentos não ocorrer, recomenda-se que os experimentos sejam agrupados em subgrupos cujos quadrados médios residuais seja homogêneos.

De acordo com os objetivos deste trabalho, o modelo estrutural associado ao conjunto dos J ensaios será um modelo misto com dois fatores cruzados.

3.3.1 O Modelo Estatístico

O modelo estatístico associado aos dados de um grupo de J experimentos completamente aleatorizados, é dado por

$$y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijr}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, K, \\ j = 1, \dots, J, \\ r = 1, \dots, R, \end{cases} \quad (59)$$

ou de acordo com (10)

$$y_{ijr} = \theta_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijr}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, K, \\ j = 1, \dots, J, \\ r = 1, \dots, R, \end{cases} \quad (60)$$

onde y_{ijr} é a r -ésima observação proveniente da unidade experimental que recebeu o tratamento i no j -ésimo experimento; θ_i é o efeito médio do tratamento i , considerado fixo; β_j é o efeito do j -ésimo experimento (ambiente, ano, estação, etc), considerado de efeito aleatório; γ_{ij} é o efeito da interação do i -ésimo tratamento com o j -ésimo ensaio, também considerado de efeito aleatório e e_{ijr} é o erro experimental, aleatório, associado à observação y_{ijr} .

Além disso, supõe-se que β_j , γ_{ij} e e_{ijr} são variáveis aleatórias independentes distribuídas como

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_b^2), \quad \gamma_{ij} \sim N(0, \sigma_g^2), \quad e \quad e_{ijr} \sim N(0, \sigma_e^2).$$

O modelo (60) pode ser representado na forma matricial por

$$\mathbf{y} = M\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{y} = X\boldsymbol{\theta} + Z\boldsymbol{\beta} + G\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (61)$$

onde $\mathbf{y}$ é um vetor de realizações de variáveis aleatórias com dimensões $(KJR \times 1)$, M é uma matriz de zeros e uns (ou matriz de planejamento) com dimensões

$(KJR \times (K + J + KJ))$, $\boldsymbol{\lambda} = (\theta_1, \dots, \theta_K, \beta_1, \dots, \beta_J, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{KJ})'$ é um vetor de $(K + J + KJ)$ parâmetros associados aos efeitos de K tratamentos, J experimentos e KJ interações, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor dos erros experimentais. Opcionalmente a matriz M pode ser subdividida em $M = [X:Z:G]$, onde X é uma matriz com dimensões $(KJR \times K)$ de posto K associada aos efeitos médios dos K tratamentos (vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$), Z e G são matrizes associadas aos efeitos de experimento e da interação tratamento $\times$ experimento, respectivamente.

3.3.2 A Função de Verossimilhança

Para a determinação da função de verossimilhança é conveniente transformar as JKR observações nos conjuntos $\{\bar{y}_{...}\}$, $\{\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\}$, $\{\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\}$, $\{\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\}$ e $\{y_{ijr} - \bar{y}_{ij.}\}$, de onde segue que:

1. Os conjuntos $\{\bar{y}_{...}\}$, $\{\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\}$, $\{\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\}$, $\{\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\}$ e $\{y_{ijr} - \bar{y}_{ij.}\}$ são independentemente distribuídos uns dos outros, (BOX & TIAO, 1973);
2. $\bar{y}_{...} = \frac{1}{KJR} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R y_{ijr} = \bar{\theta} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} + \bar{e}_{...}$. Assim sendo, $E[\bar{y}_{...}] = \bar{\theta}$ e $Var[\bar{y}_{...}] = \frac{1}{J}\sigma_b^2 + \frac{1}{KJ}\sigma_g^2 + \frac{1}{KJR}\sigma_e^2 = \frac{1}{KJR}(\sigma_e^2 + R\sigma_g^2 + KR\sigma_b^2) = \frac{1}{KJR}\sigma_{egb}^2$. Portanto,

$$\bar{y}_{...} \sim N\left(\bar{\theta}, \frac{1}{KJR}\sigma_{egb}^2\right),$$

cujas função de densidade é dada por

$$f_{\bar{y}_{...}}(\bar{y}_{...}) = \left(\frac{KJR}{2\pi\sigma_{egb}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{KJR(\bar{y}_{...} - \bar{\theta})^2}{2\sigma_{egb}^2}\right\} I_{(-\infty, +\infty)}(\bar{y}_{...}); \quad (62)$$

3. $\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{...} = \theta_i - \bar{\theta} + \bar{\gamma}_{i.} - \bar{\gamma}_{...} + \bar{e}_{i.} - \bar{e}_{...}$, desse modo, tem-se que $E[\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{...}] = \theta_i - \bar{\theta} = \phi_i$ e $Var[\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{...}] = E[(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{...}) - E(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{...})]^2 = \frac{(K-1)}{K} \cdot \frac{(\sigma_e^2 + R\sigma_g^2)}{JR} = \frac{(K-1)}{K} \cdot \frac{1}{JR}\sigma_{eg}^2$, ($i = 1, \dots, K$) e $Cov[(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{...}), (\bar{y}_{s.} - \bar{y}_{...})] = -\frac{1}{K} \cdot \frac{1}{JR}\sigma_{eg}^2$, ($i \neq s$). Logo, o vetor de contrastes dado por $\hat{\phi} = D\hat{\theta} = [(\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{...}), (\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{...}), \dots, (\bar{y}_{(K-1).} - \bar{y}_{...})]'$ é distribuído como uma normal multivariada $(K-1)$ -dimensional $N_{(K-1)}(\phi, \sigma_{eg}^2 \Sigma)$,

onde

$$\sum = [D(X'X)^{-1}D'] = \frac{1}{KJR} \begin{bmatrix} K-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & K-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & K-1 \end{bmatrix}, \quad (63)$$

cujo determinante é dado por

$$|\sum| = \frac{1}{K(JR)^{(K-1)}}, \quad (64)$$

e sua inversa com dimensão $(K-1) \times (K-1)$ é dada por

$$\sum^{-1} = JR \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}, \quad (65)$$

D é uma matriz dos coeficientes de $K-1$ contrastes não redundantes, $(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$'s, $i = 1, \dots, K-1$, com dimensões $(K-1) \times K$ e de posto $(K-1)$, isto é,

$$D = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} K-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & K-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & K-1 & -1 \end{bmatrix} e \quad (66)$$

$(X'X)^{-1}$ tem dimensões $K \times K$ e posto K , ou seja,

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{JR} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Dessa forma, a função de distribuição do conjunto de contrastes $\hat{\phi}$ é dada por

$$f_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}) = \frac{|\sum|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma_{eg}^2)^{\frac{(K-1)}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{eg}^2} (\phi - \hat{\phi})' \sum^{-1} (\phi - \hat{\phi}) \right\},$$

$$-\infty < \hat{\phi}_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, (K-1) \quad (68)$$

ou

$$f_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}) = \sqrt{K} \left(\frac{JR}{2\pi\sigma_{eg}^2} \right)^{\frac{K-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{eg}^2} (\phi - \hat{\phi})' \Sigma^{-1} (\phi - \hat{\phi}) \right\},$$

$$-\infty < \hat{\phi}_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, (K-1) \quad (69)$$

ou ainda

$$f_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}) = \sqrt{K} \left(\frac{JR}{2\pi\sigma_{eg}^2} \right)^{\frac{K-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{S(\phi)}{2\sigma_{eg}^2} \right\},$$

$$-\infty < (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) = \hat{\phi}_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, (K-1) \quad (70)$$

onde

$$S(\phi) = \nu_{\phi} m(\phi) = JR \sum_{i=1}^K [\phi_i - (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})]^2,$$

segue que, sob $H_0 : \phi = \mathbf{0}$, (isto é, $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_K$), a estatística

$$\frac{JR \sum_{i=1}^K (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2}{\sigma_{eg}^2} = \frac{\nu_a m_a}{\sigma_{eg}^2} = \frac{S_a}{\sigma_{eg}^2} \sim \chi_{(\nu_a)}^2, \quad \nu_{\phi} = \nu_a = K-1. \quad (71)$$

4. $\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} = \beta_j - \bar{\beta} + \bar{\gamma}_{.j} - \bar{\gamma}_{..} + \bar{e}_{.j.} - \bar{e}_{...}$. Segue portanto que, $E[\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}] = 0$ e $Var[\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}] = \frac{(J-1)}{J} \cdot \frac{1}{KR} (\sigma_e^2 + R\sigma_g^2 + KR\sigma_b^2) = \frac{(J-1)}{J} \cdot \frac{1}{KR} \sigma_{egb}^2$. Consequentemente,

$$(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) \sim N \left(0, \frac{(J-1)}{J} \cdot \frac{1}{KR} \sigma_{egb}^2 \right) \quad e$$

$$\sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) \sim N \left(0, (J-1) \cdot \frac{1}{KR} \sigma_{egb}^2 \right).$$

Assim sendo, $\sum_j (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})$ pode ser imaginado como sendo proveniente de $(J-1)$ observações independentes de uma distribuição normal $N(0, \frac{1}{KR} \sigma_{egb}^2)$.

E, portanto

$$\frac{KR \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2}{\sigma_{egb}^2} = \frac{\nu_b m_b}{\sigma_{egb}^2} = \frac{S_b}{\sigma_{egb}^2} \sim \chi_{(\nu_b)}^2, \quad \nu_b = J-1, \quad (72)$$

cuja distribuição de probabilidade da estatística $S_b = \nu_b m_b$ é

$$f_{S_b}(s_b) = \frac{(\nu_b m_b)^{\frac{(\nu_b-1)}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu_b}{2}) 2^{\frac{\nu_b}{2}}} (\sigma_{egb}^2)^{-\frac{\nu_b}{2}} \exp \left\{ -\frac{\nu_b m_b}{2\sigma_{egb}^2} \right\} I_{(0,\infty)}(s_a) \quad (73)$$

5. $\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...} = \gamma_{ij} - \bar{\gamma}_{i.} - \bar{\gamma}_{.j} + \bar{\gamma}_{..} + \bar{e}_{ij} - \bar{e}_{i.} - \bar{e}_{.j} + \bar{e}_{...}$. Dessa forma, tem-se que $E[\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...}] = 0$ e $Var[\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...}] = \frac{(K-1)}{K} \cdot \frac{(J-1)}{J} \cdot \frac{1}{R} (\sigma_e^2 + R\sigma_g^2) = \frac{(K-1)}{K} \cdot \frac{(J-1)}{J} \cdot \frac{1}{R} \sigma_{eg}^2$. Consequentemente

$$(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...}) \sim N\left(0, \frac{(K-1)}{K} \cdot \frac{(J-1)}{J} \cdot \frac{1}{R} \sigma_{eg}^2\right) \quad e$$

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...}) \sim N\left(0, (K-1)(J-1) \frac{1}{R} \sigma_{eg}^2\right)$$

De modo análogo, $\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...})$ pode ser imaginada como sendo proveniente de $\nu_g = (K-1)(J-1)$ observações independentes de uma distribuição normal $N\left(0, \frac{1}{R} \sigma_{eg}^2\right)$. E, portanto,

$$\frac{R \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...})^2}{\sigma_{eg}^2} = \frac{\nu_g m_g}{\sigma_{eg}^2} = \frac{S_g}{\sigma_{eg}^2} \sim \chi_{(\nu_g)}^2, \quad (74)$$

cujas função de densidade associada a variável $S_g = \nu_g m_g$, é

$$f_{S_g}(s_g) = \frac{(\nu_g m_g)^{\frac{(\nu_g-1)}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu_g}{2}) 2^{\frac{\nu_g}{2}}} (\sigma_{eg}^2)^{-\frac{\nu_g}{2}} \exp\left\{-\frac{\nu_g m_g}{2\sigma_{eg}^2}\right\} I_{(0,\infty)}(s_g) \quad (75)$$

6. Finalmente, $y_{ijr} - \bar{y}_{ij.} = e_{ijr} - \bar{e}_{ij.}$, $E[y_{ijr} - \bar{y}_{ij.}] = 0$ e $Var[y_{ijr} - \bar{y}_{ij.}] = \frac{(R-1)}{R} \sigma_e^2$. Desse modo, $y_{ijr} - \bar{y}_{ij.} \sim N\left(0, \frac{(R-1)}{R} \sigma_e^2\right)$ e $\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R (y_{ijr} - \bar{y}_{ij.}) \sim N(0, KJ(R-1)\sigma_e^2)$ a qual pode ser imaginada como sendo proveniente de $\nu_e = KJ(R-1)$ observações de uma distribuição normal $N(0, \sigma_e^2)$. Consequentemente,

$$\frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R (y_{ijr} - \bar{y}_{ij.})^2}{\sigma_e^2} = \frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2} = \frac{S_e}{\sigma_e^2} \sim \chi_{(\nu_e)}^2 \quad (76)$$

cujas função de densidade da variável aleatória S_e é dada por

$$f_{S_e}(s_e) = \frac{(\nu_e m_e)^{\frac{(\nu_e-1)}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu_e}{2}) 2^{\frac{\nu_e}{2}}} (\sigma_e^2)^{-\frac{\nu_e}{2}} \exp\left\{-\frac{\nu_e m_e}{2\sigma_e^2}\right\} I_{(0,\infty)}(s_e). \quad (77)$$

A **tabela 2** apresenta um resumo dos resultados obtidos nos itens de 1 a 6, a qual corresponde ao quadro da análise de variância com as esperanças dos quadrados médios.

Tabela 2: Quadro da análise de variância com as esperanças dos quadrados médios para o modelo misto com dois fatores com interação.

F. Variação	G.l.	S.Q.	Q.M.	E[Q.M.]
Média Geral	1	S_μ	S_μ	$\sigma_e^2 + R\sigma_g^2 + KR\sigma_b^2$
Trat.(T)	ν_ϕ	$S(\phi)$	$m(\phi) = \frac{S(\phi)}{\nu_\phi}$	$\sigma_{eg}^2 = \sigma_e^2 + R\sigma_g^2$
Ensaio(E)	ν_b	$S_b = \nu_b m_b$	$m_b = \frac{S_b}{\nu_b}$	$\sigma_{egb}^2 = \sigma_e^2 + R\sigma_g^2 + KR\sigma_b^2$
Int.E $\times$ T	ν_g	$S_g = \nu_g m_g$	$m_g = \frac{S_g}{\nu_g}$	$\sigma_{eg}^2 = \sigma_e^2 + R\sigma_g^2$
Resíduo	ν_e	$S_e = \nu_e m_e$	$m_e = \frac{S_e}{\nu_e}$	σ_e^2
Total	KJR	S_t	—	—

onde

$$\begin{aligned}
S_t &= \sum_{ijr} (y_{ijr} - \mu)^2 \\
&= \sum_{ijr} [(\bar{y}_{...} - \mu) + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) \\
&\quad + (y_{ijr} - \bar{y}_{ij.})]^2 \\
&= KJR(\bar{y}_{...} - \mu)^2 + JR \sum_{i=1}^K (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + KR \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
&\quad + R \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R (y_{ijr} - \bar{y}_{ij.})^2 \\
&= S_\mu + S(\phi = \mathbf{0}) + S_b + S_g + S_e = S_\mu + \nu_\phi m(\phi) + \nu_b m_b + \nu_g m_g + \nu_e m_e \quad (78)
\end{aligned}$$

Sendo S_μ , $S(\phi)$, S_b , S_g e S_e variáveis aleatórias independentemente distribuídas, a função de verossimilhança pode ser obtida pelo produto das densidades em (62), (70), (73), (75) e (77), a saber,

$$\begin{aligned}
&\ell(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) \\
&\propto (\sigma_e^2)^{-\frac{\nu_e}{2}} (\sigma_{eg}^2)^{-\frac{1}{2}(\nu_\phi + \nu_g)} (\sigma_{egb}^2)^{-\frac{1}{2}(\nu_b + 1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2} + \frac{\nu_g m_g + S(\phi)}{\sigma_{eg}^2} + \frac{\nu_b m_b + S_\mu}{\sigma_{egb}^2} \right] \right\} \\
&-\infty < \bar{\theta} < +\infty, \quad -\infty < \phi_i < +\infty, \quad \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0, \quad i = 1, \dots, K-1 \quad (79)
\end{aligned}$$

Observa-se que as quantidades que aparecem na função de verossimilhança, correspondem àquelas convenientemente organizadas no quadro da análise da variância (tabela 2).

3.3.3 A Distribuição *a priori* de $(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2)$

Admitindo um argumento similar ao adotado nas análises individuais, empregou-se, também na análise conjunta, uma distribuição *a priori* de referência não informativa, isto é,

$$p(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2) \propto \frac{1}{\sigma_e^2 \sigma_{eg}^2 \sigma_{egb}^2}, \quad (80)$$

com a restrição

$$C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0. \quad (81)$$

A restrição $C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0$ é imposta devido ao fato de não ser plausível se admitir *a priori* que se tenha algum componente de variância negativo.

3.3.4 A Distribuição *a Posteriori* de $(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2)$

Agora, combinando a verossimilhança em (79) com a distribuição *a priori* em (80), tem-se a distribuição *a posteriori*, ou seja,

$$\begin{aligned} p(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) &= W_c (\sigma_e^2)^{-(\frac{\nu_e}{2}-1)} (\sigma_{eg}^2)^{-(\frac{\nu_g+\nu_\phi}{2}-1)} (\sigma_{egb}^2)^{-(\frac{\nu_k}{2}+1)-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2} + \frac{\nu_g m_g + S(\phi)}{\sigma_{eg}^2} + \frac{KJR(\bar{y}_{...} - \bar{\theta})^2}{\sigma_{egb}^2} \right] \right\}, \quad -\infty < \bar{\theta} < +\infty, \\ &-\infty < \phi_i < +\infty, \quad \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0, \quad i = 1, \dots, K-1, \end{aligned} \quad (82)$$

onde

$$W_c^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\phi} \int_0^{\infty} \int_{\sigma_e^2}^{\infty} \int_{\sigma_{eg}^2}^{\infty} p(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) d\sigma_{egb}^2 d\sigma_{eg}^2 d\sigma_e^2 d\phi d\bar{\theta}. \quad (83)$$

Para encontrar o valor de W_c^{-1} empregou-se a identidade conhecida por *integral de Dirichlet*, a saber,

$$\begin{aligned} & Pr \left\{ \frac{\chi_{2p_1}^2}{\chi_{2p_2}^2} > \frac{a_1}{a_2}, \frac{\chi_{2p_2}^2}{\chi_{2p_3}^2} > \frac{a_2}{a_3} \right\} \\ &= c_1 c_2 \prod_{i=1}^3 \frac{a_i^{p_i}}{\Gamma(p_i)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{-(p_1+1)} (x_1 + c_1 x_2)^{-(p_2+1)} (x_1 + c_1 x_2 + c_2 x_3)^{-(p_3+1)} \\ & \quad \times \exp \left\{ - \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_1 + c_1 x_2} + \frac{a_3}{x_1 + c_1 x_2 + c_2 x_3} \right) \right\} dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (84)$$

onde $p_i > 0$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e $(\chi_{2p_1}^2, \chi_{2p_2}^2, \chi_{2p_3}^2)$ são variáveis aleatórias distribuídas independentemente umas das outras como qui-quadrado com $(2p_1, 2p_2, 2p_3)$ graus de liberdade, respectivamente. Usando a identidade (84), após algumas operações algébrica, chegou-se ao seguinte resultado,

$$W_c^{-1} = \frac{1}{K} \left(\frac{2\pi}{JR} \right)^{\frac{\nu_e + \nu_g + \nu_b}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_e}{2}) \Gamma(\frac{\nu_g}{2}) \Gamma(\frac{\nu_b}{2}) 2^{\frac{\nu_e + \nu_g + \nu_b}{2}}}{(\nu_e m_e)^{\frac{\nu_e}{2}} (\nu_g m_g)^{\frac{\nu_g}{2}} (\nu_b m_b)^{\frac{\nu_b}{2}}} Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b} \right\} \quad (85)$$

onde $(\chi_{\nu_e}^2, \chi_{\nu_g}^2, \chi_{\nu_b}^2)$ são variáveis aleatórias independentes, distribuídas como qui-quadrado com (ν_e, ν_g, ν_b) graus de liberdade, respectivamente.

A partir da identidade dada em (84), pode ser verificado que

$$\begin{aligned} & Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b} \right\} \\ &= I_{\frac{\nu_b m_b}{\nu_b m_b + \nu_g m_g}} \left(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2} \right) - \left[B \left(\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_g}{2} \right) B \left(\frac{\nu_e + \nu_g}{2}, \frac{\nu_b}{2} \right) \right]^{-1} \\ & \quad \times \int_0^{\nu_e m_e / \nu_g m_g} \int_0^{\nu_b m_b / \nu_g m_g} t_1^{(\frac{\nu_e}{2}-1)} t_2^{(\frac{\nu_g}{2}-1)} (1 + t_1 + t_2)^{-(\frac{\nu_e + \nu_g + \nu_b}{2})} dt_2 dt_1, \end{aligned} \quad (86)$$

onde $I_x(p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^x u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$ (a integral de uma beta), $x = \frac{\nu_b m_b}{\nu_b m_b + \nu_g m_g}$ e $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Substituindo-se (85) em (82), obtém-se a densidade conjunta *a posteriori* de $(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{eb}^2)$, isto é,

$$\begin{aligned}
p(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) &= \left(\frac{KJR}{2\pi\sigma_{egb}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\bar{\theta} - \bar{y}_{...})^2}{2\sigma_{egb}^2} \right\} \times \\
&\quad \sqrt{K} \left(\frac{JR}{2\pi\sigma_{eg}^2} \right)^{\frac{\nu_\phi}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\phi - \hat{\phi})' \Sigma^{-1} (\phi - \hat{\phi})}{2\sigma_{eg}^2} \right\} \times \\
&\quad \frac{(\nu_e m_e)^{-1} p(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}) (\nu_g m_g)^{-1} p(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}) (\nu_b m_b)^{-1} p(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{\sigma_{egb}^2}{\nu_b m_b})}{Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b} \right\}} \quad (87) \\
&\quad -\infty < \bar{\theta} < +\infty, \quad -\infty < \phi_i < +\infty, \quad \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0, \quad i = 1, \dots, K-1,
\end{aligned}$$

onde $p(\chi_{\nu}^{-2} = x)$ é a densidade de uma distribuição de qui-quadrado inversa com ν graus de liberdade avaliada no ponto x .

A densidade conjunta *a posteriori* dada em (87), pode ser expressa da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
p(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) &= p(\bar{\theta} | \sigma_{egb}^2, \mathbf{y}) p(\phi | \sigma_{eg}^2, \mathbf{y}) p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) \\
&\quad -\infty < \bar{\theta} < +\infty, \quad -\infty < \phi_i < +\infty, \quad \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0, \quad i = 1, \dots, K-1, \quad (88)
\end{aligned}$$

Na expressão (87), observa-se que, (i) a distribuição condicional de $\bar{\theta}$ dado σ_{egb}^2 , $p(\bar{\theta} | \sigma_{egb}^2, \mathbf{y})$, é normal univariada $N(\bar{y}_{...}; \frac{1}{KJR} \sigma_{egb}^2)$; (ii) a distribuição condicional de ϕ dado σ_{eg}^2 , $p(\phi | \sigma_{eg}^2, \mathbf{y})$, é normal multivariada $(K-1)$ -dimensional $N_{(K-1)}(\hat{\phi}; \sigma_{eg}^2 \Sigma)$, onde Σ é dada em (63) e $\hat{\phi} = [(\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{...}), (\bar{y}_{2..} - \bar{y}_{...}), \dots, (\bar{y}_{(K-1)..} - \bar{y}_{...})]'$ é um vetor de contrastes já mencionado anteriormente e (iii) a densidade marginal *a posteriori* de $(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2)$ é,

$$\begin{aligned}
&p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) \\
&= \frac{(\nu_e m_e)^{-1} p(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}) (\nu_g m_g)^{-1} p(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}) (\nu_b m_b)^{-1} p(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{\sigma_{egb}^2}{\nu_b m_b})}{Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b} \right\}}, \\
&\quad \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0, \quad (89)
\end{aligned}$$

onde $(\chi_{\nu_e}^2, \chi_{\nu_g}^2, \chi_{\nu_b}^2)$ são variáveis aleatórias independentes distribuídas como qui-quadrado com (ν_e, ν_g, ν_b) graus de liberdade, respectivamente. Inferências sobre os

componentes compostos da variância, $(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2)$, podem ser feitas empregando-se a distribuição *a posteriori* em (89).

3.3.5 Distribuição Marginal *a Posteriori* dos Componentes da Variância

$$(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2)$$

Para se obter a distribuição marginal *a posteriori* dos componentes da variância $(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2)$, basta multiplicar $p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y})$ pelo jacobiano da transformação $|\mathcal{J}|$, isto é,

$$p(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2 | \mathbf{y}) = p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) |\mathcal{J}|, \quad (90)$$

onde

$$|\mathcal{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \sigma_e^2} & \frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \sigma_g^2} & \frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \sigma_b^2} \\ \frac{\partial \sigma_{eg}^2}{\partial \sigma_e^2} & \frac{\partial \sigma_{eg}^2}{\partial \sigma_g^2} & \frac{\partial \sigma_{eg}^2}{\partial \sigma_b^2} \\ \frac{\partial \sigma_{egb}^2}{\partial \sigma_e^2} & \frac{\partial \sigma_{egb}^2}{\partial \sigma_g^2} & \frac{\partial \sigma_{egb}^2}{\partial \sigma_b^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & R & 0 \\ 1 & R & KR \end{vmatrix} = KR^2, \quad (91)$$

substituindo-se este resultado em (89) e lembrando-se que $\sigma_{eg}^2 = \sigma_e^2 + R\sigma_g^2$ e $\sigma_{egb}^2 = \sigma_e^2 + R\sigma_g^2 + KR\sigma_b^2$, a densidade *a posteriori* dos componentes da variância $(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2)$ fica,

$$\begin{aligned} & p(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2 | \mathbf{y}) \\ &= KR^2 \frac{(\nu_e m_e)^{-1} p(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}) (\nu_g m_g)^{-1} p(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_e^2 + R\sigma_g^2}{\nu_g m_g}) (\nu_b m_b)^{-1} p(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{\sigma_e^2 + R\sigma_g^2 + KR\sigma_b^2}{\nu_b m_b})}{Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}; \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b} \right\}}, \quad (92) \\ & \sigma_e^2 > 0, \quad \sigma_g^2 > 0, \quad \sigma_b^2 > 0. \end{aligned}$$

Inferências conjunta sobre os componentes da variância $(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2)$, podem ser feitas usando a densidade *a posteriori* $p(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2 | \mathbf{y})$ dada em (92).

