ANÁLISE INTRABLOCOS DE EXPERIMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS COM ALGUNS TRATAMENTOS COMUNS ADICIONADOS EM CADA BLOCO

ANTÔNIO CARLOS DE OLIVEIRA

Orientador : Prof. Dr. DÉCIO BARBIN

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Outubro, 1985

A Deus,

A meu pai (in memoriam),

A minha mãe e as minhas irmãs

A minha esposa Flávia,

A minha filha Paula,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Décio Barbin, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela valiosa orientação na realização deste trabalho.

Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, na pessoa de seu Coordenador Prof. Dr. Humberto de Campos, pela acolhida e ensinamentos prestados.

Ao Centro Nacional de Pesquisa de Milho e Sorgo, da EMBRAPA, pela oportunidade concedida para a realização do Curso.

Ao Dr. Roland Vencovsky, pela revisão do SUMMARY.

A Srta. Maria Izalina Ferreira Alves, pelo trabalho datilográfico e pela amizade.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela amizade e cooperação.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação, pelo convívio amigo.

Í N D I C E

	Pág.
RESUMO	viii
SUMMARY	xi
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 - Ensaios em Blocos Incompletos Balanceados ..	5
2.1.1 - Definição	5
2.1.2 - Classificação	6
2.1.3 - Análise de variância intrablocos ..	7
2.2 - Ensaios em Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados	10
2.2.1 - Generalidades	10
2.2.2 - Classificação	16
2.2.2.1 - Grupo divisível	16
2.2.2.2 - Triangular	19
2.2.2.3 - Tipo quadrado latino	20
2.2.2.4 - Cíclico	21
2.2.2.5 - Simples	23
2.2.3 - Construção de delineamentos PBIB ..	29
2.2.4 - Análise de variância intrablocos ..	30
2.2.5 - Variância da estimativa de um <u>contras</u> <u>te</u> entre duas médias de tratamentos	33
2.3 - Ensaios em Blocos Incompletos com Alguns Tra <u>ta</u> tamentos Adicionais em Cada Bloco	35

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	41
3.1 - Introdução	41
3.2 - Modelo Matemático	43
3.3 - Sistema de Equações Normais	45
3.4 - Estimação do Efeito da Média Geral	49
3.5 - Estimação dos Efeitos de Tratamentos Ajusta dos para Blocos	50
3.5.1 - Método clássico	50
3.5.2 - Método simplificado	53
3.5.2.1 - Estimação dos efeitos dos tratamentos adicionais ...	53
3.5.2.2 - Estimação dos efeitos dos tratamentos originais com m classes de associados ..	55
3.5.2.3 - Estimação dos efeitos dos tratamentos originais com duas classes de associados	67
3.5.2.4 - Caso especial: Estimação dos efeitos dos tratamen- mentos originais em deli- neamento BIB	72
3.6 - Propriedades das Soluções do Sistema de Equa- ções Normais com Efeitos de Blocos Eliminados	74
3.6.1 - Esperança matemática de $\hat{\tau}$	75
3.6.2 - Matriz de dispersão para $\hat{\tau}$	77

	Pág.
3.7 - Somas de Quadrados	80
3.8 - Esperanças Matemáticas das Somas de Quadrados	88
3.8.1 - Esperança matemática da $SQ\hat{m}$	88
3.8.2 - Esperança matemática de $\hat{\tau}'Q$	90
3.8.3 - Esperança matemática de $B'K^{-1}B - C_0$	91
3.8.4 - Esperança matemática de $\underline{y}'\underline{y} - C_0$..	93
3.8.5 - Esperança matemática da $SQRes\acute{d}uo$..	94
3.8.6 - Esperança matemática da $SQTad.$	95
3.8.7 - Esperança matemática da $SQTipos$...	97
3.8.8 - Esperança matemática da $SQTor.(aj.)$	100
3.9 - Distribuição das Formas Quadráticas	102
3.9.1 - Distribuição da $SQTaj./\sigma^2$	103
3.9.2 - Distribuição da $SQTad./\sigma^2$	105
3.9.3 - Distribuição da $SQTipos/\sigma^2$	107
3.9.4 - Distribuição da $SQTor.(aj.)/\sigma^2$	110
3.9.5 - Distribuição da $SQBlocos/\sigma^2$	113
3.9.6 - Distribuição da $SQRes\acute{d}uo/\sigma^2$	115
3.9.7 - Distribuição do quociente $(SQTaj./n_1)/$ (SQR/n_6)	117
3.9.8 - Distribuição do quociente $(SQTad./n_2)/$ (SQR/n_6)	119
3.9.9 - Distribuição do quociente $(SQTipos/n_3)/$ (SQR/n_6)	121

3.9.10 - Distribuição do quociente $(SQ_{Tr.aj.}/n_4)/$ (SQ_R/n_6)	123
3.10 - Estimadores das Médias de Tratamentos, Ajustadas para Blocos	124
3.11 - Quadro da Análise de Variância	125
3.12 - Variância da Estimativa de um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos	127
3.13 - Testes de Significâncias	130
3.13.1 - Teste de significância para tratamentos ajustados para blocos	130
3.13.2 - Teste de significância para tratamentos adicionais	131
3.13.3 - Teste de significância para tipos de tratamentos	132
3.13.4 - Teste de significância para tratamentos originais ajustados para blocos	133
4. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO	135
5. CONCLUSÕES	147
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	150

ANÁLISE INTRABLOCOS DE EXPERIMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS
PARCIALMENTE BALANCEADOS COM ALGUNS TRATAMENTOS
COMUNS ADICIONADOS EM CADA BLOCO

Autor: Antonio Carlos de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Décio Barbin

R E S U M O

No presente trabalho considera-se o caso de um ensaio em blocos incompletos parcialmente balanceados, aumentado pela adição de alguns tratamentos comuns a todos os blocos. Os tratamentos do delineamento inicial são designados de "tratamentos originais", e, aqueles que foram adicionados, de "tratamentos adicionais". O objetivo foi apresentar um método geral de análise para esse tipo de ensaio.

Os parâmetros do delineamento inicial foram definidos como:

v: número de tratamentos,

b: número de blocos,

r: número de repetições para cada tratamento,

k: número de parcelas por bloco;

e ainda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, n_1, n_2, \dots, n_m, p_{jk}^i$ ($i, j, k=1, 2, \dots, \dots, m$), definidos conforme BOSE e NAIR (1939).

A inclusão de c tratamentos adicionais em ca da bloco do experimento, resultou em um delineamento aumentado, com os seguintes parâmetros:

$v' = v+c$ (número total de tratamentos),

b : número de blocos,

$k' = k+c$ (número de parcelas por bloco),

$k'b = n$ (número total de parcelas),

r' : número de repetições de cada tratamento $\left\{ \begin{array}{l} = r \text{ (para os tratamentos originais)} \\ = b \text{ (para os tratamentos adicionais)} \end{array} \right.$

$\lambda_{uu'}$: número de blocos onde os tratamentos u e u' ocorrem juntos. $\left\{ \begin{array}{l} = \lambda_{ss*} \text{ (para os tratamentos originais } s \text{ e } s^*) \\ = b \text{ (para dois tratamentos adicionais),} \\ = r \text{ (para um tratamento original e outro adicional)} \end{array} \right.$

O modelo matemático adotado foi o seguinte:

$$y_{uh} = m + t_u + b_h + e_{uh} ,$$

onde,

y_{uh} é a observação do u -ésimo tratamento no h -ésimo bloco;

m é a média geral;

t_u é o efeito do u -ésimo tratamento ($u=1,2,\dots,v'$);

b_h é o efeito do h -ésimo bloco ($h=1,2,\dots,b$);

e_{uh} é o erro experimental associado à observação y_{uh} , onde se supõe que os e_{uh} 's são independentes e normalmente distribuídos, com média zero e variância σ^2 .

Sob as condições anteriores são determinados: o sistema de equações normais, os estimadores dos efeitos dos parâmetros, a matriz de dispersão para os efeitos dos tratamentos, as somas de quadrados e suas esperanças matemáticas; e ainda, as distribuições das formas quadráticas e a variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos.

São apresentados também os estimadores dos efeitos dos tratamentos originais, a soma de quadrados desses tratamentos e a variância da estimativa de um contraste entre duas médias, para o caso em que o delineamento inicial é em blocos incompletos balanceados.

Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar o método proposto.

INTRABLOCK ANALYSIS OF EXPERIMENTS IN PARTIALLY
BALANCED INCOMPLETE BLOCKS WITH SOME COMMONS
TREATMENTS ADDED TO EACH BLOCK

Author: Antonio Carlos de Oliveira

Adviser: Prof. Dr. Décio Barbin

S U M M A R Y

A statistical investigation was conducted for the case in which experiments are designed in partially balanced incomplete blocks, but some common treatments are added to each block. Treatments of the basic or initial design were designated as "original treatments" and the other ones as "additional treatments". The main objective was to develop a general method of analysis for this specific kind of experiments.

The following parameters were considered as pertinent to the initial design:

v: number of treatments,

b: number of blocks,

r: number of replication of each treatment,

k: number of plots per block;

and $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, n_1, n_2, \dots, n_m, p_{j k}^i$ ($i, j, k=1, 2, \dots, m$), defined according to BOSE and NAIR (1939).

The inclusion of c additional treatments to each block, resulted in augmented design, with the following parameters:

$$v' = v+c \text{ (total number of treatments),}$$

$$b: \text{ number of blocks,}$$

$$k' = k+c \text{ (number of plots per block),}$$

$$k'b = n \text{ (total number of plots),}$$

$$r': \begin{cases} \text{number of replications} \\ \text{of each treatment} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} = r \text{ (for original treatments)} \\ = b \text{ (for additional treatments)} \end{array} \right.$$

$$\lambda_{uu'}: \begin{cases} \text{number of blocks in} \\ \text{which treatments } u \\ \text{and } u' \text{ occur together} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} = \lambda_{ss*} \text{ (for two original treatments)} \\ = b \text{ (for two additional treatments)} \\ = r \text{ (for an original and an additional treatment)} \end{array} \right.$$

The following mathematical model was considered:

$$y_{uh} = m + t_u + b_h + e_{uh},$$

where,

- y_{uh} denotes the observation of the u^{th} treatment in the h^{th} block;
- m denotes the effect of the general mean;
- t_u denotes the u^{th} treatment effect ($u=1,2,\dots,v'$);
- b_h denotes the h^{th} block effect ($h=1,2,\dots,b$);
- e_{uh} is a random error component with expectation zero and variance σ^2 , the e_{uh} 's being distributed independently.

Under the given conditions, the solution of the normal equations, the dispersion matrix for treatment effects, the sum of squares, the expectations of sum of squares, the distributions of the quadratic forms, and the variances of the treatment differences, were obtained.

The estimators of the original treatment effects, its sums of squares, and the variances of the treatments differences were also obtained, when the balanced incomplete block design is used as the initial design.

A numerical example is used to illustrate the proposed method.

1. INTRODUÇÃO

Quando um grande número de tratamentos deve ser comparado em ensaios de campo, o que acontece frequentemente na pesquisa agrícola em programas de avaliação e melhoramento de plantas, o pesquisador defronta-se com o problema da distribuição dos tratamentos na área experimental. Este aspecto reveste-se de maior importância nesse tipo de experimento, pela dificuldade em conseguir-se áreas relativamente homogêneas, principalmente quanto à fertilidade do solo, que proporcionem comparações mais precisas.

A eficiência dos delineamentos de FISHER (1925), amplamente conhecidos como blocos casualizados e quadrado latino, quando adotados nessa situação, é sensivelmente prejudicada, como ressaltam BOSE e NAIR (1939). Pa

ra estes autores a eficiência diminui à medida que o número de parcelas por bloco cresce a partir de dez ou doze. Além disso, um quadrado latino contendo o total de tratamentos é em geral impossível, não só pelo elevado número de repetições requerido, mas também pela grande quantidade de sementes que seria necessária, que quase sempre é limitada. O uso de blocos casualizados, ainda que possível, não é satisfatório quando cada bloco contém todos os tratamentos, visto que é improvável a eliminação das diferenças de fertilidade eficientemente, conforme relata YATES (1936).

Com o objetivo de eliminar-se a heterogeneidade dentro dos blocos, e assim contornar os problemas mencionados, YATES (1936) introduziu o delineamento de blocos incompletos, que é obtido modificando-se os blocos completos casualizados com respeito ao tipo de arranjo dos tratamentos, ou seja, a restrição de que o número de unidades experimentais por bloco seja igual ao número de tratamentos é dispensada. Neste tipo de arranjo modificado, o número de unidades por bloco é fixo, sendo menor do que o número de tratamentos, e estes são distribuídos nos blocos de tal forma que quaisquer dois tratamentos ocorram num bloco com igual frequência. Nessa situação todas as comparações entre tratamentos têm a mesma precisão, e o delineamento é chamado de blocos incompletos balanceados, e abreviadamen-

te de BIB ("Balanced incomplete block design") por diversos autores.

Os delineamentos do tipo BIB, segundo BOSE e NAIR (1939), são os mais eficientes entre todos os delineamentos incompletos, mas são possíveis em apenas um número limitado de casos. Além disso, há situações em que a utilização de tais delineamentos é praticamente impossível, devido ao excessivo número de repetições que é requerido. Por exemplo, um reticulado quadrado com 81 tratamentos exigiria 10 repetições para que a condição de balanceamento fosse satisfeita, o que em geral, não é viável na prática.

Para contornar esse problema, BOSE e NAIR (1939) introduziram os delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados, denominados de PBIB ("Partially balanced incomplete block design"), nos quais não há restrição quanto ao número de repetições. Estes delineamentos vêm sendo utilizados frequentemente na pesquisa agrícola quando o número de tratamentos a ser comparado é grande.

Há ainda situações em que se recomenda o uso de determinados tratamentos em todos os blocos. Isto ocorre, por exemplo, conforme salienta FERREIRA (1980), quando se deseja comparar alguns tratamentos novos com outros, de comportamento já conhecido, e que atuam como uma espécie de controle ou testemunha.

No presente trabalho considera-se o caso em que os tratamentos novos, denominados aqui de tratamentos originais, são distribuídos na área experimental conforme um delineamento PBIB, e as testemunhas, denominadas de tratamentos adicionais, são incluídas em cada bloco do ensaio. O objetivo é apresentar um método geral de análise intra-blocos para esse tipo de ensaio. Um exemplo numérico também é apresentado para ilustrar o método proposto.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - Ensaios em Blocos Incompletos Balanceados

2.1.1 - Definição

Segundo YATES (1936), um arranjo de v tratamentos em b blocos de k unidades experimentais, é chamado delineamento de blocos incompletos balanceados (BIB), se ele satisfaz às seguintes condições:

- i) cada bloco contém k diferentes tratamentos;
- ii) cada tratamento ocorre em r blocos;
- iii) quaisquer dois tratamentos ocorrem juntos em λ blocos.

Pela definição de delineamentos BIB, pode-se verificar, como mostra YATES (1936), que:

$$rv = bk \quad \text{e} \quad \lambda = r(k-1)/(v-1) \quad .$$

Estas igualdades definem as condições de balanceamento de um delineamento BIB.

2.1.2 - Classificação

Em geral, os delineamentos BIB são classificados em cinco diferentes tipos:

- i) TIPO I: Os blocos podem ser agrupados em repetições, ou seja, em r conjuntos de n blocos cada, tal que cada conjunto forma uma repetição completa de todos os tratamentos.
- ii) TIPO II: Os blocos não podem ser reunidos em repetições, mas podem ser reunidos em grupos de repetições.
- iii) TIPO III: Os blocos não podem ser reunidos em repetições nem em grupos de repetições.
- iv) TIPO IV: O número de tratamentos é igual ao número de blocos.
- v) TIPO V: Pequenos experimentos.

Os delineamentos TIPO I e TIPO III são denominados por NAIR (1944) de "resolvable designs" e "non-resolvable designs", respectivamente. Os demais tipos são men

cionados por COCHRAN e COX (1957), sendo que o TIPO IV também é conhecido como delineamento BIB simétrico.

Uma classe importante de delineamentos TIPO I é constituída dos chamados reticulados quadrados ("Squares lattices" ou "Two-dimensional lattices"), assim denominados por PIMENTEL GOMES (1976). Nesses delineamentos o número de tratamentos deve ser um quadrado perfeito e o tamanho do bloco é a raiz quadrada desse número, ou seja, $v = k^2$.

Nos reticulados quadrados balanceados todo par de tratamentos ocorre no mesmo bloco uma única vez. Como consequência, a condição de balanceamento $\lambda(v-1) = r(k-1)$ conduz a $k+1$ repetições. Esses delineamentos, no entanto, só são viáveis se k é um número primo ou uma potência de primo, conforme mencionam COCHRAN e COX (1957).

2.1.3 - Análise de variância intrablocos

Como ressalta IEMMA (1981), os autores são unânimes no que se refere à decomposição da soma de quadrados total na análise de variância. A análise é feita como se o delineamento fosse em blocos casualizados completos, com a diferença de que a soma de quadrados de tratamentos é ajustada para efeitos de blocos. Nos delineamentos TIPO I

e TIPO II a soma de quadrados de blocos pode ainda ser decomposta.

Para a estimação dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos, os autores em geral consideram o seguinte sistema de equações normais:

$$C\hat{\tau} = Q ,$$

onde C é uma matriz singular, de dimensões $v \times v$ e característica $(v-1)$, com os elementos:

$$c_{ii'} = \begin{cases} r(1 - \frac{1}{k}) & , \text{ se } i=i' \\ - \lambda/k & , \text{ se } i \neq i' \end{cases}$$

$\hat{\tau}$ é o vetor dos efeitos dos tratamentos estimados, de dimensões $v \times 1$, e

Q é um vetor de dimensões $v \times 1$ com os elementos Q_i ($i=1,2,\dots,v$) definidos por:

$$Q_i = T_i - \frac{1}{k} A_i ,$$

sendo T_i o total das unidades experimentais que contêm o i -ésimo tratamento, e A_i o total dos blocos que contêm esse mesmo tratamento.

A solução do sistema de equações é apresentada por PIMENTEL GOMES (1967) considerando uma matriz de

de restrições A de dimensões $v \times v$, tal que $A\hat{\tau} = \phi$. Fazendo então $C-A = M$, matriz esta não singular, o autor apresenta a solução para $\hat{\tau}$, ou seja:

$$\hat{\tau} = M^{-1}Q$$

Uma vez estimado o vetor dos efeitos de tratamentos, a soma de quadrados para tratamentos ajustada para blocos é dada por:

$$SQT(aj.) = \hat{\tau}'Q$$

Como relata CHAKRABARTI (1962), as equações normais $C\hat{\tau} = Q$ são satisfeitas para $\hat{\tau} = (k/v\lambda)Q$. Logo, a soma de quadrados para tratamentos, ajustada para blocos, pode ser colocada na seguinte forma:

$$SQT(aj.) = \frac{k}{v\lambda} Q'Q$$

CHAKRABARTI (1962) menciona ainda que o melhor estimador de $\tau_i - \tau_{i'}$, é $(k/v\lambda)(Q_i - Q_{i'})$, com variância $\sigma^2(2k/v\lambda)$, ou seja:

$$\begin{aligned} V(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}) &= V\left[\frac{k}{v\lambda} (Q_i - Q_{i'})\right] \\ &= \frac{2\sigma^2}{r} \frac{kr}{v\lambda} \\ &= \frac{2\sigma^2}{r} \frac{kr(k-1)}{v\lambda(k-1)} \end{aligned}$$

$$V(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}) = \frac{2\sigma^2}{r} \frac{1 - \frac{1}{v}}{1 - \frac{1}{k}}.$$

A variância correspondente no caso de blocos casualizados é $2\sigma^2/r$ (supondo o mesmo σ^2 para ambos os casos). Assim, a eficiência dos delineamentos BIB em relação a blocos casualizados é definida por diversos autores como:

$$E = \frac{v\lambda}{kr} = \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{v}} < 1.$$

2.2 - Ensaios em Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados

2.2.1 - Generalidades

Para BOSE e NAIR (1939) um delineamento em blocos incompletos é parcialmente balanceado, se ele satisfaz às seguintes condições:

- i) Os tratamentos são agrupados em b blocos de k unidades cada, sendo as unidades do mesmo bloco constituídas de diferentes tratamentos.
- ii) Há v tratamentos que ocorrem em r blocos.
- iii) Fixando-se qualquer tratamento, os demais podem ser divididos em m grupos de tamanhos $n_1, n_2, \dots, n_m$.

tal que os tratamentos do i -ésimo grupo ocorram juntos com o dado tratamento em λ_i blocos. Os tratamentos do i -ésimo grupo são chamados de i -ésimos associados do tratamento em questão e os valores de $n_1, n_2, \dots, n_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ são independentes do tratamento inicialmente considerado.

- iv) Se o tratamento A é i -ésimo associado de B, então o tratamento B é i -ésimo associado de A. Se A e B são i -ésimos associados, então o número de tratamentos comuns aos j -ésimos associados de A e aos k -ésimos associados de B é p_{jk}^i , e é independente do par de tratamentos considerado. Também, $p_{jk}^i = p_{kj}^i$.

Os parâmetros $v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, n_1, n_2, \dots, n_m$ são chamados "parâmetros do primeiro tipo", e os p_{jk}^i ($i, j, k=1, 2, \dots, m$) de "parâmetros do segundo tipo". Assim, há $2m+4$ parâmetros do primeiro tipo e $m^2(m+1)/2$ parâmetros do segundo tipo (visto que $p_{jk}^i = p_{kj}^i$).

BOSE e NAIR (1939) mencionam ainda que quando $m=1$, o delineamento se transforma em blocos incompletos balanceados. O mesmo acontece quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$, conforme relata NAIR (1944).

Na definição original de delineamento PBIB os parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ eram considerados como sendo di

ferentes. A modificação introduzida por Nair e Rao (1942), citados por BOSE e SHIMAMOTO (1952), permite que alguns λ 's sejam iguais.

BOSE e CLATWORTHY (1955) mostram que é desnecessária a suposição de que todos os parâmetros p_{jk}^i sejam constantes no caso de delineamentos com duas classes de associados. Segundo os autores, se se assume que n_1 , n_2 , p_{11}^1 e p_{11}^2 são constantes, todas as outras condições automaticamente são satisfeitas.

Segundo observam BOSE e NAIR (1939), se verificam as seguintes relações entre os parâmetros:

$$i) \quad vr = bk;$$

$$ii) \quad n_1 + n_2 + \dots + n_m = v-1;$$

$$iii) \quad n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \dots + n_m\lambda_m = r(k-1);$$

$$iv) \quad \sum_{k=1}^m p_{jk}^i = n_j \quad (\text{se } i \neq j);$$

$$= n_j - 1 \quad (\text{se } i = j);$$

$$iv) \quad n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j.$$

BOSE e NAIR (1939) mostram que se os parâmetros do primeiro tipo satisfazem aos itens (i), (ii) e (iii), então em vista das relações (iv) e (v), somente $m(m^2 - 1)/6$ dos parâmetros do segundo tipo são independentes. Esses au

tores relatam que os parâmetros p_{jk}^i podem ser arranjados em matrizes simétricas $P_i = (p_{jk}^i)$, para $i=1,2,\dots,m$, onde p_{jk}^i é o (j,k) -ésimo termo da matriz P_i .

Os delineamentos parcialmente balanceados com apenas duas classes de associados ($m=2$) são de especial interesse, conforme salientam BOSE e SHIMAMOTO (1952). Nesse caso há 8 parâmetros do primeiro tipo ($v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, n_1$ e n_2) conectados pelas relações (i), (ii) e (iii), e 6 parâmetros do segundo tipo ($p_{jk}^i; i,j,k=1,2$) conectados pelas relações (iv) e (v). Os parâmetros do segundo tipo podem ser apresentados então como elementos de duas matrizes simétricas:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

BOSE e SHIMAMOTO (1952) relatam que a relação de associação entre os tratamentos nos delineamentos PBIB pode ser estabelecida através de uma regra, que informa que tipo de associados dois dados tratamentos são. Em particular, quando $m=2$, a regra especifica se dois tratamentos são primeiros ou segundos associados. A regra deve ser tal que as condições impostas na definição dos delineamentos PBIB sejam satisfeitas. Como ilustração os autores consideram um experimento em que $v=10$ e $m=2$. Os 10 trata-

mentos $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são então arranjados no seguinte esquema de associação:

*	a	b	c	d
a	*	e	f	g
b	e	*	h	
c	f	h	*	
d	g	i	j	*

A regra de associação é a seguinte: Dois tratamentos são primeiros associados se e somente se eles ocorrem juntos na mesma coluna do esquema, e são segundos associados em caso contrário. Pode-se verificar então que cada tratamento tem 6 primeiros associados ($n_1=6$) e 3 segundos associados ($n_2=3$). Exemplificando, os primeiros e segundos associados de a, b e i são dados a seguir:

Tratamento	Primeiros associados	Segundos associados
a	b, c, d, e, f, g	i, j, h
b	a, c, d, e, h, i	f, g, j
i	b, e, h, d, g, j	a, c, f

Os tratamentos a e b são primeiros associa-dos. O número de tratamentos que são primeiros associados de a e também primeiros associados de b é 3; tais tratamen-tos são c, d e e. Portanto, $p_{11}^1 = 3$. Pode-se verificar que

com quaisquer dois tratamentos que sejam primeiros associados obtêm-se exatamente 3 tratamentos que são primeiros associados de ambos. Isto verifica a condição de constância de p_{11}^1 para qualquer par de tratamentos. Por outro lado, f e g são os únicos tratamentos comuns aos primeiros associados de a e segundos associados de b . Logo, $p_{12}^1 = 2$, que é constante para qualquer par de tratamentos considerado. O mesmo se verifica para os outros p_{jk}^i 's.

