ANÁLISE INTRABLOCOS DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS
COM TRATAMENTOS PRINCIPAIS EM BLOCOS INCOMPLETOS
PARCIALMENTE BALANCEADOS

AUGUSTO RAMALHO DE MORAIS
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof.^ª Dr.^ª MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia, Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Agosto - 1992

Ficha catalográfica preparada pela seção de Livros da
Divisão de Biblioteca e Documentação - PCAP/USP

M827a Morais, Augusto Ramalho de
 Análise intrablocos de experimentos em parce-
 las subdivididas com tratamentos principais em
 blocos incompletos parcialmente balanceados.
 Piracicaba, 1992.
 115p.

Tese - ESALQ
Bibliografia.

1. Análise de variância 2. Delineamento experi-
mento 3. Estatística experimental I. Escola
Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Pira-
cicaba.

CDD 519.535

ANÁLISE INTRABLOCOS DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS
COM TRATAMENTOS PRINCIPAIS EM BLOCOS INCOMPLETOS
PARCIALMENTE BALANCEADOS

AUGUSTO RAMALHO DE MORAIS

Aprovada em: 14.09.1992

Comissão julgadora:

Prof. ^a Dr. ^a Maria Cristina Stolf Nogueira	ESALQ/USP
Prof. Dr. Humberto de Campos	ESALQ/USP
Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma	ESALQ/USP
Prof. Dr. Gilnei de Souza Duarte	ESAL
Prof. Dr. Sergio do Nascimento Kronka	FCAJ/UNESP

Prof.^a Dr.^a MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA
Orientador

À minha mãe Maria Aparecida, à meu pai Cipriano (*in memoriam*)
À meus avós (Joaquim, Adalgiza, Manoel) *in memoriam* e
Umbelina

OFEREÇO

Ao Grupo Espírita Vovô Christiano, pela força interior

A verdadeira amizade é eterna, e aumenta a cada dia, apesar
das distâncias.

À minha esposa Icléa,
Às minhas filhas: Cristiane e Elisa

DEDICO

AGRADECIMENTOS

À VIDA

À Dra. Maria Cristina Stolf Nogueira, professora do Departamento de Matemática e Estatística (DME) pela valiosa orientação e amizade.

Aos professores Antonio F. Iemma, Cássio R. M. Godoi, Clarice G.B. Demétrio, Décio Barbin, Humberto de Campos e Rodolfo Hoffmann pela receptividade e ensinamentos ministrados.

À Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" (ESALQ) da USP e ao Centro Nacional de Pesquisa de Milho e Sorgo da EMBRAPA pela oportunidade concedida para a realização do curso.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida.

À Escola Superior de Agricultura de Lavras na pessoa do Prof. Gilnei de Souza Duarte que nos iniciou nos estudos, pelo desenvolvimento e continuação do trabalho.

Aos colegas de curso Paulo Cecon, Amauri Machado, Creusa, Maria Cecília, Antonio Guidoni, Sônia e Luiz Eloi (*in memoriam*), Joel, Rui e Eufrázio pela amizade.

Aos funcionários do DME da ESALQ/USP pela amizade e cooperação.

À minha esposa Icléa e minhas filhas Cristiane e Elisa pelo companheirismo, compreensão e incentivo no curso e na vida.

Aqueles que, mesmo sem eu o saber, auxiliaram para a realização do curso.

SUMÁRIO

	Página
RESUMO	vii
SUMMARY	ix
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
2.1. Experimentos em parcelas subdivididas	4
2.1.1. Caracterização	4
2.1.2. Análise de Variância	5
2.1.3. Estimabilidade	6
2.2. Experimentos em Blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB)	9
2.2.1. Caracterização e definição	9
2.3. PBIB com duas classes de associados - PBIB(2) ..	11
2.3.1. Caracterização	11
2.3.2. Classificação	13
2.3.3. Tipo grupo divisível	13
2.3.4. Tipo triangular	13
2.3.5. Tipo quadrado latino	14
2.3.6. Geometria parcial (r, k, t)	15
2.4. Experimentos em reticulados quadrados	16
2.4.1. Caracterização	16
2.4.2. Classificação	17
2.5. Análise da Variância intrablocos	17
2.6. Estimabilidade	21
2.7. Experimentos de parcelas subdivididas em blocos incompletos	23
3. METODOLOGIA	28
3.1. Caracterização	28
3.2. Um modelo linear	29
3.3. Sistema de equações normais	31
3.4. Solução do sistema de equações normais	34
3.4.1. PBIB com m classes de associados	35
3.4.1.1. Estimação dos efeitos de tratamentos principais	36

	Página
3.4.1.2. Estimacão dos efeitos de tra-	
tamentos secundários	43
3.4.1.3. Estimacão dos efeitos de inte-	
raco	44
3.4.2. PBIB com duas classes de associados	46
3.4.3. Caso especial: Experimentos em blocos ..	
incompletos balanceados	49
3.4.4. Experimentos reticulados quadrados	50
3.5. Matriz de variâncias e covariâncias	52
3.5.1. Teste de homogeneidade	53
3.5.2. Teste de uniformidade	54
3.6. Propriedades das soluções	55
3.6.1. Esperança matemática de $\hat{\tau}$	55
3.6.2. Matriz de dispersão para os tratamentos	
principis	55
3.6.3. Esperança matemática de $\hat{\tau}^*$	56
3.6.4. Matriz de dispersão para os tratamentos	
secundários	57
3.6.5. Esperança matemática da interaco $\hat{\delta}$	57
3.6.6. Matriz de dispersão para a interaco ...	58
3.7. Análise da variância	61
3.7.1. Somas de quadrados	61
3.7.2. Soma de quadrados de resíduo	63
3.7.3. Esperança matemática das somas de	
quadrados	65
3.7.3.1. Esperança matemática de SQC ...	65
3.7.3.2. Esperança matemática de SQT(aj)	66
3.7.3.3. Esperança matemática de SQB ...	67
3.7.3.4. Esperança matemática de SQT* ..	68
3.7.3.5. Esperança matemática de SQI ...	69
3.7.3.6. Esperança matemática de SQTot .	70
3.7.3.7. Esperança matemática de SQPar .	71
3.7.3.8. Esperança matemática de SQR(a)	71
3.7.3.9. Esperança Matemática de SQR(b)	72

	Página
3.7.4. Decomposição da soma de quadrados de blocos	72
3.8. Distribuição e independência das formas quadráticas	74
3.9. Esquema de análise da variância	77
3.10. Estimabilidade	77
3.11. Testes de hipóteses	82
3.12. Comparações múltiplas	84
3.12.1. Um contraste entre duas médias de tratamentos principais	85
3.12.2. Um contraste entre duas médias de tratamentos secundários	86
3.12.3. Um contraste entre duas médias de tratamentos secundários, dado um tratamento principal	86
3.12.4. Um contraste entre duas médias de tratamentos principais, dado um tratamento secundário	87
3.12.5. Um contraste entre dois efeitos estimados de tratamentos secundários, dado um tratamento principal	88
3.12.6. Um contraste entre dois efeitos estimados de tratamentos principais, dado um tratamento secundário	89
4. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS	90
5. CONCLUSÕES	101
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
7. APÊNDICE 1. Núcleos das formas quadráticas	110
APÊNDICE 2. Um programa de análise	114

ANÁLISE INTRABLOCOS DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS
COM TRATAMENTOS PRINCIPAIS EM BLOCOS INCOMPLETOS
PARCIALMENTE BALANCEADOS

Autor: AUGUSTO RAMALHO DE MORAIS

Orientador: PROF.^a DR.^a MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma metodologia adequada para análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos segundo uma estrutura de blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB), caracterizados pelos seguintes parâmetros: v tratamentos principais; b blocos; r repetições de cada tratamento principal; k parcelas em cada bloco; u tratamentos secundários, e ainda, $\lambda_1, \dots, \lambda_m, n_1, \dots, n_m, p_{jk}^i$ ($i, j, k = 1, \dots, m$) definidos de acordo com BOSE & NAIR (1939).

Para esse fim, adotou-se o modelo matemático:

$$y_{ijl} = \mu + b_j + t_i + t_l^* + \delta_{il} + \varepsilon_{ijl}$$

onde, para $i=1, 2, \dots, v$; $j=1, 2, \dots, b$; $l=1, 2, \dots, u$;

y_{ijl} é a observação correspondente ao i -ésimo tratamento principal com o l -ésimo tratamento secundário no j -ésimo bloco;

μ é uma constante que representa a média geral;

t_i é o efeito do i -ésimo tratamento principal;

b_j é o efeito do j -ésimo bloco;

t_l^* é o efeito do l -ésimo tratamento secundário;

δ_{il} é o efeito da interação entre o i -ésimo tratamento principal e o l -ésimo tratamento secundário;

ε_{ijl} é o erro experimental associado à observação y_{ijl} , normalmente distribuído, tal que

$$E(x_{ijl}) = 0$$

$$\text{Cov}(x_{ijl}; x_{i'j'l'}) = \begin{cases} \sigma_a^2 + \sigma_b^2, & \text{se } i=i', j=j', l=l' \\ \sigma_a^2, & \text{se } i=i', j=j', l \neq l' \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para maior facilidade nas deduções teóricas, utilizou-se o modelo na forma matricial $y = X\theta + \varepsilon$, sendo y um vetor de observações; X a matriz do delineamento; θ um vetor de parâmetros e ε um vetor de variáveis aleatórias não observáveis, assumidas serem normalmente distribuídas com $\varepsilon \sim N(0, \Sigma)$.

Utilizando-se o método dos mínimos quadrados, sob as condições anteriores, foram determinados: o sistema de equações normais; as soluções para os efeitos ajustados de tratamentos principais, tratamentos secundários e interação; as matrizes de dispersão para os efeitos dos parâmetros; somas de quadrados e suas esperanças matemáticas; as distribuições das formas quadráticas; variâncias para contrastes entre médias de tratamentos principais, tratamentos secundários e interação e funções estimáveis.

Algumas das conclusões obtidas foram:

- a) As expressões dos estimadores dos efeitos de tratamentos principais obtidas, foram análogas às encontradas para os experimentos em blocos incompletos balanceados e, as expressões referentes aos tratamentos secundários e a interação foram semelhantes às aquelas correspondentes nos experimentos em parcelas subdivididas em blocos casualizados.
- b) As funções estimáveis de tratamentos principais dado um tratamento secundário foram obtidas a partir de combinações lineares das observações presentes no mesmo bloco, sendo algumas não estimáveis.

Exemplos numéricos foram apresentados para ilustração da metodologia proposta.

INTRABLOCK ANALYSIS OF SPLIT-PLOT EXPERIMENTS WITH MAIN TREATMENTS IN PARTIALLY BALANCED INCOMPLETE BLOCKS

Author: AUGUSTO RAMALHO DE MORAIS

Adviser: PROF.^a DR.^a MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA

SUMMARY

The objective of this study was to develop one suitable methodology for the intrablock analysis of experiments in split-plot involving a two-way treatment structure when the design structure for whole plot experimental units is a partially balanced incomplete block design. This experiment is characterized by the parameters: v is the number of main treatment (treatment whole plots); b is the number of blocks; r is the number of replications; k is the number of plot per block; u is the number of secondary treatment (treatment of the subplots) and $\lambda_1, \dots, \lambda_m, n_1, \dots, n_m, p_{jk}^i$ ($i, j, k = 1, \dots, m$) defined according to BOSE and NAIR (1939).

For this, the following mathematical model was considered:

$$y_{ijl} = \mu + b_j + t_i + t_l^* + \delta_{il} + \epsilon_{ijl}$$

where, for $i=1, 2, \dots, v$; $j=1, 2, \dots, b$; $l=1, 2, \dots, u$;

y_{ijl} denote the observation of the subplot containing the l -th secondary treatment of the i -th main treatment in the j -th block;

μ denote the effect of the constant general mean;

t_i denote the i -th main treatment effect;

b_j denote the j -th block effect;

t_l^* denote the l -th secondary treatment effect;

δ_{il} denote the interaction between i -th main treatment and l -th secondary treatment effect;

ε_{ijl} denote the error inherent to the ijl th subplot, with

$$E(\varepsilon_{ijl}) = 0$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_{ijl}, \varepsilon_{i'j'l'}) = \begin{cases} \sigma_a^2 + \sigma_b^2, & \text{if } i=i', j=j', l=l' \\ \sigma_a^2, & \text{if } i=i', j=j', l \neq l' \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The linear model used can be expressed as $y = X\theta + \varepsilon$, where y is an vru -component vector of observations; X a real matrix (of order $vru \times p$) of known coefficients; θ a vector of the parameters unknown and ε is a vector of non-observable random variables also termed as error component, which is assumed to be normally distributed as $\varepsilon \sim N(\Phi, \Sigma)$.

Using the least square procedure under such conditions, in order to determine: the system of normal equations; the solutions of the parameters effects; their dispersion matrix for treatment effects; the sum of squares of the parameters; their mathematical expectations; the distributions of the quadratic forms; as well as the justification of the F test, and the variances of the contrasts among means of treatments.

Some of the conclusions obtained were:

- i) The estimates of main treatments and blocks effects were analogous to those existent in the literature of the balanced incomplete block; while the estimates of sub treatments and interactions were analogous to those correspondents in the split-plot randomized block design.
- ii) The estimable linear functions of the main treatments effects in the same sub treatment were obtained through the linear combinations of the observations present in the same block.

Numerical examples were presented to illustrate the proposed methodology.

1. INTRODUÇÃO

Um dos problemas fundamentais ao se planejar um experimento, está na escolha correta do tipo de delineamento que melhor se adapte às condições experimentais específicas do problema em estudo. Na experimentação, quando se têm dois ou mais fatores para serem estudados simultaneamente, uma das opções é a utilização do experimento em parcela subdividida.

O experimento em parcela subdividida envolve uma estrutura de tratamentos, com dois ou mais fatores, com uma estrutura de delineamento em blocos incompletos, apresentando, pelo menos, dois tamanhos diferentes de unidades experimentais: as unidades experimentais grandes, chamadas de parcelas principais ou parcelas e as unidades menores, chamadas de subparcelas. Nas parcelas são casualizados os tratamentos primários e nas subparcelas os tratamentos secundários, segundo MILLIKEN & JOHNSON (1984).

Esse tipo de experimento é largamente utilizado nas pesquisas agrícola, industrial e biológica, mas pode ser usado em outras áreas. Os experimentos em parcelas subdivididas são úteis em situações, tais como: a) quando os níveis de um ou mais fatores exigem grandes quantidades do material experimental (por exemplo, métodos de preparo do solo); b) quando informações prévias asseguram que as diferenças entre os níveis de um dos fatores são maiores do que as do outro fator; c) quando se deseja maior precisão para comparações entre níveis de um dos fatores; d) quando existe um fator de maior importância e outro de importância secundária, sendo que este é incluído para

aumentar a extensão dos resultados e e) nas situações práticas onde é difícil a instalação do experimento no esquema fatorial.

O experimento em parcela subdividida proposto por F. Yates, vem tendo uma grande utilidade para pesquisadores das mais diversas áreas de pesquisa. Uma farta bibliografia sobre o assunto, sua aplicação e a metodologia de análise está ressaltada em diversos livros textos, tais como, LEONARD & CLARK (1939), KEMPTHORNE (1952), COCHRAN & COX (1957), STEEL & TORRIE (1960), HICKS (1973) e PIMENTEL GOMES (1985), dentre outros.

Segundo IEMMA (1981), existe uma lacuna quanto a experimentos em parcelas subdivididas em blocos incompletos. O autor, considerou o caso de experimentos em parcelas subdivididas quando os tratamentos principais estão dispostos na estrutura de delineamento em blocos incompletos balanceados (BIB).

Entretanto, existem situações em que o delineamento BIB, nem sempre é viável, pois pode exigir um número elevado de repetições, tornando-se praticamente impossível sua utilização.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma análise intrabloco, para experimentos em parcelas subdivididas quando os tratamentos principais estão dispostos segundo uma estrutura de delineamento em blocos incompletos parcialmente balanceados, no que se refere a: a) obtenção de soluções para os efeitos de tratamentos; b) variâncias para contrastes entre os efeitos de tratamentos; c) dedução das formulas das somas de quadrados que compõem a análise da variância e a composição do teste F.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Um delineamento experimental é composto de duas estruturas básicas: a) uma "estrutura de tratamentos" que consiste de um conjunto de tratamentos, combinações de tratamentos ou de populações que o pesquisador deseja estudar ou comparar; b) uma "estrutura de delineamento" que consiste no agrupamento das unidades experimentais em grupos homogêneos ou blocos.

A estrutura de delineamento de um experimento é obtida pelo tipo de agrupamento das unidades experimentais em grupos tão uniforme quanto possível, de acordo com MILLIKEN & JOHNSON (1984). Se todas as unidades experimentais são muito homogêneas, então existe somente um grupo ou bloco de observações, e as unidades experimentais podem ser consignadas para os tratamentos completamente ao acaso. Tal estrutura de delineamento é chamada de delineamento inteiramente casualizado.

Se mais do que um grupo de unidades experimentais é requerido, de modo que as unidades dentro de um grupo são muito mais homogêneas que as unidades experimentais entre grupos, então a estrutura de delineamento é de um delineamento em blocos casualizados. Assim, um delineamento experimental envolve: i) a escolha da estrutura de tratamentos, ii) a escolha da estrutura de delineamento e iii) o método de casualização. Uma estrutura de delineamento em blocos incompletos ocorre quando o número de tratamentos excede o número de unidades experimentais no bloco, assim como, um conjunto completo de tratamentos não ocorre dentro de cada bloco.

Neste trabalho, ao se referir a experimentos em parcelas subdivididas estará se reportando a um delineamento experimental com uma estrutura de tratamentos com dois fatores e uma estrutura de delineamento em blocos incompletos caracterizado por dois tamanhos diferentes das unidades experimentais.

2.1. Experimentos em parcelas subdivididas

2.1.1. Caracterização

O experimento em parcela subdividida teve seu início com F. Yates, por volta de 1933, segundo LEONARD & CLARK (1939).

O experimento em parcela subdividida é constituído a partir de uma estrutura de delineamento em blocos incompletos e uma estrutura de tratamento envolvendo dois ou mais fatores ou tipos de tratamentos. Assim, a combinação de estrutura de delineamento e estrutura de tratamento para o experimento em parcela subdividida gera diferentes tamanhos de unidades experimentais.

Os experimentos em parcelas subdivididas têm sido utilizados principalmente na análise de dados originados de pesquisas agrícolas, industriais e biológicas. Este procedimento está apresentado e discutido em vários livros textos, tais como, KEMPTHORNE (1952), STEEL & TORRIE (1960), COCHRAN & COX (1957), PIMENTEL GOMES (1985) e DAS & GIRI (1986); em trabalhos de dissertação e tese, tais como, CONDÊ (1974), PINHO (1975) e SANCHES (1980), dentre outros. Eles se caracterizam como sendo uma variação do experimento fatorial com dois fatores, onde os tratamentos principais (T) das parcelas são dispostos segundo um tipo qualquer de delineamento experimental, como: blocos casualizados, quadrado latino etc, e os tratamentos secundários (T') das subparcelas são dispostos, aleatoriamente, dentro de cada parcela.

PIMENTEL GOMES (1985), aconselhou o uso de experimentos em parcelas subdivididas em alguns dos casos em

que se estudam dois tipos diferentes de tratamentos. Dentre suas múltiplas aplicações, destaca como exemplo, variedades e espaçamentos. Nesse caso, cada parcela contendo um certo espaçamento, é repartida em subparcelas, cada uma contendo uma das variedades.

De acordo com CAMPOS (1984), existem dois tipos de experimentos, no tocante a estruturação das subparcelas: a) parcelas subdivididas no espaço, quando em cada parcela há uma subdivisão em diversas partes, cada uma delas constituindo as subparcelas, que serão casualizadas dentro de cada parcela e b) parcelas subdivididas no tempo, quando as subparcelas são constituídas pelas amostras tomadas periodicamente em cada parcela, sendo cada amostra uma subparcela.

2.1.2. Análise da variância

A análise de um experimento em parcelas subdivididas foi discutida por vários autores, entre outros, FEDERER (1955), HARTER (1961), CAMPOS (1984) e NOGUEIRA (1991), os quais, apresentaram exemplos práticos do uso desses experimentos nos delineamentos: inteiramente ao acaso e em blocos casualizados, considerando independência entre os erros a nível de subparcelas e de parcelas.

Na análise estatística de parcelas subdivididas, considera-se, também, o fato de que, as observações efetuadas em diferentes subparcelas pertencentes a um dado tratamento principal, são esperadas que sejam correlacionadas, de acordo com CHAKRABARTI (1962). E, conforme LEAL (1979), supõe-se, que entre os erros experimentais, a nível de subparcelas, do tipo e_{ijs} e $e_{ijs'}$, para quaisquer duas subparcelas distintas (na mesma parcela), existe uma correlação constante ρ , e que os erros entre subparcelas em diferentes parcelas não são correlacionados.

De acordo com CHAKRABARTI (1962), COCHRAN & COX (1957) e LEAL (1979), para esses experimentos tem-se:

$$E(e_{ijs}) = 0, \quad \text{Var}(e_{ijs}) = \text{Var}(y_{ijs}) = \sigma^2$$

$$\text{Cov}(e_{ijs}, e_{i'j's'}) = \begin{cases} \rho\sigma^2, & \text{para } i=i', j=j', s=s' \\ 0, & \text{para os outros casos} \end{cases}$$

Considerações práticas sobre os experimentos em parcelas subdivididas foram apresentadas por COCHRAN & COX (1957) e FEDERER (1955), que mostraram ser vantajoso o seu uso, se: a) os efeitos dos tratamentos aplicados às subparcelas (T') e os de interação ($T \times T'$) são de maior interesse que os efeitos de tratamentos aplicados às parcelas (T) e b) os efeitos de T são medidos com grandes quantidades de material. E mostraram como desvantagens: a) às vezes o erro das parcelas é medido com menor precisão do que o erro de subparcelas e b) as diferentes comparações entre tratamentos possuem variâncias distintas.

O uso de experimentos em parcelas subdivididas foi abordado por LEAL (1979), como uma alternativa, na análise de experimentos com medidas repetidas, no caso em que as medidas tomadas em intervalos distintos têm variância homogênea e correlações constantes, ou seja, a matriz de variâncias e covariâncias é do tipo uniforme.

Essa pressuposição está em acordo com STEEL & TORRIE (1960) e LITTLE & HILLS (1978), os quais consideraram que experimentos com observações medidas sucessivamente, sob a mesma unidade experimental, durante um certo intervalo de tempo, se assemelham em vários aspectos com experimentos em parcelas subdivididas, nos quais cada unidade é dividida em sub-unidades experimentais distintas.