3.3.6 Distribuição Marginal *a Posteriori* de ϕ

Para se obter a distribuição marginal *a posteriori* de ϕ , é preciso integrar $p(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y})$ em relação a $(\bar{\theta}, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2)$, ou seja,

$$p(\phi|\mathbf{y}) = \int_0^\infty \int_{\sigma_e^2}^\infty \int_{\sigma_{eg}}^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} p(\bar{\theta}, \phi, \sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) d\bar{\theta} d\sigma_{egb}^2 d\sigma_{eg}^2 d\sigma_e^2, \\ -\infty < \phi_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, K-1, \quad (93)$$

a qual resulta em

$$p(\phi|\mathbf{y}) = W_c \left(\frac{2\pi}{KJR} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_e}{2}) \Gamma(\frac{\nu_g + \nu_\phi}{2}) \Gamma(\frac{\nu_b}{2}) 2^{\frac{\nu_e + \nu_g + \nu_\phi + \nu_b}{2}}}{(\nu_e m_e)^{\frac{\nu_e}{2}} [\nu_g + S(\phi)]^{\frac{\nu_g + \nu_\phi}{2}} (\nu_b m_b)^{\frac{\nu_b}{2}}} \\ \times Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{(\nu_g + \nu_\phi)}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g + S(\phi)}; \frac{\chi_{(\nu_g + \nu_\phi)}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g + S(\phi)}{\nu_b m_b} \right\} \quad (94)$$

onde $S(\phi) = (\phi - \hat{\phi})' \Sigma^{-1} (\phi - \hat{\phi}) = JR \sum_{i=1}^K [\phi_i - (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})]^2$.

Substituindo-se o valor de W_c obtido em (84) e fazendo algumas operações algébricas encontra-se a distribuição marginal *a posteriori* de ϕ , a saber,

$$p(\phi|\mathbf{y}) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (m_g)^{-\frac{\nu_\phi}{2}} \Gamma(\frac{\nu_g + \nu_\phi}{2})}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{\nu_g} \Gamma(\frac{\nu_g}{2}) (\nu_g)^{\frac{\nu_g}{2}}} \left[1 + \frac{(\phi - \hat{\phi})' \Sigma^{-1} (\phi - \hat{\phi})}{\nu_g m_g} \right]^{-\frac{\nu_g + \nu_\phi}{2}} g(\phi), \\ -\infty < \phi_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, K-1, \quad (95)$$

onde

$$g(\phi) = \frac{Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{(\nu_g + \nu_\phi)}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g + S(\phi)}; \frac{\chi_{(\nu_g + \nu_\phi)}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g + S(\phi)}{\nu_b m_b} \right\}}{Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}; \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b} \right\}}, \quad (96)$$

$\hat{\phi}$, Σ , $|\Sigma|$, Σ^{-1} são de acordo como já definidos na seção (3.3.2) e $(\chi_{\nu_e}^2, \chi_{\nu_b}^2, \chi_{(\nu_\phi + \nu_g)}^2)$ são variáveis aleatórias independentes, com distribuição de qui-quadrado, associadas a $(\nu_e, \nu_b, \nu_\phi + \nu_g)$ graus de liberdade, respectivamente.

Observa-se que o primeiro fator em (95) é a densidade de uma t-Student multivariada (K-1)-dimensional, $t_{(K-1)}(\hat{\phi}, m_g \Sigma, \nu_g)$, a qual será a distribuição *a posteriori* de ϕ se a restrição $C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2$ for ignorada. O segundo fator $g(\phi)$ em (96) é chamado de fator modificador e representa o efeito da restrição $C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2$. Sendo $g(\phi)$ uma função apenas de $S(\phi)$, segue que o centro da distribuição em (95) está em $\hat{\phi}$ e os contornos de ϕ são elipsoidais. É fácil ver que

$\hat{\phi}$ é o vetor das médias *a posteriori* de ϕ e é também a única moda da distribuição. Segundo BOX & TIAO(1973), estas propriedades são muito semelhantes às da distribuição de ϕ nas análises quando se considera um modelo misto com dois fatores sem interação. No entanto, $g(\phi)$ não torna a distribuição $p(\phi|\mathbf{y})$ no modelo com dois fatores com interação mais monotonicamente decrescente da quantidade $S(\phi)$ uma vez que $g(\phi)$ não torna a distribuição de ϕ mais concentrada em torno de $\hat{\phi}$. A razão deste fato é que a quantidade σ_{eg}^2 aparece na matriz de variâncias e co-variâncias de ϕ levando a distribuição condicional $p(\phi|\sigma_{eg}^2, \mathbf{y})$ a estar sujeita a duas restrições: $\sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2$ e $\sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2$. Enquanto a primeira restrição tende a reduzir a dispersão da distribuição de ϕ a última tende a incrementá-la. O efeito combinado dessas duas restrições depende das duas razões dos quadrados médios: $\frac{m_e}{m_g}$ e $\frac{m_h}{m_g}$. Em geral, quanto maior as razões $\frac{m_e}{m_g}$ e $\frac{m_h}{m_g}$, maior será a redução na dispersão da distribuição de ϕ .

3.3.7 Aproximando a Distribuição $p(\phi|\mathbf{y})$

Embora seja possível se fazer inferências sobre ϕ empregando diretamente a distribuição *a posteriori* $p(\phi|\mathbf{y})$ em (95), BOX & TIAO(1973) propõem que seja usada uma aproximação para $p(\phi|\mathbf{y})$. Tal aproximação, deve-se ao fato de não ser possível expressar $p(\phi|\mathbf{y})$ de modo simples.

Para um dado conjunto de observações o efeito específico da restrição $C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2$ pode ser aproximadamente determinado conforme procedimento a seguir.

A distribuição *a posteriori* de ϕ , pode ser obtida por,

$$p(\phi|\mathbf{y}) = \int_0^\infty p(\phi|\sigma_{eg}^2, \mathbf{y}) p(\sigma_{eg}^2|\mathbf{y}) d\sigma_{eg}^2, \quad -\infty < \phi_i < +\infty, \quad i = 1, \dots, K-1, \quad (97)$$

onde

$$p(\phi|\sigma_{eg}^2, \mathbf{y}) = \sqrt{K} \left(\frac{JR}{2\pi} \right)^{\frac{\nu_\phi}{2}} (\sigma_{eg}^2)^{-\frac{\nu_\phi}{2}} \exp \left\{ -\frac{S(\phi)}{2\sigma_{eg}^2} \right\} I_{(-\infty, +\infty)}(\phi), \quad \sigma_{eg}^2 > 0, \quad (98)$$

$$p(\sigma_{eg}^2|\mathbf{y}) = \int_0^{\sigma_{eg}^2} \int_{\sigma_{eg}^2}^{\infty} p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2|\mathbf{y}) d\sigma_{egb}^2 d\sigma_e^2, \quad \sigma_{eg}^2 > 0 \quad e \quad (99)$$

$p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2|\mathbf{y})$ já definido em (89).

Aproximando $p(\sigma_{eg}^2|\mathbf{y})$ em Dois Estágios

O primeiro estágio consiste em tornar $p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2|\mathbf{y})$ proporcional ao produto de duas χ^2 's simples. Para este fim, integra-se $p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2|\mathbf{y})$ em relação a σ_{egb}^2 , isto é,

$$p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2|\mathbf{y}) = \frac{(\nu_e m_e)^{-1} p(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}) (\nu_g m_g)^{-1} p(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g})}{Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b} \right\}} \times \quad (100)$$

$$\frac{(\nu_b m_b)^{-1}}{\Gamma(\frac{\nu_b}{2}) 2^{\frac{\nu_b}{2}}} \int_{\sigma_{eg}^2}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{egb}^2}{\nu_b m_b} \right)^{-(\frac{\nu_b}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{\nu_b m_b}{2\sigma_{egb}^2} \right\} d\sigma_{egb}^2.$$

Com a substituição $\sigma_{egb}^2 = (\nu_b m_b) U_1$, chega-se ao seguinte resultado

$$p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2|\mathbf{y}) = \delta(\nu_e m_e)^{-1} p(\chi_{\nu_e}^2 = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}) (\nu_g m_g)^{-1} p(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}) \times$$

$$Pr \left\{ \chi_{\nu_b}^{-2} > \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_b m_b} \right\}, \quad \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0, \quad (101)$$

ou ainda,

$$p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2|\mathbf{y}) = \delta'(\nu_e m_e)^{-1} p(\chi_{\nu_e}^2 = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}) G_1(\sigma_{eg}^2), \quad \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0, \quad (102)$$

onde

$$\delta' = \delta Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g} \right\},$$

$$G_1(\sigma_{eg}^2) = \frac{(\nu_g m_g)^{-1} p(\chi_{\nu_g}^2 = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}) Pr \left\{ \chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{\sigma_{eg}^2} \right\}}{Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g} \right\}} \quad (103)$$

e

$$\delta^{-1} = Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b} \right\}.$$

Agora, $G_1(\sigma_{eg}^2)$ pode ser escrita como,

$$G_1(\sigma_{eg}^2) = \frac{(\nu_g m_g)^{-1} \Pr \left\{ \chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{\sigma_{eg}^2} \right\}}{\Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g} \right\}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu_g}{2}) 2^{\frac{\nu_g}{2}}} \left(\frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g} \right)^{-(\frac{\nu_g}{2}+1)} e^{-\frac{\nu_g m_g}{2\sigma_{eg}^2}} I_{(0,\infty)}(\sigma_{eg}^2).$$

Fazendo-se a mudança da variável para $Z = \frac{\nu_g m_g}{\sigma_{eg}^2}$, obtém-se

$$p \left(Z = \frac{\nu_g m_g}{\sigma_{eg}^2} | \mathbf{y} \right) = \frac{\Pr \left\{ \frac{\chi_{\nu_b}^2}{Z} < \frac{\nu_b m_b}{\nu_g m_g} \right\}}{\Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g} \right\}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu_g}{2}) 2^{\frac{\nu_g}{2}}} z^{\frac{\nu_g}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} I_{(0,\infty)}(z) \quad (104)$$

segue, portanto, que o r -ésimo momento da distribuição e a função geradora dos momentos de Z serão dados, respectivamente, por

$$E[Z^r | \mathbf{y}] = \int_0^\infty z^r p(z | \mathbf{y}) dz = 2^r \frac{\Gamma(\frac{\nu_g+2r}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_g}{2})} \frac{\Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g+2r} < \left(\frac{\nu_g+2r}{\nu_g} \right) \frac{m_b}{m_g} \right\}}{\Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g} \right\}} \quad (105)$$

e

$$M_z(t) = \int_0^\infty e^{tz} p(z | \mathbf{y}) dz = (1-2t)^{-\frac{\nu_g}{2}} \frac{\Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g} < \left(\frac{1}{1-2t} \right) \frac{m_b}{m_g} \right\}}{\Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g} \right\}}$$

ou

$$M_z(t) = (1-2t)^{-\frac{\nu_g}{2}} \frac{\frac{(\frac{\nu_b}{\nu_g})}{B(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2})} \int_0^{(\frac{1}{1-2t}) \frac{m_b}{m_g}} (\frac{\nu_b}{\nu_g} f)^{\frac{\nu_b}{2}-1} (1 + \frac{\nu_b}{\nu_g} f)^{-\frac{\nu_b+\nu_g}{2}} df}{\frac{(\frac{\nu_b}{\nu_g})}{B(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2})} \int_0^{(\frac{m_b}{m_g})} (\frac{\nu_b}{\nu_g} f)^{\frac{\nu_b}{2}-1} (1 + \frac{\nu_b}{\nu_g} f)^{-\frac{\nu_b+\nu_g}{2}} df}.$$

Estudando $M_z(t)$ para valores extremos de $\frac{m_b}{m_g}$, tem-se que

(a) $\lim_{\frac{m_b}{m_g} \rightarrow \infty} M_z(t) = (1-2t)^{-\frac{\nu_g}{2}}$, a qual é a função geradora dos momentos de uma variável aleatória com distribuição de $\chi_{\nu_g}^2$;

(b) Lembrando da regra de *Leibniz* para diferenciação de integrais, a saber,

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{g(t)}^{h(t)} f(x) dx \right] = f(h(t)) \frac{dh}{dt} - f(g(t)) \frac{dg}{dt}$$

e empregando a regra de L'Hospital, que consiste em diferenciar o numerador e o denominador individualmente e em seguida aplicar o limite novamente, verificou-se que $\lim_{\frac{m_b}{m_g} \rightarrow 0} M_z(t) = (1-2t)^{-\frac{\nu_g+\nu_b}{2}}$, a qual é a função geradora dos momentos de uma variável aleatória com distribuição $\chi_{\nu_g+\nu_b}^2$.

Portanto, vê-se que para valores grandes de $\frac{m_b}{m_g}$ a variável Z se aproxima de uma $\chi^2_{\nu_g}$ e quando $\frac{m_b}{m_g}$ se aproxima de zero, a variável aleatória Z se aproxima de uma $\chi^2_{\nu_g+\nu_b}$. Este fato, juntamente com a forma da densidade de Z dada em (104), sugere que a variável Z seja aproximada por uma χ^2 simples, isto é, $Z \sim a\chi_b^2$, onde a e b serão obtidos equacionando os dois primeiros momentos da variável Z com os dois primeiros momentos da variável $a\chi_b^2$.

Retomando a expressão (105), verifica-se que os dois primeiros momentos da variável aleatória Z são, respectivamente,

$$E[Z|\mathbf{y}] = \nu_g \frac{P_1}{P_3} \quad e \quad E[Z^2|\mathbf{y}] = \nu_g(\nu_g + 2) \frac{P_2}{P_3}$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 &= Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g+2} < \left(\frac{\nu_g + 2}{\nu_g} \right) \frac{m_b}{m_g} \right\} = I_y \left(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2} + 1 \right), \\ P_2 &= Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g+4} < \left(\frac{\nu_g + 4}{\nu_g} \right) \frac{m_b}{m_g} \right\} = I_y \left(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2} + 2 \right), \\ P_3 &= Pr \left\{ F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g} \right\} = I_y \left(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2} \right), \\ y &= \frac{\nu_b m_b}{\nu_b m_b + \nu_g m_g} \quad e \quad I_y(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^y u^{p-1} (1-u)^{q-1} du. \end{aligned} \quad (106)$$

Por outro lado tem-se que

$$E[a\chi_b^2] = ab \quad e \quad E[(a\chi_b^2)^2] = a^2 b^2 + 2a^2 b.$$

Daí,

$$ab \doteq \nu_g \frac{P_1}{P_3} \implies b = \frac{\nu_g}{a} \frac{P_1}{P_3} \quad e \quad a = \frac{(\nu_g + 2)}{2} \frac{P_2}{P_1} - \frac{\nu_g}{2} \frac{P_1}{P_3}. \quad (107)$$

Agora,

$$Z = \frac{\nu_g m_g}{\sigma_{eg}^2} \sim a\chi_b^2 \implies \sigma_{eg}^2 \sim \frac{\nu_g m_g}{a} \chi_b^{-2} \implies \begin{cases} b = \nu'_g \\ \frac{\nu_2 m_2}{a} = \nu'_g m'_g \implies m'_g = \frac{\nu_2 m_2}{a \nu'_g} \end{cases} \quad (108)$$

Por esta aproximação, $G_1(\sigma_{eg}^2)$ pode ser escrita aproximadamente como

$$G_1(\sigma_{eg}^2) \doteq (\nu'_g m'_g)^{-1} p(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu'_g m'_g}), \quad \sigma_{eg}^2 > 0 \quad (109)$$

e conseqüentemente, a distribuição *a posteriori* de $(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2)$, dada em (102), pode ser escrita aproximadamente como

$$p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2 | \mathbf{y}) \doteq \delta'(\nu_e m_e)^{-1} p(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}) (\nu'_g m'_g)^{-1} p(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu'_g m'_g}), \quad \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0. \quad (110)$$

O segundo estágio consiste em aproximar $p(\sigma_{eg}^2 | \mathbf{y})$ por uma simples χ^2 . Isto é, $\sigma_{eg}^2 \sim \nu_g^* m_g^* \chi_{\nu_g^*}^{-2}$. Neste sentido, integrando-se $p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2 | \mathbf{y})$ dada em (107) em relação a σ_e^2 , tem-se que

$$p(\sigma_{eg}^2 | \mathbf{y}) \doteq \delta'(\nu'_g m'_g)^{-1} p(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu'_g m'_g}) \frac{(\nu_e m_e)^{-1}}{\Gamma(\frac{\nu_e}{2}) 2^{\frac{\nu_e}{2}}} \int_0^{\sigma_{eg}^2} \left(\frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e} \right)^{-(\frac{\nu_e}{2}+1)} e^{-\frac{\nu_e m_e}{2\sigma_e^2}} d\sigma_e^2.$$

Com a substituição $\sigma_e^2 = (\nu_e m_e) U_2$, a distribuição marginal *a posteriori* aproximada de σ_{eg}^2 , resultante é

$$p(\sigma_{eg}^2 | \mathbf{y}) \doteq \delta'(\nu'_g m'_g)^{-1} p(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu'_g m'_g}) Pr \left\{ \chi_{\nu_e}^{-2} < \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_e m_e} \right\}, \quad \sigma_{eg}^2 > 0. \quad (111)$$

Mas esta distribuição pode ser escrita com

$$p(\sigma_{eg}^2 | \mathbf{y}) \doteq \frac{\delta''(\nu'_g m'_g)^{-1} p(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu'_g m'_g}) Pr \left\{ \chi_{\nu_e}^2 > \frac{\nu_e m_e}{\sigma_{eg}^2} \right\}}{Pr \left\{ F_{\nu_e, \nu'_g} > \frac{m_e}{m'_g} \right\}}, \quad \sigma_{eg}^2 > 0, \quad (112)$$

onde

$$\delta'' = \delta' Pr \left\{ F_{\nu_e, \nu'_g} > \frac{m_e}{m'_g} \right\}.$$

Observa-se que a distribuição aproximada de $P(\sigma_{eg}^2 | \mathbf{y})$ dada em (112) não fica expressa em termos de uma função simples, pois para confeccionar seu gráfico, é preciso que se calcule duas probabilidades para estabelecer cada ponto da distribuição. Este fato sugere que a distribuição seja aproximada por uma χ^2 simples, cujo procedimento é similar a aquele usado anteriormente para aproximar a distribuição *a posteriori* de $(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2)$.

Se for ignorada a constante δ'' , a distribuição $p(\sigma_{eg}^2 | \mathbf{y})$ dada em (112) fica semelhante a $G_1(\sigma_{eg})$ dada em (103), de modo que se for feita a mudança

da variável σ_{eg}^2 para $Z = \frac{(\nu'_g m'_g)}{\sigma_{eg}^2}$, a distribuição aproximada resultante de Z será dada por

$$p(z|\mathbf{y}) \doteq \frac{Pr \left\{ \frac{Z}{\chi_{\nu_e}^2} < \frac{\nu'_g m'_g}{\nu_e m_e} \right\}}{Pr \left\{ F_{\nu'_g, \nu_e} < \frac{m'_g}{m_e} \right\}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu'_g}{2}) 2^{\frac{\nu'_g}{2}}} z^{\frac{\nu'_g}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} I_{(0,\infty)}(z), \quad (113)$$

cujo r -ésimo momento de Z será dado por

$$E[Z^r|\mathbf{y}] = 2^r \frac{\Gamma(\frac{\nu'_g+2r}{2})}{\Gamma(\frac{\nu'_g}{2})} \frac{Pr \left\{ F_{\nu'_g+2r, \nu_e} < \left(\frac{\nu'_g}{\nu'_g+2r} \right) \frac{m'_g}{m_e} \right\}}{Pr \left\{ F_{\nu'_g, \nu_e} < \frac{m'_g}{m_e} \right\}}. \quad (114)$$

Igualando os dois primeiros momentos da distribuição de Z aos dois primeiros momentos da distribuição da variável $c\chi_d^2$, vem

$$E[Z|\mathbf{y}] = \nu'_g \frac{P_4}{P_6} \doteq cd \implies d = \frac{\nu'_g}{c} \frac{P_4}{P_6} \quad (115)$$

e

$$E[Z^2|\mathbf{y}] = \nu'_g(\nu'_g + 2) \frac{P_5}{P_6} \implies c = \frac{(\nu'_g + 2)}{2} \frac{P_5}{P_4} - \frac{\nu'_g}{2} \frac{P_4}{P_6} \quad (116)$$

onde

$$\begin{aligned} P_4 &= Pr \left\{ F_{\nu'_g+2, \nu_e} < \left(\frac{\nu'_g}{\nu'_g+2} \right) \frac{m'_g}{m_e} \right\} = I_x \left(\frac{\nu'_g}{2} + 1, \frac{\nu_e}{2} \right), \\ P_5 &= Pr \left\{ F_{\nu'_g+4, \nu_e} < \left(\frac{\nu'_g}{\nu'_g+4} \right) \frac{m'_g}{m_e} \right\} = I_x \left(\frac{\nu'_g}{2} + 2, \frac{\nu_e}{2} \right), \\ P_6 &= Pr \left\{ F_{\nu'_g, \nu_e} < \frac{m'_g}{m_e} \right\} = I_x \left(\frac{\nu'_g}{2}, \frac{\nu_e}{2} \right), \end{aligned} \quad (117)$$

$$x = \frac{\nu'_g m'_g}{\nu'_g m'_g + \nu_e m_e} \quad e \quad I_x(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^\infty u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$$

Agora

$$Z = \frac{\nu'_g m'_g}{\sigma_{eg}^2} \sim c\chi_d^2 \implies \sigma_{eg}^2 \sim \frac{\nu'_g m'_g}{c} \chi_d^2 \implies \begin{cases} d = \nu_g^* \\ \frac{\nu'_g m'_g}{c} = \nu_g^* m_g^* \implies m_g^* = \frac{\nu'_g m'_g}{c \nu_g^*} \end{cases} \quad (118)$$

Para este grau de aproximação, a distribuição marginal *a posteriori* de σ_{eg}^2 será dada, aproximadamente, por

$$p(\sigma_{eg}^2|\mathbf{y}) \doteq (\nu_g^* m_g^*)^{-1} p(\chi_{\nu_g^*}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g^* m_g^*}) I_{(0,\infty)}(\sigma_{eg}^2). \quad (119)$$

Agora, substituindo-se este resultado em (97), tem-se uma aproximação para a distribuição *a posteriori* de ϕ , isto é,

$$\begin{aligned} p(\phi|\mathbf{y}) &\doteq \int_0^\infty p(\phi|\sigma_{eg}^2, \mathbf{y}) (\nu_g^* m_g^*)^{-1} p(\chi_{\nu_g^*}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g^* m_g^*}) d\sigma_{eg}^2 \\ &\doteq \sqrt{K} \left(\frac{JR}{2\pi} \right)^{\frac{\nu_\phi}{2}} \int_0^\infty (\sigma_{eg}^2)^{-\frac{\nu_\phi}{2}} e^{-\frac{S(\phi)}{2\sigma_{eg}^2}} \frac{(\nu_g^* m_g^*)^{-1}}{\Gamma(\frac{\nu_g^*}{2}) 2^{\frac{\nu_g^*}{2}}} \left(\frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g^* m_g^*} \right)^{-(\frac{\nu_g^*}{2}+1)} e^{-\frac{\nu_g^* m_g^*}{2\sigma_{eg}^2}} d\sigma_{eg}^2, \end{aligned}$$

que após algumas operações algébricas, chega-se a

$$\begin{aligned} p(\phi|\mathbf{y}) &\doteq \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (m_g^*)^{-\frac{\nu_\phi}{2}} \Gamma(\frac{\nu_g^* + \nu_\phi}{2})}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{\nu_\phi} \Gamma(\frac{\nu_g^*}{2}) (\nu_g^*)^{\frac{\nu_g^*}{2}}} \left[1 + \frac{(\phi - \hat{\phi})' \Sigma^{-1} (\phi - \hat{\phi})}{\nu_g^* m_g^*} \right]^{-\frac{\nu_g^* + \nu_\phi}{2}}, \\ &\quad -\infty < \phi_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, K-1, \end{aligned} \quad (120)$$

a qual é a densidade de uma t-Student multivariada $(K-1)$ -dimensional, com vetor de médias $\hat{\phi}$, matriz de variâncias e covariâncias $m_g^* \Sigma$ e ν_g^* graus de liberdade, denotada por $t_{(K-1)}(\hat{\phi}, m_g^* \Sigma, \nu_g^*)$. Sendo assim, o efeito aproximado do fator modificador $g(\phi)$ é apenas a mudança na escala do fator $(m_g)^{\frac{1}{2}}$ para $(m_g^*)^{\frac{1}{2}}$ e a mudança nos graus de liberdade de ν_g para ν_g^* .