Os parâmetros p_{jk}^i 's, no exemplo, quando apresentados na forma proposta por BOSE e NAIR (1939), são

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

BOSE e SHIMAMOTO (1952) relatam ainda que para obter-se um delineamento baseado no esquema de associação anteriormente mencionado, deve-se arranjar os 10 tratamentos dentro dos blocos, satisfazendo as condições da definição de delineamentos PBIB. O delineamento resultante é classificado como triangular.

2.2.2 - Classificação

Para BOSE e SHIMAMOTO (1952) a divisão dos delineamentos PBIB em um pequeno número de tipos distintos simplifica a computação numérica, bem como a interpretação dos resultados. Assim, dependendo da natureza do esquema de associação entre os tratamentos, classificam os delineamentos com duas classes de associados, em cinco diferentes tipos: Grupo divisível, triangular, quadrado latino, cúbico e simples. A definição de cada tipo e os respectivos esquemas de associação, segundo esses autores, são apresentados a seguir.

2.2.2.1 - Grupo divisível

Um delineamento PBIB com duas classes de associados é do tipo grupo divisível (GD) se há $v=mn$ tratamentos, e estes podem ser divididos em m grupos de n tratamentos cada, de forma que quaisquer dois tratamentos do mesmo grupo são primeiros associados e dois tratamentos em grupos diferentes são segundos associados. O esquema de associação pode ser apresentado pela reunião dos tratamentos em um retângulo, onde as colunas formam os grupos. Nesse caso tem-se que:

$$n_1 = n-1 \quad , \quad n_2 = n(m-1) \quad ,$$

$$(n-1)\lambda_1 + n(m-1)\lambda_2 = r(k-1) \quad ,$$

e os parâmetros do segundo tipo são determinados unicamente por m e n , como a seguir:

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(m-1) \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(m-2) \end{bmatrix}$$

Dependendo dos valores dos λ 's, os delineamentos GD são subdivididos por BOSE e CONNOR (1952) em três classes:

- i) Singular (S), se $r=\lambda_1$;
- ii) Semiregular (SR), se $r > \lambda_1$ e $rk=v\lambda_2$;
- iii) Regular (R), se $r > \lambda_1$ e $rk > v\lambda_2$.

BOSE E SHIMAMOTO (1952) relatam que um delineamento GD singular é sempre derivado de um delineamento BIB, substituindo-se cada tratamento por um grupo de n tratamentos. Os grupos resultantes formam o esquema de associação entre os tratamentos. Como ilustração os autores consideram o delineamento BIB com os parâmetros $v^*=b^*=7$, $r^*=k^*=3$, $\lambda^*=1$. O plano experimental para esse caso é dado a seguir, onde as colunas representam os blocos:

a	b	c	d	e	f	g
b	c	d	e	f	g	a
d	e	f	g	a	b	c

Tomando-se $n=2$, pode-se então substituir o tratamento $\underline{a}$ por $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$, fazendo-se o mesmo para os outros tratamentos. Obtém-se assim o delineamento GD singular com os parâmetros

$$v=14, \quad b=7, \quad r=3, \quad k=6, \quad \lambda_1=3, \quad \lambda_2=1, \quad m=7, \quad n=2,$$

e o seguinte plano experimental

BLOCO 1	BLOCO 2	BLOCO 3	BLOCO 4	BLOCO 5	BLOCO 6	BLOCO 7
a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2
b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1
b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2	a_2
d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	b_1	c_1
d_2	e_2	f_2	g_2	a_2	b_2	c_2

O esquema de associação é

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2

Os autores mencionam ainda que em geral, em correspondência ao delineamento BIB com parâmetros v^* , b^* ,

r^* , k^* , λ^* , tem-se um delineamento GD singular com os parâmetros

$$v=nv^*, \quad b=b^*, \quad r=r^*, \quad k=nk^*, \quad \lambda_1=r, \quad \lambda_2=\lambda^*, \quad m=v^*, n.$$

2.2.2.2 - Triangular

Neste caso tem-se $v=n(n-1)/2$, e o esquema de associação dos tratamentos é uma matriz de n linhas e n colunas com as seguintes propriedades:

- i) As posições na diagonal principal são vazias.
- ii) As $n(n-1)/2$ posições acima da diagonal principal são ocupadas pelos números $1, 2, \dots, n(n-1)/2$, correspondentes aos tratamentos.
- iii) As $n(n-1)/2$ posições abaixo da diagonal principal são ocupadas, tal que a matriz seja simétrica.
- iv) Dois tratamentos que ocorram na mesma coluna são primeiros associados, enquanto que em caso contrário são segundos associados.

No caso geral verificam-se as seguintes relações:

$$n_1 = 2n-4, \quad n_2 = (n-2)(n-3)/2$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} n-2 & n-3 \\ n-3 & (n-3)(n-4)/2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2n-8 \\ 2n-8 & (n-4)(n-5)/2 \end{pmatrix}$$

BOSE e NAIR (1939) mencionam que um certo número de delineamentos PBIB pode ser obtido, tomando-se em um delineamento BIB, os blocos como tratamentos e estes como blocos. SHRIKHANDE (1952) ressalta que esse processo é sempre válido para delineamentos BIB com parâmetros v^* , b^* , r^* , k^* , λ^* nos seguintes casos:

$$(a) \lambda^*=1;$$

$$(b) r^*=k, k^*=k-2, \lambda^*=2.$$

Segundo BOSE e SHIMAMOTO (1952), os delineamentos PBIB, correspondentes ao caso (b), são do tipo triangular com os seguintes parâmetros:

$$v=k(k-1)/2, \quad b=(k-1)(k-2)/2, \quad r=k-2, \quad k=k,$$

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=2;$$

$$n_1=2k-4, \quad n_2=(k-2)(k-3)/2;$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} k-2 & k-3 \\ k-3 & (k-3)(k-4)/2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2k-8 \\ 2k-8 & (k-4)(k-5)/2 \end{pmatrix}$$

2.2.2.3 - Tipo quadrado latino

Um delineamento PBIB com duas classes de associados é do tipo quadrado latino com i restrições (L_i) se os $v=s^2$ tratamentos satisfazem ao seguinte esquema de as-

sociação: Os s^2 tratamentos são arranjados em um conjunto quadrado $s \times s$ e $i-2$ quadrados latinos, mutuamente ortogonais, são superpostos. Dois tratamentos são primeiros associados se e somente se eles ocorrem na mesma linha ou coluna do conjunto, ou nas posições ocupadas pela mesma letra em qualquer dos quadrados latinos. Em outros casos eles são segundos associados. As seguintes relações se verificam:

$$n_1 = i(s-1) \quad , \quad n_2 = (s-1)(s-i+1) \quad ,$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} i^2-3i+s & (i-1)(s-i+1) \\ (i-1)(s-i+1) & (s-i)(s-i+1) \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} i(i-1) & i(s-i) \\ i(s-i) & (s-i)^2+i-2 \end{pmatrix}$$

2.2.2.4 - Cíclico

Um delineamento PBIB com duas classes de associados é chamado cíclico (C) se o conjunto de primeiros associados do i -ésimo tratamento é $(i+d_1, i+d_2, \dots, i+d_{n_1})$ módulo v , onde os d elementos satisfazem às seguintes condições:

- i) Os d elementos são todos diferentes entre si, e $0 < d_j < v$ para $j=1, 2, \dots, n_1$.
- ii) Entre as $n_1(n_1-1)$ diferenças $d_j-d_{j'}$, ($j, j'=1, 2, \dots, n_1$, $j \neq j'$) reduzidas a módulo v , cada um dos elemenu

tos $d_1, d_2, \dots, d_{n_1}$ ocorre α vezes, enquanto cada um dos elementos $e_1, e_2, \dots, e_{n_2}$ ocorre β vezes, onde $d_1, d_2, \dots, d_{n_1}, e_1, e_2, \dots, e_{n_2}$ são $v-1$ elementos diferentes entre si. É necessário que

$$n_1 \alpha + n_2 \beta = n_1 (n_1 - 1) .$$

Os parâmetros p_{jk}^i são dados por

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha & n_1 - \alpha - 1 \\ n_1 - \alpha - 1 & n_2 - n_1 + \alpha + 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \beta & n_1 - \beta \\ n_1 - \beta & n_2 - n_1 + \beta - 1 \end{pmatrix}$$

Esses parâmetros são apresentados por RAGHAVARAO (1971) na seguinte forma:

$$v = 4t+1, \quad n_1 = n_2 = 2t,$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} t-1 & t \\ t & t \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} t & t \\ t & t-1 \end{pmatrix}$$

BOSE e SHIMAMOTO (1952) apresentam uma ilustração de delineamento do tipo cíclico considerando os parâmetros $v=13, b=13, r=3, k=3, \lambda_1=1, \lambda_2=0, n_1=6, n_2=6, \alpha=2, \beta=3$. O esquema de associação, definido pelo conjunto de d 's, é

$$d_1=2, \quad d_2=5, \quad d_3=6, \quad d_4=7, \quad d_5=8, \quad d_6=11,$$

e o bloco inicial é (1, 3, 9). Todos os blocos são obtidos a partir do bloco inicial adicionando-se $j-1$ a todo tratamento ($j=1,2,\dots,v$), com redução à módulo v .

Os autores observam que entre as diferenças $d_j - d_{j-1}$, reduzidas a módulo 13, cada d ocorre duas vezes, enquanto que qualquer outro inteiro diferente de zero e menor que 13 ocorre três vezes. Os associados para um dado tratamento são facilmente determinados. Assim, os primeiros associados de 4 são os tratamentos 6, 9, 10, 11, 12 e 2. Considerando o bloco inicial (1, 3, 9), o delineamento completo é dado por (as colunas são os blocos):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Rep. 1
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	Rep. 2
9	10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	Rep. 3

2.2.2.5 - Simples

O delineamento PBIB com duas classes de associados é chamado de simples se

$$a) \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0 \quad \text{ou} \quad b) \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0.$$

O caso b pode ser trocado para o caso (a) mudando-se a designação dos primeiros e segundos associados. Em geral o caso (a) é tomado como padrão. Um delineamento

do tipo simples pode também pertencer a um dos outros tipos já mencionados.

Ainda com respeito à classificação, os delineamentos PBIB são subdivididos por NAIR (1944), seguindo o mesmo princípio empregado nos delineamentos BIB, em dois tipos:

- a) "Resolvable design": Os blocos podem ser agrupados em repetições, isto é, em r conjuntos de n blocos cada.
- b) "Non-resolvable design": Os blocos não podem ser agrupados em repetições.

Os delineamentos onde os blocos podem ser agrupados em repetições ("resolvable designs") formam uma importante classe de delineamentos PBIB. Entre eles destacam-se os reticulados quadrados ("square lattices") e, conforme NAIR (1951, 1952), os reticulados retangulares simples ("Simple rectangular lattice") e alguns reticulados retangulares triplos ("Triple rectangular lattice").

COCHRAN e COX (1957) classificam os reticulados quadrados parcialmente balanceados em cinco diferentes tipos, e para cada tipo fazem os seguintes comentários:

i) Reticulado simples (duas repetições)

Neste caso são usadas apenas duas repetições. É possível assim o uso de reticulados parcialmente balanceados para a avaliação de 36, 100 e 144 tratamentos, o que não seria possível no caso de delineamentos balanceados.

Para 9 e 16 tratamentos é impossível que os reticulados simples sejam mais precisos do que blocos casualizados, a menos que a variação entre blocos incompletos seja maior quando comparada com a variação dentro dos mesmos blocos. Além disso os números de graus de liberdade para a estimação do erro experimental nos dois casos são somente 4 e 9, respectivamente, contra 9 e 16 para blocos casualizados.

ii) Reticulado triplo (três repetições)

Neste caso, das $k+1$ repetições do delineamento balanceado, três repetições são usadas. As mesmas precauções mencionadas para reticulado simples, devem ser observadas aqui com a utilização de 9 tratamentos.

iii) Quatro repetições

Este delineamento pode ser obtido duplicando-se o reticulado simples ou usando-se um reticulado quá-

druplo, ou seja, as 4 primeiras repetições do reticulado balanceado.

iv) Cinco repetições

De um conjunto balanceado as primeiras 5 repetições são tomadas. Não há delineamentos desse tipo para 9, 36, 100 ou 144 tratamentos.

v) Maior número de repetições

Delineamentos balanceados podem ser usados para os seguintes números de tratamentos e repetições; 25, 6; 49, 8; 64, 9; 81, 10. Para 9 tratamentos em 8 ou 12 repetições, 16 tratamentos em 10 repetições, e 25 tratamentos em 12 repetições, o plano para delineamento balanceado seria repetido.

Em outros casos as seguintes recomendações são feitas:

Seis repetições: Usar o reticulado triplo duas vezes.

Oito repetições: Usar o reticulado simples quatro vezes ou o reticulado quádruplo duas vezes.

Nove repetições: Usar o reticulado triplo três vezes.

Dez repetições: Usar o reticulado simples cinco vezes ou o reticulado quádruplo duas vezes.

RAGHAVARAO (1971) salienta que os delineamentos reticulados quadrados, parcialmente balanceados, são do tipo quadrado latino com i restrições (L_i). O autor classifica esses delineamentos em reticulados simples ("Simple lattice") ou reticulado duplo ("Double lattice"), quando $i=2$; reticulado triplo ("Triple lattice") quando $i=3$; reticulado quádruplo ("Quadruple lattice"), quando $i=4$; e assim por diante. Observa ainda que se n é o número de vezes que o arranjo básico é repetido, obtém-se então um delineamento com os parâmetros

$$v=s^2, \quad b=nsi, \quad r=ni, \quad k=s, \quad \lambda_1=n, \quad \lambda_2=0.$$

HARSHBARGER (1949) relata que nos reticulados retangulares simples $v = p(p-1)$, e os $p(p-1)$ tratamentos são identificados por x e y ($x \neq y$, $x, y=1, 2, \dots, p$). Todos os tratamentos com o mesmo valor para x formam o x -ésimo bloco da primeira repetição, e todos os tratamentos com o mesmo valor de y formam o y -ésimo bloco da segunda repetição.

NAIR (1951) mostra que se $p \geq 4$, o delineamento reticulado retangular simples, forma um delineamento PBIB com quatro classes de associados, com os parâmetros

$$v = p(p-1), \quad k = p-1, \quad r=2, \quad b = 2p, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=0=\lambda_3=\lambda_4, \\ n_1 = 2(p-2), \quad n_2 = (p-2)(p-3), \quad n_3 = 2(p-2), \quad n_4 = 1.$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} p-3 & p-3 & 1 & 0 \\ p-3 & (p-3)(p-4) & p-3 & 0 \\ 1 & p-3 & p-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2(p-4) & 2 & 0 \\ 2(p-4) & (p-4)(p-5) & 2(p-4) & 1 \\ 2 & 2(p-4) & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & p-3 & p-3 & 1 \\ p-3 & (p-3)(p-4) & p-3 & 0 \\ p-3 & p-3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(p-2) & 0 \\ 0 & (p-2)(p-3) & 0 & 0 \\ 2(p-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No caso dos reticulados retangulares triplos, HARSHBARGER (1949) menciona que há $v=p(p-1)$ tratamentos, e cada tratamento pode ser identificado pelas três letras ordenadas (x, y, z) ($x \neq y, x \neq z, y \neq z; x, y, z = 1, 2, \dots, p$). Os tratamentos com o mesmo valor x formam o x -ésimo bloco da primeira repetição, os tratamentos com o mesmo valor para y formam o y -ésimo bloco da segunda repetição, e os tratamentos com o mesmo valor para z formam o z -ésimo bloco da terceira repetição.

NAIR (1951) mostra que os delineamentos reticulados retangulares triplos, são parcialmente balanceados com os parâmetros

$$v=6, \quad b=9, \quad r=3, \quad k=2, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=0, \quad n_1=3, \quad n_2=2, \quad ,$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quando $p=3$, e com os parâmetros

$$v=12=b, \quad r=3=k, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=0=\lambda_3, \quad n_1=6, \quad n_2=3, \quad n_3=2,$$

quando $p=4$, mas eles não são delineamentos PBIB para $p \geq 5$.

2.2.3 - Construção de delineamentos PBIB

BOSE e NAIR (1939), baseando-se em diferentes métodos de construção, apresentam uma série de delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com $r \leq 10$ e $k \leq 10$.

Alguns teoremas, relativos à construção de delineamentos do tipo grupo divisível, são apresentados por RAGHAVARAO (1971) com base nos estudos de BOSE, SHRIKHANDE e BHATTACHARYA (1953).

RAGHAVARAO (1971) menciona que a teoria da geometria finita é de grande utilidade na construção de delineamentos PBIB, e cita alguns autores que usaram essa teoria: Bose e Chakrarti (1966); Clatworthy (1964); Dai e Feng (1964); Raychaudhuri (1962, 1965); Seiden (1966); Wan (1964, 1965); Wan e Yang (1964); Yamamoto, Fukuda e Hamada (1966) e Yang (1965). Cita ainda vários autores que utilizaram ou

tros métodos: Addelman e Bush (1964), Archbold e Johnson (1956), Bose e Clatworthy (1955), Clatworthy (1967), dentre outros.

2.2.4 - Análise de variância intrablocos

De modo análogo aos delineamentos BIB, os autores em geral apresentam a análise de variância como se o delineamento fosse em blocos casualizados completos, com a diferença de que a soma de quadrados de tratamentos é ajustada para efeitos de blocos, que é calculada segundo BOSE e NAIR (1939) da seguinte forma:

$$SQT(aj.) = \sum_{i=1}^v \hat{t}_i Q_i ,$$

onde $\hat{t}_i$ é o efeito estimado do tratamento i ($i=1,2,\dots,v$) e Q_i é definido como

$$Q_i = T_i - \frac{1}{k} A_i ,$$

sendo T_i o total das unidades experimentais que contém o i -ésimo tratamento, e A_i o total dos blocos que contém esse tratamento.

Para os delineamentos com duas classes de associados ($m=2$), BOSE e NAIR (1939) apresentam a seguinte expressão para $\hat{t}_i$:

$$\hat{t}_i = \frac{k}{\Delta} [B_{22}Q_i - B_{12}S_1(Q_i)] , i=1,2,\dots,v$$

onde,

$S_1(Q_i)$ é a soma dos Q 's correspondentes aos n_1 tratamentos que são primeiros associados do i -ésimo tratamento;

$$A_{12} = r(k-1) + \lambda_2 ;$$

$$A_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2 ;$$

$$B_{12} = (\lambda_2 - \lambda_1) ;$$

$$B_{22} = r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) (p_{11}^1 - p_{11}^2) ;$$

$$\Delta = A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12} .$$

Se $n_1 > n_2$, a expressão mais conveniente para $\hat{t}_i$, segundo os autores é:

$$\hat{t}_i = \frac{k}{\Delta} [B_{21}Q_i - B_{11}S_2(Q_i)] ,$$

onde

$S_2(Q_i)$ é a soma dos Q 's correspondentes aos n_2 tratamentos que são segundos associados do i -ésimo tratamento;

$$A_{11} = r(k-1) + \lambda_1 ;$$

$$A_{21} = (\lambda_1 - \lambda_2) p_{12}^1 ;$$

$$B_{11} = \lambda_1 - \lambda_2 ;$$

$$B_{21} = r(k-1) + \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) (p_{22}^2 - p_{22}^1) ;$$

$$\Delta = A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11} .$$

Os efeitos de tratamentos são estimados por RAO (1947) usando expressões semelhantes às apresentadas por BOSE e NAIR (1939). A diferença está na definição de $S_j(Q_i)$ ($i=1,2,\dots,v$; $j=1,2,\dots,m$), que para o primeiro autor é a soma dos Q 's para o i -ésimo tratamento e seus j -ésimos associados. Devido a esse fato há uma ligeira modificação na expressão de t_i , que passa a ser

$$t_i = \frac{k}{\Delta} [(B_{22} + B_{12})Q_i - B_{12}\Sigma Q_{i1}] ,$$

para o caso onde $n_1 \leq n_2$, e

$$\hat{t}_i = \frac{k}{\Delta} [(B_{21} + B_{11})Q_i - B_{11}\Sigma Q_{i2}] ,$$

quando $n_1 \geq n_2$.

As expressões para a estimação dos efeitos de tratamentos, no caso de delineamentos com três classes de associados ($m=3$), são também apresentadas por BOSE e NAIR (1939) e RAO (1947). No caso geral, ou seja, para delineamentos com m classes de associados, CHAKRABARTI (1962) considera a seguinte igualdade:

$$r(k-1)t_s = kQ_s + \sum_{j=1}^m S_j(Q_s) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{ij} ,$$

onde t_s é o efeito estimado do s -ésimo tratamento, $S_j(Q_s)$ é a soma dos Q 's correspondentes aos n_j tratamentos que são

j -ésimos associados do s -ésimo tratamento, e f_{ij} satisfaz a expressão

$$S_i(\bar{t}_s) = f_{i1}S_1(Q_s) + f_{i2}S_2(Q_s) + \dots + f_{im}S_m(Q_s) \quad , \quad i=1,2,\dots,m .$$

2.2.5 - Variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos

BOSE e NAIR (1939) relatam que se σ^2 é a variância por parcela, então a variância da diferença entre os efeitos estimados de dois tratamentos, $\bar{t}_i$ e $\bar{t}_j$, nos delineamentos com duas classes de associados, é dada por

$$V(\bar{t}_i - \bar{t}_j) = 2kB_{21}\sigma^2/\Delta \quad ,$$

quando $\bar{t}_i$ e $\bar{t}_j$ são primeiros associados; e

$$V(\bar{t}_i - \bar{t}_j) = 2kB_{22}\sigma^2/\Delta \quad ,$$

quanto $\bar{t}_i$ e $\bar{t}_j$ são segundos associados. Segundo os autores há $vn_1/2$ comparações do primeiro tipo e $vn_2/2$ do segundo tipo. A partir deste fato apresentam a variância média de todas as comparações como sendo

$$V_m = \frac{2k\sigma^2 [(v-1)B_{21} + n_2B_{11}]}{(v-1)\Delta} \quad .$$

A eficiência dos delineamentos PBIB com duas classes de associados, em relação a blocos casualizados é definida por BOSE e NAIR (1939) como sendo

$$E = \frac{(v-1)\Delta}{rk[(v-1)B_{21} + n_2B_{11}]}$$

Considerando o caso geral de delineamentos com m classes de associados, CHAKRABARTI (1962) menciona que se $t_s - t_{s'}$, a diferença entre os efeitos de dois tratamentos, é estimável, e se o s -ésimo e o s' -ésimo tratamentos são i -ésimos associados, o melhor estimador de $t_s - t_{s'}$ é $\hat{t}_s - \hat{t}_{s'}$ com variância

$$V(\hat{t}_s - \hat{t}_{s'}) = \frac{2\sigma^2}{r(k-1)} \left[k - \sum_{\ell=1}^m \lambda_{\ell} f_{\ell i} \right]$$

Pode-se observar então que os contrastes elementares, nos delineamentos PBIB, não são estimados com a mesma variância.

2.3 - Ensaios em Blocos Incompletos com Alguns Tratamentos Adicionais em Cada Bloco

KÄLIN (1966) e FERREIRA (1980) consideram o caso onde em cada bloco de um delineamento BIB, com parâmetros v, b, r, k e λ , são adicionados c tratamentos testemunhas, o que resulta num total de tratamentos igual a $v'=v+c$, e blocos de tamanho igual a $k'=k+c$.

Os efeitos dos tratamentos são estimados por KÄLIN (1966) através dos três métodos de análise: intrablocos, interblocos e combinação dos anteriores. Para o caso da análise intrablocos, o autor apresenta os seguintes estimadores:

i) Tratamentos adicionais:

$$\hat{t}_{a_{s'}} = \frac{1}{b} T_{a_{s'}} - \hat{\mu} \quad ,$$

onde, $T_{a_{s'}}$ é o total observado do tratamento adicional s' ($s'=1, \dots, c$);

$$\hat{\mu} = \left(\sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}} / b + \sum_{s=1}^v T_s / r \right) / (c+v) \quad , \text{ sendo } T_s \text{ o total observado do tratamento original } s \text{ (} s=1, \dots, v \text{)} .$$

ii) Tratamentos do delineamento original (tratamentos originais):

$$t_s = \frac{T_s}{r} - \hat{\mu} + \frac{(r-\lambda)(T_s - \bar{T}_.) - r(A_s - \bar{A}.)}{r(\lambda v + rc)}$$

onde, t_s é o efeito estimado do tratamento original s ($s=1, 2, \dots, v$);

$$\bar{T}_. = \frac{1}{v} (T_1 + T_2 + \dots + T_v);$$

A_s é o total dos blocos onde ocorre o tratamento original s ;

$$\bar{A} = \frac{1}{v} (A_1 + A_2 + \dots + A_v).$$

A soma de quadrados de tratamentos, ajustada para os efeitos de blocos é dada por:

$$SQ_{Taj.} = SQ_{Tad.} + SQ_{Tor.(aj.)} + SQ_{Tipos},$$

onde,

$SQ_{Tad.}$ é a soma de quadrados dos tratamentos adicionais;

$SQ_{Tor.(aj.)}$ é a soma de quadrados dos tratamentos originais ajustada; e

SQ_{Tipos} é a soma de quadrados entre os dois tipos de tratamentos.

