**A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DO QUOCIENTE DE VARIÁVEIS
ALEATÓRIAS NORMAIS: DETERMINAÇÃO, PROPRIEDADES, TABELA E
ALGUMAS APLICAÇÕES**

CELSO CHIARINI

Orientador: Prof. Dr. FREDERICO PIMENTEL GOMES

**Tese apresentada à Escola Superior
de Agricultura “Luiz de Queiroz”,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em
Agronomia. Área de concentração:
Estatística e Experimentação
Agronômica.**

PIRACICABA

Estado de São Paulo - Brasil

Setembro, 1983

A meus Amigos e Professores
dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Frederico Pimentel Gomes, Professor Cate
drático do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ,
pelos valiosos ensinamentos e minuciosa orientação.

Ao Corpo Docente do Departamento de Matemática
e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos e dedicação.

Aos colegas do curso de pós-graduação, que, lo-
go, resultaram em amigos.

Aos funcionários do Departamento de Matemática
e Estatística da ESALQ, pela pronta e eficiente colaboração.

Aos colegas do Departamento de Estatística da
Fundação Universidade de Brasília e do Departamento de Méto-
dos Quantitativos da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuá-
ria, pelo incentivo e apoio constantes.

Aos técnicos do Centro de Processamento de Da-
dos da Fundação Universidade de Brasília.

Aos meus familiares, pela aceitação do sacrifí-
cio das horas de lazer.

ÍNDICE

	Página
RESUMO	v
SUMMARY	vii
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. DESENVOLVIMENTO	6
3.1. Determinação da distribuição de probabili- dades do quociente de variáveis aleató- rias normais	6
3.2. Propriedades que simplificam a obtenção e apresentação de tabela	14
3.2.1. Quanto ao coeficiente de correla- ção e à razão de desvios padrão	14
3.2.2. Quanto aos coeficientes de varia- ção	18
3.3. Teorema da mediana do quociente	20
3.4. Obtenção de tabela	21
3.5. Tabela e gráficos referentes à distribui- ção de probabilidades de Q, para $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$, $\rho = 0$ e alguns valores de CV_1 e CV_2	22
3.6. Exemplos de uso da tabela	26
3.7. Aplicação da distribuição de probabilidade	

	Página
des do quociente no teste da hipótese	
$H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda$, em amostras independentes	
ou não	27
3.8. Um importante caso particular	33
4. CONCLUSÕES	36
5. BIBLIOGRAFIA	40

A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DO QUOCIENTE DE VARIÁVEIS
ALEATÓRIAS NORMAIS: DETERMINAÇÃO, PROPRIEDADES, TABELA E
ALGUMAS APLICAÇÕES.

Autor: Celso Chiarini

Orientador: Prof. Dr. Frederico Pimentel Gomes

RESUMO

O problema é de natureza teórica, no campo do Cálculo de Probabilidades, mas motivado por importantes aplicações práticas.

O desenvolvimento do trabalho considera o quociente $Q = \frac{X_1}{X_2}$, onde $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$, sendo ρ o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 . Onde se mostra conveniente, são utilizados os coeficientes de variação de X_1 e X_2 , $CV_1 = \frac{\sigma_1}{m_1}$ e $CV_2 = \frac{\sigma_2}{m_2}$, com m_1 e m_2 não nulos.

Estuda-se o caso geral da distribuição de probabilidades do quociente de variáveis aleatórias normais, correlacionadas ou não. Determina-se sua função de densidade de probabilidade, diretamente, a partir da função de densidade

de probabilidade do quociente de variáveis aleatórias absolutamente contínuas. Verificam-se propriedades que simplificam a obtenção e apresentação de tabela, concluindo-se que é suficiente a obtenção de tabela para variáveis independentes, de variâncias unitárias e coeficientes de variação (ou médias) positivos. Demonstra-se que, se a mediana (ou média) de X_2 é não nula, a mediana do quociente de variáveis aleatórias normais independentes é o quociente das medianas. Apresentam-se tabela e gráficos julgados de interesse. Aplica-se a distribuição de probabilidades do quociente de variáveis aleatórias normais no teste da hipótese $H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda$, em amostras independentes ou não. Apresentam-se exemplos de aplicação, fazendo-se sua análise à luz da metodologia proposta.

THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE QUOTIENT OF NORMAL RANDOM
VARIABLES: CHARACTERIZATION, PROPERTIES, TABLE AND SOME
APPLICATIONS.

Author: Celso Chiarini

Adviser: Prof. Dr. Frederico Pimentel Gomes

SUMMARY

The problem is theoretical in nature and belongs to the field of probability theory. It is motivated by important practical applications.

This work considers the quotient $Q = \frac{X_1}{X_2}$, where $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$ and $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$. The correlation coefficient between X_1 and X_2 is ρ . It is used, where convenient, the coefficients of variation of X_1 and X_2 , $CV_1 = \frac{\sigma_1}{m_1}$ and $CV_2 = \frac{\sigma_2}{m_2}$, ($m_1, m_2 \neq 0$).

It is studied the general case of the distribution of the quotient of normal random variables, correlated or not. Its probability density function is obtained directly from the general expression of the probability density function of the quotient of absolutely continuous random

variables. Properties are derived to simplify the process of generating a probability table. It is concluded that it is enough to generate one table for normal independent random variables with unit variances and positive coefficients of variation (or means). It is proved, assuming the median (or mean) of X_2 non null, that the median of the quotient of normal independent random variables is the quotient of the medians. The work presents table and graphs of the probability distribution. Results are applied to test the hypothesis

$$H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda, \text{ in the context of samples independent or not.}$$

Applications are presented and analyzed in the light of the proposed methodology.

1. INTRODUÇÃO

Em muitos estudos, teóricos ou aplicados, depara-se com problemas de quociente de variáveis aleatórias e, principalmente, de variáveis aleatórias normais. Salientem-se, por exemplo, as variáveis aleatórias que surgem em pesquisas de dose econômica de adubação, em experimentos de consorciação de culturas, em estudos de redução relativa de uma característica e em outros problemas em que há interesse na variável aleatória $-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$, estimador do ponto de ordenada nula na regressão linear $E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$.

O problema é de natureza teórica, no campo do Cálculo de Probabilidades, mas motivado por importantes aplicações práticas.

Os estudos anteriores sobre o assunto foram incompletos por não apresentarem a generalidade necessária ou por não conduzirem a conclusões a ponto de se poder entregar à metodologia estatística um instrumental de aplicação imediata.

Completar essas lacunas é o objetivo do presente

te trabalho, o qual é desenvolvido de maneira clássica com ênfase nas generalizações, culminando com a apresentação de algumas aplicações.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O que tem sido feito até o momento não resolve o problema da análise de experimentos em que se tem quociente de variáveis aleatórias, em particular, normais.

Não é raro, entre usuários da metodologia estatística, considerar-se que a distribuição do quociente de variáveis aleatórias normais é, nos casos mais favoráveis, aproximadamente normal.

A respeito, o primeiro estudo efetivo é devido a MERRILL (1928), que aborda casos particulares.