REGAZZI (1984), abordou o caso dos experimentos com parcelas subdivididas em blocos casualizados, com tratamentos secundários ocorrendo em apenas alguns dos tratamentos principais.

2.1.3. Estimabilidade

No tocante às funções lineares estimáveis, quatro casos para comparação de médias de tratamentos foram

considerados por FEDERER (1955), LITTLE & HILLS (1978) e PIMENTEL GOMES (1985), e podem ser resumidos no seguinte quadro:

-----	-----
Comparação entre duas médias dos efeitos estimados entre	Estimativas das variâncias
-----	-----
Tratamentos nas parcelas (T)	$2 E_a / KR$
Tratamentos nas subparcelas (T')	$2 E_b / IR$
Tratamentos T' num mesmo nível de T	$2 E_b / R$
Tratamentos T num mesmo nível de T'	$2 [E_a + (K-1)E_b] / KR$
-----	-----

onde: I = número de tratamentos primários;

K = número de tratamentos secundários;

R = número de repetições;

E_a = QMResiduo(a), erro a nível de parcelas;

E_b = QMResiduo(b), erro a nível de subparcelas.

ANDERSON & BANCROFT (1952), COCHRAN & COX (1957) e STEEL & TORRIE (1960), incluíram, ainda, um contraste para comparar duas médias dos tratamentos (T) em diferentes níveis de T'.

Em CHAKRABARTI (1962), encontrou-se o seguinte esquema para algumas funções lineares nos parâmetros, seus estimadores e suas respectivas variâncias:

Função linear	Melhor estimador	Variância
$\alpha_i - \alpha_{i'}$	$y_{i..} - y_{i'..}$	$2\sigma_2^2/\alpha\beta$
$\rho_j - \rho_{j'}$	$y_{.j.} - y_{.j'}$	$2\sigma_2^2/r\beta$
$\tau_k - \tau_{k'}$	$y_{..k} - y_{..k'}$	$2\sigma_2^2/r\alpha$
$\delta_{jk} - \delta_{j'k}$	$y_{.jk} - y_{.j'k} - y_{.j.} + y_{.j'}$	$\frac{2\sigma_1^2}{r} (1 - \frac{1}{\beta})$
$\delta_{jk} - \delta_{jk'}$	$y_{.jk} - y_{.jk'} - y_{..k} + y_{..k'}$	$\frac{2\sigma_1^2}{r} (1 - \frac{1}{\alpha})$

onde: $\sigma_1^2 = (1-\rho)\sigma^2$, $\sigma_2^2 = [1+(\beta-1)\rho]\sigma^2$

r , α e β números de blocos, tratamentos principais e

tratamentos secundários respectivamente;

α_i é o efeito de blocos; ρ_j é o efeito de tratamentos primários; τ_k é o efeito de tratamentos secundários e δ_{jk} é o efeito da interação;

$y_{i..}$ média do i -ésimo bloco; $y_{.j.}$ média do j -ésimo tratamento primário; $y_{..k}$ média do k -ésimo tratamento secundário e $y_{.jk}$ média da interação.

Em algumas situações FEDERER (1955), propôs que, se os níveis do fator A são comparados em um delineamento em blocos casualizados, o resíduo(a) (QM interação repetição x A) é o erro apropriado para comparação do efeito A, enquanto o resíduo(b), que é composto pelas interações de repetição x fator B mais repetição x A x B, é o erro apropriado para testar a interação A x B e para testar o efeito B.

A eficiência dos experimentos em parcelas subdivididas, de acordo com FEDERER (1955), em relação ao delineamento em blocos casualizados sobre as comparações B e A x B foi dada por

$$\frac{(v-1)E_a + v(u-1)E_b}{(vu-1)E_b} = \frac{E'_a}{E_b}$$

onde v = número de tratamentos principais, u = número de

tratamentos na subparcela, $E_a = QM \text{ erro}(a)$ e $E_b = QM \text{ erro}(b)$. E, a eficiência sobre o efeito A ou comparações nas parcelas foi dada por E'_e/E_a .

2.2. Experimentos em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB)

2.2.1. Caracterização e definição

Os delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados ou simplesmente PBIB foram introduzidos por BOSE & NAIR (1939), como uma generalização dos delineamentos em blocos incompletos balanceados (BIB), iniciados por YATES (1936), como uma forma de arranjar um grande número de variedades.

Segundo BOSE & NAIR (1939) e NAIR (1952), um delineamento em blocos incompletos é dito ser parcialmente balanceado se: i) existem v tratamentos arranjados em b blocos com k unidades experimentais com diferentes tratamentos em cada bloco; ii) cada tratamento ocorre em r blocos; iii) com relação a um tratamento qualquer os demais podem ser divididos em m grupos de tamanhos $n_1, n_2, \dots, n_m$, de tal forma que os tratamentos do i -ésimo grupo ocorram juntos com um dado tratamento em λ_i blocos. Os tratamentos do i -ésimo grupo são denominados de i -ésimos associados do tratamento em questão, sendo os valores de $n_1, n_2, \dots, n_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ independentes do tratamento considerado; iv) Se o tratamento A é o i -ésimo associado do tratamento B, então o tratamento B é o i -ésimo associado de A. Se A e B são os i -ésimos associados, então o número de tratamentos que são comuns aos j -ésimos associados de A e aos k -ésimos associados de B é p_{jk}^i , e são independentes do par de tratamentos considerado. Também, tem-se que $p_{jk}^i = p_{kj}^i$.

Os símbolos $v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, n_1, n_2, \dots, n_m$ são denominados parâmetros do primeiro tipo ou parâmetros do delineamento, e os números p_{jk}^i ($i, j, k = 1, 2, \dots, m$) são denominados de parâmetros do segundo tipo. Assim, existem $2m+4$ parâmetros do primeiro tipo e $m^2(m+1)/2$

parâmetros do segundo tipo. Por conveniência, assume-se que qualquer tratamento é zero-ésimo associado dele mesmo e de nenhum outro.

Os autores mencionaram, ainda, que no caso particular, quando $m = 1$, o delineamento se transforma em blocos incompletos balanceados; o mesmo ocorrendo quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$.

De acordo com BOSE & NAIR (1939), RAO (1947) e NAIR (1952) as seguintes propriedades se verificam entre os parâmetros de um PBIB:

- i) $vr = bk$;
- ii) $n_1 + n_2 + \dots + n_m = v-1$;
- iii) $n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \dots + n_m\lambda_m = r(k-1)$;
- iv) $\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = \begin{cases} n_j & \text{para } i \neq j \\ n_j - 1 & \text{para } i = j \end{cases}$
- v) $n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j$.

O conceito de esquema de associação representa uma regra fundamental na análise e classificação dos delineamentos parcialmente balanceados. Este conceito foi introduzido por BOSE & SHIMAMOTO (1952), e a definição dos delineamentos em PBIB foi refeita neste contexto.

As definições de um esquema de associação com m -classes de associados e de um delineamento PBIB, segundo NIGAM et alii (1989) são dadas a seguir.

DEFINIÇÃO: Dados v tratamentos, uma relação é dita ser um esquema de associação com m -classes se satisfaz às seguintes condições:

- i) Quaisquer dois tratamentos são primeiros, segundos, ..., ou m -ésimos associados e a relação de associação é simétrica. Isto é, se o tratamento α é o i -ésimo associado do tratamento β , então β é também o i -ésimo associado de α .
- ii) Cada tratamento α possui n_i i -ésimos associados e o número n_i é independente de um particular tratamento α

escolhido.

iii) Se quaisquer dois tratamentos α e β são os i -ésimos associados, então o número de tratamentos que são j -ésimos associados de α e k -ésimos associados de β é p_{jk}^i e o número p_{jk}^i é independente do par do i -ésimo associado α e β .

DEFINIÇÃO: Dado um esquema de m -associados, um delineamento PBIB com m -classes de associação, baseado no esquema de associação, é um arranjo de v tratamentos em b blocos tais que: i) Cada bloco contém k distintos tratamentos, com $k < v$;

ii) Cada tratamento ocorre em r blocos;

iii) Quaisquer dois tratamentos que são i -ésimos associados ocorrem juntos em λ_i blocos ($i=1,2,\dots,m$), onde λ_i é uma constante independente do par de tratamentos.

2.3. PBIB com duas classes de associados - PBIB(2)

2.3.1. Caracterização

Do ponto de vista prático, os delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados, ou simplesmente PBIB(2), são os mais importantes e os mais comumente utilizados e por isso são de especial interesse; uma lista desses delineamentos foi preparada por BOSE et alii (1954) e foi posteriormente revista por CLATWORTHY (1967) e DEY (1988), entre outros. Nesse caso, quando $m=2$, existem oito parâmetros do primeiro tipo ($v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, n_1, n_2$), e seis do segundo tipo ($p_{jk}^i; i,j,k = 1,2$). Os parâmetros do segundo tipo podem ser apresentados como elementos de duas matrizes simétricas, tais como

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

A relação de associação entre os tratamentos, referida na definição de PBIB, pode ser estabelecida através de uma regra, que informa que tipo de associados são dois dados tratamentos. Quando $m=2$, segundo BOSE & SHIMANOTO

(1952) a regra especifica se dois tratamentos são primeiros ou segundos associados. Como ilustração os autores consideraram $v=10$ tratamentos, $m=2$, e os tratamentos a, b, c, d, e, f, g, h, i, j estão arranajados no seguinte esquema:

*	a	b	c	d
a	*	e	f	g
b	e	*	h	i
c	f	h	*	j
d	g	i	j	*

Supondo que a regra de associação é: dois tratamentos são primeiros associados somente se eles ocorrem juntos na mesma coluna do esquema, em caso contrário são segundos associados. Pode-se verificar que cada tratamento possui 6 primeiros associados ($n_1=6$) e 3 segundos associados ($n_2=3$). Para os tratamentos a, c, i e h, tem-se:

Tratamento	Primeiros associados	Segundos associados
a	b,c,d,e,f,g	i,j,h
c	a,b,d,f,h,j	e,g,i
i	b,e,h,d,g,j	a,c,f
h	b,e,i,c,f,j	a,d,g

Os tratamentos a e c são primeiros associados.

O número de tratamentos que são primeiros associados de a e também primeiros associados de c é 3 (b,d,f), portanto, $p_{11}^1=3$. Verifica-se que o número de tratamentos que são segundos associados de a e c é 1 (i), portanto $p_{22}^1=1$. Também, e e g são os únicos tratamentos comuns aos primeiros associados de a e segundos associados de c, logo $p_{12}^1=2$. Desse modo, facilmente, verifica-se a condição de constância de p_{11}^1 , p_{12}^1 e p_{22}^1 , e a simetria de $p_{12}^1 = p_{21}^1$, para qualquer par de tratamentos.

Do mesmo modo, tomando-se dois tratamentos segundos associados, verifica-se que $p_{11}^2=4$, $p_{12}^2=p_{21}^2=2$ e $p_{22}^2=0$.

2.3.2. Classificação

Os delineamentos PBIB(2) com duas classes de associados foram classificados por BOSE & SHIMAMOTO (1952) de acordo com a natureza do esquema de associação entre os tratamentos, em cinco tipos: grupo divisível, triangular, quadrado latino, cíclico e simples. Além deles NIGAM et alii (1989) classificaram em quatro tipos: grupo divisível, triangular, quadrado latino e geometria parcial e consideraram os três primeiros como os mais importantes.

2.3.3. Tipo grupo divisível

Um PBIB com duas classes de associados é do tipo grupo divisível (GD) se $v=mn$ tratamentos satisfazem o seguinte esquema de associação: os v tratamentos são divididos em m grupos de tamanho n , tal que, quaisquer dois tratamentos do mesmo grupo são os primeiros associados e os de grupos diferentes são segundos associados. Os parâmetros do esquema são $n_1=n-1$, $n_2=n(m-1)$ e

$$P_1 = \{p_{jk}^1\} = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(m-1) \end{bmatrix} \quad P_2 = \{p_{jk}^2\} = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(m-2) \end{bmatrix}$$

Os autovalores de NN' são $\theta_0 = kr$, $\theta_1 = r - \lambda_1$ e $\theta_2 = kr - v\lambda_2$ com multiplicidade $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = m(n-1)$ e $\rho_2 = m-1$ respectivamente.

De acordo com os autovalores θ 's, BOSE & CONNOR (1952) classificaram os delineamentos do tipo GD em três classes:

- i) singular (S), se $\theta_1=0$ ou $r=\lambda_1$
- ii) semiregular (SR), se $\theta_1 > 0$, $\theta_2=0$ ou $r > \lambda_1$ e $rk=v\lambda_2$
- iii) regular (R), se $\theta_1, \theta_2 > 0$ ou $r > \lambda_1$ e $rk > v\lambda_2$

2.3.4. Tipo triangular

Um PBIB com duas classes de associados é do tipo triangular se os $v = n(n-1)/2$ tratamentos satisfazem o seguinte esquema de associação: os v tratamentos são arranjados em uma matriz de n linhas por n colunas, tal que,

a diagonal principal é deixada em branco e as $n(n-1)/2$ posições do triângulo acima da diagonal são ocupadas pelos $n(n-1)/2$ tratamentos. Do mesmo modo, as $n(n-1)/2$ posições do triângulo abaixo da diagonal são ocupadas, de modo que a matriz seja simétrica. Os tratamentos que ocorrem na mesma linha e mesma coluna são primeiros associados, e caso contrário, são segundos associados.

Os parâmetros do esquema são $n_1=2(n-2)$, $n_2=(n-2)(n-3)/2$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & n-3 \\ n-3 & (n-3)(n-4)/2 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2n-8 \\ 2n-8 & (n-4)(n-5)/2 \end{bmatrix}$$

onde $n \geq 5$; quando $n=4$, $p_{12}^2=0$, e o delineamento é, também, do tipo GD.

Os autovalores da matriz de incidência NN' além de $\theta_0=kr$, são $\theta_1=r+(n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2$ e $\theta_2=(r-2\lambda_1 + \lambda_2)$, com multiplicidade $\rho_1=(n-1)$ e $\rho_2=n(n-3)/2$ respectivamente.

Por exemplo, quando $n=4$, os seis tratamentos podem ser arranjados como:

*	1	2	3
1	*	4	5
2	4	*	6
3	5	6	*

Os primeiros associados de 1 são os tratamentos: 2, 3, 4, 5 e o segundo associado é o tratamento: 6.

2.3.5. Tipo quadrado latino

Um PBIB com duas classes de associados é do tipo quadrado latino com i restrições (L_i), se os $v=n^2$ tratamentos satisfazem ao seguinte esquema de associação: os $v=n^2$ tratamentos são arranjados em uma matriz quadrada, de ordem n , e $i-2$ quadrados latinos mutuamente ortogonais, de dimensões $n \times n$, são superpostos na matriz quadrada para identificar os primeiros e segundos associados de qualquer tratamento. Dois tratamentos são primeiros associados se e somente se eles ocorrerem na mesma linha ou coluna da matriz

ou corresponderem a mesma letra em qualquer dos $i-2$ quadrados latinos superpostos. Nos demais casos, eles são segundos associados. Para o esquema L_2 , dois tratamentos são primeiros associados se eles ocorrerem na mesma linha ou coluna. Para esse esquema tem-se

$$v=n^2, n_1=i(n-1), n_2=(n-i+1)(n-1),$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} i^2-3i+n & (i-1)(n-i+1) \\ (i-1)(n-i+1) & (n-i)(n-i+1) \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} i(i-1) & i(n-i) \\ i(n-i) & (n-i)^2+(i-2) \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz de incidência NN' além de $\theta_0=kr$ são $\theta_1=r+(n-i)\lambda_1-(n-i+1)\lambda_2$ e $\theta_2=r-i\lambda_1+(i-1)\lambda_2$ com multiplicidade $\rho_1=i(n-1)$ e $\rho_2=(n-i+1)(n-1)$ respectivamente.

O esquema L_2 é o caso onde os tratamentos estão arranjados em uma sequência quadrada. Por exemplo, se $n=3$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

2.3.6. Geometria parcial (r, k, t)

Uma geometria parcial (r, k, t) é definida como um sistema de v pontos e b linhas com suas relações de incidência satisfazendo os seguintes axiomas:

Axioma 1. Qualquer dois pontos distintos são incidentes com não mais que uma linha.

Axioma 2. Cada ponto é incidente com r linhas.

Axioma 3. Cada linha é incidente com k pontos.

Axioma 4. Se o ponto P não é incidente em p , então existem exatamente t linhas através de P que interceptam p .

Identificando v pontos como v tratamentos e b linhas como b blocos, pode-se verificar que qualquer geometria parcial corresponde a um PBIB do tipo simples com duas classes de associados e com os parâmetros:

$$v = k[(r-1)(k-1)+t]/t, \quad b = r[(r-1)(k-1)+t]/t, \quad r, k, \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \\ n_1 = r(k-1), \quad n_2 = (r-1)(k-1)(k-t)/t, \quad p_{11}^1 = (t-1)(r-1) + k - 2, \\ p_{12}^1 = (r-1)(k-1), \quad p_{11}^2 = rt, \quad p_{12}^2 = r(k-t-1), \quad 1 \leq t \leq \min(r, k).$$

Para o esquema de associação acima, quaisquer dois pontos são primeiros associados quando são incidentes com uma linha da geometria, e são segundos associados quando não são incidentes com a linha.

Os autovalores da matriz de incidência NN' são $\theta_0 = rk$, $\theta_1 = r+k-t-1$ e $\theta_2 = 0$ com multiplicidades $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = [rk(r-1)(h-1)]/t(k+r-t-1)$ e $\rho_2 = v-1-\rho_1$, respectivamente. Como as multiplicidades dos autovalores necessitam ser números inteiros, segue-se que uma condição necessária para a existência de uma geometria parcial (r, k, t) é que $rk(r-1)(k-1)/t(k+r-t-1)$ seja um inteiro positivo.

A definição de cada tipo bem como seus respectivos esquemas pode ser vista com mais detalhes em BARBOSA (1986), BOSE & SHIMAMOTO (1952) e RIBOLDI (1988), entre outros.

2.4. Experimentos em reticulados quadrados

2.4.1. Caracterização

O delineamento reticulado quadrado permite dispor $v = k^2$ tratamentos em blocos de k unidades por bloco. Daí, que o número de tratamentos tem que ser um quadrado perfeito e, que os tratamentos de um bloco em uma repetição se distribuem em diferentes blocos nas outras repetições, constituindo as chamadas repetições ortogonais ou arranjos básicos. Assim, se k for um número primo ou potência de primo, têm-se $k+1$ repetições ortogonais, e o conjunto das $k+1$ repetições constitui o reticulado quadrado balanceado.

Um reticulado quadrado simples "simple lattice" é um PBIB com duas classes de associados baseado no esquema de associação L_2 ; do mesmo modo o reticulado quadrado triplo é baseado no esquema L_3 . Esses esquemas fazem parte de uma classe ampla dos delineamentos "lattice",

introduzida por YATES (1936), que foram também chamados de delineamentos "quasifatorial".

2.4.2. Classificação

Os reticulados quadrados podem ser classificados quanto à repetição dos arranjos básicos, de acordo com COCHRAN & COX (1957), em:

- i) simples ou duplo: quando são utilizados somente duas repetições do reticulado balanceado;
- ii) triplo ou tríplice: quando são utilizados somente três repetições;
- iii) quádruplo: quando são utilizados somente quatro repetições do esquema balanceado ou quando é utilizado o reticulado simples duplicado;
- iv) quádruplo: quando são utilizados cinco repetições;
- v) para um maior número de repetições, os autores sugerem:
 - seis repetições: usar o reticulado tríplice duplicado ou o reticulado simples triplicado;
 - oito repetições: usar o reticulado quádruplo duplicado ou o reticulado simples quatro vezes;
 - nove repetições: usar o reticulado tríplice triplicado;
 - dez repetições: usar o reticulado quádruplo duplicado ou o reticulado simples cinco vezes.

RAGHAVARAO (1971), considerou que os delineamentos reticulados quadrados parcialmente balanceados, pertencem ao esquema de associação do tipo quadrado latino com i restrições (L_i), com os parâmetros $n_1 = i(n-1)$, $n_2 = (n-i+1)(n-1)$ e $p_{11}^1 = i^2 - 3i + n$. Considerou ainda, que quando os $v = n^2$ tratamentos podem ser repetidos s vezes, obtém-se um delineamento com os parâmetros $v = n^2$, $b = sn$, $r = si$, $k = n$, $\lambda_1 = s$ e $\lambda_2 = 0$.

2.5. Análise da variância intrabloco

A análise intrabloco, em que somente as comparações entre parcelas do mesmo bloco são usadas nas estimativas dos efeitos de tratamentos, para os delineamentos PBIB pode ser vista em CHAKRABARTI (1962), RAGHAVARAO

(1971), PIMENTEL GOMES (1985), DAS & GIRI (1986) e IEMMA (1987), dentre outros.

PIMENTEL GOMES (1985), salientou que a análise intrabloco pode ser utilizada para qualquer tipo de experimento em blocos incompletos e se baseia em métodos exatos.

Sabe-se que o sistema de equações normais, eliminando-se o efeito de blocos, é dado por

$$C \hat{\tau} = Q,$$

onde: $C = R - NK^{-1}N' = rI_{(v)} - NN'/k$,

$$NN' = \begin{bmatrix} r & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1v} \\ \lambda_{12} & r & \dots & \lambda_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1v} & \lambda_{2v} & \dots & r \end{bmatrix}$$

Assim, C é uma matriz singular de característica (ou posto incompleto) $v-1$, constituída pelos seguintes elementos:

$$c_{ii'} = \begin{cases} r(k-1)/k & \text{se } i=i' \\ -\lambda_{ii'}/k & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

sendo $\lambda_{ii'}$ o número de vezes que os tratamentos i e i' ocorrem juntos num mesmo bloco.

E o Q é o vetor dos totais ajustados de tratamentos, constituído pelos seguintes elementos

$$Q_i = T_i - A_i/k$$

onde T_i é o total das observações do tratamento i e A_i é a soma dos totais das observações dos blocos que contêm o tratamento i .

Na obtenção de estimadores dos efeitos ajustados de tratamentos de um PBIB, uma dificuldade que ocorre, está em apresentar regras gerais que facilitem a análise. Para contornar esse problema, uma das alternativas é o uso de restrições não estimáveis na solução, de modo que se complete o posto da matriz C .

ROSE & NATR (1939), impondo a restrição não

estimável $\sum_{i=1}^v \hat{t}_i = 0$ para os PBIB(2), apresentaram a seguinte expressão para $\hat{t}_i$:

$$\hat{t}_i = k [B_{22}Q_i - B_{12}S_1(Q_i)]/\Delta_1, \quad i=1,2,\dots,v,$$

onde:

$$B_{22} = r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(p_{11}^1 - p_{11}^2); \quad B_{12} = \lambda_2 - \lambda_1;$$

$$\Delta_1 = A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12};$$

$$A_{12} = r(k-1) + \lambda_2; \quad A_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1)p_{12}^2;$$

$S_1(Q_i)$ é a soma dos Q 's correspondentes aos n_1 tratamentos que são primeiros associados do tratamento i .