O autor apresenta as seguintes expressões pa
ra essas somas de quadrados:

i) Soma de quadrados dos tratamentos adicionais:

$$SQ_{\text{Tad.}} = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c (Q_{a_{s'}} - \bar{Q}_a)^2,$$

onde,

$$Q_{a_{s'}} = T_{a_{s'}} - \frac{A_{s'}}{k'}; \text{ e}$$

$T_{a_{s'}}$ é o total do tratamento adicional s' ($s'=1, \dots, c$);

$A_{s'}$ é o total dos blocos onde ocorre o tratamento a-
dicional s' ;

$$\bar{Q}_a = \frac{1}{c} (Q_{a_1} + \dots + Q_{a_c}).$$

ii) Soma de quadrados dos tratamentos originais ajustada:

$$SQ_{\text{Tor. (aj.)}} = \frac{k'}{\lambda v + rc} \sum_{s=1}^v (Q_s - \bar{Q})^2,$$

onde,

$$Q_s = T_s - \frac{A_s}{k'};$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{v} \sum_{s=1}^v Q_s.$$

iii) Soma de quadrados entre tipos de tratamentos

$$SQ_{\text{Tipos}} = \frac{ck}{n} \left(\frac{1}{c} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} - \frac{1}{k} \sum_{s=1}^v Q_s \right)^2,$$

onde n é o total de observações.

Com respeito à variância da diferença entre duas médias de tratamentos, KALIN (1966) chega aos seguintes resultados:

i) Contraste envolvendo dois tratamentos originais:

$$\text{Var}(\hat{m}_s - \hat{m}_{s^*}) = \frac{2k'}{\lambda v + rc} \sigma^2.$$

ii) Contraste envolvendo dois tratamentos adicionais:

$$\text{Var}(\hat{m}_{a_{s'}} - \hat{m}_{a_{s'^*}}) = \frac{2\sigma^2}{b}.$$

iii) Contraste envolvendo um tratamento original e outro adicional:

$$\text{Var}(\hat{m}_s - \hat{m}_{a_{s'}}) = \left(\frac{k'}{rvc} + \frac{c-1}{bc} + \frac{k'(v-1)}{v(\lambda v + rc)} \right) \sigma^2.$$

Por outro lado, FERREIRA (1980) apresenta os seguintes estimadores para os efeitos de tratamentos:

$t_{a_{s'}} = \frac{1}{b} Q_{a_{s'}}$, para os tratamentos adicionais; e

$$t_s = \frac{k'}{\lambda v + rc} \left(Q_s - \frac{(r^2 - \lambda b)}{nr} \sum_{s=1}^v Q_s \right), \text{ para os tratamen}$$

tos originais.

As somas de quadrados são obtidas por:

$$SQ_{\text{Tad.}} = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}^2 - \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right)^2,$$

$$SQ_{\text{Tor. (aj.)}} = \frac{k'}{\lambda v + rc} \left(\sum_{s=1}^v Q_s^2 - \frac{1}{v} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right), \quad e$$

$$SQ_{\text{Tipos}} = \frac{k'}{rvc} \left(\sum_{i=1}^v Q_s \right)^2.$$

Quanto à variância entre duas médias de tratamentos, o autor apresenta os seguintes resultados:

$$\text{Var}(\hat{m}_s - \hat{m}_{s^*}) = \frac{2k'}{\lambda v + rc} \sigma^2,$$

$$\text{Var}(\hat{m}_{a_{s'}} - \hat{m}_{a_{s'^*}}) = \frac{2}{b} \sigma^2,$$

$$\text{Var}(\hat{m}_s - \hat{m}_{a_s}) = \left(\frac{k'}{\lambda v + rc} + \frac{1}{b} - \frac{k'}{n(\lambda v + rc)} \frac{(r^2 - \lambda b)}{r} \right) \sigma^2.$$

Pode-se observar que KÄLIN (1966) e FERREIRA (1980) apresentam estimadores diferentes para os efeitos de tratamentos. Isto deve-se ao fato dos autores não usarem a mesma restrição durante o processo de estimação. KÄLIN (1966) usou a restrição

$$\sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}} + \sum_{s=1}^v t_s = 0 ,$$

obtendo, para a média geral, o estimador:

$$\hat{\mu} = (\sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}} / b + \sum_{s=1}^v T_s / r) / (c+v) ,$$

enquanto FERREIRA (1980) considerou que:

$$b \sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}} + r \sum_{s=1}^v t_s = 0 ,$$

e obteve, para a média geral, o estimador $\hat{\mu} = G/n$, onde G é o total geral.

Com respeito às somas de quadrados e às variâncias da diferença entre duas médias, as expressões apresentadas pelos dois autores são idênticas.

Convém ressaltar que não se encontrou na literatura consultada métodos de análises, para o tipo de ensaio aqui discutido, quando se consideram delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB).

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1 - Introdução

O desenvolvimento da metodologia baseia-se em um experimento, em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB), com alguns tratamentos comuns adicionados em cada bloco.

Seja, inicialmente, um experimento em blocos incompletos parcialmente balanceados, com os seguintes parâmetros:

v: número de tratamentos,

b: número de blocos,

r: número de repetições para cada tratamento,

k: número de parcelas por bloco;

e ainda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, n_1, n_2, \dots, n_m, p_{j k}^i$ ($i, j, k=1, 2, \dots, m$), definidos conforme BOSE e NAIR (1939).

Considerando-se que c novos tratamentos são adicionados a cada bloco do experimento inicial, o delineamento resultante tem então os parâmetros:

$$\begin{aligned}
 v' &= v+c \text{ (número de tratamentos),} \\
 b &: \text{número de blocos,} \\
 k' &= k+c \text{ (número de parcelas por bloco),} \\
 k'b &= n \text{ (número total de parcelas),} \\
 r' &: \begin{array}{l} \text{número de repetições} \\ \text{de cada tratamento} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = r \text{ (para os tratamentos} \\ \text{originais),} \\ = b \text{ (para os tratamentos} \\ \text{adicionais)} \end{array} \right. \\
 \lambda_{uu'} &: \begin{array}{l} \text{número de blocos onde} \\ \text{os tratamentos } u \text{ e } u' \\ \text{ocorrem juntos} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \lambda_{ss*} \text{ (para os tratamen} \\ \text{tos originais } s \text{ e } s^*), \\ = b \text{ (para dois tratamen} \\ \text{tos adicionais),} \\ = r \text{ (para um tratamento} \\ \text{original e outro} \\ \text{adicional).} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

3.2 - Modelo Matemático

Para o delineamento em questão supõe-se o modelo linear de efeito fixo:

$$y_{uh} = m + t_u + b_h + e_{uh}, \quad [3.2.a]$$

onde,

y_{uh} é a observação do u -ésimo tratamento no h -ésimo bloco;

m é a média geral;

t_u é o efeito do u -ésimo tratamento ($u=1,2,\dots,v'$);

b_h é o efeito do h -ésimo bloco ($h=1,2,\dots,b$);

e_{uh} é o erro experimental associado à observação y_{uh} .

onde se supõe que os e_{uh} 's são independentes e normalmente distribuídos, com média zero e variância σ^2 .

O efeito t_u envolve t_s ($s = 1,2,\dots,v$) e $t_{a_{s'}}$ ($s' = 1,2,\dots,c$), que são os efeitos dos tratamentos originais e adicionais, respectivamente.

O modelo é considerado com a restrição paramétrica:

$$r \sum_{s=1}^v t_s + b \sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}} = 0$$

Usando-se a forma matricial, o modelo (3.2.a)

fica:

$$\underline{y} = \underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}, \quad (3.2.b)$$

onde,

$\underline{y}$ é o vetor de realizações de variáveis aleatórias;

$\underline{X}$ é a matriz dos coeficientes dos parâmetros;

$\underline{\theta}$ é o vetor dos parâmetros;

$\underline{\varepsilon}$ é o vetor dos erros experimentais, sendo que

$$\underline{\varepsilon} \sim N(\phi \sigma^2 \mathbf{I}).$$

Efetuando-se convenientemente a partição da matriz X obtém-se

$$X = [X_1 \mid X_2 \mid X_3] \quad , \quad [3.2.b]$$

onde,

X_1 é o vetor de dimensões $(bk') \times (1)$, que envolve a média geral;

X_2 é a matriz de dimensões $(bk') \times (v')$, dos coeficientes associados aos tratamentos;

X_3 é a matriz de dimensões $(bk') \times (b)$, dos coeficientes associados aos blocos.

A partição do vetor θ , correspondente à partição da matriz X é

$$\theta' = [m \mid \tau' \mid \beta'] \quad ,$$

onde,

m é a média geral;

τ' é o vetor dos efeitos dos tratamentos, de dimensões $(v') \times (1)$;

β' é o vetor dos efeitos dos blocos, de dimensões $(b) \times (1)$.

Pode-se ainda considerar-se a partição

$$\tau' = [\tau'_1 \mid \tau'_2] \quad ,$$

onde,

τ_1 é o vetor dos efeitos dos tratamentos originais,
de dimensões $(v) \times (1)$;

τ_2 é o vetor dos efeitos dos tratamentos adicionais,
de dimensões $(c) \times (1)$.

A restrição paramétrica, nesse caso, é $X_1'X_2\tau = 0$

3.3 - Sistema de Equações Normais

O sistema de equações normais, obtido através do método dos quadrados mínimos, é:

$$X'X\hat{\theta} = X'y \quad , \quad [3.3.a]$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'y \\ X_2'y \\ X_3'y \end{bmatrix} \quad [3.3.b]$$

As matrizes do sistema anterior são designadas por:

$X_1'X_1 = bk' = n = \text{número total de unidades experimentais};$

$X_1'X_2 = {}_1x'_v = \begin{bmatrix} x'_1 & \vdots & x'_c \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} = [r, r, \dots, r \mid b, b, \dots, b]$

(vetor associado aos números de repetições dos tratamentos originais e adicionais);

$X_1'X_3 = {}_1z_b' = [k', k', \dots, k']$ (vetor associado ao número de unidades experimentais por bloco);

$X_2'X_2 = {}_vR_v' = \begin{pmatrix} R_1 & \phi \\ \phi & R_2 \end{pmatrix}$ (matriz das repetições dos tratamentos), onde R_1 é a matriz das repetições dos tratamentos originais, e R_2 a matriz das repetições dos tratamentos adicionais;

$X_2'X_3 = {}_vN_b' = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$ (matriz de incidência dos tratamentos em relação aos blocos); onde N_1 refere-se aos tratamentos originais, e N_2 aos tratamentos adicionais. Fazendo $N = [n_{uh}]$, então n_{uh} é o número de vezes que o u -ésimo tratamento ocorre no h -ésimo bloco;

$X_3'X_3 = {}_bK_b = k'I_b$ (matriz associada ao número de unidades experimentais por bloco).

Assim, o sistema de equações em [3.3.b] pode ser escrito na forma:

$$\begin{pmatrix} n & \underline{x}' & \underline{z}' \\ \underline{x} & R & N \\ \underline{z} & N' & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'\underline{y} \\ X_2'\underline{y} \\ X_3'\underline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ T^* \\ B \end{pmatrix} \quad [3.3.c]$$

onde,

$\hat{m}$ = efeito estimado da média geral;

$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{pmatrix}$ (1) é o vetor dos efeitos estimados para os tratamentos;

$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_v \end{pmatrix}$ (1) é o vetor dos efeitos estimados para os tratamentos originais;

$\hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} \tau_{a_1} \\ \tau_{a_2} \\ \dots \\ \tau_{a_c} \end{pmatrix}$ (1) é o vetor dos efeitos estimados para os tratamentos adicionais;

$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_b \end{pmatrix}$ (1) é o vetor dos efeitos estimados para blocos;

G = total geral observado;

$$\begin{matrix} \tilde{T}^* = \\ (v') \end{matrix} \begin{pmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ \vdots \\ T_v^* \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{é o vetor dos totais observados dos} \\ (1) \text{ tratamentos;} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \tilde{T}_1^* = \\ (v) \end{matrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_v \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{é o vetor dos totais observados dos} \\ \text{tratamentos originais;} \\ (1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \tilde{T}_2^* = \\ (c) \end{matrix} \begin{pmatrix} T_{a_1} \\ T_{a_2} \\ \vdots \\ T_{a_c} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{é o vetor dos totais observados dos} \\ \text{tratamentos adicionais;} \\ (1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \tilde{B} = \\ (b) \end{matrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_b \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{é o vetor dos totais observados pa-} \\ \text{ra blocos.} \\ (1) \end{matrix}$$

3.4 - Estimação do Efeito da Média Geral

O sistema [3.3.c] resulta nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} bk'\hat{m} + x'\hat{\tau} + z'\hat{\beta} &= G \\ x\hat{m} + R\hat{\tau} + N\hat{\beta} &= T^* \\ z\hat{m} + N'\hat{\tau} + K\hat{\beta} &= B \end{aligned} \quad [3.4.a]$$

Impondo-se as restrições usuais,

$$r \sum_{s=1}^v t_s + b \sum_{s'=1}^t t_{a_{s'}} = 0; \quad \sum_{h=1}^b \hat{b}_h = 0 \quad [3.4.b]$$

ou seja, $x'\hat{\tau} = 0$ e $z'\hat{\beta} = 0$, resulta que

$$\begin{aligned} bk'\hat{m} &= G \\ x\hat{m} + R\hat{\tau} + N\hat{\beta} &= T^* \\ z\hat{m} + N'\hat{\tau} + K\hat{\beta} &= B \end{aligned} \quad [3.4.c]$$

Da primeira equação obtém-se

$$\hat{m} = \frac{G}{bk'} \quad [3.4.d]$$

e os efeitos de $\hat{\tau}$ e $\hat{\beta}$ são obtidos de

$$\begin{aligned} R\hat{\tau} + N\hat{\beta} &= T^* - x\hat{m} \quad [a] , \\ N'\hat{\tau} + K\hat{\beta} &= B - z\hat{m} \quad [b] , \end{aligned} \quad [3.4.e]$$

ou seja, de:

$$\begin{pmatrix} R & N \\ N' & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^* - \underline{x}\hat{m} \\ B - \underline{z}\hat{m} \end{pmatrix} \quad [3.4.f]$$

3.5 - Estimação dos Efeitos de Tratamentos Ajustados para Blocos

Para estimarem-se os efeitos de tratamentos, ajustados para blocos, os efeitos de blocos devem ser eliminados da equação [a] em [3.4.e]. Com esse objetivo adiciona-se à equação [a] a equação [b], pré-multiplicada por $(-NK^{-1})$. Isso resulta em:

$$(R - \frac{1}{K} NN') \hat{\tau} = T^* - \frac{1}{K} NB, \quad [3.5.a]$$

que equivale a pré-multiplicar o sistema [3.4.f] pela matriz W, onde

$$W = [I_v, -NK^{-1}] \quad [3.5.b]$$

3.5.1 - Método clássico

O sistema de equações em [3.5.a] pode ser escrito na forma

$$C\hat{\tau} = Q, \quad [3.5.1.a]$$

onde C é uma matriz simétrica, de característica $(v'-1)$ e

e dimensões $(v') \times (v')$, $\hat{\tau}$ é um vetor $(v') \times (1)$ e $\underline{Q}$ é um vetor $(v') \times (1)$, denominado de vetor dos totais ajustados dos tratamentos. Dado um tratamento u qualquer, então o elemento de $\underline{Q}$ correspondente a u , é a diferença entre o total do tratamento u e o total dos blocos, onde u ocorre, dividido por k' . Os elementos de C , em correspondência com os tratamentos, são:

$$c_{ss} = \frac{r(k'-1)}{k'} , \text{ para os tratamentos originais;}$$

$$c_{ss*} = c_{s*s} = - \frac{\lambda_{ij}}{k'} , \text{ para quaisquer dois tratamentos originais, ou ainda,}$$

$$c_{ss*} = - \frac{\lambda_{\ell}}{k'} , \text{ para quaisquer dois tratamentos originais que são } \ell\text{-ésimos associados;}$$

$$c_{a_{s's'}} = \frac{b(b-1)}{k'} , \text{ para os tratamentos adicionais;}$$

$$c_{a_{s's'*}} = - \frac{b}{k'} , \text{ para quaisquer dois tratamentos adicionais;}$$

$$c_{ss'} = - \frac{r}{k'} , \text{ para um tratamento original e outro adicional.}$$

Como C é uma matriz singular, o sistema [3.5.1.a] pode ser resolvido, conforme PAVATE (1961) e PIMENTEL GOMES (1967) dentre outros, mediante a introdução de uma matriz A , com as mesmas dimensões de C , denominada "matriz de restrição", tal que a solução do sistema seja única. As restrições introduzidas produzem um novo sistema de equações, que pode ser escrito na forma:

$$A\tilde{t} = \phi \quad [3.5.1.b]$$

A matriz A , para o caso em questão, geralmente tem a seguinte estrutura:

$$A = \left(-\frac{r}{k'} (v')^E (v) \quad -\frac{b}{k'} (v')^E (c) \right) \quad [3.5.1.c]$$

onde E é uma matriz de uns.

Pode-se também tomar uma matriz de restrição simétrica substituindo-se A por $A'A$.

De [3.5.1.a] e [3.5.1.b] obtém-se:

$$(C-A)\tilde{t} = Q, \quad [3.5.1.d]$$

onde $C-A = M$ é uma matriz não singular. Logo, a solução do sistema é dada por:

$$\tilde{t} = M^{-1}Q. \quad [3.5.1.e]$$

3.5.2 - Método simplificado

Considerando-se as expressões das diferentes matrizes em [3.3], o sistema de equações em [3.5.a] pode ser colocado na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} R_1 & \phi \\ \phi & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{k'} \begin{pmatrix} N_1 N_1' & N_1 N_2' \\ N_2 N_1' & N_2 N_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad [3.5.2.a]$$

onde Q_1 é o vetor dos totais ajustados para os tratamentos originais, e Q_2 o vetor dos totais ajustados para os tratamentos adicionais.

Baseando-se nas partições das matrizes do sistema anterior, obtêm-se as expressões dos estimadores dos efeitos de tratamentos.

3.5.2.1 - Estimação dos efeitos dos tratamentos adicionais

Do sistema [3.5.2.a] tem-se que:

$$R_2 \hat{\tau}_2 - \frac{1}{k'} (N_2 N_1' \hat{\tau}_1 + N_2 N_2' \hat{\tau}_2) = Q_2 \quad [3.5.2.1.a]$$

Como cada tratamento adicional ocorre sempre uma vez em cada bloco segue-se que:

$$N_2 = {}_c E_b, \text{ onde } E \text{ é uma matriz de uns; e ainda,}$$

$$N_2 N_1' = {}_c E_b \quad b (N_1')_v = r \quad {}_c E_v \quad [3.5.2.1.b]$$

$$N_2 N_2' = {}_c E_b \quad b {}^E_c = b \quad {}_c E_c \quad [3.5.2.1.c]$$

Logo, o sistema [3.5.2.1.a] fica:

$$R_2 \hat{t}_2 - \frac{1}{k'} (r \quad {}_c E_v \quad \hat{t}_1 + b \quad {}_c E_c \quad \hat{t}_2) = Q_2 \quad .$$

Retomando-se a restrição $r \quad {}_c E_v \quad \hat{t}_1 + b \quad {}_c E_c \quad \hat{t}_2 = 0$,

tem-se então que:

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{b} Q_2 \quad , \quad [3.5.2.1.d]$$

visto que R_2 é uma matriz diagonal com todos os elementos iguais a b .

Para um tratamento particular s' , segue-se que:

$$t_{a_{s'}} = \frac{1}{b} Q_{a_{s'}} \quad , \quad [3.5.2.1.e]$$

onde $Q_{a_{s'}} = T_{a_{s'}} - \frac{G}{k'}$ e $s'=1,2,\dots,c$.

3.5.2.2 - Estimação dos efeitos dos tratamentos originais com m classes de associados

O sistema de equações referente aos tratamentos originais, obtido de [3.5.2.a], é:

$$R_1 \hat{t}_1 - \frac{1}{k'} N_1 N'_1 \hat{t}_1 - \frac{1}{k'} N_1 N'_2 \hat{t}_2 = Q_1 \quad .$$

Para um dado tratamento s pode-se verificar que:

$$Q_s = r(1 - \frac{1}{k'}) t_s - \frac{1}{k'} \left[\lambda_{s1} \hat{t}_1 + \dots + \lambda_{ss-1} \hat{t}_{s-1} + \lambda_{ss+1} \hat{t}_{s+1} + \dots + \lambda_{sv} \hat{t}_v \right] - \frac{r}{k'} \sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}} ,$$

$s=1,2,\dots,v$; ou ainda,

$$k'Q_s = r(k'-1)t_s - \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i(t_s) - r \sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}} , \quad [3.5.2.2.a]$$

onde $Q_s = T_s - A_s/k'$, sendo A_s o total dos blocos onde ocorre o tratamento original s , λ_i ($i=1,2,\dots,m$) é um dos parâmetros do primeiro tipo, definido por BOSE e NAIR (1939), e $S_i(t_s)$ representa a soma dos i -ésimos associados de t_s .

De [3.5.2.1.e] tem-se que:

$$\sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}} = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} , \quad [3.5.2.2.b]$$

logo, a expressão [3.5.2.2.a] fica:

$$k'Q_s + \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} = r(k'-1)t_s - \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i(t_s) \quad [3.5.2.2.c]$$

Como pode-se observar, o efeito de t_s na forma em que é colocado, é uma função de seus associados, que também não são conhecidos. Assim, é necessário que a expressão [3.5.2.2.c] seja modificada.

Sabe-se por CHAKRABARTI (1962), que se um conjunto de tratamentos obedece à estrutura de um delineamento PBIB, as seguintes igualdades se verificam:

$$S_{j'} S_i(t_s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m p_{j'i}^j S_j(t_s) & , \text{ se } j' \neq i, \text{ e} \\ n_i t_s + \sum_{j=1}^m p_{ii}^j S_j(t_s) & , \text{ se } j' = i, \end{cases} \quad [3.5.2.2.d]$$

onde os parâmetros n_i e p_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2, \dots, m$) são definidos conforme BOSE e NAIR (1939).

Usando-se o mesmo procedimento de CHAKRABARTI (1962), para o problema aqui discutido, tem-se então que:

$$S_{j'} (k'Q_s + \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}) = r(k'-1) S_{j'}(t_s) - \sum_{i=1}^m \lambda_i S_{j'} S_i(t_s)$$

Como $\frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}$ é uma constante, a expressão anterior fica:

$$k' S_{j'}(Q_s) + n_{j'} \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} = r(k'-1) S_{j'}(t_s) - \sum_{i=1}^m \lambda_i S_{j'} S_i(t_s), \quad [3.5.2.2.e]$$

onde $S_{j'}(Q_s)$ representa a soma dos Q 's dos j' -ésimos associados do s -ésimo tratamento. Logo, tem-se:

$$a) \quad k' S_1(Q_s) + n_1 \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} = r(k'-1) S_1(t_s) - \sum_{i=1}^m \lambda_i S_1 S_i(t_s),$$

para $j' = 1;$ [3.5.2.2.f]

onde,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i S_1 S_i(t_s) &= \lambda_1 S_1 S_1(t_s) + \lambda_2 S_1 S_2(t_s) + \dots + \lambda_m S_1 S_m(t_s) \\ &= \lambda_1 [n_1 t_s + p_{11}^1 S_1(t_s) + p_{11}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{11}^m S_m(t_s)] + \\ &+ \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(t_s) + p_{12}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{12}^m S_m(t_s)] + \dots + \\ &+ \lambda_m [p_{1m}^1 S_1(t_s) + p_{1m}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{1m}^m S_m(t_s)] \end{aligned}$$

[3.5.2.2.g]

Sabe-se ainda por BOSE e NAIR (1939), CHAKRA BARTI (1962), dentre outros, que:

$$\sum_{j'=1}^m p_{jj'}^i = n_j - 1, \text{ se } j=i,$$

[3.5.2.2.h]

$$= n_j, \text{ se } j \neq i,$$

Considerando-se essas igualdades em [3.5.2.2.g], segue-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i S_i(t_s) &= \lambda_1 \left[n_1 t_s + (n_1 - 1 - p_{12}^1 - \dots - p_{1m}^1) S_1(t_s) + \right. \\ &\quad \left. + (n_1 - p_{12}^2 - \dots - p_{1m}^2) S_2(t_s) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (n_1 - p_{12}^m - \dots - p_{1m}^m) S_m(t_s) \right] + \\ &\quad + \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(t_s) + p_{12}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{12}^m S_m(t_s)] + \dots + \\ &\quad + \lambda_m [p_{1m}^1 S_1(t_s) + p_{1m}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{1m}^m S_m(t_s)] \\ &= \lambda_1 \left[n_1 t_s + n_1 S_1(t_s) + n_1 S_2(t_s) + \dots + n_1 S_m(t_s) - \right. \\ &\quad \left. - (1 + p_{12}^1 + \dots + p_{1m}^1) S_1(t_s) - \right. \\ &\quad \left. - (p_{12}^2 + \dots + p_{1m}^2) S_2(t_s) - \dots - \right. \\ &\quad \left. - (p_{12}^m + \dots + p_{1m}^m) S_m(t_s) \right] + \\ &\quad + \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(t_s) + p_{12}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{12}^m S_m(t_s)] + \dots + \\ &\quad + \lambda_m [p_{1m}^1 S_1(t_s) + p_{1m}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{1m}^m S_m(t_s)] \end{aligned}$$

$$\text{Mas, } n_1 t_s + n_1 S_1(t_s) + \dots + n_1 S_m(t_s) = n_1 \sum_{s=1}^v t_s;$$

$$\text{e por [3.4.b] verifica-se que } \sum_{s=1}^v t_s = -\frac{b}{r} \sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}}.$$

