EFEITOS DA VIOLAÇÃO DA SUPOSIÇÃO DE INDEPENDÊNCIA NA
ANÁLISE DE VARIÂNCIA DO MODELO LINEAR DE GAUSS-MARKOV
COM UM E DOIS FATORES

LUIZ CARLOS BAIDA

Tese apresentada à Escola
Superior de Agricultura
"Luiz de Queiroz", da
Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de
Doutor em Agronomia: Área
de Concentração: Estatística
e Experimentação Agrônômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Dezembro - 1989

EFEITOS DA VIOLAÇÃO DA SUPOSIÇÃO DE INDEPENDÊNCIA NA
ANÁLISE DE VARIÂNCIA DO MODELO LINEAR DE GAUSS-MARKOV
COM UM E DOIS FATORES

LUIZ CARLOS BAIDA
Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

Tese apresentada à Escola
Superior de Agricultura
"Luiz de Queiroz", da
Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de
Doutor em Agronomia : Área
de Concentração: Estatística
e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Dezembro - 1989

EFEITOS DA VIOLAÇÃO DA SUPOSIÇÃO DE INDEPENDÊNCIA NA
ANÁLISE DE VARIÂNCIA DO MODELO LINEAR DE GAUSS-MARKOV
COM UM E DOIS FATORES

LUIZ CARLOS BAIDA

Aprovada em 20.03.1990

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma ESALQ/USP

Prof. Dr. Humberto de Campos ESALQ/USP

Profa. Dra. Maria Cristina Stolf Nogueira ESALQ/USP

Prof. Dr. Odelar Leite Linhares IBILCE/UNE

Prof. Dr. João Riboldi UFRGS/Porto Alegre

Prof. Antonio Francisco Iemma
- Orientador -

*Aos meus pais e irmãos,
ofereço.*

*A minha esposa Márcia,
meus filhos:
Eduardo Augusto
Fernando Cesar
Karina Elisa,
dedico.*

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Antonio Francisco Iemma, Professor Associado do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ - USP, pelas valiosas sugestões e orientação deste trabalho.

Aos professores Dr. Antonio Francisco Iemma, Dr. Décio Barbin e Dr. Roberto Simionato Moraes, membros da Banca dos Exames Gerais de Qualificação, pela sugestão do assunto escolhido.

À minha esposa Márcia pelo constante apoio, desde o início do Programa de Doutorado.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ - USP, na pessoa de seu coordenador, prof. Dr. Décio Barbin, pela receptividade e ensinamentos, em especial aos professores Dr. Humberto de Campos e Dr. Décio Barbin, pelo apoio e sincera amizade.

Ao professor Dr. Ruy Madsen Barbosa, Titular de Departamento de Análise Numérica e Estatística do IBILCE - UNESP, pelos ensinamentos, incentivo e amizade.

Ao Departamento de Análise Numérica e Estatística do IBILCE - UNESP, na pessoa de seu chefe, prof.^a Dr.^a Sandra M. V. Ferreira Dias, pela oportunidade concedida para a realização deste Programa, em especial ao

professor Dr. Antonio Espada Filho, pela atenção a nós dedicada.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação, pela amizade, lealdade e companheirismo.

Aos colegas da área de Estatística do Departamento de Análise Numérica e Estatística do IBILCE - UNESP, professores Antonio José Manzato e Fernando Ferrari, pelo apoio e em especial ao professor Dr. José Antonio Cordeiro, pela ajuda no desenvolvimento dos programas computacionais.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pela bolsa concedida.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ - USP, pela amizade, cooperação e lealdade.

As secretárias do Departamento de Análise Numérica e Estatística do IBILCE - UNESP, Ilva, Noêmia e Marli, pela constante cooperação no decorer desse programa.

Aos técnicos do Laboratório de Computação do IBILCE - UNESP, Romildo e Getulio, pela cooperação.

À a Comissão Julgadora, pelas valiosas sugestões, as quais vieram a enriquecer o trabalho.

ÍNDICE

	página
RESUMO	vii
SUMMARY	x
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. - O Problema	1
1.2. - Objetivos	2
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1. - Considerações Iniciais	4
2.2. - Dois Artigos Básicos	12
3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	17
3.1. - Conceitos Introdutórios	17
3.2. - Modelos com Um Fator	21
3.2.1. - Um Fator Aleatório	21
3.2.2. - Um Fator Fixo	35
3.3. - Modelos com Dois Fatores Fixos e Balanceados.	47
3.3.1. - Modelos sem interação.....	47
3.3.2. - Modelos com interação.....	57
3.3.3. - Procedimentos Alternativos	69
3.4. - Modelos Mistos com Dois Fatores	83
3.4.1. - Modelos com interação.....	83
3.4.2. - Procedimentos Alternativos	94

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	99
5. CONCLUSÕES	111
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	113
APÊNDICE	120

EFEITOS DA VIOLAÇÃO DA SUPOSIÇÃO DE INDEPENDÊNCIA NA ANÁLISE DE VARIÂNCIA DO MODELO LINEAR DE GAUSS-MARKOV COM UM E DOIS FATORES

Autor: LUIZ CARLOS BAIDA

Orientador: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um estudo das implicações induzidas pela violação da pressuposição da independência sobre as probabilidades dos erros tipos I e II, inerentes às hipóteses clássicas dos experimentos com um e dois fatores, analisados sob a estrutura padrão dos modelos lineares de Gauss-Markov.

Para tal, tomam-se como ponto de partida os trabalhos de PERES (1985) e de SCARIANO e DAVENPORT (1987), que mostram tais implicações em modelos com um fator fixo e balanceado, segundo um caso simples de equicorrelação, ao nível nominal de significância 0,05. Uma extensão desse trabalho para o caso não balanceado é feita segundo a equicorrelação já considerada. Estudam-se também tais implicações para modelos com um fator aleatório.

Para modelos com dois fatores fixos e balanceados, estudam-se três casos de equicorrelação, enquanto que para modelos mistos, dois casos são estudados.

Tabelas das probabilidades dos erros tipos I e II, para cada caso de equicorrelação e para cada configuração do modelo estudado, são construídas, tornando possível avaliar o viés ao nível nominal de significância 0,05. Dentre outras observações, pode-se notar que a magnitude do erro cometido é diretamente proporcional à magnitude do coeficiente de correlação intraclasse, ao tamanho das amostras e ao número de níveis dos fatores envolvidos no planejamento.

Ademais, para cada caso de equicorrelação e modelo estudado, procurou-se uma solução alternativa que possibilitasse efetuar os testes das hipóteses principais, sem viés nas probabilidades dos erros tipos I e II, através de uma análise de variância univariada usual. Esse procedimento alternativo foi obtido através de uma modificação no planejamento, considerando-se "b" repetições independentes entre si, acarretando a inclusão do fator aleatório "repetição" no modelo. Para os casos em que tal procedimento apresentou resultados favoráveis, foram aqui relacionados, em caso contrário, não o foram.

Para o cálculo das probabilidades dos erros tipo II, utilizou-se a aproximação da distribuição F não central para a F central, igualando seus três primeiros momentos, conforme sugerido em TIKU (1965). O cálculo

definitivo dessas probabilidades foi feito através da transformação da F central para a função Beta incompleta, e do emprego das sub-rotinas envolvidas neste cálculo, dadas em Fortran e em Pascal por PRESS et alli (1986).

THE EFFECTS OF VIOLATION OF INDEPENDENCE ASSUMPTION IN
THE VARIANCE ANALYSIS OF GAUSS-MARKOV'S LINEAR MODEL
WITH ONE AND TWO FACTORS

Author: LUIZ CARLOS BAIDA

Adviser: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

SUMMARY

This is a study of the implications induced by the violation of the independence assumptions on types I and II errors probabilities inherent to the classical hypotheses of the experiments with one and two factors, analyzed under the standard structure of Gauss-Markov's linear models.

For this purpose, PERES (1985) and SCARIANO & DAVENPORT (1987) were taken as starting points; they show these effects for models with one fixed and balanced factor according to a simple case of equicorrelation at the nominal level of significance 0,05. An extension of this work to the unbalanced case is given according to the already considered equicorrelation. Such effects are also studied for models with one random and balanced factor.

For models with two fixed and balanced factors, up to three equicorrelation cases are studied,

whereas for mixed models two cases are studied.

Tables of types I and II error probabilities, for each equicorrelation case and for each studied model, are given to show the bias of such probabilities at the 0,05 nominal significance level. Among other observations it can be noticed that the magnitude of the error is directly proportional to the magnitude of the intraclass correlation coefficient, to the size of the samples and to the number of levels involved at the design.

For each case of equicorrelation and model studied, an alternative solution was also sought so that tests could be performed for the main hypotheses, without any bias in the probabilities of types I and II errors through an usual analysis of unvaried variance. This alternative procedure occurs through a modification of the design, considering "b" as experimental replication independent among themselves, entailing the inclusion of the random factor "replicas" in the model. Only the cases in which this procedure presented results were hereby listed.

For the calculus of type II error probabilities the approximation of noncentral F to central F was used, equalling their first three moments, as given by TIKU (1965).

The definitive calculus of these probabilities is done through the transformation of central F into the

incomplete Beta function and through the use of the sub-routines involved in this calculus as given in Fortran and Pascal by PRESS et alii (1986).

1. INTRODUÇÃO

1.1. O PROBLEMA

Nos planejamentos experimentais que têm por objetivo verificar a existência ou não de efeitos dos tratamentos envolvidos, é usual recorrer-se à análise de variância, considerando válida todas as suposições básicas do modelo linear de Gauss-Markov.

Dentre essas suposições, destaca-se a independência dos erros associados ao modelo em questão, assim como a sua normalidade. Assim, se o modelo em questão é dado por $Y_i = X_{pi} \theta_i + \varepsilon_i$ onde Y é um vetor das observações, X é a matriz do delineamento, θ é um vetor de parâmetros e ε é um vetor de erros associado ao modelo, é usual considerar-se $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2 I)$, onde σ^2 é geralmente desconhecido (modelo ordinário de Gauss-Markov).

Dessa forma, os testes F para as hipóteses principais são exatos quanto ao nível de significância desejado, assim como seu poder segundo a hipótese alternativa assumida.

Muitas vezes, no entanto, a matriz de variâncias e covariâncias associada ao erro não é da forma $\sigma^2 I$, mas sim de uma forma mais geral Ω , onde Ω é positiva definida.

Nossa principal preocupação se dá com as conseqüências que podem acarretar, nos casos em que o experimentador considera seus dados segundo o modelo ordinário, quando na verdade seus erros não são independentes e sim correlacionados, segundo uma matriz Ω positiva definida. Nestes casos, quais seriam as verdadeiras probabilidades dos erros tipos I e II cometidos quando ele utiliza inadequadamente o modelo ordinário, visando um nível de significância pré-fixado α ? Na verdade, o nível de significância, neste caso, pode ser meramente nominal, pois as probabilidades dos erros podem afastar-se severamente daquelas pretendidas nos testes:

Muitos são os experimentos, nos mais diversos campos da pesquisa científica, nos quais essas correlações podem estar presentes. Dentre outros, podemos citar aqueles cujas observações ocorrem: em grupos, em seqüência e no espaço.

12. OBJETIVOS

A revisão bibliográfica efetuada revelou a existência de uma lacuna no tocante à quantificação efetiva

das alterações no nível de significância e no poder do teste, decorrentes da violação da hipótese de independência. Nesse contexto, temos como objetivo, através do uso de modelos lineares de efeitos fixos, aleatórios e mistos, efetuar um estudo teórico sobre o tema, bem como apresentar tabelas que quantifiquem as variações induzidas nas probabilidades de ocorrência dos erros dos tipos I e II.

Para tanto, será considerado o caso de correlação constante, caracterizado em várias configurações, segundo o número de níveis dos fatores envolvidos e da magnitude da correlação considerada.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise de variância, associada aos modelos lineares em geral, tem sido uma prática utilizada pelos pesquisadores das mais diversas áreas, a fim de comparar os efeitos produzidos pelos fatores dos modelos em estudo sobre suas unidades experimentais.

Não é incomum presenciar-se, mesmo nos dias de hoje, o uso da análise de variância, sem que o pesquisador tenha garantias de que as suposições básicas para sua aplicabilidade estejam satisfeitas. Em geral consideram-se os dados como que oriundos de populações normais, independentes e de mesma variância, isto é, supõe-se que os erros associados ao modelo têm distribuição de probabilidade normal com média $\mu = 0$ e variância σ^2 , e são independentes entre si, acarretando uma matriz de variâncias e covariâncias para o vetor de erros do tipo $\sigma^2 I_N$, onde I_N é uma matriz identidade de ordem N , e N é o número total de observações.

Na verdade, se qualquer uma das suposições citadas é violada, pode-se obter resultados desastrosos para os testes usuais quanto às hipóteses principais. Assim, vários autores, preocupados com esses fatos, colocam claramente em seus textos os efeitos dessas violações, e procuram soluções (muitas vezes aproximadas) para superar esses problemas. BOX (1954-a) chama a atenção para o caso em que a matriz de variâncias e covariâncias é ainda diagonal, mas apresenta valores diferentes. Mostra que, nesse caso, boas aproximações para o nível de significância podem ser obtidas utilizando-se aproximações das distribuições de χ^2 e F, para a análise de variância com um fator fixo, se as variâncias populacionais são moderadamente diferentes.

BOX (1954-b), em trabalho que é continuação do anterior, enfoca os efeitos das desigualdades das variâncias e também das correlações seriais de primeira ordem, para um planejamento cruzado com dois fatores, mostrando que mesmo nas suas soluções aproximadas, a correlação serial de primeira ordem dentro dos níveis de um dos fatores, afeta bastante o nível de significância para o teste da igualdade dos efeitos médios desse fator e pouco afeta o teste equivalente para o outro fator. Mostra ainda que, sob a hipóteses nula, diferenças nas variâncias de coluna para coluna afetam sensivelmente o nível de significância para o teste da igualdade dos efeitos de colunas e afeta em sentido contrário o teste para os

efeitos das linhas. Para pequenas diferenças nas variâncias, nenhum efeito nos testes é considerado grande. De seus resultados apresentados, podemos ver ainda que correlações positivas produzem efeitos mais desastrosos no nível nominal de significância. SCHEFFÉ (1959), em seu clássico livro " The Analysis of Variance ", dedica o capítulo 10 para tratar dos efeitos das violações das suposições básicas, para uma análise de variância. Ele estuda os efeitos das violações das suposições de normalidade dos erros, igualdade das variâncias dos erros e da independência estatística dos erros, para modelos com um fator fixo. Pode-se notar pela tabela 1., descrita a seguir, que uma correlação serial de primeira ordem entre colunas afeta drasticamente o nível de significância para o teste dos efeitos de colunas, o que pode ser visto pela tabela 1. que mostra essas probabilidades segundo vários valores de ρ , visando um nível de significância de 0.05, num experimento cruzado 5x5. Neste caso, pode-se notar que o viés é maior para os testes de colunas.

Tabela 1. Níveis de significância para os testes dos efeitos de linhas e colunas, num experimento cruzado 5x5, segundo os valores de ρ .

ρ	- 0.4000	- 0.200	0.000	0.200	0.400
linhas	0.0590	0.053	0.050	0.054	0.064
colunas	0.0003	0.010	0.050	0.130	0.250

Fonte: SCHEFFÉ (1959, p. 360).

Da literatura consultada, podemos ver que os problemas de correlações nas observações passam a ser uma preocupação de muitos autores, principalmente para os experimentos em que as medidas são repetidas sobre um mesmo indivíduo, como por exemplo DANFORD et alli (1960), que tratam do problema de medidas repetidas no tempo através das análises uni e multivariadas. Dado que os autores analisam dados multinormais que satisfazem à certas condições de simetria (equicorrelação), as análises univariadas puderam ser aplicadas com êxito e com muita facilidade. No entanto, mostram que se estas condições de simetria não estão satisfeitas, deve-se lançar mão da análise multivariada. Neste mesmo artigo, os autores testam a igualdade das variâncias e covariâncias, sob normalidade, através do teste proposto por WILKS (1946), usando o critério da razão de verossimilhança de Neyman-Pearson , posteriormente modificado por BOX (1949). Então, se a hipótese de equicorrelação é rejeitada, utiliza-se a análise multivariada.

Ainda em se tratando de medidas repetidas, podemos citar GILL e HAFS (1971), que enfocam bem o caso de uma equicorrelação com medidas repetidas com animais, tratando de um exemplo em que o pesquisador analisa seus dados de duas formas diferentes, primeiro como um experimento completamente casualizado, onde não se faz presente a correlação, e, em seguida, como um Split-plot com matriz uniforme de variâncias e covariâncias. Enfocam as

diferenças ocorridas nestes casos para os testes das hipóteses principais. O exemplo tratado enfoca um experimento com dois grupos de seis ratas cada um, onde num dos grupos as ratas estavam grávidas, e no outro não estavam. Para cada animal, foram feitas 4 observações em 4 períodos de 4 dias cada um. O peso em gramas de leite de cada período observado de cada animal foi registrado. Para cada grupo de 6 ratas, foi calculada a matriz de dispersão dos dados, com o objetivo de testar a uniformidade dessa matriz. Utilizaram o teste F aproximado, dado por BOX(1950), para o teste da uniformidade.

HUYNH e FELDT (1970) preocuparam-se com as condições sob as quais as razões dos quadrados médios tem distribuições F exatas, as quais dependem da matriz de variâncias e covariâncias adotada para o modelo.

IEMMA (1981-1983) analisa o comportamento dos experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados sob a estrutura uniforme de erros, na qual a correlação constante estava presente entre subparcelas de uma mesma parcela. Para assegurar a validade das pressuposições da estrutura de erros, o autor adota os testes de uniformidade e de homogeneidade das matrizes de variâncias e covariâncias envolvidas.

PRAETZ (1981) mostra os efeitos de autocorrelação na análise de regressão múltipla, no que diz respeito ao viés provocado pelas correlações nas

esperanças das estatísticas F e R^2 onde

$$F = \frac{\hat{\beta}'X'y (n-k)}{Z'Z(k-1)} \quad \text{e} \quad R^2 = \frac{\beta X'y}{y'y} \quad \text{para a regressão múltipla}$$

${}_n y_1 = {}_n X_k \hat{\beta}_1 + {}_n u_1$, onde $Z'Z = u'(I - X(X'X)^{-1}X')u$. O autor mostra o viés provocado na $E(F)$ e $E(R^2)$ para $n = 20, 40$ e 100 , com coeficiente de correlação $\rho = 0.8; 0.5; 0.2; 0.0; -0.2; -0.5; -0.8$.

ANDERSEN et alli (1981) tratam da análise de variância com dois fatores (linhas e colunas) na presença de erros correlacionados. Eles propoem aproximações para as distribuições dos testes usuais dos efeitos de linhas e de colunas. Essas aproximações são estudadas com o auxílio de simulações para modelos auto-regressivos de primeira ordem e modelos de média móvel de primeira ordem. Mostram também que, se não considerarmos tais correlações, os resultados conclusivos podem ser desastrosos, principalmente quando se trata de medidas ao longo do tempo.

GILL e SHUKLA (1985-b) preocuparam-se com observações correlacionadas e mostraram que alguns planejamentos são ótimos quanto à sua eficiência quando se usa as estimativas de mínimos quadrados generalizados para modelos auto-regressivos e de média móvel, cujas matrizes de variâncias e covariâncias são respectivamente dadas por:

$$\Omega = \sigma_e^2 (1-\rho^2)^{-1} I_b \otimes H_k + \sigma_\eta^2 I \quad \text{e}$$

$$\Omega = \sigma_e^2 I_b \otimes (I_k + \rho N_k) + \sigma_\eta^2 I, \quad \text{onde}$$

b é o número de blocos de tamanho k ; H_k é uma matriz $k \times k$, com as entradas (i,j) dadas por $\rho^{|i-j|}$, com $|\rho| < 1$; N_k é uma matriz $k \times k$ com as entradas $(i,i+1)$ e $(i+1,i)$ iguais a "1" e "0" para as demais entradas.

Para essas estruturas de covariâncias, os autores mostraram, para blocos de 5 e 10 tratamentos, que usar mínimos quadrados generalizados para experimentos em blocos quase balanceados pode ser melhor que usar mínimos quadrados ordinários.

ITEMMA (1985) desenvolve a teoria dos modelos lineares para experimentos com medidas repetidas através das matrizes de Helmert, mostrando que a utilização das matrizes de Helmert facilita as aplicações dos modelos em tópicos como: obtenção da matriz amostral de variâncias e covariâncias, testes para sua uniformidade, decomposição espectral, estimações por ponto, por intervalo e por região de funções dos parâmetros, estudo de formas quadráticas, testes de interesses, e assim por diante.

Como exemplo, enfoca o modelo dado por $y_{ij} = \mu + v_i + \tau_j + e_{ij}$, onde v_i e τ_j representam os efeitos de indivíduos e repetição, respectivamente para $i=1,2,\dots,p$ e $j=1,2,\dots,k$, cuja matriz de variâncias e covariâncias dos erros tem a seguinte estrutura

$$\text{cov}(e_{ij}, e_{i',j'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i=i' \text{ e } j=j' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } i=i' \text{ e } j \neq j' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

para $-\frac{1}{k} < \rho < 1$. Mostra também que a análise de

variância usual não é apropriada para o teste de efeitos entre indivíduos.

REILMAN et alli (1985) mostraram que os estimadores de máxima verossimilhança são preferíveis a outros estimadores, quando as observações são equicorrelacionadas e a amostra é suficientemente grande para modelos de regressão do tipo $Y = \alpha + \beta X$, onde as duas variáveis X e Y são medidas com erros, isto é $y_i = Y_i + v_i$ e $x_i = X_i + u_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) com $X \cap N(\mu_x; \sigma_x^2)$, $v \cap N(0; \sigma_v^2)$, $u \cap N(0; \sigma_u^2)$ e $\text{corr}(u_i, v_j) = \rho$ se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.

HENDERSON (1986) tratou do problema que ele chama de "change-point", que nada mais é do que seccionar uma sequência de n variáveis aleatórias de modo que as primeiras k ($1 \leq k \leq n$) observações venham de uma população e as demais observações de outra população, considerando a presença de correlação entre elas pois, segundo HENDERSON (1986), muitos autores tratam desse problema supondo independência entre as variáveis.

KENNY e JUDD (1986) mostram o viés nas esperanças dos quadrados médios de tratamento e para o resíduo, quando a correlação das observações se dá devido a grupos de observações, devido a observações sequenciais (modelos de média móvel e auto-regressivos) e devido ao espaço, para modelos com um fator e cuja variável observada é discreta. Fornecem também para cada caso uma forma de estimar as correlações, mas não mostraram esses efeitos na

forma das probabilidades dos erros.

ZIMMERMANN (1987) estudou os efeitos da heterogeneidade das variâncias nos planejamentos em blocos ao acaso e quadrados latinos, segundo várias distribuições para o modelo, utilizando o teste F para todas essas distribuições. Seus dados foram gerados segundo essas várias distribuições. Não considerou observações correlacionadas, mas apenas a heterogeneidade das variâncias. O autor concluiu, segundo seu experimento, que a não normalidade dos dados não afetou significamente o poder do teste F, fato que não ocorreu com a heterogeneidade que afetou o poder do teste F, principalmente quando a distribuição utilizada foi a normal.

2.2. DOIS ARTIGOS BÁSICOS

Como acabamos de ver, muitos são os autores que se preocuparam com as correlações entre dados observados e com a heterogeneidade das variâncias populacionais, abordando o fato das mais diversas formas teóricas e práticas.

Este trabalho é também uma forma de registrar nossa preocupação com esses fatos e, nesse contexto, dois artigos foram básicos para nosso estudo, são eles: o artigo de SCARIANO e DAVENPORT (1987) e o artigo de PERES (1985).

SCARIANO e DAVENPORT (1987) tomam um modelo

linear com um fator fixo e balanceado $y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, cuja estrutura de erros é dada por

$$\text{cov}(e_{ij}, e_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i=i' \text{ e } j=j' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } i=i' \text{ e } j \neq j' \end{cases}$$

para $\frac{-1}{n-1} < \rho < 1$, onde ρ é o coeficiente de correlação intraclasse.

A matriz de variâncias e covariâncias desse modelo é então dada por $\Omega = \sigma^2 V$ onde V é tal que

$$V \in \mathcal{V} = \{ V : V = c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3, \text{ com } c_i > 0 \}$$

e P_i é tal que $Y'P_i Y$ são formas quadráticas que nos fornecem as somas de quadrados para a ANOVA, com P_i ($i = 1, 2, 3$) matrizes projetores ortogonais ($P_i P_j = 0$ para $i \neq j$), simétricas e idempotentes. Se $P_1 + P_2 + P_3 = I_N$, ou seja, se $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, então $V = I_N$, onde $N = mn$ é o número total de observações.

A hipótese de interesse é $H_0: \alpha_i = 0$ vs $H_1: \alpha_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, m$.

Sob normalidade dos erros, isto é, o vetor de erros tendo distribuição multinormal $N(0, \sigma^2 V)$, pela própria construção de $\mathcal{V}$ tem-se

$$(Y'P_i Y / c_i \sigma^2) \cap \chi^2(r(P_i), \lambda_i), \text{ onde}$$

$$\lambda_i = E(Y')P_i E(Y) / 2c_i \sigma^2, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

O autor define a família de variáveis aleatórias:

$$F_{ij}(c_i, c_j) = \frac{c_j}{c_i} \frac{Y'P_i Y / r(P_i)}{Y'P_j Y / r(P_j)} \cap F[r(P_i), r(P_j), \lambda_i, \lambda_j]$$

para $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Fazendo-se $SQ(\mu) = Y'P_3Y$, $SQ(\alpha) = Y'P_1Y$,
 $SQ_{\text{Resíduo}} = Y'P_2Y = Y'(I_N - P_1 - P_3)Y$ e $SQ_{\text{Total}} = Y'I_NY$,
 tem-se que $c_1 = c_2 = 1 \implies F_{12}(1,1) = F$ é a estatística
 "usual" para testar-se H_0 vs H_1 .No entanto, para que isso
 ocorra é necessário que $V = I_N$.

Então, sob a presença de equicorrelação, os
 testes usuais apresentam um viés nas probabilidades dos
 erros tipos I e II.

Se a correlação ρ é tal que $\rho > 0$, tem-se
 $c_1 = c_3 = 1 + (n-1)\rho$ e $c_2 = 1-\rho$, acarretando que a

$$P(\text{erro tipo I}) = P(F_{12}(c_1, c_2) \geq \frac{1-\rho}{1+(n-1)\rho} F_{\alpha}(m-1, N-1)) \geq \alpha$$

 e então os autores mostram essas probabilidades para vários
 valores de n , m e ρ ao nível nominal de significância
 $\alpha = 0.05$. Mostram, ainda, a rápida convergência dessas
 probabilidades para "1" e tanto mais rápida quanto maiores
 os valores de n , m e ρ . Eles mostram também as probabilidades
 dos erros tipo II para vários valores de n , m , ρ e

$\phi = \frac{2c_1\lambda_1}{n}$, cujas probabilidades decrescem para o valor
 zero rapidamente. Desenvolvimento análogo é feito para
 $\frac{-1}{n-1} < \rho < 0$, e as conclusões se dão no caminho inverso
 àquelas obtidas para $\rho > 0$, isto é, as probabilidades dos erros
 tipo I decrescem rapidamente para o valor zero, enquanto
 as probabilidades dos erros tipo II crescem para o valor 1.

PERES (1985), utilizou o mesmo modelo com a mesma equicorrelação e mostra os efeitos que essa equicorrelação produz nas probabilidades dos erros tipo I, quando a análise de variância usual é aplicada. O autor não apresenta a classe $\mathcal{S}$ de matrizes de variâncias e covariâncias e nem as probabilidades dos erros tipo II, como fazem os autores SCARIANO e DAVENPORT (1987). Em contrapartida o autor apresenta como sugestão uma solução alternativa do problema, que consiste numa modificação do planejamento e conseqüentemente no modelo de análise, com base em repetições independentes do experimento, a fim de assegurar o nível de significância préfixado para o teste de H_0 , isto é, o modelo passa a ser dado por

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + R_{j(i)} + e_{ijk} \quad \text{onde} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e}$$

$$j = 1, 2, \dots, b \text{ e } k = 1, 2, \dots, n, \text{ sendo } R_{j(i)} \text{ o efeito}$$

 de repetição dentro do nível i do fator α , com as suposições de que $R_{j(i)}$ e e_{ijk} são variáveis aleatórias independentes com distribuições multinormais de médias nulas e matrizes de variâncias e covariâncias dadas por $\sigma^2 I_N$ e $I_{rb} \otimes U_n$ com $U_n = \sigma^2 [(1-\rho)I_n + \rho E_n]$, respectivamente, onde $N = rbn$. I_p é a matriz identidade e E_p é a matriz de elementos unitários, de ordens p . Assim, a matriz de variâncias e covariâncias do modelo passa a ser dada por $\Omega = I_{rb} \otimes [\sigma^2 E_n + U_n]$ e procedendo-se à análise de variância usual, considerando-se a restrição $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$, o autor verifica que o teste para H_0 vs H_1 pode agora ser feito através do teste F, contra a soma de quadrados médio,

devido à repetição, sem que haja alterações nas probabilidades do erro tipo I.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1. CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

Apresenta-se aqui algumas considerações teóricas que serão utilizadas por todo o trabalho. Sejam as matrizes de equicorrelação Ω tais que:

$\Omega \in \mathcal{Y} = \{\Omega: \Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \dots + c_t P_t, \text{ com } c_i > 0 \text{ p/ } i=1,2,\dots,t\}$
 onde $Y'P_i Y$ é a soma de quadrados referente ao i -ésimo parâmetro de interesse com $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$, $P_i P_i = P_i$ e $P_i = P_i'$, para $i, j = 1, 2, \dots, t$.

Seja também o teorema citado em SEARLE (1971-p.60) apresentado a seguir:

Teorema 1. Seja X um vetor $n \times 1$ multinormal, $X \sim N(\tilde{\mu}, V)$, onde $\tilde{\mu}$ é o vetor de médias e V é a matriz de variâncias e covariâncias da distribuição multinormal, e sejam A_i , $i = 1, 2, \dots, p$ matrizes simétricas $n \times n$, de rank k_i , tais que $A = \sum_{i=1}^p A_i$, com A simétrica de rank k . Então as formas quadráticas $X' A_i X$ têm distribuição χ^2 com k_i graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\delta_i = \frac{1}{2} \tilde{\mu}' A_i \tilde{\mu}$,

isto é $X'A_i X \cap \chi^2(k_i; \frac{1}{2} \tilde{\mu}' A_i \tilde{\mu})$, são duas a duas independentes e $X'A X$ tem distribuição de χ^2 com k graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\delta = \frac{1}{2} \tilde{\mu}' A \tilde{\mu}$, isto é $X'A X \cap \chi^2(k; \frac{1}{2} \tilde{\mu}' A \tilde{\mu})$, se e somente se:

(i) quaisquer duas alternativas (a), (b) e (c) são verdadeiras:

(a) $A_i V$ é idempotente para $i = 1, 2, \dots, p$.

(b) $A_i V A_j = 0$ para todo $i < j$

(c) $A V$ é idempotente ou

(ii) (c) é verdade e (d) $k = \sum_{i=1}^p k_i$ ou

(iii) (c) é verdade e (e) $A_1 V, \dots, A_{p-1} V$: são idempotentes e $A_p V$ é não negativa definida.