GEARY (1930), para o caso particular em que a variável no denominador apresenta baixo coeficiente de variação, afirmou que a variável aleatória

$$G = \frac{m_2 Q - m_1}{(\sigma_2^2 Q^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 Q + \sigma_1^2)^{1/2}}$$

tem distribuição aproximadamente normal.

Note-se que G é função de cinco parâmetros: m_1 , m_2 , σ_1 , σ_2 e ρ . É fácil verificar que, com m_1 e m_2 não nulos, pode-se escrever

$$G = \frac{Q - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{CV_2}{CV_1}}{CV_2 \left[Q^2 - 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} Q + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right]^{1/2}},$$

de sorte que, agora, G é função, apenas, de ρ , $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, CV_1 e CV_2 .

FIELLER (1932) determinou uma expressão da função de densidade de probabilidade do quociente de variáveis aleatórias normais e acrescentou que esta função não se altera quando m_1 , m_2 , σ_1 e σ_2 são multiplicados por uma mesma constante. Esta é uma propriedade importante da $f_Q(q)$, a qual pode ser mais bem utilizada ao se provar que $f_Q(q)$ pode ser escrita como função de ρ , $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, $\frac{m_1}{\sigma_1}$ e $\frac{m_2}{\sigma_2}$ em vez de m_1 , m_2 , σ_1 , σ_2 e ρ . Ele propôs uma aproximação para a $f_Q(q)$, no caso de CV_2 ser pequeno. Na verdade, verifica-se que a aproximação é satisfatória também para valores relativamente altos de CV_2 . Até para $CV_2 = 0,25$, funcionou a contento.

FINNEY (1964), D'AULISIO *et alli* (1976) escreveram "Método de Fieller" quando se referiram à transformação proposta por GEARY (1930), citada por FIELLER (1932).

MARSAGLIA (1965) citou aplicação importante em Medicina, onde há interesse na determinação do intervalo de confiança para o parâmetro $\gamma = -\frac{\alpha}{\beta}$, sendo α e β parâmetros da

regressão linear $E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$. Estudou a variável aleatória $W = \frac{a+X}{b+Y}$, onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são constantes não negativas e X e Y são variáveis aleatórias independentes normais reduzidas. Propôs aproximação para o caso em que $b+Y > 0$. Apresentou gráficos para determinados valores de $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Embora o autor tenha afirmado que os valores de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ conduziriam às ilustrações das formas possíveis da função de densidade de probabilidade da variável quociente, os casos cobertos são tais que correspondem a $CV_1 \geq 0,5$ e $CV_2 \geq 1$, todos eles de nenhum interesse em aplicações práticas.

D'AULISIO *et alii* (1976) comparou intervalos de confiança obtidos utilizando-se o método de Geary com resultados de simulação, concluindo pela inconveniência da aplicação desse método. Deve-se salientar que, por um lado, foram utilizados valores dos parâmetros que correspondem a $CV_2 \geq 0,25$, não tão pequenos a ponto de se recomendar o método de Geary e, por outro lado, é fácil verificar-se, o intervalo de confiança $1-\alpha$, para o quociente, será limitado se e somente se

$$|CV_2| < \frac{1}{\left| z_{\frac{\alpha}{2}} \right|} \text{ e, como foi tomado } z=2 \text{ ter-se-ia intervalo de}$$

confiança limitado apenas para $|CV_2| < 0,5$. Este fato explica a patologia dos resultados obtidos, que são, aliás, comuns nas aplicações.

3. DESENVOLVIMENTO

3.1. Determinação da distribuição de probabilidades do quociente de variáveis aleatórias normais.

Considerem-se as variáveis aleatórias normais X_1 e X_2 , de médias m_1 e m_2 , variâncias positivas σ_1^2 e σ_2^2 e coeficiente de correlação ρ entre X_1 e X_2 .

A função de densidade de probabilidade conjunta da variável aleatória binormal (X_1, X_2) é

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \frac{x_1-m_1}{\sigma_1} \frac{x_2-m_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]},$$

com $1-\rho^2 > 0$, $-\infty < x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 < \infty$.

A função de densidade de probabilidade da variável aleatória $Q = \frac{X_1}{X_2}$ pode ser obtida pelo emprego de

$$f_Q(q) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| f_{X_1, X_2}(qx_2, x_2) dx_2.$$

Escrevendo-se $\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} = a > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} f_Q(q) &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| e^{-\frac{1}{2a^2} [\sigma_2^2 (qx_2 - m_1)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 (qx_2 - m_1)(x_2 - m_2) + \sigma_1^2 (x_2 - m_2)^2]} dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| e^{-\frac{1}{2a^2} P(x_2)} dx_2, \end{aligned}$$

com $P(x_2) = b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2$, sendo

$$b_0 = m_1^2 \sigma_2^2 + m_2^2 \sigma_1^2 - 2m_1 m_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

$$= \text{Var} (m_1 X_2 - m_2 X_1) > 0$$

$$b_1 = 2 \left[\sigma_2 (m_2 \sigma_1 \rho - m_1 \sigma_2) q + \sigma_1 (m_1 \sigma_2 \rho - m_2 \sigma_1) \right]$$

$$b_2 = \sigma_2^2 q^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 q + \sigma_1^2$$

$$= \text{Var} (qX_2 - X_1) > 0.$$

Completando-se quadrados, obtêm-se

$$P(x_2) = b_2 \left(x_2 + \frac{b_1}{2b_2} \right)^2 + b_0 - \frac{b_1^2}{4b_2} \quad \text{e, assim,}$$

$$f_Q(q) = \frac{e^{-\frac{1}{2a^2} (b_0 - \frac{b_1^2}{4b_2})}}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| e^{-\frac{b_2}{2a^2} (x_2 + \frac{b_1}{2b_2})^2} dx_2.$$

Escrevendo-se

$$c_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2a^2}(b_0 - \frac{b_1^2}{4b_2})}}{2\pi a},$$

$$c_2 = \frac{b_2}{2a^2},$$

$$c_3 = \frac{b_1}{2b_2},$$

tem-se

$$f_Q(q) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| e^{-c_2(x_2+c_3)^2} dx_2$$

$$= c_1 I.$$

Pondo-se $x_2 + c_3 = u$, tem-se

$$x_2 = u - c_3, \quad dx_2 = du$$

$$|x_2| = |u - c_3| = c_3 - u \text{ se } u < c_3 \text{ ou}$$

$$u - c_3 \text{ se } u \geq c_3.$$

Então,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (c_3 - u) e^{-c_2 u^2} du + \int_{c_3}^{\infty} (u - c_3) e^{-c_2 u^2} du$$

$$= c_3 \int_{-\infty}^{c_3} e^{-c_2 u^2} du - \int_{-\infty}^{c_3} u e^{-c_2 u^2} du + \int_{c_3}^{\infty} u e^{-c_2 u^2} du - c_3 \int_{c_3}^{\infty} e^{-c_2 u^2} du.$$