Como $\sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}} = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}$, por [3.5.2.2.b],

então, $\sum_{s=1}^v t_s = -\frac{1}{r} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}$. Portanto, segue-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i S_i(t_s) = & -\frac{\lambda_1 n_1}{r} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} - \lambda_1 \left[(n_1 - p_{11}^1) S_1(t_s) + \right. \\ & \left. + (n_1 - p_{11}^2) S_2(t_s) + \dots + \right. \\ & \left. + (n_1 - p_{11}^m) S_m(t_s) \right] + \\ & + \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(t_s) + p_{12}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{12}^m S_m(t_s)] + \dots + \\ & + \lambda_m [p_{1m}^1 S_1(t_s) + p_{1m}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{1m}^m S_m(t_s)] , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i S_i(t_s) = & -\frac{\lambda_1 n_1}{r} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} - \left[\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1 - \dots - \lambda_m p_{1m}^1 \right] S_1(t_s) - \\ & - [\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2 - \dots - \lambda_m p_{1m}^2] S_2(t_s) - \dots - \\ & - [\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^m - \lambda_2 p_{12}^m - \dots - \lambda_m p_{1m}^m] S_m(t_s) \end{aligned}$$

[3.5.2.2.i]

Voltando em [3.5.2.2.f], e considerando-se a expressão [3.5.2.2.i], segue-se que:

$$\begin{aligned}
k'S_1(Q_S) + \left(\frac{r^2 - \lambda_1 b}{br}\right) n_1 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} &= \left[r(k'-1) + \lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^m \lambda_{\ell} p_{1\ell}^1 \right] S_1(t_S) + \\
&+ \left[\lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^m \lambda_{\ell} p_{1\ell}^2 \right] S_2(t_S) + \dots + \\
&+ \left[\lambda_1 n_1 - \sum_{\ell=1}^m \lambda_{\ell} p_{1\ell}^m \right] S_m(t_S)
\end{aligned}$$

[3.5.2.2.j]

$$b) \quad k'S_2(Q_S) + n_2 \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} = r(k'-1) S_2(t_S) - \sum_{i=1}^m \lambda_i S_2 S_i(t_S),$$

[3.5.2.2.k]

para $j' = 2$;

onde,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i S_2 S_i(t_S) = \lambda_1 S_2 S_1(t_S) + \lambda_2 S_2 S_2(t_S) + \dots + \lambda_m S_2 S_m(t_S)$$

$$= \lambda_1 [p_{21}^1 S_1(t_S) + p_{21}^2 S_2(t_S) + \dots + p_{21}^m S_m(t_S)] +$$

$$+ \lambda_2 [n_2 t_S + p_{22}^1 S_1(t_S) + p_{22}^2 S_2(t_S) + \dots + p_{22}^m S_m(t_S)] + \dots +$$

$$+ \lambda_m [p_{2m}^1 S_1(t_S) + p_{2m}^2 S_2(t_S) + \dots + p_{2m}^m S_m(t_S)] .$$

[3.5.2.2.l]

De [3.5.2.2.h] segue-se que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \lambda_i S_2 S_1(t_S) &= \lambda_1 [p_{21}^1 S_1(t_S) + p_{21}^2 S_2(t_S) + \dots + p_{21}^m S_m(t_S)] + \\
 &\quad + \lambda_2 \left[n_2 t_S + (n_2 - p_{21}^1 - p_{23}^1 - \dots - p_{2m}^1) S_1(t_S) + \right. \\
 &\quad \left. + (n_2 - 1 - p_{21}^2 - p_{23}^2 - \dots - p_{2m}^2) S_2(t_S) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + (n_2 - p_{21}^m - p_{23}^m - \dots - p_{2m}^m) S_m(t_S) \right] \\
 &\quad + \dots + \lambda_m [p_{2m}^1 S_1(t_S) + p_{2m}^2 S_2(t_S) + \dots + p_{2m}^m S_m(t_S)] \\
 &= \lambda_1 [p_{21}^1 S_1(t_S) + p_{21}^2 S_2(t_S) + \dots + p_{21}^m S_m(t_S)] + \\
 &\quad + \lambda_2 \left[n_2 t_S + n_2 S_1(t_S) + n_2 S_2(t_S) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + n_2 S_m(t_S) - (p_{21}^1 + p_{23}^1 + \dots + p_{2m}^1) S_1(t_S) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 + p_{21}^2 + p_{23}^2 + \dots + p_{2m}^2) S_2(t_S) - \dots - \right. \\
 &\quad \left. - (p_{21}^m + p_{23}^m + \dots + p_{2m}^m) S_m(t_S) \right] + \dots + \\
 &\quad + \lambda_m [p_{2m}^1 S_1(t_S) + p_{2m}^2 S_2(t_S) + \dots + p_{2m}^m S_m(t_S)] \\
 &= - \frac{\lambda_2 n_2}{r} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \lambda_1 \left[p_{21}^1 S_1(t_S) + p_{21}^2 S_2(t_S) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + p_{21}^m S_m(t_S) \right] - \\
 &\quad - \lambda_2 \left[(n_2 - p_{22}^1) S_1(t_S) + (n_2 - p_{22}^2) S_2(t_S) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + (n_2 - p_{22}^m) S_m(t_S) \right] + \dots + \\
 &\quad + \lambda_m [p_{2m}^1 S_1(t_S) + p_{2m}^2 S_2(t_S) + \dots + p_{2m}^m S_m(t_S)] .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_2 S_i(t_s) &= -\frac{\lambda_2 n_2}{r} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} - \left[\lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 p_{22}^1 - \dots - \lambda_m p_{2m}^1 \right] S_1(t_s) - \\
&- [\lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^2 - \lambda_2 p_{22}^2 - \dots - \lambda_m p_{2m}^2] S_2(t_s) - \dots - \\
&- [\lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^m - \lambda_2 p_{22}^m - \dots - \lambda_m p_{2m}^m] S_m(t_s)
\end{aligned}$$

[3.5.2.2.m]

Voltando em [3.5.2.2.k], e considerando-se [3.5.2.2.m], segue-se que:

$$\begin{aligned}
k' S_2(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_2 b}{br} \right) n_2 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} &= \left[\lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell p_{2\ell}^1 \right] S_1(t_s) + \\
&+ \left[r(k'-1) + \lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell p_{2\ell}^2 \right] S_2(t_s) + \\
&+ \dots + \left[\lambda_2 n_2 - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell p_{2\ell}^m \right] S_m(t_s)
\end{aligned}$$

[3.5.2.2.n]

$$c) \quad k' S_m(Q_s) + n_m \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} = r(k'-1) S_m(t_s) - \sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(t_s),$$

para $j' = m$;

[3.5.2.2.o]

onde,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_{m i} S_i(t_s) &= \lambda_1 S_{m 1} S_1(t_s) + \lambda_2 S_{m 2} S_2(t_s) + \dots + \lambda_m S_{m m} S_m(t_s) \\
&= \lambda_1 [p_{m1}^1 S_1(t_s) + p_{m1}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m1}^m S_m(t_s)] + \\
&\quad + \lambda_2 [p_{m2}^1 S_1(t_s) + p_{m2}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(t_s)] + \dots + \\
&\quad + \lambda_m [n_m t_s + p_{m m}^1 S_1(t_s) + p_{m m}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m m}^m S_m(t_s)] \\
&= \lambda_1 [p_{m1}^1 S_1(t_s) + p_{m1}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m1}^m S_m(t_s)] + \\
&\quad + \lambda_2 [p_{m2}^1 S_1(t_s) + p_{m2}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(t_s)] + \dots + \\
&\quad + \lambda_m \left[n_m t_s + (n_m - p_{m1}^1 - p_{m2}^1 - \dots - p_{m(m-1)}^1) S_1(t_s) + \right. \\
&\quad \left. + (n_m - p_{m1}^2 - p_{m2}^2 - \dots - p_{m(m-1)}^2) S_2(t_s) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + (n_m - 1 - p_{m1}^m - p_{m2}^m - \dots - p_{m(m-1)}^m) S_m(t_s) \right] \\
&= \lambda_1 [p_{m1}^1 S_1(t_s) + p_{m1}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m1}^m S_m(t_s)] + \\
&\quad + \lambda_2 [p_{m2}^1 S_1(t_s) + p_{m2}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(t_s)] + \dots + \\
&\quad + \lambda_m \left[n_m t_s + n_m S_1(t_s) + n_m S_2(t_s) + \dots + n_m S_m(t_s) - \right. \\
&\quad \left. - (p_{m1}^1 + p_{m2}^1 + \dots + p_{m(m-1)}^1) S_1(t_s) - \right. \\
&\quad \left. - (p_{m1}^2 + p_{m2}^2 + \dots + p_{m(m-1)}^2) S_2(t_s) - \dots - \right. \\
&\quad \left. - (1 + p_{m1}^m + p_{m2}^m + \dots + p_{m(m-1)}^m) S_m(t_s) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(t_s) &= - \frac{\lambda_m n_m}{r} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \lambda_1 \left[p_{m1}^1 S_1(t_s) + p_{m1}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m1}^m S_m(t_s) \right] + \\
&+ \lambda_2 [p_{m2}^1 S_1(t_s) + p_{m2}^2 S_2(t_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(t_s)] - \dots - \\
&- \lambda_m \left[(n_m - p_{mm}^1) S_1(t_s) + (n_m - p_{mm}^2) S_2(t_s) + \dots + (n_m - p_{mm}^m) S_m(t_s) \right] \\
&= - \frac{\lambda_m n_m}{r} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} - \left[\lambda_m n_m - \lambda_1 p_{m1}^1 - \lambda_2 p_{m2}^1 - \dots - \lambda_m p_{mm}^1 \right] S_1(t_s) - \\
&- [\lambda_m n_m - \lambda_1 p_{m1}^2 - \lambda_2 p_{m2}^2 - \dots - \lambda_m p_{mm}^2] S_2(t_s) - \dots - \\
&- [\lambda_m n_m - \lambda_1 p_{m1}^m - \lambda_2 p_{m2}^m - \dots - \lambda_m p_{mm}^m] S_m(t_s) \\
&\quad [3.5.2.2.p]
\end{aligned}$$

Voltando em [3.5.2.2.o], e considerando-se [3.5.2.2.p], segue-se que:

$$\begin{aligned}
k' S_m(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_m b}{br} \right) n_m \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} &= [\lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell p_{m\ell}^1] S_1(t_s) + \\
&+ [\lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell p_{m\ell}^2] S_2(t_s) + \dots + \\
&+ [r(k'-1) + \lambda_m n_m - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell p_{m\ell}^m] S_m(t_s) \\
&\quad [3.5.2.2.q]
\end{aligned}$$

De forma análoga ao procedimento de CHAKRA-BARTI (1962), se U é a matriz formada pelos elementos a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, m$), com inversa U^{-1} , de elementos f_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, m$), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 S_i(t_s) = & f_{i1} \left[k'S_1(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_1 b}{br} \right) n_1 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] + \\
 & + f_{i2} \left[k'S_2(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_2 b}{br} \right) n_2 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] + \\
 & + \dots + f_{im} \left[k'S_m(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_m b}{br} \right) n_m \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.5.2.2.u}$$

De [3.5.2.2.c], sabe-se que:

$$r(k'-1)t_s = k'Q_s + \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i(t_s)$$

Substituindo-se $S_i(t_s)$ pela expressão encontrada em [3.5.2.2.u], segue-se então que:

$$\begin{aligned}
 r(k'-1)t_s = & k'Q_s + \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i1} \left[k'S_1(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_1 b}{br} \right) n_1 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] \\
 & + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i2} \left[k'S_2(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_2 b}{br} \right) n_2 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] + \dots + \\
 & + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{im} \left[k'S_m(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_m b}{br} \right) n_m \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right]
 \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$t_s = \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k'Q_s + \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \sum_{\ell=1}^m \left[k'S_{\ell}(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right\}$$

[3.5.2.2.v]

3.5.2.3 - Estimação dos efeitos dos tratamentos originais com duas classes de associados

Os delineamentos PBIB com duas classes de associados, $m=2$, são de particular importância, visto que são os mais utilizados na prática, conforme relatam BOSE e NAIR (1939). Nesse caso a expressão para t_s passa a ser:

$$t_s = \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k'Q_s + \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \left[k'S_1(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_1 b}{br} \right) n_1 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] (\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21}) + \left[k'S_2(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_2 b}{br} \right) n_2 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] (\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22}) \right\}$$

[3.5.2.3.a]

A matriz U , formada pelos elementos a_{ij} ($i, j = 1, 2$), tem a forma:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

onde, por [3.5.2.2.s],

$$\begin{aligned} a_{11} &= r(k'-1) + \lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1 \\ &= r(k'-1) + \lambda_1 (n_1 - p_{11}^1) - \lambda_2 p_{12}^1 \\ &= r(k'-1) + \lambda_1 (p_{12}^1 + 1) - \lambda_2 p_{12}^1 \\ &= r(k'-1) + (\lambda_1 - \lambda_2) p_{12}^1 + \lambda_1 \end{aligned} \quad [3.5.2.3.b]$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2 \\ &= \lambda_1 n_1 - \lambda_1 (n_1 - p_{12}^2) - \lambda_2 p_{12}^2 \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) p_{12}^2 \end{aligned} \quad [3.5.2.3.c]$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 p_{22}^1 \\ &= \lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 (n_2 - p_{21}^1) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) p_{21}^1 \end{aligned} \quad [3.5.2.3.d]$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= r(k'-1) + \lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^2 - \lambda_2 p_{22}^2 \\ &= r(k'-1) + \lambda_2 (n_2 - p_{22}^2) - \lambda_1 p_{21}^2 \\ &= r(k'-1) + \lambda_2 (p_{21}^2 + 1) - \lambda_1 p_{21}^2 \\ &= r(k'-1) + (\lambda_2 - \lambda_1) p_{21}^2 + \lambda_2 \end{aligned} \quad [3.5.2.3.e]$$

A matriz U^{-1} , com elementos f_{ij} ($i, j=1, 2$), é:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

onde, fazendo $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$$f_{11} = \frac{a_{22}}{\Delta}, \quad f_{12} = -\frac{a_{12}}{\Delta}, \quad f_{21} = -\frac{a_{21}}{\Delta} \quad \text{e} \quad f_{22} = \frac{a_{11}}{\Delta}$$

[3.5.2.3.f]

Assim, a expressão para t_s fica:

$$t_s = \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k'Q_s + \frac{r}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \frac{1}{\Delta} \left[k'S_1(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_1 b}{br} \right) n_1 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] (\lambda_1 a_{22} - \lambda_2 a_{21}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta} \left[k'S_2(Q_s) + \left(\frac{r^2 - \lambda_2 b}{br} \right) n_2 \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right] (\lambda_2 a_{11} - \lambda_1 a_{12}) \right\}$$

[3.5.2.3.g]

Por outro lado, sabe-se que:

$Q_s = T_s - \frac{A_s}{k'}$, onde T_s é o total do s-ésimo tratamento original, e A_s é o total dos blocos onde esse tratamento ocorre;

$Q_{a_{s'}} = T_{a_{s'}} - \frac{G}{k'}$, onde $T_{a_{s'}}$ é o total do j-ésimo tratamento adicional, e G é o total geral.

Logo,

$$\sum_{S=1}^V Q_S + \sum_{S'=1}^C Q_{a_{S'}} = \sum_S T_S - \frac{kG}{k'} + \sum_{S'=1}^C T_{a_{S'}} - \frac{cG}{k'} = G - G = 0,$$

[3.5.2.3.h]

e

$$\sum_{S'=1}^C Q_{a_{S'}} = - \sum_{S=1}^V Q_S .$$

Considerando-se a igualdade anterior, a expressão em [3.5.2.3.g] pode ser colocada na seguinte forma:

$$t_S = \frac{1}{r(k'-1)\Delta} \left\{ k' [\Delta Q_S + \bar{A}_1^* S_1(Q_S) + \bar{A}_2^* S_2(Q_S)] - \frac{1}{br} [\Delta r^2 + (r^2 - \lambda_1 b) n_1 \bar{A}_1^* + (r^2 - \lambda_2 b) n_2 \bar{A}_2^*] \sum_{S=1}^V Q_S \right\},$$

[3.5.2.3.i]

onde $\bar{A}_1^* = \lambda_1 a_{22} - \lambda_2 a_{21}$ e $\bar{A}_2^* = \lambda_2 a_{11} - \lambda_1 a_{12}$.

Como $\sum_{S=1}^V Q_S = Q_S + S_1(Q_S) + S_2(Q_S)$, a expressão [3.5.2.3.i] pode ainda ser modificada de modo que $S_1(Q_S)$ ou $S_2(Q_S)$ seja eliminado. Se $n_1 < n_2$, é conveniente eliminar-se $S_2(Q_S)$, caso contrário elimina-se $S_1(Q_S)$.

Para o primeiro caso, $n_1 < n_2$, deve-se substituir $S_2(Q_S)$, em [3.5.2.3.i], por $\sum_{s=1}^V Q_S - Q_S - S_1(Q_S)$. Isso resulta em:

$$t_s = \frac{1}{r(k'-1)\Delta} \left\{ k'[(\Delta - \bar{A}_2^*)Q_S + (\bar{A}_1^* - \bar{A}_2^*)S_1(Q_S)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{br} [\Delta r^2 + (r^2 - \lambda_1 b)n_1 \bar{A}_1^* + (r^2 - \lambda_2 b)n_2 \bar{A}_2^* - brk' \bar{A}_2^*] \sum_{s=1}^V Q_S \right\}$$

[3.5.2.3.j]

Para o segundo caso, $n_2 < n_1$, deve-se substituir $S_1(Q_S)$, em [3.5.2.3.i], por $\sum_{s=1}^V Q_S - Q_S - S_2(Q_S)$. Isso resulta em:

$$t_s = \frac{1}{r(k'-1)\Delta} \left\{ k'[\Delta - \bar{A}_1^*)Q_S + (\bar{A}_2^* - \bar{A}_1^*)S_2(Q_S)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{br} [\Delta r^2 + (r^2 - \lambda_1 b)n_1 \bar{A}_1^* + (r^2 - \lambda_2 b)n_2 \bar{A}_2^* - brk' \bar{A}_1^*] \sum_{s=1}^V Q_S \right\}$$

[3.5.2.3.k]

3.5.2.4 - Caso especial: Estimação dos efeitos dos tratamentos originais em delineamento BIB

A expressão para os efeitos dos tratamentos estimados pode ser obtida, nesse caso, a partir de um delineamento PBIB, considerando-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$. Tomando-se como base o PBIB com duas classes de associados, tem-se então que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = r(k'-1) + \lambda ; & a_{12} &= a_{21} = 0 ; \\ \Delta &= [r(k'-1) + \lambda]^2 ; & \bar{A}_1 &= \bar{A}_2 = [r(k'-1) + \lambda] \lambda ; \\ n_1 + n_2 &= v-1 \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que:

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{k'[r(k'-1) + \lambda]}{r(k'-1)[r(k'-1) + \lambda]^2} \left\{ r(k'-1)Q_s - \frac{1}{k'br} \left[\begin{matrix} r^3(k'-1) + r^2\lambda + \\ (r^2 - \lambda b)\lambda(v-1) - brk'\lambda \end{matrix} \right] \sum_{s=1}^v Q_s \right\} \\ &= \frac{k'}{r(k'-1) + \lambda} \left\{ Q_s - \frac{1}{r^2(k'-1)k'b} \left[\begin{matrix} r^3k' - r^3 + r^2\lambda + \\ (r^2 - \lambda b)r(k-1) - brk'\lambda \end{matrix} \right] \sum_{s=1}^v Q_s \right\} , \end{aligned}$$

visto que, em delineamento BIB, a igualdade $\lambda(v-1) = r(k-1)$ se verifica. Sabe-se também que $k' = k + c$ e $bk = rv$; logo,

$$\begin{aligned}
t_s &= \frac{k'}{r(k-1)+rc+\lambda} \left\langle Q_s - \frac{1}{r^2(k'-1)k'b} \begin{pmatrix} r^3k+r^3c-r^3+r^2\lambda+(r^2-\lambda b)r(k'-1)- \\ -(r^2-\lambda b)rc-brk\lambda-brc\lambda \end{pmatrix} \sum_{s=1}^v Q_s \right\rangle \\
&= \frac{k'}{\lambda(v-1)+rc+\lambda} \left\langle Q_s - \frac{1}{r^2(k'-1)k'b} \begin{pmatrix} r^3(k-1)+r^3c+r^2\lambda+(r^2-\lambda b)r(k'-1)- \\ -r^3c+\lambda brc-r^2\lambda v-brc\lambda \end{pmatrix} \sum_{s=1}^v Q_s \right\rangle \\
&= \frac{k'}{\lambda v+rc} \left\langle Q_s - \frac{1}{r^2(k'-1)k'b} \begin{pmatrix} r^3(k-1)-r^2\lambda(v-1) + \\ + (r^2-\lambda b)r(k'-1) \end{pmatrix} \sum_{s=1}^v Q_s \right\rangle
\end{aligned}$$

Como $r^3(k-1) = r^2\lambda(v-1)$, segue-se portanto que:

$$t_s = \frac{k'}{\lambda v+rc} \left\langle Q_s - \frac{(r^2-\lambda b)}{rk'b} \sum_{s=1}^v Q_s \right\rangle, \quad [3.5.2.4.a]$$

que é a expressão encontrada por FERREIRA (1980).

3.6 - Propriedades das Soluções do Sistema de Equações Normais com Efeitos de Blocos Eliminados

Sabe-se, por [3.5.1.e], que $\hat{t} = M^{-1}Q$, e por [3.5.2.e], que $t_{a_{s'}} = \frac{1}{b} Q_{a_{s'}}$. Além disso, a expressão para t_s , em [3.5.2.2.v] pode ser colocada na forma:

$$t_s = \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \left(Q_s + \sum_{\ell=1}^m S_{\ell}(Q_s) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right) + \left(\frac{r}{b} + \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right) \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right\}$$

Assim, baseando-se nas expressões de t_s e de $t_{a_{s'}}$, os elementos da matriz M^{-1} podem ser determinados. Verifica-se, então, que se m_{ss} e $m_{a_{s'}s'}$ são os elementos da diagonal principal de M^{-1} , correspondentes aos tratamentos originais e adicionais, respectivamente, segue-se que:

$$m_{ss} = \frac{k'}{r(k'-1)}, \quad m_{a_{s'}s'} = \frac{1}{b}.$$

Por outro lado, os elementos de M^{-1} , fora da diagonal, são:

$$m_{ss^*} = m_{s^*s} = \frac{k'}{r(k'-1)} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} , \text{ para quaisquer dois tratamentos originais que são } \ell\text{-ésimos associados;}$$

$$m_{ss'} = \frac{1}{r(k'-1)} \left[\frac{r}{b} + \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right] \text{ e } m_{s's} = 0, \text{ para o } s\text{-ésimo tratamento original e o } s'\text{-ésimo tratamento adicional;}$$

$$m_{a_{s's'}^*} = m_{a_{s'}^*s'} = 0, \text{ para quaisquer dois tratamentos adicionais.}$$

3.6.1 - Esperança matemática de $\hat{\tau}$

Considerando-se o modelo [3.2.a] sem o efeito da média, e usando-se o mesmo procedimento de PIMENTEL GOMES (1967), tem-se que:

$$E(\hat{\tau}) = E(M^{-1}Q) ,$$

onde $Q = WX'y$, conforme relatado em (3.5); logo,

$$\begin{aligned} E(\hat{\tau}) &= M^{-1}WX'E(y) \\ &= M^{-1}WX'X\theta \end{aligned} \quad [3.6.1.a]$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 WX'X &= [I_V, -NK^{-1}] \begin{pmatrix} R & N \\ N' & K \end{pmatrix} \\
 &= [R - NK^{-1}N', \quad \phi] \\
 &= [C, \phi] \qquad \qquad \qquad [3.6.1.b]
 \end{aligned}$$

Voltando em [3.6.1.a], tem-se então que:

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\tau}) &= M^{-1} [C, \phi] \begin{pmatrix} \tau \\ \beta \end{pmatrix} \\
 &= M^{-1} C\tau \\
 &= M^{-1} (M+A)\tau \\
 &= \tau + M^{-1}A\tau
 \end{aligned}$$

Supondo-se que a equação [3.5.1.b] para $\hat{\tau}$ é também satisfeita para τ , então $A\tau = \phi$. Logo,

$$E(\hat{\tau}) = \tau, \qquad \qquad \qquad [3.6.1.c]$$

ou seja, $\hat{\tau}$ é um estimador não tendencioso de τ .

OBSERVAÇÃO: Em todas as expressões algébricas onde ocorrer a matriz W , considerar-se-á o modelo [3.2.a] sem o efeito da média, ou seja, a matriz X será $X = [X_2 \vdots X_3]$.