Pela construção de Ω e do teorema 1. pode-se verificar os seguintes fatos:

(1). Considerando o modelo linear ordinário de Gauss-Markov $Y = X\theta + \epsilon$, isto é $Y \in N(X\theta; \sigma^2 I_N)$ com $p-1$ conjuntos paramétricos (podendo naturalmente incluir interações), mais a média geral μ . Neste caso a soma de quadrados total pode ser partida da seguinte forma

$$Y' I_N Y = Y' Y = Y' P_0 Y + Y' P_1 Y + \dots + Y' P_p Y \quad \text{onde}$$

$$I_N = P_0 + P_1 + \dots + P_p \quad \text{com}$$

$$Y'P_0Y = SQ(\mu) \quad \text{e} \quad Y'P_pY = SQ_{\text{Residual}} \quad \text{e}$$

$Y'P_iY$ é a S.Q. correspondente ao i -ésimo conjunto paramétrico para $i = 1, 2, \dots, p-1$, onde cada forma quadrática $\sigma^{-2} Y'P_iY$ $i = 0, 1, 2, \dots, p$ tem distribuição $\chi^2(r(P_i); \lambda_i)$ onde $\lambda_i = \theta'X'P_iX\theta/2\sigma^2$ para $i = 1, 2, \dots, p-1$, $\lambda_p = 0$ e são independentes entre si com $\sum_{i=0}^p r(P_i) = N$.

Geralmente é isto que se faz na ANOVA usual, permitindo os testes exatos. Nota-se ainda que segundo a classe $\mathfrak{F}$ de matrizes de variâncias e covariâncias, basta tomar-se $c_0 = c_1 = \dots = c_p = \sigma^2$ e tem-se $I_N = P_0 + P_1 + \dots + P_p$, isto é, para $c_i = \sigma^2$ ($i=1, 2, \dots, p$) teremos novamente a análise de variância usual.

(ii). Considerando agora $Y \sim N(X\theta; \sigma^2V)$, para o modelo dado anteriormente, com $V \in \mathfrak{F}$.

Sabe-se que a soma de quadrados total é dada por $Y'V^{-1}Y$ e pode ser partida da seguinte maneira

$$Y'V^{-1}Y = c_0^{-1}Y'P_0Y + c_1^{-1}Y'P_1Y + \dots + c_p^{-1}Y'P_pY \quad \text{onde}$$

$$c_0^{-1}Y'P_0Y = SQ(\mu), \quad c_p^{-1}Y'P_pY = SQ_{\text{Residual}} \quad \text{e} \quad c_i^{-1}Y'P_iY \quad \text{é}$$

a soma de quadrados do i -ésimo conjunto paramétrico do modelo, cuja forma quadrática $(\sigma^2c_i)^{-1} Y'P_iY$ tem distribuição $\chi^2(r(P_i), \lambda_i)$ onde $\lambda_i = \theta'X'P_iX\theta/2c_i\sigma^2$ para $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ e $\lambda_p = 0$.

Para verificar-se que a S.Q.Total é dada por $Y'V^{-1}Y$, basta utilizar-se a transformação $Z = V_*' Y$ onde $V^{-1} = V_* V_*'$.

De $V = c_o P_o + c_1 P_1 + \dots + c_p P_p$ decorre que

$$V^{-1} = V^{-1}V V^{-1} = c_o V^{-1}P_o V^{-1} + c_1 V^{-1}P_1 V^{-1} + \dots + c_p V^{-1}P_p V^{-1} =$$

$$= c_o^{-1}P_o + c_1^{-1}P_1 + \dots + c_p^{-1}P_p, \text{ pois}$$

$$P_i V = c_i P_i \Rightarrow c_i^{-1}P_i = P_i V^{-1}$$

$$V P_i = c_i P_i \Rightarrow c_i^{-1}P_i = V^{-1}P_i$$

$$\text{então } c_i V^{-1}P_i V^{-1} = V^{-1}P_i = c_i^{-1}P_i \quad \text{e assim}$$

$$Y'V^{-1}Y = c_o^{-1}Y'P_o Y + c_1^{-1}Y'P_1 Y + \dots + c_p^{-1}Y'P_p Y.$$

3.2. MODELOS COM UM FATOR

3.2.1. UM FATOR ALEATORIO

a. Erros Independentes

Seja o modelo linear, balanceado, de efeitos aleatórios e caracterizado por

$$y_{ik} = \mu + \alpha_i + e_{ik} \quad (3.1)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots, k$ onde y_{ik} representa a k -ésima observação no i -ésimo nível do fator α , μ é a média geral, α_i é o efeito do i -ésimo nível do fator α e e_{ik} é o erro aleatório devido à observação y_{ik} . A expressão "balanceado" refere-se a número igual de observações por casela, conforme SEARLE (1987).

Tomando-se $\alpha_i \cap N(0; \sigma_\alpha^2)$ e $e_{ik} \cap N(0; \sigma_e^2)$ e independentes, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_{ik}, y_{i'k'}) &= E[(y_{ik} - E(y_{ik}))(y_{i'k'} - E(y_{i'k'}))] = \\ &= E[(\alpha_i + e_{ik})(\alpha_{i'} + e_{i'k'})] = E(\alpha_i \alpha_{i'}) + E(e_{ik} e_{i'k'}) = \\ &= \begin{cases} \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 & \text{p/ } i = i' \text{ e } k = k' \\ \sigma_\alpha^2 & \text{p/ } i = i' \text{ e } k \neq k' \\ 0 & \text{p/ } i \neq i' \end{cases} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Logo a matriz de variâncias e covariâncias para esse modelo pode ser escrita na forma:

$$\Omega = I_r \otimes [\sigma_e^2 I_k + \sigma_\alpha^2 K_k]$$

onde $\otimes$ é o produto de Kronecker, e K_k é a matriz de elementos unitários multiplicada pelo fator k^{-1} , de ordem k .

As somas de quadrados usuais são dadas por:

$$SQ(\mu) = \frac{1}{N} y_{..}^2 = Y' P_0 Y$$

$$SQ(\omega) = \frac{1}{K} \sum_i y_{i.}^2 - \frac{1}{N} y_{..}^2 = Y' P_1 Y$$

$$SQ_{Total} = \sum_{ik} y_{ik}^2 = Y' I_N Y$$

$$SQ_{Residual} = SQ_{Total} - (SQ(\mu) + SQ(\omega)) = Y' P_5 Y$$

onde

$$P_0 = K_N$$

$$P_1 = I_r \otimes K_K - K_N$$

$$P_5 = I_N - I_r \otimes K_K$$

$N = rK$ e Y é o vetor N -dimensional de todas as observações do experimento.

Verifica-se através das propriedades do produto de Kronecker, veja por exemplo IEMMA (1988), dentre outros, que as matrizes P_0 , P_1 e P_5 (projetores ortogonais) são simétricas e idempotentes tais que $I_N = P_0 + P_1 + P_5$.

Tomando Ω tal que $\Omega \in \mathfrak{Y}$, classe de matrizes positivas definidas, definida por:

$$\mathfrak{Y} = \{ \Omega: \Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_5 P_5, \text{ com } c_0 > 0, c_1 > 0 \text{ e } c_5 > 0 \} \quad (3.3)$$

Então $\Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_5 P_5$, onde obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{r-1}{N} + c_5 \frac{K-1}{K} = \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2$$

$$c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{r-1}{N} + c_5 \frac{-1}{K} = \sigma_\alpha^2$$

$$c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{-1}{N} = 0$$

cujas soluções são dadas por

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1 = \sigma_e^2 + k\sigma_\alpha^2 \\ c_5 &= \sigma_e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } \Omega &= (\sigma_e^2 + k\sigma_\alpha^2)(P_0 + P_1) + \sigma_e^2 P_5 = \\ &= (\sigma_e^2 + k\sigma_\alpha^2) I_r \otimes K_k + \sigma_e^2 (I_N - I_r \otimes K_k) \\ &= \sigma_e^2 I_N + k\sigma_\alpha^2 I_r \otimes K_k = I_r \otimes [\sigma_e^2 I_k + \sigma_\alpha^2 kK_k]. \end{aligned}$$

$$\text{E como } P_i \Omega = c_i P_i \implies \frac{P_i}{c_i} \Omega = P_i \quad e$$

$$P_i \Omega P_j = 0 \quad \text{para } i, j = 0, 1, 5 \quad i \neq j,$$

$$\text{decorre que } Y' \frac{P_i}{c_i} Y \cap \chi^2(r(P_i), \lambda_i) \quad (3.4)$$

onde

$$\lambda_i = \frac{1}{2c_i} E(Y') P_i E(Y) \quad e \text{ são independentes para } i = 0, 1, 5.$$

As esperanças dos quadrados médios são dadas por:

$$E(QM(\mu)) = E(Y' P_0 Y) = \text{tr}(P_0 \Omega) + E(Y') P_0 E(Y) = c_0 + n\mu^2$$

$$E(QM(\alpha)) = E(Y' P_1 Y) = c_1$$

$$E(QM(\text{Resíduo})) = E(Y' P_5 Y) = c_5$$

obtendo-se assim o seguinte quadro de análise de variância.

Quadro 3.1. Análise de variância para o modelo (3.1) caso a

C. V.	g. l.	S. Q.	Q. M.	E(Q. M.)
μ	1	$Y' P_0 Y$	$Y' P_0 Y$	$c_0 + n\mu^2$
α	$r-1$	$Y' P_1 Y$	$Y' P_1 Y / (r-1)$	c_1
Resíduo	$r(k-1)$	$Y' P_5 Y$	$Y' P_5 Y / r(k-1)$	c_5
Total	N	$Y' I_N Y$		

de onde decorre que o critério para o teste de $H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_\alpha^2 \neq 0$ pode ser obtido através da estatística

$\frac{QM(\alpha)}{QM(\text{Resíduos})}$, que sob H_0 tem distribuição de F central dada por $F[r(P_1), r(P_5), 0, 0]$.

b. Erros não Independentes

Para o modelo (3.1) considera-se agora o equicorrelacionamento no vetor de erros dado por $e \sim N(0, \Omega_1)$ onde e é o vetor n -dimensional dos erros e

$$\Omega_1 = I_r \otimes \sigma_e^2 V_1 \quad \text{com} \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & & \rho \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho & & & 1 \end{bmatrix}_K$$

Então por um desenvolvimento análogo a (3.2) obtem-se a matriz Ω de variâncias e covariâncias do modelo dada por

$$\Omega = I_r \otimes [(\sigma_e^2 - \rho\sigma_e^2) I_K + (\rho\sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2) K K_K]$$

Tomando-se $\Omega \in \mathcal{F}$, como feito anteriormente em (3.3) obtem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{r-1}{N} + c_5 \frac{k-1}{k} &= \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 \\ c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{r-1}{N} + c_5 \frac{-1}{k} &= \rho\sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 \\ c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{-1}{N} &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$c_0 = c_1 = \sigma_e^2 [1 + (k-1)\rho] + k \sigma_\alpha^2$$

$$c_5 = \sigma_e^2 [1-\rho]$$

com $\frac{-1}{k-1} < \rho < 1$

Usando-se esses coeficientes torna-se possível escrever a matriz Ω na forma anterior, ou seja

$$\Omega = I_r \otimes [(\sigma_e^2 - \rho\sigma_e^2) I_k + (\rho\sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2) k k_k] \quad (3.5).$$

De (3.4) tem-se que:

$$Y' \frac{P_0}{c_0} Y \cap \chi^2(r(P_0), \lambda_0) \text{ com } \lambda_0 = \frac{1}{2c_0} E(Y') P_0 E(Y)$$

$$Y' \frac{P_1}{c_1} Y \cap \chi^2(r(P_1), \lambda_1) \text{ com } \lambda_1 = \frac{1}{2c_1} E(Y') P_1 E(Y)$$

$$Y' \frac{P_5}{c_5} Y \cap \chi^2(r(P_5), \lambda_5) \text{ com } \lambda_5 = \frac{1}{2c_5} E(Y') P_5 E(Y)$$

e são independentes entre si.

Para Ω dada por (3.5) define-se variável aleatória $F_{15}(c_1, c_5)$ dada por

$$F_{15}(c_1, c_5) = \frac{c_5}{c_1} \frac{Y' P_1 Y / (r-1)}{Y' P_5 Y / r(k-1)} \cap F[r-1, r(k-1), \lambda_1, \lambda_5]. \quad (3.6)$$

Se $c_1 = c_5$ então (3.6) é a estatística usual para o teste de $H_0: \sigma_\alpha^2 = 0$, como aconteceu anteriormente considerando-se o vetor de erros independentes.

Então se o pesquisador considerar os erros independentes, quando na verdade eles são equicorrelacionados (basta ver (3.5)), estará cometendo um erro porque a

distribuição F por ele utilizada é na verdade proporcional à distribuição $F_{15}(c_1, c_5)$. Assim com as somas de quadrados usuais obtém-se o seguinte quadro de análise de variância:

Quadro 3.2. Análise de variância para o modelo(3.1) caso b.

C. V.	g.l.	S. Q.	Q. M.	E(Q. M.)
μ	1	$Y'P_0 Y$	$Y'P_0 Y$	$\sigma_e^2 [1+(k-1)\rho] + k\sigma_\alpha^2 + N\mu^2$
α	$r-1$	$Y'P_1 Y$	$Y'P_1 Y/(r-1)$	$\sigma_e^2 [1+(k-1)\rho] + k\sigma_\alpha^2$
Resíduo	$r(k-1)$	$Y'P_5 Y$	$Y'P_5 Y/r(k-1)$	$\sigma_e^2 [1-\rho]$
Total	N	$Y'I_N Y$		

Tem-se então que $P[\text{erro tipo I}] = P[F \geq F_{\alpha}(r-1, r(k-1))] =$

$$= P\left[\frac{c_5}{c_1} F \geq \frac{c_5}{c_1} F_{\alpha}(r-1, r(k-1))\right] =$$

$$= P\left[F_{15}(c_1, c_5) \geq \frac{1-\rho}{1+(k-1)\rho} F_{\alpha}(r-1, r(k-1))\right] \stackrel{>}{<} \alpha$$

onde α é o nível de significância, supostamente correto, utilizado pelo pesquisador, para testar a hipótese

$$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_\alpha^2 \neq 0 . \quad \text{Além disso}$$

$$P(\text{erro tipo I}) > \alpha \quad \text{se} \quad 0 < \rho < 1$$

$$P(\text{erro tipo I}) = \alpha \quad \text{se} \quad \rho = 0$$

$$P(\text{erro tipo I}) < \alpha \quad \text{se} \quad \frac{-1}{k-1} < \rho < 0$$

A TABELA A.1., no apêndice, mostra essas probabilidades para vários valores de ρ , r , k e nível nominal de significância 0.05.

Quanto às probabilidades de erro tipo II, neste caso de modelos aleatórios tem-se:

$$P[\text{erro tipo II}] = P[F_{15}(c_1, c_5) < \frac{c_5}{c_1} F_{\alpha}(r-1, r(k-1))] =$$

$$P[F_{15}(c_1, c_5) < \left[\frac{1+(k-1)\rho}{1-\rho} + \frac{k}{1-\rho} \sigma_e^{-2} \sigma_{\alpha}^2 \right]^{-1} F_{\alpha}(r-1, r(k-1))]$$

isto sob a hipótese alternativa $H_1: \sigma_{\alpha}^2 \neq 0$. Para fins de exemplificar-se com tabelas, considerar-se-a o valor

$\sigma_e^{-2} \sigma_{\alpha}^2 = 1$. Neste caso de modelo aleatório nota-se para o cálculo do poder, que a distribuição F envolvida é central. Essas probabilidades são mostradas na TABELA A.2. do apêndice.

Para os cálculos das probabilidades dos erros tipo II, utilizou-se a aproximação sugerida por TIKU (1965) da F não central para a F central. Nessa aproximação o autor torna igual os três primeiros momentos dessas duas distribuições e resolve essas equações, obtendo novos valores para os graus de liberdade da F central, e em seguida calcula as probabilidades através da função Beta incompleta de PEARSON (1934). Naturalmente, poder-se-ia utilizar outro procedimento (aproximação) para calcular essas probabilidades, como sugere TIKU (1965). Optou-se por esse processo dada a excelente aproximação obtida para as verdadeiras probabilidades calculadas por TANG (1938). Com o auxílio das subrotinas dadas por PRESS et alii (1986) em Fortran, foram obtidos os valores das probabilidades

através da função Beta incompleta. Para cada caso de equi-correlação foi feito um programa de modo que arquivassem os dados após os cálculos convenientes e com esses arquivos acionou-se o programa principal, obtendo-se os resultados desejados.

Na elaboração das tabelas das probabilidades dos erros, foram considerados 7 valores para " ρ " (resguardando a exigência $c_i > 0$) e vários valores de r , s , e κ , onde s é o número de níveis do segundo fator a ser introduzido, no estudo de modelos com dois fatores. Para as probabilidades dos erros tipo II considerou-se 3 valores para λ , ($\lambda=0$, $\lambda=5$ e $\lambda=20$). O nível de significância nominal (pré-fixado) considerado foi de 0.05 para todos os casos aqui tratados.

Para a comparação das probabilidades dos erros tipo II obtidas neste trabalho, com outras tabelas dadas por SCHEFFÉ (1959), GRAYBILL (1961) e outros, deve-se tomar $\phi^2 = \lambda/(n+1)$ onde n é o número de graus de liberdade do numerador, sendo que essas comparações só têm sentido para as colunas em que $\rho = 0$.

Para $\rho = 0$, as tabelas fornecem as verdadeiras probabilidades dos erros tipos I e II, segundo o nível de significância nominal pré-fixado pelo usuário, e para outros valores de ρ essas probabilidades são as mais diversas possíveis.

c. Sugestão de Alguns Procedimentos Alternativos

Como o interesse é testar a hipótese

$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_\alpha^2 \neq 0$, pode-se contornar esse problema, dentre outras, de duas maneiras relativamente simples.

c.1. Quando ρ é conhecido

Se ρ é conhecido, pode-se utilizar o método da transformação linear no vetor de observações, de forma que os erros do modelo transformado sejam independentes.

Escrevendo o modelo na forma $Y = X\beta + \varepsilon$ tal que $Y \cap N(\tilde{\mu}, \Omega)$ onde Ω pode ser dada por $\Omega = \sigma_e^2 V$ com V matriz positiva definida de constantes "conhecidas", ou seja, basta considerar

$$\sigma_e^2 V = \sigma_e^2 [I_r \otimes ((1-\rho)I_k + (\rho + \sigma_e^{-2}\sigma_\alpha^2) \kappa K_k)].$$

Como a soma de quadrados total para esse modelo é dada por $Y'V^{-1}Y$, então utiliza-se a transformação $Z = V_*'Y$ onde $V_*^{-1} = V_*'V_*^{-1}$, assim tem-se que o modelo: $Z = V_*'X\beta + V_*'\varepsilon = X_*'\beta + e^*$ é tal que $Z \cap N(\tilde{\mu}_*, \sigma_e^2 I)$, e então a teoria dos modelos lineares ordinários de Gauss-Markov pode ser utilizada.

Lembrando-se ainda que $\Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_5 P_5$
tem-se que $\sigma_e^2 V = \sigma_e^2 (c_0^* P_0 + c_1^* P_1 + c_5^* P_5)$.

Então a soma de quadrados total $Y'V^{-1}Y$ pode ser partida da seguinte forma:

$$Y'V^{-1}Y = (c_0^*)^{-1} Y'P_0 Y + (c_1^*)^{-1} Y'P_1 Y + (c_5^*)^{-1} Y'P_5 Y$$

onde $(\sigma_e^2 c_i^*)^{-1} Y'P_i Y = c_i^{-1} Y'P_i Y \sim \chi^2(r(P_i), \lambda_i)$

para $i = 0, 1, 5$ e são independentes entre si, com $(c_i^*)^{-1} Y'P_i Y$ representando a verdadeira soma de quadrados, devida ao parâmetro em questão.

De forma análoga às anteriores facilmente calcula-se os seguintes valores

$$c_0^* = c_1^* = (1 + (k-1)\rho) + k \sigma_e^{-2} \sigma_\alpha^2$$

$$c_5^* = (1 - \rho)$$

Assim monta-se o seguinte quadro de análise de variância:

Quadro 3.3. Análise de variância para o modelo (3.1), caso c.1.

C.V.	g.l.	S.Q.	Q.M.
μ	1	$\frac{Y'P_0 Y}{c_0^*}$	$\frac{Y'P_0 Y}{c_0^*}$
α	$r-1$	$\frac{Y'P_1 Y}{c_1^*}$	$\frac{Y'P_1 Y}{c_1^*(r-1)}$
Resíduo	$r(k-1)$	$\frac{Y'P_5 Y}{c_5^*}$	$\frac{Y'P_5 Y}{c_5^* r(k-1)}$
Total	N	$Y'V^{-1}Y$	

Portanto sob a hipótese $H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$, os coeficientes c_0^* , c_1^* e c_5^* são numericamente conhecidos e o quociente $\frac{QMC(\alpha)}{QMR_{\text{resíduo}}}$ tem distribuição dada por $F [r-1, r(k-1), 0, 0]$, permitindo teste exato.

c.2. Quando ρ é desconhecido

O procedimento a ser descrito aqui foi sugerido por PERES (1985), para modelos com um fator fixo e balanceado, e não exige que se estime " ρ ". Consiste numa modificação do planejamento, incluindo neste, réplicas independentes de mesmo tamanho e em mesmo número, dentro de cada nível do fator.

Considerando-se b réplicas em cada nível do fator, da seguinte forma:

	α_1	α_2	---	α_r
R_1	$y_{111} \dots y_{11k}$	$y_{211} \dots y_{21k}$		$y_{r11} \dots y_{r1k}$
R_2	$y_{121} \dots y_{12k}$	$y_{221} \dots y_{22k}$	---	$y_{r21} \dots y_{r2k}$
$\vdots$				
R_b	$y_{1b1} \dots y_{1bk}$	$y_{2b1} \dots y_{2bk}$	---	$y_{rb1} \dots y_{rbk}$
	$y_{1..}$	$y_{2..}$		$y_{b..}$

com $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + R_{j(i)} + e_{ijk}$ sendo a k -ésima observação na j -ésima réplica dentro do i -ésimo nível do fator. As distribuições são:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &\sim N(0, \sigma_\alpha^2) & \text{com} & \quad \Omega_\alpha = \sigma_\alpha^2 I_N \\
 R_{j(i)} &\sim N(0, \sigma_R^2) & \text{com} & \quad \Omega_R = \sigma_R^2 I_N \\
 e &\sim N(0, \Omega_e) & \text{com} & \quad \Omega_e = I_{rb} \otimes \sigma_e^2 V_1
 \end{aligned}$$

e são independentes entre si para

$i=1,2,\dots,r$, $j=1,2,\dots,b$, $k=1,2,\dots,K$, e $N=rbk$.

Então tem-se:

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i',j',k'}) = E[(y_{ijk} - E(y_{ijk}))(y_{i',j',k'} - E(y_{i',j',k'}))] =$$

$$= E[(\alpha_i + R_{j(i)} + e_{ijk})(\alpha_{i'} + R_{j'(i')} + e_{i',j',k'})] =$$

$$= E(\alpha_i \alpha_{i'}) + E(R_{j(i)} R_{j'(i')}) + E(e_{ijk} e_{i',j',k'}) = \dots$$

$$\dots = \begin{cases} \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 & \text{se } i=i', j=j', e k=k' \\ \rho\sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 & \text{se } i=i', j=j', e k \neq k' \\ \sigma_\alpha^2 & \text{se } i=i', j \neq j' \\ 0 & \text{em c.c.} \end{cases}$$

Logo a matriz Ω do modelo geral é dada por

$$\Omega = I_R \otimes V_{bk} \quad \text{onde}$$

$$V_{bk} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 & \dots & \rho\sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho\sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 & \dots & \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 \end{bmatrix}_{K \times K} & \dots & \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 \\ \vdots \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}_{K \times K} & \dots & \begin{bmatrix} \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 & \dots & \rho\sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho\sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 & \dots & \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2 \end{bmatrix}_{K \times K} \end{bmatrix}_{bk}$$

As somas de quadrados são dados por:

$$SQ(\mu) = \frac{1}{N} y_{...}^2 = Y' P_0 Y$$

$$SQ(\alpha) = \frac{1}{bk} \sum_i y_{i..}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2 = Y' P_1 Y$$

$$SQ(R(\alpha)) = \frac{1}{k} \sum_{ij} y_{ij.}^2 - \frac{1}{bk} \sum_i y_{i..}^2 = Y' P_2 Y$$

$$SQ_{\text{Resíduo}} = Y'(I_N - P_0 - P_1 - P_2)Y = Y' P_5 Y$$

$$SQ_{\text{Total}} = Y' I_N Y$$

sendo $SQ(R(\alpha))$ a soma de quadrados do fator "repetição".

$$\begin{aligned} \text{com } P_0 &= K_N & e \quad r(P_0) &= 1 \\ P_1 &= I_r \otimes K_{bk} - K_N & e \quad r(P_1) &= r-1 \\ P_2 &= I_{rb} \otimes K_k - I_r \otimes K_{bk} & e \quad r(P_2) &= r(b-1) \\ P_5 &= I_N - I_{rb} \otimes K_k & e \quad r(P_5) &= rb(k-1) \end{aligned}$$

Escrevendo-se $\Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_5 P_5$, obtem-se o sistema de equações lineares:

$$c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{r-1}{N} + c_2 \frac{b-1}{bk} + c_5 \frac{k-1}{k} = \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2$$

$$c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{r-1}{N} + c_2 \frac{b-1}{bk} + c_5 \frac{-1}{k} = \rho \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_R^2$$

$$c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{r-1}{N} + c_2 \frac{-1}{bk} = \sigma_\alpha^2$$

$$c_0 \frac{1}{N} + c_1 \frac{-1}{N} = 0$$

cujas soluções são:

$$c_0 = c_1 = bk \sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2 [1 + (k-1)\rho] + k\sigma_R^2$$

$$c_2 = \sigma_e^2 [1 + (k-1)\rho] + k\sigma_R^2$$

$$c_5 = \sigma_e^2 [1 - \rho]$$

Utilizando (3.4) pode-se obter o seguinte quadro de análise de variância:

Quadro 3.4. Análise de variância para o modelo(3.1) acrescido do fator repetição, caso c.2.

C.V.	gl.	S.Q.	E(Q.M.)
μ	1	$Y'P_0Y$	$bk\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2 [1 + (k-1)\rho] + k\sigma_R^2 + N\mu^2$
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$bk\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2 [1 + (k-1)\rho] + k\sigma_R^2$
R	$r(b-1)$	$Y'P_2Y$	$\sigma_e^2 [1 + (k-1)\rho] + k\sigma_R^2$
Resíduo	$rb(k-1)$	$Y'P_5Y$	$\sigma_e^2 (1 - \rho)$
Total	N	$Y'I_NY$	

Segundo PERES (1985) tem-se que sob $H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$, uma vez que $c_1 = c_2$, a estatística

$$F_{12}(c_1, c_2) = \frac{Y'P_1Y/(r-1)}{Y'P_2Y/r(b-1)} = F \cap F[r-1, r(b-1), 0, 0]$$

e é a estatística F usual, isto é, mesmo utilizando-se as somas de quadrados usuais, é possível neste caso elaborar o teste para essa hipótese $H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$ sem o comprometimento do nível de significância desejado, mas em contrapartida isso não ocorre para o fator repetição "R".

3.2.2. UM FATOR FIXO

Esse procedimento já foi desenvolvido para modelos com um fator fixo e balanceado por SCARIANO e DAVENPORT (1987) mas não apresenta uma alternativa para solução do problema, e por PERES (1985) o qual apresenta como solução alternativa a inclusão de repetições no planejamento.

Propõe-se aqui a generalização desse procedimento para modelos com um fator fixo e desbalanceado (quanto ao número de observações), cujas correlações são afetadas por esse desbalanceamento.

Não será tratado aqui o caso usual de independência dos erros, que é um caso particular deste.

a. Os efeitos das violações

Considera-se o modelo com um fator fixo caracterizado por: $y_{ik} = \mu + \alpha_i + e_{ik}$ para $i=1,2,\dots,r$ e $k = 1,2,\dots,k_i \geq 1$ e $N = k_1 + k_2 + \dots + k_r$ é o número total de observações, sendo μ a média geral α_i o efeito do i -ésimo tratamento e e_{ik} o erro aleatório não observável, tal que $E(y_{ik}) = \mu + \alpha_i = \mu_i$ e y_{ik} é a k -ésima observação do i -ésimo tratamento.

Este modelo ainda pode ser escrito na forma

$Y = X\beta + e$ onde Y é o vetor de observações dado por:

$$Y = [Y_1' \mid Y_2' \mid \dots \mid Y_r']' =$$

$$= \begin{bmatrix} y_{11} \dots y_{1K_1} & y_{21} \dots y_{2K_2} & \dots & y_{r1} \dots y_{rK_r} \end{bmatrix}'.$$

O vetor de erros e é tal que $E(e) = 0$ e $\text{Var}(e) = \Omega$, e $E(Y) = X\beta$.

As somas de quadrados usuais são dadas por:

$$SQ(\mu) = Y'P_0Y \quad \text{com } P_0 = K_N$$

$$SQ(\alpha) = Y'P_1Y \quad \text{com } P_1 = K_{K_1} \oplus K_{K_2} \oplus \dots \oplus K_{K_r} - K_N$$

$$SQ_{\text{Residual}} = Y'P_5Y \quad \text{com } P_5 = \begin{bmatrix} I_{K_1} - K_{K_1} \\ \vdots \\ I_{K_r} - K_{K_r} \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{bmatrix} I_{K_r} - K_{K_r} \end{bmatrix}$$

$$SQ_{\text{Total}} = Y'I_NY \quad \text{com } I_N : \text{matriz identidade de ordem } N$$

Neste caso, por ser um experimento com número diferente de repetições, deve-se usar a soma direta " $\oplus$ " entre matrizes e não o produto direto " $\otimes$ ".

Através de operações simples (mas exaustivas) pode-se facilmente verificar que os projetores ortogonais P_0 , P_1 , P_5 são matrizes simétricas e idempotentes com

$$\text{rank}(P_0) = \text{rank}(K_N) = \text{tr}(K_N) = 1$$

$$\text{rank}(P_1) = \text{tr} \left(K_{K_1} \oplus \dots \oplus K_{K_r} - K_N \right) = r - 1$$

$$\text{rank}(P_5) = \text{tr} \left[\begin{bmatrix} I_{K_1} - K_{K_1} \\ \vdots \\ I_{K_r} - K_{K_r} \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{bmatrix} I_{K_r} - K_{K_r} \end{bmatrix} \right] = N - r$$

$$\text{rank}(I_N) = N$$

Considerando $\Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_5 P_5$, para $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ e $c_5 > 0$, são válidas as distribuições dada por (3.4) bem como suas independências.

Se $c_0 = c_1 = c_5 = \sigma_e^2$ então $\Omega = \sigma_e^2 I_N$ pois $P_0 + P_1 + P_5 = I_N$ e então a análise de variância é a usual, supondo que os erros sejam independentes e de mesma variância σ_e^2 .