Note-se que

$$\int_{-\infty}^{c_3} u e^{-c_2 u^2} du = \frac{1}{-2c_2} \int_{-\infty}^{c_3} (-2c_2) u e^{-c_2 u^2} du$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{1}{2c_2} \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-c_2 u^2} \Big|_a^{c_3} \\
&= - \frac{1}{2c_2} e^{-c_2 c_3^2}
\end{aligned}$$

$$\int_{c_3}^{\infty} u e^{-c_2 u^2} du = \frac{1}{2c_2} e^{-c_2 c_3^2} .$$

Fazendo-se $\sqrt{2c_2} u = z$, tem-se

$$du = \frac{1}{\sqrt{2c_2}} dz .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{c_3} e^{-c_2 u^2} du &= \frac{1}{\sqrt{2c_2}} \int_{-\infty}^{c_3 \sqrt{2c_2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \phi(c_3 \sqrt{2c_2}) ,
\end{aligned}$$

logo:

$$\int_{c_3}^{\infty} e^{-c_2 u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \left[1 - \phi(c_3 \sqrt{2c_2}) \right] .$$

Então,

$$I = c_3 \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \phi(c_3 \sqrt{2c_2}) + \frac{1}{2c_2} e^{-c_2 c_3^2} + \frac{1}{2c_2} e^{-c_2 c_3^2} - c_3 \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \left[1 - \phi(c_3 \sqrt{2c_2}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c_2} e^{-c_2 c_3^2} - c_3 \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} + 2c_3 \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \phi(c_3 \sqrt{2c_2}) \\
&= \frac{1}{c_2} e^{-c_2 c_3^2} + 2c_3 \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \left[\phi(c_3 \sqrt{2c_2}) - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{1}{c_2} \left\{ e^{-c_2 c_3^2} + \sqrt{2\pi} c_3 \sqrt{2c_2} \left[\phi(c_3 \sqrt{2c_2}) - \frac{1}{2} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Fazendo-se $c_3 \sqrt{2c_2} = c_4$, obtêm-se

$$f_Q(q) = \frac{c_1}{c_2} \left\{ e^{-\frac{1}{2} c_4^2} + \sqrt{2\pi} c_4 \left[\phi(c_4) - \frac{1}{2} \right] \right\} .$$

Note-se que, como

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{e^{-\frac{b_0}{2a^2} + \frac{b_1^2}{8a^2 b_2}}}{2\pi a} \cdot \frac{2a^2}{b_2} \\
&= \frac{a}{\pi b_2} e^{-\frac{b_0}{2a^2} + \frac{b_1^2}{8a^2 b_2}} , \\
c_4 &= c_3 \sqrt{2c_2} = \frac{b_1}{2b_2} \sqrt{2} \frac{\sqrt{b_2}}{a\sqrt{2}} \\
&= \frac{b_1}{2a\sqrt{b_2}} ,
\end{aligned}$$

tem-se

$$\frac{c_1}{c_2} e^{-\frac{1}{2} c_4^2} = \frac{a}{\pi b_2} e^{-\frac{b_0}{2a^2}}$$

$$\frac{c_1}{c_2} c_4 = \frac{a}{\pi b_2} \cdot \frac{b_1}{2a\sqrt{b_2}} e^{-\frac{b_0}{2a^2} + \frac{b_1^2}{8a^2 b_2}}.$$

Então,

$$f_Q(q) = \frac{a}{\pi b_2} e^{-\frac{b_0}{2a^2}} + \sqrt{2\pi} \frac{a}{\pi b_2} \cdot \frac{b_1}{2a\sqrt{b_2}} e^{-\frac{b_0}{2a^2}} e^{\frac{b_1^2}{8a^2 b_2}} \left[\phi\left(\frac{b_1}{2a\sqrt{b_2}}\right) - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{a}{\pi b_2} e^{-\frac{b_0}{2a^2}} \left\{ 1 + \sqrt{2\pi} \frac{b_1}{2a\sqrt{b_2}} e^{\frac{b_1^2}{8a^2 b_2}} \left[\phi\left(\frac{b_1}{2a\sqrt{b_2}}\right) - \frac{1}{2} \right] \right\}$$

$$= \frac{a}{\pi b_2} e^{-\frac{b_0}{2a^2}} \left\{ 1 + \sqrt{2\pi} c_4 e^{\frac{1}{2} c_4^2} \left[\phi(c_4) - \frac{1}{2} \right] \right\}$$

Tendo em vista que, quando $c_4 < 0$, tem-se

$\phi(c_4) - \frac{1}{2} < 0$, podendo-se escrever

$$f_Q(q) = \frac{a}{\pi b_2} e^{-\frac{b_0}{2a^2}} \left\{ 1 + \sqrt{2\pi} |c_4| e^{\frac{c_4^2}{2}} \left[\phi(|c_4|) - \frac{1}{2} \right] \right\},$$

que, obviamente, depende dos parâmetros m_1 , m_2 , σ_1 , σ_2 , e ρ

e, o que é mais grave, tem embutida $\int_0^{|c_4|} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, sendo

c_4 função desses parâmetros e de q .

Deve-se, então, diminuir o efeito desses inconvenientes. Para tal, note-se que

$$\begin{aligned} \frac{b_o}{2a^2} &= \frac{m_1^2 \sigma_2^2 + m_2^2 \sigma_1^2 - 2m_1 m_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \\ &= \frac{\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \frac{m_1}{\sigma_1} \frac{m_2}{\sigma_2}}{2(1 - \rho^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{\pi b_2} &= \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}}{\pi (\sigma_2^2 q^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 q + \sigma_1^2)} \\ &= \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1 - \rho^2}}{\pi \left[q^2 - 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 \right]} \\ &= \frac{1}{\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1 - \rho^2} \left[1 + \left(\frac{q - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1 - \rho^2}} \right)^2 \right]}, \end{aligned}$$

expressão identificada como a da função de densidade de proba

bilidade de uma variável aleatória de Cauchy, de parâmetro de posição $\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ e de escala $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}$ e

$$c_4 = \frac{b_1}{2a\sqrt{b_2}}$$

$$= \frac{2 \left[\sigma_2 (m_2 \sigma_1 \rho - m_1 \sigma_2) q + \sigma_1 (m_1 \sigma_2 \rho - m_2 \sigma_1) \right]}{2 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \sqrt{\sigma_2^2 q^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 q + \sigma_1^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{m_2}{\sigma_2} \rho - \frac{m_1}{\sigma_1} \right) q + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\frac{m_1}{\sigma_1} \rho - \frac{m_2}{\sigma_2} \right)}{\sqrt{1-\rho^2} \sqrt{q^2 - 2 \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2}}.$$

Pode-se, então, afirmar que a $f_Q(q)$ depende, apenas, dos parâmetros ρ , $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, $\frac{m_1}{\sigma_1}$ e $\frac{m_2}{\sigma_2}$, o que, embora não pa-

reça, representa um substancial progresso, tanto conceitual como prático. Saliente-se que se pode prescindir do conhecimento dos valores dos parâmetros m_1 , m_2 , σ_1 e σ_2 .

Deve-se ressaltar que se $m_1 = 0$ e $m_2 = 0$, então $f_Q(q) = \frac{a}{\pi b_2}$, que é a função de densidade de probabilidade

de de uma variável aleatória de Cauchy.