Mas, se $n_1 \geq n_2$, uma expressão mais conveniente é dada por

$$\hat{t}_i = k[B_{21}Q_i - B_{11}S_2(Q_i)]/\Delta_2$$

$$\text{onde: } B_{21} = r(k-1) + \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(p_{22}^2 - p_{22}^1); \quad B_{11} = \lambda_1 - \lambda_2;$$

$$\Delta_2 = A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11};$$

$$A_{11} = r(k-1) + \lambda_1; \quad A_{21} = (\lambda_1 - \lambda_2)p_{12}^1;$$

$S_2(Q_i)$ é a soma dos Q 's relativos aos n_2 tratamentos que são segundos associados do i -ésimo tratamento.

Expressões semelhantes às de BOSE & NAIR (1939) foram apresentadas por RAU (1947), com a diferença de que define $S_j(Q_i)$ ($i=1,\dots,v$; $j=1,\dots,m$) como a soma dos Q 's para o i -ésimo tratamento e seus j -ésimos associados. Assim, as expressões de $\hat{v}_i$ são dadas por:

$$\hat{v}_i = k[(B_{22} + B_{12})Q_i - B_{12}S_1(Q_i)]/\Delta_1$$

quando $n_1 \leq n_2$, e

$$\hat{v}_i = k[(B_{21} + B_{11})Q_i - B_{11}S_2(Q_i)]/\Delta_2$$

quando $n_1 \geq n_2$.

Para os experimentos em reticulados quadrados PIMENTEL GOMES (1954), apresentou a seguinte expressão para obter o efeito de $\hat{t}_i$

$$\hat{t}_i = \frac{1}{m} Q_i + \frac{1}{m(m-1)k} [S_1(Q_i) + S_2(Q_i) + \dots + S_m(Q_i)]$$

onde: $S_j(Q_i)$ é a soma dos Q 's de todos os k tratamentos que ocorrem no mesmo bloco da j -ésima repetição ($j=1, \dots, m$) em que aparece o i -ésimo tratamento.

Para o caso geral, com m classes de associados, CHAKRABARTI (1962) apresentou para o i -ésimo tratamento a seguinte expressão:

$$r(k-1)\hat{t}_i = kQ_i + \sum_{j=1}^m S_j(Q_s) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{ij}$$

onde: $S_j(Q_s)$ é a soma dos Q 's correspondentes aos n_j tratamentos que são j -ésimos associados do s -ésimo tratamento; e

f_{ij} que satisfaz à expressão:

$$S_i(\hat{\tau}_s) = f_{i1}S_1(Q_s) + f_{i2}S_2(Q_s) + \dots + f_{im}S_m(Q_s).$$

De acordo com JOHN (1980), uma solução do SENR $C\hat{\tau} = Q$ é $\hat{\tau} = \Omega Q$, onde Ω é uma matriz inversa generalizada simétrica de C .

E, ainda, RIBOLDI (1988) considerou que uma matriz inversa de Moore-Penrose (Ω) possui os seguintes elementos:

$$\Omega_{ii'} = \begin{cases} \frac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} + \frac{k(n-1)}{n[r(k-1)+\lambda_1]} & , \text{ se } i=i' \\ \frac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} - \frac{k}{n[r(k-1)+\lambda_1]} & , \text{ se } i \neq i' \text{ e } i \text{ e } i' \text{ são tratamentos do mesmo grupo ou são primeiros associados} \\ -\frac{k(s-1)}{\lambda_2 v^2} & , \text{ se } i \text{ e } i' \text{ são tratamentos de grupos diferentes ou são segundos associados} \end{cases}$$

A soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos, foi obtida por $SQT(aj.) = \hat{\tau}'Q = \sum_{i=1}^v \hat{\tau}_i Q_i$ de acordo com PIMENTEL GOMES (1954) e CHAKRABARTI (1962), entre outros.

Detalhes de sua utilização na prática, bem como vários aspectos teóricos, como dedução de expressões para o efeito de tratamentos são dados em JOHN (1980), BARBOSA (1986) e DAS & GIRI (1986); OLIVEIRA (1985), que

deduziu expressões para a estimativa dos efeitos de tratamentos, no caso de PBIB com tratamentos comuns em todos os blocos e, RIBOLDI (1988), que apresentou a decomposição da soma de quadrados de tratamentos ajustada em $v-1$ contrastes ortogonais.

2.6. Estimabilidade

Na experimentação agrônômica, é de grande importância a obtenção das médias dos tratamentos; nos experimentos em PBIB, um problema que ocorre, está em verificar se os contrastes entre médias ajustadas são estimáveis. Para isso, são necessários alguns conceitos sobre delineamentos conexos.

Um delineamento em blocos é definido como conexo por RAGHAVARAO (1971), se dados dois quaisquer tratamentos, por exemplo i e i' , é possível construir uma cadeia de tratamentos $i=i_0, i_1, \dots, i_n=i'$, tais que, todos os pares consecutivos de tratamentos ocorram juntos em um bloco. Uma regra prática foi apresentada por SEARLE (1971): i) forma-se uma tabela de dupla entrada, representando os blocos e os tratamentos; ii) nos pontos correspondentes à interseção do bloco j com o tratamento i , coloca-se um X se o tratamento i ocorre no bloco j ; iii) partindo-se de qualquer X e em qualquer sentido unem-se os X's por linhas horizontais e verticais; iv) procedendo-se assim, se todos os X's forem unidos sem interrupção, o delineamento é conexo, caso contrário, não será conexo.

Ainda, segundo CHAKRABARTI (1962), RAGHAVARAO (1971) e NIGAM et alii (1989), um delineamento em blocos com v tratamentos será conexo somente se o posto da matriz C do sistema de equações normais reduzidas (SENR) possuir característica $r[C]=v-1$; e OGAWA (1974), demonstrou que, se o delineamento é conexo, então todos os contrastes entre médias ajustadas de tratamentos são estimáveis.

KAGEYAMA (1982), apresentou a seguinte regra

prática para verificar se um PBIB(2) é conexo: i) se $\lambda_1 > \lambda_2$ então λ_2 e p_{11}^2 não devem ser nulos ao mesmo tempo; ii) se $\lambda_1 < \lambda_2$, então λ_1 e p_{22}^1 não devem ser nulos ao mesmo tempo. De acordo com essas condições, o autor determinou que: i) os delineamentos do tipo triangular, quadrado latino e cíclicos são sempre conexos; ii) os delineamentos do tipo grupo divisível com $\lambda_1 < \lambda_2$ são sempre conexos, e quando $\lambda_1 > \lambda_2$ serão conexos somente se λ_2 não for nulo.

A variância de um contraste elementar de tratamentos, nos delineamentos com duas classes de associados, conforme BOSE & NAIR (1939), RAO (1947) e NAIR (1952), é dada por:

$$V[\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}] = \begin{cases} 2kB_{21}\sigma^2/\Delta_1, & \text{se } i \text{ e } i' \text{ são primeiros associados} \\ 2kB_{22}\sigma^2/\Delta_2, & \text{se } i \text{ e } i' \text{ são segundos associados} \end{cases}$$

Sendo, $B_{22} = B_{21} + \lambda_1 - \lambda_2$ e $\lambda_1 > \lambda_2$ então os tratamentos primeiros associados têm uma variância menor do que os segundos associados, pois $\Delta_1 = \Delta_2$.

Na solução de BOSE & SHIMAMOTO (1952), tem-se

$$V[\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}] = \begin{cases} 2(k-c_1)\sigma^2/r(k-1), & \text{se } i \text{ e } i' \text{ são } 1^{\text{os}} \text{ associados} \\ 2(k-c_2)\sigma^2/r(k-1), & \text{se } i \text{ e } i' \text{ são } 2^{\text{os}} \text{ associados} \end{cases}$$

E ainda, BARBOSA (1986), apresentou as seguintes expressões:

(i) se $n_1 < n_2$

$$V[\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}] = \begin{cases} 2k(B_{22} + B_{12})\sigma^2/\Delta_1, & \text{se } i \text{ e } i' \text{ são } 1^{\text{os}} \text{ associados} \\ 2kB_{22}\sigma^2/\Delta_2, & \text{se } i \text{ e } i' \text{ são } 2^{\text{os}} \text{ associados} \end{cases}$$

(ii) se $n_1 > n_2$

$$V[\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}] = \begin{cases} 2kB_{21}\sigma^2/\Delta_2, & \text{se } i \text{ e } i' \text{ são } 1^{\text{os}} \text{ associados} \\ 2k(B_{21} + B_{11})\sigma^2/\Delta_1, & \text{se } i \text{ e } i' \text{ são } 2^{\text{os}} \text{ associados} \end{cases}$$

Como cada um dos v tratamentos têm n_i i -ésimos associados, então tem-se vn_i pares de tratamentos. Mas, cada par é contado duas vezes, logo existem $vn_i/2$ comparações entre os tratamentos primeiros associados e $vn_i/2$

comparações entre os segundos associados. Uma variância média de todas comparações entre contrastes elementares, de acordo com BOSE & NAIR (1939) é dada por:

$$V = 2k\sigma^2[(v-1)B_{21} + n_2B_{11}]/[(v-1)\Delta_2]$$

Para o caso geral dos delineamentos com m classes de associados, CHAKRABARTI (1962) considerou que se $t_s - t_{s'}$ é estimável e se o s -ésimo tratamento e o s' -ésimo tratamento são i -ésimos associados, então o melhor estimador não viesado de $t_s - t_{s'}$ é $\hat{t}_s - \hat{t}_{s'}$, cuja variância é:

$$V(\hat{t}_s - \hat{t}_{s'}) = 2\sigma^2[k - \sum_{l=1}^m \lambda_l f_{ll}]/r(k-1)$$

Verifica-se facilmente, que os contrastes elementares não são estimados com a mesma variância.

2.7. Experimentos de parcelas subdivididas em blocos incompletos

Conforme IEMMA (1981), existe uma certa lacuna quanto às publicações sobre os experimentos em parcelas subdivididas conduzidos em blocos incompletos.

De acordo com GILL (1978), experimentos nos quais animais ou indivíduos são distribuídos aleatoriamente e então são realizadas avaliações em vários tempos ou espaços nos níveis de um fator ou combinações de dois ou mais fatores, têm-se tornado muito comuns. Conforme o autor, cada animal poderia ser tomado como um bloco incompleto, pois nesse tipo de experimento, um único animal receberia alguns dos tratamentos.

Em algumas áreas de pesquisa, como fisiologia reprodutiva, o autor considerou que as causas de variação são muitas vezes simplificadas na análise dos dados. Essas simplificações, não justificadas, são: i) análise dos dados considerando a estrutura fatorial, em vez de uma análise em parcelas subdivididas; ii) análise não considerando a correlação entre os erros, induzida pela repetição das avaliações. Quando a estrutura de parcelas subdivididas não

é reconhecida, uma aparente significância entre médias de tratamentos, pode ser grosseiramente distorcida, e como consequência, a sensibilidade dos testes pode ser seriamente reduzida.

Quando a correlação entre erros é ignorada, GILL (1978) considerou que as inferências podem ou não ser distorcidas, dependendo da heterogeneidade das variâncias e covariâncias dos dados. Em muitos experimentos uma suposição de uniformidade é razoável, como o caso onde os animais são tratados igualmente, em relação ao fator A. Se os indivíduos, provavelmente não mostram resposta uniforme, eles podem ser arranjados nos níveis do fator A dentro de cada bloco. Os blocos incompletos são então, grupos de indivíduos homogêneos; todos os membros de um bloco possuem o mesmo nível de um fator.

ROBINSON (1967), considerou um experimento envolvendo t níveis do tratamento principal e s níveis do tratamento secundário, sendo o número de subparcelas em cada parcela uma restrição, ou seja, $k' < s$. Assim, cada nível do fator principal foi aplicado em r parcelas e os s níveis do tratamento secundário foram arranjados segundo um esquema de blocos incompletos balanceados, considerando cada parcela como um bloco incompleto. Em um particular nível do fator A, cada nível do fator B ocorre R vezes e cada par de níveis do fator B ocorre na mesma parcela λ vezes, onde $R = rk/s$ e $\lambda = R(k-1)/(s-1)$.

Usando a notação de BOSE & NAIR (1939) e RAO (1947), verificou-se que o delineamento proposto acima, é um caso especial de um PBIB com os seguintes parâmetros: $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$, $n_1 = s-1$, $n_2 = s(t-1)$ e

$$p_{ij}^1 = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s(t-1) \end{bmatrix}, \quad p_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & s-1 \\ s-1 & s(t-2) \end{bmatrix}.$$

Para exemplificar um experimento desse tipo, o autor considerou um ensaio fatorial 3×3 com duas subparcelas em cada parcela. O esquema não casualizado foi:

$a_0 b_0$ $a_0 b_1$	$a_1 b_0$ $a_1 b_1$	$a_2 b_0$ $a_2 b_1$
$a_0 b_0$ $a_0 b_2$	$a_1 b_0$ $a_1 b_2$	$a_2 b_0$ $a_2 b_1$
$a_0 b_1$ $a_0 b_2$	$a_1 b_1$ $a_1 b_2$	$a_2 b_1$ $a_2 b_2$

Com relação a experimentos nos quais os animais ou os indivíduos são fixados aleatoriamente nos níveis de um fator, GILL (1978) considerou o caso onde os animais são tomados como blocos incompletos, e apresentou o seguinte modelo matemático:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + D_{\omega j} + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + (D\beta)_{\omega jk} + E_{ijk}$$

para $i=1,2,\dots,a$; $j=1,2,\dots,r$ (por i); $k=1,2,\dots,b$ e $n=arb$;

onde: y_{ijk} é o valor observado do i -ésimo nível do tratamento A no j -ésimo animal (bloco) que recebeu o k -ésimo nível do tratamento B;

α_i é o efeito do i -ésimo nível do tratamento A ao qual os animais são designados ao acaso;

$D_{\omega j}$ é o efeito aleatório do j -ésimo animal dentro do i -ésimo nível do tratamento A, e considerado como o erro (a);

β_k é o efeito do k -ésimo tratamento B, nos animais;

$(\alpha\beta)_{ik}$ é o efeito da interação entre o i -ésimo nível do tratamento A e o k -ésimo nível do tratamento B, sobre os animais;

$(D\beta)_{\omega jk}$ é o efeito da interação entre animais e níveis do tratamento B, que deve ser isolado do erro (b);

E_{ijk} é o erro aleatório atribuído à observação y_{ijk} , correspondente ao erro (b).

De acordo com CHAKRABARTI (1962), GILL (1978) considerou que o erro experimental para parcelas, é da se-

guinte natureza $[1 + (b - 1)\rho]\sigma^2$ e, para subparcelas é $(1-\rho)\sigma^2$, com todas as covariâncias nulas.

O seguinte quadro da análise da variância foi apresentado por GILL (1978), com as respectivas esperanças dos quadrados médios, mostrando a correlação constante entre duas subparcelas de uma mesma parcela.

Causas de Variação	G.L.	E(Q.M.)
Tratamento (A)	a-1	$\sigma^2[1+(b-1)\rho] + br \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 / \sigma_A$
Indiv/A (erro a)	a(r-1)	$\sigma^2[1+(b-1)\rho]$
Entre Indivíduos	ar-1	
Tempo ou Espaço (B)	b-1	$\sigma^2(1-\rho) + \sigma_{DB}^2 + ar \sum_{k=1}^b \beta_k^2 / \sigma_B$
A x B	(a-1)(b-1)	$\sigma^2(1-\rho) + \sigma_{DB}^2 + r \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^b (\alpha\beta)_{ik}^2 / \sigma_{AB}$
Ind/A x B = Erro(b)	a(r-1)(b-1)	$\sigma^2(1-\rho) + \sigma_{DB}^2$
Dentro de Indiv.	ar(b-1)	

Quanto aos testes de hipóteses, o autor considerou as seguintes hipóteses e seus respectivos testes:

i) Interação, $H_0 : (\alpha\beta)_{ik} = 0$ para todo i, k

Rejeita-se H_0 se $F = QM_{AB}/QM_E \geq F[\alpha; (a-1)(b-1); a(r-1)(b-1)]$.

ii) fator B, $H_0 : \beta_k = 0$, para todo k

Rejeita H_0 se $F = QM_B/QM_E \geq F[\alpha; (b-1); a(r-1)(b-1)]$.

iii) Fator A, $H_0 : \alpha_i = 0$, para todo i

Rejeita-se H_0 se $F = QM_A/QM_{D/A} \geq F[\alpha; (a-1); a(r-1)]$.

IEMMA (1981), considerou um experimento em parcelas subdivididas no qual os v tratamentos principais estivessem presentes em r dos a blocos incompletos equilibrados ($r < a$); onde cada bloco era formado por k parcelas e cada par de tratamentos principais ocorresse em λ

blocos. Considerou, também, a existência de correlação constante (ρ), entre duas subparcelas de uma mesma parcela, e independência entre subparcelas de parcelas distintas.

Sob essas condições e através do método dos mínimos quadrados, o autor determinou: o sistema de equações normais, as matrizes de dispersão para os parâmetros, os componentes de variância para os efeitos fixos e aleatórios do modelo e os critérios para os testes das hipóteses de nulidade usuais e para comparações múltiplas pelo teste de Tukey.

Para verificar a mortalidade de *Aphis rumicis* MOORE & BLISS (1942), estudaram sete inseticidas de contato, com os tratamentos aplicados nas três primeiras linhas de um quadrado latino 7 x 7. Essas linhas foram consideradas como um experimento em blocos incompletos balanceados com três repetições, e em cada parcela foram aplicados quatro concentrações dos inseticidas.

Um exemplo foi apresentado por KEMPTHORNE (1947), de um experimento em reticulado quadrado com 25 tratamentos, na cultura da batata; os tratamentos foram constituídos por 22 materiais orgânicos e 3 testemunhas (um tratamento controle, representado três vezes. Os 22 tratamentos orgânicos foram: cinco tipos de adubos, quatro materiais contendo sedimentos de esgoto e dois outros materiais orgânicos; sendo que cada um deles foi testado em dois níveis de aplicação. Cada parcela foi dividida em quatro subparcelas, onde foram alocadas combinações de sulfato de amônia (N), superfosfato (P) e muriato de potássio (K).

3. METODOLOGIA

3.1. Caracterização

A metodologia a ser aplicada tem por finalidade a obtenção da análise de dados, obtidos de um experimento em parcelas subdivididas, com os tratamentos principais dispostos segundo um delineamento em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB).

Sem perda de generalidade, pode-se mostrar um delineamento em blocos incompletos parcialmente balanceados, do tipo reticulado quadrado com quatro tratamentos, no esquema de parcelas subdivididas quando os tratamentos principais estão dispostos em PBIB, através do seguinte esquema experimental não casualizado:

Repetição 1				Repetição 2			
t_1		t_2		t_1		t_3	
b_1	$t_1^* = y_{111}$	$t_2^* = y_{211}$		b_3	$t_1^* = y_{131}$	$t_3^* = y_{331}$	
	$t_2^* = y_{112}$				$t_2^* = y_{132}$		
	$t_3^* = y_{113}$				$t_3^* = y_{133}$		
t_3		t_4		t_2		t_4	
b_2	$t_1^* = y_{321}$	$t_2^* = y_{421}$		b_4	$t_1^* = y_{241}$	$t_4^* = y_{441}$	
	$t_2^* = y_{322}$				$t_2^* = y_{242}$		
	$t_3^* = y_{323}$				$t_3^* = y_{243}$		

A fixação dos três tratamentos secundários nas subparcelas tem apenas a finalidade didática de apresentar o

exemplo e dar uma melhor visualização do esquema experimental; na realidade eles devem ser casualizados dentro de cada parcela. No exemplo, têm-se: $v = 4$ tratamentos principais (t_1, t_2, t_3, t_4); $b = 4$ blocos (b_1, b_2, b_3, b_4); $k = 2$ tratamentos principais por bloco; $r = 2$ repetições; $u = 3$ tratamentos secundários (t_1^*, t_2^*, t_3^*) aplicados em cada tratamento principal. Um exemplo desse tipo de experimento, é o caso citado por MIRANDA FILHO et alii (1986), cujo objetivo foi avaliar o potencial de populações de milho, onde nas parcelas foram alocadas as diferentes populações em um delineamento PBIB e os cruzamentos recíprocos nas subparcelas.

3.2. Um modelo linear

Para o desenvolvimento da metodologia, adotou-se o seguinte modelo linear matemático:

$$y_{ijl} = \mu + b_j + t_i + t_l^* + \delta_{il} + \varepsilon_{ijl} \quad (a.1)$$

com: $i = 1, 2, \dots, v$ tratamentos principais;

$j = 1, 2, \dots, b$ blocos;

$l = 1, 2, \dots, u$ tratamentos secundários.

onde: y_{ijl} é o valor observado na subparcela correspondente ao l -ésimo tratamento secundário, dentro do i -ésimo tratamento principal, no j -ésimo bloco;

μ é uma constante que representa a média geral;

b_j é o efeito do j -ésimo bloco;

t_i é o efeito do i -ésimo tratamento principal;

t_l^* é o efeito do l -ésimo tratamento secundário;

δ_{il} é o efeito da interação entre o i -ésimo tratamento principal e o l -ésimo tratamento secundário;

ε_{ijl} é o erro aleatório atribuído a observação y_{ijl} , considerado como o componente do resíduo.

Na forma matricial, o modelo linear é dado

por:

$$y = X\theta + \epsilon \quad (a.2)$$

onde: y é um vetor de realizações de variáveis aleatórias, com dimensões $(vru) \times (1)$;

X é uma matriz dos coeficientes dos parâmetros do modelo (matriz do delineamento), com dimensões $(vru) \times (1+v+b+u+vu)$;

θ é um vetor de parâmetros desconhecidos do modelo, com dimensões $(1+v+b+u+vu) \times (1)$;

ϵ é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis, com dimensões $(vru) \times (1)$, as quais são assumidas serem independentes e normalmente distribuídas com $\epsilon \sim N(\phi, \Sigma)$, cuja estrutura de erros é dada por:

$$\text{Cov}(y_{ijl}; y_{i'j'l'}) = \begin{cases} \sigma_a^2 + \sigma_b^2, & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } l=l' \\ \sigma_a^2, & \text{se } i=i', j=j' \text{ e } l \neq l' \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (a.3)$$

Conforme PIMENTEL GOMES (1968) e IEMMA (1981), efetuou-se a partição da matriz X , da seguinte maneira:

$$X = [X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5] \quad (a.4)$$

onde:

X_1 é o vetor dos coeficientes associados à constante μ , de dimensões $(vru) \times (1)$;

X_2 é a matriz dos coeficientes associados aos blocos, de dimensões $(vru) \times (b)$;

X_3 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos principais, de dimensões $(vru) \times (v)$;

X_4 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos secundários, de dimensões $(vru) \times (u)$;

X_5 é a matriz dos coeficientes associados às interações $(tt')_{il}$ ou δ_{il} , de dimensões $(vru) \times (vu)$.