3.3.8 Inferências Conjuntas e Marginais Sobre ϕ na Análise do Grupo de J Experimentos Completamente Aleatorizados

Geralmente há interesse em se fazer comparações gerais de todos os K efeitos médios dos tratamentos $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)'$. Para tal finalidade, deve ser tomado qualquer conjunto de $(K-1)$ contrastes não redundantes $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{K-1})'$ e determinar a região H.P.D. de conteúdo $(1-\alpha)$, aproximada, com base no fato de que

$$\frac{S(\phi)}{\nu_\phi m_g^*} = \frac{m(\phi)}{m_g^*} \sim F_{[\nu_\phi, \nu_g^*, \alpha]}. \quad (121)$$

Particularmente, verificar a hipótese $H_0 : \theta_1 = \dots = \theta_K = \theta$ (para algum θ desconhecido) a um nível de significância α , é equivalente a estudar a distribuição conjunta *a posteriori* de $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{K-1})'$ e verificar se o ponto $\phi_0 = (\phi_{10} = 0, \phi_{20} = 0, \dots, \phi_{(K-1)0} = 0)$ está dentro ou fora da região H.P.D. de conteúdo

$(1 - \alpha)$. Portanto, o ponto $\phi_0 = \mathbf{0}$ ($\phi_{10} = \theta_1 - \bar{\theta} = 0, \phi_{20} = \theta_2 - \bar{\theta} = 0, \dots, \phi_{(K-1)0} = \theta_{(K-1)} - \bar{\theta} = 0$)' estará incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$\frac{S(\phi_0)}{\nu_\phi m_g^*} = \frac{(\phi_0 - \hat{\phi})' \Sigma^{-1} (\phi_0 - \hat{\phi})}{\nu_\phi m_g^*} = \frac{JR \sum_{i=1}^K (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2}{\nu_\phi m_g^*} < F_{[\nu_\phi, \nu_g^*, \alpha]}. \quad (122)$$

Se for de interesse comparar os efeitos médios de dois tratamentos, isto pode ser feito, usando o fato de que $\delta = \theta_i - \theta_s$, $i \neq s$, ($i, s = 1, 2, \dots, K$), é aproximadamente distribuído como uma t-Student univariada de média $\hat{\delta} = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{s..}$, variância $\frac{2}{JR} m_g^*$ e ν_g^* graus de liberdade, denotada por, $t_1(\hat{\delta}, \frac{2}{JR} m_g^*, \nu_g^*)$. Para fazer isto, basta construir o intervalo de credibilidade *a posteriori*, com conteúdo $(1 - \alpha)$, aproximado, para δ , ou seja,

$$Pr \left\{ \hat{\delta} - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2}{JR} m_g^*} \leq \delta \leq \hat{\delta} + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2}{JR} m_g^*} \right\} \doteq 1 - \alpha \quad (123)$$

e verificar se o ponto zero está dentro ou fora deste intervalo.

Dentre os grupos de $(K - 1)$ contrastes não redundantes ϕ dos efeitos médios dos tratamentos θ , (ou seja $\phi = D\theta$) os contrastes ortogonais são de especial interesse neste trabalho. Sendo assim, a quantidade $S(\phi)$ associada a problemas desta natureza é dada por

$$S(\phi) = (\phi - \hat{\phi})' [D(X'X)^{-1}D']^{-1} (\phi - \hat{\phi}), \quad (124)$$

onde $(X'X)^{-1} = \text{Diag}\{\frac{1}{JR}, \dots, \frac{1}{JR}\}$ com dimensão $(K - 1)$, $D = (d_{ji})$, $i = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, (K - 1)$, $\sum_{i=1}^K d_{ji} = 0$, $\sum_{i=1}^K d_{ji} d_{j'i} = 0$, $j \neq j'$ e $\hat{\phi}_j = \sum_{i=1}^K d_{ji} \bar{y}_{i..}$. Nestas condições, o ponto $\phi_0 = (\phi_{10} = 0, \phi_{20} = 0, \dots, \phi_{(K-1)0} = 0)$ ' estará incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$S(\phi_0 = \mathbf{0}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^K d_{1i} \bar{y}_{i..} \right)^2}{\sum_{i=1}^K \frac{d_{1i}^2}{JR}} + \frac{\left(\sum_{i=1}^K d_{2i} \bar{y}_{i..} \right)^2}{\sum_{i=1}^K \frac{d_{2i}^2}{JR}} + \dots + \frac{\left(\sum_{i=1}^K d_{(K-1)i} \bar{y}_{i..} \right)^2}{\sum_{i=1}^K \frac{d_{(K-1)i}^2}{JR}} < \nu_\phi m_g^* F_{[\nu_\phi, \nu_g^*, \alpha]}. \quad (125)$$

Ademais, inferências marginais aproximadas acerca de um subconjunto de q contraste ortogonais $\boldsymbol{\phi}^q = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q)'$, $q < (K - 1)$, podem ser feitas, com base no fato de que

$$\frac{S(\boldsymbol{\phi}^q)}{qm_g^*} = \frac{(\boldsymbol{\phi}^q - \hat{\boldsymbol{\phi}}^q)'[D_q(X_q'X_q)^{-1}D_q']^{-1}(\boldsymbol{\phi}^q - \hat{\boldsymbol{\phi}}^q)}{qm_g^*} \sim F_{[q, \nu_g^*, \alpha]} \quad (126)$$

onde, $\hat{\boldsymbol{\phi}}^q = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_q)$, $(X_q'X_q)^{-1} = \text{Diag}\{\frac{1}{JR}, \dots, \frac{1}{JR}\}$ de posto q e $D_q = (d_{ji})$, $i = 1, 2, \dots, K$, $j = 1, 2, \dots, q$ é a matriz dos coeficientes dos q contrastes ortogonais.

Verificar a hipótese $H_0 : \boldsymbol{\phi}^q = \mathbf{0}$ a um nível de significância α é equivalente a tomar a distribuição conjunta *a posteriori* de $\boldsymbol{\phi}^q = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q)'$ e verificar se o ponto particular $\boldsymbol{\phi}_0^q = (\phi_{10} = 0, \phi_{20} = 0, \dots, \phi_{q0} = 0)'$ está incluído ou excluído da região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$. Neste sentido, o ponto $\boldsymbol{\phi}_0^q = \mathbf{0}$ estará incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$S(\boldsymbol{\phi}_0^q = \mathbf{0}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^K d_{1i}\bar{y}_{i..}\right)^2}{\sum_{i=1}^K \frac{d_{1i}^2}{JR}} + \frac{\left(\sum_{i=1}^K d_{2i}\bar{y}_{i..}\right)^2}{\sum_{i=1}^K \frac{d_{2i}^2}{JR}} + \dots + \frac{\left(\sum_{i=1}^K d_{qi}\bar{y}_{i..}\right)^2}{\sum_{i=1}^K \frac{d_{qi}^2}{JR}} < qm_g^*F_{[q, \nu_g^*, \alpha]}. \quad (127)$$

Em particular, inferências marginais aproximadas sobre qualquer contraste ϕ_j , podem ser feitas, usando o fato de que

$$\phi_j | \mathbf{y} \sim t_1 \left[\hat{\phi}_j, \frac{m_g^*}{JR} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2, \nu_g^* \right]. \quad (128)$$

Verificar a hipótese $H_0 : \phi_j = 0$ a um nível de significância α , é equivalente a construir o intervalo de credibilidade *a posteriori* com conteúdo $(1 - \alpha)$, dado por

$$Pr \left\{ \hat{\phi}_j - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{m_g^*}{JR} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2} \leq \phi_j \leq \hat{\phi}_j + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{m_g^*}{JR} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2} \right\} = 1 - \alpha \quad (129)$$

e verificar se o ponto *zero* está dentro ou fora deste intervalo.

3.3.9 Distribuição Marginal a Posteriori de σ_e^2

Em geral, na prática, interessa ao pesquisador o estudo do comportamento probabilístico dos componentes da variância, marginalmente ou de relações

entre eles. No presente estudo, trabalhou-se apenas com as distribuições marginais *a posteriori* de tais componentes.

Para determinar a distribuição *posteriori* de σ_e^2 , é preciso integrar $p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y})$, dada em (89), em relação a σ_{eg}^2 e σ_{egb}^2 , ou seja,

$$\begin{aligned} p(\sigma_e^2 | \mathbf{y}) &= \int_{\sigma_e^2}^{\infty} \int_{\sigma_{eg}^2}^{\infty} p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y}) d\sigma_{egb}^2 d\sigma_{eg}^2 \\ &= \delta(\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right) \frac{(\nu_g m_g)^{-1}}{\Gamma(\frac{\nu_g}{2}) 2^{\frac{\nu_g}{2}}} \int_{\sigma_e^2}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}\right)^{-(\frac{\nu_g}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\nu_g m_g}{2\sigma_{eg}^2}\right\} \\ &\quad \times \frac{(\nu_b m_b)^{-1}}{\Gamma(\frac{\nu_b}{2}) 2^{\frac{\nu_b}{2}}} \int_{\sigma_{eg}^2}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{egb}^2}{\nu_b m_b}\right)^{-(\frac{\nu_b}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\nu_b m_b}{2\sigma_{egb}^2}\right\} d\sigma_{egb}^2 d\sigma_{eg}^2, \end{aligned} \quad (130)$$

a qual, após algumas operações algébricas, resulta em

$$\begin{aligned} p(\sigma_e^2 | \mathbf{y}) &= \delta(\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right) \\ &\quad \times \int_{\sigma_e^2}^{\infty} (\nu_g m_g)^{-1} p\left(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}\right) Pr\left\{\chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{\sigma_{eg}^2}\right\} d\sigma_{eg}^2. \end{aligned} \quad (131)$$

Em palavras, a distribuição *posteriori* de σ_e^2 é proporcional ao produto de dois fatores: o primeiro, $(\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right)$, é a densidade de uma qui-quadrado inversa com ν_e graus de liberdade, a qual representa a distribuição *posteriori* de σ_e^2 , se a restrição $C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2$ for ignorada. E, o segundo fator, uma integral dupla, é induzido pela restrição C . Devido a esta integral ser uma quantidade monotonicamente decrescente de σ_e^2 , o efeito da restrição desloca a distribuição *a posteriori* de σ_e^2 para esquerda de uma χ^{-2} . Avaliações exatas da distribuição *posteriori* de σ_e^2 são bastante trabalhosas até com auxílio de computadores. Contudo, para avaliações aproximadas, pode-se usar a distribuição *posteriori* aproximada por uma simples qui-quadrado. A técnica consiste em igualar os dois primeiros momentos da distribuição da variável $Z = \frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2}$ aos dois primeiros momentos de uma $\exp_f^2$, semelhante ao que foi feito na seção anterior. Tomando-se a expressão em (131) e fazendo-se as substituições $\sigma_{egb}^2 = (\nu_b m_b)U_1$ e $\sigma_{eg}^2 = (\nu_g m_g)U_2$

na segunda e primeira integrais, respectivamente, chega-se ao seguinte resultado,

$$p(\sigma_e^2|\mathbf{y}) = \frac{Pr\left\{\chi_{\nu_g}^{-2} > \frac{\sigma_e^2}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_b}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\} (\nu_e m_e)^{-1} \left(\frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right)^{-(\frac{\nu_e}{2}+1)} e^{-\frac{\nu_e m_e}{2\sigma_e^2}}}{Pr\left\{\frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\} \Gamma(\frac{\nu_e}{2}) 2^{\frac{\nu_e}{2}}} \quad \sigma_e^2 > 0. \quad (132)$$

Usando a transformação $Z = \frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2}$, tem-se que a distribuição *posteriori* de Z fica

$$p(z|\mathbf{y}) = \frac{Pr\left\{\frac{Z}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\}}{Pr\left\{\frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu_e}{2}) 2^{\frac{\nu_e}{2}}} z^{(\frac{\nu_e}{2}-1)} e^{-\frac{z}{2}} I_{(0,\infty)}(z). \quad (133)$$

Desde que Z seja distribuída como uma $\chi_{\nu_e}^2$, o r -ésimo momento da distribuição será dado por

$$E[Z^r|\mathbf{y}] = \int_0^\infty z^r p(z|\mathbf{y}) dz = 2^r \frac{\Gamma(\frac{\nu_e+2r}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_e}{2})} \frac{Pr\left\{\frac{\chi_{\nu_e+2r}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\}}{Pr\left\{\frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\}} \quad (134)$$

cujos primeiro e segundo momentos da distribuição resultará, conforme (134), em

$$E[Z|\mathbf{y}] = \nu_e \frac{Pr\left\{\frac{\chi_{\nu_e+2}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\}}{Pr\left\{\frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\}} = \nu_e \frac{P_7}{P_9} \quad e \quad (135)$$

$$E[Z^2|\mathbf{y}] = \nu_e(\nu_e + 2) \frac{Pr\left\{\frac{\chi_{\nu_e+4}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\}}{Pr\left\{\frac{\chi_{\nu_e}^2}{\chi_{\nu_g}^2} > \frac{\nu_e m_e}{\nu_g m_g}, \frac{\chi_{\nu_g}^2}{\chi_{\nu_b}^2} > \frac{\nu_g m_g}{\nu_b m_b}\right\}} = \nu_e(\nu_e + 2) \frac{P_8}{P_9}, \quad (136)$$

respectivamente.

Cálculo de e e f

Equacionando os dois primeiros momentos de Z com os dois primeiros momentos da variável $e\chi_f^2$, encontra-se

$$f = \nu_e^* = \frac{\nu_e}{e} \frac{P_7}{P_9} \quad e = \frac{(\nu_e + 2)P_8}{2P_7} - \frac{\nu_e P_7}{2P_9} \quad (137)$$

Agora,

$$Z = \frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2} \sim e\chi_f^2 \Rightarrow \sigma_e^2 \sim \frac{\nu_e m_e}{e} \chi_f^{-2} \Rightarrow \begin{cases} f = \nu_e^* \\ \frac{\nu_e m_e}{e} = \nu_e^* m_e^* \Rightarrow m_e^* = \frac{\nu_e m_e}{e\nu_e^*} \end{cases}. \quad (138)$$

Assim, uma aproximação para a distribuição marginal *posteriori* de σ_e^2 , será dada por

$$p(\sigma_e^2 | \mathbf{y}) \doteq (\nu_e^* m_e^*)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e^*}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e^* m_e^*}\right) I_{(0,\infty)}(\sigma_e^2). \quad (139)$$

Intervalos de credibilidade aproximados para σ_e^2 , podem ser feitos usando o fato de que

$$\frac{\nu_e^* m_e^*}{\sigma_e^2} \sim \chi_{\nu_e^*}^2,$$

ou seja, para $0 < \eta_1 < \eta_2 < \infty$,

$$Pr \left\{ \frac{\nu_e^* m_e^*}{\eta_2} \leq \sigma_e^2 \leq \frac{\nu_e^* m_e^*}{\eta_1} \right\} \doteq 1 - \alpha, \quad (140)$$

onde η_1 e η_2 são valores obtidos das tabelas usuais da distribuição de qui-quadrado com ν_e^* graus de liberdade.

O cálculo de (e, f) envolve uma integral de *Dirichlet* bivariada, a qual pode ser resolvida usando a identidade dada em (85). Embora esta simplifique o problema, existem métodos de aproximação para tal integral, como pode ser visto em TIAO & GUTTMAN (1965).

Uma aproximação pela χ^{-2} em dois estágios

Além da aproximação para a distribuição *posteriori* de σ_e^2 dada em (139), BOX & TIAO (1973) propõem uma outra aproximação, a qual é feita em dois estágios: primeiro considera-se a distribuição conjunta *posteriori* de $(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2)$, a qual é obtida da integração de $p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2 | \mathbf{y})$, dada em (89), em relação a σ_{egb}^2 , ou seja,

$$p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2 | \mathbf{y}) = \delta(\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right) (\nu_g m_g)^{-1} p\left(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}\right) \quad (141)$$

$$\frac{\nu_b m_b}{\Gamma(\frac{\nu_b}{2}) 2^{\frac{\nu_b}{2}}} \int_{\sigma_{eg}}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{egb}^2}{\nu_b m_b}\right)^{-(\frac{\nu_b}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\nu_b m_b}{2\sigma_{egb}^2}\right\} d\sigma_{egb}^2,$$

a qual resulta em

$$p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2 | \mathbf{y}) = \delta'(\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right) G_2(\sigma_{eg}^2), \quad \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0, \quad (142)$$

onde

$$G_2(\sigma_{eg}^2) = \frac{(\nu_g m_g)^{-1} p\left(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}\right) Pr\left\{\chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{\sigma_{eg}^2}\right\}}{Pr\left\{F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g}\right\}} \quad (143)$$

e

$$\delta' = \delta Pr\left\{F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g}\right\}.$$

Considerando-se a função $G_2(\sigma_{eg}^2)$ como se fosse a distribuição de σ_{eg}^2 , pode-se então, empregar o método da aproximação por uma simples χ^{-2} , conforme foi desenvolvido anteriormente, isto é, $\sigma_{eg}^2 \sim \nu'_g m'_g \chi_{\nu'_g}^{-2}$.

Equacionando-se os dois primeiros momentos da variável $Z = \frac{\nu_g m_g}{\sigma_{eg}^2}$ com os dois primeiros momentos de $a\chi_b^2$, obtém-se

$$b = \frac{\nu_g P_1}{a P_3} \quad e \quad a = \frac{(\nu_g + 2) P_2}{2 P_1} - \frac{\nu_g P_1}{2 P_3}, \quad (144)$$

Agora,

$$Z = \frac{\nu_g m_g}{\sigma_{eg}^2} \sim a\chi_b^2 \Rightarrow \sigma_{eg}^2 \sim \frac{\nu_g m_g}{a} \chi_b^{-2} \Rightarrow \begin{cases} b = \nu'_g \\ \frac{\nu_g m_g}{a} = \nu'_g m'_g \Rightarrow m'_g = \frac{\nu_g m_g}{a\nu'_g} \end{cases} \quad (145)$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 &= Pr\left\{F_{\nu_b, \nu_g+2} < \left(\frac{\nu_g + 2}{\nu_g}\right) \frac{m_b}{m_g}\right\} = I_y\left(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2} + 1\right), \\ P_2 &= Pr\left\{F_{\nu_b, \nu_g+4} < \left(\frac{\nu_g + 4}{\nu_g}\right) \frac{m_b}{m_g}\right\} = I_y\left(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2} + 2\right), \\ P_3 &= Pr\left\{F_{\nu_b, \nu_g} < \frac{m_b}{m_g}\right\} = I_y\left(\frac{\nu_b}{2}, \frac{\nu_g}{2}\right) \quad e \quad y = \frac{\nu_b m_b}{\nu_b m_b + \nu_g m_g}. \end{aligned} \quad (146)$$

Agora, a expressão (142) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2 | \mathbf{y}) &\doteq \delta'(\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right) (\nu'_g m'_g)^{-1} p\left(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu'_g m'_g}\right), \\ &\sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0. \end{aligned} \quad (147)$$

Observa-se que o efeito da integração, modifica o quadrado médio da interação, de m_g para m'_g e os graus de liberdade, de ν_g para ν'_g .

Por outro lado, sabendo-se que $\sigma_{eg}^2 = \sigma_e^2 + R\sigma_g^2$, então, a distribuição *posteriori* de (σ_e^2, σ_g^2) pode ser expressa como

$$p(\sigma_e^2, \sigma_g^2 | \mathbf{y}) \doteq \frac{\delta'' R(\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right) (\nu'_g m'_g)^{-1} p\left(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu'_g m'_g}\right)}{Pr\left\{F_{\nu'_g, \nu_e} < \frac{m'_g}{m_e}\right\}}, \quad (148)$$

$\sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2 > 0.$

onde

$$\delta'' = \delta' Pr\left\{F_{\nu'_g, \nu_e} < \frac{m'_g}{m_e}\right\}.$$

O segundo estágio, também consiste em aproximar $p(\sigma_e^2 | \mathbf{y})$ por uma simples χ^{-2} . Isto é, $\sigma_e^2 \sim \nu'_e m'_e \chi_{\nu'_e}^{-2}$, onde ν'_e e m'_e serão determinados conforme se segue.

$$\nu'_e = \frac{\nu_e}{k} \frac{P_{10}}{P_{12}} \quad e \quad k = \frac{(\nu_e + 2)}{2} \frac{P_{11}}{P_{10}} - \frac{\nu_e}{2} \frac{P_{10}}{P_{12}}, \quad m'_e = \frac{\nu_e m_e}{k \nu'_e} \quad (149)$$

onde

$$\begin{aligned} P_{10} &= Pr\left\{F_{\nu'_g, \nu_e+2} < \left(\frac{\nu_e + 2}{\nu_e}\right) \frac{m'_g}{m_e}\right\} = I_x\left(\frac{\nu'_g}{2}, \frac{\nu_e}{2} + 1\right), \\ P_{11} &= Pr\left\{F_{\nu'_g, \nu_e+4} < \left(\frac{\nu_e + 4}{\nu_e}\right) \frac{m'_g}{m_e}\right\} = I_x\left(\frac{\nu'_g}{2}, \frac{\nu_e}{2} + 2\right), \\ P_{12} &= Pr\left\{F_{\nu'_g, \nu_e} < \frac{m'_g}{m_e}\right\} = I_x\left(\frac{\nu'_g}{2}, \frac{\nu_e}{2}\right) \quad e \quad x = \frac{\nu'_g m'_g}{\nu'_g m'_g + \nu_e m_e}. \end{aligned} \quad (150)$$

Para este grau de aproximação, a densidade *posteriori* de σ_e^2 aproximada em dois estágios será

$$p(\sigma_e^2 | \mathbf{y}) \doteq (\nu'_e m'_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu'_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu'_e m'_e}\right) I_{(0, \infty)}(\sigma_e^2). \quad (151)$$

Se o efeito da restrição $C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2$ for ignorado (ou desprezível), então inferências sobre σ_e^2 podem ser feitas a partir da distribuição irrestrita, ou seja,

$$p(\sigma_e^2 | \mathbf{y}) = (\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right) I_{(0, \infty)}(\sigma_e^2). \quad (152)$$

Probabilidades *posteriori* acerca de σ_e^2 podem ser determinadas com base no fato de que

$$\frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2} \sim \chi_{\nu_e}^2.$$

e para $0 < \eta_1 < \eta_2 < \infty$,

$$Pr \left\{ \frac{\nu_e m_e}{\eta_2} \leq \sigma_e^2 \leq \frac{\nu_e m_e}{\eta_1} \right\} = 1 - \alpha. \quad (153)$$

onde η_1 e η_2 são obtidos das tabelas usuais da distribuição de χ^2 .

3.3.10 Composição das Estimativas das Variâncias para Estimar σ_e^2

A aproximação por uma χ^{-2} simples em dois estágios, para a distribuição *posteriori* de σ_e^2 , dada em (151), pode, alternativamente, ser posta na forma

$$\frac{1}{\sigma_e^2} \frac{\nu_e m_e + \lambda_1 \nu_g m_g + \lambda_2 \nu_b m_b}{\nu_e + w_1 \nu_g + w_2 \nu_b} \sim \frac{\chi_{(\nu_e + w_1 \nu_g + w_2 \nu_b)}^2}{\nu_e + w_1 \nu_g + w_2 \nu_b}, \quad (154)$$

onde

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \frac{\nu_e m_e}{\nu'_g m'_g}, \quad w_1 = \frac{\nu'_e - \nu_e}{\nu'_g}, \quad (155)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{k} - 1 \right) (1 - a) \frac{\nu_e m_e}{\nu_b m_b} \quad e \quad w_2 = \left(\frac{\nu'_e - \nu_e}{\nu_b} \right) \left(1 - \frac{\nu_g}{\nu'_g} \right).$$

Conforme BOX & TIAO (1973), a expressão (154), pode ser pensada como a solução bayesiana fornecida pela composição dos três quadrados médios (m_e, m_g, m_b) para estimar o componente da variância σ_e^2 .

Para calcular probabilidades *posteriori* acerca da variância composta deve ser usado o fato indicado na expressão (154).

3.3.11 Distribuição Marginal a *Posteriori* de σ_g^2

A distribuição *posteriori* de σ_g^2 é obtida, aproximadamente, integrando-se $p(\sigma_e^2, \sigma_g^2 | \mathbf{y})$, dada em (148), em relação a σ_e^2 , isto é,

$$p(\sigma_g^2 | \mathbf{y}) \doteq \delta'' \frac{R(\nu_e m_e)^{-1} (\nu'_g m'_g)^{-1}}{Pr \left\{ F_{\nu'_g, \nu_e} < \frac{m'_g}{m_e} \right\}} \int_0^\infty p \left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e} \right) p \left(\chi_{\nu'_g} = \frac{\sigma_e^2 + R\sigma_g^2}{\nu'_g m'_g} \right) d\sigma_e^2, \quad (156)$$

$\sigma_g > 0.$

Observa-se, portanto, que não é possível expressar a distribuição *posteriori* de σ_g^2 em termos de uma função simples. O valor de $p(\sigma_g^2|\mathbf{y})$, para cada valor de σ_g^2 , pode ser obtido através de integração numérica, para qualquer precisão desejada. Isto poderá ser feito para avaliar a distribuição *posteriori* exata de σ_g^2 . Contudo, aproximações menos laboriosas poderão ser usadas. Dentre elas, BOX & TIAO (1973), sugerem que a distribuição *posteriori* de σ_g^2 seja aproximada por

$$p(\sigma_g^2|\mathbf{y}) \doteq \frac{R(\nu'_g m'_g)^{-1} p\left(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{m_e + R\sigma_g^2}{\nu'_g m'_g}\right)}{Pr\left\{\chi_{\nu'_g}^2 < \frac{\nu'_g m'_g}{m_e}\right\}} I_{(0,\infty)}(\sigma_g^2). \quad (157)$$

Para este grau de aproximação, a quantidade $\frac{m_e + R\sigma_g^2}{\nu'_g m'_g} \sim \chi_{\nu'_g}^{-2}$ truncada abaixo de $\frac{m_e}{\nu'_g m'_g}$, ou equivalentemente, a quantidade $\frac{\nu'_g m'_g}{m_e + R\sigma_g^2} \sim \chi_{\nu'_g}^2$ truncada acima de $\frac{\nu'_g m'_g}{m_e}$.