Se as médias m_1 e m_2 são não nulas, pode-se utilizar os coeficientes de variação ($CV_1 = \frac{\sigma_1}{m_1}$ e $CV_2 = \frac{\sigma_2}{m_2}$),

escrevendo-se

$$f_Q(q) = h_1 h_2 \left\{ 1 + \sqrt{2\pi} h_3 e^{\frac{h_3^2}{2}} \left[\phi(h_3) - \frac{1}{2} \right] \right\},$$

onde:

$$h_1 = h_1(q, \rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}) = \frac{1}{\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2} \left[1 + \left[\frac{q - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}} \right]^2 \right]},$$

$$h_2 = h_2(\rho, CV_1, CV_2) = e^{\frac{CV_1^2 + CV_2^2 - 2\rho CV_1 CV_2}{2(1-\rho^2) CV_1^2 CV_2^2}}$$

$$h_3 = h_3(q, \rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2) = \left| \frac{(CV_1 \rho - CV_2) q + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (CV_2 \rho - CV_1)}{CV_1 CV_2 \sqrt{1-\rho^2} \sqrt{q^2 - 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q + (\frac{\sigma_1}{\sigma_2})^2}} \right|.$$

3.2. Propriedades que simplificam a obtenção e apresentação de tabela.

3.2.1. Quanto ao coeficiente de correlação e à razão de desvios padrão.

Represente-se por $Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2)$ a variável aleatória $Q = \frac{X_1}{X_2}$, em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias nor

mais de médias não nulas m_1 e m_2 e variâncias positivas σ_1^2 e σ_2^2 , respectivamente, e ρ e o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 .

Desejam-se determinar $\underline{a}$ e $\underline{b}$, tais que

$$Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2) = a + b Q_0(0, 1, CV_1', CV_2'), \text{ ou seja}$$

$$\frac{X_1}{X_2} = a + b \frac{Y_1}{Y_2}.$$

Considere-se a transformação

$$X = TY \quad \text{ou}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} Y_1 + t_{12} Y_2 \\ t_{21} Y_1 + t_{22} Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } \frac{X_1}{X_2} = \frac{t_{11}Y_1 + t_{12}Y_2}{t_{21}Y_1 + t_{22}Y_2}, \text{ logo, para se aten-}$$

$$\text{der a } \frac{X_1}{X_2} = a + b \frac{Y_1}{Y_2}, \text{ ponha-se } t_{21} = 0 \text{ e suponha-se } t_{22} \neq 0.$$

Tem-se, agora,

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{t_{12}}{t_{22}} + \frac{t_{11}}{t_{22}} \cdot \frac{Y_1}{Y_2}.$$

$$\text{Então, } a = \frac{t_{12}}{t_{22}} \text{ e } b = \frac{t_{11}}{t_{22}} \text{ ou } t_{11} = b t_{22} \quad e$$

$$t_{12} = a t_{22}, \text{ resultando } T = t_{22} \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como

$V(X) = V(TY) = TV(Y)T'$, onde $V(Y) = I\sigma^2$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 t_{22}^2 \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix},$$

resultando o sistema

$$\begin{cases} \sigma^2 t_{22}^2 (a^2 + b^2) = \sigma_1^2 \\ \sigma^2 t_{22}^2 a = \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \sigma^2 t_{22}^2 = \sigma_2^2 \end{cases},$$

cujas soluções são

$$t_{22} = \frac{\sigma_2}{\sigma}, \quad a = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad \text{e} \quad b = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Pode-se, agora, escrever

$$T = \frac{\sigma_2}{\sigma} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1 - \rho^2} & \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} & \rho\sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix},$$

cujas inversas são

$$T^{-1} = \frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}} \begin{bmatrix} \sigma_2 & -\rho\sigma_1 \\ 0 & \sigma_1\sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$Y = T^{-1} X = \frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \sigma_2 & -\rho \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \sigma_2 X_1 - \rho \sigma_1 X_2 \\ \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} X_2 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$m'_1 = E(Y_1) = \frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} (\sigma_2 m_1 - \rho \sigma_1 m_2),$$

$$m'_2 = E(Y_2) = \frac{\sigma}{\sigma_2} m_2,$$

Se $m'_1 \neq 0$ ou, equivalentemente, $\rho \neq \frac{CV_2}{CV_1}$,

$$\begin{aligned} CV'_1 &= \frac{\sigma}{m'_1} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_2 m_1 - \rho \sigma_1 m_2} \\ &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\frac{1}{CV_1} - \rho \frac{1}{CV_2}} \\ &= \frac{CV_1 CV_2 \sqrt{1-\rho^2}}{CV_2 - \rho CV_1} \end{aligned}$$

e

$$CV_2' = \frac{\sigma}{m_2'} = \frac{\sigma_2}{m_2}$$

$$= CV_2$$

Pode-se, finalmente, escrever:

$$Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2) = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2} Q_0(0,1, \frac{CV_1 CV_2 \sqrt{1-\rho^2}}{CV_2 - \rho CV_1})$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2) - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}} = Q_0(0,1, \frac{CV_1 CV_2 \sqrt{1-\rho^2}}{CV_2 - \rho CV_1}, CV_2).$$

Pode-se, então concluir que, se $\rho \neq \frac{CV_2}{CV_1}$, é suficiente a obtenção de tabela, para o caso em que as variáveis X_1 e X_2 sejam independentes e de variâncias iguais ou, simplesmente, unitárias.

3.2.2. Quanto aos coeficientes de variação

Deseja-se abranger no estudo, também, os casos em que CV_1 e CV_2 (ou m_1 e m_2 , não nulos) possam ser negativos, o que pode ocorrer em aplicações práticas.

Considerem-se, por questão de clareza, os quatro casos seguintes:

- a. $CV_1 > 0$ e $CV_2 > 0$,
 b. $CV_1 < 0$ e $CV_2 < 0$,
 c. $CV_1 > 0$ e $CV_2 < 0$ e
 d. $CV_1 < 0$ e $CV_2 > 0$.

Pretende-se demonstrar que é suficiente a obtenção de tabela apenas para o caso a.

Suponha-se estar diante do caso b. Assim,

$$Q = \frac{X_1}{X_2} = \frac{-X_1}{-X_2} , \text{ podendo-se escrever, sinteticamente,}$$

$$Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2) = Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, -CV_1, -CV_2), \text{ com } -CV_1 \text{ e } -CV_2 \text{ positivos (caso a).}$$

Estando-se diante do caso c ou d, pode-se pôr:

$$Q = \frac{X_1}{X_2} = -\frac{X_1}{-X_2} = -\frac{-X_1}{X_2} , \text{ devendo ter em conta que, ao se tomar } -X_1 \text{ ou } -X_2, \text{ ter-se-á } \rho_{-X_1, X_2} = \rho_{X_1, -X_2} = -\rho_{X_1, X_2} .$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2) &= - Q(-\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, -CV_1, CV_2) \\ &= - Q(-\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, -CV_2) \end{aligned}$$

voltando-se ao caso a.

Conclui-se, pois, que, sem qualquer perda de generalidade, é suficiente estudar-se, apenas, o caso em que os coeficientes de variação (ou as médias) sejam positivos.