A partição do vetor dos parâmetros θ correspondente à partição da matriz X é dada por:

$$\theta' = [\mu | \beta' | \tau' | \tau^{*'} | \delta']$$

onde,

$$\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_b \end{bmatrix}_1; \quad \tau = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_v \end{bmatrix}_1; \quad \tau^* = \begin{bmatrix} t_1^* \\ t_2^* \\ \dots \\ t_u^* \end{bmatrix}_1; \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \dots \\ \delta_{vu} \end{bmatrix}_1$$

Considerou-se a não existência de uma correlação entre as subparcelas de uma mesma parcela e a independência entre subparcelas de parcelas distintas.

3.3. Sistema de equações normais

Aplicando o método dos mínimos quadrados, determinou-se o seguinte sistema de equações normais (SEN):

$$X'X \theta = X'y \quad (a.5)$$

o qual resultou em

$$\begin{bmatrix} X'_1X_1 & X'_1X_2 & X'_1X_3 & X'_1X_4 & X'_1X_5 \\ X'_2X_1 & X'_2X_2 & X'_2X_3 & X'_2X_4 & X'_2X_5 \\ X'_3X_1 & X'_3X_2 & X'_3X_3 & X'_3X_4 & X'_3X_5 \\ X'_4X_1 & X'_4X_2 & X'_4X_3 & X'_4X_4 & X'_4X_5 \\ X'_5X_1 & X'_5X_2 & X'_5X_3 & X'_5X_4 & X'_5X_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \beta \\ \tau \\ \tau^* \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_1y \\ X'_2y \\ X'_3y \\ X'_4y \\ X'_5y \end{bmatrix} \quad (a.6)$$

onde as submatrizes são designadas por:

X'_1X_1 é uma submatriz, de dimensões (1) x (1), constituída por $bku = vru = n$ que é o número total de unidades experimentais ou de subparcelas;

X'_1X_2 é uma submatriz, de dimensões (1) x (b), representada por $K = ku \cdot E_b$, correspondente ao vetor associado ao número de subparcelas em cada bloco, cujo E é um vetor de uns;

X'_1X_3 é uma submatriz, de dimensões (1) x (v), representada

por $R = ru \text{ } _1E_v$, correspondente ao vetor associado ao número de repetições dos tratamentos principais, cujo E é um vetor de uns;

X'_1X_4 é uma submatriz, de dimensões $(1) \times (u)$, representada por $U = vr \text{ } _1E_u$, correspondente ao vetor associado ao número de repetições dos tratamentos secundários, cujo E é um vetor de uns;

X'_1X_5 é uma submatriz, de dimensões $(1) \times (vu)$, representada por $L = r \text{ } _1E_{vu}$, correspondente ao vetor associado ao número de repetições das interações, cujo E é um vetor de uns;

X'_2X_2 é uma submatriz diagonal $\{ku, ku, \dots, ku\}$, de dimensões $(b) \times (b)$, representada por K , correspondente a matriz do número de subparcelas em cada bloco;

X'_2X_4 é uma submatriz, de dimensões $(b) \times (u)$, representada por $A = k E$, correspondente a matriz do número de tratamentos principais por bloco, cujo E é uma submatriz de uns;

X'_2X_5 é uma submatriz, de dimensões $(b) \times (vu)$, representada por V , correspondente a matriz de incidência da interação $(tt)_{il}$ no bloco j , constituída por $v_{j,il}$, onde:

$$v_{j,il} = \begin{cases} 1, & \text{se a interação } (tt')_{il} \text{ ocorre no bloco } j, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

X'_3X_2 é uma submatriz, de dimensões $(v) \times (b)$, correspondente a matriz de incidência do i -ésimo tratamento principal no j -ésimo bloco, denominada N , cujos elementos que a compoem são n_{ij} , onde:

$$n_{ij} = \begin{cases} u, & \text{se o tratamento principal } i \text{ ocorre no bloco } j; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

X'_3X_3 é uma submatriz diagonal $\{ku, ku, \dots, ku\}$, de dimensões $(v) \times (v)$, representada por R , correspondente ao número de repetições de cada tratamento principal;

$X_3'X_4$ é uma submatriz, de dimensões $(v) \times (u)$, correspondente ao número de repetições de cada par $(tt')_{il}$ da interação, representada por $P = r \cdot \sqrt{E_u}$, cujo E é uma submatriz de uns;

$X_3'X_5$ é uma submatriz, de dimensões $(v) \times (vu)$, representada por S , correspondente a matriz de incidência dos tratamentos principais nos pares $(tt')_{il}$, onde:

$$s_{i,il} = \begin{cases} r, & \text{se a combinação } (tt')_{il} \text{ ocorre no tratamento principal } i; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$X_4'X_4$ é uma submatriz diagonal $\{vr, vr, \dots, vr\}$, de dimensões $(u) \times (u)$, correspondente ao número de repetições dos tratamentos secundários, representada por U ;

$X_4'X_5$ é uma submatriz, de dimensões $(u) \times (vu)$, representada por $H = [rI_{(u)} | rI_{(u)} | \dots | rI_{(u)}]$, e correspondente a matriz de incidência dos tratamentos secundários nos pares $(tt')_{il}$, cujo I é uma matriz identidade de dimensões $(u) \times (u)$;

$X_5'X_5$ é uma submatriz diagonal $\{r, r, \dots, r\}$, de dimensões $(vu) \times (vu)$, associada ao número de repetições dos pares $(tt')_{il}$ da interação, representada por L ;

$X_1'y$ é um vetor referente ao total geral observado, de dimensões $(1) \times (1)$, representado por G ;

$X_2'y$ é um vetor com os totais de blocos, de dimensões $(b) \times (1)$, representado por B , sendo $B' = [B_1, B_2, \dots, B_b]$;

$X_3'y$ é um vetor com os totais de tratamentos principais, de dimensões $(v) \times (1)$, representado por T , sendo $T' = [T_1, T_2, \dots, T_v]$;

$X_4'y$ é um vetor com os totais de tratamentos secundários, de dimensões $(u) \times (1)$, representado por T^* , sendo $T^* = [T_1^*, T_2^*, \dots, T_u^*]$;

$X_5'y$ é um vetor com os totais de interação, de dimensões $(vu) \times (1)$, representado por D , sendo

$$D' = [TT_{11}^*, \dots, TT_{1u}^*, \dots, TT_{v1}^*, \dots, TT_{vu}^*].$$

Desse modo, as partições efetuadas em (a.5), estão escritas na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} n & ku_1 E_b & ru_1 E_v & vr_1 E_u & r_1 E_{vu} \\ ku_b E_1 & K & N' & A & V \\ ru_v E_1 & N & R & P & S \\ vr_u E_1 & A' & P' & U & H \\ r_{vu} E_1 & V' & S' & H' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \beta \\ \tau \\ \tau^* \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ B \\ T \\ T^* \\ D \end{bmatrix} \quad (a.7)$$

Efetuando-se as multiplicações sugeridas em (a.6), o sistema de equações normais pode ser escrito do seguinte modo

$$\begin{aligned} n \mu + ku_1 E_b \beta + ru_1 E_v \tau + vr_1 E_u \tau^* + r_1 E_{vu} \delta &= G \\ ku_b E_1 \mu + K \beta + N' \tau + A \tau^* + V \delta &= B \\ ru_v E_1 \mu + N \beta + R \tau + P \tau^* + S \delta &= T \\ vr_u E_1 \mu + A' \beta + P' \tau + U \tau^* + H \delta &= T^* \\ r_{vu} E_1 \mu + V' \beta + S' \tau + H' \tau^* + L \delta &= D \end{aligned}$$

3.4. Solução do sistema de equações normais

O número de equações do sistema de equações normais em (a.5) é $1+b+v+u+vu$; mas, verifica-se que a soma das equações β , a soma das equações τ e a soma das equações τ^* são idênticas à equação μ , implicando em três relações linearmente dependentes entre as linhas de $X'X$. Nas equações δ , as somas em relação a k , são iguais às equações τ para $i=1, \dots, v$ representando outras v relações lineares entre as linhas de $X'X$. Do mesmo modo, as somas em relação a i , são iguais às equações τ^* para $l=1, \dots, u$; entretanto, dessas u relações lineares representadas agora, somente $u-1$ delas são linearmente independentes daquelas já descritas. Portanto, o número de relações lineares dependentes é $3+v+u-1=v+u+2$.

Assim, o posto de $X'X$ é $r[X]=vu+b-1 \leq \min\{n,p\}$, sendo p o número de parâmetros, então as equações normais de

(a.5) não tem solução única. Pois, $X'X$ é singular, e portanto não existe $(X'X)^{-1}$ e o SEN é indeterminado, mas é sempre consistente (IEMMA, 1988).

Uma solução de mínimos quadrados é $\theta^0 = (X'X)^0 X'y$, para qualquer inversa generalizada de $X'X$. Uma outra alternativa é a estratégia de "completar" o posto da matriz X . Isto tem sido feito de vários modos; dentre eles, cita-se a restrição nas soluções. A restrição tem como objetivo completar o posto da matriz $X'X$, tornando-a invertível, e assim determinando um $\hat{\theta}$ único.

Então, completando-se o posto da matriz X , com $p - r[X] = v+u+2$ linhas linearmente independentes das linhas da matriz X , que constituem um conjunto de funções paramétricas conjuntamente não estimáveis e independentes entre si.

Um conjunto de restrições é formado pelas seguintes funções lineares não estimáveis:

$$\sum_{j=1}^b \hat{b}_j = \sum_{i=1}^v \hat{t}_i = \sum_{l=1}^u \hat{t}_l^* = \sum_{i=1}^v (\hat{\delta}_{il}) = \sum_{l=1}^u (\hat{\delta}_{il}) = 0 \quad (a.8)$$

Ressalta-se que, se outro conjunto de restrições é adotado, obtém-se outra solução, mas $X\theta^0$ é invariante para qualquer θ^0 solução de (a.6), segundo IEMMA (1988).

3.4.1. PBIB com m classes de associados

De acordo com as restrições impostas em (a.8) e face às estruturas das matrizes envolvidas, o SEN resultou em

$$n \hat{\mu} = G \quad (a.9)$$

$$ku {}_b E_1 \hat{\mu} + K \hat{\beta} + N' \hat{\tau} = B \quad (a.10)$$

$$ru {}_v E_1 \hat{\mu} + N' \hat{\beta} + R \hat{\tau} = T \quad (a.11)$$

$$vr {}_u E_1 \hat{\mu} + U \hat{\tau}^* = T^* \quad (a.12)$$

$$r {}_{vr} E_1 \hat{\mu} + V \hat{\beta} + S' \hat{\tau} + H' \hat{\tau}^* + L \hat{\delta} = D \quad (a.13)$$

que resulta em

$$n\hat{\mu} = G \quad (a.14)$$

$$(K - N'R^{-1}N)\hat{\beta} = (B - N'R^{-1}T) \quad (a.15)$$

$$(R - NK^{-1}N')\hat{\tau} = (T - NK^{-1}B) \quad (a.16)$$

$$U1\hat{\mu} + U\hat{\tau}^* = T^* \quad (a.17)$$

$$L1\hat{\mu} + V'\hat{\beta} + S'\hat{\tau} + H'\hat{\tau}^* + L\hat{\delta} = D \quad (a.18)$$

onde (a.16) representa o sistema de equações normais reduzido (SENR) ou sistema de equações normais para efeitos ajustados de tratamentos principais.

Resultado analogo pode-se obter, pois o principal interesse é o efeito dos tratamentos, eliminando-se os efeitos de $\hat{\mu}$ e de $\hat{\beta}$ em (a.10) e (a.11), ou pre-multiplicando o SEN de (a.7) por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_b & -N'R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -NK^{-1} & I_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{vu} \end{bmatrix}$$

3.4.1.1. Estimação dos efeitos de tratamentos principais

Da teoria geral de blocos incompletos, discutida por PIMENTEL GOMES (1968), JOHN (1980), dentre outros, pode-se escrever o SENR de (a.16) na forma:

$$C\hat{\tau} = Q \quad (a.19)$$

onde,

$$C = R - NK^{-1}N' \quad (a.20)$$

é uma matriz de dimensões $(v) \times (v)$, com característica $v-1$, e com os seguintes elementos:

$$c_{ii'} = \begin{cases} ru(k-1)/k, & \text{se } i=i' \\ -u\lambda_{ii'}/k, & \text{se } i \neq i' \end{cases} \quad i, i' = 1, 2, \dots, v \quad (a.21)$$

sendo $\lambda_{ii'}$ o número de vezes que os tratamentos principais i e i' ocorrem juntos no mesmo bloco.

$$Q = T - NK^{-1}B \quad (a.22)$$

é o vetor de totais ajustados de tratamentos principais, e é composto pelos seguintes elementos:

$$Q_i = T_i - A_i/k \quad (a.23)$$

sendo A_i a soma dos totais dos blocos que contêm o tratamento principal i .

Dado que a matriz C é singular, o SENR possui infinitas soluções. Uma solução de mínimos quadrados, pode ser a utilização de inversas generalizadas (RAO, 1973; JOHN, 1980; IEMMA, 1988), ou introduzindo-se restrições (PIMENTEL GOMES, 1968; IEMMA, 1981; OLIVEIRA, 1985; DAS & GIRI, 1986).

De acordo com o SENR $C\hat{\tau} = Q$, e conforme a caracterização da matriz C , dada em (a.19), para um dado tratamento principal s tem-se a equação seguinte equação normal reduzida para τ_s :

$$\frac{ur(k-1)}{k} \hat{\tau}_s - \frac{u}{k} [\lambda_{s1} \hat{\tau}_1 + \dots + \lambda_{ss-1} \hat{\tau}_{s-1} + \lambda_{ss+1} \hat{\tau}_{s+1} + \dots + \lambda_{sv} \hat{\tau}_v] = Q_s$$

sendo $s=1,2,\dots,v$ tratamentos principais; ou

$$ur(k-1) \hat{\tau}_s - u \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i(\hat{\tau}_s) = kQ_s \quad (a.24)$$

onde $S_i(\hat{\tau}_s)$ corresponde a soma dos efeitos dos tratamentos principais que são os i -ésimos associados do tratamento s , e λ_i é um dos parâmetros do primeiro tipo, definido por BOSE & NAIR (1939), com $i=1,2,\dots,m$ associados.

Verifica-se, que em (a.24), o efeito do tratamento principal $\hat{\tau}_s$ na forma como é colocado, está em função de seus associados, que também não são conhecidos.

Segundo CHAKRABARTI (1962), se um conjunto de tratamentos obedece à uma estrutura de PBIB, então as seguintes igualdades se verificam:

$$S_j S_i(\hat{\tau}_s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m p_{ij}^i S_j(\hat{\tau}_s) & , \text{ se } j' \neq i \\ n_i \tau_s + \sum_{j=1}^m p_{ii}^j S_j(\hat{\tau}_s) & , \text{ se } j' = i \end{cases} \quad (a.25)$$

Assim, a equação (a.24), usando o procedimento de CHAKRABARTI (1962), pode ser escrita como:

$$kS_{j'}(Q_s) = ur(k-1)S_{j'}(\hat{\tau}_s) - u \sum_{i=1}^m \lambda_i S_{j'} S_i(\hat{\tau}_s) \quad (a.26)$$

onde $S_{j'}(Q_s)$ representa a soma dos Q 's dos j' -ésimos associados do s -ésimo tratamento principal:

a) Para $j'=1$, a equação (a.26) fica como:

$$kS_1(Q_s) = ur(k-1)S_1(\hat{\tau}_s) - u \sum_{i=1}^m \lambda_i S_1 S_i(\hat{\tau}_s) \quad (a.27)$$

onde,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i S_1 S_i(\hat{\tau}_s) = \lambda_1 S_1 S_1(\hat{\tau}_s) + \lambda_2 S_1 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + \lambda_m S_1 S_m(\hat{\tau}_s)$$

Usando as igualdades de (a.25), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i S_1 S_i(\hat{\tau}_s) &= \lambda_1 [n_1 \hat{\tau}_s + p_{11}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{11}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{11}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\ &+ \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{12}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{12}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\ &+ \dots + \\ &+ \lambda_m [p_{1m}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{1m}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{1m}^m S_m(\hat{\tau}_s)] \end{aligned}$$

Mas, sabe-se por BOSE & NAIR (1939), que:

$$\sum_{j'=1}^i p_{jj'}^i = \begin{cases} n_j - 1 & , \text{ se } j=i \\ n_j & , \text{ se } j \neq i \end{cases} \quad (a.28)$$

Considerando-se essas igualdades na expressão anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i S_1 S_i(\hat{\tau}_s) &= \lambda_1 [n_1 \hat{\tau}_s + (n_1 - 1 - p_{12}^1 - \dots - p_{1m}^1) S_1(\hat{\tau}_s) + \\ &+ (n_1 - p_{12}^2 - \dots - p_{1m}^2) S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + \\ &+ (n_1 - p_{12}^m - \dots - p_{1m}^m) S_m(\hat{\tau}_s)] + \\ &+ \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{12}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{12}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\ &+ \dots + \\ &+ \lambda_m [p_{1m}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{1m}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{1m}^m S_m(\hat{\tau}_s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_i S_i(\hat{\tau}_s) &= \lambda_1 \{ n_1 [\hat{\tau}_s + S_1(\hat{\tau}_s) + S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
&\quad - (1 + p_{12}^1 - \dots - p_{1m}^1) S_1(\hat{\tau}_s) - \dots - \\
&\quad - (p_{12}^m - \dots - p_{1m}^m) S_m(\hat{\tau}_s) \} + \\
&\quad + \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{12}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{12}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \lambda_m [p_{1m}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{1m}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{1m}^m S_m(\hat{\tau}_s)]
\end{aligned}$$

Utilizando-se a restrição

$$\hat{\tau}_s + S_1(\hat{\tau}_s) + S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + S_m(\hat{\tau}_s) = 0 \quad (\text{a.29})$$

obtem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_i S_i(\hat{\tau}_s) &= -\lambda_1 [(n_1 - p_{11}^1) S_1(\hat{\tau}_s) + (n_1 - p_{11}^2) S_2(\hat{\tau}_s) + \dots \\
&\quad \dots + (n_1 - p_{11}^m) S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
&\quad + \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{12}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{12}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \lambda_m [p_{1m}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{1m}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{1m}^m S_m(\hat{\tau}_s)] \\
&= -[\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1 - \dots - \lambda_m p_{1m}^1] S_1(\hat{\tau}_s) - \\
&\quad - [\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2 - \dots - \lambda_m p_{1m}^2] S_2(\hat{\tau}_s) - \\
&\quad - \dots - \\
&\quad - [\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^m - \lambda_2 p_{12}^m - \dots - \lambda_m p_{1m}^m] S_m(\hat{\tau}_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_i S_i(\hat{\tau}_s) &= - [\lambda_1 n_1 - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{1l}^1] S_1(\hat{\tau}_s) - \\
&\quad - [\lambda_1 n_1 - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{1l}^2] S_2(\hat{\tau}_s) - \dots - \\
&\quad - [\lambda_1 n_1 - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{1l}^m] S_m(\hat{\tau}_s).
\end{aligned} \quad (\text{a.30})$$

Substituindo a expressão (a.30) em (a.27),
obtem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
kS_1(Q_s) = & u [r(k-1) + \lambda_1 n_1 - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{1l}^1] S_1(\hat{\tau}_s) + \\
& + u [\lambda_1 n_1 - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{1l}^2] S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + \\
& + u [\lambda_1 n_1 - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{1l}^m] S_m(\hat{\tau}_s).
\end{aligned} \quad (a.31)$$

Procedendo-se desse modo para as demais expressões relativas aos j' -ésimos associados (restantes) de τ_s , obtem-se:

b) Para $j'=m$, a equação (a.26) fica como:

$$kS_m(Q_s) = ur(k-1)S_m(\hat{\tau}_s) - u \sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) \quad (a.32)$$

onde,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) = \lambda_1 S_m S_1(\hat{\tau}_s) + \lambda_2 S_m S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + \lambda_m S_m S_m(\hat{\tau}_s)$$

Usando as igualdades de (a.25), tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) = & \lambda_1 [p_{m1}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m1}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{m1}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
& + \lambda_2 [p_{m2}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m2}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
& + \dots + \\
& + \lambda_m [n_m \hat{\tau}_s + p_{mm}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{mm}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{mm}^m S_m(\hat{\tau}_s)]
\end{aligned}$$

Mas, de (a.28) tem-se que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) = & \lambda_1 [p_{m2}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m2}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
& + \lambda_2 [p_{m2}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m2}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
& + \dots + \\
& + \lambda_m [n_m \hat{\tau}_s + (n_m - p_{m1}^1 - \dots - p_{m(m-1)}^1) S_1(\hat{\tau}_s) + \\
& + (n_m - p_{m1}^2 - \dots - p_{m(m-1)}^2) S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + \\
& + (n_m - 1 - p_{m1}^m - \dots - p_{m(m-1)}^m) S_m(\hat{\tau}_s)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) &= \lambda_1 [p_{m1}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m1}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{m1}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
&+ \lambda_2 [p_{m2}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m2}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
&+ \dots + \\
&+ \lambda_m \{n_m [\hat{\tau}_s + S_1(\hat{\tau}_s) + S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + S_m(\hat{\tau}_s)] - \\
&\quad - (n_m - p_{mm}^1) S_1(\hat{\tau}_s) - (n_m - p_{mm}^2) S_2(\hat{\tau}_s) - \\
&\quad - \dots - (n_m - p_{mm}^m) S_m(\hat{\tau}_s)\}
\end{aligned}$$

Utilizando-se a restrição de (a.29), obtem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) &= \lambda_1 [p_{m1}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m1}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{m1}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
&+ \lambda_2 [p_{m2}^1 S_1(\hat{\tau}_s) + p_{m2}^2 S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + p_{m2}^m S_m(\hat{\tau}_s)] + \\
&+ \dots + \\
&- \lambda_m [(n_m - p_{mm}^1) S_1(\hat{\tau}_s) + (n_m - p_{mm}^2) S_2(\hat{\tau}_s) + \\
&\quad + \dots + (n_m - p_{mm}^m) S_m(\hat{\tau}_s)] \\
&= -[\lambda_m n_m - \lambda_1 p_{m1}^1 - \lambda_2 p_{m2}^1 - \dots - \lambda_m p_{mm}^1] S_1(\hat{\tau}_s) - \\
&\quad - [\lambda_m n_m - \lambda_1 p_{m1}^2 - \lambda_2 p_{m2}^2 - \dots - \lambda_m p_{mm}^2] S_2(\hat{\tau}_s) - \\
&\quad - \dots - \\
&\quad - [\lambda_m n_m - \lambda_1 p_{m1}^m - \lambda_2 p_{m2}^m - \dots - \lambda_m p_{mm}^m] S_m(\hat{\tau}_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \lambda_i S_m S_i(\hat{\tau}_s) &= -[\lambda_m n_m - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{ml}^1] S_1(\hat{\tau}_s) - \\
&\quad - [\lambda_m n_m - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{ml}^2] S_2(\hat{\tau}_s) - \dots - \quad (a.33) \\
&\quad - [\lambda_m n_m - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{ml}^m] S_m(\hat{\tau}_s).
\end{aligned}$$