Agora, supondo que os erros sejam equicorrelacionados dentro de cada tratamento, ou seja:

$$\text{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_i^2 & \text{se } i=i' \text{ e } j=j' \\ \sigma_{i1} & \text{se } i=i' \text{ e } j \neq j' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

Assim a matriz de variâncias e covariâncias Ω é dada por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{11} & \dots & \sigma_1^2 \end{bmatrix}_{K_1 \times K_1} & \dots & \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{21} & \dots & \sigma_2^2 \end{bmatrix}_{K_2 \times K_2} & \dots & \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \dots & \sigma_{r1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{r1} & \dots & \sigma_r^2 \end{bmatrix}_{K_r \times K_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_N$$

Para determinar c_0 , c_1 e c_5 tais que $\Omega \in \mathcal{V} \{ \Omega : \Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_5 P_5 \text{ com } c_0 > 0, c_1 > 0 \text{ e } c_5 > 0 \}$, basta tomar

$$\begin{aligned}
 c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_5 P_5 &= c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_5 (I_N - P_0 - P_1) = \\
 &= (c_0 - c_5) P_0 + (c_1 - c_5) P_1 + c_5 I_N = \Omega
 \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema de equações, para cada valor de $i=1,2,\dots,r$

$$\begin{aligned}
 (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{N-K_i}{NK_i} + c_5 &= \sigma_i^2 \\
 (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{N-K_i}{NK_i} &= \sigma_{i1} \\
 (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} &= 0
 \end{aligned}$$

cuja solução para um determinado i é:

$c_0 = c_1 = \sigma_i^2 + \sigma_{i1}(K_i - 1)$ e $c_5 = \sigma_i^2 - \sigma_{i1}$. E como essa solução é válida para todo i , resta-nos a solução

particular, $\sigma_i^2 = p - q + q \frac{N}{rK_i} > 0$ e $\sigma_{i1} = q \frac{N}{rK_i}$

fornecendo os valores:

$$c_0 = c_1 = p + q \left(\frac{N-r}{r} \right) \quad \text{e} \quad c_5 = p - q, \text{ com}$$

$$p > 0, \quad \frac{-pr}{N-r} < q < p \quad \text{e} \quad \frac{-p}{\frac{N}{rK_i} - 1} < q, \quad \forall i.$$

E pode-se escrever a matriz Ω na forma

$$\begin{aligned}
 \Omega &= c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_5 P_5 = [p + q (r^{-1}(N-r))] (P_0 + P_1) + (p-q) P_5 \\
 &= (p-q) I_N + r^{-1} N q (P_0 + P_1) = (p-q) I_N + r^{-1} N q [K_{K_1} \oplus \dots \oplus K_{K_r}] \\
 &= V_{K_1} \oplus V_{K_2} \oplus \dots \oplus V_{K_r} \quad \text{onde}
 \end{aligned}$$

$$V_{K_i} = \begin{bmatrix} p+q\left(\frac{N}{rK_i} - 1\right) & q \frac{N}{rK_i} & \dots & q \frac{N}{rK_i} \\ q \frac{N}{rK_i} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ q \frac{N}{rK_i} & \dots & \dots & p+q\left(\frac{N}{rK_i} - 1\right) \end{bmatrix}_{K_i}$$

para $i = 1, 2, \dots, r$

Então o quadro de análise de variância, considerando as restrições paramétricas $\sum_i K_i \alpha_i = 0$, é dado por:

Quadro 3.5. Análise de variância para o modelo dado em 3.2.2.

C.V.	gl.	S.Q.	Q.M.	E(Q.M.)
μ	1	$Y'P_0Y$	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$\frac{Y'P_1Y}{(r-1)}$	$c_1 + \frac{1}{r-1} \sum_i K_i \alpha_i^2$
Resíduo	$N-r$	$Y'P_5Y$	$\frac{Y'P_5Y}{N-r}$	c_5
Total	N	$Y'Y$		

O teste F usual supõe a independência entre as observações (isto significa que $q = 0$ e $p = \sigma^2$), um critério pode ser dado por:

$$\text{Rejeitar } H_0 : \alpha_i = 0 \text{ se } F_0 = \frac{N-r}{r-1} \frac{Y'P_1Y}{Y'P_2Y} =$$

$= F_{12}(1,1) > F_{\alpha}(r-1, N-r)$, e coincide com o teste da razão

de verossimilhança generalizada, sob a condição de que os erros são independentes e identicamente distribuídos com distribuição $N(0; \sigma^2)$.

Supondo agora que a matriz de variâncias e covariâncias seja dada por $\Omega \in \mathbb{R}$ onde $c_0 = c_1 = p + qr^{-1}(N-r)$ e $c_5 = p - q$, ao invés de $\sigma^2 I_N$, então as probabilidades de erro tipo I para testar a hipótese $H_0: \alpha_i = 0$ vs $H_1: \alpha_i \neq 0$ para algum i , são na verdade dadas por: $P[\text{erro tipo I}] = P[F \geq F_{\alpha}(r-1, N-r)] = P[c_1^{-1} c_5 F \geq c_1^{-1} c_5 F_{\alpha}(r-1, N-r)]$ ou seja

$$\begin{cases} > \alpha & \text{se} & 0 < q < 1 \text{ com } p > q \\ = \alpha & \text{se} & q = 0 \\ < \alpha & \text{se} & -(N-r)^{-1}pr < q < 0 \end{cases}$$

Essas probabilidades são dadas pela TABELA A.3. do apêndice, cujos cálculos levam em consideração que

$$p = \sigma_e^2 \text{ e } q = \rho \sigma_e^2 \Rightarrow \frac{c_5}{c_1} = \frac{1-\rho}{1+\rho r^{-1}(N-r)}, \text{ com}$$

$$P[\text{erro tipo I}] = P[F_{12}(c_1, c_2) \geq \frac{1-\rho}{1+\rho r^{-1}(N-r)} F_{\alpha}(r-1, N-r)].$$

Quanto às probabilidades do erro tipo II tem-se:

$$P[\text{erro tipo II}] = P[F_{15}[c_1, c_5, \lambda, 0] < c_1^{-1} c_5 F_{\alpha}(r-1, N-r)],$$

onde λ é o parâmetro de não centralidade dado por

$$\lambda = 2c_1^{-1} E(Y') P_1 E(Y) = (2c_1(r-1))^{-1} \sum_i \kappa_i \alpha_i^2, \text{ essas}$$

probabilidades são dadas pela TABELA A.4. do apêndice.

Para se obterem as TABELAS A.3. e A.4. , considerou-se $p = \sigma_e^2$ e $q = \rho\sigma_e^2$ (veja comentários a seguir), com alguns valores de ρ e λ .

Considerando q como sendo a covariância entre duas observações no mesmo tratamento, e p a variância de cada observação, se o experimento fosse balanceado. Mas como o experimento não é balanceado, então a covariância entre duas observações quaisquer no mesmo tratamento, é afetada pelo fator de proporcionalidade $N(rk_i)^{-1}$ para o i -ésimo tratamento, enquanto a variância de cada observação é afetada aditivamente pela quantidade $q(N(rk_i)^{-1} - 1) > -p$.

Assim se $p = \sigma_e^2$ e $q = \rho\sigma_e^2$, pode-se escrever para todo $i = 1, 2, \dots, r$

$$\sigma_i^2 = \sigma_e^2 [1 + \rho (N(rk_i)^{-1} - 1)] \quad \text{e} \quad \sigma_{i1} = \sigma_e^2 \rho N(rk_i)^{-1} \quad \text{com}$$

$$c_0 = c_1 = \sigma_e^2 [1 + \rho (r^{-1}(N-r))]$$

$$c_2 = \sigma_e^2 [1 - \rho]$$

Pode-se notar que se $q = 0$ então $\rho=0$ e tem-se novamente $\Omega = \sigma^2 I_N$ que é a situação usual no caso desbalanceado. Se $k_1 = k_2 = \dots = k_r = k$ tem-se $\sigma_i^2 = \sigma^2$ e $\sigma_{i1} = \rho\sigma^2$ que é o caso balanceado e estudado pelos autores já citados no início do parágrafo 3.2.2. .

Nota-se que os efeitos causados nas probabilidades dos erros tipos I e II não dependem diretamente do desbalanceamento, e sim dos valores de ρ , N e r , embora esse desbalanceamento não possa ser muito acentuado, pois é preciso que $q(Nrk_i)^{-1} - 1 > -p$ ou se $p = \sigma_e^2$ e $q = \rho\sigma_e^2$ então deverá valer $\rho(Nrk_i)^{-1} - 1 > -1$.

b. Sugestão de um procedimento alternativo

Com o objetivo de propiciar o teste exato de $H_0 : \alpha_i = 0$ vs $H_1 : \alpha_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, r$, propõe-se aqui um procedimento alternativo que consiste em modificar o planejamento, repetindo-o "b" vezes independentemente, incluindo no modelo um novo fator aleatório correspondente à repetição, desde que haja possibilidade por parte do experimentador.

O novo modelo é caracterizado por:

$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + R_{j(i)} + e_{ijk}$ onde y_{ijk} é a k -ésima observação na j -ésima repetição dentro do i -ésimo nível de α , com $R_{j(i)}$ e e_{ijk} variáveis aleatórias independentes para $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, b$ e $k = 1, 2, \dots, k_i$, além disso $R_{j(i)} \sim N(0, \sigma_R^2)$. Então a covariância entre duas observações quaisquer é dada por:

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i', j', k'}) = E[(y_{ijk} - (\mu + \alpha_i))(y_{i', j', k'} - (\mu + \alpha_{i'}))] =$$

$$= E[R_{j(i)} R_{j(i')} + e_{ijk} e_{ijk'}] = \begin{cases} \sigma_R^2 + \sigma_i^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \sigma_R^2 + \sigma_{i1}^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \text{ ou } j \neq j' \end{cases}$$

e a matriz Ω passa a ser dada por

$$(I_B \otimes U_1) \oplus \dots \oplus (I_B \otimes U_r), \text{ onde}$$

$$U_i = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 + \sigma_i^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_R^2 + \sigma_{i1}^2 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \sigma_R^2 + \sigma_{i1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_R^2 + \sigma_{i1}^2 \end{bmatrix}_{K_i} \quad p/ i = 1, 2, \dots, r$$

As somas de quadrados "usuais" são dadas por:

$$\begin{aligned} SQ(\mu) &= Y' P_0 Y & SQ_{\text{Resíduo}} &= Y' P_5 Y \\ SQ(\alpha) &= Y' P_1 Y & SQ_{\text{Total}} &= Y' I_N Y & \text{onde} \\ SQ(R(\alpha)) &= Y' P_2 Y \end{aligned}$$

os projetores ortogonais dados por:

$$P_0 = K_N$$

$$P_1 = K_{BK_1} \oplus K_{BK_2} \oplus \dots \oplus K_{BK_r} - K_N$$

$$\begin{aligned} P_2 &= (I_B \otimes K_{K_1}) \oplus (I_B \otimes K_{K_2}) \oplus \dots \oplus (I_B \otimes K_{K_r}) - (K_{BK_1} \oplus K_{BK_2} \oplus \dots \\ &\quad \oplus K_{BK_r}) = (I_B \otimes K_{K_1} - K_{BK_1}) \oplus \dots \oplus (I_B \otimes K_{K_r} - K_{BK_r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5 &= I_N - (I_B \otimes K_{K_1}) \oplus \dots \oplus (I_B \otimes K_{K_r}) = \\ &= (I_{BK_1} - (I_B \otimes K_{K_1})) \oplus \dots \oplus (I_{BK_r} - (I_B \otimes K_{K_r})) \end{aligned}$$

são matrizes simétricas e idempotentes, com

$$r(P_0) = \text{tr}(P_0) = 1$$

$$r(P_1) = \text{tr}(P_1) = r - 1$$

$$r(P_2) = \text{tr}(P_2) = r(b-1)$$

$$r(P_5) = \text{tr}(P_5) = N - rb = b(\sum_i (k_i - 1))$$

$$r(I_N) = N.$$

Ademais, sendo

$$Y = [Y'_{11} \ Y'_{12} \dots Y'_{1b} \ Y'_{21} \ Y'_{22} \dots Y'_{2b} \dots Y'_{r1} \ Y'_{r2} \dots Y'_{rb}]'$$

com $Y'_{ij} = (y_{ij1} \ y_{ij2} \dots y_{ijk_i})$, para $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases}$

e escrevendo-se $\Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_5 P_5$ ou

seja $\Omega = (c_0 - c_5)P_0 + (c_1 - c_5)P_1 + (c_2 - c_5)P_2 + c_5 I_N$

obtem-se o seguinte sistema de equações lineares para cada $i = 1, 2, \dots, r$:

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{N - bk_i}{Nbk_i} + (c_2 - c_5) \frac{b-1}{bk_i} + c_5 = \sigma_R^2 + \sigma_i^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{N - bk_i}{Nbk_i} + (c_2 - c_5) \frac{b-1}{bk_i} = \sigma_R^2 + \sigma_{i1}^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{N - bk_i}{Nbk_i} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{bk_i} = 0$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} = 0$$

cujas soluções são dadas por:

$$c_0 = c_1 = c_2 = k_i \sigma_R^2 + \sigma_i^2 + (k_i - 1) \sigma_{i1}^2$$

$$c_5 = \sigma_i^2 - \sigma_{i1}^2$$

para todo $i = 1, 2, \dots, r$, com σ_i^2 e σ_{i1}^2 dados por

$$\sigma_i^2 = p - q + q \frac{N}{rk_i} > 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{i1}^2 = q \frac{N}{rk_i}$$

Portanto, tem-se:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \frac{N}{br} \sigma_R^2 + p + q \left(\frac{N}{r} - 1 \right)$$

$$c_5 = p - q$$

satisfazendo $\sigma_R^2 > 0$; $p > 0$ e

$$\frac{-1}{N-r} \left[rp + \frac{N}{b} \sigma_R^2 \right] < q < p .$$

As suposições de normalidade dos erros continuam válidas, além disso as distribuições das formas quadráticas $Y'P_iY$, para $i = 0,1,2,5$ são independentes com distribuição de qui-quadrado.

$$\begin{aligned} \text{Tem-se que } E(Y'P_iY) &= \text{tr}(P_i\Omega) + E(Y')P_iE(Y) \\ &= r(P_i)c_i + E(Y')P_iE(Y) . \end{aligned}$$

As esperanças dos quadrados médios são dadas por :

$$\begin{aligned} E(QM(\mu)) &= c_0 + N(\mu + \frac{1}{N} \sum_i \kappa_i \alpha_i)^2 \\ E(QM(\alpha)) &= c_1 + \frac{b}{r-1} \sum_i \kappa_i (\mu + \alpha_i)^2 - \frac{N}{r-1} (\mu + \frac{1}{N} \sum_i \kappa_i \alpha_i)^2 \\ E(QM(R)) &= c_2 \\ E(QM\text{Resíduo}) &= c_5 \end{aligned}$$

e sob a restrição $\sum_i \kappa_i \alpha_i = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} E(QM(\mu)) &= c_0 + N\mu^2 \\ E(QM(\alpha)) &= c_1 + \frac{b}{r-1} \sum_i \kappa_i \alpha_i^2 \\ E(QM(R)) &= c_2 \\ E(QM\text{Resíduo}) &= c_5 \end{aligned}$$

Assim o quadro de análise de variância fica:

Quadro 3.6. Análise de variância para o modelo dado em 3.2.2., acrescido do fator repetição.

C. V.	gl.	S. Q.	E(Q. M.)
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{b}{r-1} \sum_i \kappa_i \alpha_i^2$
R	$r(b-1)$	$Y'P_2Y$	c_2
Resíduo	$N-rb$	$Y'P_3Y$	c_3
Total	N	$Y'I_NY$	

e como $c_0 = c_1 = c_2$, então a hipótese $H_0 : \alpha_i = 0$ pode ser testada sem comprometer as probabilidades dos erros tipo I e tipo II, uma vez que sob H_0 a estatística $QM(\alpha) / QM(R)$ tem distribuição usual dada por

$$F_{12}(1,1) \cap F[r-1, r(b-1), 0, 0].$$

Os comentários feitos no final do item 3.2.2.a. também valem aqui, e ainda se $p = \sigma_e^2$ e $q = \rho \sigma_e^2$, tem-se:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \frac{N}{br} \sigma_R^2 + \sigma_e^2 \left[1 + \rho \left(\frac{N}{r} - 1 \right) \right]$$

$$c_3 = \sigma_e^2 [1 - \rho]$$

onde $N = b \sum_i \kappa_i$.

Se $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_r = \kappa$ o experimento é balanceado com $\sigma_i^2 = \sigma^2$ e $\sigma_{i1}^2 = \rho \sigma^2$, cuja solução é a mesma já estudada por PERES (1985) e SCARIANO e DAVENPORT (1987).

3.3. MODELOS COM DOIS FATORES FIXOS E BALANCEADOS

3.3.1. MODELOS SEM INTERAÇÃO

a. Erros independentes

Consideremos o modelo linear de efeitos fixos e balanceados, caracterizado por:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r \quad (3.7)$$

$j = 1, 2, \dots, s$ e $k = 1, 2, \dots, k$, $N = rsk$, onde μ é média geral, α_i o efeito do i -ésimo nível do fator α , β_j o efeito do j -ésimo nível do fator β e e_{ijk} é o erro aleatório devido à observação y_{ijk} .

Como os fatores são fixos e $e \sim N(0, \Omega)$ então $E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j = \mu_{ij}$ para todo i, j , e k .

No modelo usual os erros são independentes e a matriz Ω é do tipo $\Omega = \sigma^2 I_N$, e as somas de quadrados são dadas por:

$$SQ(\mu) = Y'P_0Y = \frac{1}{N} y_{...}^2$$

$$SQ(\alpha) = Y'P_1Y = \frac{1}{sk} \sum_i y_{i..}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2$$

$$SQ(\beta) = Y'P_2Y = \frac{1}{rk} \sum_j y_{.j.}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2$$

$$SQ_{\text{Resíduo}} = Y'P_5Y$$

$$\begin{aligned}
 \text{com } P_0 &= K_N \\
 P_1 &= I_r \otimes K_{SK} - K_N = [I_r - K_r] \otimes K_{SK} \\
 P_2 &= K_r \otimes I_s \otimes K_K - K_N = K_r \otimes [I_r - K_s] \otimes K_K \\
 P_5 &= I_N - (P_0 + P_1 + P_2) = I_N - I_r \otimes K_{SK} - K_r \otimes I_s \otimes K_K + K_N
 \end{aligned}
 \quad (3.8)$$

e $Y = [Y'_{11} Y'_{12} \dots Y'_{1s} Y'_{21} Y'_{22} \dots Y'_{2s} \dots Y'_{r1} Y'_{r2} \dots Y'_{rs}]'$,
 onde $Y'_{ij} = (y_{ij1} y_{ij2} \dots y_{ijk})$, para
 $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, s$

Tem-se que os projetores ortogonais P_0 , P_1 , P_2 e P_5 são matrizes simétricas, idempotentes e $P_0 + P_1 + P_2 + P_5 = I_N$ isto é as matrizes P_0 , P_1 , P_2 e P_5 geram quatro sub-espacos ortogonais do espaço N -dimensional, com dimensões:

$$\begin{aligned}
 r(P_0) &= 1 \\
 r(P_1) &= r-1 \\
 r(P_2) &= s-1 \\
 r(P_5) &= N-r-s+1
 \end{aligned}$$

Tomando-se $\Omega \in \mathcal{Y} = \{ \Omega : c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_5 P_5 = \Omega \text{ com } c_i > 0 \text{ p/ } i = 0, 1, 2, 5 \}$

obtem-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}
 (c_0 - c_5) P_0 + (c_1 - c_5) P_1 + (c_2 - c_5) P_2 + c_5 I_N &= \Omega \longrightarrow \\
 (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + c_5 &= \sigma^2 \\
 (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} &= 0 \\
 (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} &= 0 \\
 (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} &= 0
 \end{aligned}$$

obtendo-se $c_0 = c_1 = c_2 = c_5 = \sigma^2$

$$\begin{aligned}
 \text{Logo } E(Y'P_i Y) &= \text{tr}(P_i \Omega) + E(Y')P_i E(Y) = \\
 &= c_i \text{tr}(P_i) + \tilde{\mu}' P_i \tilde{\mu} = \\
 &= \sigma^2 r(P_i) + \tilde{\mu}' P_i \tilde{\mu} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

$$\text{onde } \tilde{\mu}' = [\tilde{\mu}'_{11} \tilde{\mu}'_{12} \dots \tilde{\mu}'_{1s} \dots \tilde{\mu}'_{r1} \tilde{\mu}'_{r2} \dots \tilde{\mu}'_{rs}]$$

$$\tilde{\mu}'_{ij} = [\mu_{ij} \mu_{ij} \dots \mu_{ij}] \text{ de dimensão } \kappa. \quad (3.10)$$

Assim a análise de variância é a usual, e sob as restrições paramétricas $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = 0$, (3.11) os testes para as hipóteses dos efeitos principais $H_0: \alpha_i = 0$ e $H_0: \beta_j = 0$ são feitos em relação ao resíduo e mantém o nível de significância desejado. Assim, tem-se o quadro de análise de variância dado a seguir:

Quadro 3.7. Análise de variância para o modelo (3.7) caso a.

c.v.	g.l.	S.Q.	Q.M.	E(Q.M.)
μ	1	$Y'P_0 Y$	$Y'P_0 Y$	$\sigma^2 + N\mu^2$
α	r-1	$Y'P_1 Y$	$\frac{Y'P_1 Y}{r-1}$	$\sigma^2 + \frac{SK}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$
β	s-1	$Y'P_2 Y$	$\frac{Y'P_2 Y}{s-1}$	$\sigma^2 + \frac{rK}{s-1} \sum_j \beta_j^2$
Resíduo	N-r-s+1	$Y'P_5 Y$	$\frac{Y'P_5 Y}{N-s-r+1}$	σ^2
Total	N	$Y'Y$		

b. Erros não independentes

Tratar-se-á de dois casos de equicorrelação que se supõem serem os mais comuns.

**b.1. Equicorrelação das observações na
mesma casela**

Neste caso a covariância entre duas observações é dada por:

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \text{ ou } j \neq j' \end{cases} \quad (3.12)$$

Assim pode-se escrever $\Omega = I_{rs} \otimes V$ onde

$$V = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho & 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

$$\begin{aligned} \text{com } \Omega \in \mathcal{S} \text{ isto é} \quad \Omega &= c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_5 P_5 = \\ &= (c_0 - c_5) P_0 + (c_1 - c_5) P_1 + (c_2 - c_5) P_2 + c_5 I_N \end{aligned}$$

onde P_0 , P_1 , P_2 e P_5 são dadas por (3.8), obtendo-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + c_5 = \sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} = \rho\sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} = 0$$

cujas soluções são:

$$\begin{aligned} c_1 &= \sigma^2 \left[\rho \left(\frac{N}{r} - 1 \right) + 1 \right] \\ c_2 &= \sigma^2 \left[\rho \left(\frac{N}{s} - 1 \right) + 1 \right] \\ c_0 &= \sigma^2 \left[\rho \left(\frac{N}{r} + \frac{N}{s} - N - 1 \right) + 1 \right] \\ c_5 &= \sigma^2 [1 - \rho] \end{aligned}$$

e como $c_i > 0$ para $i = 0, 1, 2, 5$ então $\rho = 0$ ou $\rho > - (rk + sk - N - 1)^{-1} = - (k(r+s-rs) - 1)^{-1}$, o qual é sempre positivo.

$$\begin{aligned} \text{Como } E(Y'P_i Y) &= \text{tr}(P_i \Omega) + E(Y')P_i E(Y) = \\ &= c_i r(P_i) + \tilde{\mu}' P_i \tilde{\mu} \end{aligned}$$

onde $\tilde{\mu}'$ é dado por (3.10), e considerando as restrições dadas por (3.11) obtem-se o quadro de análise de variância:

Quadro 3.8. Análise de variância para o modelo (3.7)
caso b.1.

c.v.	g.l.	S.Q.	Q.M.	E(Q.M.)	H. Associadas
μ	1	$Y'P_0 Y$	$\frac{Y'P_0 Y}{1}$	$c_0 + N\mu^2$	
α	$r-1$	$Y'P_1 Y$	$\frac{Y'P_1 Y}{r-1}$	$c_1 + \frac{sk}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$	$H_0^{(1)} : \alpha_i = 0$
β	$s-1$	$Y'P_2 Y$	$\frac{Y'P_2 Y}{s-1}$	$c_2 + \frac{rk}{s-1} \sum_j \beta_j^2$	$H_0^{(2)} : \beta_j = 0$
Resíduo	$N-r-s+1$	$Y'P_5 Y$	$\frac{Y'P_5 Y}{N-r-s+1}$	c_5	
Total	N	$Y'Y$			

Assim a estatística usual para testar-se a hipótese $H_0 : \alpha_i = 0$ vs $H_1 : \alpha_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, r$ é dada por:

$$F_{15}(c_1, c_5) = F_{15} \left(\sigma^2 \left[\rho \left(\frac{N}{r} - 1 \right) + 1 \right] ; \sigma^2 [1 - \rho] \right) =$$

$$= \frac{1 - \rho}{1 + \rho\left(\frac{N}{r} - 1\right)} F[r-1, N-r-s+1; \lambda_1, 0]$$

e sob a hipótese H_0 , tem-se $\lambda_1 = 0$, então $P(\text{erro tipo I}) =$

$$= P(F_{15}(c_1, c_2) \geq \frac{1-\rho}{1+\rho\left(\frac{N}{r} - 1\right)} F_{\alpha}(r-1, N-r-s+1)) \stackrel{?}{<} \alpha \quad (3.13)$$

No teste de $H_0: \beta_j = 0$ vs $H_1: \beta_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, \dots, s$, tem-se a estatística:

$$F_{25}(c_2, c_5) = F_{25}(\sigma^2 \left[\rho\left(\frac{N}{r} - 1\right) + 1 \right], \sigma^2 [1-\rho]) =$$

$$= \frac{1 - \rho}{1 + \rho\left(\frac{N}{s} - 1\right)} F[s-1, N-r-s+1; \lambda_2, 0], \text{ e sob } H_0$$

tem-se $\lambda_2 = 0$,

então

$P(\text{erro tipo I}) =$

$$= P(F_{25}(c_2, c_5) \geq \frac{1 - \rho}{1 + \rho\left(\frac{N}{s} - 1\right)} F_{\alpha}(s-1, N-r-s+1)) \stackrel{?}{<} \alpha \quad (3.14)$$

onde α é o nível de significância, supostamente correto, utilizado pelo experimentador, para testar cada uma das hipóteses citadas, com

$$P(\text{erro tipo I}) > \alpha \text{ se } \rho > 0$$

$$P(\text{erro tipo I}) = \alpha \text{ se } \rho = 0$$

$$P(\text{erro tipo I}) < \alpha \text{ se } \rho < 0$$

então se $\rho \neq 0$, nenhum dos testes pode ser feito de maneira "usual", com a exatidão do nível de significância pré-fixado α . A TABELA A.5. do apêndice fornece as probabilidades dos erros tipo I para as duas hipóteses $H^{(1)}$ e $H^{(2)}$, segundo valores de ρ , r , s , k e nível

nominal de significância 0,05.

As ^{bo}probabilidades do erro tipo II também são comprometidas.

Para a hipótese $H_0: \alpha_i = 0$ vs $H_1: \alpha_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, r$, tem-se:

$$P(\text{erro tipo II}) = P(F_{15}[c_1, c_5, \lambda_1, 0] > \frac{c_5}{c_1} F_{\alpha}(r-1, N-r-s+1))$$

$$= P(F_{15}[c_1, c_5, \lambda_1, 0] > \frac{1-\rho}{1+\rho(\frac{N}{r}-1)} F_{\alpha}(r-1, N-r-s+1)) \quad (3.15)$$

onde $\lambda_1 = \frac{\tilde{\mu}' P_1 \tilde{\mu}}{2c_1}$ e deve ser fixado para se calcular tais probabilidades.

O mesmo ocorre com a hipótese $H_0: \beta_j = 0$ vs $H_1: \beta_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, \dots, s$, ou seja:

$$P(\text{erro tipo II}) =$$

$$= P(F_{25}[c_2, c_5, \lambda_2, 0] < \frac{1-\rho}{1+\rho(\frac{N}{s}-1)} F_{\alpha}(s-1, N-r-s+1)) \quad (3.16)$$

com $\lambda_2 = \frac{\tilde{\mu}' P_2 \tilde{\mu}}{2c_2}$, o qual deve ser fixado.

Essas probabilidades são dadas pela TABELA A.6., do apêndice, segundo os mesmos valores de ρ , r , s , κ ; nível de significância 0.05 e λ_1 e λ_2 com os valores 0 ; 5 ; 20. Observa-se que se $\kappa = 1$, não tem sentido o caso de equicorrelação aqui estudado, ou seja não existe ρ , o que é equivalente a tomar-se $\rho = 0$ e $\kappa = 1$ e o modelo se reduz a um modelo de 2 fatores fixos com estrutura de erros independentes (usual).

b.2. Equicorrelação das observações dentro de cada nível de um dos fatores.

Neste caso considera-se uma equicorrelação dentro dos níveis de um dos fatores, digamos α , assim ao invés de (3.12) tem-se:

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } i=i' \text{ e } j \neq j' \text{ ou } k \neq k' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

Assim pode se escrever $\Omega = \frac{1}{r} \otimes V$ onde

$$V = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho & & & 1 \end{bmatrix}_{SK}$$

com $\Omega \in \mathcal{Y}$, isto é $\Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_5 P_5 =$

$$= (c_0 - c_5) P_0 + (c_1 - c_5) P_1 + (c_2 - c_5) P_2 + c_5 I_N \quad \text{onde}$$

P_0, P_1, P_2 e P_5 são dadas por (3.8). Obtendo-se

o seguinte sistema de equações:

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + c_5 = \sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} = \rho\sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} = \rho\sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} = 0$$

cujas soluções são

$$c_0 = c_1 = \sigma^2 \left[1 + \left(\frac{N}{r} - 1 \right) \rho \right]$$

$$c_2 = c_5 = \sigma^2 [1 - \rho]$$

onde

$$\frac{-1}{\frac{N}{r} - 1} < \rho < 1$$

Sob as restrições paramétricas $\sum \alpha_i = \sum \beta_j = 0$, obtém-se o quadro de análise de variância:

Quadro 3.9. Análise de variância para o modelo (3.7)
caso b.2..

c.v.	g.l.	S.Q.	Q.M.	E(Q.M.)	H. Associadas
μ	1	$Y'P_0Y$	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$	
α	r-1	$Y'P_1Y$	$\frac{Y'P_1Y}{r-1}$	$c_1 + \frac{SK}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$	$H_0^{(1)}: \alpha_i = 0$
β	s-1	$Y'P_2Y$	$\frac{Y'P_2Y}{s-1}$	$c_2 + \frac{rK}{s-1} \sum_j \beta_j^2$	$H_0^{(2)}: \beta_j = 0$
Resíduo	N-r-s+1	$Y'P_5Y$	$\frac{Y'P_5Y}{N-s-r+1}$	c_5	
Total	N	$Y'Y$			

Assim a estatística usual para o teste de $H_0: \alpha_i = 0$ vs $H_1: \alpha_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, r$ é dada por:

$$F_{15}(c_1, c_5) = F_{15}(\sigma^2 [1 + (\frac{N}{r} - 1)\rho], \sigma^2 [1 - \rho]) =$$

$$= \frac{1 - \rho}{1 + (\frac{N}{r} - 1)\rho} F[r-1, N-r-s+1, \lambda_1, 0],$$

cujos comprometimentos nas probabilidades do erro tipo I é o mesmo dado por (3.13). Mas quanto ao teste para a hipótese

$H_0 : \beta_j = 0$ vs $H_1 : \beta_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, \dots, s$,
tem-se a estatística $F_{25}(c_2, c_5) = F_{25}(1, 1)$, que é a
estatística usualmente empregada para esse teste, ou seja,
as probabilidades de erro tipo I não sofrerão alterações no
seu nível de significância, ao contrário do que ocorre em
(3.14). Pode-se notar, por (3.14), que no caso de
dependência somente dentro das caselas o nível de
significância para essa mesma hipótese sofre alterações.