3.3. Teorema da mediana do quociente

Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias normais independentes de médias (e medianas) m_1 e m_2 , respectivamente e $m_2 \neq 0$, então a mediana de $\frac{X_1}{X_2}$ é $\frac{m_1}{m_2}$.

Demonstração:

Considere-se a variável aleatória $Z = X_1 - \frac{m_1}{m_2} X_2$.

Como combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes, Z tem distribuição normal de média (e mediana)

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X_1) - \frac{m_1}{m_2} E(X_2) \\ &= m_1 - \frac{m_1}{m_2} m_2 = 0 \end{aligned}$$

Pode-se, assim, escrever

$$P(Z < 0) = P(Z > 0) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(X_1 - \frac{m_1}{m_2} X_2 < 0\right) = P\left(X_1 - \frac{m_1}{m_2} X_2 > 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{X_1}{X_2} < \frac{m_1}{m_2}\right) = P\left(\frac{X_1}{X_2} > \frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{1}{2}$$

Então, a mediana de $\frac{X_1}{X_2}$ é $\frac{m_1}{m_2}$.

A importância desse teorema reside no fato de ele indicar um ponto de referência a partir do qual se devem acumular áreas à esquerda e à direita de $q = \frac{m_1}{m_2}$ e se ter um seguro critério de parada no processo de integração numérica em que não se tem intervalo de integração limitado.

Por outro lado, como $\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \frac{CV_2}{CV_1}$, continua-se, no processo de obtenção de tabelas, com o mesmo conjunto conveniente de parâmetros.

3.4. Obtenção de tabela

A expressão da função de densidade de probabilidade do quociente de variáveis aleatórias normais apresenta, como já foi analisado, o inconveniente fator:

$$\phi(h_3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{h_3} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

sendo h_3 função de q e dos parâmetros $\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, CV_1 e CV_2 .

Sabe-se, contudo, que a aproximação polinomial

$$\phi(h_3) - \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_3^2}{2}} \sum_{i=1}^5 \frac{b_i}{(1+ch_3)^i}, \text{ onde}$$

$$c = 0,2316419, \quad b_1 = 0,319381530,$$

$$\begin{aligned} b_2 &= -0,356563782 & , & & b_3 &= 1,781477937 & , \\ b_4 &= -1,821255978 & , & & b_5 &= 1,330274429 & , \end{aligned}$$

apresenta erro no sétimo algarismo significativo (PACITTI, 1968).

Utilizando-se essa aproximação, determinaram-se, sucessivamente, de cada lado da mediana, intervalos que delimitam áreas de 0,001, aproximadamente, até que restasse, em cada cauda, área não superior a 0,005.

Apresentam-se, adiante, tabela e gráficos para:

$\rho = 0$ (é suficiente, conforme propriedade 3.2.1);

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$ (é suficiente, conforme propriedade 3.2.1) e alguns valores de CV_1 e CV_2 , acrescentando-se que, no caso, resultam

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{\pi(1+q^2)} \\ &\quad \frac{CV_1^2 + CV_2^2}{2CV_1^2 CV_2^2} \\ h_2 &= e \\ h_3 &= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \left| \frac{q}{CV_1} + \frac{1}{CV_2} \right| \end{aligned}$$

3.5. Tabela e gráficos referentes à distribuição de probabilidades de Q, para $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$, $\rho = 0$ e alguns valores de CV_1 e CV_2 .

TABELA RESUMO DE SEPARATRIZES DE Q, PARA $\sigma_1/\sigma_2 = 1.0$, $\rho = 0.0$ E ALGUNS VALORES DE CV_1 E CV_2 .

PARAMETROS		ORDEN DA SEPARATRIZ															
CV_1	CV_2	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995			
0.05	0.05	0.832	0.848	0.870	0.890	0.913	0.953	1.000	1.049	1.095	1.124	1.149	1.180	1.201			
0.05	0.10	1.529	1.567	1.626	1.679	1.743	1.858	2.000	2.161	2.324	2.433	2.534	2.661	2.754			
0.05	0.15	2.101	2.167	2.271	2.366	2.485	2.708	3.000	3.354	3.745	4.023	4.297	4.664	4.949			
0.05	0.20	2.577	2.672	2.825	2.969	3.152	3.508	4.000	4.640	5.410	6.002	6.627	7.337	8.305			
0.05	0.25	2.978	3.104	3.307	3.532	3.755	4.262	5.000	6.031	7.389	8.533	9.852	12.003	14.071			
0.10	0.05	0.363	0.376	0.395	0.411	0.430	0.463	0.500	0.538	0.574	0.596	0.615	0.638	0.654			
0.10	0.10	0.688	0.714	0.754	0.790	0.833	0.909	1.000	1.100	1.200	1.265	1.325	1.400	1.454			
0.10	0.15	0.964	1.005	1.070	1.128	1.200	1.332	1.500	1.700	1.915	2.066	2.214	2.411	2.562			
0.10	0.20	1.197	1.254	1.343	1.427	1.531	1.730	2.000	2.344	2.750	3.059	3.383	3.851	4.244			
0.10	0.25	1.395	1.467	1.583	1.692	1.831	2.107	2.500	3.040	3.741	4.326	4.997	5.086	7.129			
0.15	0.05	0.202	0.214	0.233	0.249	0.267	0.298	0.333	0.369	0.402	0.423	0.440	0.461	0.476			
0.15	0.10	0.390	0.415	0.452	0.494	0.522	0.588	0.667	0.751	0.834	0.886	0.935	0.995	1.038			
0.15	0.15	0.558	0.594	0.649	0.699	0.759	0.866	1.000	1.155	1.318	1.431	1.540	1.683	1.792			
0.15	0.20	0.704	0.751	0.825	0.892	0.975	1.130	1.333	1.586	1.879	2.098	2.326	2.652	2.924			
0.15	0.25	0.830	0.889	0.980	1.066	1.173	1.379	1.667	2.052	2.542	2.946	3.406	4.147	4.853			
0.20	0.05	0.120	0.133	0.151	0.167	0.185	0.216	0.250	0.285	0.317	0.337	0.354	0.374	0.388			
0.20	0.10	0.235	0.260	0.296	0.327	0.364	0.427	0.500	0.578	0.653	0.701	0.744	0.798	0.835			
0.20	0.15	0.342	0.377	0.430	0.477	0.532	0.630	0.750	0.885	1.025	1.121	1.212	1.331	1.421			
0.20	0.20	0.438	0.483	0.552	0.614	0.689	0.825	1.000	1.212	1.452	1.629	1.811	2.069	2.283			
0.20	0.25	0.523	0.578	0.662	0.739	0.833	1.010	1.250	1.563	1.953	2.270	2.627	3.198	3.739			
0.25	0.05	0.071	0.083	0.101	0.117	0.135	0.166	0.200	0.235	0.266	0.286	0.302	0.322	0.336			
0.25	0.10	0.140	0.164	0.200	0.231	0.267	0.329	0.400	0.475	0.546	0.591	0.632	0.682	0.717			
0.25	0.15	0.206	0.241	0.294	0.339	0.393	0.487	0.600	0.725	0.853	0.938	1.020	1.125	1.204			
0.25	0.20	0.267	0.313	0.381	0.441	0.512	0.640	0.800	0.990	1.200	1.354	1.510	1.729	1.909			
0.25	0.25	0.323	0.378	0.461	0.534	0.623	0.786	1.000	1.273	1.606	1.873	2.171	2.643	3.087			

Gráficos das funções de densidade de probabilidade de Q , para $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$, $\rho=0$, $100cv_1 = 10, 15, 20$ e $100cv_2 = 10, 15, 20$.