3.6.2 - Matriz de dispersão para $\hat{\tau}$

A matriz de dispersão do vetor $\hat{\tau}$ é, por definição:

$$D(\hat{\tau}) = E\{[\hat{\tau} - E(\hat{\tau})][\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]'\} \quad [3.6.2.a]$$

Como $\hat{\tau} = M^{-1}Q$ e $Q = WX'y$, tem-se então que:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= M^{-1}WX'y \\ &= M^{-1}WX'(X\theta + \varepsilon) \\ &= M^{-1}WX'X\theta + M^{-1}WX'\varepsilon \quad [3.6.2.b] \end{aligned}$$

Portanto, considerando-se [3.6.1.a] e [3.6.2.b], obtém-se:

$$\hat{\tau} - E(\hat{\tau}) = M^{-1}WX'\varepsilon \quad [3.6.2.c]$$

Substituindo-se [3.6.2.c] em [3.6.2.a], segue-se que:

$$D(\hat{\tau}) = E(M^{-1}WX'\varepsilon\varepsilon'XW'M^{-1})$$

Como admite-se em (3.2) que $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$, então,

$$D(\hat{\tau}) = M^{-1}WX'XW'M^{-1}\sigma^2 \quad [3.6.2.d]$$

que, por [3.6.1.b], fica:

$$D(\tilde{\tau}) = M^{-1}CM^{-1}\sigma^2 \quad [3.6.2.e]$$

Se $\underline{p}'\tilde{\tau}$ é uma função linear, então a variância de $\underline{p}'\tilde{\tau}$ é dada por:

$$\text{Var}(\underline{p}'\tilde{\tau}) = E\{[\underline{p}'\tilde{\tau} - E(\underline{p}'\tilde{\tau})][\underline{p}'\tilde{\tau} - E(\underline{p}'\tilde{\tau})]'\} \quad [3.6.2.f]$$

$$= \underline{p}'E\{[\tilde{\tau} - E(\tilde{\tau})][\tilde{\tau} - E(\tilde{\tau})]'\}\underline{p}$$

$$= \underline{p}'D(\tilde{\tau})\underline{p}$$

$$= \underline{p}'M^{-1}CM^{-1}\underline{p}\sigma^2 \quad [3.6.2.g]$$

Se $\underline{p}'\tilde{\tau}$ é uma função linear estimável, então $\underline{p}' = \underline{a}'C$, ou seja, $\underline{p} = C\underline{a}$, onde $\underline{a}$ é um vetor. Assim, conforme PIMENTEL GOMES (1967), a expressão [3.6.2.g] fica:

$$\text{Var}(\underline{p}'\tilde{\tau}) = \underline{p}'M^{-1}CM^{-1}C\underline{a}\sigma^2 \quad [3.6.2.h]$$

Por outro lado, OGAWA (1974) e IEMMA (1985) mostram que a matriz M^{-1} é uma inversa condicional de C . Logo,

$$CM^{-1}C = C \quad [3.6.2.i]$$

Sendo C uma matriz simétrica, segue-se que:

$$CM^{-1}C = C \quad [3.6.2.j]$$

Substituindo-se [3.6.2.j] em [3.6.2.h], ob-
tém-se:

$$\text{Var}(\underline{p}'\hat{\underline{\tau}}) = \underline{p}'\underline{M}^{-1}\underline{C}\underline{a}\sigma^2 .$$

Mas, $\underline{C}\underline{a} = \underline{p}$; logo,

$$\text{Var}(\underline{p}'\hat{\underline{\tau}}) = \underline{p}'\underline{M}^{-1}\underline{p}\sigma^2 . \quad [3.6.2.k]$$

É conveniente mostrar também que:

$$\begin{aligned} \underline{A}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' &= (\underline{C}-\underline{M})\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' \\ &= \underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' - \underline{W}\underline{X}' \end{aligned}$$

Pós-multiplicando-se a expressão anterior por $\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{A}'$, tem-se:

$$\underline{A}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{A}' = \underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{A}' - \underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{A}' .$$

Por [3.6.1.b] chega-se a $\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}' = \underline{C}$; logo,

$$\underline{A}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{A}' = \underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{A}' - \underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{A}' ,$$

que, por [3.6.2.i], resulta em:

$$\underline{A}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{A}' = \phi ,$$

ou seja,

$$\underline{A}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' = \phi . \quad [3.6.2.l]$$

3.7 - Somas de quadrados

Do modelo $\underline{y} = \underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$, obtêm-se

$$\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} = \underline{y}'\underline{y} - \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{y} ,$$

e tomando-se a estimativa de $\underline{\theta}$, resulta a soma de quadrados do resíduo, ou seja:

$$SQR = \underline{y}'\underline{y} - \hat{\underline{\theta}}'\underline{X}'\underline{y} , \quad [3.7.a]$$

onde, $\hat{\underline{\theta}}'\underline{X}'\underline{y}$, definida como a soma de quadrados de parâmetros, é:

$$\begin{aligned} SQP &= [\hat{m}, \hat{\tau}', \hat{\beta}'] \begin{pmatrix} G \\ T^* \\ B \end{pmatrix} \\ &= \hat{m}G + \hat{\tau}'T^* + \hat{\beta}'B . \end{aligned}$$

De [3.4.e] tem-se que $\hat{\beta} = K^{-1}(B - Z\hat{m} - N'\hat{\tau})$; logo,

$$\begin{aligned} SQP &= \hat{m}G + \hat{\tau}'T^* + (B - Z\hat{m} - N'\hat{\tau})'K^{-1}B \\ &= \hat{m}G + \hat{\tau}'T^* + B'K^{-1}B - \hat{m}Z'K^{-1}B - \hat{\tau}'NK^{-1}B \\ &= \hat{m}G + \hat{\tau}'(T^* - \frac{1}{k'}NB) + \frac{1}{k'}B'B - \hat{m}G \\ &= \hat{m}G + \hat{\tau}'Q + \frac{1}{k'}B'B - \hat{m}G \quad [3.7.b] \end{aligned}$$

Substituindo-se [3.7.b] em [3.7.a], tem-se:

$$SQR = (\underline{y}'\underline{y} - \hat{m}G) - \hat{\tau}'\underline{Q} - \left(\frac{1}{k'} \underline{B}'\underline{B} - \hat{m}G\right) \quad [3.7.c]$$

onde,

$\underline{y}'\underline{y} - \hat{m}G$ é a soma de quadrados total (SQT);

$\hat{\tau}'\underline{Q}$ é a soma de quadrados de tratamentos ajusta-
da para blocos (SQTaj.);

$\underline{B}'\underline{K}^{-1}\underline{B} - \hat{m}G$ é a soma de quadrados de blocos (SQB).

Sabe-se que $\hat{\tau}' = [\hat{\tau}'_1, \hat{\tau}'_2]$ e $\underline{Q}' = [\underline{Q}'_1, \underline{Q}'_2]$.

Logo,

$$\hat{\tau}'\underline{Q} = \hat{\tau}'_1\underline{Q}_1 + \hat{\tau}'_2\underline{Q}_2, \quad [3.7.d]$$

ou seja,

$$SQTaj. = \hat{\tau}'_1\underline{Q}_1 + \hat{\tau}'_2\underline{Q}_2. \quad [3.7.e]$$

Considerando-se a forma usual de apresentação das somas de quadrados, tem-se que:

$$SQT = \sum_{u,h} y_{uh}^2 - C_0,$$

$$SQTaj. = \sum_{s=1}^v t_s Q_s + \sum_{s'=1}^c t_{a_{s'}} Q_{a_{s'}}, \quad [3.7.f]$$

$$SQB = \frac{1}{k'} \sum_{h=1}^b B_h^2 - C_0,$$

$$SQR = SQT - SQTaj. - SQB,$$

onde $C_0 = \hat{m}G$ é a soma de quadrados da média geral (correção).

Tomando-se [3.5.2.1.e], [3.5.2.2.v] e [3.5.2.3.h], a SQTaj. pode ser apresentada na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{SQTaj.} = & \frac{1}{r(k'-1)} \sum_{s=1}^v \left\{ k' Q_s - \frac{r}{b} \sum_{s=1}^v Q_s + \right. \\
 & \left. + \sum_{\ell=1}^m \left[k' S_{\ell} (Q_s) - \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{s=1}^v Q_s \right] \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right\} Q_s + \\
 & + \frac{1}{b} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right) Q_{a_{s'}} , \quad [3.7.g]
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \text{SQTaj.} = & \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \sum_{s=1}^v Q_s^2 - \frac{r}{b} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \sum_{\ell=1}^m \left[k' \sum_{s=1}^v Q_s S_{\ell} (Q_s) - \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right] \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right\} + \\
 & + \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}^2 \quad [3.7.h]
 \end{aligned}$$

Por outro lado, sabe-se que a soma de quadrad^{os} dos tratamentos adicionais (SQTad.) é dada de modo usual, por:

$$\text{SQTad.} = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}}^2 - \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}} \right)^2 .$$

Sabe-se ainda que $Q_{a_{s'}} = T_{a_{s'}} - \frac{G}{k'}$; logo,

$$SQ_{\text{Tad.}} = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c (Q_{a_{s'}} + \frac{G}{k'})^2 - \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \frac{cG}{k'} \right)^2.$$

que resulta em:

$$SQ_{\text{Tad.}} = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}^2 - \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right)^2. \quad [3.7.i]$$

Considerando-se [3.7.i] em [3.7.h], tem-se então:

$$\begin{aligned} SQ_{\text{Taj.}} &= SQ_{\text{Tad.}} + \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \sum_{s=1}^v Q_s^2 - \frac{r}{b} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^m \left[k' \sum_{s=1}^v Q_{s\ell} (Q_s) - \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right] \sum_{i=1}^v \lambda_i f_{i\ell} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right)^2 \\ &= SQ_{\text{Tad.}} + \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \sum_{s=1}^v Q_s^2 + \frac{1}{bc} [r(k'-1) - rc] \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^m \left[k' \sum_{s=1}^v Q_{s\ell} (Q_s) - \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right] \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right\} \end{aligned} \quad [3.7.j]$$

A soma de quadrados entre os dois tipos de tratamentos (originais e adicionais) é dada de modo usual, por:

$$SQTipos = \frac{1}{bk} \left(\sum_{s=1}^v T_s \right)^2 + \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}} \right)^2 - \frac{G^2}{bk'} \quad [3.7.k]$$

Mas,

$$\sum_{s=1}^v T_s = \sum_{s=1}^v Q_s + \frac{kG}{k'} \quad e \quad \sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}} = \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \frac{cG}{k'} .$$

Logo,

$$SQTipos = \frac{1}{bk} \left(\sum_{s=1}^v Q_s + \frac{kG}{k'} \right)^2 + \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} + \frac{cG}{k'} \right)^2 - \frac{G^2}{bk'} ,$$

que resulta em

$$\begin{aligned} SQTipos &= \frac{1}{bk} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 + \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{b} \left(\frac{c \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 + k \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2}{kc} \right) \end{aligned}$$

Como $c+k = k'$, segue-se que:

$$\begin{aligned} SQTipos &= \frac{k'}{bkc} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \\ &= \frac{k'}{rvc} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \end{aligned} \quad [3.7.l]$$

Considerando-se [3.7.l] em [3.7.j], tem-se:

$$SQ_{Taj.} = SQ_{Tad.} + SQ_{Tipos} +$$

$$+ \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \sum_{s=1}^v Q_s^2 - \left(\frac{r}{b} + \frac{(k'-1)}{v} \right) \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 + \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^m \left[k' \sum_{s=1}^v Q_s S_{\ell} (Q_s) - \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right] \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right\}$$

ou ainda,

$$SQ_{Taj.} = SQ_{Tad.} + SQ_{Tipos} +$$

$$+ \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \sum_{s=1}^v Q_s^2 + k' \sum_{\ell=1}^m \sum_{s=1}^v Q_s S_{\ell} (Q_s) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} - \right. \\ \left. - \left(\frac{r}{b} + \frac{(k'-1)}{v} + \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right) \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right\}$$

[3.7.m]

sendo que a última expressão corresponde à soma de quadrados dos tratamentos originais ajustadas, $SQ_{Tor.}(aj.)$, visto que:

$$SQ_{Taj.} = SQ_{Tad.} + SQ_{Tipos} + SQ_{Tor.}(aj.) \quad [3.7.n]$$

Como mencionado em [3.5.2.3], os delineamentos PBIB com duas classes de associados, $m=2$, são de parti-

cular interesse. Nesse caso, a soma de quadrados dos tratamentos originais ajustada, fica:

$$SQ_{\text{Tor. (aj.)}} = \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \sum_{S=1}^v Q_S^2 + \frac{k' \bar{A}_1}{\Delta} \sum_{S=1}^v Q_S S_1(Q_S) + \frac{k' \bar{A}_2}{\Delta} \sum_{S=1}^v Q_S S_2(Q_S) - \left[\frac{r}{b} + \frac{(k'-1)}{v} + \frac{\bar{A}_1}{\Delta} \left(\frac{r^2 - \lambda_1 b}{br} \right) n_1 + \frac{\bar{A}_2}{\Delta} \left(\frac{r^2 - \lambda_2 b}{br} \right) n_2 \right] \left(\sum_{S=1}^v Q_S \right)^2 \right\}$$

[3.7.o]

Sabe-se que $\sum_{S=1}^v Q_S = Q_S + S_1(Q_S) + S_2(Q_S)$. Assim, se $n_1 < n_2$, é conveniente substituir $S_2(Q_S)$, em [3.7.o] por $\sum_{S=1}^v Q_S - Q_S - S_1(Q_S)$. Isso resulta em:

$$SQ_{\text{Tor. (aj.)}} = \frac{1}{r(k'-1)\Delta} \left\{ k' \left[(\Delta - \bar{A}_2) \sum_{S=1}^v Q_S^2 + (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) \sum_{S=1}^v Q_S S_1(Q_S) \right] - \frac{1}{br} \left[\Delta r^2 + \frac{\Delta br(k'-1)}{v} + (r^2 - \lambda_1 b) n_1 \bar{A}_1 + (r^2 - \lambda_2 b) n_2 \bar{A}_2 - br k' \bar{A}_2 \right] \left(\sum_{S=1}^v Q_S \right)^2 \right\}$$

[3.7.p]

Para o caso onde $n_2 < n_1$, deve-se substituir $S_1(Q_S)$, em [3.7.o], por $\sum_{S=1}^v Q_S - Q_S - S_2(Q_S)$. Isso resulta em:

$$SQTor.(aj.) = \frac{1}{r(k'-1)\Delta} \left\{ k' \left[(\Delta - \bar{A}_1^*) \sum_{s=1}^v Q_s^2 + (\bar{A}_2^* - \bar{A}_1^*) \sum_{s=1}^v Q_s S_2(Q_s) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{br} \left[\Delta r^2 + \frac{\Delta br(k'-1)}{v} + (r^2 - \lambda_1 b) n_1 \bar{A}_1^* + \right. \right. \\ \left. \left. + (r^2 - \lambda_2 b) n_2 \bar{A}_2^* - brk' \bar{A}_1^* \right] \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right\}$$

[3.7.q]

Quando os tratamentos originais estão dispostos em delineamento BIB, a expressão para a $SQTor.(aj.)$ simplifica-se, visto que, nesse caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$. Tomando-se como base o PBIB, com duas classes de associados, conforme em [3.5.2.5], os parâmetros modificam-se para:

$$a_{11} = a_{22} = r(k'-1) + \lambda, \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

$$\Delta = [r(k'-1) + \lambda]^2, \quad \bar{A}_1^* = \bar{A}_2^* = [r(k'-1) + \lambda] \lambda,$$

$$n_1 + n_2 = v-1,$$

e a soma de quadrados dos tratamentos originais ajustada, passa a ser:

$$SQTor.(aj.)_{BIB} = \frac{k'}{\lambda v + rc} \left[\sum_{s=1}^v Q_s^2 - \frac{1}{v} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right] \quad [3.7.r]$$

que é a expressão obtida por KALIN (1966) e FERREIRA (1980).

3.8 - Esperanças Matemáticas das Somas de Quadrados

3.8.1 - Esperança matemática da $SQ\hat{m}$

Sabe-se que a soma de quadrados da média geral ($SQ\hat{m}$) é dada por:

$$\begin{aligned} SQ\hat{m} &= \hat{m}G \\ &= \frac{G^2}{n} \end{aligned}$$

Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} E(SQ\hat{m}) &= \frac{1}{n} E[(X_1' \underline{y})' (X_1' \underline{y})] \\ &= \frac{1}{n} E[(\underline{\theta}' \underline{X}' + \underline{\varepsilon}') X_1 X_1' (X \underline{\theta} + \underline{\varepsilon})] \\ &= \frac{1}{n} E[\underline{\theta}' \underline{X}' X_1 X_1' X \underline{\theta} + \underline{\theta}' \underline{X}' X_1 X_1' \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}' X_1 X_1' X \underline{\theta} + \underline{\varepsilon}' X_1 X_1' \underline{\varepsilon}] \\ &= \frac{1}{n} [\underline{\theta}' \underline{X}' X_1 X_1' X \underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}' X_1 X_1' \underline{\varepsilon})], \quad [3.8.1.a] \end{aligned}$$

onde,

$$X' X_1 X_1' X = \begin{bmatrix} n \\ \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} [n, \underline{x}', \underline{z}'] = \begin{bmatrix} n^2 & n\underline{x}' & n\underline{z}' \\ \underline{x}n & \underline{xx}' & \underline{xz}' \\ \underline{z}n & \underline{zx}' & \underline{zz}' \end{bmatrix}, \quad e$$

$$\begin{aligned}
\theta' X' X_1 X_1' X \theta &= (mn^2 + \tau' \underline{x} n + \beta' \underline{z} m) m + \\
&+ (mn \underline{x}' + \tau' \underline{x} \underline{x}' + \beta' \underline{z} \underline{x}') \tau + \\
&+ (mn \underline{z}' + \tau' \underline{x} \underline{z}' + \beta' \underline{z} \underline{z}') \beta \\
&= m^2 n^2 + \tau' \underline{x} n m + \beta' \underline{z} n m + mn \underline{x}' \tau + \tau' \underline{x} \underline{x}' \tau + \\
&+ \beta' \underline{z} \underline{x}' \tau + mn \underline{z}' \beta + \tau' \underline{x} \underline{z}' \beta + \beta' \underline{z} \underline{z}' \beta
\end{aligned}$$

Retomando-se as restrições usuais, $\underline{x}' \tau = 0$ e $\underline{z}' \beta = 0$, segue-se que:

$$\theta' X' X_1 X_1' X \theta = m^2 n^2 \quad [3.8.1.b]$$

Assim, voltando em [3.8.1.a],

$$\begin{aligned}
E(SQ\hat{m}) &= nm^2 + \frac{1}{n} E(\underline{\varepsilon}' X_1 X_1' \underline{\varepsilon}) \\
&= nm^2 + \frac{1}{n} E[\text{TR}(X_1 X_1' \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}')] \\
&= nm^2 + \frac{1}{n} \text{TR}[X_1 X_1' E(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}')]
\end{aligned}$$

Mas, $E(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}') = \sigma^2 I$ e $\text{TR}(X_1 X_1') = n$, então,

$$E(SQ\hat{m}) = E(C_0) = nm^2 + \sigma^2 \quad [3.8.1.c]$$

3.8.2 - Esperança matemática de $\hat{\tau}'Q$

Sabe-se que:

$$\hat{\tau}'Q = Q'M^{-1}Q$$

Mas, de (3.5), $Q = WX'y$, então, considerando-se o modelo [3.2.a] sem o efeito da média, como PIMENTEL GOMES (1967), segue-se que:

$$\begin{aligned} E(\hat{\tau}'Q) &= E[y'XW'M^{-1}WX'y] \\ &= E[(\theta'X' + \varepsilon')XW'M^{-1}WX'(X\theta + \varepsilon)] \\ &= \theta'X'XW'M^{-1}WX'X\theta + E(\varepsilon'XW'M^{-1}WX'\varepsilon) \end{aligned}$$

Por [3.6.1.b] e [3.6.2.j], obtém-se:

$$\begin{aligned} E(\hat{\tau}'Q) &= \tau'C_{\tau} + E(\varepsilon'XW'M^{-1}WX'\varepsilon) \\ &= \tau'C_{\tau} + E[TR(XW'M^{-1}WX'\varepsilon\varepsilon')] \\ &= \tau'C_{\tau} + TR[XW'M^{-1}WX' E(\varepsilon\varepsilon')] \\ &= \tau'C_{\tau} + TR(M^{-1}WX'XW')\sigma^2 \\ &= \tau'C_{\tau} + TR(M^{-1}C)\sigma^2 \end{aligned}$$

Como $M^{-1}C$ é uma matriz idempotente, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{TR}(M^{-1}C) &= \text{caract.}(M^{-1}C) \\ &= \text{caract.}(C) \\ &= v'-1 \end{aligned}$$

Logo,

$$E(\hat{\tau}'Q) = E(SQ\text{Taj.}) = \tau'C\tau + (v'-1)\sigma^2$$

[3.8.2.a]

3.8.3 - Esperança matemática de $B'K^{-1}B - C_0$

A soma de quadrados de blocos é dada por:

$$\begin{aligned} SQB &= B'K^{-1}B - C_0 \\ &= Y'X_3K^{-1}X_3'Y - C_0 \end{aligned}$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned} E(SQB) &= E(Y'X_3K^{-1}X_3'Y) - E(C_0) \\ &= E[(\theta'X' + \varepsilon')X_3K^{-1}X_3'(X\theta + \varepsilon)] - E(C_0) \\ &= \theta'X'X_3K^{-1}X_3'X\theta + E(\varepsilon'X_3K^{-1}X_3'\varepsilon) - E(C_0) , \end{aligned}$$

[3.8.3.a]

onde,

$$X'X_3 = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} \underline{z}' \\ N \\ K \end{pmatrix}$$

$$X'X_3K^{-1}X_3'X = \begin{pmatrix} \underline{z}'K^{-1}\underline{z} & \underline{z}'K^{-1}N' & \underline{z}' \\ NK^{-1}\underline{z} & NK^{-1}N' & N \\ \underline{z} & N' & K \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\theta}'X'X_3K^{-1}X_3'X\underline{\theta} &= m^2\underline{z}'K^{-1}\underline{z} + \underline{\tau}'NK^{-1}\underline{z}m + \underline{\beta}'\underline{z}m + \\ &+ m\underline{z}'K^{-1}N'\underline{\tau} + \underline{\tau}'NK^{-1}N'\underline{\tau} + \underline{\beta}'N'\underline{\tau} + \\ &+ m\underline{z}'\underline{\beta} + \underline{\tau}'N\underline{\beta} + \underline{\beta}'K\underline{\beta} \end{aligned}$$

Impondo-se as restrições, conforme em [3.8.1]

tem-se:

$$\underline{\theta}'X'X_3K^{-1}X_3'X\underline{\theta} = nm^2 + \underline{\tau}'R\underline{\tau} - \underline{\tau}'C\underline{\tau} + 2\underline{\tau}'N\underline{\beta} + \underline{\beta}'K\underline{\beta} \quad [3.8.3.b]$$

Voltando em [3.8.3.a], segue-se que:

$$\begin{aligned} E(SQB) &= nm^2 + \underline{\tau}'R\underline{\tau} - \underline{\tau}'C\underline{\tau} + 2\underline{\tau}'N\underline{\beta} + \underline{\beta}'K\underline{\beta} + \\ &+ TR[X_3K^{-1}X_3' E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}')] - nm^2 - \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\text{Mas, } E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 I, \text{ e } \text{TR}(\underline{X}_3 \underline{K}^{-1} \underline{X}_3') = \text{TR}(\underline{I}_b) = b;$$

logo,

$$E(\text{SQB}) = \underline{\tau}' \underline{R} \underline{\tau} - \underline{\tau}' \underline{C} \underline{\tau} + 2 \underline{\tau}' \underline{N} \underline{\beta} + \underline{\beta}' \underline{K} \underline{\beta} + (b-1) \sigma^2$$

[3.8.3.c]

3.8.4 - Esperança matemática de $\underline{y}'\underline{y} - C_0$

A soma de quadrados devida ao total é:

$$\begin{aligned} \text{SQT} &= \underline{y}'\underline{y} - C_0 \\ &= (\underline{\theta}'\underline{X}' + \underline{\varepsilon}')(\underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) - C_0 \end{aligned}$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned} E(\text{SQT}) &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}) - E(C_0) \\ &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + \text{TR}[E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}')] - nm^2 - \sigma^2 \\ &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + n\sigma^2 - nm^2 - \sigma^2 \end{aligned} \quad [3.8.4.a]$$

onde,

$$\underline{\theta}' = [m, \underline{\tau}', \underline{\beta}'] \quad , \quad \underline{X}'\underline{X} = \begin{pmatrix} n & \underline{x}' & \underline{z}' \\ \underline{x} & R & N \\ \underline{z} & N' & K \end{pmatrix} \quad .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'X'X\tilde{\theta} = & nm^2 + \tilde{\tau}'\tilde{x}m + \tilde{\beta}'\tilde{z}m + m\tilde{x}'\tilde{\tau} + \tilde{\tau}'R\tilde{\tau} + \tilde{\beta}'N'\tilde{\tau} + \\ & + m\tilde{z}'\tilde{\beta} + \tilde{\tau}'N\tilde{\beta} + \tilde{\beta}'K\tilde{\beta} \end{aligned}$$

Impondo-se as restrições usuais, tem-se:

$$\tilde{\theta}'X'X\tilde{\theta} = nm^2 + \tilde{\tau}'R\tilde{\tau} + 2\tilde{\beta}'N'\tilde{\tau} + \tilde{\beta}'K\tilde{\beta} \quad [3.8.4.b]$$

Substituindo-se [3.8.4.b] em [3.8.4.a], segue-se que:

$$E(SQT) = \tilde{\tau}'R\tilde{\tau} + 2\tilde{\beta}'N'\tilde{\tau} + \tilde{\beta}'K\tilde{\beta} + (n-1)\sigma^2 \quad [3.8.4.c]$$

3.8.5 - Esperança matemática da SQResíduo

A soma de quadrados do resíduo é:

$$SQR = SQT - SQT_{aj.} - SQB.$$

Então, por [3.7.2.2.a], [3.7.2.3.c] e [3.7.2.4.b], obtém-se:

$$E(SQR) = (n-v'-b+1)\sigma^2 \quad [3.8.5.a]$$

3.8.6 - Esperança matemática da SQTad.

A soma de quadrados dos tratamentos adicionais é dada por:

$$SQTad. = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}}^2 - \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}} \right)^2 \quad [3.8.6.a]$$

Considerando-se a partição $X'_2 = [X'_{21} \quad X'_{22}]$, onde X_{21} é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos originais, de dimensões $(bk') \times (v)$, e X_{22} a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos adicionais, de dimensões $(bk') \times (c)$, a expressão em [3.8.6.a] pode ser escrita, matricialmente, na seguinte forma:

$$SQTad. = \frac{1}{b} (X'_{22} \underline{y})' (X'_{22} \underline{y}) - \frac{1}{bc} (\underline{J}' X'_{22} \underline{y})' (\underline{J}' X'_{22} \underline{y}),$$

onde $\underline{J}$ é um vetor de uns de dimensões $(c) \times (1)$.