Embora as probabilidades dos erros, para a
hipótese $H^{(4)}$ sejam as mesmas dada em (3.13), apresentam-se
novas tabelas dessas probabilidades, mudando alguns valores
de " ρ ". Para as probabilidades do erro tipo I, veja TABELA
A.7. do apêndice. Quanto as probabilidades do erro tipo II,
temos, sob as hipóteses alternativas, que as estatísticas
 $F_{15}(c_1, c_5)$ e $F_{25}(c_2, c_5)$ têm distribuições
 $F[r-1, n-r-s+1, \lambda_1, 0]$ e $F[s-1, n-r-s+1, \lambda_2, 0]$
respectivamente, onde

$$\lambda_1 = \frac{\tilde{\mu}' P_1 \tilde{\mu}}{2c_1} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\tilde{\mu}' P_2 \tilde{\mu}}{2c_2} \quad \text{com } \tilde{\mu} \text{ dado por (3.10).}$$

Para a hipótese $H_0 : \alpha_i = 0$ vs $H_1 : \alpha_i \neq 0$ tem-se:

$P(\text{erro tipo II}) =$

$$\begin{aligned} &= P(F_{15}[c_1, c_5, \lambda_1, 0] < \frac{c_5}{c_1} F_{\alpha}(r-1, n-r-s+1)) = \\ &= P(F_{15}[c_1, c_2, \lambda_1, 0] < \frac{1-\rho}{1+(sk-1)\rho} F_{\alpha}(r-1, n-r-s+1)) \end{aligned}$$

Para a hipótese $H_0 : \beta_j = 0$ vs $H_1 : \beta_j \neq 0$ para algum
 $j = 1, 2, \dots, s$, tem-se

$P(\text{erro tipo II}) = P(F_{25}[c_2, c_5, \lambda_2, 0] < F_{\alpha}(s-1, N-r-s+1))$
 que é a probabilidade usual do erro tipo II, segundo o
 valor λ_2 , pois $c_2 = c_5$.

Logo pode-se ver que violações nas suposições
 de independência, neste caso, também afetam as
 probabilidades de erro tipo II para a hipótese $H_0: \alpha_i = 0$
 vs $H_1: \alpha_i \neq 0$ para algum i , e não afetam para a hipótese
 $H_0: \beta_j = 0$ vs $H_1: \beta_j \neq 0$ para algum j . A TABELA A.8. do
 apêndice fornece essas probabilidades para diversos valores
 de $r, s, \kappa, \rho, \lambda$ e nível nominal de significância de 0,05.

3.3.2. MODELOS COM INTERAÇÃO

a. Erros independentes

Considera-se o modelo (3.7) mais a interação
 entre os fatores principais, isto é

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ijk} \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, r, \\ j = 1, 2, \dots, s \text{ e } k = 1, 2, \dots, \kappa, \text{ com } N = rsk.$$

As somas de quadrados devida aos fatores são:

$$\begin{aligned} SQ(\mu) &= Y'P_0Y & SQ(\alpha\beta) &= Y'P_3Y \\ SQ(\alpha) &= Y'P_1Y & SQ(\text{Resíduo}) &= Y'P_5Y \\ SQ(\beta) &= Y'P_2Y & SQ(\text{Total}) &= Y'I_NY \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde as matrizes P_0, P_1, P_2 são dadas por (3.8) e

$$P_3 = I_{rs} \otimes K_K - K_N - P_1 - P_2 = I_{rs} \otimes K_K - I_r \otimes K_{sr} - K_r \otimes I_s \otimes K_K + K_N$$

$$P_5 = I_N - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3)$$

$$\text{com } r(P_3) = rs - r - s + 1 = (r-1)(s-1)$$

$$r(P_5) = n - rs = rs(k-1)$$

Os projetores ortogonais de Y_N em algum subespaço de $C(X)$ são as matrizes P_i , $i = 0, 1, 2, 3, 5$ simétricas e idempotentes.

O vetor Y_N de observações é tal que $Y_N \in N(\tilde{\mu}, \Omega)$ onde $\tilde{\mu}$ é dado por (3.10) e Ω é tal que $\Omega \in \mathcal{B} = \{ \Omega: \Omega = \sum_i c_i P_i \text{ com } c_i > 0, p/i = 0, 1, 2, 3, 5 \}$ e como $\Omega = \sigma^2 I_N$ então $c_i = \sigma^2$ para todo i .

Considerando-se as restrições paramétricas dadas por $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_{ij} \alpha\beta_{ij} = \sum_j \alpha\beta_{ij} = 0$ (3.18) e ainda (3.4) e (3.9), tem-se o seguinte quadro de análise de variância:

Quadro 3.10. Análise de variância para o modelo (3.7) com interação, caso a..

c.v.	g.l.	S.Q.	E(Q.M.)	H. Associadas
μ	1	$Y'P_0Y$	$\sigma^2 + N\mu^2$	
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$\sigma^2 + \frac{SK}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$	$H_0^{(1)}: \alpha_i = 0$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	$\sigma^2 + \frac{rK}{s-1} \sum_j \beta_j^2$	$H_0^{(2)}: \beta_j = 0$
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	$\sigma^2 + \frac{K}{(r-1)(s-1)} \sum_{ij} \alpha\beta_{ij}^2$	$H_0^{(3)}: (\alpha\beta)_{ij} = 0$
Res	$rs(k-1)$	$Y'P_5Y$	σ^2	
Tot	N	$Y'Y$		

e os testes para as hipóteses principais são todos feitos contra o resíduo e mantém o nível de significância desejado, como era de se esperar, na análise de variância usual para esse modelo.

b. Erros não independentes

Serão tratados alguns casos de violações, cujos efeitos possam ser estudados segundo a metodologia aqui empregada, e que sejam mais usuais.

b.1. Equicorrelação das observações somente dentro da mesma casela

Neste caso a covariância entre duas observações na mesma casela é dada por:

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \text{ ou } j \neq j' \end{cases}$$

As somas de quadrados $Y'P_iY$ $p/ i = 0,1,2,3,5$ são as mesmas dadas por (3.17) e a matriz Ω é dada por $\Omega = I_{rs} \otimes V$ onde

$$V = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdot & \cdot & \cdot & \rho \\ \rho & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}_K$$

Como $\Omega \in \mathcal{Y} = \{ \Omega : \Omega = \sum_i c_i P_i, c_i > 0 \text{ p/ } i = 0, 1, 2, 3, 5 \}$, resolve-se o seguinte sistema de equações:

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{rs-s-r+1}{N} + c_5 = \sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{rs-s-r+1}{N} = \rho \sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1-r}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1-s}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{N} = 0$$

obtendo-se a seguinte solução:

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = \sigma^2 \left[\left(\frac{N}{rs} - 1 \right) \rho + 1 \right] = \sigma^2 [(k-1) \rho + 1]$$

$$c_5 = \sigma^2 [1 - \rho]$$

$$\text{para } - \left(\frac{N}{rs} - 1 \right)^{-1} < \rho < 1 \quad \text{ou} \quad \frac{-1}{k-1} < \rho < 1$$

Considerando as restrições dadas por (3.18) e por (3.4) e (3.9), tem-se o quadro de análise de variância:

Quadro 3.11. Análise de variância para o modelo (3.7) com interação, caso b.1.

c.v.	g.l.	S.Q.	E(Q.M.)	H. Associadas
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$	
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{SK}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$	$H_0^{(1)}: \alpha_i = 0$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	$c_2 + \frac{rK}{s-1} \sum_j \beta_j^2$	$H_0^{(2)}: \beta_j = 0$
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	$c_3 + \frac{K}{(r-1)(s-1)} \sum_{i,j} \alpha\beta_{ij}^2$	$H_0^{(3)}: (\alpha\beta)_{ij} = 0$
Res	$rs(k-1)$	$Y'P_5Y$	c_5	
Total	N	$Y'Y$		

Os testes usuais são feitos em relação ao resíduo, o que neste caso de violação comprometerá as probabilidades de erro tipo I e II para qualquer uma das hipóteses principais. O fator de proporcionalidade das distribuições (3.13), (3.14) são iguais para as três hipóteses principais.

Teremos, para qualquer uma das hipóteses principais, que: $P(\text{erro tipo I}) =$

$$= P(F_{i5}(c_i, c_5) \geq \frac{1-\rho}{1+\rho(k-1)} F_{\alpha}(r(P_i), rs(k-1))) \geq \alpha$$

para $i = 1, 2, 3$,

$$\text{ou seja } P(\text{erro tipo I}) \begin{cases} > \alpha & \text{se } 0 < \rho < 1 \\ = \alpha & \text{se } \rho = 0 \\ < \alpha & \text{se } \frac{-1}{k-1} < \rho < 0 \end{cases}$$

onde α é o nível de significância supostamente correto usado pelo pesquisador. A TABELA A.9. do apêndice fornece as probabilidades dos erros tipo I para $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ e $H^{(3)}$,

segundo valores de ρ , r , s , k e nível nominal de significância $\alpha = 0,05$.

Quanto as probabilidades do erro tipo II, tem-se

$$P(\text{erro tipo II}) = P(F_{is}[c_i, c_s, \lambda_i, 0] < \frac{1-\rho}{1+\rho(k-1)} F_{\alpha}(r(P_i), rs(k-1)))$$

onde $\lambda_i = \frac{\tilde{\mu}' P_i \tilde{\mu}}{2c_i}$ para $i = 1, 2, \text{ e } 3$ com $\tilde{\mu}'$ dado

por (3.10) para $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$ e

$$c_i = \sigma^2[1+(k-1)\rho] \quad ,$$

$$c_s = \sigma^2[1-\rho] \quad .$$

Essas probabilidades são dadas no apêndice pela TABELA A.10. para os mesmos valores de ρ , r , s , k e α da TABELA A.9 e $\lambda_i = 0, 5$ e 20 para $i = 1, 2, \text{ e } 3$.

b.2. Equicorrelação das observações dentro dos níveis de um dos fatores, digamos α

Neste caso a covariância entre duas observações dentro do mesmo nível do fator α é dada por:

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } i=i', j \neq j' \text{ ou } k \neq k' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

As somas de quadrados $Y'P_iY$ para $i=0,1,2,3,5$ são as mesmas dadas por (3.17) e a matriz Ω de variâncias e covariâncias é dada por $\Omega = I_r \otimes V$ com

$$V = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdot & \cdot & \cdot & \rho \\ \rho & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho & \rho & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}_{SK}$$

Como $\Omega \in \mathfrak{S}$, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{rs-r-s+1}{N} + c_5 &= \sigma^2 \\ (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{rs-r-s+1}{N} &= \rho \sigma^2 \\ (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1-r}{N} &= \rho \sigma^2 \\ (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1-s}{N} &= 0 \\ (c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{N} &= 0 \end{aligned}$$

obtendo-se a solução:

$$\begin{aligned} c_0 = c_1 &= \sigma^2 \left[\left(\frac{N}{r} - 1 \right) \rho + 1 \right] = \sigma^2 [(sk-1)\rho + 1] \\ c_2 = c_3 = c_5 &= \sigma^2 [1 - \rho] \end{aligned}$$

para $-\left(\frac{N}{r} - 1\right)^{-1} < \rho < 1$ ou seja $\frac{-1}{sr-1} < \rho < 1$

Considerando-se as restrições dadas por (3.18) e ainda por (3.4) e (3.9) tem-se o quadro de análise de variância:

Quadro 3.12. Análise de variância para o modelo (3.7) com interação, caso b.2.

c.v.	g.l.	S.Q.	E(Q.M.)	H. Associadas
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$	
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{SK}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$	$H_0^{(1)}: \alpha_i = 0$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	$c_2 + \frac{rK}{s-1} \sum_j \beta_j^2$	$H_0^{(2)}: \beta_j = 0$
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	$c_3 + \frac{K}{(r-1)(s-1)} \sum_{i,j} \alpha\beta_{ij}^2$	$H_0^{(3)}: (\alpha\beta)_{ij} = 0$
Res	$rs(k-1)$	$Y'P_5Y$	c_5	
Total	N	$Y'Y$		

Para as hipóteses principais $H_0: \beta_j = 0$ vs $H_1: \beta_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, \dots, s$ e $H_0: \alpha\beta_{ij} = 0$ vs $H_1: \alpha\beta_{ij} \neq 0$ para algum par (i, j) com $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, s$, o experimentador poderá utilizar os testes usuais sem comprometer as probabilidades do erros tipos I e II, enquanto que para a hipótese $H_0: \alpha_i = 0$ vs $H_1: \alpha_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, r$, o comprometimento acontece como ocorreu em 3.3.2-b.1., isto é:

$$P(\text{erro tipo I}) = P[F_{15}(c_1, c_5) \geq \frac{1-\rho}{1+(SK-1)\rho} F_{\alpha}(r-1, rs(k-1))] \stackrel{>}{<} \alpha$$

$$\text{ou seja } P(\text{erro tipo I}) \begin{cases} > \alpha & \text{se } 0 < \rho < 1 \\ = \alpha & \text{se } \rho = 0 \\ < \alpha & \text{se } \frac{-1}{ks-1} < \rho < 0 \end{cases}$$

Essas probabilidades são dadas pela TABELA A.11. do apêndice, segundo valores de ρ , r , s , k e $\alpha = 0.05$. Quanto ao erro tipo II tem-se:

$P(\text{erro tipo II}) =$

$$= P(F_{15} [c_1, c_5, \lambda_1, 0] < \frac{1-\rho}{1+(s\kappa-1)\rho} F_{\alpha}(r-1, rs(\kappa-1)))$$

onde $\lambda_1 = \frac{\tilde{\mu}' P_1 \tilde{\mu}}{2c_1}$, com $\tilde{\mu}$ dado por (3.10) para

$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$. Para essas probabilidades veja TABELA A.12., segundo os mesmos valores de ρ , r , s , κ e α com $\lambda_1 = 0, 5$ e 20 .

b.3. Equicorrelação das observações dentro das caselas por " ρ_1 ", e dentro do mesmo nível de um dos fatores, mas em caselas diferentes por " ρ_2 "

Então a covariância entre duas observações quaisquer é dada por

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho_1 \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ \rho_2 \sigma^2 & \text{se } i=i' \text{ e } j \neq j' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

e $\Omega = \sigma^2 I_r \otimes [I_s \otimes V_K + V_{KS}]$ onde

$$V_K = \begin{bmatrix} 1-\rho_2 & \rho_1-\rho_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_1-\rho_2 \\ \rho_1-\rho_2 & 1-\rho_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_1-\rho_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1-\rho_2 & \rho_1-\rho_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1-\rho_2 \end{bmatrix}_K$$

$$V_{KS} = SK \rho_2 K_{SK} = \rho_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{SK}$$

sendo o vetor de observações Y dado por (3.8).

Como $\Omega \in \mathcal{Y}$ tem-se o seguinte sistema de equações, nas constantes c_i para $i = 0, 1, 2, 3$ e 5

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{rs-r-s+1}{N} + c_5 = \sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{rs-r-s+1}{N} = \rho_1 \sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1-r}{N} = \rho_2 \sigma^2$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1-s}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{N} = 0$$

cujas soluções são:

$$c_0 = c_1 = \sigma^2 [1 + \rho_1(k-1) + \rho_2 k(s-1)]$$

$$c_2 = c_3 = \sigma^2 [1 + \rho_1(k-1) - \rho_2 k]$$

$$c_5 = \sigma^2 [1 - \rho_1]$$

e como $c_i > 0$ para $i = 0, 1, 2, 3$ e 5 tem-se

$$1 + \rho_1(k-1) + \rho_2 k(s-1) > 0 \quad \text{e} \quad 1 + \rho_1(k-1) - \rho_2 k > 0,$$

resultando:

$$\left. \begin{aligned} \text{se } \rho_2 > 0 &\implies \rho_1 > \frac{-1 + \rho_2 k}{k - 1} \\ \text{se } \rho_2 = 0 &\implies \rho_1 > \frac{-1}{k - 1} \\ \text{se } \rho_2 < 0 &\implies \rho_1 > \frac{-1 - \rho_2 k(s-1)}{k - 1} \end{aligned} \right\} (3.19)$$

com ρ_1 e ρ_2 no intervalo $[-1, 1]$.

O quadro de análise de variância, considerando-se as restrições dadas por (3.18) e ainda por (3.4) e (3.9), é dado por:

Quadro 3.14. Análise de variância para o modelo (3.7) com interação, caso b.3.

c.v.	g.l.	S.Q.	E(Q.M.)	H. Associadas
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$	
α	r-1	$Y'P_1Y$	$c_0 + \frac{SK}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$	$H_0^{(1)}: \alpha_i = 0$
β	s-1	$Y'P_2Y$	$c_2 + \frac{rK}{s-1} \sum_j \beta_j^2$	$H_0^{(2)}: \beta_j = 0$
$\alpha\beta$	(r-1)(s-1)	$Y'P_3Y$	$c_2 + \frac{K}{(r-1)(s-1)} \sum_{i,j} \alpha\beta_{ij}^2$	$H_0^{(3)}: (\alpha\beta)_{ij} = 0$
Res	rs(k-1)	$Y'P_5Y$	c_5	
Tot	N	$Y'Y$		

Utilizando-se os testes usuais, para as hipóteses principais, haverá, para todas elas, o comprometimento das probabilidades dos erros tipos I e II.

Pode-se notar que nenhum dos testes $H_0^{(1)}: \alpha_i = 0$, $H_0^{(2)}: \beta_j = 0$ ou $H_0^{(3)}: \alpha\beta_{ij} = 0$ pode ser feito com a exatidão do nível de significância, pelos métodos usuais, mas se $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ então tem-se

$$c_0 = c_1 = \sigma^2 [1 + \rho(sk - 1)] \quad \text{e}$$

$c_2 = c_3 = c_5 = \sigma^2 [1 - \rho]$, reduzindo-se ao caso 3.3.2.-b.2. anteriormente estudado, com testes exatos para $H_0^{(2)}: \beta_j = 0$ e para $H_0^{(3)}: \alpha\beta_{ij} = 0$.

Se $\rho_2 = 0$ tem-se $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = \sigma^2 [1 + \rho_1(k-1)]$ e $c_5 = \sigma^2 [1 - \rho_1]$ reduzindo-se ao caso 3.3.2.-b.1. já estudado anteriormente sem testes

usuais exatos para as hipóteses principais.

Se $s = 1$, não se tem modelo com dois fatores e sim com um único fator, logo c_2 e c_3 não existem, e $c_0 = c_1 = \sigma^2[1 + \rho_1(k-1)]$ e $c_5 = \sigma^2[1 - \rho_1]$, reduzindo-se ao caso de um fator fixo e balanceado, estudado pelos autores citados no item 2.2., do capítulo 2.

Então pelas observações anteriores, pode-se ver que este caso é mais geral do que aqueles planejamentos de efeitos fixos e balanceados, já estudados.

$$\begin{aligned} &\text{Quanto ao erro tipo I tem-se } P(\text{erro tipo I}) = \\ &= P\left(F_{15}(c_1, c_5) \geq \frac{c_5}{c_1} F_{\alpha}(r(P_1), rs(k-1))\right) \geq \alpha \end{aligned}$$

onde $F_{15}(c_1, c_5)$ é a estatística usual para se testar a hipótese $H_0^{(i)}$ para $i = 1, 2$ e 3 .

Então para a $H_0^{(1)}$, (considerando (3.19)),
obtem-se

$$P(\text{erro tipo I}) \begin{cases} > \alpha & \text{se } \rho_1 + (s-1)\rho_2 > 0 \\ = \alpha & \text{se } \rho_1 + (s-1)\rho_2 = 0 \\ < \alpha & \text{se } \rho_1 + (s-1)\rho_2 < 0 \end{cases}$$

enquanto que para as hipóteses $H_0^{(2)}$ e $H_0^{(3)}$, tem-se (levando-se em conta (3.19)) que:

$$P(\text{erro tipo I}) \begin{cases} > \alpha & \text{se } \rho_2 < \rho_1 \\ = \alpha & \text{se } \rho_1 = \rho_2 \\ < \alpha & \text{se } \rho_2 > \rho_1 \end{cases}$$

Essas probabilidades são dadas pela TABELA A.13. do apêndice.

Quanto as probabilidades do erro tipo II, obtem-se:

$$P(\text{erro tipo II}) = \\ = P \left(F_{i5} [c_i, c_5, \lambda, 0] < \frac{c_5}{c_i} F_{\alpha} (r(P_i), rs(k-1)) \right)$$

para $i = 1, 2 \text{ e } 3$, com $\lambda_i = \frac{\tilde{\mu}' P_i \tilde{\mu}}{2c_i}$ com $\tilde{\mu}$ dado por (3.10) e $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$. Essas probabilidades são dadas pela TABELA A.14. do apêndice.

As tabelas são produzidas para alguns valores de ρ_2 isto é $\rho_2 = 0.1$; 0.3 e 0.5 para as probabilidades do erro tipo I e $\rho_2 = 0.3$ para as probabilidades do erro tipo II; com $\lambda_i = 0$; 5 e 20 para $i = 1, 2, \text{ e } 3$.

3.3.3. PROCEDIMENTOS ALTERNATIVOS

Apresentam-se aqui sugestões para efetuar-se estes testes sem o comprometimento das probabilidades dos erros tipos I e II, através de uma modificação do planejamento, considerando a realização de repetições independentes de mesmo tamanho, com a inclusão de mais um fator (repetição) no planejamento.

a. Procedimento alternativo para o caso

3.3.1.b.2., cujo modelo é dado por (3.7)

Consideram-se agora b repetições independentes entre si e também com relação aos erros do modelo, de mesmo tamanho. Então o modelo passa a ser dado por:

$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + R_{li} + e_{ijkl}$, onde R_{li} é o efeito da l -ésima repetição dentro do i -ésimo nível do fator α , para $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$, $l = 1, 2, \dots, b$ e $k = 1, 2, \dots, k$. Considerando-se que R_{li} e e_{ijkl} são variáveis aleatórias independentes com distribuições normais de média nula e matrizes de variâncias e covariâncias dada por $\Omega_1 = \sigma^2 I_N$ e Ω_2 respectivamente, com $N = rsbk$.

Tem-se $E(y_{ijkl}) = \mu + \alpha_i + \beta_j = \mu_{ij}$ e $Y \sim N(\tilde{\mu}; \Omega = v(\Omega_1, \Omega_2))$ onde o vetor de observações Y é dado por:

$$Y = [Y'_{111} Y'_{112} \dots Y'_{11b} \quad Y'_{121} Y'_{122} \dots Y'_{12b} \quad \dots \quad Y'_{1s1} Y'_{1s2} \dots Y'_{1sb} \quad \dots \\ \dots Y'_{211} Y'_{212} \dots Y'_{21b} \quad \dots \quad Y'_{rs1} Y'_{rs2} \dots Y'_{rsb}]'$$

$$\text{e } Y'_{ijl} = (y_{ijl1}, y_{ijl2}, \dots, y_{ijlk})$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_{ijkl}, y_{i'j'l'k'}) &= \\ &= E[(y_{ijkl} - E(y_{ijkl}))(y_{i'j'l'k'} - E(y_{i'j'l'k'}))] = \\ &= E[(R_{li} + e_{ijkl})(R_{l'i'} + e_{i'j'l'k'})] = \end{aligned}$$

$$= E (R_{ijk} R_{i'j'l'k'}) + E (e_{ijk} e_{i'j'l'k'}) =$$

$$= \begin{cases} \sigma_R^2 + \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j', l=l' \text{ e } k=k' \\ \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 & \text{se } i=i', j=j', l=l' \text{ e } k \neq k' \\ 0 & \text{se } i=i', j=j', l \neq l' \\ \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 & \text{se } i=i', j \neq j' \text{ e } l=l' \\ 0 & \text{se } i=i', j \neq j' \text{ e } l \neq l' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

ou ainda pode-se escrever:

$$\Omega_2 = \sigma^2 \{ \rho [I_r \otimes sK_s \otimes I_b \otimes K_k] + (1 - \rho) I_N \} \quad \text{e}$$

$$\Omega_1 = \sigma_R^2 I_N, \quad \text{com}$$

$$v(\Omega_1, \Omega_2) = \Omega = (\sigma^2 \rho + \sigma_R^2) [I_r \otimes sK_s \otimes I_b \otimes K_k + \sigma^2 (1 - \rho) I_N]$$

As somas de quadrados usuais para esse modelo são dadas por:

$$\begin{aligned} SQ(\mu) &= Y' P_0 Y = \frac{1}{N} y^2_{\dots\dots\dots} \\ SQ(\alpha) &= Y' P_1 Y = \frac{1}{sbk} \sum_i y^2_{i\dots\dots} - \frac{1}{N} y^2_{\dots\dots\dots} \\ SQ(\beta) &= Y' P_2 Y = \frac{1}{rbk} \sum_j y^2_{\dots j\dots\dots} - \frac{1}{N} y^2_{\dots\dots\dots} \\ SQ(R) &= Y' P_3 Y = \frac{1}{sk} \sum_{il} y^2_{i\dots l\dots\dots} - \frac{r}{N} \sum_i y^2_{i\dots\dots\dots} \\ SQ(\text{Resíduo}) &= Y' P_5 Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{com } P_0 &= K_N & \text{com } r(P_0) &= 1 \\ P_1 &= I_r \otimes K_{sbk} - K_N & \text{com } r(P_1) &= r - 1 \\ P_2 &= K_r \otimes I_s \otimes K_{bk} - K_N & \text{com } r(P_2) &= s - 1 \\ P_3 &= I_r \otimes K_s \otimes I_b \otimes K_k - I_r \otimes K_{sbk} & \text{com } r(P_3) &= r(b - 1) \\ P_* &= I_r \otimes K_s \otimes I_b \otimes K_k & \text{com } r(P_*) &= rb \\ P_5 &= I_N - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) = \\ &= I_N - P_* - P_2 & \text{com } r(P_5) &= N - rb - s + 1 \end{aligned}$$

Lembrando que os projetores ortogonais P_0, P_1, P_2, P_3 e P_5 são matrizes simétricas e idempotentes e que $\Omega \in \mathcal{Y}$, isto é $\Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_5 P_5$, com $c_i > 0$, obtém-se o sistema de equações lineares:

$$(c_0 - c_3)P_0 + (c_1 - c_3)P_1 + (c_2 - c_5)P_2 + (c_3 - c_5)P_3 + c_5 I_N = \Omega \quad \text{ou seja}$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{SK} + c_5 = \sigma^2 + \sigma_R^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{SK} = \rho \sigma^2 + \sigma_R^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{SK} = \rho \sigma^2 + \sigma_R^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{s-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_5) \frac{-1}{N} = 0$$

Tem-se sete equações que podem ser numeradas de 1 a 7, a partir da primeira, e pela dependência linear dessas equações, pode-se eliminar as equações de números 3 e 4, obtendo-se a seguinte solução:

$$c_0 = c_1 = c_3 = \sigma^2 [(sk - 1)\rho + 1] + sk\sigma_R^2$$

$$c_2 = c_5 = \sigma^2 [1 - \rho]$$

Sob as restrições paramétricas dadas por (3.11), tem-se o seguinte quadro de Análise de Variância:

Quadro 3.15. Análise de variância para o modelo (3.7) com repetições, caso a..

C.V.	g.l.	S.Q.	E(Q.M)
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{sbk}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	$c_2 + \frac{rbk}{s-1} \sum_j \beta_j^2$
Rep	$r(b-1)$	$Y'P_3Y$	c_3
Res	$n-rb-s+1$	$Y'P_5Y$	c_5
Total	N	$Y'Y$	

Verifica-se agora que todos os testes para as hipóteses principais podem ser feitos pelos métodos usuais, sem o comprometimento das probabilidades dos erros tipos I e II, a menos do fator repetições.

Desta forma o teste de $H_0: \alpha_i = 0$ vs $H_1: \alpha_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, r$ é feito em relação a "repetição", enquanto que para $H_0: \beta_j = 0$ vs $H_1: \beta_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, \dots, s$ é feito contra o "resíduo", como antes.

Nota-se que para $b = 1$, o fator repetição deixa de existir, pois tem-se "0" graus de liberdade para esse fator, o que se faz voltar ao mesmo problema.

O caso 3.3.1.b.2. poderia ser tratado, considerando equicorrelação dentro do níveis do fator β , ao invés de α , assim o fator "repetição" passaria a ser

hierárquizado dentro de β , compondo o modelo com a notação $R_{l(i,j)}$. O desenvolvimento é análogo ao anterior, observando as devidas trocas de índices.

Para o caso 3.3.1.b.1. de equicorrelação dentro das caselas, em que o modelo considerado não contém interação, não foi possível encontrar um procedimento alternativo nessa linha (incluindo repetições) então esse caso será tratado para modelos com interação.