Gráficos das funções de distribuição de probabilidades de Q , para $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$, $\rho=0$, $100CV_1 = 10, 15, 20$ e $100CV_2 = 10, 15, 20$.

3.6. Exemplos de uso da tabela.

Apresentam-se, a seguir, alguns exemplos de uso da tabela da distribuição do quociente de variáveis aleatórias normais, que ilustram, também, a utilização das propriedades estudadas no item 3.2.

EXEMPLO 1: Sejam $X_1 \sim N(40;10)$ e $X_2 \sim N(50;10)$ independentes e $Q = \frac{X_1}{X_2}$, observando-se que o par se refere aos parâmetros média e desvio padrão.

Assim, $\rho = 0$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$, $CV_1 = 0,25$ e $CV_2 = 0,20$ e

tem-se, por exemplo, que

$$a) \quad P\left(\frac{X_1}{X_2} \leq q\right) = 0,01 \iff q = 0,313$$

$$b) \quad P\left(\frac{X_1}{X_2} \geq q\right) = 0,5 \iff q = 0,8 \text{ (mediana)}$$

$$c) \quad P(0,381 \leq \frac{X_1}{X_2} \leq 1,510) = 0,95$$

EXEMPLO 2: Sejam $X_1 \sim N(16,4)$, $X_2 \sim N(20,1)$, $\rho = 0,8$ e

$$Q = \frac{X_1}{X_2}.$$

No caso presente, não se pode utilizar diretamente a tabela, devendo-se aplicar a propriedade 3.2.1, tendo-se

$$Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2) = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2} Q_0(0; 1; \frac{CV_1 CV_2 \sqrt{1-\rho^2}}{CV_2 - \rho CV_1}; CV_2)$$

Ou, como $\rho = 0,8$, $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 1$, $CV_1 = 0,25$ e $CV_2 = 0,05$,

$$Q(0,8; 4; 0,25; 0,05) = 3,2 + 2,4 Q_0(0; 1; -0,05; 0,05).$$

Notando-se que $CV_1^* < 0$, aplica-se a propriedade 3.2.2, resultando

$Q(0,8; 4; 0,25; 0,05) = 3,2 - 2,4 Q_0(0; 1; 0,05; 0,05)$ e tem-se, por exemplo, que

$$a) \quad P\left(\frac{X_1}{X_2} \leq q\right) = 0,01 \iff q = 1,1648, \text{ pois}$$

$$P(Q_0 \leq q_0) = 0,01 \iff q_0 = 0,848 \text{ e}$$

$$q = 3,2 - 2,4 \times 0,848 = 1,1648.$$

$$b) \quad P\left(\frac{X_1}{X_2} \geq q\right) = 0,5 \iff q = 0,8 \text{ (mediana).}$$

3.7. Aplicação da distribuição de probabilidades do quociente no teste da hipótese $H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda$, em amostras independentes ou não.

Sejam $\bar{X}_1 \sim N(m_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}})$, $\bar{X}_2 \sim N(m_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}})$, com m_1

e m_2 não nulos, e $\rho_{X_1, X_2} = \rho$ o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 e considerem-se que, nas amostras, a partir das

distribuições marginais de X_1 e X_2 , p elementos sejam pareados, sendo, é óbvio, $p \leq \min(n_1, n_2)$.

Assim, $\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2}$ tem distribuição Q, de parâmetros

$$\frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\sigma_{\bar{X}_2}} = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad \rho_{\bar{X}_1, \bar{X}_2} \quad (\text{a ser determinado em função de } n_1, n_2, p \text{ e } \rho),$$

$$CV_{\bar{X}_1} = \frac{CV_1}{\sqrt{n_1}} \text{ e } CV_{\bar{X}_2} = \frac{CV_2}{\sqrt{n_2}}.$$

Além disso, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{m_2} &= \frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\sigma_{\bar{X}_2}} \cdot \frac{CV_{\bar{X}_2}}{CV_{\bar{X}_1}} \\ &= \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{CV_2}{CV_1} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \\ &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{CV_2}{CV_1} \end{aligned}$$

Deve-se, agora, determinar $\rho_{\bar{X}_1, \bar{X}_2}$ em função de n_1, n_2, p e ρ .

Sejam (X, Y) uma variável aleatória binormal e $\rho_{X, Y} = \rho$ o coeficiente de correlação entre X e Y .

Considerem-se as amostras aleatórias

$(X_1, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{n_1})$ e $(Y_1, Y_2, \dots, Y_p, Y_{p+1}, \dots, Y_{n_2})$ das

populações marginais de X e Y e

$$X = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i \quad \text{e} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j.$$

Sem qualquer perda de generalidade, suponha-se que $E(X) = E(Y) = 0$.

Tem-se que

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{X}, \bar{Y}} &= \frac{\text{COV}(\bar{X}, \bar{Y})}{\sigma_{\bar{X}} \sigma_{\bar{Y}}} = \frac{E(\bar{X} \bar{Y})}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n_1}} \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n_2}}} \\ &= \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{\sigma_X \sigma_Y} E(\bar{X} \bar{Y}). \end{aligned}$$

Note-se que

$$\begin{aligned} E(\bar{X} \bar{Y}) &= E \left[\left(\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i \right) \left(\frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j \right) \right] \\ &= \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} E(X_i Y_j) \\ &= \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \text{COV}(X_i, Y_j) \\ &= \frac{1}{n_1 n_2} p \text{ COV}(X, Y), \text{ pois} \\ \text{COV}(X_i, Y_j) &= \begin{cases} \text{COV}(X, Y), & \text{se } X_i \text{ e } Y_j \text{ são pareados (p pares),} \\ 0 & \text{, em caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\rho_{\bar{X}, \bar{Y}} &= \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{\sigma_X \sigma_Y} \cdot \frac{1}{n_1 n_2} p \text{ COV}(X, Y) \\ &= \frac{p}{\sqrt{n_1 n_2}} \cdot \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\end{aligned}$$

Então,

$$\rho_{\bar{X}, \bar{Y}} = \frac{p}{\sqrt{n_1 n_2}} \rho.$$

Se, em particular, $p = 0$, ter-se-á $\rho = 0$ e se $n_1 = n_2 = p$, $\rho_{\bar{X}, \bar{Y}} = \rho$. Tais resultados seriam de se esperar.