Tem-se então que:

$$\begin{aligned} E(SQTad.) &= \frac{1}{b} E[(\underline{\theta}' X' + \underline{\varepsilon}') X'_{22} X'_{22} (X \underline{\theta} + \underline{\varepsilon})] - \\ &\quad - \frac{1}{bc} [(\underline{\theta}' X' + \underline{\varepsilon}') X'_{22} \underline{J} \underline{J}' X'_{22} (X \underline{\theta} + \underline{\varepsilon})] \\ &= \frac{1}{b} [\underline{\theta}' X' X'_{22} X'_{22} X \underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}' X'_{22} X'_{22} \underline{\varepsilon})] - \\ &\quad - \frac{1}{bc} [\underline{\theta}' X' X'_{22} \underline{J} \underline{J}' X'_{22} X \underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}' X'_{22} \underline{J} \underline{J}' X'_{22} \underline{\varepsilon})], \end{aligned}$$

$$E(SQTad.) = \frac{1}{b} \underline{\theta}' (X'X_{22}X_{22}'X - \frac{1}{c} X'X_{22}JJ'X_{22}'X) \underline{\theta} + \\ + \frac{1}{b} E[\underline{\varepsilon}'(X_{22}X_{22}' - \frac{1}{c} X_{22}JJ'X_{22}')\underline{\varepsilon}] , \quad [3.8.6.b]$$

onde,

$$X'X_{22} = \begin{bmatrix} X_1'X_{22} \\ X_{21}'X_{22} \\ X_{22}'X_{22} \\ X_3'X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_2' \\ \phi \\ R_2 \\ N_2' \end{bmatrix} \quad e \quad X'X_{22}J = \begin{bmatrix} \underline{x}_2'J \\ \phi \\ R_2J \\ N_2'J \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que:

$$i) \quad X'X_{22}X_{22}'X = \begin{bmatrix} cb^2 & \phi & \underline{x}_2'R_2 & \underline{x}_2'N_2 \\ \phi & \phi & \phi & \phi \\ R_2\underline{x}_2 & \phi & R_2^2 & R_2N_2 \\ N_2'\underline{x}_2 & \phi & N_2'R_2 & N_2'N_2 \end{bmatrix} \quad [3.8.6.c]$$

$$ii) \quad \frac{1}{c} X'X_{22}JJ'X_{22}'X = \begin{bmatrix} cb^2 & \phi & \underline{x}_2'R_2 & \underline{x}_2'N_2 \\ \phi & \phi & \phi & \phi \\ R_2\underline{x}_2 & \phi & \frac{b^2}{c}JJ' & R_2N_2 \\ N_2'\underline{x}_2 & \phi & N_2'R_2 & N_2'N_2 \end{bmatrix}$$

[3.8.6.d]

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad \frac{1}{b} E(\underline{\varepsilon}' X_{22} X_{22}' \underline{\varepsilon}) &= \frac{1}{b} E[\text{TR}(X_{22} X_{22}' \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}')] \\
 &= \frac{1}{b} \text{TR}[X_{22} X_{22}' E(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}')] \\
 &= c\sigma^2
 \end{aligned}
 \tag{3.8.6.e}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad \frac{1}{bc} E(\underline{\varepsilon}' X_{22} J J' X_{22}' \underline{\varepsilon}) &= \frac{1}{bc} E[\text{TR}(X_{22} J J' X_{22}' \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}')] \\
 &= \frac{1}{bc} \text{TR}[X_{22} J J' X_{22}' E(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}')] \\
 &= \sigma^2
 \end{aligned}
 \tag{3.8.6.f}$$

Considerando-se as expressões de (i), (ii), (iii) e (iv) em [3.6.6.b], tem-se então que:

$$E(\text{SQTad.}) = \underline{r}_2' (R_2 - \frac{b}{c} J J') \underline{r}_2 + (c-1)\sigma^2 \tag{3.8.6.g}$$

3.8.7 - Esperança matemática da SQTipos

Sabe-se que a soma de quadrados entre os dois tipos de tratamentos é dada por:

$$\text{SQTipos} = \frac{1}{bk} \left(\sum_{s=1}^v T_s \right)^2 + \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c T_{a_{s'}} \right)^2 - \frac{G^2}{bk},$$

ou, matricialmente,

$$SQTipos = \frac{1}{bk} (\underline{\underline{J}}' X'_{21} \underline{\underline{Y}})' (\underline{\underline{J}}' X'_{21} \underline{\underline{Y}}) + \frac{1}{bc} (\underline{\underline{J}}' X'_{22} \underline{\underline{Y}})' (\underline{\underline{J}}' X'_{22} \underline{\underline{Y}}) - \\ - E(SQ\hat{m}) ,$$

onde $\underline{\underline{J}}^*$ é um vetor de uns de dimensões $(v) \times (1)$.

Tem-se, então, que:

$$E(SQTipos) = \frac{1}{bk} E[(\underline{\underline{\theta}}' X' + \underline{\underline{\varepsilon}}') X_{21} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{21} (X \underline{\underline{\theta}} + \underline{\underline{\varepsilon}})] + \\ + \frac{1}{bc} E[(\underline{\underline{\theta}}' X' + \underline{\underline{\varepsilon}}') X_{22} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{22} (X \underline{\underline{\theta}} + \underline{\underline{\varepsilon}})] - E(SQ\hat{m}) \\ = \frac{1}{bk} [\underline{\underline{\theta}}' X' X_{21} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{21} X \underline{\underline{\theta}} + E(\underline{\underline{\varepsilon}}' X_{21} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{21} \underline{\underline{\varepsilon}})] + \\ + \frac{1}{bc} [\underline{\underline{\theta}}' X' X_{22} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{22} X \underline{\underline{\theta}} + E(\underline{\underline{\varepsilon}}' X_{22} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{22} \underline{\underline{\varepsilon}})] - \\ - E(SQ\hat{m}) \\ = \frac{1}{b} \underline{\underline{\theta}}' [\frac{1}{k} X' X_{21} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{21} X + \frac{1}{c} X' X_{22} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{22} X] \underline{\underline{\theta}} + \\ + \frac{1}{bk} E(\underline{\underline{\varepsilon}}' X_{21} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{21} \underline{\underline{\varepsilon}}) + \frac{1}{bc} E(\underline{\underline{\varepsilon}}' X_{22} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}' X'_{22} \underline{\underline{\varepsilon}}) - \\ - E(SQ\hat{m}) , \quad [3.8.7.a]$$

onde,

$$X' X_{21} \underline{\underline{J}}^* = \begin{pmatrix} X'_1 X_{21} \underline{\underline{J}}^* \\ X'_{21} X_{21} \underline{\underline{J}}^* \\ X'_{22} X_{21} \underline{\underline{J}}^* \\ X'_3 X_{21} \underline{\underline{J}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \underline{\underline{J}}^* \\ R_1 \underline{\underline{J}}^* \\ \phi \\ N'_1 \underline{\underline{J}}^* \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{k} X' X_{21} \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} X_{21}' X = \begin{bmatrix} bvr & bx_1' & \phi & \frac{v}{k} x_1' N_1 \\ bx_1 & \frac{r^2}{k} \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} & \phi & \frac{r}{k} \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} N_1 \\ \phi & \phi & \phi & \phi \\ \frac{v}{k} N_1' x_1 & \frac{r}{k} N_1' \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} & \phi & \frac{1}{k} N_1' \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} N_1 \end{bmatrix}$$

[3.8.7.b]

Considerando-se as matrizes de [3.8.6.d] e [3.8.7.b], verifica-se que a primeira expressão de E(SQTi-pos) é:

$$\frac{1}{b} \theta' \begin{bmatrix} bn & bx_1' & bx_2' & bz' \\ bx_1 & \frac{r^2}{k} \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} & \phi & \frac{r}{k} \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} N_1 \\ bx_2 & \phi & \frac{b^2}{c} \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} & bN_2 \\ bz & \frac{r}{k} N_1' \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} & bN_2' & k'H \end{bmatrix} \theta \quad [3.8.7.c]$$

onde H é uma matriz unitária, de dimensões (b)x(b).

Voltando em [3.8.7.a], tem-se então:

$$\begin{aligned} E(SQTi-pos) = nm^2 + \tau_1' x_1 m + \tau_2' x_2 m + \beta' z m + \\ + mx_1' \tau_1 + \frac{r}{v} \tau_1' \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} \tau_1 + \frac{1}{v} \beta' N_1' \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} \tau_1 + \\ + mx_2' \tau_2 + \frac{b}{c} \tau_2' \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} \tau_2 + \beta' N_2' \tau_2 + \\ + mz' \beta + \frac{1}{v} \tau_1' \begin{matrix} ** \\ JJ' \end{matrix} N_1 \beta + \tau_2' N_2 \beta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k'}{b} \beta' H \beta + \frac{1}{bk} E(\varepsilon' X_{21} J J' X_{21}' \varepsilon) + \\
& + \frac{1}{bc} E(\varepsilon' X_{22} J J' X_{22}' \varepsilon) - E(SQ\hat{m}) \quad [3.8.7.d]
\end{aligned}$$

Impondo-se as restrições usuais, e considerando-se [3.8.1.c] e [3.8.6.f], a expressão [3.8.7.d] fica:

$$\begin{aligned}
E(SQTipos) &= nm^2 + \frac{r}{v} \tau_1' J J' \tau_1 + \frac{b}{c} \tau_2' J J' \tau_2 + \\
& + \frac{1}{bk} E(\varepsilon' X_{21} J J' X_{21}' \varepsilon) + \sigma^2 - nm^2 - \sigma^2 \\
&= \frac{r}{v} \tau_1' J J' \tau_1 + \frac{b}{c} \tau_2' J J' \tau_2 + \frac{1}{bk} TR[X_{21} J J' X_{21}' E(\varepsilon \varepsilon')]
\end{aligned}$$

$$\text{Mas, } E(\varepsilon \varepsilon') = \sigma^2 I, \text{ e } TR(X_{21} J J' X_{21}') = rv = bk;$$

logo,

$$E(SQTipos) = \frac{r}{v} \tau_1' J J' \tau_1 + \frac{b}{c} \tau_2' J J' \tau_2 + \sigma^2 \quad [3.8.7.e]$$

3.8.8 - Esperança matemática da SQTor.(aj.)

Por [3.7.n] sabe-se que:

$$SQTaj. = SQTad. + SQTipos + SQTor.(aj.)$$

Logo, tem-se:

$$E[SQTor.(aj.)] = E(SQTaj.) - E(SQTad.) - E(SQTipos)$$

$$= \tau' C \tau + (v'-1)\sigma^2 - \tau_2'(R_2 - \frac{b}{c} JJ') \tau_2 - \\ - (c-1)\sigma^2 - \frac{r}{v} \tau_1' JJ' \tau_1 - \frac{b}{c} \tau_2' JJ' \tau_2 - \sigma^2 \\ = \tau' C \tau - \tau_2' R_2 \tau_2 - \frac{r}{v} \tau_1' JJ' \tau_1 + (v-1)\sigma^2$$

[3.8.8.a]

Pode-se verificar que:

$$\tau' C \tau = \tau_1'(R_1 - \frac{1}{k'} N_1 N_1') \tau_1 - \frac{1}{k'} \tau_1' N_1 N_2' \tau_2 - \frac{1}{k'} \tau_2' N_2 N_1' \tau_1 + \\ + \tau_2'(R_2 - \frac{1}{k'} N_2 N_2') \tau_2$$

Assim, a $E[SQTor.(aj.)]$ fica:

$$E[SQTor.(aj.)] = \tau_1'(R_1 - \frac{r}{v} JJ') \tau_1 - \frac{1}{k'} \tau' N N' \tau + \\ + (v-1)\sigma^2 \quad . \quad [3.8.8.b]$$

3.9 - Distribuição das Formas Quadráticas

Para determinar-se a distribuição das formas quadráticas apresentadas em (3.7), os seguintes teoremas são utilizados:

TEOREMA 1 (GRAYBILL, 1961):

Se $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \sigma^2 I)$, então $\underline{y}'A\underline{y} \sim \chi^2_{(n, \delta)}$, ou seja, $\underline{y}'A\underline{y}$ tem distribuição de qui-quadrado não central, com n graus de liberdade, e parâmetro de não centralidade

$$\delta = \underline{\mu}'A\underline{\mu}/2\sigma^2,$$

se e somente se A for uma matriz idempotente de característica n .

TEOREMA 2 (SEARLE, 1971):

Quando $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, V)$, as formas quadráticas $\underline{y}'A\underline{y}$ e $\underline{y}'B\underline{y}$ são distribuídas independentemente, se e somente se $AVB = \phi$, ou, de forma equivalente, $BVA = \phi$.

TEOREMA 3 (GRAYBILL, 1961):

Se uma variável aleatória w é distribuída como $\chi^2_{(n_1, \delta)}$, ou seja, como qui-quadrado não central com n_1 graus de liberdade e parâmetro δ , e se outra variável aleatória z é distribuída como $\chi^2_{(n_2)}$, ou seja, como qui-quadrado

do central com n_2 graus de liberdade, e se w e z são independentes, então a quantidade

$$u = \frac{wn_2}{zn_1}$$

tem distribuição F não central com n_1 e n_2 graus de liberdade, e parâmetro de não centralidade δ .

3.9.1 - Distribuição da $SQTaj./\sigma^2$

Sabe-se que a $SQTaj.$ é:

$$\hat{\tau}'\underline{Q} = \underline{Q}'\underline{M}^{-1}\underline{Q} = \underline{y}'\underline{A}_1\underline{y} \quad [3.9.1.a]$$

onde $\underline{A}_1 = \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}'$.

Pode-se verificar que:

$$\underline{A}_1^2 = \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}'\underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}'$$

Mas, por [3.6.1.b], chega-se a $\underline{WX}'\underline{XW} = \underline{C}$; logo,

$$\begin{aligned} \underline{A}_1^2 &= \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{CM}^{-1}\underline{WX}' \\ &= \underline{XW}'\underline{M}^{-1}(\underline{A}' + \underline{M}')\underline{M}^{-1}\underline{WX}' \\ &= \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{A}' + \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' \end{aligned}$$

que, por [3.6.2.1], fica:

$$\underline{A}_1^2 = \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' = \underline{A}_1 \quad , \quad [3.9.1.b]$$

ou seja, A_1 é uma matriz idempotente; e ainda,

$$\begin{aligned}
 \text{Caract.}(A_1) &= \text{TR}(XW'M^{-1}WX') \\
 &= \text{TR}(M^{-1}WX'XW') \\
 &= \text{TR}(M^{-1}C) \\
 &= \text{TR}(C) = v'-1 \quad [3.9.1.c]
 \end{aligned}$$

Tem-se ainda:

$$\underline{\mu}'A_1\underline{\mu} = \underline{\theta}'X'XW'M^{-1}WX'X\underline{\theta} ,$$

que, por [3.6.1.b] e [3.6.2.j], fica:

$$\underline{\mu}'A_1\underline{\mu} = \underline{\tau}'C\underline{\tau} \quad [3.9.1.d]$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$\hat{\underline{\tau}}'Q \sim \chi^2_{(n_1, \delta_1)} \quad [3.9.1.e]$$

onde:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= v'-1; \\
 \delta_1 &= \frac{1}{2\sigma^2} \underline{\tau}'C\underline{\tau} .
 \end{aligned}$$

3.9.2 - Distribuição da SQTad./ σ^2

A SQTad. pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} \text{SQTad.} &= \frac{1}{b} (\underline{X}'_{22} \underline{Y})' (\underline{X}'_{22} \underline{Y}) - \frac{1}{bc} (\underline{J}' \underline{X}'_{22} \underline{Y})' (\underline{J}' \underline{X}'_{22} \underline{Y}) \\ &= \underline{Y}' \underline{A}_2 \underline{Y} \quad , \end{aligned} \quad [3.9.2.a]$$

onde,

$$\underline{A}_2 = \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} - \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22}.$$

Verifica-se que:

$$\begin{aligned} \underline{A}_2^2 &= \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} - \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} - \\ &\quad - \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} + \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} \\ &= \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{R}_2 \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} - \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{R}_2 \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} - \\ &\quad - \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{R}_2 \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} + \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{R}_2 \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} \\ &= \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} - \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} - \frac{\underline{X}_{22} \underline{J}\underline{J}' \underline{X}'_{22}}{bc} + \\ &\quad + \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{R}_2 \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} \end{aligned}$$

Como $\underline{J}' \underline{R}_2 \underline{J} = bc$, segue-se:

$$\underline{A}_2^2 = \underline{X}_{22} \underline{R}_2^{-1} \underline{X}'_{22} - \underline{X}_{22} \frac{\underline{J}\underline{J}'}{bc} \underline{X}'_{22} = \underline{A}_2 \quad , \quad [3.9.2.b]$$

ou seja, A_2 é uma matriz idempotente; e ainda:

$$\begin{aligned}\text{Caract.}(A_2) &= \text{TR} \left(X'_{22} X_{22} R_2^{-1} - X'_{22} X_{22} \frac{\underline{\underline{JJ'}}}{bc} \right) \\ &= \text{TR} \left(R_2 R_2^{-1} - R_2 \frac{\underline{\underline{JJ'}}}{bc} \right) \\ &= \text{TR}[I_C - 1] = c-1 .\end{aligned}$$

Tem-se também:

$$\underline{\mu}' A_2 \underline{\mu} = \underline{\theta}' X' (X_{22} R_2^{-1} X'_{22} - X_{22} \frac{\underline{\underline{JJ'}}}{bc} X'_{22}) X \underline{\theta} ,$$

que, por [3.8.6.c] e [3.8.6.d], fica:

$$\underline{\mu}' A_2 \underline{\mu} = \underline{\tau}'_2 (R_2 - \frac{b}{c} \underline{\underline{JJ'}}) \underline{\tau}_2 . \quad [3.9.2.c]$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$\text{SQTad.}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n_2, \delta_2)} , \quad [3.9.2.d]$$

onde:

$$\begin{aligned}n_2 &= c-1; \\ \delta_2 &= \frac{1}{2\sigma^2} \underline{\tau}'_2 (R_2 - \frac{b}{c} \underline{\underline{JJ'}}) \underline{\tau}_2 .\end{aligned}$$

3.9.3 - Distribuição da SQTipos/ σ^2

A SQTipos é dada por:

$$\begin{aligned} \text{SQTipos} &= \frac{1}{bk} (\bar{J}' X'_{21} \bar{Y})' (\bar{J}' X'_{21} \bar{Y}) + \frac{1}{bc} (\bar{J}' X'_{22} \bar{Y})' (\bar{J}' X'_{22} \bar{Y}) - \\ &\quad - \frac{1}{n} (X'_1 \bar{Y})' (X'_1 \bar{Y}) \\ &= \bar{Y}' A_3 \bar{Y} \quad , \end{aligned} \quad [3.9.3.a]$$

onde,

$$A_3 = X_{21} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bk} X'_{21} + X_{22} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bc} X'_{22} - \frac{1}{n} X_1 X'_1 \quad .$$

Verifica-se que:

$$\begin{aligned} A_3^2 &= X_{21} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bk} X'_{21} X_{21} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bk} X'_{21} + X_{21} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bk} X'_{21} X_{22} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bc} X'_{22} - \\ &\quad - \frac{1}{n} X_{21} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bk} X'_{21} X_1 X'_1 + X_{22} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bc} X'_{22} X_{21} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bk} X'_{21} + \\ &\quad + X_{22} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bc} X'_{22} X_{22} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bc} X'_{22} - \frac{1}{n} X_{22} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bc} X'_{22} X_1 X'_1 - \\ &\quad - \frac{1}{n} X_1 X'_1 X_{21} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bk} X'_{21} - \frac{1}{n} X_1 X'_1 X_{22} \frac{\bar{J}\bar{J}'}{bc} X'_{22} + \\ &\quad + \frac{1}{n^2} X_1 X'_1 X_1 X'_1 \quad . \end{aligned}$$

Mas,

$$bk = rv,$$

$$\underline{\underline{J}}^* X'_{21} X_{21} \underline{\underline{J}}^* = \underline{\underline{J}}^* R_1 \underline{\underline{J}}^* = rv,$$

$$X'_{21} X_{22} = \phi,$$

$$\underline{\underline{J}}^* X'_{22} X_{22} \underline{\underline{J}}^* = \underline{\underline{J}}^* R_2 \underline{\underline{J}}^* = bc,$$

$$X'_1 X_1 = n;$$

logo, tem-se:

$$\begin{aligned} A_3^2 = & X_{21} \frac{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^*}{bk} X_{21} - \frac{1}{n} X_{21} \frac{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^*}{rv} X'_{21} X_1 X'_1 + X_{22} \frac{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^*}{bc} X'_{22} - \\ & - \frac{1}{n} X_{22} \frac{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^*}{bc} X'_{22} X_1 X'_1 - \frac{1}{n} X_1 X'_1 X_{21} \frac{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^*}{rv} X'_{21} - \\ & - \frac{1}{n} X_1 X'_1 X_{22} \frac{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^*}{bc} X'_{22} + \frac{1}{n} X_1 X'_1. \end{aligned}$$

Pode-se verificar ainda que $X'_{21} X_1 = r \underline{\underline{J}}^*$,

$X'_{22} X_1 = b \underline{\underline{J}}^*$, $\underline{\underline{J}}^* \underline{\underline{J}}^* = v$, e $\underline{\underline{J}}^* \underline{\underline{J}}^* = c$; logo,

$$\begin{aligned} A_3^2 = & X_{21} \frac{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^*}{bk} X_{21} + X_{22} \frac{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^*}{bc} X'_{22} - \frac{1}{n} (X_{21} \underline{\underline{J}}^* + X_{22} \underline{\underline{J}}^*) X'_1 - \\ & - \frac{1}{n} X_1 (\underline{\underline{J}}^* X'_{21} + \underline{\underline{J}}^* X'_{22}) + \frac{1}{n} X_1 X'_1. \end{aligned}$$

Mas, $X_{21} \underline{\underline{J}}^* + X_{22} \underline{\underline{J}} = X_1$; portanto,

$$A_3^2 = X_{21} \frac{\underline{\underline{JJ}}^*}{bk} X_{21}' + X_{22} \frac{\underline{\underline{JJ}}'}{bc} X_{22}' - \frac{1}{n} X_1 X_1' = A_3, \quad [3.9.3.b]$$

ou seja, A_3 é uma matriz idempotente; e ainda:

$$\begin{aligned} \text{Caract.}(A_3) &= \text{TR} \left(X_{21}' X_{21} \frac{\underline{\underline{JJ}}^*}{bk} + X_{22}' X_{22} \frac{\underline{\underline{JJ}}'}{bc} - \frac{1}{n} X_1' X_1 \right) \\ &= \text{TR} \left(R_1 \frac{\underline{\underline{JJ}}^*}{rv} + R_2 \frac{\underline{\underline{JJ}}'}{bc} - 1 \right) \\ &= \text{TR} \left(\frac{\underline{\underline{JJ}}^*}{v} + \frac{\underline{\underline{JJ}}'}{c} - 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

$$\underline{\mu}' A_3 \underline{\mu} = \underline{\theta}' X' (X_{21} \frac{\underline{\underline{JJ}}^*}{bk} X_{21}' + X_{22} \frac{\underline{\underline{JJ}}'}{bc} X_{22}' - \frac{1}{n} X_1 X_1') X \underline{\theta},$$

que, por [3.8.7.c] e [3.8.1.b], fica:

$$\underline{\mu}' A_3 \underline{\mu} = \frac{r}{v} \underline{\tau}_1' \underline{\underline{JJ}}^* \underline{\tau}_1 + \frac{b}{c} \underline{\tau}_2' \underline{\underline{JJ}}' \underline{\tau}_2 \quad [3.9.3.c]$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$\text{SQTipos}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n_3, \delta_3)} \quad [3.9.3.d]$$

onde:

$$n_3 = 1$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{r}{v} \underline{\tau}_1' \underline{\underline{JJ}}^* \underline{\tau}_1 + \frac{b}{c} \underline{\tau}_2' \underline{\underline{JJ}}' \underline{\tau}_2 \right).$$

3.9.4 - Distribuição da SQTor.(aj.)/ σ^2

A SQTor.(aj.) é:

$$SQTor.(aj.) = SQTaj. - SQTad. - SQTipos,$$

que por [3.7.e], [3.7.i] e [3.7.l], fica:

$$SQTor.(aj.) = \underline{\tau}'\underline{Q} - \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}^2 + \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right)^2 -$$

$$- \frac{k'}{rvc} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \quad [3.9.4.a]$$

$$= \underline{Q}'\underline{M}^{-1}\underline{Q} - \frac{1}{b} \underline{Q}_2'\underline{Q}_2 + \frac{1}{bc} (\underline{J}'\underline{Q}_2)'(\underline{J}'\underline{Q}_2) -$$

$$- \frac{k'}{rvc} (\underline{J}'\underline{Q}_1)'(\underline{J}'\underline{Q}_1)$$

$$= \underline{Q}'\underline{M}^{-1}\underline{Q} - \frac{1}{b} \underline{Q}_2'\underline{Q}_2 + \frac{1}{bc} \underline{Q}_2'\underline{J}\underline{J}'\underline{Q}_2 -$$

$$- \frac{k'}{rvc} \underline{Q}_1'\underline{J}\underline{J}'\underline{Q}_1$$

$$= \underline{Q}'\underline{M}^{-1}\underline{Q} - [\underline{Q}_1' : \underline{Q}_2'] \begin{bmatrix} \frac{k'}{rvc} \underline{J}\underline{J}' & \phi \\ \phi & \frac{1}{b} \left(\underline{I} - \frac{\underline{J}\underline{J}'}{c} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q}_1 \\ \underline{Q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{Q}'(\underline{M}^{-1} - D)\underline{Q} \quad , \quad [3.9.4.b]$$

onde:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{k'}{rvc} \frac{JJ'}{c} & \phi \\ \phi & \frac{1}{b} \left(I - \frac{JJ'}{c} \right) \end{pmatrix}.$$

Como $\underline{\tilde{Q}} = \underline{W}\underline{X}'\underline{y}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{SQTor. (aj.)} &= \underline{y}'\underline{X}\underline{W}'(\underline{M}^{-1} - D)\underline{W}\underline{X}'\underline{y} \\ &= \underline{y}'\underline{A}_4\underline{y} \quad , \quad [3.9.4.c] \end{aligned}$$

onde, $\underline{A}_4 = \underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' - \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}'$.