Substituindo-se a expressão de (a.33) em (a.32), obtem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
kS_m(Q_s) = & u [\lambda_m n_m - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{ml}^1] S_1(\hat{\tau}_s) + \\
& + u [\lambda_m n_m - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{ml}^2] S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + \\
& + u [r(k-1) + \lambda_m n_m - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{ml}^m] S_m(\hat{\tau}_s).
\end{aligned} \quad (a.34)$$

As expressões obtidas em (a.31) e (a.34) podem ser escritas numa forma geral, como:

$$S_i(Q_s) = a_{i1} S_1(\hat{\tau}_s) + a_{i2} S_2(\hat{\tau}_s) + \dots + a_{im} S_m(\hat{\tau}_s) \quad (a.35)$$

onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{ur(k-1)}{k} + \frac{u}{k} (\lambda_i n_i - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{il}^j), & i=j \\ \frac{u}{k} (\lambda_i n_i - \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{il}^j), & i \neq j \end{cases} \quad i, j=1, 2, \dots, m$$

De (a.35), forma-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(\hat{\tau}_s) \\ S_2(\hat{\tau}_s) \\ \dots \\ S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(Q_s) \\ S_2(Q_s) \\ \dots \\ S_m(Q_s) \end{bmatrix} \quad (a.36)$$

Como A é uma matriz formada pelos elementos $\{a_{ij}\}$, com inversa A^{-1} , de elementos f_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, m$), de acordo com CHAKRABARTI (1962), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} S_1(\hat{\tau}_s) \\ S_2(\hat{\tau}_s) \\ \dots \\ S_m(\hat{\tau}_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(Q_s) \\ S_2(Q_s) \\ \dots \\ S_m(Q_s) \end{bmatrix} \quad (a.37)$$

ou simplesmente,

$$S_i(\hat{\tau}_s) = f_{i1} S_1(Q_s) + f_{i2} S_2(Q_s) + \dots + f_{im} S_m(Q_s) \quad (a.38)$$

Substituindo-se a equação de (a.37) na expressão encontrada em (a.24), tem-se que:

$$ur(k-1)\hat{\tau}_s = \begin{bmatrix} kQ_s + u \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i1} S_1(Q_s) + u \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i2} S_2(Q_s) + \dots \\ \dots + u \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{im} S_m(Q_s) \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$ur(k-1)\hat{\tau}_s = kQ_s + u \sum_{j=1}^m S_j(Q_s) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{ij} \quad (a.39)$$

Assim, de (a.39) obtém-se que a solução de τ_s é:

$$\hat{\tau}_s = \frac{1}{r(k-1)} \left[\frac{k}{u} Q_s + \sum_{j=1}^m S_j(Q_s) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{ij} \right] \quad (a.40)$$

sendo a expressão que permite obter os efeitos ajustados de tratamentos primários para um PBIB(m).

Pode-se fazer, a partir de (a.39), uma generalização para a forma matricial $\hat{\tau} = M^{-1}Q$, sendo os elementos da matriz $M^{-1} = \{m_{ii'}\}$ iguais a:

$$m_{ii'} = \begin{cases} k/ur(k-1) & , \text{ se } i=i' \\ \sum_{l=1}^m \lambda_l f_{li} / r(k-1) & , \text{ se } i \neq i' \end{cases} \quad (a.41)$$

3.4.1.2. Estimação dos efeitos de tratamentos secundários

Reportando-se ao sistema de equações normais, e resolvendo-se (a.12), tem-se que as soluções de mínimos quadrados para os efeitos dos tratamentos secundários são determinadas a partir de:

$$U\hat{\tau}^* = T^* - v r {}_uE_1 \hat{\mu} \quad (a.42)$$

Sendo U uma matriz diagonal de posto completo, $r[U] = (u)$, então pré-multiplicando-se (a.42) por U^{-1} , obtém-se o vetor dos efeitos de tratamentos secundários:

$$\hat{\tau}^* = U^{-1}T^* - {}_uE_1 \hat{\mu} \quad (a.43)$$

Portanto,

$$\hat{t}_i^* = \frac{1}{vr} T_i^* - \hat{\mu} \quad (a.44)$$

que é uma solução semelhante aquelas obtidas para tratamen-

tos secundários nos experimentos instalados em delineamento em blocos casualizados com parcelas subdivididas, e idêntica àquela encontrada por IEMMA (1981), para os experimentos em BIB.

3.4.1.3. Estimação dos efeitos de interação

Para a determinação das soluções dos efeitos estimados das interações ou pares de $(tt^*)_{il} = \delta_{il}$, substituem-se em (a.13) as expressões de $\hat{\beta} = K^{-1}B - K^{-1}N'\hat{\tau} - {}_bE_1\hat{\mu}$ obtida de (a.10), de $\hat{\tau}^*$ encontrada em (a.44), e

$$\hat{\tau} = R^{-1}T - R^{-1}N\hat{\beta} - {}_vE_1\hat{\mu} \quad (a.45)$$

originada de (a.11).

Fazendo as substituições, tem-se que:

$$r_{vr}E_1\hat{\mu} + S'(R^{-1}T - R^{-1}N\hat{\beta} - {}_vE_1\hat{\mu}) + V'(K^{-1}B - K^{-1}N'\hat{\tau} - {}_bE_1\hat{\mu}) + H'(U^{-1}T^* - {}_uE_1\hat{\mu}) + L\hat{\delta} = D$$

desenvolvendo adequadamente, tem-se que:

$$r_{vr}E_1\hat{\mu} + S'R^{-1}T - S'R^{-1}N\hat{\beta} - S'{}_vE_1\hat{\mu} + V'K^{-1}B - V'K^{-1}N'\hat{\tau} - V'{}_bE_1\hat{\mu} + H'U^{-1}T^* - H'{}_uE_1\hat{\mu} + L\hat{\delta} = D$$

Substituindo a expressão de $\hat{\beta}$, obtém-se:

$$r_{vr}E_1\hat{\mu} + S'R^{-1}T - S'R^{-1}NK^{-1}B + S'R^{-1}NK^{-1}N'\hat{\tau} + S'R^{-1}N{}_bE_1\hat{\mu} - S'{}_vE_1\hat{\mu} + V'K^{-1}B - V'K^{-1}N'\hat{\tau} - V'{}_bE_1\hat{\mu} + H'U^{-1}T^* - H'{}_uE_1\hat{\mu} + L\hat{\delta} = D$$

Posto que: $V' = S'R^{-1}N$ e

$$S'{}_vE_1 = V'{}_bE_1 = H'{}_uE_1 = r_{vu}E_1$$

simplificando, fica:

$$S'R^{-1}T + H'U^{-1}T^* - r_{vr}E_1\hat{\mu} + L\hat{\delta} = D$$

então

$$L\hat{\delta} = D - S'R^{-1}T - H'U^{-1}T^* + r_{vu}E_1\hat{\mu}$$

Sendo L uma matriz não singular, de posto completo, $r[L] = vu$, a solução de mínimos quadrados para os efeitos da interação é dada por:

$$\hat{\delta} = L^{-1}D - L^{-1}S'R^{-1}T - L^{-1}H'U^{-1}T^* + {}_{vu}E_1 \hat{\mu} \quad (a.46)$$

onde,

${}_{vu}E_1$ é um vetor de uns;

$$L^{-1}D = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} TT_{11}^* \\ \dots \\ TT_{1u}^* \\ TT_{21}^* \\ \dots \\ TT_{2u}^* \\ \dots \\ TT_{v1}^* \\ \dots \\ TT_{vu}^* \end{bmatrix}_1 = \{\bar{y}_{i..}\}$$

é a média da combinação do i-ésimo tratamento principal com o l-ésimo tratamento secundário (sem ajuste para efeito de blocos)

$$L^{-1}S'R^{-1}T = \frac{1}{ru} \begin{bmatrix} T_1 \\ \dots \\ T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_2 \\ \dots \\ T_v \\ \dots \\ T_v \end{bmatrix}_1 = \{\bar{y}_{i..}\}$$

é a média do i-ésimo tratamento principal (sem o ajuste para o efeito de blocos)

$$L^{-1}H'U^{-1}T^* = \frac{1}{vr} \begin{bmatrix} T_1^* \\ \dots \\ T_u^* \\ T_1^* \\ \dots \\ T_u^* \\ \dots \\ T_1^* \\ \dots \\ T_u^* \end{bmatrix} = \{\bar{y}_{...l}\} \quad \begin{array}{l} \text{é a média do l-ésimo} \\ \text{tratamento secundário} \end{array}$$

$vu \quad 1$

Assim, uma solução para o efeito estimado de um elemento qualquer da interação, é dada por:

$$\hat{\delta}_{ul} = \bar{y}_{l..} - \bar{y}_{l..} - \bar{y}_{...l} + \bar{y}_{...} \quad (a.47)$$

que é um resultado idêntico àqueles obtidos em ensaios com parcelas subdivididas, envolvendo delineamentos em blocos casualizados. Assim, verifica-se que os efeitos de interação não são ajustados para blocos.

3.4.2. PBIB com duas classes de associados

Os delineamentos em bloco incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados, ou simplesmente PBIB(2), são os delineamentos de particular importância, pelo fato de serem os mais utilizados na prática, por isso merecem uma maior atenção.

Para $m=2$, de (a.39) tem-se que:

$$\begin{aligned} ur(k-1)\hat{\tau}_s = [kQ_s + u(\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21})S_1(Q_s) + \\ + u(\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22})S_2(Q_s)] \end{aligned} \quad (a.48)$$

Para estudar os elementos f_{ij} ($i, j=1,2$), considera-se a matriz A , como sendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

onde:

$$(i) \quad a_{11} = \frac{u}{k} [r(k-1) + \lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1] \\ = \frac{u}{k} [r(k-1) + \lambda_1 (n_1 - p_{11}^1) - \lambda_2 p_{12}^1]$$

Mas, de (a.28) tem-se que $p_{11}^1 + p_{12}^1 = n_1 - 1$.

então

$$a_{11} = \frac{u}{k} [r(k-1) + \lambda_1 (1 + p_{12}^1) - \lambda_2 p_{12}^1] \\ = \frac{u}{k} [r(k-1) + (\lambda_1 - \lambda_2) p_{12}^1 + \lambda_1] \quad (a.49)$$

$$(ii) \quad a_{12} = \frac{u}{k} [\lambda_1 n_1 - \lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2]$$

Mas, de (a.28) tem-se que $p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1$,

então

$$a_{12} = \frac{u}{k} [\lambda_1 n_1 - \lambda_1 (n_1 - p_{12}^2) - \lambda_2 p_{12}^2] \\ = \frac{u}{k} (\lambda_1 - \lambda_2) p_{12}^2 \quad (a.50)$$

$$(iii) \quad a_{21} = \frac{u}{k} [\lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 p_{22}^1]$$

Mas, de (a.28) tem-se que $p_{21}^1 + p_{22}^1 = n_2$,

então,

$$a_{21} = \frac{u}{k} [\lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 (n_2 - p_{21}^1)] \\ = \frac{u}{k} [(\lambda_2 - \lambda_1) p_{21}^1] \quad (a.51)$$

$$(iv) \quad a_{22} = \frac{u}{k} [r(k-1) + \lambda_2 n_2 - \lambda_1 p_{21}^2 - \lambda_2 p_{22}^2]$$

Mas, de (a.28) tem-se que $p_{21}^2 + p_{22}^2 = n_2 - 1$,

então,

$$a_{22} = \frac{u}{k} [r(k-1) + n_2 \lambda_2 - \lambda_1 p_{21}^2 - \lambda_2 (n_2 - 1 - p_{21}^2)] \\ = \frac{u}{k} [r(k-1) + (\lambda_2 - \lambda_1) p_{21}^2 + \lambda_2] \quad (a.52)$$

Assim, a matriz A^{-1} com os elementos f_{ij} é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

onde, $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Então,

$$f_{11} = a_{22}/\Delta, \quad f_{12} = -a_{12}/\Delta \\ f_{21} = -a_{21}/\Delta, \quad f_{22} = a_{11}/\Delta \quad (a.53)$$

Substituindo (a.53) em (a.48), tem-se que:

$$\begin{aligned}
ur(k-1)\hat{\tau}_s &= kQ_s + u(\lambda_{122}/\Delta - \lambda_{221}/\Delta)S_1(Q_s) + \\
&\quad + u(\lambda_{211}/\Delta - \lambda_{112}/\Delta)S_2(Q_s) \\
&= kQ_s + \frac{u}{\Delta} [(\lambda_{122} - \lambda_{221})S_1(Q_s) + (\lambda_{211} - \lambda_{112})S_2(Q_s)] \\
&= kQ_s + \frac{u}{\Delta} [A_1S_1(Q_s) + A_2S_2(Q_s)]
\end{aligned}$$

como $A_1 = (\lambda_{122} - \lambda_{221})$ e $A_2 = (\lambda_{211} - \lambda_{112})$

então, a solução de τ_s é:

$$\hat{\tau}_s = \frac{1}{r(k-1)\Delta} \left[\frac{k\Delta}{u} Q_s + A_1S_1(Q_s) + A_2S_2(Q_s) \right] \quad (a.54)$$

sendo a expressão que permite obter os efeitos ajustados de tratamentos primários para um PBIB(2).

Para maior facilidade de cálculos, quando ocorrer $n_1 < n_2$, é preferível eliminar $S_2(Q_s)$, de (a.54). Assim, considerando-se a propriedade, como $Q_s + S_1(Q_s) + S_2(Q_s) = 0$, tem-se que:

$$S_2(Q_s) = -Q_s - S_1(Q_s) \quad (a.55)$$

Substituindo-se (a.55) em (a.54), obtém-se:

$$\hat{\tau}_s = \frac{k}{ur(k-1)} Q_s + \frac{1}{r(k-1)\Delta} \{A_1S_1(Q_s) - A_2[Q_s + S_1(Q_s)]\}$$

segue-se que:

$$\hat{\tau}_s = \frac{1}{ur(k-1)\Delta} [(k\Delta - uA_2)Q_s + u(A_1 - A_2)S_1(Q_s)] \quad (a.56)$$

Uma generalização para a forma matricial $\hat{\tau} = M^{-1}Q$, sendo os elementos da matriz $M^{-1} = \{m_{ii}\}$ iguais a:

$$m_{ii} = \begin{cases} (k\Delta - uA_2)/[ur(k-1)\Delta], & \text{se } i=i' \\ u(A_1 - A_2)/[ur(k-1)\Delta], & \text{se } i \neq i' \text{ são } 1^{\text{os}} \text{ associados} \\ 0, & \text{se } i \neq i' \text{ são } 2^{\text{os}} \text{ associados} \end{cases} \quad (a.57)$$

Quando $n_1 > n_2$, é preferível eliminar $S_1(Q_s)$ de (a.54). Assim, considerando-se a propriedade, como $Q_s + S_1(Q_s) + S_2(Q_s) = 0$, tem-se que:

$$S_1(Q_s) = -Q_s - S_2(Q_s) \quad (a.58)$$

Substituindo-se (a.58) em (a.54), obtém-se:

$$\hat{\tau}_s = \frac{k}{ur(k-1)} Q_s + \frac{1}{r(k-1)\Delta} \{-A_1[Q_s + S_2(Q_s)] + A_2 S_2(Q_s)\}$$

segue-se que:

$$\hat{\tau}_s = \frac{1}{ur(k-1)\Delta} [(k\Delta - uA_1)Q_s + u(A_2 - A_1)S_2(Q_s)] \quad (a.59)$$

Uma generalização para a forma matricial $\hat{\tau} = M^{-1}Q$, sendo os elementos da matriz $M^{-1} = \{m_{ii'}\}$ iguais a:

$$m_{ii'} = \begin{cases} (k\Delta - uA_1)/[ur(k-1)\Delta], & \text{se } i=i' \\ u(A_2 - A_1)/[ur(k-1)\Delta], & \text{se } i \neq i' \text{ 1}^{\text{os}} \text{ associados} \\ 0, & \text{se } i \neq i' \text{ 2}^{\text{os}} \text{ associados} \end{cases} \quad (a.60)$$

Para o exemplo ilustrativo de (3.1), tem-se:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, i=s=2, v=4, b=4, r=2, k=2, n_1=2, n_2=1 \\ a_{11}=6, a_{12}=0, a_{21}=-3/2, a_{22}=3, A_1=3, A_2=0, \Delta=18$$

$$\hat{\tau}_s = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 18} [(2 \cdot 18 - 3 \cdot 3)Q_s + 3(0 - 3)S_2(Q_s)]$$

$$\hat{\tau}_s = \frac{1}{12} [3Q_s - S_2(Q_s)]$$

3.4.3. Caso especial: Experimentos em blocos incompletos balanceados

As soluções para os efeitos de tratamentos principais (ajustados) podem ser obtidas, nesse caso, a partir de um delineamento PBIB, considerando-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$. Por exemplo, tomando-se um PBIB com duas classes de associados, tem-se que:

$$a_{11} = \frac{u}{k} [r(k-1) + \lambda] = a_{22}; a_{12} = a_{21} = 0;$$

$$A_1 = A_2 = \frac{u}{k} [r(k-1) + \lambda]\lambda; \Delta = \frac{u^2}{k^2} [r(k-1) + \lambda]^2$$

Portanto,

$$\hat{\tau}_s = \frac{1}{ur(k-1)\Delta} [k\Delta - uA_2] = \frac{1}{ur(k-1)} [k - \frac{u}{\Delta} A_2] Q_s =$$

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_s &= \frac{1}{ur(k-1)} \left[k - \frac{\frac{u}{k} [r(k-1) + \lambda] \lambda}{\frac{u^2}{k^2} [r(k-1) + \lambda]^2} \right] Q_s = \\
&= \frac{1}{ur(k-1)} \left[k - \frac{\lambda k}{r(k-1) + \lambda} \right] Q_s = \\
&= \frac{1}{ur(k-1)} \left[\frac{k[r(k-1) + \lambda]}{r(k-1) + \lambda} - \frac{\lambda k}{r(k-1) + \lambda} \right] Q_s = \\
&= \frac{1}{ur(k-1)} \frac{rk(k-1)}{r(k-1) + \lambda} Q_s
\end{aligned}$$

mas, lembrando-se que em BIB, tem-se que $\lambda(v-1)=r(k-1)$, segue-se que:

$$\hat{\tau}_s = \frac{k}{\lambda v u} Q_s \quad (a.61)$$

que é a expressão da solução encontrada por IEMMA (1981).

3.4.4. Experimentos em reticulados quadrados

Segundo PIMENTEL GOMES (1954), considerar os reticulados quadrados como um caso particular dos delineamentos em PBIB, parece ser um procedimento pouco aconselhável, pois a análise desses experimentos é mais complexa do que aquelas dos experimentos em reticulados quadrados; por este modo, acha-se por bem, acrescentar algumas considerações sobre este tópico.

Do SENR de (a.19), tem-se que

$$c_{ii'} = \begin{cases} ur(k-1)/k, & \text{se } i=i' \\ -u/k, & \text{se } i \neq i' \text{ e são } 1^{\text{os}} \text{ associados} \\ 0, & \text{se } i \neq i' \text{ e são } 2^{\text{os}} \text{ associados} \end{cases} \quad (a.62)$$

As equações normais para os dois primeiros tratamentos principais do primeiro bloco ou relativa aos parâmetros t_1 e t_2 , considerando-se o exemplo ilustrativo de (3.1), são:

$$\begin{aligned}
ur(1 - \frac{1}{k})\hat{t}_1 - \frac{u}{k}\hat{t}_2 - \frac{u}{k}\hat{t}_3 - \frac{0}{k}\hat{t}_4 &= Q_1 \\
-\frac{u}{k}\hat{t}_1 + ur(1 - \frac{1}{k})\hat{t}_2 - 0\hat{t}_3 - \frac{u}{k}\hat{t}_4 &= Q_2
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\frac{ur}{k} \hat{t}_i$ ($i=1,2,\dots,k$) às equações anteriores, tem-se

$$ur(1 - \frac{1}{k})\hat{t}_1 - \frac{u}{k}(\hat{t}_1 + \hat{t}_2) - \frac{u}{k}(\hat{t}_1 + \hat{t}_3) + \frac{ur}{k} \hat{t}_1 = Q_1$$

$$ur(1 - \frac{1}{k})\hat{t}_2 - \frac{u}{k}(\hat{t}_1 + \hat{t}_2) - \frac{u}{k}(\hat{t}_2 + \hat{t}_4) + \frac{ur}{k} \hat{t}_2 = Q_2$$

Definindo $S_j(\hat{t}_i)$ como a soma dos efeitos de tratamentos principais que ocorrem juntos com o i -ésimo tratamento principal na j -ésima repetição. Assim fica

$$ur\hat{t}_1 - \frac{u}{k} S_1(\hat{t}_1) - \frac{u}{k} S_2(\hat{t}_1) = Q_1 \quad (a.63)$$

$$ur\hat{t}_2 - \frac{u}{k} S_1(\hat{t}_2) - \frac{u}{k} S_2(\hat{t}_2) = Q_2 \quad (a.64)$$

Somando as equações (a.63) e (a.64) relativas ao primeiro bloco, e considerando que se verifica a igualdade $S_1(\hat{t}_1) = S_1(\hat{t}_2) = kS_1(\hat{t}_1)$ tem-se

$$urS_1(\hat{t}_1) - \frac{u}{k} k S_1(\hat{t}_1) - \frac{u}{k} [S_2(\hat{t}_1) + S_2(\hat{t}_2)] = S_1(Q_1) \quad (a.65)$$

onde $S_j(Q_i)$ é a soma dos Q 's referentes aos tratamentos que ocorrem num mesmo bloco com o i -ésimo tratamento principal na j -ésima repetição. Assim, tem-se

$$S_2(\hat{t}_1) + S_2(\hat{t}_2) = \hat{t}_1 + \hat{t}_3 + \hat{t}_2 + \hat{t}_4 = \sum_{i=1}^v \hat{t}_i = 0 \quad (a.66)$$

portanto,

$$u(r-1)S_1(\hat{t}_1) = S_1(Q_1) \quad (a.67)$$

$$S_j(\hat{t}_i) = S_j(Q_i)/u(r-1) \quad (i=1,\dots,v; j=1,\dots,r) \quad (a.68)$$

Substituindo a expressão (a.68) em (a.63),

tem-se

$$ur\hat{t}_1 - \frac{u}{k} \left[\frac{1}{u(r-1)} S_1(Q_1) + \frac{1}{u(r-1)} S_2(Q_1) \right] = Q_1$$

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{ur} Q_1 + \frac{1}{ukr(r-1)} [S_1(Q_1) + S_2(Q_1)] \quad (a.69)$$

Generalizando, tem-se que os efeitos de tratamentos principais são obtidos por:

$$\hat{t}_i = \frac{1}{ukr(r-1)} \left[k(r-1)Q_i + S_1(Q_i) + S_2(Q_i) + \dots + S_r(Q_i) \right] \quad (a.70)$$

para $i=1,2,\dots,v$ tratamentos principais.