Probabilidades *posteriori* acerca de σ_g^2 , podem ser aproximadamente determinadas, usando-se as tabelas usuais da distribuição de χ^2 . Neste sentido, para $0 < \eta_1 < \eta_2 < \infty$, tem-se que

$$Pr\left\{\eta_1 < \sigma_g^2 < \eta_2|\mathbf{y}\right\} \doteq \frac{Pr\left\{\frac{\nu'_g m'_g}{m_e + R\eta_2} < \chi_{\nu'_g}^2 < \frac{\nu'_g m'_g}{m_e + R\eta_1}\right\}}{Pr\left\{\chi_{\nu'_g}^2 < \frac{\nu'_g m'_g}{m_e}\right\}}. \quad (158)$$

Em particular, para $\eta > 0$, tem-se que

$$Pr\left\{0 < \sigma_g^2 < \eta|\mathbf{y}\right\} \doteq \frac{Pr\left\{\frac{\nu'_g m'_g}{m_e + R\eta} < \chi_{\nu'_g}^2 < \frac{\nu'_g m'_g}{m_e}\right\}}{Pr\left\{\chi_{\nu'_g}^2 < \frac{\nu'_g m'_g}{m_e}\right\}}. \quad (159)$$

3.3.12 Distribuição Marginal a Posteriori de σ_b^2

A densidade *posteriori* de σ_b^2 , $p(\sigma_b^2|\mathbf{y})$, pode ser obtida, integrando-se $p(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2|\mathbf{y})$, dada em (92), em relação a σ_e^2 e σ_g^2 , ou seja,

$$\begin{aligned} p(\sigma_b^2|\mathbf{y}) &= \delta(KR^2) \int_0^\infty \int_0^\infty (\nu_e m_e)^{-1} p\left(\chi_{\nu_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu_e m_e}\right) (\nu_g m_g)^{-1} p\left(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_e^2 + R\sigma_g^2}{\nu_g m_g}\right) \\ &\quad \times (\nu_b m_b)^{-1} p\left(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{\sigma_e^2 + R\sigma_g^2 + KR\sigma_b^2}{\nu_b m_b}\right) d\sigma_e^2 d\sigma_g^2, \\ &\quad \sigma_b^2 > 0. \end{aligned} \quad (160)$$

Observa-se, portanto, que $p(\sigma_b^2|\mathbf{y})$ não pode ser expressa em termos de uma função simples. Avaliações exatas de $p(\sigma_b^2|\mathbf{y})$ são, sem dúvida, bastante laboriosas. Em geral, usa-se uma aproximação para ela. Esta é obtida, integrando-se inicialmente, $p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2|\mathbf{y})$, dada em (89), em relação a σ_e^2 , isto é,

$$\begin{aligned} p(\sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2|\mathbf{y}) &= \int_0^\infty p(\sigma_e^2, \sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2|\mathbf{y}) d\sigma_e^2 \\ &= \psi(\nu_b m_b)^{-1} p\left(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{\sigma_{egb}^2}{\nu_b m_b}\right) G_3(\sigma_{eg}^2), \quad \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > 0, \end{aligned} \quad (161)$$

onde

$$G_3(\sigma_{eg}^2) = \frac{(\nu_g m_g)^{-1} p\left(\chi_{\nu_g}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g m_g}\right) Pr\left\{\chi_{\nu_e}^2 > \frac{\nu_e m_e}{\sigma_{eg}^2}\right\}}{Pr\left\{F_{\nu_g, \nu_e} < \frac{m_g}{m_e}\right\}} \quad (162)$$

e

$$\psi = \delta Pr\left\{F_{\nu_g, \nu_e} < \frac{m_g}{m_e}\right\}.$$

Observa-se que $G_3(\sigma_{eg}^2)$ em (162), tem a mesma forma de $G_2(\sigma_{eg}^2)$ em (143). E, portanto, $p(\sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2|\mathbf{y})$ pode ser aproximada, usando aquela mesma metodologia, por

$$\begin{aligned} p(\sigma_{eg}^2, \sigma_{egb}^2|\mathbf{y}) &\doteq \frac{(\nu_b m_b)^{-1} p\left(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{\sigma_{egb}^2}{\nu_b m_b}\right) (\nu_g'' m_g'')^{-1} p\left(\chi_{\nu_g''}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g'' m_g''}\right)}{Pr\left\{F_{\nu_b, \nu_g''} < \frac{m_b}{m_g}\right\}} \quad (163) \\ &\sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > 0, \end{aligned}$$

onde

$$\nu_g'' = \frac{\nu_g P_{13}}{t P_{15}}, \quad t = \frac{(\nu_g + 2) P_{14}}{2 P_{13}} - \frac{\nu_g P_{13}}{2 P_{15}}, \quad m_g'' = \frac{\nu_g m_g}{t \nu_g''}, \quad (164)$$

$$P_{13} = Pr\left\{F_{\nu_g+2, \nu_e} < \left(\frac{\nu_g}{\nu_g + 2}\right) \frac{m_e}{m_g}\right\} = I_x\left(\frac{\nu_g}{2} + 1, \frac{\nu_e}{2}\right),$$

$$P_{14} = Pr\left\{F_{\nu_g+4, \nu_e} < \left(\frac{\nu_g}{\nu_g + 4}\right) \frac{m_e}{m_g}\right\} = I_x\left(\frac{\nu_g}{2} + 2, \frac{\nu_e}{2}\right), \quad (165)$$

$$P_{15} = Pr\left\{F_{\nu_g, \nu_e} < \frac{m_g}{m_e}\right\} = I_x\left(\frac{\nu_g}{2}, \frac{\nu_e}{2}\right) \quad e \quad x = \frac{\nu_g m_g}{\nu_g m_g + \nu_e m_e}.$$

Lembrando que $\sigma_{egb}^2 = \sigma_{eg}^2 + KR\sigma_b^2$, cujo jacobiano da transformação é KR , então a densidade a posteriori de $(\sigma_{eg}^2, \sigma_b^2)$ será dada, aproximadamente, por

$$p(\sigma_{eg}^2, \sigma_b^2|\mathbf{y}) \quad (166)$$

$$\doteq \frac{KR(\nu_b m_b)^{-1}(\nu_g'' m_g'')^{-1}}{Pr\left\{F_{\nu_b, \nu_g''} < \frac{m_b}{m_g}\right\}} p\left(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2 + KR\sigma_b^2}{\nu_b m_b}\right) p\left(\chi_{\nu_g''}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g'' m_g''}\right),$$

$$\sigma_{eg}^2 > 0, \quad \sigma_b^2 > 0$$

e segue, portanto, que a distribuição marginal *posteriori* de σ_b^2 , será dada, aproximadamente, por

$$p(\sigma_b^2 | \mathbf{y})$$

$$\doteq \frac{KR(\nu_b m_b)^{-1}(\nu_g'' m_g'')^{-1}}{Pr\left\{F_{\nu_b, \nu_g''} < \frac{m_b}{m_g}\right\}} \int_0^\infty p\left(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2 + KR\sigma_b^2}{\nu_b m_b}\right) p\left(\chi_{\nu_g''}^{-2} = \frac{\sigma_{eg}^2}{\nu_g'' m_g''}\right) d\sigma_{eg}^2,$$

$$\sigma_b^2 > 0 \quad (167)$$

Observa-se que $p(\sigma_b^2 | \mathbf{y})$, em (167), tem exatamente a mesma forma de $p(\sigma_g^2 | \mathbf{y})$, dada em (156). Neste caso, a sugestão é aproximar $p(\sigma_b^2 | \mathbf{y})$ usando a mesma técnica que foi usada para aproximar $p(\sigma_g^2 | \mathbf{y})$, isto é,

$$p(\sigma_b^2 | \mathbf{y}) \doteq \frac{KR(\nu_b m_b)^{-1} p\left(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{m_g'' + KR\sigma_b^2}{\nu_b m_b}\right)}{Pr\left\{\chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{m_g''}\right\}} I_{(0, \infty)}(\sigma_b^2) \quad (168)$$

Para esta aproximação, a quantidade $\frac{m_g'' + KR\sigma_b^2}{\nu_b m_b} \sim \chi_{\nu_b}^{-2}$ truncada abaixo de $\frac{m_g''}{\nu_b m_b}$, ou equivalentemente, a quantidade $\frac{\nu_b m_b}{m_g'' + KR\sigma_b^2} \sim \chi_{\nu_b}^2$ truncada acima de $\frac{\nu_b m_b}{m_g''}$. Probabilidades *posteriori* acerca de σ_b^2 , podem ser determinadas aproximadamente, empregando-se as tabelas usuais da distribuição de χ^2 .

Para $0 < \eta_1 < \eta_2 < \infty$,

$$Pr\left\{\eta_1 < \sigma_b^2 < \eta_2 | \mathbf{y}\right\} \doteq \frac{Pr\left\{\frac{\nu_b m_b}{m_g'' + KR\eta_2} < \chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{m_g'' + KR\eta_1}\right\}}{Pr\left\{\chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{m_g''}\right\}}. \quad (169)$$

Em particular, par $\eta > 0$, tem-se

$$Pr\left\{0 < \sigma_b^2 < \eta | \mathbf{y}\right\} \doteq \frac{Pr\left\{\frac{\nu_b m_b}{m_g'' + KR\eta} < \chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{m_g''}\right\}}{Pr\left\{\chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{m_g''}\right\}}. \quad (170)$$

3.4 Resumo da Teoria

Dadas as suposições e os dados, tudo que pode ser dito acerca dos parâmetros de interesse, estará nas densidades *a posteriori* desses parâmetros.

3.4.1 Análises Individuais

Sob a luz de uma *priori* não-informativa de referência, as densidades marginais *a posteriori* dos parâmetros dos modelos estatísticos associados aos experimentos individuais foram determinadas e encontram-se a seguir.

3.4.1.1 Densidade *a Posteriori* de σ^2 , $p(\sigma^2|\mathbf{y})$

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) = \frac{(\nu s^2)^{-1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}} \left(\frac{\sigma^2}{\nu s^2} \right)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} e^{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}} I_{(0,\infty)}(\sigma^2).$$

$$E[\sigma^2|\mathbf{y}] = \frac{\nu s^2}{\nu - 1}, \quad Var[\sigma^2|\mathbf{y}] = \frac{2(\nu s^2)^2}{(\nu - 2)^2(\nu - 1)}, \quad Mo[\sigma^2|\mathbf{y}] = \frac{\nu s^2}{\nu + 2},$$

$$\int_0^{Md[\sigma^2|\mathbf{y}]} p(\sigma^2|\mathbf{y}) d\sigma^2 = 0,5 \quad e \quad Pr \left\{ \frac{\nu s^2}{\chi_{[\nu,S]}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\nu s^2}{\chi_{[\nu,I]}^2} | \mathbf{y} \right\} = 1 - \alpha,$$

3.4.1.2 Densidade Marginal *a Posteriori* de θ , $p(\theta|\mathbf{y})$

$$\theta|\mathbf{y} \sim t_K[\hat{\theta}, (X'X)^{-1}s^2, \nu], \quad e \quad \theta_i \sim t_1 \left[\hat{\theta}_i, \frac{s^2}{R}, \nu \right],$$

$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_K)', \quad \hat{\theta}_i = \bar{y}_i, \quad s^2 = QM.Res., \quad \nu = K(R - 1) \quad e$$

$$Pr \left\{ \hat{\theta}_i - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{R}} \leq \theta_i \leq \hat{\theta}_i + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{R}} | \mathbf{y} \right\} = 1 - \alpha.$$

3.4.1.3 Densidade Marginal *a Posteriori* de $\phi = D\theta = (\phi_1, \dots, \phi_{(K-1)})'$

Seja $\phi = D\theta = (\phi_1, \dots, \phi_{(K-1)})'$, um conjunto de $(K - 1)$ contrastes independentes de θ , onde $D = (d_{ji})$, $i = 1, \dots, K$; $j = 1, \dots, (K - 1)$, então,

$$\phi|\mathbf{y} \sim t_{(K-1)}[\hat{\phi}, s^2[D(X'X)^{-1}D'], \nu].$$

Para comparação geral de que todas as médias dos tratamentos são iguais, regiões H.P.D. para ϕ com conteúdo $(1 - \alpha)$, serão obtidas por

$$\frac{S(\phi)}{(K-1)s^2} \leq F_{[(K-1), \nu, \alpha]}.$$

Em particular, o ponto $\phi_0 = \mathbf{0}$ (isto é, $\theta_1 = \dots = \theta_K$) estará na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$, se e somente se,

$$\frac{S(\phi_0)}{(K-1)s^2} = \frac{S(\mathbf{0})}{(K-1)s^2} = \frac{R \sum_{i=1}^K (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2}{(K-1)s^2} \leq F_{[(K-1), \nu, \alpha]}.$$

Probabilidades marginais *a posteriori*, para qualquer contraste ϕ_j , podem ser calculadas com base no fato de que

$$\phi_j|\mathbf{y} \sim t_1[\hat{\phi}_j, s^2 h_{jj}, \nu], \quad h_{jj} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2.$$

e

$$Pr \left\{ \hat{\phi}_j - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{h_{jj}} \leq \phi_j \leq \hat{\phi}_j + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{h_{jj}} | \mathbf{y} \right\} = 1 - \alpha.$$

3.4.1.4 Comparação das K Dispersões

Para verificar a homogeneidade das K variâncias, são estabelecidos $(K - 1)$ contrastes do tipo

$$\varphi_i = \log \sigma_i^2 - \log \sigma_K^2, \quad i = 1, \dots, (K - 1).$$

Os dois testes usados, se baseiam na distribuição conjunta *a posteriori* de $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{(K-1)})'$.

Em particular, o ponto $\boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{0}$, (isto é, $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_K^2$), estará na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$\frac{-2 \log W_0}{1 + A} \leq \chi_{[(K-1), \alpha]}^2, \quad (\text{Teste de Bartlett Modificado})$$

ou

$$\sum_{i=1}^K \frac{(m_i - m)^2}{a_i^2} \leq \chi_{[(K-1), \alpha]}^2, \quad (\text{Teste da Raiz Cúbica}).$$

Utilizar as expressões dadas em (58).

3.4.2 A Análise Conjunta

Uma vez comprovada a homocedasticidade das variâncias dentro e entre os experimentos, a análise conjunta poderá ser realizada e as densidades marginais poderão ser determinadas.

3.4.2.1 Densidade Marginal *a Posteriori* Aproximada de $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{(K-1)})'$

A distribuição marginal *a posteriori* aproximada de ϕ é dada por

$$\phi|y \sim t_{(K-1)}[\hat{\phi}, m_g^*, \nu^*],$$

onde $\hat{\phi} = D\theta$, $D = (d_{ji})$, $i = 1, \dots, K$; $j = 1, \dots, (K-1)$, é qualquer matriz de $(K-1)$ coeficientes dos contrastes independentes dos θ e $\hat{\theta}_i = \bar{y}_i \dots$. As quantidades m_g^* e ν^* serão calculadas conforme expressões dadas em (106) a (108) e (115) a (118). Ainda, $\Sigma = [D(X'X)^{-1}D'] = \text{Diag}[\sum_{i=1}^K d_{ji}^2, j = 1, \dots, (K-1)]$.

Para comparação geral de que $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_K$ a região H.P.D. para ϕ com $(1 - \alpha)$ é dada por

$$\frac{S(\phi)}{(K-1)m_g^*} \leq F_{[(K-1), \nu_g^*, \alpha]}.$$

Em particular, o ponto $\phi_0 = \mathbf{0}$ (isto é, $\theta_1 = \dots = \theta_K$) estará na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$\frac{S(\phi_0)}{(K-1)m_g^*} = \frac{S(\mathbf{0})}{(K-1)m_g^*} = \frac{\hat{\phi}'[D(X'X)^{-1}D']\hat{\phi}}{(K-1)m_g^*} = \frac{S.Q.Trat.}{(K-1)m_g^*} \leq F_{[(K-1), \nu_g^*, \alpha]}$$

A distribuição marginal *a posteriori* de ϕ_j , $j = 1, \dots, (K-1)$ é dada de modo aproximado por

$$\phi_j|\mathbf{y} \sim t_1 \left[\hat{\phi}_j, \frac{m_g^*}{JR} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2, \nu_g^* \right]$$

e segue que

$$Pr \left\{ \hat{\phi}_j - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{m_g^*}{JR} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2} \leq \phi_j \leq \hat{\phi}_j + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{m_g^*}{JR} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2} | \mathbf{y} \right\} = 1 - \alpha.$$

3.4.3 Distribuição Marginal *a Posteriori* dos Componentes da Variância, σ_e^2 , σ_g^2 e σ_b^2

3.4.3.1 Distribuição Marginal *a Posteriori* Aproximada de σ_e^2

$$p(\sigma_e^2 | \mathbf{y}) \doteq (\nu'_e m'_e)^{-1} p \left(\chi_{\nu'_e}^{-2} = \frac{\sigma_e^2}{\nu'_e m'_e} \right) I_{(0, \infty)}(\sigma_e^2),$$

onde ν'_e e m'_e serão obtidos pelas expressões dadas em (149).

3.4.3.2 Distribuição Marginal *a Posteriori* Aproximada de σ_g^2

$$p(\sigma_g^2 | \mathbf{y}) \doteq \frac{R(\nu'_g m'_g)^{-1} p \left(\chi_{\nu'_g}^{-2} = \frac{m_g + R\sigma_g^2}{\nu'_g m'_g} \right)}{Pr \left\{ \chi_{\nu'_g}^2 < \frac{\nu'_g m'_g}{m_g} \right\}} I_{(0, \infty)}(\sigma_g^2),$$

onde ν'_g e m'_g serão obtidos pelas expressões (145).

3.4.3.3 Distribuição Marginal *a Posteriori* Aproximada de σ_b^2

$$p(\sigma_b^2 | \mathbf{y}) \doteq \frac{KR(\nu_b m_b)^{-1} p \left(\chi_{\nu_b}^{-2} = \frac{m_g'' + KR\sigma_b^2}{\nu_b m_b} \right)}{Pr \left\{ \chi_{\nu_b}^2 < \frac{\nu_b m_b}{m_g''} \right\}} I_{(0, \infty)}(\sigma_b^2),$$

onde m_g'' será calculado empregando-se a expressão (164).

Utilizando-se os *software's* **MATHEMATICA** ou **MAPLE V**, probabilidades e algumas características de interesse, das distribuições marginais dos componentes da variância, poderão ser numericamente determinadas, por exemplo,

$$E[\sigma_e^2|\mathbf{y}] \doteq \int_0^\infty \sigma_e^2 p(\sigma_e^2|\mathbf{y}) d\sigma_e^2, \quad Var[\sigma_e^2|\mathbf{y}] \doteq \int_0^\infty (\sigma_e^2)^2 p(\sigma_e^2|\mathbf{y}) d\sigma_e^2 - E^2[\sigma_e^2|\mathbf{y}],$$

$$Mo[\sigma_e^2|\mathbf{y}] \doteq \max\{p(\sigma_e^2|\mathbf{y})\}, \quad \int_0^{Md[\sigma_e^2|\mathbf{y}]} p(\sigma_e^2|\mathbf{y}) d\sigma_e^2 = .5, \quad etc.$$

4 EXEMPLO ILUSTRATIVO

Para ilustrar a metodologia desenvolvida, considerou-se um conjunto de dados experimentais referentes a um estudo sobre adubação em cana-de-açúcar.

4.1 A Origem dos Dados e Hipóteses de Interesse

Num estudo de adubação com micronutrientes em cana-de-açúcar, conduzido pela seção de Solos e Adubação da Coordenadoria Regional Norte do Programa Nacional de Melhoramento de Cana-de-açúcar - PLANALSUCAR, safra: 1982/1983, foram instalados três ensaios em usinas da Zona Litoral Norte do Estado de Pernambuco, com os seguintes tratamentos:

TRAT.1: Testemunha Absoluta

TRAT.2: NPK

TRAT.3: NPK + Micronutrientes + 0,0kg/ha de Cobre;

TRAT.4: NPK + Micronutrientes + 2,5kg/ha de Cobre;

TRAT.5: NPK + Micronutrientes + 5,0kg/ha de Cobre;

TRAT.6: NPK + Micronutrientes + 7,5kg/ha de Cobre;

TRAT.7: NPK + Micronutrientes + 10,0kg/ha de Cobre.

OBS.: As quantidades de **NPK** e **Micronutrientes** aplicadas nos tratamentos de cada ensaio, foram as mesmas e de acordo com recomendação técnica.

Para efeito de análises estatísticas admitiu-se que interessa ao pesquisador a verificação das seguintes hipóteses:

(a) - Os efeitos médios dos tratamentos são todos iguais, isto é,

$$H_0^{(1)} : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_7 = \theta;$$

(b) - A diferença entre a produtividade média de açúcar do tratamento não adubado e a produtividade média dos tratamentos que foram adubados é nula, isto é,

$$H_0^{(2)} : \phi_1 = -\theta_1 + \frac{\theta_2 + \dots + \theta_7}{6} = 0;$$

(c) - A diferença entre a produtividade média de açúcar do tratamento adubado apenas com NPK e a produtividade média dos tratamentos que foram adubados com micronutrientes é nula, isto é,

$$H_0^{(3)} : \phi_2 = -\theta_2 + \frac{\theta_3 + \dots + \theta_7}{5} = 0;$$

(d) - Os componentes da regressão polinomial de primeiro a quarto graus associados ao comportamento da produtividade média de açúcar em relação aos níveis de Cobre na presença de NPK e Micronutrientes são todos nulos, isto é,

$$H_0^{(4)} : \phi_3 = -2\theta_3 - 1\theta_4 + 0\theta_5 + 1\theta_6 + 2\theta_7 = 0 \quad (\text{componente de } 1^\text{a} \text{ grau});$$

$$H_0^{(5)} : \phi_4 = +2\theta_3 - 1\theta_4 - 2\theta_5 - 1\theta_6 + 2\theta_7 = 0 \quad (\text{componente de } 2^\text{a} \text{ grau});$$

$$H_0^{(6)} : \phi_5 = -1\theta_3 + 2\theta_4 + 0\theta_5 - 2\theta_6 + 1\theta_7 = 0 \quad (\text{componente de } 3^\text{a} \text{ grau});$$

$$H_0^{(7)} : \phi_6 = +1\theta_3 - 4\theta_4 + 6\theta_5 - 4\theta_6 + 1\theta_7 = 0 \quad (\text{componente de } 4^\text{a} \text{ grau});$$

(e) - O efeito do NPK sobre a produtividade média de açúcar é nula, isto é,

$$H_0^{(8)} : \phi_7 = \theta_2 - \theta_1 = 0;$$

(f) - O efeito dos micronutrientes sobre a produtividade média de açúcar, na presença de NPK é nulo, isto é,

$$H_0^{(9)} : \phi_8 = \theta_3 - \theta_2 = 0;$$

Os contrastes associados às hipóteses $H_0^{(2)}$ a $H_0^{(7)}$ são ortogonais. Este não é o único conjunto de contrastes com esta característica. Existem vários outros. Entretanto, neste trabalho, admitiu-se que este conjunto é o de interesse do pesquisador.

Além das hipóteses citadas, interessa ao pesquisador informações acerca dos componentes da variância devidas ao fator experimento e interação, na análise conjunta, e ainda, sobre o erro experimental, nas análises individuais e conjunta.

4.2 Os Dados Experimentais

Os experimentos foram colhidos na safra 82/83 e os resultados em toneladas de açúcar provável por hectare (TPH) encontram-se nas tabelas 3 a 5, a seguir

Tabela 3: Valores de TPH observados no experimentais E1, instalado na Usina N. S. Maravilhas - Safra: 1982/1983.

Tratamento	Rep.1	Rep.2	Rep.3	Rep.4	Total	Média	s_i^2
TRAT.1	7,03	7,29	4,99	4,72	24,03	6,01	1,7944
TRAT.2	8,42	5,39	7,03	7,40	28,24	7,06	1,5850
TRAT.3	5,38	6,17	7,14	7,40	26,09	6,52	0,8603
TRAT.4	6,30	8,24	8,12	9,05	31,71	7,93	1,3478
TRAT.5	9,50	8,23	10,83	8,34	36,90	9,22	1,4750
TRAT.6	9,65	10,08	8,17	9,51	37,41	9,35	0,6803
TRAT.7	11,16	9,90	11,27	8,58	40,91	10,23	1,5926
-	-	-	-	-	225,29	8,05	1,3336

Fonte: IAA - PLANALSUCAR - CONOR.

Tabela 4: Valores de TPH observados no experimento E2, instalado na Usina Santa Tereza - Safra: 1982/1983.

Tratamento	Rep.1	Rep.2	Rep.3	Rep.4	Total	Média	s_i^2
TRAT.1	2,25	3,92	6,02	2,37	14,56	3,64	3,0959
TRAT.2	7,99	5,56	4,43	5,69	23,67	5,92	2,2292
TRAT.3	6,26	9,34	5,53	6,26	27,39	6,85	2,8796
TRAT.4	8,68	5,51	8,77	6,65	29,61	7,40	2,5500
TRAT.5	7,41	8,25	7,78	10,74	34,18	8,54	2,2595
TRAT.6	8,09	9,29	8,59	10,44	36,41	9,10	1,0373
TRAT.7	12,12	8,71	7,80	10,22	38,85	9,71	3,5721
-	-	-	-	-	204,67	7,31	2,5176

Fonte: IAA - PLANALSUCAR - CONOR.

Tabela 5: Valores de TPH observados no experimento E3, instalado na Usina São José - Safra: 1982/1983.

Tratamento	Rep.1	Rep.2	Rep.3	Rep.4	Total	Média	s_i^2
TRAT.1	4,57	5,03	3,69	4,23	17,52	4,38	0,3191
TRAT.2	7,23	8,05	7,01	6,73	29,02	7,25	0,3228
TRAT.3	7,78	8,64	6,90	6,59	29,91	7,48	0,8547
TRAT.4	8,80	7,26	7,55	6,96	30,57	7,64	0,6535
TRAT.5	9,96	8,49	8,86	8,23	35,54	8,88	0,5804
TRAT.6	9,22	9,30	9,91	8,61	37,04	9,26	0,2827
TRAT.7	9,64	10,57	8,41	9,74	38,36	9,59	0,7926
-	-	-	-	-	217,96	7,78	0,5437

Fonte: IAA - PLANALSUCAR - CONOR.