Pode-se, agora, escrever

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} &\sim Q(\rho_{\bar{X}_1, \bar{X}_2}, \frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\sigma_{\bar{X}_2}}, CV_{\bar{X}_1}, CV_{\bar{X}_2}) \\ &= Q(\frac{p}{\sqrt{n_1 n_2}} \rho, \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{CV_1}{\sqrt{n_1}}, \frac{CV_2}{\sqrt{n_2}})\end{aligned}$$

e, como sob H_0 : $\frac{m_1}{m_2} = \lambda$, tem-se $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \lambda \frac{CV_1}{CV_2}$, resultará

$$\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} \sim Q(\frac{p}{\sqrt{n_1 n_2}} \rho, \lambda \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{CV_1}{CV_2}, \frac{CV_1}{\sqrt{n_1}}, \frac{CV_2}{\sqrt{n_2}})$$

Tendo em vista a propriedade 3.2.1, note-se que

$$a = \rho_{\bar{X}_1, \bar{X}_2} \frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\sigma_{\bar{X}_2}} = \frac{p}{\sqrt{n_1 n_2}} \rho \cdot \lambda \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{CV_1}{CV_2}$$

$$= \frac{p\rho\lambda}{n_1} \cdot \frac{CV_1}{CV_2},$$

$$b = \frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\sigma_{\bar{X}_2}} \sqrt{1 - \rho_{\bar{X}_1, \bar{X}_2}^2} = \lambda \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{CV_1}{CV_2} \sqrt{1 - \frac{p^2}{n_1 n_2} \rho^2}$$

$$= \frac{\lambda}{n_1} \cdot \frac{CV_1}{CV_2} \sqrt{n_1 n_2 - p^2 \rho^2},$$

$$CV'_1 = \frac{\frac{CV_{\bar{X}_1}}{\sqrt{n_1}} \frac{CV_{\bar{X}_2}}{\sqrt{n_2}} \sqrt{1 - \rho_{\bar{X}_1, \bar{X}_2}^2}}{\frac{CV_{\bar{X}_2}}{\sqrt{n_2}} - \rho_{\bar{X}_1, \bar{X}_2} \frac{CV_{\bar{X}_1}}{\sqrt{n_1}}} = \frac{\frac{CV_1}{\sqrt{n_1}} \frac{CV_2}{\sqrt{n_2}} \sqrt{1 - \frac{p^2}{n_1 n_2} \rho^2}}{\frac{CV_2}{\sqrt{n_2}} - \frac{p}{\sqrt{n_1 n_2}} \rho \frac{CV_1}{\sqrt{n_1}}}$$

$$= \frac{CV_1 CV_2 \sqrt{n_1 n_2 - p^2 \rho^2}}{\sqrt{n_2} (n_1 CV_2 - p \rho CV_1)}, \text{ se } \frac{CV_2}{CV_1} \neq \frac{p}{n_1} \rho, e$$

$$CV'_2 = CV_{\bar{X}_2} = \frac{CV_2}{\sqrt{n_2}}.$$

Assim, como

$$\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} - a \quad \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} \sim Q_0(0; 1; CV'_1; CV'_2),$$

podem-se obter regiões críticas associadas a $H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda$.

Como ilustração, considere-se um experimento em que se capturam animais (n_1), anotam-se as observações quanto a uma variável biométrica de interesse (X_1), marcam-se os animais, que são devolvidos ao seu habitat. Após certo intervalo de tempo, outra vez, caçam-se animais (n_2) e registram-se as novas medidas (X_2) daquela variável, tendo-se em vista que alguns animais (p) foram recapturados. O objetivo do experimento é testar $H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda$.

Para efeito de aplicação numérica, considere-se que, por meio de experimentos anteriores, pode-se ter informações a respeito de ρ , CV_1 e CV_2 e sejam, por exemplo,

$$\rho = 0,9, \quad CV_1 = 0,20, \quad CV_2 = 0,20, \quad n_1 = 20, \quad n_2 = 16 \text{ e } p = 2,$$

$$\text{desejando-se testar } H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}.$$

Tem-se, pois, que

$$a = \frac{2 \cdot 0,9 \cdot 0,5}{20} \cdot \frac{0,20}{0,20} = 0,045 \quad e$$

$$b = \frac{0,5}{20} \cdot \frac{0,20}{0,20} \sqrt{20 \cdot 16 - 4 \cdot 0,81} = 0,445.$$

Assim,

$$\frac{\bar{X}_1 - 0,045}{\frac{\bar{X}_2}{0,445}} \sim Q(0; 1; CV_1'; CV_2'),$$

onde,

$$CV'_1 = \frac{0,20 \cdot 0,20 \sqrt{20 \cdot 16 - 4 \cdot 0,81}}{4(20 \cdot 0,20 - 2 \cdot 0,9 \cdot 0,20)} = 0,0489 \approx 0,05 \quad e$$

$$CV'_2 = \frac{0,20}{\sqrt{20}} = 0,05.$$

Então, o limite da região crítica para $\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2}$, ao nível de significância 5%, à esquerda, é $L_E = 0,045 + 0,445 \cdot x$
 $0,89 = 0,441$ e, à direita, é

$$L_D = 0,045 + 0,445 \cdot x \cdot 1,124 = 0,545.$$

O critério de decisão pode ser enunciado, por exemplo, para o teste unilateral à esquerda:

Se $\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} \leq L_E$, rejeita-se $H_0: \frac{m_1}{m_2} = \lambda$, em favor de

$$H_1: \frac{m_1}{m_2} < \lambda.$$

e se $\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} > L_E$, não se pode rejeitar H_0 .

3.8. Um importante caso particular

Não são raras as aplicações práticas em que
 $\rho = 0$, $n_1 = n_2 = n$, $CV_1 = CV_2 = CV$, desconhecido.

Nestas condições, resultam

$$a = 0, b = \lambda, CV'_1 = CV'_2 = \frac{CV}{\sqrt{n}} \text{ e}$$

$$\frac{\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} - a}{b} = \frac{\bar{x}_1}{\lambda \bar{x}_2} \sim Q_0(0, 1, \frac{CV}{\sqrt{n}}, \frac{CV}{\sqrt{n}}).$$

Suponha-se que se deseja testar a hipótese de nulidade $H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda$, contra a hipótese alternativa $H_1 : \frac{m_1}{m_2} < \lambda$.

Adicionalmente, considere-se que o pesquisador, diante do problema, possa indicar um valor $\underline{c}$, tal que seja inadmissível que $CV > c$.

Executado o experimento, deve-se rejeitar H_0 , ao nível de significância $\alpha = 0,05$, se $\frac{\bar{x}_1}{\lambda \bar{x}_2} \leq q$, tendo em conta a seguinte correspondência entre $\underline{c}$ e $\underline{q}$, com base na tabela:

$\underline{c}$	$\underline{q}$
0,05 $\sqrt{n}$	0,890
0,10 $\sqrt{n}$	0,790
0,15 $\sqrt{n}$	0,699
0,20 $\sqrt{n}$	0,614
0,25 $\sqrt{n}$	0,534

Esse critério de decisão, não usual entre os estatísticos, se justifica à medida em que o pesquisador tenha

acumulado experiência em seu campo, não a ponto de indicar o valor do parâmetro CV, mas estabelecer (a priori) um extremo (no caso superior) para o parâmetro, como se ele estivesse conjugado à hipótese H_0 .