**b. Procedimento alternativo para o caso
3.3.2.b.1. cujo modelo inclui interação.**

Consideram-se b repetições de mesmo tamanho, independentes entre si e também com relação aos erros e_{ijkl} do modelo, e a inclusão do fator repetição dentro da casela (i,j) , de modo que o modelo passa a ser dado por

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + R_{l(i,j)} + e_{ijkl} \quad \text{onde}$$

$$i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad l = 1, 2, \dots, b \quad \text{e}$$

$$k = 1, 2, \dots, k, \quad \text{e } R_{l(i,j)} \text{ corresponde ao efeito de repetição dentro do } i\text{-ésimo nível do fator } \alpha \text{ e } j\text{-ésimo nível do fator } \beta.$$

Considerando que $R_{l(i,j)}$ e e_{ijkl} são variáveis aleatórias independentes com distribuições normais de médias nulas e matrizes de variâncias e covariâncias dadas por $\Omega_1 = \sigma^2 I_N$ e Ω_2 , respectivamente, com $\Omega_2 = I_{rsb} \otimes V$ onde

$$V = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{K \times K} \quad \text{e } N = rsbk$$

Tem-se então que: $\text{cov}(y_{ijkl}, y_{i'j'l'k'}) =$

$$= E[(y_{ijkl} - E(y_{ijkl}))(y_{i'j'l'k'} - E(y_{i'j'l'k'}))] =$$

$$= \text{cov}[(R_{l(ij)} + e_{ijkl})(R_{l'(i'j')} + e_{i'j'l'k'})] =$$

$$= E[R_{l(ij)}R_{l'(i'j')}] + E[e_{ijkl}e_{i'j'l'k'}] =$$

$$= \begin{cases} \sigma_R^2 + \sigma^2 & \text{se } i=i', j=j', l=l' \text{ e } k=k' \\ \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 & \text{se } i=i', j=j', l=l' \text{ e } k \neq k' \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

E assim a matriz de variâncias e covariâncias Ω do modelo é dada por:

$$\Omega = v(\Omega_1, \Omega_2) = I_{rsb} \otimes V_K \quad \text{onde}$$

$$V_K = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 + \sigma^2 & \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 & \dots & \dots & \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 \\ \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 & \sigma_R^2 + \sigma^2 & \dots & \dots & \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 & \sigma_R^2 + \rho\sigma^2 & \dots & \dots & \sigma_R^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}_{K \times K}$$

As somas de quadrados usuais para esse modelo são dadas por:

$$\begin{aligned}
SQ(\mu) &= Y'P_0Y = \frac{1}{N} y_{....}^2 \\
SQ(\alpha) &= Y'P_1Y = \frac{1}{sbk} \sum_t y_{t...}^2 - \frac{1}{N} y_{....}^2 \\
SQ(\beta) &= Y'P_2Y = \frac{1}{rbk} \sum_j y_{.j..}^2 - \frac{1}{N} y_{....}^2 \\
SQ(\alpha\beta) &= Y'P_3Y = \frac{1}{bk} \sum_{tj} y_{tj..}^2 - \frac{1}{sbk} \sum_t y_{t...}^2 - \frac{1}{rbk} \sum_j y_{.j..}^2 + \frac{1}{N} y_{....}^2 \\
SQ(R) &= Y'P_4Y = \frac{1}{k} \sum_{tjl} y_{tj..}^2 - \frac{1}{bk} \sum_{tj} y_{tj..}^2 \\
SQ(\text{Resíduo}) &= Y'P_5Y
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde:

$$\left. \begin{aligned}
P_0 &= K_N \\
P_1 &= I_r \otimes K_{sbk} - K_N \\
P_2 &= K_r \otimes I_s \otimes K_{bk} - K_N \\
P_3 &= I_{rs} \otimes K_{bk} - I_r \otimes K_{sbk} - K_r \otimes I_s \otimes K_{bk} + K_N = \\
&= I_{rs} \otimes K_{bk} - P_1 - P_2 - P_0 = P_* - P_1 - P_2 - P_0 \\
P_4 &= I_{rsb} \otimes K_k - I_{rs} \otimes K_{bk} = P_{**} - P_* \\
P_5 &= I_N - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = I_N - P_{**}
\end{aligned} \right\} \tag{3.21}$$

com

$$\begin{aligned}
r(P_0) &= 1, \quad r(P_1) = r-1, \quad r(P_2) = s-1 \\
r(P_3) &= rs-(r-1)-(s-1)-1 = (r-1)(s-1) \\
r(P_4) &= rsb - rs = rs(b-1) \\
r(P_5) &= N - rsb = rsb(k-1)
\end{aligned}$$

Para que $\Omega \in \mathfrak{F}$ tem-se que encontrar $c_i > 0$

tal que: $\Omega = \sum_{i=0}^5 c_i P_i$, através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_4 P_4 + c_5 P_5 &= \\
= c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 (P_* - P_1 - P_2 - P_0) + c_4 (P_{**} - P_*) + \\
c_5 (I_N - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4) &= c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \\
c_3 (P_* - P_0 - P_1 - P_2) + c_4 (P_{**} - P_*) + c_5 (I_N - P_{**}) &= \\
= (c_0 - c_3) P_0 + (c_1 - c_3) P_1 + (c_2 - c_3) P_2 + (c_3 - c_4) P_* + \\
+ (c_4 - c_5) P_{**} + c_5 I_N &= \Omega \quad \text{ou seja, tem-se o} \\
\text{sistema:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_4) \frac{1}{bk} + \\
+ (c_4 - c_5) \frac{1}{k} + c_5 &= \sigma^2 + \sigma_R^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_4) \frac{1}{bk} + \\
+ (c_4 - c_5) \frac{1}{k} &= \rho \sigma^2 + \sigma_R^2
\end{aligned}$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_4) \frac{1}{bk} = 0$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} = 0$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned}
c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 &= \sigma^2 [1 + (k-1)\rho] + k\sigma_R^2 \\
c_5 &= \sigma^2 [1 - \rho]
\end{aligned}$$

Considerando que os projetores ortogonais P_i para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ são matrizes simétricas, idempotentes, e que $\Omega = \sum_{i=0}^5 c_i P_i$, e sob as restrições paramétricas dadas em (3.18) e ainda por (3.4) e (3.9), tem-se o seguinte quadro de análise de variância:

Quadro 3.16. Análise de variância para o modelo (3.7) com interação e repetições, caso b..

C. V.	g. l.	S. Q.	E(Q. M)
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{KS}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	$c_2 + \frac{Kr}{s-1} \sum_j \beta_j^2$
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	$c_3 + \frac{K}{(r-1)(s-1)} \sum_{ij} (\alpha\beta)_{ij}^2$
Rep	$rs(b-1)$	$Y'P_4Y$	c_4
Res	$N-rsb$	$Y'P_5Y$	c_5
Total	N	$Y'Y$	

Agora os testes para as hipóteses principais podem ser feitos, pelos métodos usuais, em relação a "Repetição", sem comprometer as probabilidades de erros tipos I e II.

c. Procedimento Alternativo para o caso

3.3.2.b.2.

Esse caso envolve uma equicorrelação nas observações dentro dos níveis de um dos fatores e

independência com relação ao outro fator, e foi tratado em 3.3.3.a. para modelos sem interação. Agora para modelo com interação, o procedimento é o mesmo, considerando b repetições independentes entre si e também com relação aos erros do modelo, e de mesmo tamanho.

Inclui-se no modelo o fator "repetição" dentro do fator cujas observações são correlacionadas (digamos α), obtendo-se o modelo:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + R_{l(i)} + e_{ijkl} \quad \text{onde}$$

$i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$, $l = 1, 2, \dots, b$ e $k = 1, 2, \dots, k$ e $R_{l(i)}$ corresponde ao efeito da l -ésima repetição dentro do i -ésimo nível do fator α .

Então $R_{l(i)}$ e e_{ijkl} são variáveis aleatórias independentes com distribuições normais de médias nulas e matrizes de variâncias e covariâncias $\Omega_1 = \sigma^2 I_{R \times N}$ e Ω_2 , respectivamente, onde $N = rsbk$ e

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= I_r \otimes V_{sbk} = \sigma^2 I_r \otimes [\rho(sK_s \otimes I_b \otimes kK_k) + (1 - \rho)I_{sbk}] = \\ &= \sigma^2 [\rho I_r \otimes sK_s \otimes I_b \otimes kK_k + (1 - \rho)I_N] \end{aligned}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_{ijkl}, y_{i'j'l'k'}) &= \\ &= E[(y_{ijkl} - E(y_{ijkl}))(y_{i'j'l'k'} - E(y_{i'j'l'k'}))] = \\ &= E[(R_{l(i)} + e_{ijkl})(R_{l'(i')} + e_{i'j'l'k'})] = \\ &= E[R_{l(i)} R_{l'(i')}] + E[e_{ijkl} e_{i'j'l'k'}] = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sigma^2 + \sigma_R^2 & \text{se } i=i', j=j', l=l' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2 + \sigma_R^2 & \text{se } i=i', j=j', l=l' \text{ e } k \neq k' \\ \rho\sigma^2 + \sigma_R^2 & \text{se } i=i', j \neq j', l=l' \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

então $\Omega = v(\Omega_1, \Omega_2) =$

$$= I_r \otimes V_{sbk} + \sigma_R^2 [I_r \otimes sK_s \otimes I_b \otimes kK_k] =$$

$$= (\rho\sigma^2 + \sigma_R^2) [I_r \otimes sK_s \otimes I_b \otimes kK_k] + \sigma^2(1 - \rho) I_N$$

As somas de quadrados para os fatores desse modelo são as mesmas dadas por (3.20) em 3.3.3.b., com exceção das SQ(Repetição) e SQ(Resíduos) as quais são dadas por:

$$SQ(\text{Rep}) = Y'P_4 Y = \frac{1}{sk} \sum_{i,l} y_{i..l}^2 - \frac{1}{sbk} \sum_i y_{i...}^2$$

$$\text{onde } P_4 = I_r \otimes K_s \otimes I_b \otimes K_k - I_r \otimes K_{sbk} = P_{**} - I_r \otimes K_{sbk}$$

$$\text{com } r(P_4) = rb - r = r(b - 1)$$

$$SQ(\text{Resíduo}) = Y'P_5 Y$$

$$\text{onde } P_5 = I_N - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = I_N - (P_4 + P_*) =$$

$$= I_N - P_{**} - P_* + P_1 + P_0, \text{ onde } P_* \text{ é dado em (3.20)}$$

$$\text{com } r(P_5) = N - rb - rs + r = N - r(b + s - 1).$$

Para que $\Omega \in \mathcal{S}$ temos que encontrar $c_i > 0$ tal

que $\Omega = \sum_{i=0}^5 c_i P_i$, através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_4 P_4 + c_5 P_5 = \Omega \quad \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
c_5(I_N - P_{**} - P_* + P_1 + P_0) &= (c_0 - c_3 - c_4 + c_5) P_0 + \\
&+ (c_1 - c_3 - c_4 + c_5) P_1 + (c_2 - c_3) P_2 + (c_3 - c_5) P_* + \\
&+ (c_4 - c_5) P_{**} + c_5 I_N = \Omega
\end{aligned}$$

isto é:

$$\begin{aligned}
(c_0 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + \\
+ (c_3 - c_5) \frac{1}{bK} + (c_4 - c_5) \frac{1}{sK} + c_5 = \sigma_R^2 + \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c_0 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + \\
+ (c_3 - c_5) \frac{1}{bK} + (c_4 - c_5) \frac{1}{sK} = \sigma_R^2 + \rho\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c_0 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + \\
+ (c_3 - c_5) \frac{1}{bK} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c_0 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} + \\
+ (c_4 - c_5) \frac{1}{sK} = \sigma_R^2 + \rho\sigma^2
\end{aligned}$$

$$(c_0 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3 - c_4 + c_5) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} = 0$$

Existe uma combinação linear entre as equações: segunda, terceira, quarta e quinta, então podemos eliminar, sem perda de generalidade, a quarta equação, obtendo a

seguinte solução:

$$c_0 = c_1 = c_4 = \sigma^2 [1 + (sk - 1) \rho] + sk \sigma_R^2$$

$$c_2 = c_3 = c_5 = \sigma^2 [1 - \rho]$$

Considerando que os projetores ortogonais P_i para $i = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 são matrizes simétricas, idempotentes, e que $\Omega = \sum_{i=0}^5 c_i P_i$, e sob as restrições paramétricas dadas em (3.18) e ainda por (3.4) e (3.9) tem-se o seguinte quadro de análise de variância:

Quadro 3.17. Análise de variância para o modelo (3.7) com interação e repetição, caso c..

C. V.	g.l.	S. Q.	E(Q. M)
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{ks}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	$c_2 + \frac{kr}{s-1} \sum_j \beta_j^2$
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	$c_3 + \frac{k}{(r-1)(s-1)} \sum_{i,j} (\alpha\beta)_{ij}^2$
Rep	$r(b-1)$	$Y'P_4Y$	c_4
Res	$N-r(b+s-1)$	$Y'P_5Y$	c_5
Total	N	$Y'Y$	

Pode-se ver que os testes para as hipóteses principais podem ser feitos, pelos métodos usuais, sem o comprometimento das probabilidades de erros tipos I e II, sendo que a hipótese $H_0: \alpha_i = 0$ deve-se testá-la em relação a "Repetição" enquanto que para as hipóteses $H_0: \beta_j = 0$ e $H_0: \alpha\beta_{ij} = 0$ faz-se em relação ao "Resíduo".

3.4. MODELOS MISTOS COM DOIS FATORES

3.4.1. MODELOS COM INTERAÇÃO

Considera-se o modelo linear $Y = X\theta + e$,
caracterizado por:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ijk} \quad \text{para} \quad (3.22)$$

$i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$ e $k = 1, 2, \dots, k$ e $N = rsk$

onde μ é a média geral, α_i é fixo e β_j , $\alpha\beta_{ij}$ e e_{ijk} são variáveis aleatórias independentes, com distribuições normais de médias nulas e variâncias σ_β^2 , $\sigma_{\alpha\beta}^2$ e σ^2 respectivamente. Então $E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_i$ onde Y é o vetor de observações dado por (3.8)

a. Erros independentes

É usual considerar-se a estrutura de erros independentes, isto é a matriz de variâncias e covariâncias do vetor de erros e é dada por $\sigma^2 I_N$.

Assim para o modelo dado em (3.22) obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) &= E[(\beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ijk})(\beta_{j'} + \alpha\beta_{i'j'} + e_{i'j'k'})] = \\ &= E(\beta_j \beta_{j'}) + E(\alpha\beta_{ij} \alpha\beta_{i'j'}) + E(e_{ijk} e_{i'j'k'}). \end{aligned}$$

Sob as usuais restrições paramétricas $\sum_i \alpha_i = 0$ e $\sum_i \alpha\beta_{ij} = 0$ para todo j , acarretando, por causa dessa segunda restrição, uma covariância não nula para os efeitos α_{ij} e $\alpha_{i',j}$ (veja SCHEFFÉ (1959:266-269) ou SEARLE (1971:401-403)), isto é:

$$\text{var}(\sum_i \alpha\beta_{ij}) = \text{var}(0) = 0 \quad (\text{pela restrição}), \text{ mas}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\sum_i \alpha\beta_{ij}) &= \sum_i \text{var}(\alpha\beta_{ij}) + 2 \sum_{i < i'} \text{cov}(\alpha\beta_{ij}, \alpha\beta_{i'j}) = \\ &= r\sigma_{\alpha\beta}^2 + 2 \frac{r(r-1)}{2} c = 0 \quad \longrightarrow \\ c &= \text{cov}(\alpha\beta_{ij}, \alpha\beta_{i'j}) = \frac{-1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Então tem-se que } \text{cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) &= \\ = E(\beta_j \beta_{j'}) + E(\alpha\beta_{ij} \alpha\beta_{i'j'}) + E(e_{ijk} e_{i'j'k'}) &= \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sigma^2 + \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ \sigma_{\beta}^2 - \frac{1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i \neq i' \text{ e } j=j' \\ 0 & \text{em c.c.} \end{cases}$$

e a matriz de variâncias e covariâncias Ω do modelo pode ser escrita na forma:

$$\Omega = \sigma^2 I_N + \kappa \sigma_{\alpha\beta}^2 I_{rs} \otimes K_k + r \kappa \sigma_{\beta}^2 K_r \otimes I_s \otimes K_k$$

As somas de quadrados são dadas por:

$$SQ(\mu) = Y' P_0 Y \quad \text{com } P_0 = K_N$$

$$SQ(\alpha) = Y' P_1 Y \quad \text{com } P_1 = I_r \otimes K_{sk} - K_N$$

$$SQ(\beta) = Y' P_2 Y \quad \text{com } P_2 = K_r \otimes I_s \otimes K_k - K_N$$

$$\begin{aligned}
 SQ(\alpha\beta) &= Y'P_3Y \quad \text{com} \quad P_3 = I_{rs} \otimes K_k - P_0 - P_1 - P_2 \\
 SQRes &= Y'P_5Y \quad \text{com} \quad P_5 = I_N - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) = I_N - I_{rs} \otimes K_k
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

$$\text{com } r(P_0) = 1, \quad r(P_1) = r-1, \quad r(P_2) = s-2,$$

$$r(P_3) = (r-1)(s-1), \quad r(P_5) = rs(k-1) \quad \text{e} \quad r(I_N) = N$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como } \Omega = \mathcal{Y} = \{ \Omega : c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_5 P_5, \\
 c_i > 0 \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, 5 \},
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

$$\text{tem-se } c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_5 P_5 = \Omega \quad \text{ou seja}$$

$$(c_0 - c_3)P_0 + (c_1 - c_3)P_1 + (c_2 - c_3)P_2 + (c_3 - c_5)P_* + c_5 I_N = \Omega$$

onde $P_* = I_{rs} \otimes K_k$ e obtem-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{k} + c_5 = \sigma^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{k} = \sigma^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} = 0$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} = \sigma^2 - \frac{1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} = 0$$

(3.25)

com a solução

$$\begin{aligned}
 c_0 &= c_2 = \sigma^2 + rks\sigma_\beta^2 \\
 c_1 &= c_3 = \sigma^2 + \frac{rk}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 \\
 c_5 &= \sigma^2
 \end{aligned}$$

Portanto sob as restrições $\sum_i \alpha_i = \sum_{i,j} \alpha\beta_{ij} = 0$

apresenta-se o seguinte quadro de análise de variância:

Quadro 3.18. Análise de variância para o modelo (3.22)
caso a..

c.v.	g.l.	S.Q.	E(Q.M.)	H. Assoc.
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$	
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{SK}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$	$H_0^{(1)} : \alpha_i = 0$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	c_2	$H_0^{(2)} : \sigma_\beta^2 = 0$
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	c_3	$H_0^{(3)} : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$
Resíduo	$rs(k-1)$	$Y'P_5Y$	c_5	
Total	N	$Y'Y$		

Assim pode-se notar que os testes são exatos (como esperávamos) para as hipóteses principais, sendo que $H_0^{(1)} : \alpha_i = 0$ é testada em relação ao QM($\alpha\beta$) enquanto $H_0^{(2)} : \sigma_\beta^2$ e $H_0^{(3)} : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ são testadas em relação ao QM(Resíduo).

Isto é o que usualmente se faz, quando se tem a independência dos erros do modelo.

b. Erros não independentes

Os erros e_{ijk} aqui é que são correlacionados, e não os efeitos β_j ou $(\alpha\beta)_{ij}$ do modelo, e o são através de uma equicorrelação. Segundo SCHEFFÉ (1959-sec.8.1.) se esta correlação ocorre nos efeitos dos fatores e não satisfaz à

condição de simetria (i.é. equicorrelação da matriz de variâncias e covariâncias) do modelo, a hipótese $H_0: \alpha_i = 0$ não pode ser testada sem erro (não tem teste F exato) e para tal deve-se usar a estatística T^2 de Hotelling. Também ocorrem problemas com o poder do teste para a hipótese $H_0: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ pois sob a hipótese alternativa $H_1: \sigma_{\alpha\beta}^2 \neq 0$ a estatística $QM(\alpha\beta)/QM(\text{Resíduo})$ não tem distribuição F central ou não central. Não é o nosso caso.

Aqui também estudar-se-ão dois casos de equicorrelação dos erros, como antes.

b.1. Equicorrelação das observações na mesma casela

Agora o vetor de erros, para o modelo dado em (3.22), tem matriz de variâncias e covariâncias dada por:

$$\Omega_e = I_{rs} \otimes V \quad \text{onde}$$

$$V = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & . & . & . & \rho \\ \rho & 1 & . & . & . & \rho \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \rho & \rho & . & . & . & 1 \end{bmatrix}_k \quad \text{então tem-se}$$

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i'jk'}) = \begin{cases} \sigma^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ \sigma_\beta^2 - \frac{1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i \neq i' \text{ e } j=j' \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

e a matriz Ω de variâncias e covariâncias do modelo passa a ser dada por:

$$\Omega = \sigma^2 [I_{rs} \otimes \kappa \rho K_K + (1 - \rho) I_N] + \kappa (\sigma_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) I_{rs} \otimes K_K + r \kappa (\sigma_{\beta}^2 - \frac{1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) K_r \otimes I_s \otimes K_K ; \quad (3.26)$$

As somas de quadrados $Y P_i Y$ assim como as matrizes P_i para $i = 0, 1, 2, 3$ e 5 são dadas por (3.23).

Como $\Omega \in \mathcal{N}$, veja (3.24), então podemos encontrar os valores c_i ($i = 0, 1, 2, 3$ e 5) através de um sistema de equações lineares como temos feito até agora, ou então utilizando a expressão dada em (3.26) para Ω isto é:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sigma^2 [I_{rs} \otimes \kappa \rho K_K + (1 - \rho) I_N] + \frac{\kappa r}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 I_{rs} \otimes K_K + \\ &+ (r \kappa \sigma_{\beta}^2 - \frac{r \kappa}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) K_r \otimes I_s \otimes K_K = \sigma^2 (1 - \rho) I_N + \\ &+ (\kappa \rho \sigma^2 + \frac{\kappa r}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) I_{rs} \otimes K_K + (r \kappa \sigma_{\beta}^2 - \frac{\kappa r}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) \\ &K_r \otimes I_s \otimes K_K = \sigma^2 (1 - \rho) [P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_5] + \\ &+ (\kappa \rho \sigma^2 + \frac{\kappa r}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) [P_3 + P_0 + P_1 + P_2] + (r \kappa \sigma_{\beta}^2 - \frac{\kappa r}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) \\ &[P_0 + P_2] = (\sigma^2 [1 + (\kappa - 1) \rho] + r \kappa \sigma_{\beta}^2) P_0 + \\ &(\sigma^2 [1 + (\kappa - 1) \rho] + \frac{r \kappa}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) P_1 + \\ &+ (\sigma^2 [1 + (\kappa - 1) \rho] + r \kappa \sigma_{\beta}^2) P_2 + \\ &+ (\sigma^2 [1 + (\kappa - 1) \rho] + \frac{r \kappa}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2) P_3 + \\ &+ \sigma^2 (1 - \rho) P_5 = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_5 P_5 . \end{aligned}$$

logo tem-se:

$$\begin{aligned} c_0 &= c_2 = \sigma^2 [1 + (\kappa - 1) \rho] + r \kappa \sigma_{\beta}^2 \\ c_1 &= c_3 = \sigma^2 [1 + (\kappa - 1) \rho] + \frac{r \kappa}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 \\ c_5 &= \sigma^2 [1 - \rho] \quad \text{com} \quad \frac{-1}{\kappa-1} < \rho < 1 \end{aligned}$$

Assim o quadro de análise de variância é dado por:

Quadro 3.19. Análise de variância para o modelo (3.22),
caso b.1..

C. V.	g.l.	S. Q.	E. Q. M.
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{SK}{r-1} \sum \alpha_i^2$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	c_2
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	c_3
Resíduo	$rs(k-1)$	$Y'P_5Y$	c_5
Total	N	$Y'Y$	

Pode-se notar que o único teste que pode ser feito exatamente é o da hipótese $H_0^{(1)}: \alpha_i = 0$ vs $H_1^{(1)}: \alpha_i \neq 0$ para algum i . Os demais testes para as hipóteses principais, não podem ser feitos de maneira usual sem que haja alterações das probabilidades dos erros tipos I e II.

Para as hipóteses $H_0^{(2)}: \sigma_\beta^2 = 0$ e $H_0^{(3)}: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ tem-se que o teste usual leva nos às seguintes probabilidades:

$$P(\text{erro tipo I}) = P[F_{i5}(c_i, c_5) \geq \frac{c_5}{c_i} F_\alpha(r(P_i); rs(k-1))] \geq \alpha$$

$$\text{isto é } P(\text{erro tipo I}) \begin{cases} > \alpha & \text{se } 0 < \rho < 1 \\ = \alpha & \text{se } \rho = 0 \\ < \alpha & \text{se } \frac{-1}{k-1} < \rho < 0 \end{cases}$$

para $i = 2, 3$

onde α é o nível de significância supostamente correto usado pelo pesquisador.

$$\text{com } \begin{cases} \frac{c_5}{c_2} = \frac{1 - \rho}{1 + (k-1)\rho + rk \left(\frac{\sigma_\beta^2}{\sigma^2} \right)} & \text{para } i = 2, \text{ e} \\ \frac{c_5}{c_3} = \frac{1 - \rho}{1 + (k-1)\rho + \frac{rk}{r-1} \left(\frac{\sigma_\beta^2}{\sigma^2} \right)} & \text{para } i = 3, \end{cases} \quad (3.27)$$

pois usualmente essas hipóteses são testadas contra o resíduo.

Então sob $H_0^{(i)} : \sigma_\beta^2 = 0$ p/ $i = 2$ e $\sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ p/ $i = 3$, tem-se $\frac{c_5}{c_2} = \frac{c_5}{c_3} = \frac{1 - \rho}{1 + (k-1)\rho}$, e as tabelas

para as P(erro tipo I) ao nível nominal $\alpha = 0.05$, são as mesmas dadas pela TABELA A.9. do apêndice para $H^{(2)}$ e $H^{(3)}$.

Na verdade como $c_i > 0$ para $i = 0, 1, 2, 3$ e 5

tem-se $\rho > \max \frac{1}{k-1} \left\{ -(1 + rk \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma^2}) ; -(1 + \frac{rk}{r-1} \frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2}) \right\}$

mas em geral os valores $\frac{\sigma_\beta^2}{\sigma^2}$ e $\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2}$ não são

conhecidos, então toma-se $-\frac{1}{k-1} < \rho < 1$, afim de se assegurar a variação de ρ .

Quanto às probabilidades do erro tipo II tem-se que sob $H_1^{(i)}$ para $i = 2, 3$:

$$P(\text{erro tipo II}) = P[F_{i5}(c_i, c_5) < \frac{c_5}{c_i} F_\alpha(r(P_i); rs(k-1))]$$

onde $\frac{c_5}{c_i}$ são dados por (3.27) para $i = 2$ e 3.

Essas probabilidades podem facilmente ser

encontradas, analogamente à TABELA A.2. do apêndice

atribuindo-se valores para $\frac{\sigma_{\beta}^2}{\sigma^2}$ e para $\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2}$.

b.2. Equicorrelação das observações dentro dos níveis do fator "α"

Neste caso o vetor de erros, para o modelo dado em (3.22), tem matriz de variâncias e covariâncias dada por $\Omega_e = I_r \otimes V$ onde

$$V = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & . & . & . & \rho \\ \rho & 1 & . & . & . & \rho \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \rho & \rho & . & . & . & 1 \end{bmatrix}_{SK}$$

Obtendo-se

$$\text{cov}(y_{ijk}, y_{i'jk'}) = \begin{cases} \sigma^2 + \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k=k' \\ \rho\sigma^2 + \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } k \neq k' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } i=i' \text{ e } j \neq j' \\ \sigma_{\beta}^2 - \frac{1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i \neq i' \text{ e } j=j' \\ 0 & \text{em outros casos} \end{cases}$$

e a matriz Ω de variâncias e covariâncias do modelo passa a ser dada por:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \sigma^2 (I_r \otimes s\kappa\rho K_{s\kappa} + (1-\rho)I_N) + \kappa(\sigma_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2)I_{rs} \otimes K_k + \\
&+ r\kappa(\sigma_{\beta}^2 - \frac{1}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2)K_r \otimes I_s \otimes K_k = \sigma^2(1-\rho)I_N + \\
&+ s\kappa\rho\sigma^2 I_r \otimes K_{s\kappa} + \frac{r\kappa}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2 I_{rs} \otimes K_k + \\
&+ (r\kappa\sigma_{\beta}^2 - \frac{r\kappa}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2)K_k \otimes I_s \otimes K_k = \sigma^2(1-\rho)[P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_5] + \\
&+ s\kappa\rho\sigma^2[P_0 + P_1] + \frac{r\kappa}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2[P_0 + P_1 + P_2 + P_3] + \\
&+ (r\kappa\sigma_{\beta}^2 - \frac{r\kappa}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2)[P_0 + P_2] = \\
&= (\sigma^2[1+(s\kappa-1)\rho] + r\kappa\sigma_{\beta}^2)P_0 + (\sigma^2[1+(s\kappa-1)\rho] + \frac{r\kappa}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2)P_1 + \\
&+ (\sigma^2[1-\rho] + r\kappa\sigma_{\beta}^2)P_2 + (\sigma^2[1-\rho] + \frac{r\kappa}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2)P_3 + \sigma^2[1-\rho]P_5 = \\
&= c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_5 P_5
\end{aligned}$$

logo tem-se:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \sigma^2[1 + (s\kappa - 1)\rho] + r\kappa\sigma_{\beta}^2 \\
c_1 &= \sigma^2[1 + (s\kappa - 1)\rho] + \frac{r\kappa}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2 \\
c_2 &= \sigma^2[1 - \rho] + r\kappa\sigma_{\beta}^2 \\
c_3 &= \sigma^2[1 - \rho] + \frac{r\kappa}{r-1}\sigma_{\alpha\beta}^2 \\
c_5 &= \sigma^2[1 - \rho]
\end{aligned}$$

e o quadro de análise de variância será dado pelo:

Quadro 3.20. Análise de variância para o modelo (3.22), caso b.2..

c.v.	g.l.	S.Q.	E(Q.M.)	H. Associadas
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$	
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{s\kappa}{r-1} \sum_i \alpha_i^2$	$H_o^{(1)}: \alpha_i = 0$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	c_2	$H_o^{(2)}: \sigma_{\beta}^2 = 0$
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	c_3	$H_o^{(3)}: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$
Resíduo	$rs(k-1)$	$Y'P_5Y$	c_5	
Total	N	$Y'Y$		

Pode-se notar que os testes para as hipóteses principais $H_0^{(2)} : \sigma_\beta^2 = 0$ e $H_0^{(3)} : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ podem ser feitos pelos métodos usuais, sem o comprometimento das probabilidades dos erros tipo I.

Para a hipótese $H_0 : \alpha_i = 0$ vs $H_1 : \alpha_i \neq 0$ para algum $i=1,2,\dots,r$ isso não ocorre e a P(erro tipo I) é dada por :

$$P \left[F_{13}(c_1, c_2) \geq \frac{(1-\rho) + \frac{rk}{r-1} \left[\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2} \right]}{[1+(sk-1)\rho] + \frac{rk}{r-1} \left[\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2} \right]} F_{\alpha}((r-1), rs(k-1)) \right] \stackrel{>}{<} \alpha$$

uma vez que essa hipótese é usualmente testada contra a interação, isto é

$$P(\text{erro tipo I}) \begin{cases} > \alpha & \text{se } \frac{-1}{sk-1} < \rho < 0 \\ = \alpha & \text{se } \rho = 0 \\ < \alpha & \text{se } \rho > 0 \end{cases}$$

Para obter-se a probabilidade acima é preciso que os valores de σ^2 e $\sigma_{\alpha\beta}^2$, além de ρ , sejam conhecidos. Assim para construir-se uma tabela dessas probabilidades pode-se atribuir valores conhecidos à esses parâmetros, ou melhor para a razão $\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2} \right)$.

Quanto as probabilidades dos erros tipo II, tem-se que sob $H_1^{(1)} : \alpha_i \neq 0$ para algum $i = 1,2,\dots,r$, geralmente $\lambda_1 = \frac{1}{2c_1} E(Y') P_1 E(Y) \neq 0$, e assim

$$P(\text{erro tipo II}) = P(F_{13} [c_1, c_3, \lambda_1, 0] < \frac{c_a}{c_1} F_{\alpha}(r-1, rs(k-1)))$$

$$\text{onde } \frac{c_a}{c_1} = \left[(1-\rho) + \frac{rk}{r-1} \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2} \right) \right] / \left[(1+(sk-1)\rho) + \frac{rk}{r-1} \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2} \right) \right]$$

e devem ser calculadas, dando-se valores para $\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2}$, ρ e λ_1

Observa-se que se $\sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ então as probabilidades dos erros tipo I são as mesmas dadas na TABELA A.11. do apêndice, e dos erros tipo II são dadas pela TABELA A.12. do apêndice, para os devidos valores de r , s , k , ρ e λ .

3.4.2. PROCEDIMENTOS ALTERNATIVOS

Seja o caso 3.4.1.b.1. de equicorrelação das observações na mesma casela com b repetições independentes e de mesmo tamanho do delineamento. Então o modelo (3.22) passa a ser dado por:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + R_{l(i,j)} + e_{ijkl} \quad \text{onde}$$

$R_{l(i,j)} \sim N(0; \sigma_R^2)$ e são independentes das demais distribuições envolvidas no modelo, e corresponde ao efeito de repetição dentro da casela (i,j) , para $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$, $l = 1, 2, \dots, b$ e $k = 1, 2, \dots, k$, $N = rsbk$.