4.3 As Análises Individuais

4.3.1 A Homogeneidade das Variâncias Dentro dos Ensaios

O modelo proposto para as observações de cada ensaio, dado em (11), pressupõe além da normalidade e independência dos dados, que as variâncias dentro de cada tratamento em cada ensaio, seja a mesma, isto é, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_7^2$. Para verificar a ocorrência deste fato, foram aplicados o teste de **Bartlett Modificado** e o teste da **Raiz Cúbica**, conforme expressões dadas em (56) e (57), respectivamente. Para facilitar os cálculos, foram usadas tabelas auxiliares para fornecimento de resultados parciais, conforme se segue,

Tabela 6: Memória de cálculo para obtenção de resultados parciais a serem usados na aplicação dos testes de Bartlett Modificado e da Raiz Cúbica para os dados do experimento E1, instalado na Usina N. S. Maravilhas

i	ν_i	s_i^2	a_i^2	m_i	$\frac{1}{a_i^2}$	$\frac{m_i}{a_i^2}$	$\nu_i(\log s_i^2 - \log \bar{s}^2)$	$\frac{(m_i - m)^2}{a_i^2}$
1	3	1,7944	0,4733	1,0989	2,1128	2,3218	0,8904	0,0672
2	3	1,5850	0,4357	1,1454	2,2952	2,6289	0,5181	0,0399
3	3	0,8603	0,2899	1,4041	3,4495	4,8434	-1,3151	0,0555
4	3	1,3478	0,3911	1,2089	2,5569	3,0910	0,0318	0,0119
5	3	1,4750	0,4153	1,1732	2,4079	2,8249	0,3023	0,0260
6	3	0,6803	0,2479	1,5184	4,0339	6,1251	-2,0193	0,2347
7	3	1,5926	0,4371	1,1435	2,2878	2,6161	0,5325	0,0409
21					19,1440	24,4512	-1,0593	0,4761

De acordo com as expressões dadas em (58) e os resultados parciais da tabela 6, encontrou-se

$$\nu_i = 3, \quad \nu = 21, \quad A = \frac{1}{3 \times 6} \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{21} \right) = 0,127,$$

$$-2\log W_0 = 1,0593, \quad m = \frac{24,4512}{19,1440} = 1,2777,$$

$$\chi_{BM}^2 = \frac{-2\log W_0}{1+A} = 0,940 \quad e \quad \chi_{RC}^2 = \sum_{i=1}^7 \frac{(m_i - m)^2}{a_i^2} = 0,476.$$

Conforme foi visto, verificar a hipótese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_7^2 = \sigma^2$, (para algum σ^2 desconhecido), a um nível de significância $\alpha = 0,05$, é equivalente a estudar a densidade *a posteriori* de $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7)'$, onde $\varphi_i = 2(\log \sigma_i - \log \sigma_7)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, e verificar se o ponto particular $\varphi_0 = \mathbf{0}$ ($\varphi_{10} = 0, \varphi_{20} = 0, \dots, \varphi_{70} = 0$)', está dentro ou fora da região H.P.D. que contém 95% de probabilidade. Neste sentido, o ponto $\varphi_0 = 0$ estará incluído na região H.P.D. que contém 95% de probabilidade se, e somente se,

$$\chi_{BM}^2 < \chi_{(6,0,05)}^2 \quad (\text{Teste de Bartlett Modificado,})$$

$$\chi_{RC}^2 < \chi_{(6,0,05)}^2 \quad (\text{Teste da Raiz Cúbica}).$$

Ora, com 6 graus de liberdade e $\alpha = 0,05$, a tabela da distribuição de qui-quadrado fornece $\chi_{(6,0,05)}^2 = 12,592$. Assim sendo, o ponto $\varphi_0 = \mathbf{0}$ está incluído na região H.P.D. Portanto, as variâncias podem ser consideradas homogêneas pelos dois testes.

Considerando-se os resultados da tabela 7 e as expressões dadas em (58), encontraram-se para o segundo experimento os seguintes resultados:

$$\nu_i = 3, \quad \nu = 21, \quad A = 0,127, \quad -2\log W_0 = 1,2387,$$

$$\chi_{BM}^2 = \frac{-2\log W_0}{1+A} = 1,099 \quad e \quad \chi_{RC}^2 = \sum_{i=1}^7 \frac{(m_i - m)^2}{a_i^2} = 0,320.$$

Como $\chi_{(6,0,05)}^2 > \chi_{BM}^2$ e $\chi_{(6,0,05)}^2 > \chi_{RC}^2$, o ponto particular $\varphi_0 = \mathbf{0}$ está incluído na região H.P.D. e, portanto, as variâncias também são homogêneas dentro do segundo ensaio de acordo com os dois testes.

Analogamente, considerando-se os resultados da tabela 8 e as expressões dadas em (58), obteve-se,

$$\nu_i = 3, \quad \nu = 21, \quad A = 0,127, \quad -2\log W_0 = 1,8895,$$

$$\chi_{BM}^2 = \frac{-2\log W_0}{1+A} = 1,677 \quad e \quad \chi_{RC}^2 = \sum_{i=1}^7 \frac{(m_i - m)^2}{a_i^2} = 2,136.$$

Tabela 7: Memória de cálculo para obtenção de resultados parciais a serem usados na aplicação dos testes de Bartlett Modificado e da Raiz Cúbica para os dados do experimento E2, instalado na Usina Santa Tereza.

i	ν_i	s_i^2	a_i^2	m_i	$\frac{1}{a_i^2}$	$\frac{m_i}{a_i^2}$	$\nu_i(\log s_i^2 - \log \bar{s}^2)$	$\frac{(m_i - m)^2}{a_i^2}$
1	3	3,0958	0,6808	0,9163	1,4689	1,3459	0,6202	0,0258
2	3	2,2290	0,5469	1,0223	1,8285	1,8693	-0,3653	0,0013
3	3	2,8795	0,6487	0,9387	1,5415	1,4470	0,4029	0,0187
4	3	2,5501	0,5982	0,9775	1,6717	1,6341	0,0385	0,0085
5	3	2,2596	0,5519	1,0177	1,8119	1,8440	-0,3244	0,0018
6	3	1,0373	0,3284	1,3192	3,0451	4,0171	-2,6601	0,2225
7	3	3,5721	0,7489	0,8736	1,3353	1,1665	1,0495	0,0410
21					12,7029	13,3239	-1,2387	0,3196

Tabela 8: Memória de cálculo para obtenção de resultados parciais a serem usados na aplicação dos testes de Bartlett Modificado e da Raiz Cúbica para os dados do experimento E3, instalado na Usina São José.

i	ν_i	s_i^2	a_i^2	m_i	$\frac{1}{a_i^2}$	$\frac{m_i}{a_i^2}$	$\nu_i(\log s_i^2 - \log \bar{s}^2)$	$\frac{(m_i - m)^2}{a_i^2}$
1	3	0,3191	0,1497	1,9542	6,6800	13,0541	-1,5987	0,2162
2	3	0,3227	0,1508	1,9469	6,6313	12,9105	-1,5650	0,1976
3	3	0,8547	0,2886	1,4072	3,4650	4,8760	1,3571	0,4670
4	3	0,6535	0,2414	1,5389	4,1425	6,3749	0,5518	0,2295
5	3	0,5805	0,2230	1,6009	4,4843	7,1789	0,1965	0,1348
6	3	0,2827	0,1381	2,0347	7,2411	14,7335	-1,9620	0,4910
7	3	0,7926	0,2745	1,4430	3,6430	5,2568	1,1308	0,3999
21								

Como nos dois casos anteriores, $\chi^2_{(6,0,05)} > \chi^2_{BM}$ e $\chi^2_{(6,0,05)} > \chi^2_{RC}$, o ponto particular $\varphi_0 = \mathbf{0}$ está incluído na região H.P.D. e, portanto as variâncias também podem ser consideradas homogêneas dentro do terceiro experimento.

4.3.2 As Distribuições Marginais *a Posteriori* de σ^2 , $p(\sigma^2|\mathbf{y})$, Relativas a Cada Experimento

Os resultados obtidos na seção anterior, sugerem que é razoável admitir uma variância residual única para cada experimento, a qual é uma condição necessária para realização das análises da variância. Portanto, neste estágio, é conveniente apresentar as análises da variância individuais, cujos resultados encontram-se sintetizados na tabela 9.

Tabela 9: Resultados das análises da variância dos três experimento considerados.

Experimento	F. Variação	GL	SQ	QM	F
E1	Tratamento	6	61,2748	10,2125	7,66
	Resíduo	$\nu_1 = 21$	$\nu_1 s_1^2 = 28,0063$	$s_1^2 = 1,3336$	
E2	Tratamento	6	104,5629	17,4271	6,924
	Resíduo	$\nu_2 = 21$	$\nu_2 s_2^2 = 52,8705$	$s_2^2 = 2,5176$	
E3	Tratamento	6	74,5337	12,4223	22,85
	Resíduo	$\nu_3 = 21$	$\nu_3 s_3^2 = 11,4174$	$s_3^2 = 0,5437$	

A tabela 9 fornece os elementos necessários à especificação das densidades *a posteriori* de cada ensaio. Ou seja, dadas as suposições e os dados, toda informação acerca do erro experimental de cada ensaio, considerando-se uma *priori* não informativa de referência, $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \propto 1/\sigma^2$, está contida na distribuição *a posteriori* de σ^2 , $p(\sigma^2|\mathbf{y})$, dada pela expressão (26). Desta forma, as densidades *a posteriori* da variância residual encontradas para cada experimento, foram:

(a) - Usina N. S. Maravilhas (E1)

$$p(\sigma_1^2|\mathbf{y}) = \frac{(28,0063)^{10,5}}{\Gamma(10,5)2^{10,5}} (\sigma_1^2)^{-11,5} e^{-\frac{28,0063}{2\sigma_1^2}} I_{(0,\infty)}(\sigma_1^2),$$

com as caracteísticas: $E(\sigma_1^2|\mathbf{y}) = 1,4740$, $Var(\sigma_1^2|\mathbf{y}) = 0,2556$, $Mo(\sigma_1^2|\mathbf{y}) = 1,21767$, $Md(\sigma_1^2|\mathbf{y}) = 1,37718$ e usando a expressão dada em (29), encontrou-se

$$Pr \{0,7668 < \sigma_1^2|\mathbf{y} < 2,6282\} = 0,95;$$

(b) - Usina Santa Tereza (E2)

$$p(\sigma_2^2|\mathbf{y}) = \frac{(52,8705)^{10,5}}{\Gamma(10,5)2^{10,5}} (\sigma_2^2)^{-11,5} e^{-\frac{52,8705}{2\sigma_2^2}} I_{(0,\infty)}(\sigma_2^2),$$

com as características: $E(\sigma_2^2|\mathbf{y}) = 2,7827$, $Var(\sigma_2^2|\mathbf{y}) = 0,9110$, $Mo(\sigma_2^2|\mathbf{y}) = 2,51764$, $Md(\sigma_2^2|\mathbf{y}) = 2,5997$ e usando a expressão dada em (29), encontrou-se

$$Pr \{1,4475 < \sigma_2^2|\mathbf{y} < 4,9616\} = 0,95;$$

(c) - Usina São José (E3)

$$p(\sigma_3^2|\mathbf{y}) = \frac{(11,4174)^{10,5}}{\Gamma(10,5)2^{10,5}} (\sigma_3^2)^{-11,5} e^{-\frac{11,4174}{2\sigma_3^2}} I_{(0,\infty)}(\sigma_3^2),$$

e tem as características: $E(\sigma_3^2|\mathbf{y}) = 0,6009$, $Var(\sigma_3^2|\mathbf{y}) = 0,0425$, $Mo(\sigma_3^2|\mathbf{y}) = 0,543686$, $Md(\sigma_3^2|\mathbf{y}) = 0,56142$ e usando a expressão dada em (29), encontrou-se

$$Pr \{0,3126 < \sigma_3^2|\mathbf{y} < 1,0715\} = 0,95.$$

A figura 1 apresenta os gráficos (a), (b) e (c) referentes às densidades *a posteriori* do erro experimental de cada ensaio, bem como, o gráfico conjunto (d) para possibilitar a comparação do comportamento probabilístico dos três erros experimentais. Neste sentido, observa-se que o erro experimental do ensaio (c), é bem menos disperso que os outros dois. Este fato pode ser explicado pelas condições (solo homogêneo, controle experimental, material experimental, etc.) do ensaio (c) terem sido melhores que as dos demais ensaios.

Figura 1: Gráficos das densidades *a posteriori* do erro experimental de cada ensaio (a), (b), (c) e gráfico conjunto (d).

4.3.3 Distribuição Conjunta *a Posteriori* para os Efeitos Médios dos Tratamentos, $p(\theta|y)$, em Cada Experimento

Dadas as suposições e os dados experimentais, toda informação relativa ao vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_7)'$, sob a luz de uma *priori* não-informativa de referência, $p(\theta, \sigma^2) \propto 1/\sigma^2$, estará contida na distribuição *a posteriori* de θ , $p(\theta|y)$, a qual por (31), é uma t-Student multivariada de dimensão 7, isto é,

$$\theta|y \sim t_7[\hat{\theta}; s^2(X'X)^{-1}; \nu],$$

onde $\hat{\theta}$, s^2 e ν são, respectivamente, o vetor das médias dos tratamentos, o quadrado médio do resíduo e os graus de liberdade associados aos resíduos de cada ensaio. Assim, para o experimento da Usina São José (E3), por exemplo, tem-se que,

$$\theta|y \sim t_7 \left(\begin{bmatrix} 4,38 \\ 7,25 \\ 7,48 \\ 7,64 \\ 8,88 \\ 9,26 \\ 9,59 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{0,5437}{4}; 21 \right)$$

Supondo que, neste trabalho, há interesse em verificar se o ponto particular $\theta_0 = (\theta_{10} = 4, \theta_{20} = 5, \theta_{30} = 6, \theta_{40} = 7, \theta_{50} = 8, \theta_{60} = 9, \theta_{70} = 10)'$ está dentro da região H.P.D. que contém 95% de probabilidade. Isto por (48) ocorrerá se, e somente se

$$\frac{Q(\theta_0)}{Ks^2} = \frac{(\theta_0 - \hat{\theta})'(X'X)(\theta_0 - \hat{\theta})}{7 \times 0,5437} = \frac{4 \sum_{i=1}^7 (\theta_0 - \hat{\theta})^2}{3,8059} < F_{[7, 21, 0,05]},$$

onde

$$(\theta_0 - \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 4 - 4,38 \\ 5 - 7,25 \\ 6 - 7,48 \\ 7 - 7,64 \\ 8 - 8,88 \\ 9 - 9,26 \\ 10 - 9,59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,38 \\ -2,25 \\ -1,48 \\ -0,64 \\ -0,88 \\ -0,26 \\ 0,41 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{4 \sum_{i=1}^7 (\theta_0 - \hat{\theta})^2}{3,8059} = 9,27.$$

Como $\frac{Q(\theta_0)}{Ks^2} = 9,27$ não é menor que $F_{[7, 21, 0,05]} = 2,99$, o ponto θ_0 está excluído da região H.P.D. Isto é equivalente a rejeitar a hipótese $H_0 : \theta = \theta_0$ a um nível de significância $\alpha = 0,05$,

4.3.4 Distribuição Marginal *a Posteriori* de θ_i , $p(\theta_i|y)$

De acordo com (37), a distribuição marginal *a posteriori* de θ_i , $i = 1, 2, \dots, 7$, em cada experimento j , $j = 1, 2, 3$, é t-Student univariada com

média $\hat{\theta}_i$ variância $\frac{s_i^2}{R}$ e $\nu = 21$ graus de liberdade. Isto é, $\theta_i|\mathbf{y} \sim t_1(\hat{\theta}_i, \frac{s_i^2}{R}, \nu)$. Assim, por exemplo, para o ensaio da Usina São José, θ_6 é distribuído *a posteriori* como,

$$\theta_6|\mathbf{y} \sim t_1(9, 26, \frac{0,5437}{4}, 21).$$

cuja função de densidade *a posteriori* é dada por

$$p(\theta_6|\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(11)4^{\frac{1}{2}}(0,5437)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(0,5)\Gamma(10,5)21^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{4(\theta_6 - 9,26)^2}{11,4177} \right]^{-11} I_{(-\infty, +\infty)}(\theta_6)$$

Caso haja interesse em calcular alguma probabilidade acerca de θ_6 do ensaio da Usina São José, a densidade acima deve ser utilizada.

Os intervalos *a posteriori* com 95% de credibilidade, para cada θ_i , $i = 1, 2, \dots, 7$, em cada ensaio j , $j = 1, 2, 3$, foram determinados de acordo com a expressão (38) e encontram-se apresentados na tabela 10.

Tabela 10: Intervalos com 95% de credibilidade para as médias dos tratamentos em cada experimento.

Parâmetro	E1	E2	E3
θ_1	[4,81 ; 7,21]	[1,99 ; 5,29]	[3,61 ; 5,15]
θ_2	[5,86 ; 8,26]	[4,27 ; 7,57]	[6,48 ; 8,02]
θ_3	[5,32 ; 7,72]	[5,20 ; 8,50]	[6,51 ; 8,05]
θ_4	[6,73 ; 9,13]	[5,75 ; 9,05]	[6,87 ; 8,41]
θ_5	[8,02 ; 10,42]	[6,89 ; 10,19]	[8,11 ; 9,45]
θ_6	[8,15 ; 10,55]	[7,45 ; 10,75]	[8,49 ; 10,03]
θ_7	[9,03 ; 11,43]	[8,06 ; 11,36]	[8,82 ; 10,36]

Sendo assim, o elemento correspondente a linha 1 coluna 2 da tabela 10, por exemplo, é interpretado como: a probabilidade *a posteriori* de θ_1 (a média do tratamento 1 no ensaio da Usina N. S. Maravilhas (E1)) assumir um valor no intervalo [4,81; 7,21] é de 95%, o que é diferente da interpretação de um intervalo de confiança.

4.3.5 Comparações dos Efeitos Médios dos Tratamentos

As comparações dos parâmetros foram feitas mediante a distribuição *a posteriori* conjunta de ϕ , dada em (44) e levando-se em consideração as hipóteses formuladas no planejamento da pesquisa, as quais encontram-se relacionadas no início da seção 4.1, itens de (a) a (f).

Verificar a hipótese $H_0^{(1)} : \phi = \mathbf{0} \ (\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_7 = \theta)'$, para algum θ desconhecido, a um nível de significância $\alpha = 0,05$, é equivalente a verificar se o ponto *zero* está dentro ou fora da região H.P.D. que contém 95% de probabilidade, onde $\phi = D\theta$ é qualquer conjunto de 6 contrastes independentes dos θ_i 's. Neste sentido, por (50), $\phi_0 = \mathbf{0}$ estará incluído na região H.P.D. que contém 95% de probabilidade se, e somente se,

$$\frac{Q(\phi_0)}{K-1} = \frac{(\phi_0 - \hat{\phi})'[D(X'X)^{-1}D']^{-1}(\phi_0 - \hat{\phi})}{6s^2} < F_{[6;21;0,05]}$$

onde a matriz D pode ser, por exemplo, a matriz dos coeficientes dos contrastes associados às hipóteses $H_0^{(2)}$ a $H_0^{(7)}$. Assim, para o ensaio da Usina N. S. Maravilhas (E1), tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\phi} = D\hat{\theta} = & \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \\ \hat{\phi}_5 \\ \hat{\phi}_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24,03 \\ 28,24 \\ 26,09 \\ 31,71 \\ 36,90 \\ 37,41 \\ 40,91 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,270 \\ 7,955 \\ 8,835 \\ -2,230 \\ 0,855 \\ 2,980 \end{bmatrix} \\ & H = (h_{jj}) = [D(X'X)^{-1}D'] = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^7 d_{1i}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^7 d_{2i}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^7 d_{6i}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} e$$

$$\frac{Q(\phi_0)}{6 \times 1,3336} = \frac{4}{8,0016} \left[\frac{(1,270)^2}{2} + \frac{(7,955)^2}{30} + \dots + \frac{(2,980)^2}{70} \right] = \frac{10,2125}{1,3336} = 7,66$$

De modo análogo, encontrou-se para os ensaios da Usina Santa Tereza (E2) e Usina São José (E3),

$$\hat{\phi} = \begin{bmatrix} 25,6875 \\ 12,0225 \\ 7,43000 \\ -0,4750 \\ -0,5350 \\ 1,8100 \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{\phi} = \begin{bmatrix} 23,8300 \\ 6,5800 \\ 5,8425 \\ -0,5375 \\ -1,1225 \\ 2,7675, \end{bmatrix},$$

$$\frac{Q(0)}{6 \times 2,5176} = \frac{17,4271}{2,5176} = 6,92 \quad e \quad \frac{Q(0)}{6 \times 0,5437} = \frac{12,4223}{0,5437} = 22,85,$$

respectivamente.

Como as quantidades $\frac{Q(0)}{6 \times s^2} > F_{[6, 21, 0,05]} = 2,99$ nos três ensaios, o ponto *zero* está excluído na região H.P.D. Isto equivale a rejeitar a hipótese $H_0^{(1)} : \phi = 0(\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_7 = \theta)$ a um nível de significância $\alpha = 0,05$.

4.3.6 Distribuições Marginais *a Posteriori* dos Contrastes ϕ_j , $p(\phi_j|\mathbf{y})$

A distribuição marginal *a posteriori* de $\phi_j = \sum_{i=1}^7 d_{ji}\theta_i$, $\forall j$, $j = 1, 2, \dots, 8$, com $\sum_{i=1}^7 d_{ji} = 0$, é t-Student univariada com média $\hat{\phi}_j$, variância $s^2 h_{jj}$ e 21 graus de liberdade, isto é,

$$\phi_j|\mathbf{y} \sim t_1[\hat{\phi}_j, s^2 h_{jj}, 21].$$

A densidade *a posteriori* de $\phi_1 = -6\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_7$, encontrada para o ensaio da Usina N. S. Maravilhas (E1), por exemplo, foi conforme (45),

$$p(\phi_1|\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(11)|42/4|^{-\frac{1}{2}}(1, 3336)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(0, 5)\Gamma(10, 5)21^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{(\phi_1 - 14, 27)^2}{21 \times 1, 3336 \times \frac{42}{4}} \right]^{-11} I_{(-\infty, +\infty)}(\phi_1),$$

que resulta em

$$p(\phi_1|\mathbf{y}) = 0,1053 \left[1 + \frac{(\phi_1 - 14, 27)^2}{294,0588} \right]^{-11} I_{(-\infty, +\infty)}(\phi_1),$$

de onde segue que

$$E(\phi_1|\mathbf{y}) = \hat{\phi}_1 = 14,27 \quad e \quad Var[\phi_1|\mathbf{y}] = s^2 h_{11} = 1,3336 \times \frac{42}{4} = 14,0028.$$

Além disso, supondo que há interesse em saber a probabilidade *a posteriori* de que a média dos tratamentos adubados seja superior a média da testemunha, na Usina N. S. Maravilhas (E2), esta pode ser determinada a partir de $p(\phi_1|\mathbf{y})$, ou seja,

$$Pr \left\{ \frac{\theta_2 + \dots + \theta_7}{6} > \theta_1 \right\} = Pr \{ -6\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_7 > 0 \} = Pr \{ \phi_1 > 0 \}.$$

Segue que

$$Pr \{ \phi_1 > 0 \} = 0,1053 \int_0^{\infty} \left[1 + \frac{(\phi_1 - 14, 24)^2}{294,0588} \right]^{-11} d\phi_1 = 0,999009.$$

Com auxílio dos *Software's* MATHEMATICA ou MAPLE V, o resultado acima é facilmente obtido, digitando-se apenas a linha **Integrate[f,{x,0,1000}]** para o MATHEMATICA ou **evalf(int(f, x=0..1000))** para o MAPLE V, onde $f = p(\phi_1|\mathbf{y})$ e $x = \phi_1$.

Os intervalos com 95% de credibilidade para os contrastes ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, 8$, obtidos a partir da expressão dada em (47), encontram-se na tabela 11.

O elemento correspondente ao contraste ϕ_1 e ensaio E1 da tabela 11, por exemplo, é interpretado como: a probabilidade marginal *a posteriori* de que o contraste ϕ_1 , na Usina N. S. Maravilhas (E1), assumo um valor no intervalo (6,49, 22,05) é de 0,95. Além disso, verificar as hipóteses marginais $H_0^{(2)} : \phi_1 = 0$

Tabela 11: Intervalos com 95% de credibilidade para os contrastes entre as médias dos tratamentos, associados às hipóteses $H_0^{(2)}$ a $H_0^{(9)}$, para os três ensaios.

Contraste	E1	E2	E3
ϕ_1	[6,49 ; 22,05]	[14,94 ; 36,38]	[18,86 ; 28,80]
ϕ_2	[1,38 ; 14,53]	[2,98 ; 21,06]	[2,38 ; 10,78]
ϕ_3	[5,04 ; 12,63]	[2,21 ; 12,65]	[3,42 ; 8,27]
ϕ_4	[-6,72 ; 2,26]	[-6,65 ; 5,70]	[-3,41 ; 2,33]
ϕ_5	[-2,94 ; 4,65]	[-5,75 ; 4,68]	[-3,55 ; 1,30]
ϕ_6	[-7,07 ; 13,03]	[-12,00 ; 15,62]	[-3,65 ; 9,18]
ϕ_7	[-0,65 ; 2,75]	[-0,06 ; 4,61]	[1,79 ; 3,96]
ϕ_8	[-2,24 ; 1,16]	[-1,40 ; 3,26]	[-0,86 ; 1,31]

a $H_0^{(9)} : \phi_8 = 0$, a um nível de significância $\alpha = 0,05$, é equivalente a verificar se o ponto *zero* está nos intervalos de credibilidade apresentados na tabela 11. Caso o *zero* esteja incluído aceita-se H_0 caso contrário rejeita-se. Por exemplo, o intervalo de credibilidade correspondente ao contraste ϕ_3 , não contém o ponto *zero*, enquanto que os intervalos de credibilidade correspondentes aos contrastes ϕ_4 , ϕ_5 e ϕ_6 incluem o ponto *zero*, em todos os ensaios. Isto indica que as variações da produtividade de açúcar em relação aos níveis de Cobre aplicados no solo, na presença de NPK e Micronutrientes, foi linear para todos os ensaios. O ponto *zero* não está incluído nos intervalos com 95% de credibilidade dos contrastes ϕ_1 e ϕ_2 , indicando que estes são marginalmente diferentes de *zero* com mais de 95% de probabilidade *a posteriori*. Com exceção do contraste ϕ_7 na Usina São José (E3), os intervalos H.P.D. para ϕ_7 e ϕ_8 incluem o ponto *zero*.