4. CONCLUSÕES

4.1. Se $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$, $\rho_{X_1, X_2} = \rho$ e

$Q = \frac{X_1}{X_2}$, então a função de densidade da probabilidade

de Q pode ser expressa por

$$f_Q(q) = \frac{e^{-\frac{\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \frac{m_1}{\sigma_1} \frac{m_2}{\sigma_2}}}{2(1-\rho^2)}}{\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2} \left[1 + \left(\frac{q - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 \right]} \left\{ 1 + \sqrt{2\pi} |c_4| e^{\frac{c_4^2}{2}} \left[\Phi(|c_4|) - \frac{1}{2} \right] \right\}$$

onde

$$c_4 = \frac{\left(\frac{m_2}{\sigma_2} \rho - \frac{m_1}{\sigma_1}\right) q + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\frac{m_1}{\sigma_1} \rho - \frac{m_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2} \sqrt{q^2 - 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2}} e$$

$$\Phi(|c_4|) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{|c_4|} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Os parâmetros da $f_Q(q)$ são, apenas, ρ , $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, $\frac{m_1}{\sigma_1}$ e $\frac{m_2}{\sigma_2}$, podendo-se prescindir do conhecimento dos valores de m_1 , m_2 , σ_1 e σ_2 .

4.2. No caso particular em que $m_1 = m_2 = 0$, tem-se

$$f_Q(q) = \frac{1}{\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2} \left[1 + \left(\frac{q - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 \right]}, \text{ expressão identificada}$$

como a da função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória de Cauchy, de parâmetro de posição $\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ e de escala $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}$.

4.3. Se as médias m_1 e m_2 são não nulas, então a função de densidade de probabilidade de Q pode ser expressa por

$$f_Q(q) = \frac{e^{\frac{CV_1^2 + CV_2^2 - 2\rho CV_1 CV_2}{2(1-\rho^2) CV_1^2 CV_2^2}}}{\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2} \left[1 + \left(\frac{q - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 \right]} \left\{ 1 + \sqrt{2\pi} h_3 e^{\frac{h_3^2}{2}} \left[\phi(h_3) - \frac{1}{2} \right] \right\},$$

onde

$$h_3 = \left| \frac{(CV_1 \rho - CV_2)q + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (CV_2 \rho - CV_1)}{CV_1 CV_2 \sqrt{1-\rho^2} \sqrt{q^2 - 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2}} \right|.$$

Os parâmetros da $f_Q(q)$ são, apenas, ρ , $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, CV_1

e CV_2 .

4.4. Se m_1 e m_2 são não nulos e $\rho \neq \frac{CV_2}{CV_1}$, então

$$\frac{Q(\rho, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, CV_1, CV_2) - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}} = Q_0(0, 1, \frac{CV_1 CV_2 \sqrt{1-\rho^2}}{CV_2 - \rho CV_1}, CV_2),$$

É, pois, suficiente a obtenção de tabela para, apenas, $\rho = 0$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$. Quanto aos coeficientes de variação, tem-se concluído, também, que é suficiente operar-se com, apenas, coeficientes de variação positivos.

4.5. Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias normais independentes de médias (medianas) m_1 e m_2 , sendo $m_2 \neq 0$, então a mediana de $\frac{X_1}{X_2}$ é $\frac{m_1}{m_2}$.

4.6. Se $X_1 \sim (m_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}})$, $\bar{X}_2 \sim N(m_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}})$, com m_1 e m_2 não nulos, $p \leq \min(n_1, n_2)$ é o número de observações pareadas e se $\rho_{X_1, X_2} = \rho \neq \frac{n_1}{p} \frac{CV_2}{CV_1}$, então

$$\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} \sim Q(\frac{p}{\sqrt{n_1 n_2}}, \rho, \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{CV_1}{\sqrt{n_1}}, \frac{CV_2}{\sqrt{n_2}})$$

e, sob $H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda$,

$$\frac{\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} - \frac{p\rho\lambda}{n_1} \frac{CV_1}{CV_2}}{\frac{\lambda}{n_1} \frac{CV_1}{CV_2} \sqrt{n_1 n_2 - p^2 \rho^2}} \sim Q_0(0, 1, CV'_1, CV'_2),$$

onde

$$CV'_1 = \frac{CV_1 CV_2 \sqrt{n_1 n_2 - p^2 \rho^2}}{\sqrt{n_2} (n_1 CV_2 - p\rho CV_1)} \quad \text{e} \quad CV'_2 = \frac{CV_2}{\sqrt{n_2}}.$$

Pode-se, assim, obter região crítica associada

$$\text{a } H_0 : \frac{m_1}{m_2} = \lambda.$$

Se em particular, $\lambda = 1$ e $\rho = 0$ (ou $p = 0$), o teste do quociente, aqui proposto, mostra-se como uma alternativa para testar $H_0 : m_1 = m_2$.

5. BIBLIOGRAFIA

- BARTLE, R. G., 1976. The Elements of Real Analysis, 2a. edição. John Wiley, Nova York, 480 p.
- BOX, G. E. P. e M.E. MULLER, 1958. A Note on the Generation of Random Normal Deviates, Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 29: 610-611.
- D'AULISIO, M.B.G. e F.PIMENTEL GOMES e I.R.NOQUEIRA, 1976. Estudo da Distribuição do Ponto de Máximo ou de Mínimo de Equações do 2º Grau, Anais da E.S.A. "Luiz de Queiroz", Piracicaba, 33: 291-307.
- FIELLER, E.C., 1932. The Distribution of the Index in a Normal Bivariate Population, Biometrika, Londres, 24: 428-440.
- FINNEY, D.J., 1964. Statistical Method in Biological Assay. Charles Griffin, Londres, 508 p.
- GEARY, R.C., 1930. The Frequency Distribution of the Quotient

- of two Normal Variates. Journal of Royal Statistics Society, Londres, 93: 442-446.
- GODOI, C.R.M., 1978. Um Algoritmo Eficiente para Simulação de Vetores com Distribuição Multinormal, Ciência e Cultura, São Paulo, 30: 701-705.
- GONÇALVES, S. R., 1981. Consorciação de Culturas-Técnicas de Análise de Estudos da Distribuição de LER. Brasília, UnB. 217 p. (Dissertação de Mestrado).
- KENDALL, M.G. e A. STUART, 1969. The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, 3a. edição. Charles Griffin, Londres, 439 p.
- MARSAGLIA, G., 1965. Ratios of Normal Variables and Ratios of Sums of Uniforms Variables, Journal of the American Statistical Association, Washington, 60: 193-204.
- MEAD, R. e J. RILEY, 1981. A Review of Statistical Ideas Relevant to Intercropping research, Journal of the Royal Statistical Society, Londres, 144, part. 4.
- MERRILL, A.S., 1928. Frequency Distribution of an Index when both the Components Follow the Normal Law, Biometrika, Londres, 20: 53-63.
- MOOD, A.M. e F.A. GRAYBILL e D.C. BOES, 1974. Introduction to the Theory of Statistics, 3a. edição, McGraw-Hill, Nova York, 564 p.

PACITTI, T., 1968. Fortran-Monitor Princípios, 2a. edição. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 347 p.