Tem-se que a covariância entre duas observações quaisquer é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \text{cov}(y_{ijkl}, y_{i'j'l'k'}) = \\
 &= E[(\beta_j + \alpha\beta_{ij} + R_{l(ij)} + e_{ijkl})(\beta_{j'} + \alpha\beta_{i'j'} + R_{l'(i'j')} + e_{i'j'l'k'})] \\
 &= E(\beta_j \beta_{j'}) + E(\alpha\beta_{ij} \alpha\beta_{i'j'}) + E(R_{l(ij)} R_{l'(i'j')}) + \\
 &+ E(e_{ijkl} e_{i'j'l'k'}) = \\
 &= \begin{cases} \sigma^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_R^2 & \text{se } i=i', j=j', l=l' \text{ e } k=k', \\ \rho\sigma^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_R^2 & \text{se } i=i', j=j', l=l' \text{ e } k \neq k', \\ \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } l \neq l', \\ 0 & \text{se } i=i', j \neq j', (l=l' \text{ ou } l \neq l'), \\ \sigma_\beta^2 - \frac{1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 & \text{se } i \neq i' \text{ e } j=j', \\ 0 & \text{em c.c.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

As somas de quadrados são dadas por:

$$\begin{aligned}
 SQ(\mu) &= Y'P_0Y = \frac{1}{N} y^2 \dots \quad \text{com } P_0 = K_N \\
 SQ(\alpha) &= Y'P_1Y = \frac{1}{sbk} \sum_i y_{i...}^2 - \frac{1}{N} y^2 \dots \quad \text{com } P_1 = I_r \otimes K_{sbk} - K_N \\
 SQ(\beta) &= Y'P_2Y = \frac{1}{rbk} \sum_j y_{.j..}^2 - \frac{1}{N} y^2 \dots \quad \text{com } P_2 = K_r \otimes I_{bk} - K_N \\
 SQ(\alpha\beta) &= Y'P_3Y = \frac{1}{bk} \sum_{tj} y_{tj..}^2 - \frac{1}{sbk} \sum_t y_{t...}^2 - \frac{1}{rbk} \sum_j y_{.j..}^2 + \\
 &+ \frac{1}{N} y^2 \dots \quad \text{com } P_3 = I_{rs} \otimes K_{bk} - P_1 - P_2 - P_0 = P_* - P_0 - P_1 - P_2 \\
 SQ(\text{Repetição}) &= Y'P_4Y = \frac{1}{k} \sum_{tjl} y_{tj..}^2 - \frac{1}{bk} \sum_{tj} y_{tj..}^2 \quad \text{com} \\
 &P_4 = I_{rsb} \otimes K_k - I_{rs} \otimes K_{bk}
 \end{aligned}$$

$$SQ_{\text{Residuo}} = Y'P_5Y \quad \text{com} \quad P_5 = I_N - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4).$$

$$\text{Sendo} \quad \Omega \in \mathfrak{Y} \quad \longrightarrow \quad \Omega = \sum_{i=0}^5 c_i P_i \quad \text{ou seja}$$

$$\Omega = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_4 P_4 + c_5 P_5$$

$$\Omega = (c_0 - c_3)P_0 + (c_1 - c_3)P_1 + (c_2 - c_3)P_2 + (c_3 - c_5)P_3 + \\ + (c_4 - c_5)P_4 + c_5 I_N$$

obtendo-se o sistema de equações lineares:

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{bk} + \\ + (c_4 - c_5) \frac{b-1}{bk} + c_5 = \sigma^2 + \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_R^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{bk} + \\ + (c_4 - c_5) \frac{b-1}{bk} + = \rho\sigma^2 + \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_R^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + (c_3 - c_5) \frac{1}{bk} + \\ + (c_4 - c_5) \frac{-1}{bk} = \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{r-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} + = 0$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{s-1}{N} + = \sigma_{\beta}^2 - \frac{1}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$(c_0 - c_3) \frac{1}{N} + (c_1 - c_3) \frac{-1}{N} + (c_2 - c_3) \frac{-1}{N} + = 0$$

cuja solução é :

$$c_1 = c_3 = \sigma^2 [1 + (\kappa - 1)\rho] + \frac{rbk}{r-1} \sigma_{\alpha\beta}^2 + \kappa\sigma_R^2$$

$$c_2 = c_0 = \sigma^2 [1 + (\kappa - 1)\rho] + rbk \sigma_{\beta}^2 + \kappa\sigma_R^2$$

$$c_4 = \sigma^2 [1 + (\kappa - 1)\rho] + \kappa\sigma_R^2$$

$$c_5 = \sigma^2 [1 - \rho]$$

Sob as restrições paramétricas $\sum_t \alpha_t = \sum_t \alpha\beta_{tj} = 0$, tem-se o seguinte quadro de análise variância:

Quadro 3.21. Análise de variância para o modelo (3.22) com repetições, caso 3.4.2.

c.v.	g.l.	S.Q	E(Q.M.)	H. Associadas
μ	1	$Y'P_0Y$	$c_0 + N\mu^2$	
α	$r-1$	$Y'P_1Y$	$c_1 + \frac{SK}{r-1} \sum_t \alpha_t^2$	$H_0^{(1)}: \alpha_t = 0$
β	$s-1$	$Y'P_2Y$	c_2	$H_0^{(2)}: \sigma_\beta^2 = 0$
$\alpha\beta$	$(r-1)(s-1)$	$Y'P_3Y$	c_3	$H_0^{(3)}: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$
Rep.	$rs(b-1)$	$Y'P_4Y$	c_4	$H_0^{(4)}: \sigma_R^2 = 0$
Resíduo	$N-rsb$	$Y'P_5Y$	c_5	
Total	N	$Y'Y$		

Então pode-se ver que os testes para as hipóteses principais $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ e $H^{(3)}$, podem ser feitos pelos métodos usuais, sem o comprometimento do nível de significância pré-fixado, isto é: para $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ e $H^{(3)}$ utiliza-se respectivamente as estatísticas: $QM(\alpha)/QM(\alpha\beta)$, $QM(\beta)/QM(\text{Rep.})$ e $QM(\alpha\beta)/QM(\text{Rep.})$. Mas para $H^{(4)}$ não se tem teste exato, segundo essa metodologia.

Para o caso 3.4.1.b.2. de equicorrelação das observações dentro dos níveis do fator " α ", não se obtém resultados satisfatórios com a utilização de repetições do experimento, pois a hipótese em que se tem o interesse de eliminar o viés " $H^{(4)}$ ", é a única que ainda permanece

com viés no novo modelo, isto é: de nada adianta planejar o experimento com repetições. Portanto houve-se por bem não discutir aqui os resultados obtidos com o novo modelo.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como principal resultado desse trabalho, destacam-se as tabelas publicadas no apêndice e que mostram os vieses nas probabilidades dos erros tipos I e II, para os vários modelos aqui considerados e segundo os tipos de equicorrelação. São 14 tabelas que se subdividem em 28, para os casos aqui tratados. Cada tabela fornece as probabilidades dos erros para 7 valores de " ρ ", de modo que a matriz de variâncias e covariâncias seja positiva definida, segundo os vários valores de r, s , e κ . No caso das probabilidades dos erros tipo II, foram considerados três valores para o parâmetro de não centralidade λ , a saber $\lambda = 0$, $\lambda = 5$ e $\lambda = 20$. Para esses valores de ρ, r, s, κ , e λ (ou próximo destes), o pesquisador poderá avaliar o nível de significância e o poder de seus testes, caso se utilize dos testes F da análise de variância univariada usual (isto é, para erros independentes), ao nível nominal de significância $\alpha = 0,05$.

Para cada modelo e para cada caso de equicorrelação, mostram-se quais hipóteses apresentam viés nas suas probabilidades de erro e também, quando é possível, como a inclusão de repetições no modelo nos leva a testes exatos para as hipóteses principais.

Por todo o trabalho, destaca-se também a metodologia enfocada na construção da análise de variância, segundo a classe $\mathfrak{J}$ de matrizes de variâncias e covariâncias.

Não se pode deixar de citar aqui a maneira pela qual foram obtidas as probabilidades dos erros tipo II, uma vez que não se tinha até o momento informações de fontes geradoras de tais probabilidades, pois as tabelas com base nas probabilidades de TANG (1938), ou mesmo os cartões gráficos de PEARSON e HARTLEY (1951), ou de FOX (1956) para o poder do teste F, não resolviam nosso problema.

Pretendeu-se que os resultados desse trabalho tivessem início com o primeiro caso de equicorrelação aqui tratado, pela metodologia empregada na construção da análise de variância, pelos métodos alternativos propostos, pelos métodos utilizados nos cálculos das probabilidades dos erros tipos I e II e finalmente pelas tabelas que estão descritas no apêndice.

A classe $\mathfrak{J}$ de matrizes de variâncias e covariâncias, considerada para todos os modelos, permite a construção da análise de variância utilizando matrizes, com certa facilidade, para a maioria dos planejamentos mais

usuais. Com a variação dos coeficientes c_i ($c_i > 0$), pode-se tomar matrizes bem gerais de variâncias e covariâncias, construir a análise de variância e efetuar os testes F de forma exata, quando os coeficientes c_i 's são todos conhecidos, e em algumas situações mesmo, sendo parcialmente desconhecidos.

Procurou-se envolver no trabalho alguns modelos lineares, julgados ser bastante usuais nas aplicações estatísticas. Além disso, queremos crer que outros modelos, também muito usados como os de blocos aleatorizados, blocos incompletos, quadrados latinos e outros, possam ser abordados por metodologia análoga a que aqui se apresenta.

O caso de modelos com um fator fixo e balanceado foi tratado por SCARIANO e DAVENPORT (1987) e por PERES (1985), portanto não foi tratado no capítulo 3. Procedeu-se a uma generalização para o caso não balanceado. Como se pode ver, para planejamentos não balanceados, existem algumas dificuldades na forma de escrever as matrizes devidas às somas de quadrados dos parâmetros, pois as mesmas envolvem, além do produto de Kronecher, as somas diretas; assim como na resolução de sistemas lineares, cuja finalidade é encontrar c_i tal que $\Omega \in \mathfrak{S}$.

O caso de equicorrelação tratado no item 3.2.2. pode ser visto da seguinte forma: se o experimento é balanceado, então a equicorrelação é a usual, isto é, a matriz Ω é uma matriz de blocos diagonal uniforme, e em

decorrência do desbalanceamento, Ω sofre uma perturbação nos blocos diagonais, onde as variâncias e covariâncias dos blocos são perturbadas por um fator de proporcionalidade que depende dos tamanhos amostrais.

Para modelos com dois fatores, estudou-se apenas o caso balanceado, pois, além das dificuldades de se trabalhar com modelos desbalanceados, não podemos construir a análise de variância da forma usual, uma vez que ela depende das várias formas de partição da soma de quadrados, podendo não nos levar a testes F exatos, mesmo quando os erros não são correlacionados, veja MILLER (1986 - cap.4).

Pode-se notar que, para cada modelo, foi primeiramente estudado o caso de não independência dos erros, a fim de que se possa notar as diferenças que devem ocorrer por ocasião da considerada correlação. Inicialmente foram considerados modelos com dois fatores fixos sem interação, permitindo dois casos de equicorrelação: somente dentro de caselas (quando $k > 1$) e dentro dos níveis de um dos fatores. Se $k = 1$, então $\rho = 0$ e a análise é feita de maneira usual para o primeiro caso, e para o segundo caso, se $k = 1$, o experimento pode ser visto como um experimento com dois fatores onde um deles corresponde a repetições das observações que são equicorrelacionadas.

Foram estudados a seguir os experimentos com dois fatores fixos com interação ($k > 1$), permitindo três casos de equicorrelação: somente dentro de caselas, dentro dos níveis de um dos fatores, e ainda um caso mais geral,

onde se permite as correlações entre observações dentro de caselas, por um valor " ρ_1 " e entre observações dentro do mesmo nível de um dos fatores, por " ρ_2 ". Para este terceiro caso, pode-se verificar que, quando $\rho_1 = \rho_2$, este caso reduz-se ao segundo caso, e se $\rho_2 = 0$, reduz-se ao primeiro caso, ambos aqui tratados.

A seguir foram estudados os modelos mistos com interação e balanceados. Como foram consideradas as restrições paramétricas usuais, foram também consideradas as covariâncias entre os efeitos de dois tratamentos devido à interação e em níveis diferentes, o que não alterou em muito as regras da análise de variância pretendida. Foram tratados dois casos de equicorrelação: somente dentro de caselas e dentro dos níveis do fator fixo.

Verificou-se que em alguns casos de equicorrelação, nem todas as hipóteses apresentam viés nas probabilidades dos erros tipos I e II, como por exemplo o caso (3.3.1.b.2.) para modelos com dois fatores fixos sem interação e equicorrelação entre observações dentro de cada nível do fator α , e independência das observações em níveis diferentes. Neste caso, a hipótese $H^{(2)}$, isto é, $H_0: \beta_j = 0$ vs $H_1: \beta_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, \dots, s$, pode ser testada sem erro pelos métodos usuais de análise de variância. Nos modelos com interação, ocorreu fato semelhante para esse mesmo caso de equicorrelação, sendo que além de $H^{(2)}$, tem-se que $H^{(3)}$ também pode ser testada sem erro pelos métodos usuais da análise de variância.

Exceto esses casos citados, todos os demais testes F usuais da análise de variância, para as demais hipóteses, apresentaram vieses quanto às probabilidades dos erros tipos I e II, sob a presença de correlação dos erros do modelo, com dois fatores fixos.

Nos modelos mistos notou-se que, para o primeiro caso de equicorrelação (3.4.1.b.1.), a hipótese $H^{(1)}$ para o fator fixo pode ser testada sem o comprometimento das probabilidades dos erros tipos I e II e para o segundo caso (3.4.1.b.2.), isso acontece para $H^{(2)}$ e $H^{(3)}$, isto é, só há o comprometimento das probabilidades dos erros para a hipótese $H^{(4)}$.

PERES (1985), quando mostra a influência das correlações na análise de variância com um fator fixo e balanceado, propõe também uma solução alternativa para superar esse problema, através de repetições experimentais que acarretam uma modificação no modelo em questão, com a inserção do fator repetição (aleatório) a esse modelo. Assim, o autor resolve seu problema, sem que haja necessidade de conhecer o valor da correlação em questão. É natural que nem sempre o pesquisador tenha disponibilidade de planejar seu experimento com repetições. Em outros casos, pode ocorrer que, só depois de realizar o experimento, o pesquisador depare com a presença de correlações nos seus dados, e se não houver jeito de dividir seu dados de forma a considerá-los como repetições independentes, então ele deve procurar resolver seu problema de outra forma que não essa.

Caso o experimentador conheça o valor da correlação em questão, então ele pode fazer uso da teoria que transforma um modelo linear geral de Gauss-Markov para um modelo ordinário, ou equivalentemente utilizar um procedimento análogo àquele dado por (3.2.1.c.1.).

Neste trabalho, buscou-se um procedimento alternativo, na mesma linha de PERES (1985), para todos os modelos e casos de equicorrelação aqui abordados. Geralmente, o fator repetição inserido no modelo é aleatório e hierárquico a um dos fatores em questão, ou a interação, e com distribuição normal independente da distribuição dos erros e dos demais fatores (no caso de modelos mistos ou aleatórios). Nesse contexto, deve-se cuidar para que a inclusão do fator repetição não comprometa sua correspondente matriz responsável pela soma de quadrados, que deve ser projetor ortogonal, assim como as demais matrizes das outras somas de quadrados envolvidas. Deve-se determinar, também, a matriz de variâncias e covariâncias do atual modelo, de modo que esta pertença à classe $\mathcal{S}$ ou verificar se dessa forma pode-se montar um sistema de equações linearmente independentes que nos permite encontrar os valores de c_i e, finalmente, verificar se a nova análise de variância (univariada) permite todos os testes F exatos para as hipóteses principais. Caso algum desses passos não esteja satisfeito, pode-se tentar novamente com a inclusão do fator repetição, de forma diferente. Para alguns modelos e casos de equicorrelação,

não foi possível a solução alternativa e portanto eles não constam deste trabalho.

Para todos os casos pode-se notar que, mesmo para baixas correlações, o viés já é comprometedor e aumenta à medida que essas correlações aumentam.

No modelo aleatório com um fator, aqui tratado no parágrafo 3.2.1., pode-se notar que na TABELA A.1. do apêndice, para probabilidades dos erros tipo I, à medida que os tamanhos amostrais crescem assim como o valor de ρ , o viés aumenta no sentido positivo para $\rho > 0$ e negativo para $\rho < 0$. Nota-se ainda que para correlações positivas esse viés é maior, ou seja, o caso se torna mais grave. Quanto à TABELA A.2., que fornece as probabilidades dos erros tipo II, verifica-se que o viés ocorre no sentido contrário ao viés da TABELA A.1., e que para pequenas correlações esse viés é praticamente o mesmo para $\rho > 0$ e $\rho < 0$, mas, conforme ρ aumenta, torna-se maior para $\rho > 0$. Aqui também nota-se que o problema se agrava à medida que os tamanhos amostrais aumentam, assim como o número de níveis dos fatores. Na TABELA A.2. toma-se $(\sigma_{\alpha}^2 / \sigma_e^2) = 1$ como hipótese alternativa, isto é $\sigma_{\alpha}^2 = \sigma_e^2$, e de uma rápida análise da construção dessas probabilidades pode-se notar que esse viés tende a aumentar se $\sigma_{\alpha}^2 < \sigma_e^2$ e a diminuir se $\sigma_{\alpha}^2 > \sigma_e^2$.

No modelo de efeitos fixos e não balanceado, aqui tratado, pode-se ver que as probabilidades dos erros tipos I e II não dependem diretamente do desbalanceamento,

mas se esse desbalanceamento for muito acentuado, e como a matriz de variâncias e covariâncias deve ser positiva definida, o valor de " ρ " pode extrapolar o intervalo real $[-1, 1]$, invalidando assim a estrutura aqui imposta. Pode-se ver que o viés aumenta rapidamente, à medida que o número de níveis do fator aumenta, mantendo-se o mesmo número total de observações e mesma correlação ρ . Acontece o mesmo se mantivermos fixo o número de níveis do fator e de ρ e aumentar o número total de observações. Aqui também ocorre que para $\rho > 0$, o viés é maior do que para $\rho < 0$, nos dois tipos de erros. Para as probabilidades dos erros tipo II, ainda observa-se que conforme o parâmetro de não centralidade λ aumenta, as probabilidades diminuem. Isto ocorre pelo maior achatamento da curva F não central, quanto maior o seu parâmetro de não centralidade.

No modelo com dois fatores fixos sem interação tem-se dois casos de equicorrelação. O primeiro (caso 3.3.1.b.1.), cujas probabilidades são dadas pelas TABELAS A.5. e A.6. do apêndice, para $\rho \geq 0$, pois para esse caso não podemos ter $\rho < 0$. Nota-se que as probabilidades do erro tipo I crescem rapidamente para a unidade, ao contrário das probabilidades do erro tipo II. O viés aumenta com o número de observações dentro de caselas, assim como para o número de níveis dentro do fator, correspondente à hipótese de interesse. Quando esse aumento do número de níveis ocorre no outro fator e não naquele da hipótese de

interesse, o viés é menor. Podemos notar que para $\lambda = 20$ as probabilidades dos erros tipo II são muito pequenas quando comparadas com as probabilidades para os casos em que $\lambda = 5$. Isto indica que o achatamento da curva F não central, para esse modelo, é mais acentuado do que para o modelo de um fator fixo. Como no segundo caso (3.3.1.b.2.), só ocorre viés nas probabilidades dos erros para $H^{(1)}$, e mesmo assim, com valores iguais àqueles do caso (3.3.1.b.1.) segundo os mesmos ρ 's, as observações são análogas, salvo que, aqui permite-se que ρ assuma valores negativos, (num pequeno intervalo).

Para modelos com dois fatores fixos e interação, foram abordados 3 casos de equicorrelação, a saber: caso (3.3.2.b.1.), que supõe equicorrelação somente dentro de caselas; caso (3.3.2.b.2.), que supõe equicorrelação entre as observações no mesmo nível de um dos fatores; e o caso (3.3.2.b.3.), que engloba os dois casos anteriores, isto é, as observações dentro da mesma casela são equicorrelacionadas por ρ_1 e fora das caselas, mas no mesmo nível de um dos fatores, são equicorrelacionadas por ρ_2 .

No caso (3.3.2.b.1.), nota-se que, mesmo para pequenos valores de ρ , o viés nas probabilidades é considerável, sendo que à medida em que os tamanhos amostrais aumentam assim como os valores de ρ , o viés das probabilidades dos erros tipo I também crescem, e crescem mais quando ρ tende para o valor 1. Para os mesmos valores

de r , s e k , o viés é o mesmo para $H^{(1)}$ e $H^{(2)}$ e é maior para $H^{(3)}$. Para as probabilidades dos erros tipo II, além das observações relatadas, pode-se ver que para $\lambda = 5$ e $\lambda = 20$ o viés é maior para valores negativos de ρ e próximos de zero; e com o crescimento dos tamanhos amostrais assim como de ρ , essa situação tende a inverter-se. Nota-se ainda que quando λ aumenta, a probabilidade do erro tipo II, em si, diminui, mas o viés aumenta e isto se agrava com o aumento de ρ e dos tamanhos amostrais.

Para o caso (3.3.2.b.2.) temos viés somente na hipótese $H^{(1)}$, mas o intervalo permitido para ρ é menor à esquerda. Novamente observa-se que, para valores positivos de ρ , o viés é maior para a probabilidade dos erros tipo I (TABELA A.11), e menor para as probabilidades dos erros tipo II (TABELA A.12).

Neste caso, não fica claro que, conforme o aumento de λ , se verifica o crescimento do viés das probabilidades.

Para o caso (3.3.2.b.3.) considera-se três valores de ρ_2 , a saber, $\rho_2 = 0.1$, $\rho_2 = 0.3$ e $\rho_2 = 0.5$, com sete valores de ρ_1 para cada valor de ρ_2 . Os valores de ρ_1 não são os mesmos para cada ρ_2 , pois dependem do valor de ρ_2 , isso no cálculo do viés das probabilidades do erro tipo I; e para as probabilidades do erro tipo II considerou-se $\rho_2 = 0.3$.

Nota-se na TABELA A.13. que, mantendo-se fixo o valor de ρ_2 , o viés das probabilidades dos erros tipos I

tendem para 1, à medida em que ou ρ_1 ou os tamanhos amostrais crescem.

Por outro lado, mantendo-se fixo o valor de ρ_1 e fazendo-se ρ_2 crescer, não se caracteriza um crescimento dessas probabilidades. Confrontando as TABELAS A.9. e A.13. do apêndice, dos casos (3.3.2.b.1.) e (3.3.2.b.3.), respectivamente, observa-se que o viés é maior para o teste de $H^{(1)}$, e menor para os testes de $H^{(2)}$ e $H^{(3)}$, sob a presença da correlação $\rho_2 > 0$.

O comportamento das probabilidades da TABELA A.14. para $\lambda = 5$ e $\lambda = 20$ é semelhante ao da TABELA A.10., no sentido de que as probabilidades decrescem rapidamente para zero, quando ou ρ_1 ou os tamanhos amostrais crescem, assim como crescem para a unidade quando ρ_1 decresce. Nota-se que a presença da correlação ρ_2 modifica consideravelmente as probabilidades dos erros tipo II, cuja diferença é menor para grandes valores de ρ_1 . Ainda nas tabelas das probabilidades dos erros tipo II, para $\lambda \neq 0$, pode-se notar grandes diferenças desses valores da hipótese $H^{(1)}$ em relação às hipóteses $H^{(2)}$ e $H^{(3)}$, no sentido de que tais probabilidades para $H^{(1)}$ são bem menores que para $H^{(2)}$ e $H^{(3)}$, amenizando tal situação para grandes valores de ρ_1 .

De uma análise geral deste trabalho pode-se observar que essas Tabelas poderiam ser produzidas para casos mais gerais de correlações e também segundo o modelo, desde que a matriz Ω seja tal que $\Omega \in \mathfrak{F}$.

5. CONCLUSÕES

Considerando-se os objetivos deste trabalho, e com base nos tópicos desenvolvidos e nas tabelas aqui obtidas para esses modelos, pode-se concluir que:

5.1) A presença de correlações, ainda que pequenas, podem comprometer seriamente os testes F da análise de variância usual, ou parte deles, no que diz respeito ao nível de significância e poder dos testes.

5.2) Pode-se observar pelos resultados obtidos que, nestes casos de modelos com distribuições multinormais, quanto maior o tamanho amostral ou número de níveis dos fatores, maior será o viés nas probabilidades dos erros tipos I e II.

5.3) Os testes F da análise de variância usual, para as hipóteses principais, não são igualmente afetados pelas correlações. Dependendo do caso de equicorrelação considerado, os vieses nas probabilidades dos erros tipos I e II são, em geral, diferentes para as diferentes hipóteses, podendo mesmo ser nulos para uma ou mais delas.

5.4) Das tabelas das probabilidades dos erros tipo I, nota-se que, para valores positivos de " ρ ", o comprometimento

do nível de significância é maior do que para valores negativos.

5.5) Nota-se que, segundo a metodologia aqui empregada, o limite inferior de " ρ " depende do caso de equicorrelação do modelo e do tamanho amostral considerado. Isso não acontece para o limite superior, que é sempre a unidade.

5.6) O conhecimento prévio da presença de correlações nos dados pode levar o pesquisador a planejar o seu experimento, de forma que ele possa efetuar a usual análise de variância e realizar os testes das hipóteses principais sem erro. Não temos o conhecimento da existência de uma regra básica que permita resolver esse problema para todos os modelos. Mas, de acordo com o desenvolvimento deste trabalho, esse problema pode ser contornado para alguns modelos e alguns casos de equicorrelação, através de repetições independentes do experimento.

5.7) Nota-se que, sob a hipótese alternativa, as probabilidades dos erros tipo II decrescem à medida em que ou λ ou ρ crescem, isto é, o poder do teste aumenta à medida que se afasta da hipótese nula H_0 , e também aumenta à medida que ρ cresce (mas aqui com prejuízo do nível de significância).

Pode-se ainda concluir que esse trabalho nos permitiu tratar a análise de variância de uma forma simples, mesmo na presença de correlações dos dados; assim como o método numérico para obtenção das probabilidades dos erros tipo II, com a ajuda de recursos computacionais.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSEN, A.H. ; JENSEN, E.B. ; SCHOW, G. ; 1981. Two-Way Analysis of Variance with Correlated errors; International Statistical Review ; London, 49:153-167.

ANDERSON, V.L. & MCLEAN, R.A.; 1974. Another Dimension in Teaching Experimental Statistics; The American Statistician , Washington, 28(4):145-152.

BOX, G.E.P.;1949. A General Distribution Theory For a Class of Likelihood Criteria; Biometrika, Raleigh, 36: 317-346.

_____ ; 1950. Problems in the analysis of growth and wear curves; Biometrics 6:362-

_____ ; 1954(a). Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the One-Way Classification; Annals Math. Statist. ; Baltimore, 25: 290-302.

_____ ; 1954(b). Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, II. Effect of Inequality of Variance and of Correlation Between Errors in The Two-Way Classification; Annals Math. Statist., Baltimore, 25:484-498.

_____ ; HUNTER, W.G.; HUNTER, J.S.; 1978. Statistics For Experimenters - An Introduction to Design Data Analysis, and Model Building. Wiley , N.Y., 653 p.

DANFORD, M.B.; HUGUES, H.M.; McNEE, R.C. ; 1960. On the Analysis of Repeated-Measurements Experiments; Biometrics, Raleigh, 16:547-565.

FOX, M.; 1956. Charts of Power of the F-Test. Annals Math. Stat., Baltimore, 27(42):484-497.

GILL, J.L. & HAFS, H.D.; 1971. Analysis of Repeated Measurements of Animals; Journal of Animal Science, 33(2):331-336.

GILL, P.S. & SHUKLA, G.K.; 1985-a. Experimental Designs and Their Efficiencies for Spatially Correlated Observations in Two Dimensions. Commun. Statist. Theor. Meth., 14(9):2181-2197.

_____ ; 1985-b. Efficiency of Nereast Neighbour Balanced Block Designs for Correlated Observations; Biometrika, Raleigh, 72(3):539-544.

- GRAYBILL, F.A.; 1961. An Introduction to Linear Statistical Models, V.I. McGraw-Hill, N.Y. 463 p.
- HENDERSON, R.; 1986. Change-Point Problem With Correlated Observations, With an Application in Material Accountancy, Technometrics, Alexandria, 28(4):381-389.
- HUYNH, H. & FELDT, L.S. ; 1970. Conditions Under which Mean Square Ratios in Repeated Measurements Designs Have F-Distributions ; Journal of the American Statistical Association, Washington ; 65(332): 1582-1589.
- IEMMA, A.F.; 1981. Análise de Experimentos em Parcelas Subdivididas com Tratamentos Principais Dispostos em Blocos Incompletos Balanceados. Piracicaba, 145 p. (Tese de Doutorado - ESALQ/USP).
- _____ ; 1982. Valores Singulares de Matrizes Uniformes. Ciência e Natura, Santa Maria, R.S. 4 : 21-26.
- _____ ; 1983. Testes de Hipóteses nos Experimentos com Parcelas Subdivididas em Blocos Incompletos Balanceados. Desarrollo Rural en Las Americas, Costa Rica, 2 : 143-151.
- _____ ; 1985. Modelos Lineares para Experimentos com Medidas Repetidas: Um Enfoque Através das Matrizes de Helmert. Piracicaba, 155 p.(Livre-docência - ESALQ/USP).

- _____ ; 1987. Modelos Lineares; Uma Introdução para Profissionais da Pesquisa Agropecuária. Londrina, UEL/Departamento de Matemática Aplicada, 263 p.
- _____ ; 1988. Matrizes para Estatísticos - Um Texto para Profissionais de Ciências Aplicadas - ESALQ - USP. 339 p.
- KENNY, D.A. & JUDD, C.M.; 1986. Consequences of Violating the Independence Assumption in Analysis of Variance. Psychological Bulletin, 99(3):422-431.
- MARTIN, R.J.; 1982. Some Aspects of Experimental Design and Analysis When Errors Are Correlated. Biometrika, Raleigh, 69(3):597-612.
- MILLER, Jr., R.G.; 1986. Beyond ANOVA Basics of Applied Statistics. Wiley, N.Y., 317 p.
- PEARSON, K.; 1934. Tables of the Incomplete Beta Function. Cambridge University Press, Cambridge.
- PEARSON, E.S. & HARTLEY, H.O.; 1951. Charts of the Power Function of Analysis of Variance Tests, Derived from the Non-Central F-Distribution. Biometrika, Raleigh, 38(41):112-130.

- PERES, C.A.; 1985. Análise de Variância sob a Presença de Correlação entre os Erros. XII Semana de La Matemática, Univ. Cat. de Val Paraíso - Inst. de Matematicas, Argentina, 11 p.
- PRAETZ, P.; 1981. A Note on the Effect of Auto Correlation on Multiple Regression Statistics; Austral. J. Statist., 23(3): 309-313.
- PRESS, H.W.; FLANNERY, B.P.; TEUKOLSKY, S.A. & VETTERLING, W.T.; 1986. Numerical Recipes. Cambridge University Press, Cambridge. 800 p.
- REILMAN, M.A. ; GUNST, R.F. & LAKSHAMIMARAYANAN, M.Y.; 1985. Strutural Model Estimation with Correlated Measurement Errors, Biometrika, Raleigh, 72(3):669-672.
- ROGERS, G.S.; 1984. Kronecher Products in ANOVA - A First Step; The American Statistician, Washigton, 38(3):197-202.
- SCARIANO, M.S. & DAVENPORT, J.M.; 1987. The Effets of Violations of Independence Assumptions in the One-Way ANOVA. The American Statistician, Washigton, 41(2): 123-129.
- SCHEFFÉ, H.; 1959. The Analysis of Variance. Wiley, N.Y., 477 p.
- SEARLE, S.R.; 1971. Linear Models. Wiley, N.Y. 532 p.