Pode-se obter uma generalização para a solução $\hat{\tau} = M^{-1}Q$, através dos coeficientes dos Q 's. Os elementos $\{m_{ii'}\}$, da matriz M^{-1} , são

$$m_{ii'} = \begin{cases} \frac{1}{ur} + \frac{1}{uk(r-1)}, & \text{se } i=i' \\ \frac{1}{urk(r-1)}, & \text{se } i \neq i' \text{ e são 1}^{\text{os}} \text{ associados} \\ 0, & \text{se } i \neq i' \text{ e são 2}^{\text{os}} \text{ associados} \end{cases} \quad (\text{a.71})$$

Para o exemplo ilustrativo de (3.1), tem-se:

$$m_{ii'} = \begin{cases} \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(2)(1)} = \frac{4}{12}, & \text{se } i=i' \\ \frac{1}{3(2)2(1)} = \frac{1}{12}, & \text{se } i \neq i' \text{ e são primeiros associados} \\ 0, & \text{se } i \neq i' \text{ e são segundos associados} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{t}_s &= \frac{1}{3.2} Q_i + \frac{1}{3.2.2.1} [S_1(Q_s) + S_2(Q_s)] = \\ &= \frac{1}{6} Q_s + \frac{1}{12} [S_1(Q_s) + S_2(Q_s)] \end{aligned}$$

3.5. Matriz de variâncias e covariâncias

Do modelo adotado em (a.1), as pressuposições associadas aos erros entre subparcelas, consideradas independentes, e de uso tradicional nos experimentos planejados em parcelas subdivididas, de (a.4), obteve-se a seguinte matriz de variâncias e covariâncias:

$$E(\varepsilon\varepsilon') = I_{(bk)} \otimes \begin{bmatrix} \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 & \dots & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \dots & \sigma_a^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_a^2 & \sigma_a^2 & \dots & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \end{bmatrix}_u = \Sigma \quad (\text{a.72})$$

Assim, existem $bk = vr$ submatrizes uniformes na posição diagonal, e as demais submatrizes são todas nulas; ou seja, existe uma matriz uniforme para cada uma das vr parcelas. Como a matriz de covariâncias adotada é do tipo uniforme, que pressupõe variâncias e covariâncias constantes, de acordo com GRAYBILL (1976), nesse caso, o método dos

mínimos quadrados (ordinários) pode ser utilizado em lugar dos mínimos quadrados generalizados.

Para experimentos em parcelas subdivididas, os testes de homogeneidade e uniformidade das matrizes de covariâncias, entre os diferentes tratamentos secundários dentro de cada tratamento principal, são requisitos básicos para a adequação do modelo, de acordo com DANFORD et alii (1960), IEMMA (1981) e WILKS (1946).

Face a adequação do modelo proposto aos dados experimentais, e visto que não é raro encontrar correlações entre os erros experimentais, se não são verificadas as hipóteses de homogeneidade e uniformidade, uma alternativa é o uso das técnicas de análise multivariada, de acordo com DANFORD et alii (1960), GILL (1978) e LEAL (1979).

3.5.1. Teste de homogeneidade

A suposição de homogeneidade, de uma matriz de covariâncias para todos os tratamentos principais, pode-se ser verificada utilizando-se do método proposto por Box (1950), como uma extensão do teste multivariado de homogeneidade de variâncias de Bartlett (1957), descrito em DANFORD et alii (1980) e PEARSON (1969).

A hipótese a ser verificada é

$H_0 : \Sigma_1 = \dots = \Sigma_v = \Sigma$ vs $H_a : \Sigma_i \neq \Sigma$ para algum $i=1, \dots, v$
onde Σ_i é a matriz de covariâncias do i -ésimo tratamento primário ou principal.

O critério do teste é

$$M = (r-1)v \ln |S_{u.}| - (r-1) \sum_{i=1}^v \ln |S_{u.i}| \quad (a.73)$$

onde:

(i) $S_{u.}$ é, sob hipótese de nulidade, uma estimativa não viesada da matriz de covariância Σ , associada com $v(r-1)$ graus de liberdade, composta por:

$$S_{u.}^2 = \frac{1}{v(r-1)} \sum_{i=1}^v \left[\sum_{j=1}^r y_{ijl} y_{ijl'} - \frac{y_{i.l} y_{i.l'}}{r} \right] \quad (a.74)$$

correspondente a estimativa da matriz de covariâncias entre

os 1 e 1'-ésimos tratamentos secundários; e
(ii) $S_{u,i}$ é a estimativa não viesada de Σ_i , associada com $r-1$ graus de liberdade, sendo composta por:

$$S_{u,i}^2 = \frac{1}{(r-1)} \left[\sum_{j=1}^r y_{ijl} y_{ijl'} - \frac{y_{i,1} y_{i,l'}}{r} \right] \quad (a.75)$$

correspondente a estimativa das matrizes de covariâncias entre os 1 e 1'-ésimos tratamentos secundários para um dado i-ésimo tratamento primário.

Assim, $(1 - A_1)M$, com

$A_1 = (2u^2 + 3u + 1)(v + 1) / [6v(u + 1)(r - 1)]$, tem distribuição aproximada de χ^2 com $f_1 = (v - 1)u(u + 1)/2$ graus de liberdade.

Portanto, rejeita-se a hipótese de homogeneidade de variâncias e covariâncias se $(1 - A_1)M \geq \chi_{(\alpha, f_1)}^2$.

3.5.2. Teste de uniformidade

A suposição de uniformidade de uma matriz de covariâncias pode ser verificada através do critério da razão de verossimilhança de Neyman-Pearson, modificado por Box (1949).

A hipótese a ser testada é

$$H_0 : \Sigma = \Sigma^* \text{ vs } H_a : \Sigma \neq \Sigma^*$$

onde Σ^* é uma matriz do tipo uniforme, ou seja

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & \dots & \sigma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_2 & \sigma_2 & \dots & \sigma_1 \end{bmatrix}$$

onde: $\sigma_1 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$ e $\sigma_2 = \sigma_a^2$.

O critério do teste é

$$N = -(vr - v) \ln [\det(S) / \det(\bar{S})] \quad (a.76)$$

onde: $S = \{ s_{u,i}^2 \}$

$\bar{S} = U$ é uma matriz uniforme composta por:

$u_{u,i}$ é a média das variâncias de $s_{u,i}^2$ ($i=1'$);

$u_{u,i}$ é a média das covariâncias de $s_{u,i}^2$ ($i \neq 1'$).

Assim, $(1 - A_1)N$, com

$A_1 = u(u + 1)^2(2u - 3) / [6(vr - v)(u - 1)(u^2 + u - 4)]$, tem distribuição

aproximada de χ^2 com $f_1 = (u^2 + u - 4)/2$ graus de liberdade.

Portanto, rejeita-se a hipótese de uniformidade se $(1 - A_1)N \geq \chi^2_{(\alpha, f_1)}$.

3.6. Propriedades das soluções

3.6.1. Esperança matemática de $\hat{\tau}$

Considerando-se o modelo dado em (a.1), e usando o mesmo procedimento de PIMENTEL GOMES (1968), tem-se que:

$$\hat{\tau} = M^{-1}Q = M^{-1}WX'y, \quad (a.77)$$

onde, $Q = WX'y$ e W é uma matriz de dimensão $(v \times n)$, tal que

$$W = [\sqrt{v}\phi_1 \mid \sqrt{v}(-NK^{-1})_b \mid I_v \mid \sqrt{v}\phi_u \mid \sqrt{v}\phi_{vu}] \quad (a.78)$$

então,

$$E(\hat{\tau}) = E(M^{-1}Q) = M^{-1}WX'E(y) = M^{-1}WX'X\theta \quad (a.79)$$

Mas,

$$WX'X\theta = [-NK^{-1}X'_2 + X'_9][X_1\mu + X_2\beta + X_3\tau + X_4\tau^* + X_5\delta]$$

fazendo-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (a.8), tem-se

$$WX'X\theta = (R - NK^{-1}N')\tau = C\tau$$

Assim, voltando-se em (a.79), obtém-se que

$$E(\hat{\tau}) = M^{-1}C\tau \quad (a.80)$$

mas, de PIMENTEL GOMES (1968) e OLIVEIRA (1985), tem-se que se $C = M + A$, onde A é uma matriz de restrições, tal que $A\tau = 0$, então

$$E(\hat{\tau}) = M^{-1}(M + A)\tau = \tau + M^{-1}A\tau$$

Logo,

$$E(\hat{\tau}) = \tau \quad (a.81)$$

ou seja, $\hat{\tau}$ é um estimador não viesado de τ .

3.6.2. Matriz de dispersão para os tratamentos principais

A matriz de dispersão para os tratamentos principais, foi obtida considerando-se por definição que:

$$D(\hat{\tau}) = E\{[\hat{\tau} - E(\hat{\tau})][\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]'\} \quad (a.82)$$

Mas, de (a.77) e (a.80), tem-se que

$$\hat{\tau} - E(\hat{\tau}) = M^{-1}WX'(X\theta + \varepsilon) - M^{-1}C\tau = M^{-1}WX'\varepsilon$$

Desse modo, tem-se

$$\begin{aligned} D(\hat{\tau}) &= E\{[M^{-1}WX'\varepsilon][M^{-1}WX'\varepsilon]'\} = M^{-1}WX'E(\varepsilon\varepsilon')XW'M^{-1} \\ &= M^{-1}WX'\Sigma XW'M^{-1} \end{aligned} \quad (a.83)$$

Efetuada-se o produto $WX'\Sigma$, obteve-se

$$WX'\Sigma = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)WX'$$

então, (a.83), resulta em

$$D(\hat{\tau}) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) M^{-1}WX'XW'M^{-1} \quad (a.84)$$

Mas,

$$WX'XW' = (X'_9 - NK^{-1}X'_2)(X_9 - X_2K^{-1}N')$$

fazendo-se as multiplicações e simplificando, obtem-se

$$WX'XW' = X'_9X_9 - X'_9X_2K^{-1}N' = R - NK^{-1}N' = C$$

Desse modo,

$$D(\hat{\tau}) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) M^{-1}CM^{-1} \quad (a.85)$$

resultado semelhante ao obtido por IEMMA (1981), para a matriz de dispersão dos tratamentos principais em experimentos em blocos incompletos balanceados (BIB).

3.6.3. Esperança matemática de $\hat{\tau}^*$

De (a.43), tem-se que

$$\begin{aligned} \tau^* &= U^{-1}T^* - U^{-1}U_1\mu = U^{-1}T^* - U^{-1}vr \sum_{u=1}^u E_1 \frac{1}{vru} X'_1y \\ &= U^{-1}X'_4y - \sum_{u=1}^u E_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1y \\ &= [U^{-1}X'_4 - \sum_{u=1}^u E_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1]y = P_S y \\ E(\hat{\tau}^*) &= E[P_S(X\theta + \varepsilon)] = P_S X\theta \end{aligned} \quad (a.86)$$

Mas,

$$P_S X\theta = [U^{-1}X'_4 - \sum_{u=1}^u E_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1](X_1\mu + X_2\beta + X_3\tau + X_4\tau^* + X_5\delta)$$

Fazendo-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (a.8), tem-se:

$$P_S X\theta = U^{-1}X'_4X_4\tau^* = \tau^*$$

logo,

$$E(\hat{\tau}^*) = \tau^* \quad (a.87)$$

ou seja, $\hat{\tau}^*$ é um estimador não viesado de τ^* .

3.6.4. Matriz de dispersão para os tratamentos secundários

Aplicando-se a definição de matriz de dispersão, tem-se que

$$D(\hat{\tau}^*) = E\{[\hat{\tau}^* - E(\hat{\tau}^*)][\hat{\tau}^* - E(\hat{\tau}^*)]'\} \quad (\text{a.88})$$

De (a.86), tem-se

$$\hat{\tau}^* - E(\hat{\tau}) = P_S \varepsilon \quad (\text{a.89})$$

assim, (a.88) fica

$$D(\hat{\tau}^*) = E\{[P_S \varepsilon][P_S \varepsilon]'\} = P_S E(\varepsilon \varepsilon') P_S' = P_S \Sigma P_S' \quad (\text{a.90})$$

onde,

$$P_S = \mathbf{1}_{bk} \otimes \frac{1}{vur} \begin{bmatrix} u-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & u-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & u-1 \end{bmatrix}_u$$

Verifica-se que $P_S \Sigma = \sigma_b^2 P_S$, e portanto,
 $D(\hat{\tau}^*) = \sigma_b^2 P_S P_S'$, mas

$$\begin{aligned} P_S P_S' &= [U^{-1} X_4' - {}_u E_1(X_1' X_1)^{-1} X_1'] [U^{-1} X_4' - {}_u E_1(X_1' X_1)^{-1} X_1']' \\ &= U^{-1} X_4' X_4 U^{-1} - 2U^{-1} X_4' X_1 (X_1' X_1)^{-1} {}_u E_u + {}_u E_1(X_1' X_1)^{-1} {}_u E_u \end{aligned}$$

simplificando, obtém-se

$$P_S P_S' = \frac{1}{vr} I_{(u)} - \frac{1}{vru} E_{(u)}$$

Desse modo,

$$D(\hat{\tau}^*) = \frac{1}{vru} \begin{bmatrix} u-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & u-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & u-1 \end{bmatrix}_u \sigma_b^2 \quad (\text{a.91})$$

3.6.5. Esperança matemática da interação $\hat{\delta}$

De (a.46), tem-se que

$$\hat{\delta} = L^{-1} D - L^{-1} S' R^{-1} T - L^{-1} H (U^{-1} T^* + L^{-1} r_{vu} E_1 G/n$$

$$= [L^{-1}X_5' - L^{-1}S'R^{-1}X_3' - L^{-1}H'U^{-1}X_4' + {}_{vu}E_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']y$$

$$= P_I y$$

aplicando-se a esperança matemática, fica

$$E(\hat{\delta}) = E(P_I y) = P_I E(y) = P_I E(X\theta + \varepsilon) = P_I X\theta \quad (a.92)$$

Mas,

$$P_I X\theta = L^{-1}X_5'(X_1\mu + X_2\beta + X_3\tau + X_4\tau^* + X_5\delta) -$$

$$- L^{-1}S'R^{-1}X_3'(X_1\mu + X_2\beta + X_3\tau + X_4\tau + X_5\delta) -$$

$$- L^{-1}H'U^{-1}X_4'(X_1\mu + X_2\beta + X_3\tau + X_4\tau + X_5\delta) +$$

$$+ {}_{vu}E_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'(X_1\mu + X_2\beta + X_3\tau + X_4\tau + X_5\delta)$$

Fazendo-se as multiplicações, e aplicando-se as restrições de (a.8) e, usando algumas igualdades entre as matrizes de modo conveniente, verifica-se que:

$$P_I X\theta = \delta$$

Então, obtém-se que

$$E(\hat{\delta}) = \delta \quad (a.93)$$

ou seja, $\hat{\delta}$ é um estimador não viesado de δ .

3.6.6. Matriz de dispersão para a interação

Da definição de matriz de dispersão, tem-se

$$D(\hat{\delta}) = E\{[\hat{\delta} - E(\hat{\delta})][\hat{\delta} - E(\hat{\delta})]'\} \quad (a.94)$$

De (a.92), tem-se que $\hat{\delta} - E(\hat{\delta}) = P_I \varepsilon$, logo

$$D(\hat{\delta}) = E[P_I \varepsilon \varepsilon' P_I'] = P_I E(\varepsilon \varepsilon') P_I' = P_I \Sigma P_I' \quad (a.95)$$

Com a finalidade de se avaliar o produto $P_I \Sigma P_I'$, inicialmente, estudou-se a matriz P_I através de suas componentes, considerando o exemplo inicial de (3.1). Como em IEMMA (1981), as generalizações em termos de número de tratamentos principais e secundários, foram apenas parciais, pois ficaram restritas ao esquema de PBIB, adotado no exemplo, isto é, a outros esquemas correspondem outras constituições matriciais. No entanto, o resultado final não se altera.

Desse modo, estudando as matrizes que compõem

P_I tem-se:

$${}_{vu}E_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' = \frac{1}{bku} {}_{vu}E_1 X_1' = \frac{1}{bku} {}_{vu}E_{bku} = \frac{1}{vur} {}_{vu}E_{bku}$$

$$L^{-1}S'R^{-1}X_3' = \frac{1}{ru} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r=1 & r=2 \\ v=1 & v=2 & v=3 & v=4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} E & \phi & \phi & \phi & E & \phi & \phi & \phi \\ \phi & E & \phi & \phi & \phi & \phi & E & \phi \\ \phi & \phi & E & \phi & \phi & E & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & E & \phi & \phi & \phi & E \end{array} \right]_{vru} \end{array}$$

onde: $E = {}_uE_u$ é uma matriz de uns, de dimensões $(u) \times (u)$;

$\phi = {}_u\phi_u$ é uma matriz de zeros, de dimensões $(u) \times (u)$;

$$L^{-1}H'U^{-1}X_4' = \frac{1}{vr} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r=1 & r=2 \\ v=1 & v=2 & v=3 & v=4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} I & I & I & I & I & I & I & I \\ I & I & I & I & I & I & I & I \\ I & I & I & I & I & I & I & I \\ I & I & I & I & I & I & I & I \end{array} \right]_{vru} \end{array}$$

ou simplesmente,

$$L^{-1}H'U^{-1}X_4' = \frac{1}{vr} {}_{vu}E_{bku} \otimes I_u$$

onde, $I = I_u$ é uma matriz identidade, de dimensões $(u) \times (u)$.

$$L^{-1}X_5' = \frac{1}{r} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r=1 & r=2 \\ v=1 & v=2 & v=3 & v=4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} I & \phi & \phi & \phi & I & \phi & \phi & \phi \\ \phi & I & \phi & \phi & \phi & \phi & I & \phi \\ \phi & \phi & I & \phi & \phi & I & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & I & \phi & \phi & \phi & I \end{array} \right]_{vru} \end{array}$$

Desse modo, pode-se formar as seguintes submatrizes, de dimensão $(u \times u)$:

$$\Pi_1 = \frac{1}{r} I_u - \frac{1}{ur} {}_uE_u - \frac{1}{vr} I_u + \frac{1}{vur} {}_uE_u$$

$$\Pi_1 = \frac{v-1}{vur} \begin{bmatrix} u-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & u-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & u-1 \end{bmatrix}_u$$

$$\Pi_2 = \phi_u - \frac{1}{ur} \phi_u - \frac{1}{vr} I_u + \frac{1}{vur} E_u$$

$$\Pi_2 = \frac{-1}{vur} \begin{bmatrix} u-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & u-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & u-1 \end{bmatrix}_u$$

Assim, a matriz P_I ficou constituída do seguinte modo:

$$P_I = \begin{matrix} & \begin{matrix} r=1 & & & r=2 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} v=1 & v=2 & v=3 & v=4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_u \\ \vdots \\ v_u \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_2 \\ \Pi_2 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_2 \\ \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_2 & \Pi_1 \end{array} \right]_{vru} \end{matrix}$$

Mas, verifica-se que

$$P_I \Sigma = \sigma_b^2 P_I$$

então, (a.95) fica

$$D(\hat{\delta}) = \sigma_b^2 P_I P_I' \quad (a.96)$$

onde, $P_I P_I'$ é constituída pelas seguintes submatrizes:

(i) na diagonal principal:

$$\Pi_1 \Pi_1' + 3\Pi_2 \Pi_2' + \Pi_1 \Pi_1' + 3\Pi_2 \Pi_2' = 2\Pi_1 \Pi_1' + 2 \times 3\Pi_2 \Pi_2'$$

generalizando-se, tem-se

$$r\Pi_1 \Pi_1' + r(v-1)\Pi_2 \Pi_2' = \frac{(v-1)}{vur} \begin{bmatrix} u-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & u-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & u-1 \end{bmatrix}_u$$

(ii) submatriz fora da diagonal:

$$\Pi_1 \Pi'_2 + \Pi_2 \Pi'_1 + \Pi_2 \Pi'_2 + \Pi_2 \Pi'_2 + \Pi_1 \Pi'_2 + \Pi_2 \Pi'_2 + \Pi_2 \Pi'_1 + \Pi_2 \Pi'_2$$

mas, como $\Pi_1 \Pi'_2 = \Pi_2 \Pi'_1$, tem-se que

$$2\Pi_1 \Pi'_2 + 2\Pi_2 \Pi'_2 + 2\Pi_1 \Pi'_2 + 2\Pi_2 \Pi'_2 = 2r\Pi_1 \Pi'_2 + 2r\Pi_2 \Pi'_2$$

generalizando-se, tem-se

$$2r\Pi_1 \Pi'_2 + r(v-2)\Pi_2 \Pi'_2 = \frac{1}{vur} \begin{bmatrix} -(u-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(u-1) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -(u-1) \end{bmatrix}_u$$

3.7. Análise da variância

3.7.1. Somas de quadrados

De acordo com o modelo linear $y = X\theta + \varepsilon$, sabe-se que a soma de quadrados do resíduo é dada por

$$SQRes = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = y'y - \hat{\theta}'X'y \quad (b.1)$$

onde: $y'y$ é definida como a soma de quadrados total, representada por $SQTot$; e