É importante lembrar, mais uma vez, que as probabilidades conjuntas não podem ser obtidas a partir das densidades marginais, pois os intervalos marginais de alta densidade *a posteriori* que contém $100(1 - \alpha)\%$ de probabilidade, podem incluir pontos que estarão excluídos da região H.P.D. conjunta ou vice-versa.

Este é um problema bastante discutido no enfoque clássico, nos casos onde é importante a preservação do nível de significância conjunto.

4.4 A Análise Conjunta dos Experimentos

Antes de proceder à análise conjunta, é conveniente verificar a homogeneidade das variâncias residuais entre os experimentos. Tal como nas análises individuais, aplicaram-se os testes de Bartlett Modificado e o da Raiz Cúbica. A **tabela 12**, fornece os resultados parciais necessários à aplicação dos mesmos.

Tabela 12: Memória de cálculo para obtenção de resultados parciais a serem usados na aplicação dos testes de Bartlett Modificado e da Raiz Cúbica para a análise conjunta dos três experimentos

i	ν_i	s_i^2	a_i^2	m_i	$\frac{1}{a_i^2}$	$\frac{m_i}{a_i^2}$	$\nu_i(\log s_i^2 - \log \bar{s}^2)$	$\frac{(m_i - m)^2}{a_i^2}$
1	21	1,3336	0,7428	2,4800	1,3463	3,3387	-1,9734	0,1778
2	21	2,5176	1,1346	2,0066	0,8814	1,7686	11,3705	0,6172
3	21	0,5437	0,4084	3,3445	2,4486	8,1893	-20,8155	0,6148
63					4,6763	13,2966	-11,4184	1,4100

Considerando-se os resultados da **tabela 12** e as expressões dadas em (58), encontraram-se para a análise conjunta seguintes resultados:

$$\nu_i = 21, \quad \nu = 63, \quad A = \frac{1}{3 \times 2} \left(\frac{3}{21} - \frac{1}{63} \right) = 0,0212,$$

$$-2\log W_0 = 11,4184, \quad m = \frac{13,2966}{4,6763},$$

$$\chi_{BM}^2 = \frac{-2\log W_0}{1 + A} = 11,181 \quad e \quad \chi_{RC}^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{(m_i - m)^2}{a_i^2} = 1,410.$$

$$\text{Ora, } \chi_{(2;0,05)}^2 = 5,991. \quad \text{Assim, } \chi_{(2;0,05)}^2 < \chi_{BM}^2 \text{ e } \chi_{(6;0,05)}^2 > \chi_{RC}^2.$$

Portanto, o teste de Bartlett mostrou que as variâncias dos três experimentos são

heterogêneas enquanto que o teste da Raiz Cúbica mostrou que as mesmas são homogêneas.

Admitindo que os erros são normais e independentes e que o teste da Raiz Cúbica apresenta melhor desempenho neste caso, decidiu-se por aceitar a homogeneidade das variâncias entre os experimentos e proceder à análise conjunta. E, para este fim, é conveniente determinar preliminarmente algumas quantidades, as quais devem ser obtidas a partir dos elementos constantes da expressão (78). Assim, a tabela 13, apresenta os resultados obtidos a partir dos dados dos três ensaios considerados.

Tabela 13: Elementos necessárias para realização da análise conjunta Bayesiana, obtidas a partir dos dados experimentais.

F. Variação	GL	SQ	QM
Tratamento(T)	$\nu_\phi = 6$	$\nu_\phi m(\phi) = 227,8570$	$m(\phi) = 37,9762$
Ensaio(E)	$\nu_b = 2$	$\nu_b m_b = 7,8040$	$m_b = 3,9020$
Int. T $\times$ E	$\nu_g = 12$	$\nu_g m_g = 12,5143$	$m_g = 1,0429$
Resíduo	$\nu_e = 63$	$\nu_e m_e = 92,2941$	$m_e = 1,4650$

Dadas as suposições e os dados dos três ensaios, toda informação a respeito dos efeitos comparativos dos tratamentos, estará presente na distribuição *a posteriori* de ϕ , $p(\phi|\mathbf{y})$, dada pela expressão (95), a qual é o produto de uma t-Student pelo fator modificador, $g(\phi)$. Devido à dificuldade de se trabalhar com a distribuição exata, na prática, as inferências sobre os efeitos comparativos dos tratamentos, são feitas a partir da distribuição *a posteriori* aproximada de ϕ , a qual é uma t-Student multivariada de dimensão 6, com média $\hat{\phi} = D\hat{\theta}$, matriz de variâncias e covariâncias $m_g^* \Sigma$ e ν_g^* graus de liberdade, denotada por $\phi|\mathbf{y} \sim t_6[\hat{\phi}, m_g^* \Sigma, \nu_g^*]$, onde, de acordo com as hipóteses de interesse neste trabalho, os elementos da distribuição, $\hat{\phi}$, Σ , ν_g^* e m_g^* foram obtidos como segue.

$$\hat{\phi} = D\hat{\theta} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1..} = 56,11 \\ y_{2..} = 80,93 \\ y_{3..} = 83,39 \\ y_{4..} = 91,89 \\ y_{5..} = 106,62 \\ y_{6..} = 110,86 \\ y_{7..} = 118,12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,2625 \\ 8,8525 \\ 7,3692 \\ -1,0808 \\ -0,2675 \\ 2,5192 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = [D(X'X)^{-1}D'] = \frac{1}{JR} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K d_{1i}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^K d_{2i}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^K d_{6i}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}, \quad \nu_g^* = 27 \quad e \quad m_g^* = 1,8880.$$

O quadrado médio da interação m_g^* , e os graus de liberdade ν_g^* , foram obtidos como segue.

(a) Pelas expressões dadas em (106), tem-se que,

$$y = \frac{\nu_b m_b}{\nu_b m_b + \nu_e m_e} = 0,3841, \quad P_1 = I_y(1,7) = 0,9664, \quad P_2 = I_y(1,8) = 0,9793,$$

$$P_3 = I_y(1,6) = 0,9454 \quad \text{onde} \quad I_y(p,q) = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^y u^{p-1} (1-u)^{q-1} du.$$

As integrais, denotadas por $I_y(p,q)$, podem ser calculadas facilmente com auxílio do *software* MATHEMATICA, por exemplo, digitando-se apenas a linha de comandos: `NIntegrate[(1/(Beta[p, q]))*(u^(p-1))*((1-u)^(q-1)),{u,0,y}]`;

(b) Usando as expressões dadas em (107) e (108), vem

$$a = \frac{\nu_g + 2}{2} \frac{P_2}{P_1} - \frac{\nu_g}{2} \frac{P_1}{P_3} = 0,9602, \quad b = \frac{\nu_g}{a} \frac{P_1}{P_3} = 12,7750 = \nu'_g,$$

$$m'_g = \frac{\nu_g m_g}{a \nu'_g} = 1,0202 \quad \nu'_g m'_g = 13,0331;$$

(c) Conforme expressões dadas em (117), tem-se

$$x = \frac{\nu'_g m'_g}{\nu'_g m'_g + \nu_e m_e} = 0,1237, \quad P_4 = I_x(7, 3875, 31, 5) = 0,1395,$$

$$P_5 = I_x(8, 3875, 31, 5) = 0,0742, \quad P_6 = I_x(6, 3875, 31, 5) = 0,2425,$$

onde

$$I_x(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^x u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \quad \text{é a integral de uma Beta.}$$

(d) Agora, pelas expressões (115), (116), (118), segue que,

$$c = \left(\frac{\nu'_g + 2}{2} \right) \frac{P_5}{P_4} - \frac{\nu'_g}{2} \frac{P_4}{P_6} = 0,2550, \quad d = \frac{\nu'_g}{c} \frac{P_4}{P_6} = 27,0710 = \nu_g^* \quad e$$

$$m_g^* = \frac{\nu'_g m'_g}{c \nu_g^*} = 1,8880.$$

O efeito da restrição $C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2$, fez com que os graus de liberdade $\nu_g = 12$ mudassem para $\nu_g^* = 27$ e o quadrado médio da interação $m_g = 1,0429$ mudasse para $m_g^* = 1,8880$.

4.4.1 A Distribuição a Posteriori Aproximada de ϕ , $p(\phi|y)$

A função de distribuição *a posteriori* aproximada para os efeitos comparativos dos tratamentos, ϕ , é dada por,

$$p(\phi|y) \doteq \frac{\Gamma(\frac{\nu_g^* + \nu_\phi}{2}) |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (m_g^*)^{-\frac{\nu_\phi}{2}}}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{\nu_\phi} \Gamma(\frac{\nu_g^*}{2}) (\nu_g^*)^{\frac{\nu_g^*}{2}}} \left[1 + \frac{(\phi - \hat{\phi})' \Sigma^{-1} (\phi - \hat{\phi})}{\nu_g^* m_g^*} \right]^{-\frac{\nu_\phi + \nu_g^*}{2}},$$

$$-\infty < \phi_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (171)$$

a qual, conforme os contrastes utilizados, pode ser denotada por

$$\phi|\mathbf{y} \sim t_6 \left(\begin{bmatrix} 21,2625 \\ 8,8525 \\ 7,3692 \\ -1,0808 \\ -0,2675 \\ 2,5192 \end{bmatrix} ; \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} 1,8880; 27 \right).$$

4.4.2 Inferências Conjunta e Marginais Sobre ϕ na Análise Conjunta

Verificar a hipótese $H_0 : \phi = \mathbf{0}$ ($\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_7 = \theta$) a um nível de significância α , é equivalente a estudar $p(\phi|\mathbf{y})$ e verificar se o ponto *zero* está incluído na região H.P.D. que contém $(1 - \alpha)$ de probabilidade. Neste sentido o ponto *zero* estará incluído na região H.P.D. de conteúdo $(1 - \alpha)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \frac{S(\phi_0 = \mathbf{0})}{(K-1)m_g^*} &= \frac{(\mathbf{0} - \hat{\phi})'[D(X'X)^{-1}D']^{-1}(\mathbf{0} - \hat{\phi})}{(K-1)m_g^*} = \\ &= \frac{1}{(K-1)m_g^*} \sum_{j=1}^{K-1} \frac{JR \left(\sum_{i=1}^K d_{ji} \bar{y}_{i..} \right)^2}{\sum_{i=1}^K d_{ji}^2} = \frac{JR \sum_{i=1}^K (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2}{(K-1)m_g^*} < F_{[(K-1), \nu_g^*, \alpha]}. \end{aligned}$$

Para os dados dos três experimentos, encontrou-se

$$\frac{S(\mathbf{0})}{6 \times 1,8880} = \frac{227,8570}{6 \times 1,8880} = 20,11$$

o qual é maior que $F_{[6, 27, 0,05]} = 2,46$. Logo, o ponto *zero* está fora da região H.P.D. que contém 95% de probabilidade, o que é equivalente a rejeitar H_0 a um nível de significância $\alpha = 0,05$.

Para se fazer inferência marginal sobre qualquer contraste ϕ_j , deve-se usar o fato de que

$$\phi_j|\mathbf{y} \sim t_1 \left[\hat{\phi}_j, \frac{m_g^*}{JR} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2, \nu_g^* \right].$$

Verificar a hipótese $H_0 : \phi_j = 0$ a um nível de significância $\alpha = 0,05$ é equivalente a estudar a densidade *a posteriori* $p(\phi_j|\mathbf{y})$ e verificar se o ponto *zero*

está dentro ou fora da região H.P.D. que contém 95% de probabilidade. Neste sentido, o ponto *zero* estará dentro da região H.P.D. se, e somente se,

$$\frac{S(\phi_{j0} = 0)}{m_g^*} = \frac{\left(\sum_{i=1}^K d_{ji} \bar{y}_{i..} \right)^2}{\frac{m_2^*}{JR} \sum_{i=1}^K d_{ji}^2} < F_{[1, \nu_g^*, 0,05]}.$$

Este resultado é equivalente a verificar se o ponto *zero* está incluído no intervalo com 95% de credibilidade. Assim, para os oito contrastes considerados de interesse, encontraram-se os seguintes resultados constantes na tabela 14

Tabela 14: Inferências marginais sobre os contrastes de interesse

Contraste	$\hat{\phi}_j$	$\frac{S(\phi_{j0}=0)}{m_j^*}$	$\left \hat{\phi}_j \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{m_2^*}{JR} \sum_{i=1}^7 d_{ji}^2} \right $
ϕ_1	21.2625	68.4162	[15,99 ; 26,54]
ϕ_2	8.8525	16.6031	[4,39 ; 13,31]
ϕ_3	7.3692	34.5156	[4,80 ; 9,94]
ϕ_4	-1.0808	0.5303	[-4,13 ; 1,96]
ϕ_5	-0.2675	0.0455	[-2,84 ; 2,31]
ϕ_6	2.5192	0.5762	[-4,29 ; 9,33]
ϕ_7	2.0683	13.5953	[0,92 ; 3,22]
ϕ_8	0.2050	0.1336	[-0,95 ; 1,36]

$$F_{[1, 27, 0,05]} = 4,21 \quad e \quad t_{[27, 0,05]} = 2,052 = t_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Observa-se que o ponto *zero* está dentro da região H.P.D. dos contrastes ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 e ϕ_8 , o que é equivalente a aceitar a hipótese de que estes contrastes são todos marginalmente nulos, a um nível de significância $\alpha = 0,05$. O ponto *zero* está fora da região H.P.D. dos contrastes ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_7 , o que é equivalente a rejeitar a hipótese de que eles são marginalmente nulos a um nível de significância $\alpha = 0,05$. O fato do ponto *zero* não pertencer a região H.P.D. do contraste ϕ_3 ,

traduz que o comportamento médio da produção de açúcar em relação aos níveis de Cobre, na presença de NPK + Micronutrientes, é linear.

4.4.3 Ajuste dos Graus de Liberdade e Quadrados Médios para Construção das Densidades a *Posteriori* dos Componentes da Variância

A partir dos dados experimentais e das expressões dadas nas subseções (3.3.9) a (3.3.12), foram calculadas as quantidades necessárias para determinação das densidades marginais *a posteriori* aproximadas dos componentes da variância $(\sigma_e^2, \sigma_g^2, \sigma_b^2)$. Foi utilizado o *software* **MATHEMATICA** na determinação dessas quantidades, as quais encontram-se na tabela 15.

Tabela 15: Elementos Básicos usados para estabelecer as distribuições marginais a *posteriori* dos componentes da variância.

$P_7 = 0,229145$	$P_8 = 0,228928$	$P_9 = 0,229468$
$\nu_e^* = 62,068900$	$m_e^* = 1,407050$	$\nu_e^* m_e^* = 91,058200$
$P_1 = 0,966400$	$P_2 = 0,979300$	$P_3 = 0,945400$
$\nu_g' = 12,775000$	$m_g' = 1,020200$	$\nu_g' m_g' = 13,033100$
$P_{10} = 0,263400$	$P_{11} = 0,284800$	$P_{12} = 0,242500$
$\nu_e' = 74,000000$	$m_e' = 1,348800$	$\nu_e' m_e' = 97,712800$
$P_{13} = 0,153313$	$P_{14} = 0,081412$	$P_{15} = 0,265722$
$\nu_g'' = 27,119700$	$m_g'' = 1,807500$	$\nu_g'' m_g'' = 49,018900$

4.4.4 Inferência Marginal a *Posteriori* Sobre σ_e^2

No desenvolvimento teórico, foram apresentadas quatro modalidades para densidade *a posteriori* de σ_e^2 , $p(\sigma_e^2|\mathbf{y})$:

p_1 =densidade *a posteriori* de σ_e^2 aproximada em um estágio,

p_2 =densidade *a posteriori* de σ_e^2 aproximada em dois estágios,

p_i =densidade *a posteriori* de σ_e^2 irrestrita,

p_c =densidade *a posteriori* de σ_e^2 composta (*pooling*).

Em geral, as inferências sobre σ_e^2 são feitas com base na densidade *a posteriori* aproximada em dois estágios, (ver BOX & TIAO(1973)). Porém, para visualizar o comportamento destas densidades e comparar as inferências sobre σ_e^2 a partir de cada uma delas, foram determinadas suas densidades, traçados seus gráficos (figuras 2 e 3), calculadas algumas características das distribuições e intervalos com 95% de credibilidade para σ_e^2 , conforme mostra a tabela 16. Isto é, pelas expressões (139), (151), (152) e (154), tem-se que,

$$\begin{aligned} p_1 &\doteq p_1(\sigma_e^2|\mathbf{y}) = \frac{(91,0582)^{31}}{\Gamma(31)2^{31}}(\sigma_e^2)^{-32}e^{-\frac{45,5291}{\sigma_e^2}}I_{(0,\infty)}(\sigma_e^2), \\ p_2 &\doteq p_2(\sigma_e^2|\mathbf{y}) = \frac{(99,7128)^{37}}{\Gamma(37)2^{37}}(\sigma_e^2)^{-38}e^{-\frac{49,8564}{\sigma_e^2}}I_{(0,\infty)}(\sigma_e^2), \\ p_i &= p_i(\sigma_e^2|\mathbf{y}) = \frac{(92,2941)^{31,5}}{\Gamma(31,5)2^{31,5}}(\sigma_e^2)^{-32,5}e^{-\frac{46,14705}{\sigma_e^2}}I_{(0,\infty)}(\sigma_e^2), \\ p_c &\doteq p_c(\sigma_e^2|\mathbf{y}) = \frac{(100,2065)^{37}}{\Gamma(37)2^{37}}(\sigma_e^2)^{-38}e^{-\frac{50,10325}{\sigma_e^2}}I_{(0,\infty)}(\sigma_e^2), \end{aligned}$$

cujos gráficos individuais destas densidades encontram-se na figura 2 e um gráfico conjunto das quatro densidades na figura 3.

A tabela 16 apresenta as principais características da distribuição *a posteriori* de σ_e^2 relativas a cada aproximação.

Os resultados constantes da tabela 16 foram obtidos por definição de cada característica a partir das respectivas densidades *a posteriori* e empregando o *software* MATHEMATICA, cujos comandos podem ser vistos no Apêndice.

Com base na figura 3 e tabela 16, observa-se que as densidades *a posteriori* aproximada em um estágio (p_1) e a irrestrita (p_i), apresentaram resultados semelhantes, porém ligeiramente diferentes das densidades *a posteriori* aproximada em dois estágios (p_2) e composta (*pooling*) (p_c), as quais, também, apresentaram resultados semelhantes entre si.

Figura 2: Gráficos individuais das densidades a posteriori de σ_e^2 .

4.4.5 Inferência Marginal a Posteriori Sobre σ_g^2

Baseado nas suposições e nos dados dos três ensaios, a densidade marginal *a posteriori* aproximada do componente da variância σ_g^2 obtida a partir da expressão (157), foi

$$p(\sigma_g^2|\mathbf{y}) \doteq \frac{4(13,0331)^{6,3875}}{\Gamma(6,3875)2^{6,3875}(0,233744)}(1,4650 + 4\sigma_g^2)^{-7,3875}e^{-\frac{13,0331}{2,93+8\sigma_g^2}}I_{(0,\infty)}(\sigma_g^2),$$

com as seguintes características:

$$Var[\sigma_g^2|\mathbf{y}] = 0,0242, \quad E[\sigma_g^2|\mathbf{y}] = 0,1357; \quad Mo[\sigma_g^2|\mathbf{y}] = 0, \quad Md[\sigma_g^2|\mathbf{y}] = 0,0875.$$

O gráfico da distribuição *a posteriori* de σ_g^2 , encontra-se na figura 4 e o intervalo com 95% de credibilidade para σ_g^2 obtido a partir da expressão 158, foi

$$Pr\{0 < \sigma_g^2 < 0,4248|\mathbf{y}\} \doteq 0,95.$$

Figura 3: Gráfico conjunto das posteriori's aproximadas de σ_e^2 .

Tabela 16: Características da distribuição *a posteriori* de σ_e^2 para as diferentes aproximações.

<i>Posteriori</i>	Variância	Média	Moda	Mediana	$IC(\sigma_e^2)_{(95\%)}$
p_1	0,07942	1,51764	1,42278	1,4848	[1,0632; 2,1620]
p_2	0,05480	1,38490	1,31201	1,3598	[1,0004; 1,9140]
p_i	0,07760	1,51302	1,41991	1,4808	[1,0630; 2,1491]
p_c	0,05534	1,39176	1,31851	1,3666	[1,0054; 1,9236]

4.4.6 Inferência Marginal a *Posteriori* Sobre σ_b^2

Considerando-se as suposições e os dados dos ensaios, a densidade marginal *a posteriori* aproximada, obtida para o componente da variância devido ao fator experimento σ_b^2 , $p(\sigma_b^2|\mathbf{y})$, foi, conforme expressão (168),

$$p(\sigma_b^2|\mathbf{y}) \doteq (123,5180)(1,8075 + 28\sigma_b^2)^{-2} e^{-\frac{7,8040}{3,6150+56\sigma_b^2}} I_{(0,\infty)}(\sigma_b^2).$$

O gráfico da distribuição encontra-se na figura 5 e as características encontradas foram:

$$E[\sigma_b^2|\mathbf{y}] = 1,2371, \quad Mo[\sigma_b^2|\mathbf{y}] = 0,0051, \quad Md[\sigma_b^2|\mathbf{y}] = 0,17413$$

Figura 4: Gráfico da densidade marginal a posteriori de σ_g^2 .

Figura 5: Gráfico da densidade marginal a posteriori de σ_b^2 .

e o intervalo com 95% de credibilidade para σ_b^2 , obtido a partir da expressão (169), foi

$$Pr \{0 < \sigma_b^2 < 3,0163 | \mathbf{y}\} \doteq 0,95.$$

Observa-se que, sendo $p(\sigma_e^2 | \mathbf{y})$, $p(\sigma_g^2 | \mathbf{y})$ e $p(\sigma_b^2 | \mathbf{y})$ densidades de probabilidade definidas no intervalo $(0, \infty)$, isto indica que os componentes da variância σ_e^2 , σ_g^2 e σ_b^2 , não são definidos para valores negativos, ou seja, *a posteriori*, a probabilidade de se obter um valor negativo para qualquer componente da variância é zero. Portanto, a análise Bayesiana proposta neste trabalho, não apresenta problemas de componentes da variância negativos.

Para se obter os gráficos das densidades marginais *a posteriori* e determinar suas características, foi utilizado o *software* **MATHEMATICA**, cujas sequências de comandos, encontram-se detalhadamente no Apêndice.

4.5 A Análise Clássica

Para efeito de comparação das metodologias de análise, achou-se conveniente analisar os dados experimentais através da inferência clássica. Sendo este enfoque bastante conhecido, a abordagem teórica não foi apresentada neste trabalho.

4.5.1 As Análises Individuais Clássicas

A análise de variância exige, além de outras suposições, a homogeneidade das variâncias dentro de cada experimento. Esta hipótese poderá ser verificada pelo teste de *Bartlett* de modo semelhante ao que foi feito na análise Bayesiana, o qual mostrou que existe a homocedasticidade dentro dos três ensaios.

As tabelas 17, 18 e 19, apresentam os resultados das análises de variância dos ensaios individuais, associadas às hipóteses de interesse. Neste sentido, observa-se, portanto, que a hipótese de igualdade dos efeitos médios dos tratamentos, $H_0^{(1)} : \theta_1 = \dots = \theta_7 = \theta$, foi rejeitada a nível $\alpha = 0,05$, em todos os ensaios. Os contrastes $\phi_1 = -\theta_1 + \frac{\theta_2 + \dots + \theta_7}{6}$ e $\phi_2 = -\theta_2 + \frac{\theta_3 + \dots + \theta_7}{5}$ e o componente de regressão polinomial de 1º grau ϕ_3 , apresentaram significância estatística ao nível de 5% de probabilidade pelo teste F, nos três ensaios. Por outro lado, a menos do experimento instalado na Usina São José (E3), o contraste $\phi_7 = -\theta_2 + \theta_3$ e os componentes de regressão de 2º a 4º graus, não apresentaram significância estatística ao nível de $\alpha = 0,05$ pelo teste F. Estes resultados,

obtidos pela análise clássica, foram exatamente os mesmos daqueles obtidos via enfoque Bayesiano. Estas conclusões já eram esperadas, tendo em vista que na análise Bayesiana, usou-se uma *priori* não-informativa para os parâmetros (θ, σ^2) e o modelo estatístico $y = X\theta + \epsilon$, foi considerado de efeito fixo.