- _____ ; 1987. Linear Models for Unbalanced Data.
Wiley, N.Y., 534 p.
- SINGER, J.M. & ANDRADE, D.F.; 1986. Análise de Dados Longitudinais, VII. Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, Campinas, 106 p.
- TANG, P.C.; 1938. Power of the F-Test in Terms of Non-Central F-Distribution, Statist. Res. Mem., 2:126-149.
- TIKU, M.L.; 1964. Approximating the General Non-Normal Variance-Ratio Sampling Distributions, Biometrika, Raleigh, 51:83-95.
- _____ ; 1965. Laguerre Series Forms of Non-Central χ^2 e F Distributions, Biometrika, Raleigh, 52(3 e 4):415-427.
- _____ ; 1967. Tables of The Power of The F-Test; Journal of the American Statistical Association, Washington, 62(318):525-539.
- ZIMMERMANN, F.J.P.; 1987. Efeito de Heterogeneidade de Variância e Distribuição de Probabilidade dos Dados sobre o Poder e Tamanho do Teste F, Pesq. Agropec. Bras., Brasília, 22(11/12):1209-1213.

WILKS, S.S. ; 1946. Sample Criterion for Testing Equality of Means, Equality of Variances and Equality of Covariances in a Normal Mulvariate Distribution; Ann. Math. Stat., Baltimore, 17: 257-281.

APÊNDICE

TABELA A.1. Probabilidades do erro tipo I, para a hipótese H_0 , ao nível nominal de significância 0,05, segundo os vários valores de r , k e ρ .

r	k	ρ						
		- .9000	- .5000	- .1000	.0000	.1000	.5000	.9000
2	2	.0028	.0175	.0415	.0500	.0601	.1310	.4277
	3	-	-	.0312	.0500	.0740	.2373	.6275
	5	-	-	.0142	.0500	.1016	.3739	.7475
	10	-	-	.0000	.0500	.1656	.5346	.8282
3	2	.0007	.0111	.0384	.0500	.0646	.1813	.6483
	3	-	-	.0265	.0500	.0838	.3432	.8368
	5	-	-	.0091	.0500	.1236	.5403	.9194
	10	-	-	.0000	.0500	.2231	.7400	.9639
5	2	.0001	.0050	.0340	.0500	.0723	.2793	.8836
	3	-	-	.0204	.0500	.0996	.5147	.9704
	5	-	-	.0046	.0500	.1598	.7513	.9922
	10	-	-	.0000	.0500	.3129	.9169	.9984
10	2	.0000	.0010	.0270	.0500	.0875	.4912	.9946
	3	-	-	.0128	.0500	.1328	.7843	.9997
	5	-	-	.0013	.0500	.2372	.9502	1.0000
	10	-	-	.0000	.0500	.4967	.9957	1.0000

TABELA A.2. Probabilidades do erro tipo II, para a hipótese H_0 , ao nível nominal de significância 0,05, segundo os vários valores de r , k e ρ para $\sigma_\alpha^2 / \sigma_\epsilon^2 = 1$.

r	k	ρ						
		- .9000	- .5000	- .1000	.0000	.1000	.5000	.9000
2	2	.9452	.9205	.8822	.8690	.8537	.7546	.4379
	3	-	-	.7905	.7627	.7320	.5705	.2661
	5	-	-	.6634	.6261	.5877	.4200	.1802
	10	-	-	.5029	.4654	.4292	.2896	.1191
3	2	.9431	.9055	.8415	.8187	.7920	.6210	.2030
	3	-	-	.7013	.6568	.6086	.3778	.0836
	5	-	-	.5129	.4597	.4075	.2120	.0396
	10	-	-	.3024	.2600	.2220	.1021	.0173
5	2	.9397	.8778	.7623	.7207	.6724	.3973	.0367
	3	-	-	.5518	.4853	.4174	.1604	.0077
	5	-	-	.3083	.2487	.1962	.0536	.0019
	10	-	-	.1120	.0831	.0607	.0129	.0004
10	2	.9334	.8162	.5853	.5086	.4265	.1107	.0004
	3	-	-	.2915	.2157	.1513	.0161	.0000
	5	-	-	.0813	.0498	.0289	.0015	.0000
	10	-	-	.0084	.0043	.0021	.0001	.0000

TABELA A.3. Probabilidades do erro tipo I, para a hipótese H_0 , ao nível nominal de significância 0,05, segundo os vários valores de N , r e ρ para $p=\sigma_e^2$ e $q=\rho\sigma_e^2$.

N	r	ρ						
		- .9000	- .5000	- .1000	.0000	.1000	.5000	.9000
6	2	-	-	.0312	.0500	.0740	.2373	.6275
	3	.0007	.0111	.0384	.0500	.0646	.1813	.6483
10	2	-	-	.0142	.0500	.1016	.3739	.7475
	3	-	-	.0229	.0500	.0902	.3860	.8610
	5	.0001	.0050	.0340	.0500	.0723	.2793	.8836
20	2	-	-	.0000	.0500	.1656	.5346	.8282
	3	-	-	.0020	.0500	.1578	.6339	.9430
	5	-	-	.0107	.0500	.0498	.1289	.9865
30	2	-	-	-	.0500	.2199	.6124	.8617
	3	-	-	.0000	.0500	.2231	.7400	.9639
	5	-	-	.0015	.0500	.1917	.8107	.9950
	10	-	-	.0128	.0500	.1328	.7843	.9997
50	2	-	-	-	.0500	.3063	.6952	.8941
	3	-	-	-	.0500	.3353	.8353	.9791
	5	-	-	.0000	.0500	.3148	.9175	.9984
	10	-	-	.0013	.0500	.2372	.9502	1.0000
90	2	-	-	-	.0500	.4199	.7704	.9218
	3	-	-	-	.0500	.4919	.9049	.9887
	5	-	-	-	.0500	.5118	.9709	.9995
	10	-	-	.0000	.0500	.4550	.9938	1.0000

TABELA A.4. Probabilidades do erro tipo II, para a hipótese H_0 , ao nível nominal de significância 0,05, segundo os vários valores de N , r , ρ , $\lambda = 0; 5$ e 20.

$\lambda = 0$		ρ							
N	r	-	.9000	- .5000	- .1000	.0000	.1000	.5000	.9000
6	2	-	-	-	.9688	.9500	.9260	.7627	.3725
	3	.9993	.9889	.9616	.9500	.9354	.8187	.3517	
10	2	-	-	.9858	.9500	.8984	.6261	.2575	
	3	-	-	.9771	.9500	.9098	.6140	.1319	
	5	.9999	.9950	.9660	.9500	.9277	.7207	.1154	
20	2	-	-	1.0000	.9500	.8344	.4654	.1718	
	3	-	-	.9980	.9500	.8422	.3661	.0570	
	5	-	-	.9893	.9500	.8711	.3396	.0135	
30	2	-	-	-	.9500	.7801	.3876	.1383	
	3	-	-	1.0000	.9500	.7769	.2600	.0361	
	5	-	-	.9985	.9500	.8083	.1893	.0050	
	10	-	-	.9872	.9500	.8672	.2157	.0003	
50	2	-	-	-	.9500	.6937	.3048	.1059	
	3	-	-	-	.9500	.6647	.1647	.0209	
	5	-	-	1.0000	.9500	.6852	.0825	.0016	
	10	-	-	.9987	.9500	.7628	.0498	.0000	
90	2	-	-	-	.9500	.5801	.2295	.0782	
	3	-	-	-	.9500	.5081	.0951	.0113	
	5	-	-	-	.9500	.4882	.0291	.0005	
	10	-	-	1.0000	.9500	.5450	.0062	.0000	
$\lambda = 5$		ρ							
N	r	-	.9000	- .5000	- .1000	.0000	.1000	.5000	.9000
6	2	-	-	-	.7012	.5972	.4982	.1975	.0521
	3	.9958	.9420	.8239	.7807	.7306	.4459	.0661	
10	2	-	-	.7322	.4939	.3363	.0991	.0421	
	3	-	-	.7880	.6532	.5201	.1521	.0252	
	5	.9996	.9743	.8611	.8099	.7470	.3772	.0214	
20	2	-	-	.9992	.4315	.2069	.0607	.0387	
	3	-	-	.9278	.5653	.3191	.0570	.0189	
	5	-	-	.8884	.7026	.5021	.0736	.0048	
30	2	-	-	-	.4144	.1566	.0515	.0379	
	3	-	-	1.0000	.5388	.2317	.0393	.0178	
	5	-	-	.9625	.6676	.3742	.0330	.0036	
	10	-	-	.9271	.8020	.6225	.0613	.0001	
50	2	-	-	-	.4005	.1109	.0450	.0373	
	3	-	-	-	.5191	.1484	.0283	.0171	
	5	-	-	1.0000	.6411	.2344	.0147	.0030	
	10	-	-	.9817	.7674	.4327	.0096	.0000	
90	2	-	-	-	.3913	.0781	.0411	.0369	
	3	-	-	-	.5072	.0866	.0224	.0167	
	5	-	-	-	.6241	.1171	.0074	.0027	
	10	-	-	1.0000	.7394	.2172	.0012	.0000	

TABELA A.4. Continuação para $\lambda = 20$.

$\lambda = 20$		ρ						
N	r	- .9000	- .5000	- .1000	.0000	.1000	.5000	.9000
6	2	-	-	.1721	.0912	.0468	.0025	.0001
	3	.9795	.7663	.4520	.3703	.2916	.0569	.0004
10	2	-	-	.1265	.0272	.0081	.0005	.0001
	3	-	-	.2267	.1040	.0461	.0017	.0001
	5	.9970	.8497	.4833	.3805	.2836	.0363	.0001
20	2	-	-	.9441	.0126	.0021	.0003	.0002
	3	-	-	.3765	.0374	.0073	.0003	.0001
	5	-	-	.3453	.1189	.0390	.0007	.0000
30	2	-	-	-	.0103	.0013	.0003	.0002
	3	-	-	.9957	.0273	.0033	.0002	.0001
	5	-	-	.5244	.0787	.0144	.0002	.0000
	10	-	-	.5186	.2679	.1152	.0011	.0000
50	2	-	-	-	.0089	.0008	.0003	.0002
	3	-	-	-	.0217	.0015	.0002	.0001
	5	-	-	1.0000	.0572	.0045	.0001	.0000
	10	-	-	.6935	.1773	.0332	.0001	.0000
90	2	-	-	-	.0081	.0006	.0003	.0003
	3	-	-	-	.0189	.0007	.0002	.0001
	5	-	-	-	.0467	.0013	.0001	.0000
	10	-	-	.9999	.1308	.0066	.0000	.0000

TABELA A.5. Probabilidades do erro tipo I, para as hipóteses $H^{(1)}$ e $H^{(2)}$, ao nível nominal de significância 0,05 segundo os vários valores de r , s , k e ρ .

r	s	k	H*	ρ						
				.0000	.0500	.1000	.2000	.5000	.7000	.9000
2	3	3	1	.0500	-	-	-	.5087	.6545	.8162
			2	.0500	-	-	-	.5976	.7827	.9346
		5	1	.0500	-	-	.3540	.6115	.7345	.8614
			2	.0500	-	-	.3950	.7387	.8713	.9637
		10	1	.0500	-	.3408	.4955	.7208	.8133	.9036
			2	.0500	-	.3825	.5944	.8611	.9361	.9828
		5	3	1	.0500	-	.3547	.6118	.7347	.8615
			2	.0500	-	-	.3811	.8127	.9451	.9950
5	5	3	1	.0500	-	.3055	.4582	.6946	.7949	.8939
			2	.0500	-	.3133	.5698	.9168	.9797	.9984
		5	1	.0500	.3009	.4407	.5908	.7819	.8554	.9259
			2	.0500	.3167	.5517	.8010	.9762	.9949	.9996
		10	1	.0500	-	.1889	.3714	.8066	.9429	.9948
			2	.0500	-	.2197	.3915	.7358	.8697	.9632
		5	1	.0500	.2388	.4414	.7122	.9587	.9908	.9993
			2	.0500	.2635	.4388	.6494	.8860	.9483	.9862
5	5	10	1	.0500	.4547	.7016	.8913	.9893	.9978	.9998
			2	.0500	.4398	.6337	.8010	.9429	.9748	.9933
		2	1	.0500	.1663	.3106	.5665	.9157	.9793	.9983
			2	.0500	.1603	.3106	.5665	.9167	.9793	.9983
		5	1	.0500	.3806	.6291	.8519	.9841	.9967	.9998
			2	.0500	.3806	.6291	.8519	.9841	.9967	.9998
		10	1	.0500	.6256	.8359	.9508	.9959	.9992	.9999
			2	.0500	.6256	.8359	.9508	.9959	.9992	.9999
10	10	2	1	.0500	.5126	.8097	.9699	.9998	1.0000	1.0000
			2	.0500	.5126	.8097	.9699	.9998	1.0000	1.0000
		5	1	.0500	.8620	.9783	.9986	1.0000	1.0000	1.0000
			2	.0500	.8620	.9783	.9986	1.0000	1.0000	1.0000
		10	1	.0500	.9748	.9978	.9999	1.0000	1.0000	1.0000
			2	.0500	.9748	.9978	.9999	1.0000	1.0000	1.0000
		10	1	.0500	.9748	.9978	.9999	1.0000	1.0000	1.0000
			2	.0500	.9748	.9978	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

TABELA A.6. Probabilidades do erro tipo II, para as hipóteses $H^{(1)}$ e $H^{(2)}$, ao nível nominal de significância 0,05 segundo os vários valores de r, s, κ, ρ , $\lambda = 0; 5$ e 20.

$\lambda = \bullet$				ρ						
r	s	κ	H^*	.0000	.0500	.1000	.2000	.5000	.7000	.9000
2	3	3	1	.9500	-	-	-	.4913	.3455	.1838
			2	.9500	-	-	-	.4024	.2173	.0654
		5	1	.9500	-	-	.6460	.3885	.2655	.1386
			2	.9500	-	-	.6050	.2613	.1287	.0363
		10	1	.9500	-	.6592	.5045	.2792	.1867	.0964
			2	.9500	-	.6175	.4056	.1389	.0639	.0172
		5	3	1	.9500	-	.6453	.3882	.2653	.1385
			2	.9500	-	-	.6189	.1873	.0549	.0050
2	5	5	1	.9500	-	.6945	.5418	.3054	.2051	.1061
			2	.9500	-	.6877	.4302	.0832	.0203	.0016
		10	1	.9500	.6991	.5593	.4092	.2181	.1446	.0741
			2	.9500	.6833	.4483	.1990	.0238	.0051	.0004
5	3	2	1	.9500	-	.8111	.6286	.1934	.0571	.0052
			2	.9500	-	.7803	.6085	.2642	.1303	.0368
		5	1	.9500	.7612	.5586	.2878	.0413	.0092	.0007
			2	.9500	.7365	.5612	.3506	.1140	.0517	.0138
		10	1	.9500	.5453	.2984	.1087	.0107	.0022	.0002
			2	.9500	.5602	.3663	.1990	.0571	.0252	.0067
5	5	2	1	.9500	.8337	.6894	.4335	.0843	.0207	.0017
			2	.9500	.8337	.6894	.4335	.0843	.0207	.0017
		5	1	.9500	.6194	.3709	.1481	.0159	.0033	.0002
			2	.9500	.6194	.3709	.1481	.0159	.0033	.0002
		10	1	.9500	.3744	.1641	.0492	.0041	.0008	.0001
			2	.9500	.3744	.1641	.0492	.0041	.0008	.0001
10	10	2	1	.9500	.4874	.1903	.0301	.0002	.0000	.0000
			2	.9500	.4874	.1903	.0301	.0002	.0000	.0000
		5	1	.9500	.1380	.0217	.0014	.0000	.0000	.0000
			2	.9500	.1380	.0217	.0014	.0000	.0000	.0000
		10	1	.9500	.0252	.0022	.0001	.0000	.0000	.0000
			2	.9500	.0252	.0022	.0001	.0000	.0000	.0000

TABELA A.6. Continuação para $\lambda = 5$.

$\lambda = 5$				ρ						
r	s	k	H*	.0000	.0500	.1000	.2000	.5000	.7000	.9000
2	3	3	1	-	-	-	-	.0649	.0482	.0390
			2	-	-	-	-	.0653	.0341	.0194
		5	1	-	-	-	.0969	.0516	.0428	.0379
			2	-	-	-	.1246	.0395	.0249	.0178
		10	1	-	-	.0988	.0650	.0435	.0394	.0372
			2	-	-	.1254	.0626	.0260	.0200	.0169
2	5	3	1	-	-	-	.0970	.0516	.0427	.0379
			2	-	-	-	.1980	.0327	.0107	.0036
		5	1	-	-	.1115	.0713	.0451	.0401	.0373
			2	-	-	.2359	.0974	.0147	.0061	.0030
		10	1	.3904	.1116	.0739	.0532	.0406	.0382	.0369
			2	.6197	.2251	.1012	.0338	.0067	.0039	.0027
5	3	2	1	-	-	.3814	.2056	.0340	.0110	.0036
			2	-	-	.2382	.1272	.0399	.0250	.0178
		5	1	.6346	.2958	.1505	.0533	.0090	.0046	.0028
			2	.5146	.1892	.1034	.0523	.0239	.0192	.0168
		10	1	.5981	.1408	.0552	.0185	.0049	.0033	.0026
			2	.4914	.1018	.0547	.0318	.0197	.0176	.0165
5	5	2	1	.6466	.3928	.2392	.0990	.0149	.0062	.0030
			2	.6466	.3928	.2392	.0990	.0149	.0062	.0030
		5	1	.6185	.1813	.0751	.0247	.0056	.0036	.0026
			2	.6185	.1813	.0751	.0247	.0056	.0036	.0026
		10	1	.6000	.0754	.0273	.0102	.0038	.0030	.0025
			2	.6000	.0754	.0273	.0102	.0038	.0030	.0025
10	10	2	1	.7106	.1745	.0450	.0055	.0001	.0000	.0000
			2	.7106	.1745	.0450	.0055	.0001	.0000	.0000
		5	1	.7160	.0296	.0039	.0004	.0000	.0000	.0000
			2	.7160	.0296	.0039	.0004	.0000	.0000	.0000
		10	1	.7178	.0045	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000
			2	.7178	.0045	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000

TABELA A.6. Continuação para $\lambda = 20$.

$\lambda = 20$				ρ						
r	s	k	H*	.0000	.0500	.1000	.2000	.5000	.7000	.9000
2	3	3	1	-	-	-	-	.0003	.0002	.0001
			2	-	-	-	-	.0004	.0001	.0001
		5	1	-	-	-	.0006	.0003	.0002	.0002
			2	-	-	-	.0011	.0002	.0001	.0001
		10	1	-	-	.0007	.0004	.0003	.0003	.0002
			2	-	-	.0011	.0005	.0002	.0001	.0001
2	5	3	1	-	-	-	.0006	.0003	.0003	.0002
			2	-	-	-	.0036	.0002	.0001	.0000
		5	1	-	-	.0008	.0005	.0003	.0003	.0002
			2	-	-	.0046	.0010	.0001	.0001	.0000
		10	1	.0080	.0009	.0005	.0004	.0003	.0003	.0003
			2	.0450	.0040	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
5	3	2	1	-	-	.0155	.0039	.0002	.0001	.0000
			2	-	-	.0036	.0011	.0002	.0001	.0001
		5	1	.0510	.0070	.0020	.0005	.0001	.0000	.0000
			2	.0202	.0022	.0009	.0004	.0002	.0001	.0001
		10	1	.0386	.0018	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000
			2	.0167	.0009	.0004	.0003	.0002	.0002	.0002
5	5	2	1	.0603	.0143	.0048	.0010	.0001	.0000	.0000
			2	.0603	.0143	.0048	.0010	.0001	.0000	.0000
		5	1	.0437	.0027	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000
			2	.0437	.0027	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000
		10	1	.0377	.0007	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000
			2	.0377	.0007	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000
10	10	2	1	.1017	.0041	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000
			2	.1017	.0041	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000
		5	1	.0985	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
			2	.0985	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
		10	1	.0975	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
			2	.0975	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

TABELA A.7. Probabilidades do erro tipo I, para a hipótese $H_0^{(1)}$, ao nível nominal de significância 0.05, segundo os valores de r , s , k e ρ .

r	s	k	ρ						
			-.2000	-.1000	-.0500	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	-	.0002	.0132	.0500	.1516	.5087	.8162
		5	-	-	.0007	.0500	.2191	.6115	.8614
		10	-	-	-	.0500	.3408	.7208	.9036
2	5	3	-	-	.0008	.0500	.2200	.6118	.8615
		5	-	-	-	.0500	.3055	.6946	.8939
		10	-	-	-	.0500	.4407	.7819	.9959
5	3	2	-	-	.0143	.0500	.1889	.8066	.9948
		5	-	-	.0000	.0500	.4414	.9587	.9993
		10	-	-	-	.0500	.7016	.9893	.9998
5	5	2	-	-	-	.0500	.3106	.9157	.9983
		5	-	-	-	.0500	.6291	.9841	.9998
		10	-	-	-	.0500	.8359	.9959	.9999
10	10	2	-	-	-	.0500	.8097	.9998	1.0000
		5	-	-	-	.0500	.9783	1.0000	1.0000
		10	-	-	-	.0500	.9978	1.0000	1.0000

TABELA A.8. Probabilidades do erro tipo II, para a hipótese $H_0^{(1)}$, ao nível nominal de significância 0.05, segundo os valores de r , s , k , ρ , $\lambda = 0$; 5 e 20.

$\lambda = 0$			ρ						
r	s	k	-.2000	-.1000	-.0500	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	-	.9998	.9868	.9500	.8484	.4943	.1838
		5	-	-	.9993	.9500	.7809	.3885	.1386
		10	-	-	-	.9500	.6592	.2792	.0964
2	5	3	-	-	.9992	.9500	.7800	.3882	.1385
		5	-	-	-	.9500	.6945	.3054	.1061
		10	-	-	-	.9500	.5593	.2181	.0741
5	3	2	-	-	.9857	.9500	.8111	.1934	.0052
		5	-	-	1.0000	.9500	.5586	.0413	.0007
		10	-	-	-	.9500	.2984	.0107	.0002
5	5	2	-	-	-	.9500	.6894	.0843	.0017
		5	-	-	-	.9500	.3709	.0159	.0002
		10	-	-	-	.9500	.1641	.0041	.0001
10	10	2	-	-	-	.9500	.1903	.0002	.0000
		5	-	-	-	.9500	.0217	.0000	.0000
		10	-	-	-	.9500	.0022	.0000	.0000

TABELA A.8. Continuação para $\lambda = 5$.

$\lambda = 5$			ρ						
r	s	k	-.2000	-.1000	-.0500	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	-	.9775	.6852	.4461	.2284	.0649	.0390
		5	-	-	.9193	.4169	.1578	.0516	.0379
		10	-	-	-	.3968	.0988	.0435	.0372
2	5	3	-	-	.9171	.4166	.1580	.0516	.0379
		5	-	-	-	.4022	.1115	.0451	.0373
		10	-	-	-	.3904	.0739	.0406	.0369
5	3	2	-	-	.8398	.6731	.3814	.0340	.0036
		5	-	-	.9982	.6346	.1505	.0090	.0028
		10	-	-	-	.5981	.0552	.0049	.0026
5	5	2	-	-	-	.6466	.2392	.0149	.0030
		5	-	-	-	.6185	.0751	.0056	.0026
		10	-	-	-	.6000	.0273	.0038	.0025
10	10	2	-	-	-	.7106	.0450	.0001	.0000
		5	-	-	-	.7160	.0039	.0000	.0000
		10	-	-	-	.7178	.0005	.0000	.0000

TABELA A.8. Continuação para $\lambda = 20$.

$\lambda = 5$			ρ						
r	s	k	-.2000	-.1000	-.0500	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	-	.6298	.0690	.0150	.0026	.0003	.0001
		5	-	-	.2780	.0106	.0013	.0003	.0002
		10	-	-	-	.0086	.0007	.0003	.0002
2	5	3	-	-	.2789	.0107	.0013	.0003	.0002
		5	-	-	-	.0090	.0008	.0003	.0002
		10	-	-	-	.0080	.0005	.0003	.0003
5	3	2	-	-	.2150	.0837	.0155	.0002	.0000
		5	-	-	.8495	.0510	.0020	.0001	.0000
		10	-	-	-	.0386	.0005	.0001	.0000
5	5	2	-	-	-	.0603	.0048	.0001	.0000
		5	-	-	-	.0437	.0007	.0001	.0000
		10	-	-	-	.0377	.0002	.0001	.0000
10	10	2	-	-	-	.1017	.0005	.0000	.0000
		5	-	-	-	.0985	.0000	.0000	.0000
		10	-	-	-	.0975	.0000	.0000	.0000

TABELA A.9. Probabilidades do erro tipo I, para as hipóteses $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ e $H_0^{(3)}$ ao nível nominal de significância 0,05 segundo os vários valores de r , s , k e ρ .

r	s	k	H*	ρ						
				- .8000	- .4000	- .1000	.0000	.1000	.4000	.8000
2	3	3	1	-	.0001	.0252	.0500	.0835	.2322	.5568
			2	-	.0000	.0218	.0500	.0928	.3091	.7468
			3	-	.0000	.0218	.0500	.0928	.3091	.7468
		5	1	-	-	.0102	.0500	.1118	.3324	.6572
			2	-	-	.0067	.0500	.1350	.4687	.8519
			3	-	-	.0067	.0500	.1350	.4687	.8519
		10	1	-	-	.0000	.0500	.1744	.4732	.7559
			2	-	-	.0000	.0500	.2340	.6651	.9262
			3	-	-	.0000	.0500	.2340	.6651	.9262
2	5	3	1	-	.0000	.0238	.0500	.0860	.2426	.5694
			2	-	.0000	.0161	.0500	.1117	.4525	.9237
			3	-	.0000	.0161	.0500	.1117	.4525	.9237
		5	1	-	-	.0093	.0500	.1132	.3377	.6617
			2	-	-	.0030	.0500	.1741	.6632	.9729
			3	-	-	.0030	.0500	.1741	.6632	.9729
		10	1	-	-	.0000	.0500	.1764	.4764	.7579
			2	-	-	.0000	.0500	.3336	.8642	.9933
			3	-	-	.0000	.0500	.3336	.8642	.9933
5	3	2	1	.0000	.0020	.0265	.0500	.0864	.3105	.8467
			2	.0000	.0033	.0295	.0500	.0796	.2390	.6716
			3	.0000	.0013	.0242	.0500	.0945	.3976	.9574
		5	1	-	-	.0025	.0500	.1793	.6756	.9747
			2	-	-	.0051	.0500	.1409	.4876	.8610
			3	-	-	.0010	.0500	.2372	.8624	.9991
		10	1	-	-	.0000	.0500	.3419	.8689	.9936
			2	-	-	.0000	.0500	.2428	.6752	.9290
			3	-	-	.0000	.0500	.4953	.9786	.9999
5	5	2	1	.0000	.0010	.0244	.0500	.0914	.3424	.8707
			2	.0000	.0010	.0244	.0500	.0914	.3424	.8707
			3	.0000	.0002	.0173	.0500	.1112	.5816	.9981
		5	1	-	-	.0022	.0500	.1868	.6883	.9763
			2	-	-	.0022	.0500	.1868	.6883	.9763
			3	-	-	.0002	.0500	.3431	.9788	1.0000
		10	1	-	-	.0000	.0500	.3466	.8717	.9938
			2	-	-	.0000	.0500	.3466	.8717	.9938
			3	-	-	.0000	.0500	.6950	.9995	1.0000
10	10	2	1	.0000	.0001	.0217	.0500	.1449	.6120	.9926
			2	.0000	.0001	.0217	.0500	.1449	.6120	.9926
			3	.0000	.0000	.0065	.0500	.2805	.9925	1.0000
		5	1	-	-	.0004	.0500	.2879	.9167	.9998
			2	-	-	.0004	.0500	.2879	.9167	.9998
			3	-	-	.0000	.0500	.9086	1.0000	1.0000
		10	1	-	-	.0000	.0500	.5332	.9876	1.0000
			2	-	-	.0000	.0500	.5332	.9876	1.0000
			3	-	-	.0000	.0500	.9989	1.0000	1.0000

TABELA A.10. Probabilidades do erro tipo II, para as hipóteses $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ e $H_0^{(3)}$ ao nível nominal de significância 0,05 segundo os valores de r , s , k , ρ , $\lambda=0,5$ e 20

$\lambda=0$				ρ						
r	s	k	H^*	- .8000	- .4000	- .1000	.0000	.1000	.4000	.8000
2	3	3	1	-	.9999	.9748	.9500	.9165	.7678	.4432
			2	-	1.0000	.9782	.9500	.9072	.6909	.2532
			3	-	1.0000	.9782	.9500	.9072	.6909	.2532
		5	1	-	-	.9898	.9500	.8882	.6676	.3428
			2	-	-	.9898	.9500	.8882	.6676	.3428
			3	-	-	.9933	.9500	.8650	.5313	.1481
		10	1	-	-	1.0000	.9500	.8256	.5268	.2441
			2	-	-	1.0000	.9500	.7660	.3349	.0738
			3	-	-	1.0000	.9500	.7660	.3349	.0738
2	5	3	1	-	1.0000	.9762	.9500	.9140	.7574	.4306
			2	-	1.0000	.9839	.9500	.8883	.5475	.0763
			3	-	1.0000	.9839	.9500	.8833	.5475	.0763
		5	1	-	-	.9907	.9500	.8868	.6623	.3338
			2	-	-	.9970	.9500	.8259	.3368	.0271
			3	-	-	.9970	.9500	.8259	.3368	.0271
		10	1	-	-	1.0000	.9500	.8236	.5236	.2421
			2	-	-	1.0000	.9500	.6664	.1358	.0067
			3	-	-	1.0000	.9500	.6664	.1358	.0067
5	3	2	1	1.0000	.9980	.9735	.9500	.9136	.6895	.1533
			2	1.0000	.9967	.9705	.9500	.9204	.7610	.3284
			3	1.0000	.9987	.9758	.9500	.9055	.6024	.0426
		5	1	-	-	.9975	.9500	.8207	.3244	.0253
			2	-	-	.9949	.9500	.8591	.5124	.1390
			3	-	-	.9990	.9500	.7628	.1376	.0009
		10	1	-	-	1.0000	.9500	.6581	.1311	.0064
			2	-	-	1.0000	.9500	.7572	.3248	.0710
			3	-	-	1.0000	.9500	.5047	.0214	.0214
5	5	2	1	1.0000	.9990	.9756	.9500	.9086	.6576	.1293
			2	1.0000	.9990	.9756	.9500	.9086	.6576	.1293
			3	1.0000	.9998	.9827	.9500	.8888	.4184	.0019
		5	1	-	-	.9978	.9500	.8132	.3117	.0237
			2	-	-	.9978	.9500	.8132	.3117	.0237
			3	-	-	.9998	.9500	.6569	.0212	.0000
		10	1	-	-	1.0000	.9500	.6534	.1283	.0062
			2	-	-	1.0000	.9500	.6534	.1283	.0062
			3	-	-	1.0000	.9500	.3050	.3335	.0000
10	10	2	1	1.0000	.9999	.9783	.9500	.8551	.3880	.0074
			2	1.0000	.9999	.9783	.9500	.8551	.3880	.0074
			3	1.0000	1.0000	.9935	.9500	.7195	.0075	.0000
		5	1	-	-	.9996	.9500	.7121	.0833	.0002
			2	-	-	.9996	.9500	.7121	.0833	.0002
			3	-	-	1.0000	.9500	.0914	.0000	.0000
		10	1	-	-	1.0000	.9500	.4668	.0124	.0000
			2	-	-	1.0000	.9500	.4668	.0124	.0000
			3	-	-	1.0000	.9500	.0011	.0000	.0000