Verifica-se que:

$$\begin{aligned} \underline{A}_4^2 &= \underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' + \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}' - \\ &- \underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}' - \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' \quad . \end{aligned}$$

Mas, por [3.6.1.b], $\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}' = \underline{C}$; logo,

$$\begin{aligned} \underline{A}_4^2 &= \underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' + \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{C}\underline{D}\underline{W}\underline{X}' - \underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{C}\underline{D}\underline{W}\underline{X}' - \\ &- \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' \quad . \end{aligned}$$

Sabe-se que $\underline{C} = \underline{M}' + \underline{A}'$; pode-se verificar tam
bém que $\underline{D}\underline{C}\underline{D} = \underline{D}$. Assim,

$$\begin{aligned} \underline{A}_4^2 &= \underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' + \underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{A}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' + \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}' - \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}' - \\ &- \underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{A}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}' - \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{W}\underline{X}' - \underline{X}\underline{W}'\underline{D}\underline{A}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}' \quad . \end{aligned}$$

Mas, por [3.6.2.e], $XW'M^{-1}A' = \phi$; e $A'M^{-1}WX' = \phi$, tomando-se uma matriz A simétrica. Segue-se então que:

$$A_4^2 = XW'M^{-1}WX' - XW'DWX' = A_4, \quad [3.9.4.d]$$

ou seja, A_4 é uma matriz idempotente; e ainda,

$$\begin{aligned} \text{Caract.}(A_4) &= \text{TR}(XW'M^{-1}WX' - XW'DWX') \\ &= \text{TR}(M^{-1}WX'XW') - \text{TR}(DWX'XW') \\ &= \text{TR}(M^{-1}C) - \text{TR}(DC) \\ &= \text{Caract.}(C) - \text{TR}(DC). \end{aligned}$$

Pode-se verificar que:

$$DC = \begin{bmatrix} \frac{1}{v} \frac{JJ'}{c} & -\frac{1}{c} \frac{JJ'}{c} \\ \phi & (I - \frac{JJ'}{c}) \end{bmatrix}, \quad \text{TR}(DC) = c,$$

Logo, como $\text{Caract.}(C) = v-1 = v+c-1$, tem-se:

$$\text{Caract.}(A_4) = v+c-1-c = v-1 \quad [3.9.4.e]$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}'A_4\underline{\mu} &= \underline{\theta}'X'(XW'M^{-1}WX' - XW'DWX')X\underline{\theta} \\ &= \underline{\tau}'CM^{-1}C\underline{\tau} - \underline{\tau}'CDC\underline{\tau} \\ &= \underline{\tau}'C\underline{\tau} - \underline{\tau}'CDC\underline{\tau} \quad [3.9.4.f] \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$SQTor.(aj.)/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n_4, \delta_4)} , \quad [3.9.4.g]$$

onde:

$$n_4 = v-1$$

$$\delta_4 = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{\tau}'C\underline{\tau} - \underline{\tau}'CDC\underline{\tau})$$

3.9.5 - Distribuição da SQBlocos/ σ^2

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} SQB &= \underline{B}'K^{-1}\underline{B} - C_0 \\ &= \underline{y}'X_3K^{-1}X_3'\underline{y} - \underline{y}' \frac{X_1X_1'}{n} \underline{y} \\ &= \underline{y}'A_5\underline{y} , \end{aligned} \quad [3.9.5.a]$$

onde, $A_5 = X_3K^{-1}X_3' - \frac{1}{n} X_1X_1' .$

Verifica-se que:

$$\begin{aligned} A_5^2 &= X_3K^{-1}X_3'X_3K^{-1}X_3' + \frac{1}{n^2} X_1X_1'X_1X_1' - \frac{1}{n} X_3K^{-1}X_3'X_1X_1' - \\ &\quad - \frac{1}{n} X_1X_1'X_3K^{-1}X_3' \\ &= X_3K^{-1}KK^{-1}X_3' + \frac{1}{n} X_1X_1' - \frac{1}{n} X_3K^{-1}ZX_1' - \frac{1}{n} X_1Z'K^{-1}X_3' \end{aligned}$$

Mas, $X_3 K^{-1} \underline{z} = X_1$; então,

$$\begin{aligned} A_5^2 &= X_3 K^{-1} X_3' + \frac{1}{n} X_1 X_1' - \frac{1}{n} X_1 X_1' - \frac{1}{n} X_1 X_1' \\ &= X_3 K^{-1} X_3' - \frac{1}{n} X_1 X_1' = A_5, \end{aligned}$$

ou seja, A_5 é uma matriz idempotente; e ainda:

$$\begin{aligned} \text{Caract.}(A_5) &= \text{TR}(X_3 K^{-1} X_3' - \frac{1}{n} X_1 X_1') \\ &= \text{TR}(X_3' X_3 K^{-1} - \frac{1}{n} X_1' X_1) \\ &= \text{TR}(I_b - 1) \\ &= b-1 \end{aligned} \quad [3.9.5.b]$$

Tem-se ainda:

$$\underline{\mu}' A_5 \underline{\mu} = \underline{\theta}' X' (X_3 K^{-1} X_3' - \frac{1}{n} X_1 X_1') X \underline{\theta}$$

que, por [3.8.3.b] e [3.8.1.b], fica:

$$\underline{\mu}' A_5 \underline{\mu} = \underline{\tau}' R \underline{\tau} - \underline{\tau}' C \underline{\tau} + 2 \underline{\beta}' N' \underline{\tau} + \underline{\beta}' K \underline{\beta}$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$SQB/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n_5, \delta_5)} \quad [3.9.5.c]$$

onde,

$$n_5 = b-1;$$

$$\delta_5 = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{\tau}' R \underline{\tau} - \underline{\tau}' C \underline{\tau} + 2 \underline{\beta}' N' \underline{\tau} + \underline{\beta}' K \underline{\beta}).$$

3.9.6 - Distribuição da SQResíduo/ σ^2

A SQResíduo é dada por:

$$\begin{aligned}
 \text{SQR} &= \underline{y}'\underline{y} - \underline{1}'\underline{Q} - \underline{B}'\underline{K}^{-1}\underline{B} \quad , \\
 &= \underline{y}'\underline{y} - \underline{y}'\underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}'\underline{y} - \underline{y}'\underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3'\underline{y} \\
 &= \underline{y}'(\underline{I} - \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' - \underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3')\underline{y} \quad [3.9.6.a]
 \end{aligned}$$

Fazendo $\underline{A}_6 = \underline{I} - \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' - \underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3'$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \underline{A}_6^2 &= \underline{I} + \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' + \underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3' - \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' - \underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3' - \\
 &\quad - \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' + \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}'\underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3' - \underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3' + \\
 &\quad + \underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3'\underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' \\
 &= \underline{I} - \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' - \underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3' + \underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}'\underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3' + \\
 &\quad + \underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3'\underline{XW}'\underline{M}^{-1}\underline{WX}' \quad .
 \end{aligned}$$

Mas, $\underline{X}_3'\underline{X} = [\underline{N}' \quad \underline{K}]$. Então,

$$\underline{X}_3'\underline{XW}' = [\underline{N}' \quad \underline{K}] \begin{pmatrix} \underline{I}_{\underline{V}'} \\ -\underline{K}^{-1}\underline{N}' \end{pmatrix} = \underline{N}' - \underline{N}' = \underline{\phi} \quad [3.9.6.b]$$

Portanto, tem-se que:

$$A_6^2 = I - XW'M^{-1}WX' - X_3K^{-1}X_3' = A_6, \quad ,$$

ou seja, A_6 é uma matriz idempotente; e ainda:

$$\text{Caract.}(A_6) = \text{TR}(I_n) - \text{TR}(XW'M^{-1}WX') - \text{TR}(X_3K^{-1}X_3')$$

$$= n - \text{TR}(M^{-1}WX'XW') - \text{TR}(X_3'X_3K^{-1})$$

$$= n - \text{TR}(M^{-1}C) - \text{TR}(I_b)$$

$$= n - (v'-1) - b$$

$$= n-v'-b+1 \quad [3.9.6.c]$$

Tem-se também:

$$\underline{\mu}'A_6\underline{\mu} = \underline{\theta}'X'(I - XW'M^{-1}WX' - X_3K^{-1}X_3')X\underline{\theta}$$

$$= \underline{\theta}'X'X\underline{\theta} - \underline{\theta}'X'XW'M^{-1}WX'X\underline{\theta} - \underline{\theta}'X'X_3K^{-1}X_3'X\underline{\theta}$$

$$= \underline{\theta}'X'X\underline{\theta} - \underline{\tau}'C'M^{-1}C\underline{\tau} - \underline{\theta}'X'X_3K^{-1}X_3'X\underline{\theta}$$

[3.9.6.d]

Mas, $C'M^{-1}C = C$, e

$$\underline{\theta}'X'X\underline{\theta} = [\underline{\tau}' \quad \underline{\beta}'] \begin{pmatrix} R & N \\ N' & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tau} \\ \underline{\beta} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\tau}'R\underline{\tau} + 2\underline{\tau}'N\underline{\beta} + \underline{\beta}'K\underline{\beta}.$$

Logo, a expressão de [3.9.6.d] fica:

$$\underline{\mu}'\underline{A}_6\underline{\mu} = \underline{\tau}'\underline{R}\underline{\tau} + 2\underline{\tau}'\underline{N}\underline{\beta} + \underline{\beta}'\underline{K}\underline{\beta} - \underline{\tau}'\underline{C}\underline{\tau} - \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3'\underline{X}\underline{\theta}.$$

Observa-se por [3.8.3b] que, se o efeito da média não é considerado no modelo, tem-se:

$$\underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}_3\underline{K}^{-1}\underline{X}_3'\underline{X}\underline{\theta} = \underline{\tau}'\underline{R}\underline{\tau} - \underline{\tau}'\underline{C}\underline{\tau} + 2\underline{\tau}'\underline{N}\underline{\beta} + \underline{\beta}'\underline{K}\underline{\beta}.$$

Portanto, segue-se que:

$$\underline{\mu}'\underline{A}_6\underline{\mu} = 0.$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$SQR/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n_6, 0)}, \quad [3.9.6.e]$$

ou seja, SQR/σ^2 tem distribuição de qui-quadrado central, com n_6 graus de liberdade, onde,

$$n_6 = n - v' - b + 1.$$

$$3.9.7 - \text{Distribuição do quociente } \frac{SQ_{Taj.}/n_1}{SQR/n_6}$$

De [3.9.1.a] e [3.9.6.a], tem-se:

$$SQ_{Taj.} = \underline{y}'\underline{A}_1\underline{y}, \quad SQR = \underline{y}'\underline{A}_6\underline{y},$$

respectivamente.

Verifica-se que, sendo $V = \sigma^2 I$, então,

$$A_1 VA_6 = A_1 A_6 \sigma^2$$

$$= (XW'M^{-1}WX')(I - XW'M^{-1}WX' - X_3K^{-1}X')\sigma^2$$

$$= (XW'M^{-1}WX' - XW'M^{-1}WX' - XW'M^{-1}WX'X_3K^{-1}X')\sigma^2$$

Mas, por [3.9.6.b], $X_3'XW' = \phi$. Logo,

$$A_1 VA_6 = \phi \quad . \quad [3.9.7.a]$$

Assim, pelo Teorema 2, $SQTaj.$ e SQR são independentes; e usando-se o Teorema 3, tem-se, por [3.9.1.e] e [3.9.6.e], que:

$$\frac{SQTaj./n_1}{SQR/n_6} \sim F(n_1, n_6, \delta_1) \quad [3.9.7.b]$$

onde:

$$n_1 = v' - 1;$$

$$n_6 = n - v' - b + 1;$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \tau' C \tau.$$

3.9.8 - Distribuição do quociente $\frac{SQ\text{Tad.}/n_2}{SQR/n_6}$

De [3.9.2.a] e [3.9.6.a], tem-se:

$$SQ\text{Tad.} = \underline{y}'A_2\underline{y} \quad \text{e} \quad SQR = \underline{y}'A_6\underline{y} \quad ,$$

respectivamente.

É conveniente, no entanto, apresentar-se a $SQ\text{Tad.}$ considerando [3.7.i], ou seja,

$$\begin{aligned} SQ\text{Tad.} &= \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}^2 - \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_s} \right)^2 \\ &= \frac{1}{b} \underline{Q}_2' \underline{Q}_2 - \frac{1}{bc} (\underline{J}' \underline{Q}_2)' (\underline{J}' \underline{Q}_2) \\ &= \underline{y}' \underline{XW}' \underline{GWX}' \underline{y} \end{aligned} \quad [3.9.8.a]$$

onde,

$$G = \begin{pmatrix} \phi & & \phi \\ & & \\ \phi & \frac{1}{b}(\underline{I} - \frac{\underline{JJ}'}{bc}) & \end{pmatrix}$$

Tomando-se $A_2 = \underline{XW}' \underline{GWX}'$, tem-se que:

$$\begin{aligned} A_2 VA_6 &= [\underline{XW}' \underline{GWX}' (\underline{I} - \underline{XW}' \underline{M}^{-1} \underline{WX}' - \underline{X}_3 \underline{K}^{-1} \underline{X}_3')] \sigma^2 \\ &= [\underline{XW}' \underline{GWX}' - \underline{XW}' \underline{GWX}' \underline{XW}' \underline{M}^{-1} \underline{WX}' - \underline{XW}' \underline{GWX}' \underline{X}_3 \underline{K}^{-1} \underline{X}_3'] \sigma^2 \end{aligned}$$

Mas, $WX'XW' = C$, e por [3.9.6.b], $WX'X_3 = \phi$.

Logo,

$$\begin{aligned} A_2 VA_6 &= (XW'GWX' - XW'GCM\bar{1}WX')\sigma^2 \\ &= [XW'GWX' - XW'G(A'+M')M\bar{1}WX']\sigma^2 \\ &= (XW'GWX' - XW'GA'M\bar{1}WX' - XW'GWX')\sigma^2 \end{aligned}$$

Como $A'M\bar{1}WX' = \phi$, conforme em [3.9.4], segue-se que:

$$A_2 VA_6 = \phi \quad [3.9.8.b]$$

Assim, pelo Teorema 2, a SQTad. e SQR são in dependentes, e usando-se o Teorema 3, tem-se, por [3.9.2.d] e [3.9.6.e], que:

$$\frac{SQTad./n_2}{SQR/n_6} \sim F_{(n_2, n_6, \delta_2)} \quad [3.9.8.c]$$

onde,

$$n_2 = c-1;$$

$$n_6 = n-v'-b+1;$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \bar{1}_2'(R_2 - \frac{b}{c} \bar{J}\bar{J}')\bar{1}_2.$$

3.9.9 - Distribuição do quociente $\frac{SQTipos/n_3}{SQR/n_6}$

A $SQTipos$, por [3.7.1], é:

$$\begin{aligned}
 SQTipos &= \frac{k'}{rvc} \left(\sum_{s=1}^V Q_s \right)^2 \\
 &= \frac{k'}{rvc} (\underline{J}' \underline{\tilde{Q}}_1^*)' (\underline{J}' \underline{\tilde{Q}}_1^*) \\
 &= \underline{y}' \underline{XW}' \underline{FWX}' \underline{y} \quad , \quad [3.9.9.a]
 \end{aligned}$$

onde,

$$F = \begin{pmatrix} \frac{k'}{rvc} \underline{JJ}' & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix} .$$

Por [3.9.6.a], a SQR é:

$$SQR = \underline{y}' A_6 \underline{y} .$$

Tomando-se $A_3 = \underline{XW}' \underline{FWX}'$, verifica-se que:

$$\begin{aligned}
 A_3 VA_6 &= (\underline{XW}' \underline{FWX}') (I - \underline{XW}' \underline{M}^{-1} \underline{WX}' - \underline{X}_3 \underline{K}^{-1} \underline{X}_3') \sigma^2 \\
 &= (\underline{XW}' \underline{FWX}' - \underline{XW}' \underline{FWX}' \underline{XW}' \underline{M}^{-1} \underline{WX}' - \underline{XW}' \underline{FWX}' \underline{X}_3 \underline{K}^{-1} \underline{X}_3') \sigma^2 .
 \end{aligned}$$

Mas, $\underline{WX}' \underline{XW}' = C$, e por [3.9.6.b], $\underline{WX}' \underline{X}_3 = \phi$.

Logo,

$$\begin{aligned}
A_3 VA_6 &= (XW'FWX' - XW'FCM^{-1}WX')\sigma^2 \\
&= [XW'FWX' - XW'F(A'+M')M^{-1}WX']\sigma^2 \\
&= [XW'FWX' - XW'FA'M^{-1}WX' - XW'FWX']\sigma^2
\end{aligned}$$

Sendo $A'M^{-1}WX' = \phi$, segue-se que:

$$A_3 VA_6 = \phi \quad . \quad [3.9.9.b]$$

Assim, pelo Teorema 2, SQTipos e SQR são independentes, e usando-se o Teorema 3, tem-se, por [3.9.3.d] e [3.9.6.e], que:

$$\frac{SQTipos/n_3}{SQR/n_6} \sim F(n_3, n_6, \delta_3) \quad [3.9.9.c]$$

onde:

$$n_3 = 1;$$

$$n_6 = n-v'-b+1;$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{r}{v} \tau_1' JJ' \tau_1 + \frac{b}{c} \tau_2' JJ' \tau_2 \right) .$$

3.9.10 - Distribuição do quociente $\frac{SQTor.(aj.)/n_4}{SQR/n_6}$

De [3.9.4.c] e [3.9.6.a] tem-se:

$$SQTor.(aj.) = \underline{y}'A_4\underline{y} \quad e \quad SQR = \underline{y}'A_6\underline{y} \quad ,$$

respectivamente.

Verifica-se que, sendo $V = \sigma^2 I$, então,

$$A_4 VA_6 = (XW'M^{-1}WX' - XW'DWX')(I - XW'M^{-1}WX' - X_3 K^{-1}X_3')\sigma^2$$

Como $W'X'XW = C$ e $WX'X_3 = \phi$, segue-se que:

$$A_4 VA_6 = (XW'M^{-1}WX' - XW'M^{-1}CM^{-1}WX' - XW'DWX' + XW'DCM^{-1}WX')\sigma^2$$

Mas, $C = M' + A'$, $XW'M^{-1}A' = \phi$ e $A'M^{-1}WX' = \phi$,

conforme em (3.9.4). Logo,

$$A_4 VA_6 = (XW'M^{-1}WX' - XW'M^{-1}WX' - XW'DWX' + XW'DWX')\sigma^2 \quad ,$$

ou seja,

$$A_4 VA_6 = \phi \quad . \quad [3.9.10.a]$$

Portanto, pelo Teorema 2, $SQTor.(aj.)$ e SQR são independentes, e pelo Teorema 3, tem-se, por [3.9.4.g] e [3.9.6.e], que:

$$\frac{SQTor.(aj.)/n_4}{SQR/n_6} \sim F(n_4, n_6, \delta_6) \quad , \quad [3.9.10.b]$$

onde:

$$n_4 = v-1;$$

$$n_6 = n-v'-b+1;$$

$$\delta_6 = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{\tau}'C\underline{\tau} - \underline{\tau}'CDC\underline{\tau}).$$

3.10 - Estimadores das Médias de Tratamentos Ajustadas para Blocos

As estimativas das médias dos tratamentos, ajustadas para blocos, são obtidas de:

$$\text{i) Tratamentos originais: } \hat{m}_s = \hat{m} + \hat{t}_s, \quad (s=1,2,\dots,v),$$

[3.10.a]

$$\text{ii) Tratamentos adicionais: } \hat{m}_{a_{s'}} = \hat{m} + \hat{t}_{a_{s'}}, \quad (s'=1,2,\dots,c).$$

[3.10.b]

3.11 - Quadro da Análise de Variância

O quadro da análise de variância, com as esperanças dos quadrados médios, pode ser apresentado na seguinte forma:

Esquema da análise de variância

Causas da Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Blocos (não ajustados)	b-1	$SQB/(b-1)$	$\sigma^2 + (\tau'R_{\tau} - \tau'C_{\tau} + 2\tau'N\tilde{\beta} + \tilde{\beta}'K\tilde{\beta})/(b-1)$
Tratamentos (ajustados)	v'-1	$SQTaj./(v'-1)$	$\sigma^2 + \tau'C_{\tau}/(v'-1)$
Tipos	1	SQT_{Tipos}	$\sigma^2 + r_{\tau_1}^{**}JJ'\tau_1/v + b\tau_2^{*}JJ'\tau_2/c$
Trat.orig. (ajustados)	v-1	$SQT_{\text{or.}}(aj.)/(v-1)$	$\sigma^2 + [\tau_1'(R_1 - rJJ')/v]_{\tau_1} - \tau'NN'\tau/k']/(v-1)$
Trat.adicionais	c-1	$SQT_{\text{ad.}}/(c-1)$	$\sigma^2 + \tau_2'(R_2 - bJJ')/c]_{\tau_2}/(c-1)$
Resíduo	n-v'-b+1	$SQR/(n-v'-b+1)$	σ^2
TOTAL	n-1		

As somas de quadrados no quadro anterior são:

$$SQB = \frac{1}{k'} \sum_{h=1}^b B_h^2 - C_0$$

$$SQTaj. = \hat{\tau}' \hat{Q}_1^* + \hat{\tau}' \hat{Q}_2^*$$

$$= \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \sum_{S=1}^v Q_S^2 - \frac{r}{b} \left(\sum_{S=1}^v Q_S \right)^2 + \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^m \left[k' \sum_{S=1}^v Q_S S_{\ell} (Q_S) - \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \left(\sum_{S=1}^v Q_S \right)^2 \right] \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right\} + \\ + \frac{1}{b} \sum_{S'=1}^c Q_{a_{S'}}^2$$

$$SQTipos = \frac{k'}{rvc} \left(\sum_{S=1}^v Q_S \right)^2$$

$$SQTad. = \frac{1}{b} \sum_{S'=1}^c Q_{a_{S'}}^2 - \frac{1}{bc} \left(\sum_{S'=1}^c Q_{a_{S'}} \right)^2$$

$$SQTor. (aj.) = \frac{1}{r(k'-1)} \left\{ k' \sum_{S=1}^v Q_S^2 + k' \sum_{\ell=1}^m \sum_{S=1}^v Q_S S_{\ell} (Q_S) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} - \right. \\ \left. - \left[\frac{r}{b} + \frac{(k'-1)}{v} + \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right] \left(\sum_{S=1}^v Q_S \right)^2 \right\}$$

$$SQT = \sum_{u,h} y_{uh}^2 - C_0$$

$$SQR = SQT - SQB - SQTaj.$$

A $SQ_{Tor.}(aj.)$ pode ser obtida mais facilmente através da expressão:

$$SQ_{Tor.}(aj.) = SQ_{Taj.} - SQ_{Tipos} - SQ_{Tad.}$$

3.12 - Variância da Estimativa de um Contraste entre Duas Médias de Tratamentos

Sabe-se, por [3.6.2.k], que a variância de $\underline{p}'\hat{\underline{t}}$, sendo $\underline{p}'\underline{t}$ uma função linear estimável, é dada por:

$$\text{Var}(\underline{p}'\hat{\underline{t}}) = \underline{p}'\underline{M}^{-1}\underline{p} \sigma^2 ,$$

onde os elementos da matriz $\underline{M}$ são m_{ss} , $m_{a_s's}$, m_{ss^*} , $m_{ss'}$ e $m_{a_s's^*}$, definidos em (3.6).

Para o caso em questão, há três tipos de contrastes entre médias de dois tratamentos:

1º TIPO: Contraste envolvendo dois tratamentos originais que são ℓ -ésimos associados.