$\hat{\theta}'X'y$ é definida como a soma de quadrados de parâmetros ou a redução devida aos parâmetros, representada por SQP , é dada por:

$$SQP = \hat{\theta}'X'y = [\hat{\mu}' \mid \hat{\beta}' \mid \hat{\tau}' \mid \hat{\tau}^{*'} \mid \hat{\delta}'] \begin{bmatrix} G \\ \dots \\ B \\ \dots \\ T \\ \dots \\ T^* \\ \dots \\ D \end{bmatrix} =$$

$$SQP = \hat{\mu}'G + \hat{\beta}'B + \hat{\tau}'T + \hat{\tau}^{*'}T^* + \hat{\delta}'D. \quad (b.2)$$

$$\text{Mas, de (a.10)} \quad \hat{\beta} = K^{-1}B - K^{-1}N'\hat{\tau} - {}_bE_1 \hat{\mu},$$

então

$$\begin{aligned} SQP &= \hat{\mu}'G + \hat{\tau}'T + (K^{-1}B - K^{-1}N'\hat{\tau} - {}_bE_1 \hat{\mu})'B + \hat{\tau}^{*'}T^* + \hat{\delta}'D \\ &= \hat{\mu}'G + \hat{\tau}'T + B'K^{-1}B - \hat{\tau}'NK^{-1}B - \hat{\mu}'{}_bE_1 B + \hat{\tau}^{*'}T^* + \hat{\delta}'D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQP &= \hat{\mu}G + \hat{\tau}'(T - NK^{-1}B) + B'K^{-1}B - \hat{\mu}'_1 E_b B + \hat{\tau}^*{}' T^* + \hat{\delta}'D \\
 &= \hat{\mu}G + \hat{\tau}'Q + (B'K^{-1}B - \hat{\mu}G) + \hat{\tau}^*{}' T^* + \hat{\delta}'D \quad (b.3)
 \end{aligned}$$

Mas, ainda, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}^*{}' T^* &= (U^{-1}T^* - {}_u E_1 \mu)' T^* = T^*{}' U^{-1} T^* - \mu'_1 E_u T^* = \\
 &= T^*{}' U^{-1} T^* - \mu G
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}'D &= (L^{-1}D - L^{-1}S'R^{-1}T - L^{-1}H'U^{-1}T^* + {}_{vu} E_1 \mu)' D = \\
 &= D'L^{-1}D - T'R^{-1}SL^{-1}D - T^*{}' U^{-1}HL^{-1}D + \mu'_1 E_{vu} D
 \end{aligned}$$

onde,

$$T'R^{-1}SL^{-1}D = \frac{1}{ru} [\bar{T}_1 \dots \bar{T}_1 | \bar{T}_2 \dots \bar{T}_2 | \dots | \bar{T}_v \dots \bar{T}_v]$$

$$\begin{bmatrix}
 TT_{11} \\
 \dots \\
 TT_{1u} \\
 \dots \\
 TT_{21} \\
 \dots \\
 TT_{2u} \\
 \dots \\
 TT_{v1} \\
 \dots \\
 TT_{vu}
 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ru} (T_1^2 + \dots + T_v^2)$$

$$T^*{}' U^{-1}HL^{-1}D = \frac{1}{vr} [T_1^* \dots T_u^* | T_1^* \dots T_u^* | \dots | T_1^* \dots T_u^*]$$

$$\begin{bmatrix}
 TT_{11} \\
 \dots \\
 TT_{1u} \\
 \dots \\
 TT_{21} \\
 \dots \\
 TT_{2u} \\
 \dots \\
 TT_{v1} \\
 \dots \\
 TT_{vu}
 \end{bmatrix}$$

$$T^*{}' U^{-1}HL^{-1}D = \frac{1}{vr} (T_1^{*2} + \dots + T_u^{*2})$$

Mas, como $SL^{-1}D = T$, $HL^{-1}D = T^*$ e ${}_1 E_{vu} D = G$,

então,

$$\hat{\delta}'D = D'L^{-1}D - T'R^{-1}T - T^*{}' U^{-1}T^* + \hat{\mu}G$$

$$\hat{\delta}'D = (D'L^{-1}D - \hat{\mu}G) - (T'R^{-1}T - \hat{\mu}G) - (T^*U^{-1}T^* - \hat{\mu}G)$$

Desse modo, (b.3) resultou em

$$\begin{aligned} \text{SOP} = & \hat{\mu}G + \hat{\tau}'Q + (B'K^{-1}B - \hat{\mu}G) + T^*U^{-1}T^* - \hat{\mu}G + \\ & + (D'L^{-1}D - \hat{\mu}G) - (T'R^{-1}T - \hat{\mu}G) - (T^*U^{-1}T^* - \hat{\mu}G) \end{aligned} \quad (\text{b.4})$$

Onde:

$\hat{\mu}G$ = SQC é a soma de quadrados da correção;

$\hat{\tau}'Q$ = SQT(aj) é a soma de quadrados de tratamentos principais ajustada para blocos;

$B'K^{-1}B - \hat{\mu}G$ = SQB é a soma de quadrados de blocos, obtida de maneira usual;

$\hat{\tau}^*T^* = T^*U^{-1}T^* - \hat{\mu}G$ = SQT* é a soma de quadrados de tratamentos secundários, obtida de maneira usual;

$\hat{\tau}'T = T'R^{-1}T - \hat{\mu}G$ = SQT é a soma de quadrados de tratamentos principais, obtida de maneira usual, sem o ajuste para blocos;

$D'L^{-1}D - \hat{\mu}G - \hat{\tau}'T - \hat{\tau}^*T^* = \text{SQI}$ é a soma de quadrados da interação tratamentos principais x tratamentos secundários, obtida de maneira usual.

3.7.2. Soma de quadrados de resíduo

De acordo com o modelo adotado em (a.1), a soma de quadrados de resíduo pode ser particionada, de maneira conveniente, em

$$\text{SQRes} = \text{SQR}(a) + \text{SQR}(b) \quad (\text{b.5})$$

Reportando-se a (a.1), tem-se que o modelo de parcelas subdivididas pressupõe que o erro aleatório de cada observação (ε_{ijl}), pode ser decomposto em duas fontes independentes de erros: η_{ij} e e_{ijl} , onde e_{ijl} é o termo do erro a nível de subparcelas e η_{ij} é o termo do erro específico da medida efetuada no tratamento i no bloco j , ou simplesmente, é o erro a nível de parcelas. De acordo com CHACKRABARTI (1962), tem-se

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \mu - b_j - t_i - t_k^* - \delta_{ik} - \eta_{ij}$$

sendo que η_{ij} agora se comporta como um parâmetro a mais do

modelo, e para obter soluções de mínimos quadrados, deve-se tornar mínima a seguinte soma de quadrados de erros

$$\sum_{ijl} e_{ijl}^2 = \sum_{ijl} (y_{ijl} - \mu - b_j - t_i - t_l^* - \delta_{il} - \eta_{ij})^2$$

Minimizando a soma de quadrados acima, as soluções de η_{ij} podem ser obtidos através da seguinte expressão, na forma matricial,

$$X'_\sigma X_1 \hat{\mu} + X'_\sigma X_2 \hat{\beta} + X'_\sigma X_3 \hat{\tau} + X'_\sigma X_\sigma \hat{\eta} = X'_\sigma y$$

onde $X_\sigma = I_{(vr)} \otimes U_1$ é uma matriz dos coeficientes associados aos η_{ij} , de dimensões $(vru) \times (vr)$.

Assim, uma solução para η é

$$\hat{\eta} = X_\sigma^+ y - X_\sigma^+ P_2 y - X_\sigma^+ (I - P_2) X_3 \hat{\tau} \quad (b.6)$$

$$= X_\sigma^+ (I - P_2) y - X_\sigma^+ (I - P_2) X_3 \hat{\tau} = X_\sigma^+ (I - P_2) (y - X_3 \hat{\tau})$$

sendo $P_2 = X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2'$.

Desse modo, a soma de quadrados relativa a η , representada por $SQR(a)$, é

$$\begin{aligned} SQR(a) &= \hat{\eta}' X_\sigma' y = y' P_\sigma y - y' P_2 y - \hat{\tau}' Q \\ &= (y' P_\sigma y - y' P_1 y) - (y' P_2 y - y' P_1 y) - \hat{\tau}' Q \\ &= SQPar - SQB - SQT(a_j) \end{aligned} \quad (b.7)$$

onde:

$$P_1 = X_1 X_1^+ = X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1', \quad P_\sigma = X_\sigma X_\sigma^+ = X_\sigma (X_\sigma' X_\sigma)^{-1} X_\sigma';$$

$SQPar = y' (P_\sigma - P_1) y = \frac{1}{u} \sum_{i,j} y_{ij}^2$ - SQC é a soma de quadrados de parcelas;

$SQB = (y' P_2 y - y' P_1 y)$ é a soma de quadrados de blocos;

$SQT(a_j) = \hat{\tau}' Q$ é a soma de quadrados de tratamentos principais ajustada.

$$\text{Sendo } SQRes = y'y - \hat{\theta}' X'y = SQR(a) + SQR(b)$$

então, de (b.5) e de (b.7), tem-se

$$\begin{aligned} SQR(b) &= y'y - SQC - SQPar - SQT^* - SQI \\ &= y'y - SQC - SQB - SQT(a_j) - SQT^* - SQI \\ &= y'(I - P_\sigma - P_5 + P_3) y \end{aligned} \quad (b.8)$$

Outro procedimento para a decomposição ou partição da soma de quadrados total ($SQtot$), pode ser visto em

ITEMMA (1981) e VIZONI (1984).

3.7.3. Esperança matemática das somas de quadrados

Para a determinação das esperanças matemáticas das formas quadráticas, que fornecem as somas de quadrados, usou-se o seguinte teorema auxiliar, enunciado em SEARLE (1971):

TEOREMA - Quando $y \in N(X\theta, \Sigma)$, então

$$E(y'Py) = \text{tr}(P\Sigma) + \theta'X'PX\theta. \quad (\text{b.9})$$

sendo: P o núcleo da forma quadrática;

tr indica o operador traço de uma matriz;

$\Sigma = \text{Var}(y)$ é a matriz de covariâncias, de (a.72).

3.7.3.1. Esperança matemática de SQC

Sabe-se que, $\hat{\mu} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y$ e $G = X_1'y$, então

$$\text{SQC} = \hat{\mu}'G = y'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1y = y'P_1y, \quad (\text{b.10})$$

sendo $P_1 = \frac{1}{vru} E_{vru}$, cujo E é uma matriz de uns.

Aplicando (b.9) em (b.10), tem-se

$$E(\text{SQC}) = E(y'P_1y) = \text{tr}(P_1V) + \theta'X'P_1X\theta$$

$$\text{Mas, } P_1\Sigma = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)P_1$$

como P_1 é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que

$$\text{tr}(P_1\Sigma) = r(P_1\Sigma) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) r(P_1)$$

mas, $r(P_1) = 1$, logo

$$\text{tr}(P_1\Sigma) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)$$

$$\theta'X'P_1X\theta = \theta'X'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X\theta,$$

mas,

$$X_1'X\theta = X_1'X_1\mu + X_1'X_2\beta + X_1'X_3\tau + X_1'X_4\tau + X_1'X_5\delta$$

$$= n\mu + ru \frac{1}{v} E_v \tau + ku \frac{1}{b} E_b \beta + vr \frac{1}{u} E_u \tau + r \frac{1}{vu} E_{vu} \delta$$

aplicando-se as restrições impostas em (a.8), resulta-se em

$$X_1'X\theta = n\mu$$

logo,

$$\theta'X'P_1X\theta = \mu' n (X_1'X_1)^{-1} n \mu = \mu' n \mu = n\mu^2$$

Portanto,

$$E(SQC) = E(\hat{\mu}G) = n\mu^2 + (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (b.11)$$

3.7.3.2. Esperança matemática de SQT(aj)

Sabe-se de (3.7.1), que

$$SQT(aj) = \hat{\tau}'Q = Q'M^{-1}Q = Q'\Omega Q = Q'C^{-1}Q \quad (b.12)$$

Seja de (a.80), a matriz

$W = [\begin{matrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_v \end{matrix} | -NK^{-1} | \begin{matrix} I_v \\ \vdots \\ I_v \end{matrix} | \begin{matrix} \phi_u \\ \vdots \\ \phi_u \end{matrix} | \begin{matrix} \phi_{vu} \\ \vdots \\ \phi_{vu} \end{matrix}]$ de dimensões $v \times vru$.
Então,

$$WX'y = [\begin{matrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_v \end{matrix} | -NK^{-1} | \begin{matrix} I_v \\ \vdots \\ I_v \end{matrix} | \begin{matrix} \phi_u \\ \vdots \\ \phi_u \end{matrix} | \begin{matrix} \phi_{vu} \\ \vdots \\ \phi_{vu} \end{matrix}] \begin{bmatrix} G \\ B \\ T \\ T^* \\ D \end{bmatrix} = T - NK^{-1}B = Q$$

Substituindo-se em (b.12), tem-se

$$SQT(aj) = y'XW'C^{-1}WX'y = y'P_T y \quad (b.13)$$

Utilizando o teorema de (b.9), tem-se

$$E[SQT(aj)] = E(y'P_T y) = \text{tr}[P_T \Sigma] + \theta'X'P_T X\theta \quad (b.14)$$

$$\text{Mas, } WX'\Sigma = (X_2 - NK^{-1}X_3')\Sigma = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)WX'$$

logo,

$\text{tr}(P_T \Sigma) = \text{tr}(XW'\Omega WX')(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)$. Se as dimensões são favoráveis, então $\text{tr}(XW'\Omega WX') = \text{tr}(\Omega WX'XW')$. Mas,

$$WX'XW' = (X_2 - NK^{-1}X_3')(X_2 - NK^{-1}X_3')' =$$

$$= X_2'X_2 - X_2'X_3K^{-1}N' - NK^{-1}X_3'X_2 + NK^{-1}X_3'X_3K^{-1}N'$$

$$= R - NK^{-1}N' = C \quad (b.15)$$

então, $\text{tr}(XW'\Omega WX') = \text{tr}(\Omega C)$. Como Ω é uma matriz inversa generalizada (condicional) de C , então verifica-se a propriedade $C\Omega C = C$, e ΩC é idempotente. Assim,

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_T \Sigma) &= (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)r(\Omega C) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)r(C) \\ &= (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)(v-1) \end{aligned}$$

Tem-se também, que

$$\theta'X'P_T X\theta = \theta'X'XW'\Omega WX'X\theta = \tau'C\Omega C\tau = \tau'C\tau$$

portanto,

$$E(SQT(aj)) = \tau' C \tau + (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)(v-1)\sigma^2 \quad (b.16)$$

Do posto de C , obtem-se o número de graus de liberdade para tratamentos principais; ou usando a seguinte definição, dada por IEMMA (1987):

DEFINIÇÃO - Define-se o número de graus de liberdade de uma soma de quadrados, como o posto da matriz da forma quadrática correspondente.

3.7.3.3. Esperança matemática de SQB

Do item (3.7.1), tem-se que $SQB = B'K^{-1}B - \hat{\mu}'G$.

Sendo,

$$B'K^{-1}B = y'X_2K^{-1}X_2'y = y'P_2y \quad (b.17)$$

então, aplicando-se o teorema de (b.9), tem-se

$$E(B'K^{-1}B) = E(y'P_2y) = \text{tr}(P_2\Sigma) + \theta'X'P_2X\theta$$

mas, $P_2\Sigma = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)P_2$, então

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_2\Sigma) &= \text{tr}(X_2K^{-1}X_2'\Sigma) = \text{tr}(X_2K^{-1}X_2')(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \\ &= \text{tr}(K^{-1}X_2'X_2)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) = \text{tr}(I_b)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \\ &= b(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \end{aligned}$$

$$\theta'X'P_2X\theta = \theta'X'X_2K^{-1}X_2'X\theta, \text{ mas}$$

$$X_2'X\theta = ku_bE_1\mu + N'\tau + K\beta + A\tau^* + V\theta = ku_bE_1\mu + N'\tau + K\beta,$$

impondo-se as restrições definidas em (a.8), tem-se

$$\theta'X'P_2X\theta = (ku_bE_1\mu + N'\tau + K\beta)'K^{-1}(ku_bE_1\mu + N'\tau + K\beta)$$

Efetuando-se as multiplicações e aplicando as restrições de (a.8), obteve-se

$$\begin{aligned} \theta'X'P_2X\theta &= n\mu^2 + 2\beta'N'\tau + \beta'K\beta + \tau'NK^{-1}N'\tau \\ &= n\mu^2 + 2\beta'N'\tau + \beta'K\beta + \tau'R\tau - \tau'C\tau \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} E(B'K^{-1}B) &= n\mu^2 + 2\beta'N'\tau + \beta'K\beta + \tau'R\tau - \tau'C\tau + \\ &\quad + b(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \end{aligned} \quad (b.18)$$

$$\text{Logo, } E(SQB) = E(B'K^{-1}B) - E(\hat{\mu}'G).$$

Assim, de (b.11) e de (b.18), tem-se que

$$E(SQB) = 2\beta'N'\tau + \beta'K\beta + \tau'R\tau - \tau'C\tau + (b-1)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (b.19)$$

3.7.3.4. Esperança matemática de SQT^*

Do item (3.7.1), tem-se que $SQT^* = \tau^{*'}T^*$.

Sendo,

$$\tau^* = U^{-1}T - U^{-1}X_4'X_1\mu = U^{-1}X_4'y - U^{-1}X_4'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y \quad (b.20)$$

então,

$$\tau^{*'}T^* = y'[X_4'U^{-1}X_4 - X_1'(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_4'U^{-1}X_4]y = y'[P_4 - P_1P_4]y,$$

$$\text{onde, } P_4 = \frac{1}{vr} [{}_{vr}E_{vr} \otimes I_u],$$

Facilmente, verifica-se que $P_1P_4 = P_1$, então,

$$SQT^* = y'(P_4 - P_1)y = \tau^{*'}T^* = y'P_S y \quad (b.21)$$

sendo

$$P_S = P_4 - P_1 = \frac{1}{vr} [{}_{vr}E_{vr} \otimes \frac{1}{u} \begin{bmatrix} u-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & u-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & u-1 \end{bmatrix}_u]$$

$$E(y'P_S y) = \text{tr}(P_S \Sigma) + \theta'X'P_S X\theta \quad (b.22)$$

Mas, verifica-se que $P_S \Sigma = \sigma_b^2 P_S$

então,

$$\text{tr}(P_S \Sigma) = \text{tr}(P_S) \sigma_b^2$$

Mas, sendo P_S uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que

$$\text{tr}(P_S \Sigma) = \sigma_b^2 r(P_S) = \sigma_b^2 (u-1)$$

$$\theta'X'P_S X\theta = \theta'X'[X_4'U^{-1}X_4 - X_1'(X_1'X_1)^{-1}X_1']X\theta$$

$$\text{mas, } X_4'X\theta = X_4'X_1\mu + X_4'X_2\tau + X_4'X_3\beta + X_4'X_4\tau^* + X_4'X_5\delta$$

Impondo-se as restrições de (a.8) tem-se que

$$X_4'X\theta = X_4'X_1\mu + X_4'X_4\tau^*$$

então,

$$\theta'X'P_S X\theta = (X_4'X_1\mu + X_4'X_4\tau^*)'U^{-1}(X_4'X_1\mu + X_4'X_4\tau^*)$$

fazendo as multiplicações e aplicando restrições de (a.8),
obtem-se

$$\theta'X'P_4X\theta = n\mu^2 + \tau^{*'}U\tau^* \quad (b.23)$$

Portanto, de (b.22) e (b.11), tem-se que

$$E(SQT^*) = n\mu^2 + \tau^{*'}U\tau^* + \sigma_b^2(u-1) - n\mu^2 \text{ ou}$$

$$E(SQT^*) = \tau^{*'}U\tau^* + (u-1)\sigma_b^2 \quad (b.24)$$

3.7.3.5. Esperança matemática de SQI

Do item (3.7.1), tem-se que

$$\begin{aligned} SQI &= \hat{\delta}'D = D'L^{-1}D - T'R^{-1}T - T^{*'}U^{-1}T + G^2/n \\ &= y'X_5L^{-1}X_5'y - y'X_9R^{-1}X_9'y - y'X_4U^{-1}X_4'y + y'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y \\ &= y'P_5y - y'P_9y - y'P_4y + y'P_1y \end{aligned} \quad (b.25)$$

Desenvolvendo por partes, de (b.9), vem que

$$E[y'P_5y] = \text{tr}(P_5\Sigma) + \theta'X'P_5X\theta$$

$$\text{mas, } \text{tr}(P_5\Sigma) = r(P_5\Sigma) = \frac{1}{r} \text{vru}(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) = \text{vu}(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)$$

$$X_5'X\theta = r_{vu}E_1\mu + V'\beta + S'\tau + H'\tau^* + L\delta$$

$$\begin{aligned} \theta'X'P_5X\theta &= [r_{vu}E_1\mu + V'\beta + S'\tau + H'\tau^* + L\delta]'L^{-1}[r_{vu}E_1\mu + V'\beta + S'\tau + H'\tau^* + L\delta] \\ &= \mu r_{vu}^2 E_1 L^{-1} E_1 \mu + 2\mu r_{vu} E_1 L^{-1} V'\beta + \\ &\quad + 2\mu r_{vu} E_1 L^{-1} S'\tau + 2\mu r_{vu} E_1 L^{-1} H'\tau^* + \\ &\quad + 2\mu r_{vu} E_1 L^{-1} L\delta + \beta'N'R^{-1}N\beta + 2\beta'VL^{-1}S'\tau + \\ &\quad + 2\beta'VL^{-1}H'\tau^* + 2\beta'V\delta + \tau'SL^{-1}S'\tau + 2\tau'SL^{-1}H'\tau^* + \\ &\quad + 2\tau'S\delta + \tau^{*'}HL^{-1}H'\tau^* + 2\tau^{*'}H\delta + \delta'L\delta \end{aligned}$$

impondo-se as restrições de (a.8), e simplificando, tem-se

$$\theta'X'P_5X\theta = n\mu^2 + \beta'N'R^{-1}N\beta + 2\beta'N'\tau + \tau'R\tau + \tau^{*'}U\tau^* + \delta'L\delta$$

$$\begin{aligned} E[y'P_5y] &= n\mu^2 + \beta'N'R^{-1}N\beta + 2\beta'N'\tau + \tau'R\tau + \tau^{*'}U\tau^* + \\ &\quad + \delta'L\delta + \text{vu}(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) \end{aligned} \quad (b.26)$$

$$E[y'P_9y] = \text{tr}(P_9\Sigma) + \theta'X'P_9X\theta$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_9\Sigma) &= \text{tr}(P_9)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) = \text{tr}(X_9R^{-1}X_9')(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) = \\ &= \text{tr}(R^{-1}X_9'X_9)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) = \text{tr}(I_v)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) = \end{aligned}$$

$$\text{tr}(P_3 \Sigma) = v(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)$$

$$\begin{aligned} X'_3 X \theta &= X'_3 X_1 \mu + X'_3 X_2 \beta + X'_3 X_3 \tau + X'_3 X_4 \tau^* + X'_3 X_5 \delta \\ &= ru_1 E_v \mu + N\beta + R\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta' X' P_3 X \theta &= [ru_1 E_v \mu + N\beta + R\tau]' R^{-1} [ru_1 E_v \mu + N\beta + R\tau] \\ &= \mu r^2 u^2 E_v R^{-1} E_v \mu + 2\mu ru_1 E_v R^{-1} N\beta + \\ &\quad + 2\mu ru_1 E_v R^{-1} R\tau + \beta' N' R^{-1} N\beta + 2\beta' N' R^{-1} R\tau + \tau' R\tau \\ &= n\mu^2 + \beta' N' R^{-1} N\beta + 2\beta' N' \tau + \tau' R\tau \end{aligned}$$

portanto,

$$E(y' P_3 y) = n\mu^2 + \beta' N' R^{-1} N\beta + 2\beta' N' \tau + \tau' R\tau + v(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.27})$$

$$E(y' P_4 y) = \text{tr}(P_4 \Sigma) + \theta' X' P_4 X \theta$$

como

$$\text{tr}(P_4 \Sigma) = \frac{1}{vru} \text{tr}(E_v \otimes U_u) \Sigma = \frac{1}{vru} vru(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) = u(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)$$

então de (b.23), tem-se

$$E(y' P_4 y) = n\mu^2 + \tau^* U \tau^* + u(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) \quad (\text{b.28})$$