Nas análises individuais, inferências sobre a variância do erro experimental σ^2 , são feitas com base no fato de que $\sum_{i=1}^K (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / \sigma^2 \sim \chi_\nu^2$, onde $\nu = K(R - 1)$. Assim, conforme SEARLE *et all* (1992, pg. 135-136) e GRAYBILL (1976, pg. 624-625) os intervalos de confiança para σ^2 com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança, poderão ser construídos como segue.

$$I.C.(\sigma^2)_{(1-\alpha)} : \frac{S.Q.Res.}{\chi_{\nu,S}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{S.Q.Res.}{\chi_{\nu,I}^2}.$$

onde, $\chi_{\nu,I}^2$ e $\chi_{\nu,S}^2$ são tais que

$$Pr \left\{ \chi_{\nu,I}^2 \leq \chi_\nu^2 \leq \chi_{\nu,S}^2 \right\} = 1 - \alpha.$$

Para os três experimentos envolvidos no estudo, encontrou-se: para $\nu = K(R - 1) = 21$ e $\alpha = 0,05$, $\chi_{\nu,I}^2 = 10,656$ e $\chi_{\nu,S}^2 = 36,525$. Assim, as estimativas da variância do erro experimental e os respectivos intervalos de confiança com 95% de confiança para cada ensaio, foram respectivamente,

$$\hat{\sigma}_1^2 = 1,3336 \quad e \quad I.C.(\sigma_1^2)_{(0,95)} : [0,7668 ; 2,6282],$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = 2,5176 \quad e \quad I.C.(\sigma_2^2)_{(0,95)} : [1,4475 ; 4,9616],$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = 0,5437 \quad e \quad I.C.(\sigma_3^2)_{(0,95)} : [0,3126 ; 1,0715].$$

É importante lembrar, que apesar dos limites dos intervalos de confiança coincidirem com os limites dos intervalos de credibilidade dados na seção 4.3.2, os dois tipos de intervalos são distintos na interpretação.

4.5.2 A Análise Conjunta Clássica

Os resultados da análise de variância conjunta, encontram-se na **tabela 20**. Nessa, pode-se observar, que a hipótese de igualdade dos efeitos médios dos tratamentos, $H_0^{(1)} : \theta_1 = \dots = \theta_7 = \theta$, foi rejeitada ao nível de significância $\alpha = 0,05$. Os contrastes $\phi_1 = -\theta_1 + \frac{\theta_2 + \dots + \theta_7}{6}$, $\phi_2 = -\theta_2 + \frac{\theta_3 + \dots + \theta_7}{5}$, $\phi_7 = -\theta_1 + \theta_2$ e o componente de regressão linear ϕ_3 , apresentaram significância estatística ao nível

Tabela 17: Resultados da análise de variância relativa aos dados do experimento instalado na Usina N. S. Maravilhas

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Pr > F
T1 vs (T2+...+T7)	1	19,3936	19,3936	14,54	0,0010
T2 vs (T3+...+T7)	1	8,4376	8,4376	6,33	0,0201
Comp. de 1o. Grau	1	31,2229	31,2229	23,41	0,0001
Comp. de 2o. Grau	1	1,4208	1,4208	1,07	0,3137
Comp. de 3o. Grau	1	0,2924	0,2924	0,22	0,6444
Comp. de 4o. Grau	1	0,5075	0,5075	0,38	0,5440
Tratamento	6	61,2748	10,2125	7,66	0,0002
Resíduo	21	28,0063	1,3336	-	-
Total	27	89,2811	-	-	-

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Pr > F
T1 vs T2	1	2,2155	2,2155	1,66	0,2115
T2 vs T3	1	0,5778	0,5778	0,43	0,5175
Resíduo	21	28,0063	1,3336	-	-

$\alpha = 0,05$ pelo teste F. Em contrapartida, o contraste $\phi_8 = -\theta_2 + \theta_3$ e os componentes da regressão de 2^0 a 4^0 graus não apresentaram significância estatística.

Embora estas conclusões sejam as mesmas daquelas obtidas pela análise Bayesiana, isto nem sempre deverá ocorrer, uma vez que na análise Bayesiana há o efeito do fator modificador $g(\phi)$ induzido pela restrição $C : \sigma_{egb}^2 > \sigma_{eg}^2 > \sigma_e^2$, que leva a resultados diferentes daqueles obtidos pela análise clássica.

Conforme SEARLE *et al* (1992, pg. 135-136) e GRAYBILL (1976, pg. 624-625), os estimadores dos componentes da variância, pelo método da ANOVA, associados ao erro experimental, interação $T \times E$ e ao fator experimento, são dados

Tabela 18: Resultados da análise de variância relativa aos dados do experimento instalado na Usina Santa Tereza

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Pr > F
T1 vs (T2+...+T7)	1	62,8426	62,8426	24,96	0,0001
T2 vs (T3+...+T7)	1	19,2721	19,2721	7,65	0,0116
Comp. de 1o. Grau	1	22,0820	22,0820	8,77	0,0074
Comp. de 2o. Grau	1	0,0645	0,0645	0,03	0,8744
Comp. de 3o. Grau	1	0,1145	0,1145	0,05	0,8332
Comp. de 4o. Grau	1	0,1872	0,1872	0,07	0,7878
Tratamento	6	104,5629	17,4271	6,92	0,0004
Resíduo	21	52,8705	2,5176		
Total	27	157,4333			

F. Variação	1	S.Q.	Q.M.	F	Pr > F
T1 vs T2	1	10,3740	10,3740	4,12	0,0552
T2 vs T3	1	1,7298	1,7298	0,69	0,4165
Resíduo	21	52,8705	2,5176		

por,

$$\hat{\sigma}_e^2 = m_e, \quad \hat{\sigma}_g^2 = \frac{m_g - m_e}{R} \quad e \quad \hat{\sigma}_b^2 = \frac{m_b - m_g}{KR}. \quad (172)$$

Além disso, os intervalos de confiança com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para os componentes da variância σ_e^2 , σ_g^2 e σ_b^2 , serão obtidos com base nos seguintes argumentos:

(a) As quantidades $\frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2}$, $\frac{\nu_g m_g}{R\sigma_g^2 + \sigma_e^2}$ e $\frac{\nu_b m_b}{KR\sigma_b^2 + R\sigma_g^2 + \sigma_e^2}$ são distribuídas exatamente como:

$$\frac{\nu_e m_e}{\sigma_e^2} \sim \chi_{\nu_e}^2, \quad \frac{\nu_g m_g}{R\sigma_g^2 + \sigma_e^2} \sim \chi_{\nu_g}^2 \quad e \quad \frac{\nu_b m_b}{KR\sigma_b^2 + R\sigma_g^2 + \sigma_e^2} \sim \chi_{\nu_b}^2 \quad (173)$$

(b) Sejam ν_i os graus de liberdade, m_i o quadrado médio e S_i a soma de quadrados

Tabela 19: Resultados da análise de variância relativa aos dados do experimento instalado na Usina São José

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Pr > F
T1 vs (T2+...+T7)	1	54,0828	54,0828	99,47	0,0001
T2 vs (T3+...+T7)	1	5,7728	5,7728	10,62	0,0038
Comp. de 1o. Grau	1	13,6539	13,6539	25,11	0,0001
Comp. de 2o. Grau	1	0,0825	0,0825	0,15	0,7007
Comp. de 3o. Grau	1	0,5040	0,5040	0,93	0,3466
Comp. de 4o. Grau	1	0,4377	0,4377	0,80	0,3798
Tratamento	6	74,5337	12,4223	22,85	0,0001
Resíduo	21	11,4174	0,5437		
Total	27	85,9511			

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Pr > F
T1 vs T2	1	16,5313	16,5313	30,41	0,0001
T2 vs T3	1	0,0990	0,0990	0,18	0,6739
Resíduo	21	11,4174	0,5437		

do fator i. Então,

$$I.C.(E[m_i])_{(1-\alpha)} : \frac{\nu_i m_i}{\chi_{\nu_i, S}^2} \leq E[m_i] \leq \frac{\nu_i m_i}{\chi_{\nu_i, I}^2}, \quad (174)$$

onde $\chi_{\nu_i, I}^2$ e $\chi_{\nu_i, S}^2$ são tais que

$$Pr \left\{ \chi_{\nu_i, I}^2 \leq \chi_{\nu_i}^2 \leq \chi_{\nu_i, S}^2 \right\} = 1 - \alpha; \quad (175)$$

(c) Seja a razão das esperanças de dois quadrados médios $E[m_i]/E[m_j]$. Então,

$$I.C.(E[m_i]/E[m_j])_{(1-\alpha)} : \frac{m_i}{m_j} F_{[\nu_j, \nu_i, I]} \leq \frac{E[m_i]}{E[m_j]} \leq \frac{m_i}{m_j} F_{[\nu_j, \nu_i, S]}, \quad (176)$$

Tabela 20: Resultados da análise de variância conjunta.

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Pr > F
T1 vs (T2+...+T7)	1	129,1697	129,1697	123,86	0,0001
T2 vs (T3+...+T7)	1	31,3467	31,3467	30,06	0,0001
Comp. de 1o. Grau	1	65,1655	65,1655	62,49	0,0001
Comp. de 2o. Grau	1	1,0013	1,0013	0,96	0,3465
Comp. de 3o. Grau	1	0,0859	0,0859	0,08	0,7790
Comp. de 4o. Grau	1	1,0879	1,0879	1,04	0,3272
Tratamento(T)	6	227,8570	37,9762	36,42	0,0001
Experimento(E)	2	7,8040	3,9020	3,74	0,0546
Interação $T \times E$	12	12,5143	1,0429	0,71	0,7343
Resíduo	63	92,2941	1,4650		
Total	83	340,4695			

F. Variação	GL	S.Q.	QM	F	Pr > F
T1 vs T2	1	25,6680	25,6680	24,61	0,0003
T2 vs T3	1	0,2522	0,2522	0,24	0,6318
Interação $T \times E$	12	12,5143	1,0429		

onde $F_{[\nu_j, \nu_i, I]}$ e $F_{[\nu_j, \nu_i, S]}$, são tais que

$$Pr \left\{ F_{[\nu_j, \nu_i, I]} \leq F_{[\nu_j, \nu_i]} \leq F_{[\nu_j, \nu_i, S]} \right\} = 1 - \alpha; \quad (177)$$

- (d) Suponha, ainda, que $E[m_i]$ difira da $E[m_j]$ apenas por um componente σ^2 (um dos múltiplos componentes), isto é, $E[m_i] = k\sigma^2 + E[m_j]$. Então, um intervalo de confiança para σ^2 com $(1 - 2\alpha)$ de confiança, será dado, de modo

aproximado, por

$$I.C.(\sigma^2)_{(1-2\alpha)} : \frac{\nu_i m_i \left(1 - \frac{m_i}{m_i} F_{[\nu_i, \nu_j, S]}\right)}{k \chi_{\nu_i, S}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\nu_i m_i \left(1 - \frac{m_i}{m_i} F_{[\nu_i, \nu_j, I]}\right)}{k \chi_{\nu_i, I}^2}, \quad (178)$$

onde $\chi_{\nu_i, I}^2$, $\chi_{\nu_i, S}^2$, $F_{[\nu_i, \nu_j, I]}$ e $F_{[\nu_i, \nu_j, S]}$, são tais que

$$Pr \left\{ \chi_{\nu_i, I}^2 \leq \chi_{\nu_i}^2 \leq \chi_{\nu_i, S}^2 \right\} = 1 - \alpha \quad (179)$$

e

$$Pr \left\{ F_{[\nu_i, \nu_j, I]} \leq F_{[\nu_i, \nu_j]} \leq F_{[\nu_i, \nu_j, S]} \right\} = 1 - \alpha. \quad (180)$$

Desse modo, um intervalo de confiança para σ_e^2 , com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança, será dado, conforme expressão (174), por

$$I.C.(\sigma_e^2)_{(1-\alpha)} : \frac{\nu_e m_e}{\chi_{\nu_e, S}^2} \leq \sigma_e^2 \leq \frac{\nu_e m_e}{\chi_{\nu_e, I}^2},$$

onde, da análise conjunta, $\nu_e = 63$, $m_e = 1,4650$ e $\nu_e m_e = 92,2941$. Admitindo-se $\alpha = 0,05$ e utilizando-se o *software* **MATHEMATICA**, encontrou-se

$$Pr \left\{ \chi_{63, I}^2 \leq \chi_{63}^2 \leq \chi_{63, S}^2 \right\} = 0,95$$

onde $\chi_{63, I}^2 = 42,9503$ e $\chi_{63, S}^2 = 86,8296$. Portanto, a estimativa e o intervalo com 95% de confiança para σ_e^2 , encontrados, foram respectivamente,

$$\hat{\sigma}_e^2 = 1,4650 \quad e \quad I.C.(\sigma_e^2)_{(0,95)} : 1,0629 \leq \sigma_e^2 \leq 2,1489.$$

Sendo $E[m_e] = \sigma_e^2$, $E[m_g] = R\sigma_g^2 + E[m_e] = R\sigma_g^2 + \sigma_e^2$ e $E[m_b] = KR\sigma_b^2 + E[m_g] = KR\sigma_b^2 + R\sigma_g^2 + \sigma_e^2$, então, intervalos de confiança para σ_g^2 e σ_b^2 com $(1 - 2\alpha)$ de confiança, podem ser obtidos, a partir da expressão (177), do seguinte modo,

$$I.C.(\sigma_g^2)_{(1-2\alpha)} : \frac{\nu_g m_g \left(1 - \frac{m_g}{m_g} F_{[\nu_g, \nu_e, S]}\right)}{R \chi_{\nu_g, S}^2} \leq \sigma_g^2 \leq \frac{\nu_g m_g \left(1 - \frac{m_g}{m_g} F_{[\nu_g, \nu_e, I]}\right)}{R \chi_{\nu_g, I}^2}$$

e

$$I.C.(\sigma_b^2)_{(1-2\alpha)} : \frac{\nu_b m_b \left(1 - \frac{m_b}{m_b} F_{[\nu_b, \nu_g, S]}\right)}{KR \chi_{\nu_b, S}^2} \leq \sigma_b^2 \leq \frac{\nu_b m_b \left(1 - \frac{m_b}{m_b} F_{[\nu_b, \nu_g, I]}\right)}{KR \chi_{\nu_b, I}^2}.$$

Da análise conjunta, tem-se que $K = 7$, $R = 4$, $\nu_g = 12$, $m_g = 1,0429$, $\nu_g m_g = 12,5143$, $\nu_e = 63$, $m_e = 1,4650$, $\nu_e m_e = 92,2941$, $\nu_b = 2$, $m_b = 3,9020$ e $\nu_b m_b = 7,8040$. Admitindo-se um nível de significância $\alpha = 0,025$ e utilizando-se o *software* **MATHEMATICA**, encontraram-se os seguintes resultados:

$$Pr \left\{ \chi_{12,I}^2 \leq \chi_{12}^2 \leq \chi_{12,S}^2 \right\} = 0,975,$$

onde $\chi_{12,I}^2 = 3,7525$ e $\chi_{12,S}^2 = 25,5305$,

$$Pr \left\{ \chi_{2,I}^2 \leq \chi_2^2 \leq \chi_{2,S}^2 \right\} = 0,975,$$

onde $\chi_{2,I}^2 = 0,02516$ e $\chi_{2,S}^2 = 8,7640$,

$$Pr \left\{ F_{[12, 63, I]} \leq F_{[12, 63]} \leq F_{[12, 63, S]} \right\} = 0,975,$$

onde $F_{[12, 63, I]} = 0,2985$ e $F_{[12, 63, S]} = 2,4024$,

$$Pr \left\{ F_{[2, 12, I]} \leq F_{[2, 12]} \leq F_{[2, 12, S]} \right\} = 0,975,$$

onde $F_{[2, 12, I]} = 0,012592$ e $F_{[2, 12, S]} = 6,454700$. Consequentemente, as estimativas e os intervalos com 95% de confiança para σ_g^2 e σ_b^2 , encontrados, foram respectivamente,

$$\hat{\sigma}_g^2 = -0,1055 \quad e \quad I.C.(\sigma_g^2)_{(0,95)} : \quad -0,291007 \leq \sigma_g^2 \leq 0,484136;$$

$$\hat{\sigma}_b^2 = 0,1021 \quad e \quad I.C.(\sigma_b^2)_{(0,95)} : \quad -0,023062 \leq \sigma_b^2 \leq 11,040392.$$

Observa-se que as estimativas dos componentes da variância $\hat{\sigma}_e^2$, $\hat{\sigma}_g^2$ e $\hat{\sigma}_b^2$, obtidos pelo método da ANOVA, não coincidiram com nenhuma das características (média, moda, mediana) das distribuições marginais *posteriori* $p(\sigma_e^2|\mathbf{y})$, $p(\sigma_b^2|\mathbf{y})$ e $p(\sigma_g^2|\mathbf{y})$ dadas pela metodologia Bayesiana. Além disso, o método da ANOVA permitiu que a estimativa do componente da variância σ_g^2 , assumisse um valor negativo ($\hat{\sigma}_g^2 = -0,1055$), resultado que, *a priori*, não é possível de ser imaginado para uma variância.

Os limites dos intervalos com 95% de confiança para σ_g^2 e σ_b^2 , obtidos pela metodologia clássica, além de terem apresentado valores diferentes dos intervalos de credibilidade, apresentaram, também, limites inferiores negativos, os quais são resultados discutíveis.

Os limites dos intervalos com 95% de credibilidade para σ_e^2 , obtidos a partir das densidades *posteriori* aproximadas em um estágio, dois estágios e composta, apresentaram resultados diferentes daqueles obtidos para o intervalo com 95% de confiança de σ_e^2 . Por outro lado, os limites do intervalo com 95% de confiança para σ_e^2 , coincidiram com aqueles obtidos para o intervalo de credibilidade no modelo irrestrito (ver tabela 16). Este não foi um resultado surpresa, pois, quando não se impõe nenhuma restrição aos parâmetros do modelo e além disso se trabalha com uma *priori* não-informativa, os resultados das análises, obtidos pela metodologia Bayesiana, coincidem com os resultados obtidos pela inferência clássica, porém com interpretações diferentes. O pior resultado de uma análise Bayesiana é aquele que é obtido quando nenhum conhecimento *a priori*, acerca dos parâmetros sobre os quais se deseja fazer inferências, foi incorporado na análise. Apesar disso, os resultados da análise Bayesiana são mais fáceis de serem interpretados e permite que certas probabilidades *a posteriori*, de interesse, sejam calculadas.

5 CONCLUSÕES

No desenvolvimento do método Bayesiano proposto para as análises individuais, admitiu-se que as observações eram provenientes de populações normais independentes com *priori* não-informativa para os parâmetros do modelo. Embora esta metodologia tenha sido desenvolvida para analisar experimentos balanceados, o desbalanceamento intra experimentos não constitui um problema muito sério. Este poderá ser contornado, adequando-se as expressões das somas dos quadrados, graus de liberdade associados e coeficientes das funções lineares associadas às hipóteses de interesse.

A metodologia Bayesiana desenvolvida, mostrou-se adequada para analisar um grupo de experimentos inteiramente casualizados balanceados. A metodologia permitiu que densidades *a posteriori* para os parâmetros do modelo e funções lineares deles, fossem determinadas e probabilidades *a posteriori* de interesse fossem calculadas. Além disso, foram determinadas algumas das características de cada distribuição (média, variância, moda, mediana) e intervalos de credibilidade para os parâmetros e funções lineares destes, permitindo, assim, uma grande facilidade de interpretação dos resultados das análises.

A metodologia Bayesiana proposta neste trabalho, apesar de ter considerado que o pesquisador nada conhece acerca do comportamento probabilístico dos parâmetros do modelo, isto é, que nenhum conhecimento *a priori* foi incorporado na análise, é ainda mais recomendável que uma análise clássica, pois, apresenta, dentre outras, as seguintes vantagens:

- é mais fácil de interpretar os resultados;

- não necessita aplicar métodos de comparações múltiplas, os quais são bastante discutíveis;
- permite calcular probabilidades *a posteriori* de um tratamento ser melhor que outro ou de um subgrupo de tratamentos ser melhor que outro subgrupo;
- não fornece estimativas de componentes da variância negativos e os limites inferiores dos intervalos com $(1 - \alpha)$ de credibilidade para os componentes de variância serão sempre maiores que ou iguais a *zero*.

Para realização de uma análise Bayesiana, nos moldes da análise proposta neste trabalho, recorre-se a um volume de cálculos superior aos necessários para realização de uma análise clássica. Além disso, não se tem, ainda, um *software* específico que faça todas as contas de uma análise Bayesiana, automaticamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAKMAN, O. R. ; NETO, O. C. **Análise estatística de decisão**. São Paulo: Edgard Blucher, 1980. 124p.
- BARNARD, G. A. Thomas Bayes - a bibliographical note. **Biometrika**, v. 45, p.293-5, 1958.
- BARTLETT, M. S. Properties of sufficiency and statistical tests. **Proceeding Royal Society of London.**, Séries A, v. 160, p. 268-74, 1937.
- BERGER, J., ed. **Bayesian analysis**. Amsterdan, Nort-Holland, 1994. (Special issue journal of statistical planning and inference 40(2/3) 1994).
- BERNARDO, J. M. ; SMITH, A. F. M. **Bayesian theory**. New York: John Wiley, 1994. 586p.
- BESAG, J. ; HIGDON, D. Bayesian inference for agricultural field experiments. In: ISI, 49., Firenze, 1993. **Proceedings**.
- BOX, G. E. P. Non-normality and tests on variances. **Biometrika**, v. 40, p. 318-35, 1953.
- BOX, G. E. P. Some theorems on quadratics forms applied in the study of analysis of variance problems. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 25, p. 290-302, 1954

- BOX, G. E. P. ; TIAO, G. C. A Bayesian approach to the inportance of assumptions applied to the comparision of variances. **Biometrika**, v. 51, p. 153-64, 1964.
- BOX, G. E. P. ; TIAO, G. C. Multiparameter problems from a Baysian point of view. **The Annals of Mathematical Statistcs**, v. 36, p. 1468-82, 1965.
- BOX, G. E. P. ; TIAO, G. C. Bayesian estimation of means for the random effect model. **Journal of the American Statistal Association**, v. 63, p. 174-81, 1968.
- BOX, G. E. P. ; TIAO, G. C. **Bayesian inference in analysis**. New York: Addison Wesley, 1973. 588p.
- BROEMELING, L. D. **Bayesian analysis of linear models**. New York: Marcel Dekker, 1985. 454p.
- CAMPOS, H. **Estatística aplicada a experimentação com cana-de-açúcar**. Piracicaba: FEALQ, 1984. 291p.
- CHAR, B. W., GEDDES, K. O.; GONNET, G. H. ; LEONG, B. L. **Maple V: library reference manual**. New York: Springer-Verlag, 1991. 698p.
- CLARKE, B. ; WASSERMAN, L. Noninformative priors and nuisace parameters. **Journal of the American Statistical Association**, v. 88, p.1427-32, 1993.
- COCHRAN, W. G. The combination of estimates from different experiments. **Bio-metrics**, v. 10, p. 101-29, 1954.
- COCHRAN, W. G. ; COX, G. M. **Experimental designs**. 2. ed., New York: John Wiley, 1957. 611p.
- COCHRAN, W. M. Problems arising in the analysis of a serie of similar experiments. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 4, p. 102-18, 1937.

- DEGROOT, M. H. **Probbabilidade e estadística**. San Marcos: Addison-Wesley, 1988. 694p.
- DRAPER, N. R. ; GUTTMAN, I. Unequal group variances in the fixed-effects one-way analysis of variance: a Bayesian sidelight. **Biometrika**, v. 53, p. 27-35, 1966.
- GOMES, F. P. **Curso de estatística experimental**. 11. ed. Piracicaba: Nobel, 1985. 46p.
- GOMEZ, K. A. ; GOMEZ, A. A. **Statistical procedures for agricultural research**. New York: John Wiley, 1984. 680p.
- GRAYBILL, F. A. **Theory and application of the linear model**. Massachusetts: Duxbury Press, 1976. 704p.
- HOGG, R.V. ; CRAIG, A. T. **Introduction to mathematical statistics**. New York: Macmillan, 1989. 438p.
- JEFFREYS, H. **Theory of probability**. 3. ed. Oxford: Claredon Press, 1961, 578p.
- KEMPTHORNE, O. **Design and analysis of experiments**. 6. ed. New York: Krieger, 1973. 631p.
- LAUD, P. H. ; IBRAHIN, J. G. A predictive approach to the analysis of designed experiments. **Journal of the American Statistical Association**, v. 89, p. 309-19, 1994.
- LEANDRO, R. C. **Introdução à inferência bayesiana**. Piracicaba, 1993. 50p. (seminário apresentado no curso de pos-graduação em estatística e experimentação agrônômica) Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo.

- LEE, P. M. **Bayesian statistics: an introduction**. London: Edwadr Arnold, 1989. 294p.
- LINDLEY, D. V. **Introduction to probability and statistics from a bayesian view point**. Cambrige: University Press., 1965, v. 2, 291p.
- LINDLEY, D. V. **Bayesian statistics - a review**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1972. 83p.
- LISEO, B. Elimination of nuisance parameters with reference priors. **Biometrika**, v. 80, p. 295-304, 1993.
- MOOD, A. M. ; GRAYBILL, F. A. ; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1974. 564p.
- O'HAGAN, A. **Kendall's advanced theory of statistics: Bayesian inference**. London: Edward Arnold, 1994. v. 2B, 330p.
- OWEN, R. J. The optimum design of a two-factor experiment using priori information. **The Annals Mathematical Statistics**. v. 41, p. 1917-34, 1970.
- PEREIRA, C. A. B. ; VIANA, M. A. **Elementos de inferência bayesiana**. In: Simpósio de Probabilidade e Estatística, 5. São Paulo, 1982. 98p.
- PORTNOY, S. Formal Bayes estimation with application to a random effects model. **The Annals of Mathematical Statistics**. v. 42, p. 1379-402, 1971.
- RAIFFA, H. ; SCHLAIFER, R. **Applied statistical decision theory**. Boston: Harvard College, 1961. 355p.
- SAMIUDDIN, M. Bayesian test of homogeneity of variances. **Journal of the American Statistical Association**, v. 71, p. 515-7, 1976.
- SEARLE, S. R., CASELLA, G. ; MACCULLOCH, C. E. **Variance components**. New York: John Wiley, 1992. 501p.