Nesse caso tem-se que:

$$\text{Var}(\hat{m}_s - \hat{m}_{s^*}) = \text{Var}(t_s - t_{s^*}) .$$

Com base em [3.6.2.m], obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\bar{t}_S - \bar{t}_{S^*}) &= (m_{SS} + m_{S^*S^*} - m_{SS^*} - m_{S^*S}) \sigma^2 \\
 &= \left(\frac{k'}{r(k'-1)} + \frac{k'}{r(k'-1)} - \frac{k'}{r(k'-1)} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} - \frac{k'}{r(k'-1)} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right) \sigma^2 \\
 &= \frac{2k'}{r(k'-1)} \left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right) \sigma^2
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_S - \bar{t}_{S^*}) = \frac{2k'}{r(k'-1)} \left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right) \text{QMR} \quad [3.12.a]$$

2º TIPO: Contraste envolvendo dois tratamentos adicionais

$$\text{Var}(\hat{m}_{a_{S'}} - \hat{m}_{a_{S'^*}}) = \text{Var}(\bar{t}_{a_{S'}} - \bar{t}_{a_{S'^*}})$$

Com base em [3.6.2.m], obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\bar{t}_{a_{S'}} - \bar{t}_{a_{S'^*}}) &= (m_{S'S'} + m_{a_{S'^*}S'^*} - m_{a_{S'}S'^*} - m_{a_{S'^*}S'}) \sigma^2 \\
 &= \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} - 0 - 0 \right) \sigma^2 \\
 &= \frac{2\sigma^2}{b}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_{a_{s'}} - \bar{t}_{a_{s' \cdot}}) = \frac{2QMR}{b} \quad [3.12.b]$$

3º TIPO: Contraste envolvendo um tratamento original e outro adicional.

$$\text{Var}(\hat{m}_s - \hat{m}_{a_{s'}}) = \text{Var}(\bar{t}_s - \bar{t}_{a_{s'}})$$

Com base em [3.6.2.m], tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{t}_s - \bar{t}_{a_{s'}}) &= (m_{ss} + m_{a_{s' s'}} - m_{ss'} - m_{s' s}) \sigma^2 \\ &= \left\{ \frac{k'}{r(k'-1)} + \frac{1}{b} - \frac{1}{r(k'-1)} \left[\frac{r}{b} + \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right] - 0 \right\} \sigma^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_s - \bar{t}_{a_{s'}}) = \left\{ \frac{k'}{r(k'-1)} + \frac{1}{b} - \frac{1}{r(k'-1)} \left[\frac{r}{b} + \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i\ell} \right] \right\} QMR \quad [3.12.c]$$

Considerando-se o caso especial onde $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda$, ou seja, tratando-se de delineamentos BIB, as variâncias anteriores modificam-se para:

$$\text{Var}(\hat{m}_s - \hat{m}_{s*}) = \frac{2k'\sigma^2}{\lambda v + rc},$$

$$\text{Var}(\hat{m}_{a_{s'}} - \hat{m}_{a_{s'*}}) = \frac{2\sigma^2}{b}, \text{ e}$$

$$\text{Var}(\hat{m}_s - \hat{m}_{a_{s'}}) = \left(\frac{k'}{\lambda v + rc} + \frac{1}{b} - \frac{k'}{n(\lambda v + rc)} \frac{(r^2 - \lambda b)}{r} \right) \sigma^2.$$

as quais concordam com os resultados obtidos por KÄLIN(1966) e FERREIRA (1980).

3.13- Testes de Significâncias

3.13.1- Teste de significância para tratamentos ajustados para blocos

Pode-se verificar, por [3.9.7.b], que:

$$\frac{\text{SQTaj.}/n_1}{\text{SQR}/n_6} \sim F_{(n_1, n_6, \delta_1)},$$

onde: $n_1 = v' - 1$;

$n_6 = n - v' - b + 1$;

$$\delta_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{\tau}' C \underline{\tau}$$

Portanto, a hipótese de nulidade de que todos os efeitos de tratamentos sejam nulos, isto é,

$$H_0^{(1)}: \underline{\tau} = \underline{\phi},$$

pode ser testada utilizando-se o teste F central através da estatística:

$$F_1 = \frac{SQ_{Taj.}/n_1}{SQR/n_6} ,$$

com n_1 e n_6 graus de liberdade, visto que sob a hipótese $H_0^{(1)}$ tem-se $\delta_1 = 0$.

3.13.2- Teste de significância para tratamentos adicionais

De [3.9.8.c] tem-se:

$$\frac{SQ_{Tad.}/n_2}{SQR/n_6} \sim F(n_2, n_6, \delta_2) ,$$

onde: $n_2 = c-1$;

$n_6 = n-v'-b+1$;

$$\delta_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{I}_2' (R_2 - \frac{b}{C} \underline{J}\underline{J}') \underline{I}_2 .$$

Assim, a hipótese de nulidade de que todos os efeitos dos tratamentos adicionais sejam nulos, isto é:

$$H_0^{(2)} : \underline{\tau}_2 = \underline{\phi} ,$$

pode ser testada utilizando-se o teste F central, através da estatística:

$$F_2 = \frac{SQ\text{Tađ.}/n_2}{SQR/n_6},$$

com n_2 e n_6 graus de liberdade, visto que sob a hipótese $H_0^{(2)}$, $\delta_2 = 0$.

3.13.3 -- Teste de significância para tipos de tratamentos

Observa-se por [3.9.9.c] que

$$\frac{SQ\text{Tipos}/n_3}{SQR/n_6} \sim F_{(n_3, n_6, \delta_3)},$$

onde: $n_3 = 1$;

$$n_6 = n - v' - b + 1;$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{r}{v} \tau_1' J J' \tau_1 + \frac{b}{c} \tau_2' J J' \tau_2 \right).$$

A hipótese de nulidade de que a diferença entre o efeito médio dos tratamentos originais e o efeito médio dos tratamentos adicionais seja nula, isto é,

$$H_0^{(3)} : \frac{1}{v} J' \tau_1 = \frac{1}{c} J' \tau_2,$$

pode ser testada utilizando-se o teste F central, através da estatística:

$$F_3 = \frac{SQ_{\text{Tipos}}/n_3}{SQR/n_6},$$

com n_3 e n_6 graus de liberdade. Pode-se verificar que sob a hipótese $H_0^{(3)}$ e sob a restrição paramétrica imposta em 3.2, tem-se que $\delta_3 = 0$.

3.13.4- Teste de significância para tratamentos originais ajustados para blocos

De [3.9.10.b] tem-se:

$$\frac{SQ_{\text{Tor. (aj.)}}/n_4}{SQR/n_6} \sim F_{(n_3, n_6, \delta_6)},$$

onde: $n_4 = v-1$;

$n_6 = n-v'-b+1$;

$$\delta_4 = \frac{1}{2\sigma^2} (\tilde{\tau}' C \tilde{\tau} - \tilde{\tau}' C D C \tilde{\tau}) = \frac{1}{2\sigma^2} [\tilde{\tau}'_1 (R_1 - r J J' / v) \tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}'_1 N N' \tilde{\tau} / k']$$

Assim, a hipótese de nulidade de que todos os efeitos dos tratamentos originias sejam nulos, isto é,

$$H_0^{(4)} : \tilde{\tau}_1 = \phi,$$

pode ser testada através do teste F central, tomando-se a estatística:

$$F_4 = \frac{SQ_{\text{Tor. (aj.)}}/n_4}{SQR/n_6}$$

com n_4 e n_6 graus de liberdade, visto que sob a hipótese $H_0^{(4)}$ e sob a restrição paramétrica, imposta no modelo matemático, tem-se $\delta_6 = 0$.

4. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Como exemplo de aplicação do método proposto, será utilizado um experimento em reticulado quadrado triplo de 16 tratamentos, mais 2 tratamentos adicionais (testemunhas) em cada bloco, cujos dados encontram-se na Tabela 1. Os dados dos tratamentos originais foram obtidos de PIMENTEL GOMES (1973), e referem-se às produções de híbridos de milho, e os referentes aos tratamentos adicionais são fictícios.

Tabela 1 - Produções, em kg/parcela, de híbridos de milho e testemunhas fictícias. (Os números entre parêntesis indicam os tratamentos originais e as letras os tratamentos adicionais).

1ª REPETIÇÃO						Totais dos Blocos
(1) 2,0	(2) 2,9	(3) 2,2	(4) 3,9	(A ₁) 3,0	(A ₂) 3,2	17,2
(5) 2,3	(6) 2,5	(7) 1,4	(8) 1,7	(A ₁) 2,8	(A ₂) 2,6	13,3
(9) 1,6	(10) 3,0	(11) 1,5	(12) 2,1	(A ₁) 2,0	(A ₂) 2,2	12,4
(13) 2,3	(14) 3,4	(15) 2,0	(16) 2,8	(A ₁) 2,5	(A ₂) 3,2	16,2
						59,1

2ª REPETIÇÃO						Totais dos Blocos
(1) 2,2	(5) 2,3	(9) 2,7	(13) 1,4	(A ₁) 2,8	(A ₂) 2,9	14,3
(2) 3,1	(6) 2,8	(10) 2,6	(14) 2,8	(A ₁) 3,2	(A ₂) 3,4	17,9
(3) 3,1	(7) 2,9	(11) 2,5	(15) 2,4	(A ₁) 3,0	(A ₂) 3,2	17,1
(4) 4,0	(8) 2,8	(12) 2,7	(16) 1,5	(A ₁) 4,0	(A ₂) 3,8	18,8
						68,1

3ª REPETIÇÃO						Totais dos Blocos
(1) 3,0	(6) 2,9	(11) 2,6	(16) 3,1	(A ₁) 3,0	(A ₂) 3,2	17,8
(2) 1,8	(5) 1,9	(12) 2,9	(15) 2,5	(A ₁) 3,2	(A ₂) 2,8	15,1
(3) 1,7	(8) 2,0	(9) 1,4	(14) 2,3	(A ₁) 2,5	(A ₂) 2,0	11,9
(4) 4,4	(7) 3,7	(10) 3,3	(13) 2,2	(A ₁) 3,8	(A ₂) 3,5	20,9
						65,7

O reticulado quadrado, delineamento utilizado no exemplo, é do tipo quadrado latino com $i=3$ restrições. Logo, de acordo com o que foi relatado em [2.2.2.3], há $v=s^2=16$ tratamentos que satisfazem o seguinte esquema de associação:

1a	2b	3c	4d
5b	6a	7d	8c
9c	10d	11a	12b
13d	14c	15b	16a

[4.a]

A regra de associação é a seguinte: Dois tratamentos são primeiros associados se e somente se eles ocorrem na mesma linha ou coluna do conjunto, ou nas posições ocupadas pela mesma letra. Em outros casos eles são segundos associados.

Sabe-se ainda, por [2.2.2.3], que em um delineamento PBIB do tipo quadrado latino, as seguintes relações se verificam:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= i(s-1) \quad , \quad n_2 = (s-1)(s-i+1), \\
 p_{11}^1 &= i^2 - 3i + s \quad , \quad p_{12}^1 = p_{21}^1 = (i-1)(s-i+1), \quad p_{22}^1 = (s-i)(s-i+1) \\
 p_{11}^2 &= i(i-1) \quad , \quad p_{12}^2 = p_{21}^2 = i(s-i) \quad , \quad p_{22}^2 = (s-i)^2 + i - 2 \quad .
 \end{aligned}$$

Pode-se então verificar que os parâmetros do primeiro tipo, referentes ao delineamento PBIB utilizado, são:

$$v=16, \quad b=12, \quad r=i=3, \quad k=s=4, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=0,$$

$$n_1=9, \quad n_2=6,$$

e os parâmetros do segundo tipo são:

$$p_{11}^1=4, \quad p_{12}^1=p_{21}^1=4, \quad p_{22}^1=2$$

$$p_{11}^2=6, \quad p_{12}^2=p_{21}^2=3, \quad p_{22}^2=2$$

Com a inclusão dos $c=2$ tratamentos adicionais resulta que:

$$v'=v+c=18 \quad \text{e} \quad k'=k+c=6$$

A análise de variância pode ser desenvolvida com o auxílio da seguinte tabela:

Tabela 2 - Tabela auxiliar da análise de variância.

Tratamentos originais	T _s	A _s	Q _s	Q _s ²	S ₂ (Q _s)	Q _{S₂} (Q _s)	t _s	m̂ _s
1	7,2	49,3	-1,0167	1,0337	-1,3667	1,3895	-0,3994	2,2798
2	7,8	50,2	-0,5667	0,3211	-7,4665	4,2313	-0,0828	2,5964
3	7,0	46,2	-0,7000	0,4900	-4,3000	3,0100	-0,2089	2,4703
4	12,3	56,9	2,8167	7,9338	-2,9334	-8,2625	1,0982	3,7774
5	6,5	42,7	-0,6167	0,3803	0,6334	-0,3906	-0,2947	2,3845
6	8,2	49,0	0,0333	0,0011	-2,4666	-0,0821	0,0268	2,7060
7	8,0	51,3	-0,5500	0,3025	-2,9001	1,5951	-0,1851	2,4941
8	6,5	44,0	-0,8333	0,6944	-6,3333	5,2775	-0,2113	2,4679
9	5,7	38,6	-0,7333	0,5377	-0,8334	0,6111	-0,3042	2,3750
10	8,9	51,2	0,3667	0,1345	-5,7334	-2,1024	0,2316	2,9108
11	6,6	47,3	-1,2833	1,6469	-1,0333	1,3260	-0,5089	2,1708
12	7,7	46,3	-0,0167	0,0003	-4,0667	0,0679	0,0458	2,7250
13	5,9	51,4	-2,6666	7,1108	-3,3667	8,9776	-0,9803	1,6989
14	8,5	46,0	0,8333	0,6944	-0,6667	-0,5556	0,2887	2,9679
15	6,9	48,4	-1,6667	1,3612	0,6334	-0,7390	-0,5042	2,1750
16	7,4	52,8	-1,4000	1,9600	-2,8000	3,9200	-0,5113	2,1679
V								
Σ	121,1		-7,5000	24,6027		18,2738		
S=1								
Tratamentos adicionais	T _{a_s'}	G	Q _{a_s'}	Q _{a_s'} ²			t _{a_s'}	m̂ _{a_s'}
A ₁	35,8	192,9	3,6500	13,3225			0,3042	2,9834
A ₂	36,0	192,9	3,8500	14,8225			0,3208	3,0000
C								
Σ	71,8		7,5000	28,1450				
S'=1								

Os efeitos dos tratamentos adicionais foram estimados utilizando-se a expressão [3.5.2.1.e], ou seja,

$$t_{a_s} = \frac{1}{b} Q_{a_s},$$

e os efeitos dos tratamentos originais através de [3.5.2.3.k], ou seja:

$$t_s = \frac{1}{r(k'-1)\Delta} \left\{ k'[(\Delta - \bar{A}_1^*)Q_s + (\bar{A}_2^* - \bar{A}_1^*)S_2(Q_s)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{br} [\Delta r^2 + (r^2 + \lambda_1 b)n_1 \bar{A}_1^* + (r^2 - \lambda_2 b)n_2 \bar{A}_2^* - brk' \bar{A}_1^*] \sum_{s=1}^v Q_s \right\}$$

Na expressão anterior sabe-se, de [3.5.2.3], que:

$$i) \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

onde,

$$a_{11} = r(k'-1) + (\lambda_1 - \lambda_2)p_{12}^1 + \lambda_1$$

$$a_{12} = (\lambda_1 - \lambda_2)p_{12}^2$$

$$a_{21} = (\lambda_2 - \lambda_1)p_{21}^1,$$

$$a_{22} = r(k'-1) + (\lambda_2 - \lambda_1)p_{21}^2 + \lambda_2$$

Logo, no exemplo, tem-se:

$$a_{11}=20, \quad a_{12}=3, \quad a_{21}=-4, \quad a_{22}=12$$

$$\Delta = 252$$

$$\text{ii) } \bar{A}_1^* = \lambda_1 a_{22} - \lambda_2 a_{21} \quad \text{e} \quad \bar{A}_2^* = \lambda_2 a_{11} - \lambda_1 a_{12}$$

Logo, no exemplo, tem-se:

$$\bar{A}_1^* = 12 \quad \text{e} \quad \bar{A}_2^* = -3 \quad .$$

Pode-se verificar então que a expressão para os efeitos dos tratamentos originais estimados fica:

$$\hat{t}_s = \frac{1}{3.780} [1.440Q_s - 90S_2(Q_s) - 168,750] \quad .$$

As somas de quadrados de tratamentos são:

i) Soma de quadrados dos tratamentos adicionais

De [3.7.i] tem-se:

$$SQ_{\text{Tad.}} = \frac{1}{b} \sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}}^2 - \frac{1}{bc} \left(\sum_{s'=1}^c Q_{a_{s'}} \right)^2$$

Logo,

$$SQ_{\text{Tad.}} = \frac{1}{12} (28,145) - \frac{1}{24} (7,5)^2 \quad ,$$

ou seja,

$$SQ_{\text{Tad.}} = 0,001667 \quad .$$

ii) Soma de quadrados entre tipos de tratamentos

De [3.7.l] tem-se:

$$SQ_{\text{Tipos}} = \frac{k'}{rvc} \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2$$

Logo,

$$SQ_{\text{Tipos}} = \frac{6}{96} (-7,5)^2 ,$$

ou seja,

$$SQ_{\text{Tipos}} = 3,515625 .$$

iii) Soma de quadrados dos tratamentos originais ajustada

De [3.7.q] tem-se:

$$SQ_{\text{Tor. (aj.)}} = \frac{1}{r(k'-1)\Delta} \left\{ k' \left[(\Delta - \bar{A}_1) \sum_{s=1}^v Q_s^2 + (\bar{A}_2 - \bar{A}_1) \sum_{s=1}^v Q_s S_2(Q_s) \right] - \frac{1}{br} \left[\Delta r^2 + \frac{\Delta br(k'-1)}{v} + (r^2 - \lambda_1 b) n_1 \bar{A}_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + (r^2 - \lambda_2 b) n_2 \bar{A}_2 - brk' \bar{A}_1 \right] \left(\sum_{s=1}^v Q_s \right)^2 \right\}$$

Considerando-se então os dados do exemplo resulta que:

$$SQ_{\text{Tor. (aj.)}} = 8,100313 .$$

Pode-se verificar que:

$$SQ_{Taj.} = \hat{\tau}'Q = SQ_{Tad.} + SQ_{Tipos} + SQ_{Tor.} ,$$

ou seja,

$$SQ_{Taj.} = 11,617605 .$$

As demais somas de quadrados são:

$$SQT = \sum_{u,h} y_{uh}^2 - C_0 ,$$

$$SQB = \frac{1}{k} \sum_{h=1}^b B_h^2 - C_0 , \quad e$$

$$SQR = SQT - SQ_{Taj.} - SQB ,$$

que resultaram em:

$$SQT = 33,158750$$

$$SQB = 13,680417$$

$$SQR = 7,860728$$

A soma de quadrados de blocos pode ainda, para o caso do exemplo, ser decomposta em duas partes: soma de quadrados de repetições (SQRep.) e soma de quadrados de blocos dentro de repetições (SQB/Rep.). Estas somas de quadra-

dos, obtidas pela maneira usual, resultaram em:

$$SQRep. = 1,810000$$

$$SQB/Rep. = 11,870417$$

Assim, o quadro da análise de variância pode ser apresentado como a seguir:

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos (não aj.)	11	13,680417	1,243584	
Repetições	2	1,810000	0,905000	
Blocos/Rep.	9	11,870417	1,318935	
Tratamentos (aj.)	17	11,617605	0,683389	3,74**
Tipos	1	3,515625	3,515625	19,23**
Trat.orig. (aj.)	15	8,100313	0,540021	2,95**
Trat.adic.	1	0,001667	0,001667	<1,00
Resíduo	45	7,860728	0,182808	
Total	71	33,158750		

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre efeitos de tratamentos, calculadas com base em [3.12], são:

- i) Contraste envolvendo dois tratamentos originais que são primeiros associados

De [3.12.a] segue-se que:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_S - \bar{t}_{S^*}) = \frac{2k'QMR}{r(k'-1)} [1 - (\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21})] ,$$

onde, de [3.5.2.3.f],

$$f_{11} = \frac{a_{22}}{\Delta} = 0,047619, \quad \text{e} \quad f_{21} = -\frac{a_{21}}{\Delta} = 0,015873$$

Tem-se então que:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_S - \bar{t}_{S^*}) = 0,139282 .$$

- ii) Contraste envolvendo dois tratamentos originais que são segundos associados

De [3.12.a], tem-se:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_S - \bar{t}_{S^*}) = \frac{2k'QMR}{r(k'-1)} [1 - (\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22})] ,$$

onde, de [3.5.2.3.f],

$$f_{12} = -\frac{a_{12}}{\Delta} = -0,011905 , \quad \text{e} \quad f_{22} = \frac{a_{11}}{\Delta} = 0,079365 .$$

Segue-se então que:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_s - \bar{t}_{s*}) = 0,147987 \quad .$$

iii) Contraste envolvendo dois tratamentos adicionais

De [3.12.b] sabe-se que:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_{a_s} - \bar{t}_{a_{s'*}}) = \frac{2QMR}{b}$$

Logo,

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_{a_s} - \bar{t}_{a_{s'*}}) = 0,030468 \quad .$$

iv) Contraste envolvendo um tratamento original e outro adicional

Por [3.12.c] tem-se:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_s - \bar{t}_{a_{s'}}) = \left\langle \frac{k'}{r(k'-1)} + \frac{1}{b} - \frac{1}{r(k'-1)} \left[\frac{r}{b} + \sum_{\ell=1}^2 \left(\frac{r^2 - \lambda_{\ell} b}{br} \right) n_{\ell} \sum_{i=1}^2 \lambda_i f_{i\ell} \right] \right\rangle QMR$$

Logo, segue-se que:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{t}_s - \bar{t}_{a_{s'}}) = 0,085963 \quad .$$

5. CONCLUSÕES

Em geral, os resultados obtidos permitem as seguintes conclusões:

a) Quanto ao modelo matemático

O modelo matemático apresentou-se adequado aos objetivos propostos, permitindo a avaliação dos efeitos dos tratamentos originais e dos tratamentos adicionais.

b) Quanto à estimação dos efeitos dos tratamentos

- b.1) Os efeitos dos tratamentos adicionais, em delineamento PBIB, são estimados através do mesmo estimador dos efeitos desses tratamentos, quando em delineamento BIB.

b.2) A estimação dos efeitos dos tratamentos através do método simplificado facilita a computação dos dados, uma vez que, ao contrário do método clássico, não exige a inversão de matrizes de grandes dimensões.

b.3) Os efeitos dos tratamentos originais são mais facilmente estimados, à medida em que diminui o número de classes de associados.

b.4) Os estimadores dos efeitos dos tratamentos originais em delineamento BIB, podem ser obtidos, a partir dos estimadores dos efeitos desses tratamentos em delineamento PBIB, tomando-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_m = \lambda$.

c) Quanto às somas de quadrados

c.1) A soma de quadrados de tratamentos, ajustada para os efeitos de blocos, pode ser decomposta em: Soma de quadrados de tratamentos originais ajustada para blocos, soma de quadrados de tratamentos adicionais e soma de quadrados entre tipos de tratamentos.

c.2) As demais somas de quadrados são obtidas de modo usual.

d) Quanto à variância da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos

d.1) A precisão da estimativa de um contraste entre duas médias de tratamentos originais, depende da classe de associados que esses tratamentos pertencem.

d.2) Quaisquer contrastes entre duas médias de tratamentos adicionais são estimados com a mesma precisão.

d.3) Quaisquer contrastes entre duas médias, envolvendo um tratamento original e outro adicional, são estimados com a mesma precisão.

e) Quanto aos testes de significância

Os testes F para os tratamentos originais, tratamentos adicionais e tipos de tratamentos são exatos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOSE, R.C. e K.R. NAIR, 1939. Partially balanced incomplete block designs. Sankhyā, Calcutá, 4: 337-372.

BOSE, R.C. e T. SHIMAMOTO, 1952. Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. Journal of the American Statistical Association, Washington, 47: 151-184.

BOSE, R.C. e W.H. CLATWORTHY, 1955. Some classes of partially balanced designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 26: 212-232.

BOSE, R.C. e W.S. CONNOR, 1952. Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 23: 367-383.

- CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. Asia Publishing House, Londres. 120 p.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Designs. 2ª ed., John Wiley & Sons, Nova York. 611 p.
- FEDERER, W.T., 1956. Augmented (or Hoonuiaku) designs. The Hawaiian Planters' Record, 55: 191-208.
- FEDERER, W.T., 1961. Augmented designs with one-way elimination of heterogeneity. Biometrics, Raleigh, 17: 447-473.
- FERREIRA, J.G., 1980. Análise intrablocos de um experimento em blocos incompletos equilibrados, aumentado pela adição de alguns tratamentos comuns a todos os blocos. Piracicaba, ESALQ/USP, 57 p. [Dissertação de Mestrado].
- FISHER, R.A., 1925. Statistical Methods for Research Workers. Oliver and Boyd, Edinburgh.
- GRAYBILL, F.A., 1961. An Introduction to Linear Statistical Models. McGraw-Hill, Nova York. 463 p.
- HARSHBARGER, B., 1949. Triple rectangular lattices. Biometrics, Raleigh, 5: 1-13.
- IEEMMA, A.F., 1981. Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados. Piracicaba, ESALQ/USP, 145 p. [Tese de Doutorado].

- IEMMA, A.F., 1985. Modelos Lineares - Uma Introdução para Profissionais da Pesquisa Agropecuária. ESALQ/USP, Piracicaba, 142 p. [1º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica].
- KÄLIN, A., 1966. Versuchsanordnungen in unvollständigen Blöcken mit zusätzlichen kontrollbehandlungen in jeden Block. Metrika, 10: 182-218.
- NAIR, K.R., 1944. The recovery of inter-block information in incomplete block designs. Sankhyā, Calcutá, 6: 383-390.
- NAIR, K.R., 1951. Rectangular lattices and partially balanced incomplete block designs. Biometrics, Raleigh, 7: 145-154.
- NAIR, K.R., 1952. Analysis of partially balanced incomplete block designs illustrated on the simple square and rectangular lattices. Biometrics, Raleigh, 8: 122-155.
- OGAWA, J., 1974. Statistical Theory of Analysis of Experimental Designs. Marcel Dekker in., Nova York. 465 p.
- PAVATE, M.V., 1961. Combined analysis of balanced incomplete block designs with some common treatments. Biometrics, Raleigh, 17: 111-119.
- PIMENTEL GOMES, F., 1967. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. Ciência e Cultura, São Paulo, 20: 733-746.

- PIMENTEL GOMES, F., 1973. Curso de Estatística Experimental. 5ª ed., Livraria Nobel, Piracicaba. 430 p.
- RAGHAVARAO, D., 1971. Combinatorial Problems in Design of Experiments. Willey, Nova York. 386 p.
- RAO, C.R., 1947. General methods of analysis for incomplete block designs. Journal of the American Statistical Association, Washington, 58: 541-561.
- SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. Willey, Nova York. 531 p.
- SHRIKHANDE, S.S., 1952. On the dual of some balanced incomplete block designs. Biometrics, Raleigh, 8: 66-72.
- YATES, F., 1936. Incomplete randomized blocks. Annals of Eugenics, Londres, 7: 121-140.