TABELAS A.10. Continuação para $\lambda = 5$

$\lambda = 5$				ρ						
r	s	k	H*	-.8000	-.4000	-.1000	.0000	.1000	.4000	.8000
2	3	3	1	-	.9891	.5901	.4570	.3511	.1501	.0584
			2	-	.9978	.7373	.5937	.4603	.1833	.0390
			3	-	.9978	.7373	.5937	.4603	.1833	.0390
		5	1	-	-	.6859	.4175	.2695	.1042	.0478
			2	-	-	.8297	.5432	.3405	.0976	.0267
			3	-	-	.8297	.5432	.3405	.0976	.0267
		10	1	-	-	.9999	.3967	.1859	.0686	.0417
			2	-	-	1.0000	.5134	.2132	.0498	.0207
			3	-	-	1.0000	.5134	.2132	.0498	.0207
2	5	3	1	-	.9932	.5630	.4267	.3230	.1459	.0562
			2	-	.9999	.8358	.6817	.5172	.1584	.0137
			3	-	.9999	.8358	.6817	.5172	.1584	.0137
		5	1	-	-	.6775	.4040	.2585	.1006	.0473
			2	-	-	.9269	.6461	.3824	.0674	.0070
			3	-	-	.9269	.6461	.3824	.0674	.0070
		10	1	-	-	.9999	.3894	.1818	.0677	.0416
			2	-	-	1.0000	.6167	.2132	.0227	.0042
			3	-	-	1.0000	.6167	.2132	.0227	.0042
5	3	2	1	1.0000	.9669	.7974	.7026	.5949	.2668	.0267
			2	.9996	.9088	.6705	.5742	.4784	.2318	.0504
			3	1.0000	.9893	.8858	.8053	.6980	.2918	.0082
		5	1	-	-	.9270	.6331	.3762	.0630	.0069
			2	-	-	.8283	.5140	.3121	.0884	.0260
			3	-	-	.9791	.7393	.4021	.0291	.0003
		10	1	-	-	1.0000	.6060	.2052	.0219	.0042
			2	-	-	1.0000	.4948	.2011	.0479	.0206
			3	-	-	1.0000	.7020	.1761	.0039	.0001
5	5	2	1	1.0000	.9705	.7755	.6676	.5496	.2244	.0220
			2	1.0000	.9705	.7755	.6676	.5496	.2244	.0224
			3	1.0000	.9985	.9365	.8581	.7320	.2099	.0004
		5	1	-	-	.9250	.6175	.3493	.0588	.0067
			2	-	-	.9250	.6175	.3493	.0588	.0067
			3	-	-	.9970	.8113	.3747	.0045	.0000
		10	1	-	-	1.0000	.5998	.2002	.0214	.0042
			2	-	-	1.0000	.5998	.2002	.0214	.0042
			3	-	-	1.0000	.7874	.1129	.0001	.0000
10	10	2	1	1.0000	.9966	.8425	.7038	.5371	.1241	.0014
			2	1.0000	.9966	.8425	.7038	.5371	.1241	.0014
			3	1.0000	1.0000	.9868	.8942	.6142	.0034	.0000
		5	1	-	-	.9855	.7153	.3424	.0163	.0001
			2	-	-	.9855	.7153	.3424	.0163	.0001
			3	-	-	1.0000	.8042	.0484	.0000	.0000
		10	1	-	-	1.0000	.7176	.1594	.0023	.0000
			2	-	-	1.0000	.7176	.1594	.0023	.0000
			3	-	-	1.0000	.8185	.0004	.0000	.0000

TABELA A.10. Continuação para $\lambda = 20$

$\lambda = 20$				ρ						
r	s	k	H*	-.8000	-.4000	-.1000	.0000	.1000	.4000	.8000
2	3	3	1	-	.7760	.0411	.0171	.0079	.0012	.0002
			2	-	.9338	.1225	.0552	.0226	.0022	.0002
			3	-	.9338	.1225	.0522	.0226	.0022	.0002
		5	1	-	-	.0564	.0108	.0037	.0007	.0002
			2	-	-	.1609	.0290	.0079	.0007	.0001
			3	-	-	.1609	.0290	.0079	.0007	.0001
		10	1	-	-	.9644	.0086	.0018	.0005	.0003
			2	-	-	.9983	.0206	.0027	.0003	.0002
			3	-	-	.9983	.0206	.0027	.0003	.0002
2	5	3	1	-	.7690	.0283	.0119	.0057	.0011	.0003
			2	-	.9928	.2213	.0929	.0374	.0024	.0001
			3	-	.9928	.2213	.0929	.0374	.0024	.0001
		5	1	-	-	.0472	.0092	.0033	.0007	.0003
			2	-	-	.3365	.0605	.0135	.0006	.0001
			3	-	-	.3365	.0605	.0135	.0006	.0001
		10	1	-	-	.9692	.0080	.0018	.0005	.0003
			2	-	-	1.0000	.0446	.0036	.0002	.0000
			3	-	-	1.0000	.0446	.0036	.0002	.0000
5	3	2	1	.9970	.6265	.2003	.1189	.0668	.0077	.0002
			2	.9763	.3381	.0737	.0416	.0230	.0036	.0003
			3	.9997	.8597	.4322	.2886	.1740	.0182	.0001
		5	1	-	-	.3108	.0517	.0114	.0006	.0001
			2	-	-	.1220	.0204	.0058	.0007	.0002
			3	-	-	.6193	.1294	.0227	.0003	.0000
		10	1	-	-	1.0000	.0404	.0033	.0002	.0001
			2	-	-	.9993	.0171	.0025	.0004	.0002
			3	-	-	1.0000	.0940	.0039	.0000	.0000
5	5	2	1	.9990	.5722	.1428	.0787	.0412	.0046	.0001
			2	.9990	.5722	.1428	.0787	.0412	.0046	.0001
			3	1.0000	.9694	.6213	.4296	.2550	.0163	.0000
		5	1	-	-	.2843	.0442	.0097	.0005	.0001
			2	-	-	.2843	.0442	.0097	.0005	.0001
			3	-	-	.8829	.2479	.0321	.0000	.0000
		10	1	-	-	1.0000	.0378	.0031	.0002	.0001
			2	-	-	1.0000	.0378	.0031	.0002	.0001
			3	-	-	1.0000	.2004	.0033	.0000	.0000
10	10	2	1	1.0000	.8268	.2156	.1057	.0468	.0024	.0000
			2	1.0000	.8268	.2156	.1057	.0468	.0024	.0000
			3	1.0000	1.0000	.9265	.6878	.3202	.0003	.0000
		5	1	-	-	.6119	.0989	.0143	.0002	.0000
			2	-	-	.6119	.0989	.0143	.0002	.0000
			3	-	-	.9999	.4632	.0054	.0000	.0000
		10	1	-	-	1.0000	.0976	.0034	.0000	.0000
			2	-	-	1.0000	.0976	.0034	.0000	.0000
			3	-	-	1.0000	.4636	.0000	.0000	.0000

TABELA A.11. Probabilidades do erro tipo I, para a hipótese $H_0^{(1)}$, ao nível nominal de significância 0.05, segundo os valores de r , s , k e ρ .

r	s	k	ρ						
			-.2000	-.1000	-.0500	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	-	.0072	.0242	.0500	.1172	.4261	.7738
		5	-	.0054	.0223	.0500	.1230	.4429	.7831
		10	-	.0045	.0216	.0500	.1272	.4530	.7885
2	5	3	-	.0000	.0092	.0500	.1666	.5365	.8292
		5	-	.0000	.0080	.0500	.1722	.5460	.8334
		10	-	.0000	.0075	.0500	.1764	.5520	.8360
5	3	2	-	-	.0003	.0500	.3723	.9393	.9989
		5	-	-	.0000	.0500	.4423	.9586	.9963
		10	-	-	.0000	.0500	.4660	.9627	.9994
5	5	2	-	-	-	.0500	.5796	.9793	.9997
		5	-	-	-	.0500	.6292	.9841	.9998
		10	-	-	-	.0500	.6434	.9852	.9998
10	10	2	-	-	-	.0500	.9972	1.0000	1.0000
		5	-	-	-	.0500	.9978	1.0000	1.0000
		10	-	-	-	.0500	.9978	1.0000	1.0000

TABELA A.12. Probabilidades do erro tipo II, para a hipótese $H_0^{(1)}$, ao nível nominal de significância 0.05, segundo os valores de r , s , k , ρ , $\lambda = 0$; 5 e 20.

$\lambda = 0$			ρ						
r	s	k	-.2000	-.1000	-.0500	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	-	.9928	.9758	.9500	.8828	.5739	.2262
		5	-	.9946	.9777	.9500	.8770	.5571	.2169
		10	-	.9955	.9784	.9500	.8728	.5470	.2115
2	5	3	-	1.0000	.9908	.9500	.8334	.4635	.1708
		5	-	1.0000	.9920	.9500	.8278	.4540	.1666
		10	-	1.0000	.9925	.9900	.8236	.4480	.1640
5	3	2	-	-	.9997	.9500	.6277	.0607	.0011
		5	-	-	1.0000	.9500	.5577	.0414	.0007
		10	-	-	1.0000	.9500	.5340	.0373	.0006
5	5	2	-	-	-	.9500	.4204	.0207	.0003
		5	-	-	-	.9500	.3708	.0159	.0002
		10	-	-	-	.9500	.3566	.0148	.0002
10	10	2	-	-	-	.9500	.0028	.0000	.0000
		5	-	-	-	.9500	.0022	.0000	.0000
		10	-	-	-	.9500	.0022	.0000	.0000

TABELA A.12. Continuação para $\lambda = 5$.

$\lambda = 5$			ρ						
r	s	k	-.2000	-.1000	-.0500	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	-	.7816	.5979	.4570	.2827	.0813	.0407
		5	-	.7671	.5645	.4194	.2525	.0752	.0405
		10	-	.7563	.5428	.3967	.2358	.0721	.0403
2	5	3	-	.9993	.7105	.4267	.2037	.0603	.0387
		5	-	.9998	.6964	.4040	.1900	.0584	.0387
		10	-	.9999	.6858	.3894	.1818	.0573	.0387
5	3	2	-	-	.9934	.7026	.2168	.0114	.0025
		5	-	-	.9979	.6331	.1508	.0090	.0028
		10	-	-	.9983	.6060	.1357	.0086	.0028
5	5	2	-	-	-	.6676	.0975	.0060	.0024
		5	-	-	-	.6175	.0752	.0056	.0026
		10	-	-	-	.5998	.0702	.0055	.0027
10	10	2	-	-	-	.7358	.0006	.0000	.0000
		5	-	-	-	.7153	.0005	.0000	.0000
		10	-	-	-	.7176	.0005	.0000	.0000

TABELA A.12. Continuação para $\lambda = 20$.

$\lambda = 5$			ρ						
r	s	k	-.2000	-.1000	-.0500	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	-	.1371	.0431	.0171	.0045	.0004	.0001
		5	-	.0933	.0271	.0109	.0032	.0004	.0002
		10	-	.0719	.0206	.0086	.0028	.0005	.0003
2	5	3	-	.9469	.0696	.0119	.0021	.0003	.0002
		5	-	.9609	.0528	.0092	.0019	.0004	.0002
		10	-	.9692	.0442	.0080	.0018	.0004	.0003
5	3	2	-	-	.8581	.1189	.0049	.0001	.0000
		5	-	-	.8454	.0517	.0020	.0001	.0000
		10	-	-	.8313	.0404	.0017	.0001	.0000
5	5	2	-	-	-	.0787	.0010	.0000	.0000
		5	-	-	-	.0442	.0007	.0001	.0000
		10	-	-	-	.0378	.0007	.0001	.0000
10	10	2	-	-	-	.1237	.0000	.0000	.0000
		5	-	-	-	.0989	.0000	.0000	.0000
		10	-	-	-	.0976	.0000	.0000	.0000

TABELA A.13. Probabilidades do erro tipo I, para $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$, $H_0^{(3)}$ ao nível nominal de significância 0,05 segundo os valores de r , s , k , ρ_1 , $\rho_2 = 0.1$; 0.3 e 0.5.

$\rho_2 = 0.1$				ρ_1						
r	s	k	H^*	- .9000	- .5000	- .1000	.0000	.1000	.5000	.9000
2	3	3	1	-	-	.0773	.1105	.1492	.3580	.7151
			2	-	-	.0049	.0196	.0499	.3509	.8576
			3	-	-	.0049	.0196	.0499	.3509	.8576
		5	1	-	-	.1007	.1583	.2194	.4736	.7856
			2	-	-	.0000	.0046	.0505	.5171	.9209
			3	-	-	.0000	.0046	.0505	.5171	.9209
		10	1	-	-	-	-	.3409	.6077	.8502
			2	-	-	-	-	.0508	.7063	.9619
			3	-	-	-	-	.0508	.7063	.9609
2	5	3	1	-	-	.1376	.1750	.2162	.4194	.7449
			2	-	-	.0019	.0138	.0498	.5137	.9758
			3	-	-	.0019	.0138	.0498	.5137	.9758
		5	1	-	-	.1964	.2504	.3049	.5266	.8049
			2	-	-	.0000	.0018	.0497	.7201	.9922
			3	-	-	.0000	.0018	.0497	.7201	.9922
		10	1	-	-	-	-	.4414	.6508	.8831
			2	-	-	-	-	.0518	.8952	.9982
			3	-	-	-	-	.0518	.8952	.9982
5	3	2	1	-	.0085	.0792	.1201	.1745	.5407	.9678
			2	-	.0001	.0137	.0277	.0501	.2735	.8078
			3	-	.0000	.0086	.0222	.0501	.4650	.9940
		5	1	-	-	.1532	.2938	.4423	.8661	.9960
			2	-	-	.0000	.0033	.0500	.5361	.9262
			3	-	-	.0000	.0005	.0497	.9046	.9999
		10	1	-	-	-	-	.6966	.9588	.9998
			2	-	-	-	-	.0521	.7155	.9634
			3	-	-	-	-	.0561	.9873	1.0000
5	5	2	1	-	.0303	.1632	.2230	.2944	.6661	.9807
			2	-	.0000	.0084	.0224	.0499	.3962	.9554
			3	-	.0000	.0038	.0153	.0477	.6696	1.0000
		5	1	-	-	.3923	.5175	.6292	.9121	.9973
			2	-	-	.0000	.0012	.0510	.7431	.9933
			3	-	-	.0000	.0001	.0492	.9899	1.0000
		10	1	-	-	-	-	.8395	.9735	.9994
			2	-	-	-	-	.0534	.9013	.9983
			3	-	-	-	-	.0537	.9998	1.0000
10	10	2	1	-	.2877	.6480	.7329	.8080	.9775	1.0000
			2	-	.0000	.0037	.0189	.0635	.6867	.9994
			3	-	.0000	.0010	.0225	.1716	.9997	1.0000
		5	1	-	-	.9321	.9606	.9782	.9991	1.0000
			2	-	-	.0000	.0001	.0534	.9463	1.0000
			3	-	-	.0000	.0000	.1120	1.0000	1.0000
		10	1	-	-	-	-	.9978	.9999	1.0000
			2	-	-	-	-	.0515	.9932	1.0000
			3	-	-	-	-	.0984	1.0000	1.0000

TABELA A.13. Continuação para $\rho_2 = 0.3$ segundo ρ_1 .

$\rho_2 = 0.3$				ρ_1						
r	s	k	H*	-.0500	.0000	.1000	.2000	.5000	.7000	.9000
2	3	3	1	-	.2172	.2555	.2972	.4445	.5710	.7534
			2	-	.0000	.0015	.0140	.2123	.4812	.8177
			3	-	.0000	.0015	.0140	.2123	.4812	.8177
		5	1	-	-	-	.4788	.5578	.6692	.8153
			2	-	-	-	.0012	.3396	.6478	.8968
			3	-	-	-	.0012	.3396	.6478	.8968
		10	1	-	-	-	-	.8346	.8740	.9286
			2	-	-	-	-	.5365	.8034	.9498
			3	-	-	-	-	.5365	.8034	.9498
2	5	3	1	-	.3424	.3772	.4140	.5402	.6460	.6979
			2	-	.0000	.0003	.0086	.3021	.6847	.9603
			3	-	.0000	.0003	.0086	.3021	.6847	.9603
		5	1	-	-	-	.5214	.6366	.7256	.8454
			2	-	-	-	.0002	.4903	.8491	.9868
			3	-	-	-	.0002	.4903	.8491	.9868
		10	1	-	-	-	-	.7387	.8056	.8918
			2	-	-	-	-	.7431	.9527	.9969
			3	-	-	-	-	.7431	.9527	.9969
5	3	2	1	.2535	.2843	.3523	.4285	.6907	.8624	.9812
			2	.0011	.0025	.0087	.0229	.1640	.3899	.7574
			3	.0003	.0009	.0046	.0171	.2487	.6721	.9857
		5	1	-	-	-	.7924	.9315	.9780	.9978
			2	-	-	-	.0006	.3563	.6649	.9035
			3	-	-	-	.0000	.6902	.9721	.9998
		10	1	-	-	-	-	.9808	.9945	.9995
			2	-	-	-	-	.5481	.8103	.9517
			3	-	-	-	-	.9233	.9974	1.0000
5	5	2	1	.4984	.5295	.5930	.6570	.8389	.9349	.9919
			2	.0002	.0007	.0044	.0173	.2230	.5657	.9291
			3	.0000	.0001	.0018	.0118	.3751	.8851	.9998
		5	1	-	-	-	.9083	.9686	.9897	.9989
			2	-	-	-	.0001	.5175	.8643	.9886
			3	-	-	-	.0000	.8898	.9992	1.0000
		10	1	-	-	-	-	.9916	.9974	.9998
			2	-	-	-	-	.7548	.9558	.9971
			3	-	-	-	-	.9931	1.0000	1.0000
10	10	2	1	.9698	.9750	.9836	.9898	.9986	.9998	1.0000
			2	.0000	.0000	.0012	.0125	.4107	.8623	.9982
			3	.0000	.0000	.0001	.0104	.9648	1.0000	1.0000
		5	1	-	-	-	.9996	1.0000	1.0000	1.0000
			2	-	-	-	.0000	.7744	.9875	1.0000
			3	-	-	-	.0000	1.0000	1.0000	1.0000
		10	1	-	-	-	-	1.0000	1.0000	1.0000
			2	-	-	-	-	.9468	.9969	1.0000
			3	-	-	-	-	1.0000	1.0000	1.0000

TABELA A.13. Continuação para $\rho_2 = 0.5$ segundo ρ_1 .

$\rho_2 = 0.5$				ρ_1						
r	s	k	H*	.0000	.1000	.3000	.4000	.5000	.6000	.9000
2	3	3	1	-	-	.4119	.4559	.5038	.5568	.7796
			2	-	-	.0000	.0068	.0499	.1509	.7468
			3	-	-	.0000	.0068	.0499	.1509	.7468
		5	1	-	-	-	.5683	.6114	.6572	.8353
			2	-	-	-	.0000	.0505	.2419	.8519
			3	-	-	-	.0000	.0505	.2419	.8519
		10	1	-	-	-	-	.7209	.7509	.8856
			2	-	-	-	-	.0505	.4126	.9262
			3	-	-	-	-	.0505	.4126	.9262
2	5	3	1	-	-	.5339	.5694	.6078	.6500	.8264
			2	-	-	.0000	.0030	.0498	.2034	.9237
			3	-	-	.0000	.0030	.0498	.2034	.9237
		5	1	-	-	-	.6617	.6941	.7289	.8682
			2	-	-	-	.0000	.0497	.3429	.9729
			3	-	-	-	.0000	.0497	.3429	.9729
		10	1	-	-	-	-	.7822	.8080	.9078
			2	-	-	-	-	.0518	.5940	.9933
			3	-	-	-	-	.0518	.5940	.9933
5	3	2	1	-	.5937	.6746	.7171	.7610	.8062	.4496
			2	-	.0000	.0008	.0062	.0274	.0910	.7995
			3	-	.0000	.0013	.0105	.0501	.1644	.9574
		5	1	-	-	-	.8867	.9074	.9274	.9829
			2	-	-	-	.0000	.0204	.2449	.9623
			3	-	-	-	.0000	.0497	.4962	.9991
		10	1	-	-	-	-	.9540	.9643	.9918
			2	-	-	-	-	.0201	.4881	.9900
			3	-	-	-	-	.0561	.8090	.9999
5	5	2	1	-	.7451	.8315	.8707	.9064	.9376	.9956
			2	-	.0000	.0010	.0104	.0499	.1527	.8707
			3	-	.0000	.0002	.0052	.0477	.2224	.9981
		5	1	-	-	-	.9763	.9841	.9901	.9994
			2	-	-	-	.0000	.0510	.3662	.9763
			3	-	-	-	.0000	.0492	.7067	1.0000
		10	1	-	-	-	-	.9959	.9975	.9999
			2	-	-	-	-	.0534	.6085	.9938
			3	-	-	-	-	.0537	.9563	1.0000
10	10	2	1	-	.9968	.9989	.9994	.9997	.9999	1.0000
			2	-	.0000	.0001	.0054	.0635	.2719	.9926
			3	-	.0000	.0000	.0021	.1716	.8322	1.0000
		5	1	-	-	-	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
			2	-	-	-	.0000	.0534	.5836	.9998
			3	-	-	-	.0000	.1120	.9995	1.0000
		10	1	-	-	-	-	1.0000	1.0000	1.0000
			2	-	-	-	-	.0515	.8481	1.0000
			3	-	-	-	-	.0984	1.0000	1.0000

TABELA A.14. Probabilidades do erro tipo II, para $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ e $H_0^{(3)}$, ao nível nominal de significância 0.05, segundo os valores de $r, s, k, \rho_1, \rho_2=0.3$ e λ .

$\lambda=0$				ρ_1						
$\rho_2=0.3$										
r	s	k	H^*	-.0500	.0000	.1000	.2000	.5000	.7000	.9000
2	3	3	1	-	.7828	.7444	.7028	.5555	.4290	.2466
			2	-	1.0000	.9985	.9860	.7877	.5188	.1823
			3	-	1.0000	.9985	.9860	.7877	.5188	.1823
		5	1	-	-	-	.5912	.4422	.3308	.1847
			2	-	-	-	.9988	.6604	.3522	.1032
			3	-	-	-	.9988	.6604	.3522	.1032
		10	1	-	-	-	-	.1654	.1260	.0714
			2	-	-	-	-	.4635	.1966	.0502
			3	-	-	-	-	.4635	.1966	.0502
2	5	3	1	-	.6576	.6228	.5860	.4598	.3540	.2031
			2	-	1.0000	.9997	.9914	.6979	.3153	.0397
			3	-	1.0000	.9997	.9914	.6979	.3153	.0397
		5	1	-	-	-	.4786	.3634	.2744	.1546
			2	-	-	-	.9998	.5096	.1509	.0132
			3	-	-	-	.9998	.5096	.1509	.0132
		10	1	-	-	-	-	.2613	.1044	.1082
			2	-	-	-	-	.2569	.0473	.0031
			3	-	-	-	-	.2569	.0473	.0031
5	3	2	1	.7463	.7157	.6477	.5715	.3093	.1376	.0188
			2	.9989	.9975	.9913	.9771	.8360	.6101	.2426
			3	.9997	.9991	.9954	.9829	.7513	.3279	.0143
		5	1	-	-	-	.2076	.0685	.0220	.0022
			2	-	-	-	.9994	.6437	.3351	.0965
			3	-	-	-	1.0000	.3098	.0279	.0002
		10	1	-	-	-	-	.0192	.0055	.0005
			2	-	-	-	-	.4519	.1897	.0483
			3	-	-	-	-	.0767	.0026	.0000
5	5	2	1	.5016	.4705	.4070	.3430	.1611	.0651	.0081
			2	.9998	.9993	.9956	.9827	.7770	.4343	.0709
			3	1.0000	.9999	.9982	.9982	.6249	.1149	.0002
		5	1	-	-	-	.0917	.0314	.0103	.0011
			2	-	-	-	.9999	.4825	.1357	.0114
			3	-	-	-	1.0000	.1102	.0008	.0000
		10	1	-	-	-	-	.0084	.0026	.0002
			2	-	-	-	-	.2452	.0442	.0029
			3	-	-	-	-	.0069	.0000	.0000
10	10	2	1	.0302	.0250	.0164	.0102	.0014	.0002	.0000
			2	1.0000	1.0000	.9988	.9875	.5893	.1377	.0018
			3	1.0000	1.0000	.9999	.9896	.0352	.0000	.0000
		5	1	-	-	-	.0004	.0000	.0000	.0000
			2	-	-	-	1.0000	.2256	.0125	.0000
			3	-	-	-	1.0000	.0000	.0000	.0000
		10	1	-	-	-	-	.0000	.0000	.0000
			2	-	-	-	-	.0532	.0011	.0000
			3	-	-	-	-	.0000	.0000	.0000

TABELAS A.14. Continuação para $\lambda = 5$.

$\lambda = 5$		$\rho_2 = 0.9$		ρ_1						
r	s	k	H*	-.0500	.0000	.1000	.2000	.5000	.7000	.9000
2	3	3	1	-	.1705	.1452	.1237	.0772	.0567	.0417
			2	-	.9995	.9538	.7973	.2666	.0991	.0301
			3	-	.9995	.9538	.7973	.2666	.0991	.0301
		5	1	-	-	-	.0826	.0574	.0469	.0392
			2	-	-	-	.9385	.1519	.0537	.0227
			3	-	-	-	.9385	.1519	.0537	.0227
		10	1	-	-	-	-	.0387	.0377	.0368
			2	-	-	-	-	.0756	.0316	.0190
			3	-	-	-	-	.0756	.0316	.0190
2	5	3	1	-	.1018	.0913	.0820	.0598	.0487	.0399
			2	-	1.0000	.9894	.8901	.2635	.0642	.0086
			3	-	1.0000	.9894	.9801	.2635	.0642	.0086
		5	1	-	-	-	.0616	.0493	.0432	.0384
			2	-	-	-	.9861	.1306	.0255	.0051
			3	-	-	-	.9861	.1306	.0255	.0051
		10	1	-	-	-	-	.0425	.0397	.0374
			2	-	-	-	-	.0458	.0099	.0035
			3	-	-	-	-	.0458	.0099	.0035
5	3	2	1	.3231	.2913	.2319	.1789	.0642	.0238	.0055
			2	.9556	.9242	.8325	.7107	.3158	.1330	.0373
			3	.9967	.9922	.9690	.9121	.4487	.1081	.0027
		5	1	-	-	-	.0358	.0127	.0064	.0032
			2	-	-	-	.9425	.2368	.0498	.0224
			3	-	-	-	.9986	.0856	.0051	.0002
		10	1	-	-	-	-	.0061	.0040	.0028
			2	-	-	-	-	.0719	.0309	.0191
			3	-	-	-	-	.0144	.0007	.0001
5	5	2	1	.1316	.1176	.0925	.0712	.0276	.0121	.0042
			2	.9907	.9780	.9222	.8165	.3355	.1028	.0130
			3	.9997	.9990	.9907	.9534	.3873	.0374	.0000
		5	1	-	-	-	.0160	.0078	.0048	.0030
			2	-	-	-	.9883	.1143	.0227	.0050
			3	-	-	-	1.0000	.0311	.0002	.0000
		10	1	-	-	-	-	.0046	.0035	.0027
			2	-	-	-	-	.0428	.0095	.0035
			3	-	-	-	-	.0013	.0000	.0000
10	10	2	1	.0055	.0045	.0030	.0019	.0004	.0001	.0000
			2	.9997	.9982	.9766	.8882	.2465	.0303	.0005
			3	1.0000	1.0000	.9997	.9788	.0185	.0000	.0000
		5	1	-	-	-	.0002	.0000	.0000	.0000
			2	-	-	-	.9996	.0557	.0023	.0001
			3	-	-	-	1.0000	.0000	.0000	.0000
		10	1	-	-	-	-	.0000	.0000	.0000
			2	-	-	-	-	.0099	.0003	.0000
			3	-	-	-	-	.0000	.0000	.0000

TABELA A.14. Continuação para $\lambda = 20$.

$\lambda=20$				ρ_1						
$\rho_2 = 0.9$										
r	s	k	H*	-.0500	.0000	.1000	.2000	.5000	.7000	.9000
2	3	3	1	-	.0014	.0010	.0008	.0003	.0002	.0001
			2	-	.9810	.5371	.1761	.0052	.0007	.0001
			3	-	.9810	.5371	.1761	.0052	.0007	.0001
		5	1	-	-	-	.0005	.0003	.0002	.0002
			2	-	-	-	.3710	.0015	.0003	.0001
			3	-	-	-	.3710	.0015	.0003	.0001
		10	1	-	-	-	-	.0003	.0003	.0003
			2	-	-	-	-	.0006	.0002	.0001
			3	-	-	-	-	.0006	.0002	.0001
2	5	3	1	-	.0006	.0005	.0004	.0003	.0002	.0002
			2	-	.9992	.7706	.3127	.0068	.0005	.0000
			3	-	.9992	.7706	.3127	.0068	.0005	.0000
		5	1	-	-	-	.0004	.0003	.0002	.0002
			2	-	-	-	.6518	.0016	.0002	.0000
			3	-	-	-	.6518	.0016	.0002	.0000
		10	1	-	-	-	-	.0003	.0003	.0003
			2	-	-	-	-	.0004	.0001	.0000
			3	-	-	-	-	.0004	.0001	.0000
5	3	2	1	.0121	.0094	.0055	.0033	.0005	.0001	.0000
			2	.5075	.3824	.1976	.0934	.0074	.0012	.0002
			3	.9398	.8869	.7191	.4992	.0499	.0026	.0000
		5	1	-	-	-	.0003	.0001	.0001	.0000
			2	-	-	-	.3156	.0013	.0004	.0002
			3	-	-	-	.9048	.0013	.0000	.0000
		10	1	-	-	-	-	.0001	.0000	.0000
			2	-	-	-	-	.0006	.0002	.0002
			3	-	-	-	-	.0001	.0000	.0000
5	5	2	1	.0017	.0014	.0009	.0006	.0002	.0001	.0000
			2	.7607	.6273	.3665	.1812	.0110	.0011	.0001
			3	.9922	.9767	.8854	.8821	.0543	.0010	.0000
		5	1	-	-	-	.0001	.0001	.0001	.0000
			2	-	-	-	.6144	.0013	.0002	.0001
			3	-	-	-	.9934	.0005	.0000	.0000
		10	1	-	-	-	-	.0001	.0000	.0000
			2	-	-	-	-	.0004	.0001	.0000
			3	-	-	-	-	.0000	.0000	.0000
10	10	2	1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
			2	.9560	.8742	.5813	.2825	.0082	.0003	.0000
			3	1.0000	1.0000	.9966	.8992	.0022	.0000	.0000
		5	1	-	-	-	.0000	.0000	.0000	.0000
			2	-	-	-	.9292	.0007	.0000	.0000
			3	-	-	-	1.0000	.0000	.0000	.0000
		10	1	-	-	-	-	.0000	.0000	.0000
			2	-	-	-	-	.0001	.0000	.0000
			3	-	-	-	-	.0000	.0000	.0000