- SIMÕES, N. R. Estimadores de Bayes no Modelo de Regressão Linear Simples. Piracicaba, 1977. 138p. (Dissertação Mestrado) Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo.
- STUART, A. ; ORD, K. **Kendall's advanced theory of statistics: distributions theory**. 6. ed. New York: Edward Arnold, 1994. v. 1, 676p.
- TIAO, G. C. ; DRAPER, N.R. Bayesian analysis of linear models with special reference to the balanced incomplete block design. **Biometrika**, v. 55, p. 101-17, 1968.
- TIAO, G. C. ; GUTTMAN, I. The inverted Dirichlet distribution with applications, **Journal of the American Statistical Association**. v. 60, p. 792, 1965.
- TIAO, G. C. ; TAN, W. Y. Bayesian analysis of random-effect models in the analysis of variance. Posterior distribution of variance components. **Biometrika**, v. 52, p. 37-53, 1965.
- TIAO, G. C. ; ZELLNER, A. Bayes's theorem and the use of prior knowledge in regression analysis. **Biometrika**, v. 51, p. 219-30, 1964.
- YATES, F. ; COCHRAN, W. G. The analysis of groups of experiments. **Journal of Agricultural Science**, v. 28, p. 556-80, 1938.
- YE, K. ; BERGER, J. O. Noninformative priors for inferences in experimental regression models. **Biometrika**, v. 78, p. 645-56, 1993.
- ZACKS, S. **The Theory of statistical inference**. New York: John Wiley, 1971. 609p.
- ZELLNER, A. **An introduction to Bayesian inference in econometrics**. New York: John Wiley, 1971. 431p.
- WOLFRAM, S. **Mathematica: a system for doing mathematics by computer**. 2. ed. New York: Addison Wesley, 1991. 961p.

6 APÊNDICE

COMANDOS PARA O "MATHEMATICA" PARA OBTENÇÃO DOS GRAFICOS DAS DENSIDADES A POSTERIORI DO ERRO EXPERIMENTAL DE CADA ENSAIO E ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DAS DISTRIBUIÇÕES.

- (a) Usina N. S. Maravilhas
- (b) Usina Santa Tereza
- (c) Usina São José
- (d) Gráfico Conjunto Para os Três Erros.

```
ps1=Plot[(((28.0065)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*
(x^(-11.5))*(Exp[-(28.0065)/(2*x)]),{x,0.001,6},
PlotRange->All,AxesLabel->{" ","p1"},PlotLabel->"(a)"]
```

-Graphics-

```
ps2=Plot[(((52.8705)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*
(x^(-11.5))*(Exp[-(52.8705)/(2*x)]),{x,0.001,6},
PlotRange->All,AxesLabel->{" ","p2"},PlotLabel->"(b)"]
```

-Graphics-


```
ps3=Plot[(((11.4174)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*
(x^(-11.5))*(Exp[-(11.4174)/(2*x)]),{x,0.001,6},
PlotRange->All,AxesLabel->{" ","p3"},PlotLabel->"(c)"]
```

-Graphics-

```
gg=Show[ps1,ps2,ps3,AxesLabel->{" ","p"},PlotLabel->"(d)"]
```

-Graphics-

```
Show[GraphicsArray[{{ps1,ps2},{ps3,gg}}]]
```

```
-GraphicsArray-
```

CÁLCULO DAS MÉDIAS DO ERRO EXPERIMENTAL DE CADA ENSAIO

```
m11=NIntegrate[(((28.0065)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*x*  
(x^(-11.5))*(Exp[-(28.0065)/(2*x)]),{x,0.001,1000}]
```

```
1.47403
```

```
m21=NIntegrate[(((52.8705)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*x*  
(x^(-11.5))*(Exp[-(52.8705)/(2*x)]),{x,0.001,1000}]
```

```
2.78266
```

```
m31=NIntegrate[(((11.4174)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*x*  
(x^(-11.5))*(Exp[-(11.4174)/(2*x)]),{x,0.001,1000}]
```

```
0.600916
```

CÁLCULO DAS E[X^2]

```
m12=NIntegrate[(((28.0065)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*(x^2)*  
(x^(-11.5))*(Exp[-(28.0065)/(2*x)]),{x,0.001,1000}]
```

```
2.42837
```

```
m22=NIntegrate[(((52.8705)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*(x^2)*  
(x^(-11.5))*(Exp[-(52.8705)/(2*x)]),{x,0.001,1000}]
```

```
8.65415
```

```
m32=NIntegrate[(((11.4174)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*(x^2)*  
(x^(-11.5))*(Exp[-(11.4174)/(2*x)]),{x,0.001,1000}]
```

```
0.403582
```

CÁLCULO DAS VARIÂNCIAS DO ERRO EXPERIMENTAL PARA CADA ENSAIO

$v1 = m12 - (m11)^2$

0.255618

$v2 = m22 - (m21)^2$

0.910963

$v3 = m32 - (m31)^2$

0.0424823

CÁLCULO DA MODA DO ERRO EXPERIMENTAL EM CADA ENSAIO

$mo1 = \text{FindMinimum}[-((28.0065)^{(10.5)} / ((9.5!) * (2^{10.5}))) * (x^{(-11.5)}) * (\text{Exp}[-(28.0065) / (2 * x)])], \{x, \{0.001, 5\}\}]$
{-1.0071, {x -> 1.21767}}

$mo2 = \text{FindMinimum}[-((52.8705)^{(10.5)} / ((9.5!) * (2^{10.5}))) * x * (x^{(-11.5)}) * (\text{Exp}[-(52.8705) / (2 * x)])], \{x, \{0.001, 5\}\}]$
{-1.2825, {x -> 2.51764}}

$mo3 = \text{FindMinimum}[-((11.4174)^{(10.5)} / ((9.5!) * (2^{10.5}))) * x * (x^{(-11.5)}) * (\text{Exp}[-(11.4174) / (2 * x)])], \{x, 0.001, 5\}]$
{-1.2825, {x -> 0.543686}}

CÁLCULO DA MEDIANA DO ERRO EXPERIMENTAL EM CADA ENSAIO

$Md1 = \text{NIntegrate}[((28.0065)^{(10.5)} / ((9.5!) * (2^{10.5}))) * (x^{(-11.5)}) * (\text{Exp}[-(28.0065) / (2 * x)]), \{x, 0, 1.37718\}]$
0.500069

$Md2 = \text{NIntegrate}[((52.8705)^{(10.5)} / ((9.5!) * (2^{10.5}))) * (x^{(-11.5)}) * (\text{Exp}[-(52.8705) / (2 * x)]), \{x, 0.001, 2.5997\}]$
0.500005

$Md3 = \text{NIntegrate}[((11.4174)^{(10.5)} / ((9.5!) * (2^{10.5}))) * (x^{(-11.5)}) * (\text{Exp}[-(11.4174) / (2 * x)]), \{x, 0.001, 0.56142\}]$
0.500036

INTERVALOS COM 95% DE CREDIBILIDADE PARA O ERRO EXPERIMENTAL DE CADA ENSAIO

$ic1 = \text{NIntegrate}[((28.0065)^{(10.5)} / ((9.5!) * (2^{10.5}))) * (x^{(-11.5)}) * (\text{Exp}[-(28.0065) / (2 * x)]), \{x, 0.7894, 2.7236\}]$
0.949996

```
ic2=NIntegrate[(((52.8705)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*  
(x^(-11.5))*(Exp[-(52.8705)/(2*x)])},{x,1.4902,5.1416}]  
0.95
```

```
ic3=NIntegrate[(((11.4174)^(10.5))/((9.5!)*(2^10.5)))*  
(x^(-11.5))*(Exp[-(11.4174)/(2*x)])},{x,0.32181,1.11033}]  
0.949999
```

LINHAS DE COMANDOS PARA O "MATHEMATICA" PARA OBTENÇÃO DOS GRÁFICOS DAS DENSIDADES A POSTERIORI DO ERRO EXPERIMENTAL NA ANÁLISE CONJUNTA, ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DA DIST. E OS INTERVALOS COM 95% DE CREDIBILIDADE.

- (a) Posteriori do erro experimental aprox. em um estágio,
- (b) posteriori do erro experimental aprox. em dois estágios,
- (c) posteriori do erro experimental sem a restrição C,
- (d) posteriori do erro experimental composto "pooling",
- (e) os quatro gráficos juntos.

```
p1=Plot[((91.052^31)/((30!)*(2^31)))*(x^(-32))*(
Exp[-45.5291/x]),{x,0.01,3},PlotRange->All,
PlotLabel->"(a)",AxesLabel->{"","p1"}]
```

-Graphics-

```
p2=Plot[((99.7128^37)/((36!)*(2^37)))*(x^(-38))*(
Exp[-49.8564/x]),{x,0.01,3},PlotRange->All,
PlotLabel->"(b)",AxesLabel->{"","p2"}]
```

-Graphics-

```
pi=Plot[((92.2941^31.5)/((30.5!)*(2^31.5)))*(x^(-32.5))*
(Exp[-46.14705/x]),{x,0.01,3},PlotRange->All,
PlotLabel->"(c)",AxesLabel->{"","pi"}]
```

-Graphics-

```
pc=Plot[((100.2065^37)/((36!)*(2^37)))*(x^(-38))*
(Exp[-50.10325/x]),{x,0.01,3},PlotRange->All,
PlotLabel->"(d)",AxesLabel->{"","pc"}]
```

-Graphics-

```
Show[GraphicsArray[{{p1,p2},{pi,pc}}]]
```

```
-GraphicsArray-
```

```
p=Show[p1,p2,pi,pc,AxesLabel->{" ","p"},PlotLabel->"(e)"]
```

```
-Graphics-
```

CÁLCULO DA MÉDIA DO ERRO EXPERIMENTAL, NA ANÁLISE CONJUNTA, USANDO AS DIFERENTES APROXIMAÇÕES PARA A DENSIDADE A POSTERIORI DO ERRO EXPERIMENTAL:

$m1$ =média a partir da posteriori aprox. em um estágio,
 $m2$ =média a partir da posteriori aprox. em dois estágios,
 mi =média a partir da posteriori irrestrita,
 mc =média a partir da posteriori composta.

```
m1=NIntegrate[ ((91.0582^31)/((30!)*(2^31)))*x*(x^(-32))*
(Exp[-45.5291/x]),{x,0.01,500}]
```

```
1.51764
```

```
m2=NIntegrate[ ((99.7128^37)/((36!)*(2^37)))*x*(x^(-38))*
(Exp[-49.8564/x]),{x,0.01,500}]
```

```
1.3849
```

```
mi=NIntegrate[ ((92.2941^31.5)/((30.5!)*(2^31.5)))*x*
(x^(-32.5))*(Exp[-46.14705/x]),{x,0.01,500}]
```

```
1.51302
```

```
mc=NIntegrate[ ((100.2065^37)/((36!)*(2^37)))*x*(x^(-38))*
(Exp[-50.10325/x]),{x,0.01,500}]
```

```
1.39176
```

CÁLCULO DA $E[X^2]$

```
m12=NIntegrate[ ((91.0582^31)/((30!)*(2^31)))*x^2*(x^(-32))*
(Exp[-45.5291/x]),{x,0.01,500}]
```

```
2.38264
```

```
m22=NIntegrate[ ((99.7128^37)/((36!)*(2^37)))*x^2*(x^(-38))*
(Exp[-49.8564/x]),{x,0.01,500}]
```

```
1.97275
```

```
mi2=NIntegrate[ ((92.2941^31.5)/((30.5!)*(2^31.5)))*x^2*
(x^(-32.5))*(Exp[-46.14705/x]),{x,0.01,500}]
```

```
2.36682
```

```
mc2=NIntegrate[ ((100.2065^37)/((36!)*(2^37)))*x^2*(x^(-38))*
(Exp[-50.10325/x]),{x,0.01,500}]
```

```
1.99233
```

CÁLCULO DAS VARIÂNCIAS A POSTERIORI DOS ERRO EXPERIMENTAL USANDO AS DIFERENTES APROXIMAÇÕES PARA POSTERIORI

```
v1=m12-((m1)^2)
```

```
0.0794214
```

```
v2=m22-((m2)^2)
```

```
0.0547985
```

```
vi=mi2-((mi)^2)
```

```
0.0776008
```

```
vc=mc2- (mc)^2)
```

```
0.0553425
```

CÁLCULO DA MODA DO ERRO EXPERIMENTAL USANDO AS DIFERENTES APROXIMAÇÕES PARA POSTERIRI

```
mo1=FindMinimum[-((91.0582^31)/((30!)*(2^31)))*(x^(-32))*  
(Exp[-45.5291/x]),{x,{1,3}}]
```

```
{-1.53259, {x -> 1.42278}}
```

```
mo2=FindMinimum[-((99.7128^37)/((36!)*(2^37)))*(x^(-38))*  
(Exp[-49.8564/x]),{x,{1,3}}]
```

```
{-1.82109, {x -> 1.31201}}
```

```
moi=FindMinimum[-((92.2941^31.5)/((30.5!)*(2^31.5)))*  
(x^(-32.5))*(Exp[-46.14705/x]),{x,{1,3}}]
```

```
{-1.54848, {x -> 1.41991}}
```

```
moc=FindMinimum[-((100.2065^37)/((36!)*(2^37)))*  
(x^(-38))*(Exp[-50.10325/x]),{x,{1,3}}]
```

```
{-1.81211, {x -> 1.31851}}
```

CÁLCULO DA MEDIANA DO ERRO EXPERIMENTAL USANDO AS DIFERENTES APROXIMAÇÕES PARA POSTERIORI

```
Md1=NIntegrate[((91.0582^31)/((30!)*(2^31)))*(x^(-32))*  
(Exp[-45.5291/x]),{x,0,1.4848}]
```

```
0.500278
```

```
Md2=NIntegrate[((99.7128^37)/((36!)*(2^37)))*(x^(-38))*  
(Exp[-49.8564/x]),{x,0,1.3598}]
```

```
0.500178
```

```
Mdi=NIntegrate[((92.2941^31.5)/((30.5!)*(2^31.5)))*  
(x^(-32.5))*(Exp[-46.14705/x]),{x,0,1.4808}]
```

```
0.500265
```

```
Mdc=NIntegrate[((100.2065^37)/((36!)*(2^37)))*  
(x^(-38))*(Exp[-50.10325/x]),{x,0,1.3666}]
```

```
0.500297
```

INTERVALOS COM 95% DE CREDIBILIDADE PARA O ERRO EXPERIMENTAL

```
IC1=NIntegrate[ ((91.0582^31)/((30!)*(2^31)))*(x^(-32))*  
(Exp[-45.5291/x]), {x,1.0632,2.1620}]
```

```
0.950022
```

```
IC2=NIntegrate[ ((99.7128^37)/((36!)*(2^37)))*(x^(-38))*  
(Exp[-49.8564/x]), {x,1.0004,1.9140}]
```

```
0.950017
```

```
ICi=NIntegrate[ ((92.2941^31.5)/((30.5!)*(2^31.5)))*  
(x^(-32.5))*(Exp[-46.14705/x]), {x,1.0630,2.1491}]
```

```
0.95001
```

```
ICc=NIntegrate[ ((100.2065^37)/((36!)*(2^37)))*  
(x^(-38))*(Exp[-50.10325/x]), {x,1.0054,1.9236}]
```

```
0.950019
```

COMANDOS PARA O "MATHEMATICA" PARA OBTENÇÃO DO GRÁFICO
DA POSTERIORI DO COMPONENTE DA VARIÂNCIA DEVIDO A
INTERAÇÃO, ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DA DISTRI-
ÇÃO E INTERVALO COM 95% DE CREDIBILIDADE

```
p=NIntegrate[(1/((5.3875!)*(2^6.3875)))*(x^5.3875)*
(Exp[-x/2]),{x,0,8.896314}]
```

0.233744

```
psg=Plot[((4*((13.0331)^(6.3875)))/((5.3875!)*(2^6.3875)*
(0.233744)))*((1.465+4*x)^(-7.3875))*
(Exp[-(13.0331/(2.93+8*x))]),{x,0,0.7},PlotRange->All]
```

-Graphics-

CÁLCULO DA MÉDIA

CÁLCULO DA MÉDIA

```
mg=NIntegrate[((4*((13.0331)^(6.3875)))/((5.3875!)*(2^6.3875)*
(0.233744)))*x*((1.465+4*x)^(-7.3875))*
(Exp[-(13.0331/(2.93+8*x))]),{x,0,100}]
```

0.135673

CÁLCULO DE $E[X^2]$

CÁLCULO DE $E[X^2]$

```
mg2=NIntegrate[((4*((13.0331)^(6.3875)))/((5.3875!)*(2^6.3875)
(0.233744)))*(x^2)*((1.465+4*x)^(-7.3875))*
(Exp[-(13.0331/(2.93+8*x))]),{x,0,100}]
```

0.0425853

CÁLCULO DA VARIÂNCIA

$vg=mg2 - (mg)^2$

0.0241782

A MODA DA DISTRIBUIÇÃO É zero

DETERMINAÇÃO DA MEDIANA

```
Mdg=NIntegrate[ ((4*((13.0331)^(6.3875)))/((5.3875!)*(2^6.3875)
(0.233744))) * ((1.465+4*x)^(-7.3875)) *
(Exp[-(13.0331/(2.93+8*x))]) , {x,0,0.087502} ]
0.500003
```

INTERVALO COM 95% DE CREDIBILIDADE PARA O COMPONENTE
DA VARIÂNCIA DEVIDO A INTERAÇÃO

```
icg=NIntegrate[ ((4*((13.0331)^(6.3875)))/((5.3875!)*(2^6.3875)
(0.233744))) * ((1.465+4*x)^(-7.3875)) *
(Exp[-(13.0331/(2.93+8*x))]) , {x,0,0.4248} ]
0.950001
```

COMANDOS PARA O "MATHEMATICA" PARA OBTENÇÃO DO GRÁFICO DA POSTERIORI DO COMPONENTE DA VARIÂNCIA DEVIDO AO FATOR EXPERIMENTO, ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DA DISTRIBUIÇÃO E INTERVALO COM 95% DE CREDIBILIDADE PARA O COMPONENTE DA VARIÂNCIA DEVIDO A EXPERIMENTO.

```
p=NIntegrate[(1/2)*(Exp[-x/2]),{x,0,4.317566}]
```

```
0.884534
```

```
psb=Plot[((28*7.804)/(2*0.884534))*((1.8075+28*x)^(-2))*  
(Exp[-(7.804)/(3.615+56*x)]),{x,0,0.6},  
AxesLabel->{" ","psb"}]
```

psb

-Graphics-

CÁLCULO DA MÉDIA

```
mb=NIntegrate[((28*7.804)/(2*0.884534))*x*  
((1.8075+28*x)^(-2))*(Exp[-(7.804)/(3.615+56*x)]),  
{x,0,1000}]
```

```
1.23714
```

CÁLCULO DE $E[X^2]$

```
mb2=NIntegrate[((28*7.804)/(2*0.884534))*(x^2)*  
((1.8075+28*x)^(-2))*(Exp[-(7.804)/(3.615+56*x)]),  
{x,0,1000}]
```

```
157.19
```

CÁLCULO DA VARIÂNCIA

$vb=mb^2 - (mb)^2$

155.66

A MODA DA DISTRIBUIÇÃO

$mob = \text{FindMinimum}[-(123.518) * ((1.8075 + 28 * x)^{-2}) * \\ \text{Exp}[-(7.804) / (3.615 + 56 * x)], \{x, \{0, 1\}\}]$
 $\{-4.39164, \{x \rightarrow 0.00512489\}\}$

A MEDIANA DA DISTRIBUIÇÃO

$mdb = \text{NIntegrate}[(123.518) * ((1.8075 + 28 * x)^{-2}) * \\ \text{Exp}[-(7.804) / (3.615 + 56 * x)], \{x, 0, 0.17413\}]$
0.500011

INTERVALO COM 95% DE CREDIBILIDADE PARA O COMPONENTE DA VARIÂNCIA DEVIDO AO FATOR EXPERIMENTO

$icb = \text{NIntegrate}[(123.518) * ((1.8075 + 28 * x)^{-2}) * \\ \text{Exp}[-(7.804) / (3.615 + 56 * x)], \{x, 0, 3.0163\}]$
0.950001

PROGRAMA SAS PARA AS ANALISES CLASSICAS INDIVIDUAIS

```

DATA INDIVID;
  DO TRAT=1 TO 7;
    DO REP=1 TO 4;
      INPUT TPH @;
      OUTPUT;
    END;
  END;
CARDS;
7.03 7.29 4.99 4.72
8.42 5.39 7.03 7.40
5.38 6.17 7.14 7.40
6.30 8.24 8.12 9.05
9.50 8.23 10.83 8.34
9.65 10.08 8.17 9.51
11.16 9.90 11.27 8.58
;
PROC PRINT;
PROC GLM;
CLASS TRAT;
MODEL TPH=TRAT / SS1 SS2 SS3;
MEANS TRAT;
CONTRAST 'T1 vs (T2+...+T7)' TRAT -6 1 1 1 1 1 1;
CONTRAST 'T2 vs (T3+...+T7)' TRAT 0 -5 1 1 1 1 1;
CONTRAST 'Comp. de 1o. Grau' TRAT 0 0 -2 -1 0 1 2;
CONTRAST 'Comp. de 2o. Grau' TRAT 0 0 2 -1 -2 -1 2;
CONTRAST 'Comp. de 3o. Grau' TRAT 0 0 -1 2 0 -2 1;
CONTRAST 'Comp. de 4o. Grau' TRAT 0 0 1 -4 6 -4 1;
CONTRAST 'T1 vs T2' TRAT -1 1 0 0 0 0 0;
CONTRAST 'T2 vs T3' TRAT 0 -1 1 0 0 0 0;
RUN;

```

PROGRAMA SAS PARA A ANALISE CONJUNTA CLASSICA

```

DATA CONJUNTA;
DO EXP=1 TO 3;
  DO TRAT=1 TO 7;
    DO REP=1 TO 4;
      INPUT TPH @;
      OUTPUT;
    END;
  END;
END;
CARDS;
7.03 7.29 4.99 4.72
8.42 5.39 7.03 7.40
5.38 6.17 7.14 7.40
6.30 8.24 8.12 9.05
9.50 8.23 10.83 8.34
9.65 10.08 8.17 9.51
11.16 9.90 11.27 8.58
2.25 3.92 6.02 2.37
7.99 5.56 4.43 5.69
6.26 9.34 5.53 6.26
8.68 5.51 8.77 6.65
7.41 8.25 7.78 10.74
8.09 9.29 8.59 10.44
12.12 8.71 7.80 10.22
4.57 5.03 3.69 4.23
7.23 8.05 7.01 6.73
7.78 8.64 6.90 6.59
8.80 7.26 7.55 6.96
9.96 8.49 8.86 8.23
9.22 9.30 9.91 8.61
9.64 10.57 8.41 9.74
;
PROC PRINT;
PROC GLM;
CLASS EXP TRAT;
MODEL TPH=EXP TRAT EXP*TRAT /SOLUTION SS1 SS2 SS3;
TEST H=EXP E=EXP*TRAT;
TEST H=TRAT E=EXP*TRAT;
MEANS EXP TRAT EXP*TRAT;
CONTRAST 'T1 vs (T2+...+T7)' TRAT -6 1 1 1 1 1 1 / E=EXP*TRAT;
CONTRAST 'T2 vs (T3+...+T7)' TRAT 0 -5 1 1 1 1 1 / E=EXP*TRAT;
CONTRAST '1o. GRAU' TRAT 0 0 -2 -1 0 1 2 / E=EXP*TRAT;
CONTRAST '2o. GRAU' TRAT 0 0 2 -1 -2 -1 2 / E=EXP*TRAT;
CONTRAST '3o. GRAU' TRAT 0 0 -1 2 0 -2 1 / E=EXP*TRAT;
CONTRAST '4o. GRAU' TRAT 0 0 1 -4 6 -4 1 / E=EXP*TRAT;
CONTRAST 'T1 vs T2' TRAT -1 1 0 0 0 0 0 / E=EXP*TRAT;
CONTRAST 'T2 vs T3' TRAT 0 -1 1 0 0 0 0 / E=EXP*TRAT;
RUN;

```


LINHAS DE COMANDOS PARA O SOFTWARE "MATHEMATICA"
 USADAS NO CÁLCULO DOS LIMITES INFERIORES E SUPERIORES DAS DISTRIBUIÇÕES DE QUI-QUADRADO E F-SNEDECOR, PARA CONSTRUÇÃO DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA DOS COMPONENTES DA VARIÂNCIA NA ANÁLISE CONJUNTA.

```
X=NIntegrate[(1/((30.5!)*(2^31.5)))*(x^30.5)*(Exp[-x/2]),
{x,42.9503,86.8296}]
```

0.95

```
x1=NIntegrate[(1/7680)*(x^5)*(Exp[-x/2]),
{x,3.7525,25.5305}]
```

0.975

```
x2=NIntegrate[(0.5)*Exp[-x/2],{x,0.02516,8.764}]
```

0.974998

```
f1=NIntegrate[(1/Beta[6,31.5])*((12/63)^6)*(f^5)*
((1+(12/63)*f)^(-37.5)),{f,0.29835,2.4024}]
```

0.974999

```
f2=NIntegrate[(1/Beta[1,6])*(1/6)*((1+(1/6)*f)^(-7)),
{f,0.012592,6.4547}]
```

0.975

```
x11=NIntegrate[(1/7680)*(x^5)*(Exp[-x/2]),
{x,4.40379,23.3367}]
```

0.95

```
x22=NIntegrate[(0.5)*Exp[-x/2],{x,0.050636,7.3778}]
```

0.95

```
f11=NIntegrate[(1/Beta[6,31.5])*((12/63)^6)*(f^5)*
((1+(12/63)*f)^(-37.5)),{f,0.351853,2.15811}]
```

0.95

```
f22=NIntegrate[(1/Beta[1,6])*(1/6)*((1+(1/6)*f)^(-7)),
{f,0.025371,5.0959}]
```

0.950001