Desse modo, a esperança matemática da SQI fica

$$E(SQI) = E[y' P_5 y] - E[y' P_3 y] - E[y' P_4 y] + E[y' P_1 y]$$

de (b.26), (b.27), (b.28) e (b.11), obtem-se

$$\begin{aligned} E(SQI) &= \delta' L \delta + vu(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) - v(u\sigma_a^2 + \sigma_b^2) - u(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) + (u\sigma_a^2 + \sigma_b^2) \\ &= \delta' L \delta + (vu - u - v + 1) \sigma_b^2 \end{aligned}$$

$$E(SQI) = \delta' L \delta + (v - 1)(u - 1) \sigma_b^2 \quad (\text{b.29})$$

3.7.3.6. Esperança matemática de SQTot

Do item (3.7.1), tem-se que

$$SQTot = y'y - Cor = y'I_{vru} y - y'P_1 y \quad (\text{b.30})$$

sendo,

$$\begin{aligned} E(y'I_{vru} y) &= \text{tr}(I_{vru} \Sigma) + \theta' X' I_{vru} X \theta \\ &= \text{tr}(\Sigma) + \theta' X' X \theta = vru(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) + \theta' X' X \theta \end{aligned}$$

$$\theta' X' X \theta = [\mu X'_1 + \beta' X'_2 + \tau' X'_3 + \tau^* X'_4 + \delta' X'_5] [X_1 \mu + X_2 \beta + X_3 \tau + X_4 \tau^* + X_5 \delta]$$

fazendo-se as multiplicações e impondo-se as restrições de (a.8), obtem-se

$$\theta'X'X\theta = n\mu^2 + \beta'K\beta + 2\beta'N'\tau + \tau'R\tau + \tau^{*'}U\tau^{*} + \delta' L\delta$$

então,

$$E(y'Iy) = n\mu^2 + \beta'K\beta + 2\beta'N'\tau + \tau'R\tau + \tau^{*'}U\tau^{*} + \\ + \delta' L\delta + vru(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)$$

Portanto,

$$E(SQTot) = E(y'Iy) - E(y'P_1y)$$

$$E(SQTot) = \beta'K\beta + 2\beta'N'\tau + \tau'R\tau + \tau^{*'}U\tau^{*} + \delta' L\delta + \\ + vru(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) - (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (b.31)$$

3.7.3.7. Esperança matemática de SQPar

A soma de quadrados de parcelas (SQPar) é dada

$$\text{por} \quad SQPar = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - Cor = y'P_\sigma y - y'P_1 y \quad (b.32)$$

Aplicando a esperança matemática, fica

$$E(SQPar) = E(y'P_\sigma y) - E(y'P_1 y).$$

Desenvolvendo-se por partes, tem-se

$$E(y'P_\sigma y) = \text{tr}(P_\sigma \Sigma) + \theta'X'P_\sigma X\theta$$

$$\text{tr}(P_\sigma \Sigma) = \text{tr}(P_\sigma)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) = \frac{1}{u} bku(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \\ = vr(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)$$

$$\theta'X'P_\sigma X\theta = [\mu X'_1 + \beta'X'_2 + \tau'X'_3]P_\sigma[X_1\mu + X_2\beta + X_3\tau] \\ = n\mu^2 + \beta'K\beta + 2\beta'N'\tau + \tau'R\tau$$

então,

$$E(y'P_\sigma y) = n\mu^2 + \beta'K\beta + 2\beta'N'\tau + \tau'R\tau + vr(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (b.33)$$

Desse modo, de (b.33) e (b.11), tem-se

$$E(SQPar) = \beta'K\beta + 2\beta'N'\tau + \tau'R\tau + (vr-1)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (b.34)$$

3.7.3.8. Esperança matemática de SQR(a)

A soma de quadrados de resíduo a nível de parcelas, ou simplesmente resíduo(a), representada por SQR(a), é obtida por

$$SQR(a) = SQPar - SQT(a_j) - SQB$$

Aplicando a esperança matemática, tem-se

$$E(SQR(a)) = E[SQPar] - E[SQT(a_j)] - E[SQB]$$

De (b.34), (b.16) e (b.19), tem-se que

$$\begin{aligned} E(SQR(a)) &= \beta' K \beta + 2\beta' N' \tau + \tau' R \tau + (vr-1)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) - \\ &\quad - \tau' C \tau - (v-1)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) - 2\beta' N' \tau - \beta' K \beta - \\ &\quad - \tau' R \tau + \tau' C \tau - (b-1)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \\ &= [vr - 1 - (v-1) - (b-1)](\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \\ &= [v(r-1) - (b-1)](\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \text{ ou} \\ E(SQR(a)) &= (vr - v - b + 1)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \end{aligned} \quad (b.35)$$

3.7.3.9. Esperança matemática de SQR(b)

A soma de quadrados de resíduo a nível de subparcelas, representada por SQR(b), é obtida por

$$SQR(b) = SQTot - SQPar - SQT^* - SQI \quad (b.36)$$

Assim, aplicando a esperança matemática, fica

$$E(SQR(b)) = E(SQTot) - E(SQPar) - E(SQT^*) - E(SQI)$$

Substituindo as expressões encontradas em (b.31), (b.34), (b.24) e (b.29), tem-se

$$\begin{aligned} E(SQR(b)) &= \beta' K \beta + 2\beta' N' \tau + \tau' R \tau + \tau^* U \tau^* + \delta' L \delta + \\ &\quad + vru(\sigma_b^2 + \sigma_a^2) - (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) - \beta' K \beta - 2\beta' N' \tau - \\ &\quad - \tau' R \tau - (vr-1)(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) - \tau^* U \tau^* - (u-1)\sigma_b^2 - \\ &\quad - \delta' L \delta - (v-1)(u-1)\sigma_b^2 \\ E(SQR(b)) &= v(u-1)(r-1) \sigma_b^2 \end{aligned} \quad (b.37)$$

3.7.4. Decomposição da soma de quadrados de blocos

De acordo com o tipo de delineamento em blocos incompletos adotado, a SQB pode ser decomposta em:

1º Caso: SQB = SQRepetições + SQBlocos/Repetições

2º Caso: SQB = SQGrupos + SQBlocos/Grupos

Considerando-se apenas o primeiro caso, a matriz X_2 relativa aos blocos pode ser decomposta em:

$$X_2 = [X_7 \mid X_8]$$

sendo X_7 a matriz de incidência das repetições, e

X_8 a matriz de incidência dos blocos dentro de repetições.

Do mesmo modo, o vetor dos efeitos de blocos fica:

$$\beta' = [\rho_1' \mid \beta_1'] = [r_1 \dots r_r \mid b_1/r_1 \dots b_b/r_r]. \quad (b.38)$$

A soma de quadrados de repetição (SQR) é dada por

$$SQR = y'X_7(X_7'X_7)^{-1}X_7'y - Cor = y'P_7y - y'P_1y \quad (b.39)$$

$$\text{onde: } P_7 = \frac{1}{vu} I_{(r)} \otimes E_{(vu)}$$

$$y'P_7y = \frac{1}{vu} (y_{.1..}^2 + \dots + y_{.r..}^2) = \frac{1}{vu} \sum_{j=1}^r R_j$$

sendo, R_j o total das observações na j -ésima repetição.

De acordo com (b.9), tem-se que

$$E(y'P_7y) = \text{tr}(P_7\Sigma) + \theta'X'P_7X\theta$$

desenvolvendo, obtém-se

$$E(y'P_7y) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)r + n\mu^2 + \rho_1'(X_7'X_7)\rho_1 \quad (b.40)$$

então,

$$E(SQR) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)(r-1) + \rho_1'(X_7'X_7)\rho_1 \quad (b.41)$$

A soma de quadrados de blocos dentro de repetições (SQB/R) é obtida por diferença, isto é, $SQB/R = SQB - SQR$, sendo calculada por

$$SQB/R = y'X_8(X_8'X_8)^{-1}X_8'y - y'X_7(X_7'X_7)^{-1}X_7'y = y'P_8y - y'P_7y$$

$$\text{onde, } P_8 = \frac{1}{ku} I_{(rb)} \otimes E_{(ku)} \text{ e}$$

$$y'P_8y = \frac{1}{ku} (y_{.1.1}^2 + \dots + y_{.1.b}^2 + \dots + y_{.r.1}^2 + \dots + y_{.r.b}^2) \\ = \frac{1}{ku} \sum_{j,l}^{b',r} y_{.j.l}^2$$

sendo, $y_{.j.l}^2$ o total das observações do l -ésimo bloco dentro da j -ésima repetição.

De acordo com (b.9), tem-se que

$$E(y'P_8y) = \text{tr}(P_8\Sigma) + \theta'X'P_8X\theta$$

desenvolvendo, obtém-se

$$E(y'P_{\theta}y) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)rb' + n\mu^2 + \rho_1'(X_{\theta}'X_{\theta})\rho_1 + \beta_1'(X_{\theta}'X_{\theta})\beta_1 + 2\beta_1'N'\tau + \tau'N(X_{\theta}'X_{\theta})^{-1}N'\tau \quad (b.42)$$

logo,

$$E(SQB/R) = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)(rb' - r) + \beta_1'(X_{\theta}'X_{\theta})\beta_1 + 2\beta_1'N'\tau + \tau'N(X_{\theta}'X_{\theta})^{-1}N'\tau \quad (b.43)$$

onde b' é o número de blocos dentro de cada repetição.

3.8. Distribuição e independência das formas quadráticas

Para verificar a distribuição e independência das formas quadráticas apresentadas em (3.7), reportou-se a HALPERIN(1951), McELROY (1967) e SCARIANO & DAVENPORT (1987), aplicando-se o seguinte teorema citado em GRAYBILL (1961):

Teorema 1 - Seja y uma vetor multinormal de dimensão $(n \times 1)$, tal que $y \sim N(X\theta, V)$, onde $X\theta$ é o vetor de médias e V é a matriz de variâncias e covariâncias da distribuição multinormal e sejam A_i ($i=1, \dots, p$) matrizes simétricas, de posto $k_i = r(A_i)$ e $A = \sum_{i=1}^p A_i$ simétrica, de posto k . Então as formas quadráticas $y'A_i y$ têm distribuição χ^2 com k_i graus de liberdade com parâmetro de não centralidade $\lambda_i = \theta'X'A_i X\theta/2$, são independentes duas a duas, e ainda, $y'Ay$ tem distribuição χ^2 com k graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\lambda = \theta'X'AX\theta/2$, se e somente se ocorrer:

(I) quaisquer duas alternativas são verdadeiras:

- (a) $A_i V$ é idempotente, para todo $i=1, \dots, p$,
- (b) $A_i V A_j = 0$ para todo $i < j$,
- (c) AV é idempotente;

ou (II) (c) é verdadeira e (d) $k = \sum_{i=1}^p k_i$

ou (III) (c) é verdadeira e (e) $A_1 V, \dots, A_{p-1} V$ são idempotentes e $A_p V$ é definida não negativa.

Sejam as matrizes de variâncias e covariâncias dadas por $\sigma^2 V$, onde V é tal que:

$$V \in \mathcal{F} = \{V: V = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + c_p P_p, \text{ para } c_i > 0\} \quad (b.44)$$

sendo P_i tal que, $y'P_i y$ são formas quadráticas que fornecem as somas de quadrados de interesse para a análise da variância, com P_i ($i=1, \dots, p$) matrizes de projetores ortogonais ($P_i P_j = 0$ se $i \neq j$), simétricas e idempotentes ($P_i = P_i'$ e $P_i P_i = P_i$).

Sob normalidade dos erros, o vetor de erros tendo distribuição multinormal $N(\phi, \sigma^2 V)$, onde $V \in \mathcal{F}$ e σ^2 é uma constante positiva, então as condições necessárias e suficientes do Teorema 1 aplicadas a $P_i/c_i \sigma^2$ ($i=1, \dots, p$) garante que:

$$(y'P_i y/c_i \sigma^2) \cap \chi^2[r(P_i), \lambda_i], \quad (b.45)$$

e, $y'P_i y/c_i \sigma^2$, são mutualmente independentes, onde $\lambda_i = E(y')P_i E(y)/2c_i \sigma^2$ é o parâmetro de não centralidade. Em consequência, a família de variáveis aleatórias

$$F_{ij}(c_i, c_j) = \frac{c_j}{c_i} \frac{y'P_i y/r(P_i)}{y'P_j y/r(P_j)} \cap F[r(P_i), r(P_j), \lambda_i, \lambda_j] \quad (b.46)$$

para $V \in \mathcal{F}$ e $i \neq j=1, \dots, p$. Verifica-se que, quando $c_1 = c_2 = 1$, então $F_{12}(1,1) = F$ é a estatística "usual" do teste F , se ocorrer $V = I$.

As somas de quadrados em termos de formas quadráticas, do modelo de (a.1), obtidas em (3.7), podem ser escritas como

$$y'Q_0 y = y'Q_1 y + y'Q_2 y + y'Q_3 y + y'Q_4 y + y'Q_5 y + y'Q_6 y + y'Q_7 y$$

onde Q_i , com $i=0,1, \dots, 7$ são os núcleos das formas quadráticas, ou projetores de y sobre algum subespaço de $C(X)$, que fornecem as somas de quadrados de total, correção, blocos, tratamentos principais, resíduo(a), tratamentos secundários, interação e resíduo(b) respectivamente.

Usando o teorema de (b.9), obtiveram-se os seguintes resultados com respeito à distribuição das formas quadráticas:

$$y'Q_1 y \cap (\sigma_b^2 + u\sigma_b^2) \chi_{11, \lambda_1}^2, \text{ com } \lambda_1 = n\mu^2/2(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (b.47)$$

$$y'Q_2 y \cap (\sigma_b^2 + u\sigma_b^2) \chi_{1b-1, \lambda_2}^2, \quad (b.48)$$

$$\text{com } \lambda_2 = (2\beta'N'\tau + \beta'K\beta + \tau'NK^{-1}N'\tau)/2(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)$$

$$y'Q_3y \cap (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \chi^2_{[v-1, \lambda_3]}, \text{ com } \lambda_3 = \tau'C'\tau/2(\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (b.49)$$

$$y'Q_4y \cap (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \chi^2_{[vr-v-b+1, \lambda_4]}, \text{ com } \lambda_4 = 0 \quad (b.50)$$

$$y'Q_5y \cap \sigma_b^2 \chi^2_{[u-1, \lambda_5]}, \text{ com } \lambda_5 = \tau^*U\tau/2\sigma_b^2 \quad (b.51)$$

$$y'Q_6y \cap \sigma_b^2 \chi^2_{[(v-1)(u-1), \lambda_6]}, \text{ com } \lambda_6 = \delta'LD/2\sigma_b^2 \quad (b.52)$$

$$y'Q_7y \cap \sigma_b^2 \chi^2_{[v(u-1)(r-1), \lambda_7]}, \text{ com } \lambda_7 = 0 \quad (b.53)$$

e são independentes entre si. Também de (b.46), tem-se que a variável aleatória $F_{94}(c_3, c_4)$ dada por

$$\frac{y'Q_3y/(v-1)}{y'Q_4y/(vr-v-b+1)} \cap F_{[v-1; vr-v-b+1; \lambda_3; \lambda_4]} \quad (b.54)$$

ou seja,

$$\frac{SQT(a)/(v-1)}{SQR(a)/(vr-v-b+1)} \cap F_{[v-1; vr-v-b+1; \lambda_3]} \\ \text{e, que}$$

$$F_{57}(c_5, c_7) = \frac{y'Q_5y/(u-1)}{y'Q_7y/[v(u-1)(r-1)]} \cap F_{[u-1; v(u-1)(r-1); \lambda_5]} \quad (b.55)$$

ou seja,

$$\frac{SQT^*/(u-1)}{SQR(b)/[v(u-1)(r-1)]} \cap F_{[u-1; v(u-1)(r-1); \lambda_5]}$$

e ainda, que

$$F_{67}(c_6, c_7) = \frac{y'Q_6y/(v-1)}{y'Q_7y/(vr-v-b+1)} \cap F_{[(v-1)(u-1); v(u-1)(r-1); \lambda_6]} \quad (b.56)$$

ou seja,

$$\frac{SQI/(v-1)(u-1)}{SQR(b)/[v(u-1)(r-1)]} \cap F_{[(v-1)(u-1); v(u-1)(r-1); \lambda_6]}$$

3.9. Esquema de análise da variância

O esquema de análise da variância com as respectivas esperanças matemáticas de quadrados médios está apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 - Esquema da análise da variância com as respectivas esperanças matemática de quadrados médios.

Causas de Variação	Graus de liberdade	Somas de quadrados	Esperança dos quadrados médios
Média	1	$y'D_1y$	$c_1 + n\mu^2$
Blocos	b-1	$y'D_2y$	$c_2 + \frac{\tau'NK^{-1}N'\tau + 2\beta'N'\tau + \beta'K\beta}{b-1}$
Trat.P.(aj)	v-1	$y'D_3y$	$c_3 + \tau'C\tau/(v-1)$
Resíduo(a)	bk-b-v+1	$y'D_4y$	c_4
Parcelas	rv-1	$y'P_Py$	-
Trat.Sec	u-1	$y'D_5y$	$c_5 + \tau^*U\tau^*/(u-1)$
Interação	(v-1)(u-1)	$y'D_6y$	$c_6 + \delta'L\delta/(v-1)(u-1)$
Resíduo(b)	v(u-1)(r-1)	$y'D_7y$	c_7
Total	vru	$y'D_0y$	

onde: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)$; $c_5 = c_6 = c_7 = \sigma_b^2$

3.10. Estimabilidade

A estimabilidade se fundamenta em funções estimáveis do tipo $\lambda'\theta$ associadas ao modelo linear $y = X\theta + \varepsilon$, sendo $\lambda'\theta$ estimável se puder ser expressa como uma função linear das esperanças das observações. São estimáveis as funções de tratamento $\lambda'\theta$, tais que, $r[X] = r[X|\lambda]$. Naturalmente, os contrastes são um subconjunto de tais funções, e por serem de grande importância prática, serão abordados aqui.

Se $\lambda'\theta$ é uma função estimável, então pelo teorema de Gauss-Markov, seu BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) é $\text{BLUE}(\lambda'\theta) = \lambda'\theta^0$, para qualquer θ^0 solução das equações normais, de acordo com IEMMA (1987).

O valor esperado de qualquer observação é uma função estimável, conforme SEARLE (1987); assim $E(y) = X\theta$ ou

$$E(y_{ijl}) = \mu + b_j + t_i + t_l^* + \delta_{il} \quad \forall i, j, l \quad (\text{b.57})$$

constituem uma coleção de funções básicas estimáveis, segundo IEMMA(1987). Como exemplo, o melhor estimador linear não viesado, representado por BLUE, de $\mu + b_j + t_i + t_l^* + \delta_{il}$ é y_{ijl} , sendo sua variância dada por $\text{Var}(y_{ijl}) = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$, cuja estimativa é

$$\hat{\text{Var}}(y_{ijl}) = [\text{QMR}(a) - \text{QMR}(b)]/u + \text{QMR}(b) = \frac{\text{QMR}(a) + (u-1)\text{QMR}(b)}{u}$$

de modo que $\text{QMR}(b)$ é uma estimativa não viesada de σ_b^2 e, o $\text{QMR}(a)$ é uma estimativa não viesada de $\sigma_a^2 + u\sigma_b^2$.

Todas combinações lineares de funções estimáveis, são também estimáveis, desde que não haja desconexão, de acordo com RAD (1946), SEARLE (1971) e IEMMA (1987); pode-se então, obter combinações lineares de interesse, das observações. No exemplo de (3.1), a combinação linear das observações

$$y_{322} - y_{422} = t_3 - t_4 + \delta_{32} - \delta_{42} + \varepsilon_{322} - \varepsilon_{422}$$

pode ser usada para medir o efeito entre os tratamentos principais 3 e 4 dentro do tratamento secundário 2. Assim, o contraste $\lambda_1'\theta = t_3 - t_4 + \delta_{32} - \delta_{42}$, possui BLUE dado por $\lambda_1'\theta^0 = y_{322} - y_{422}$, ou seja

$$E[\lambda_1'\theta^0] = E[y_{322} - y_{422}] = t_3 - t_4 + \delta_{32} - \delta_{42}.$$

Sua variância é

$$\begin{aligned} \text{Var}(\lambda_1'\theta^0) &= \text{Var}(y_{322} - y_{422}) = E[\eta_{32} + e_{322} - \eta_{42} - e_{422}]^2 \\ &= 2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) \end{aligned}$$

cuja estimativa é

$$\hat{\text{Var}}(\lambda'_1 \theta^0) = 2 \frac{\text{QMR}(a) + (u-1)\text{QMR}(b)}{u}$$

Do mesmo modo, o contraste

$$\lambda'_2 \theta = t_1 - t_2 + \delta_{11} - \delta_{21},$$

$= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \theta$,
é uma função linear estimável. O BLUE de $\lambda'_2 \theta$ é $y_{111} - y_{211}$,
cuja variância é $\text{Var}(\lambda'_2 \theta^0) = 2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)$ e, sua estimativa é

$$\hat{\text{Var}}(\lambda'_2 \theta^0) = 2 \frac{\text{QMR}(a) + (u-1)\text{QMR}(b)}{u}.$$

O BLUE da função linear estimável

$$\lambda'_3 \theta^0 = t_1^* - t_2^* + \delta_{11} - \delta_{12}, \text{ é } \bar{y}_{1.1} - \bar{y}_{1.2}$$

cuja variância é $\text{Var}(\lambda'_3 \theta^0) = \frac{2}{r} \sigma_b^2$, e sendo sua estimativa

$$\hat{\text{Var}}(\bar{y}_{1.1} - \bar{y}_{1.2}) = \frac{2}{r} \text{QMR}(b).$$

No caso de duas médias de tratamentos principais em um mesmo tratamento secundário, para o exemplo ilustrativo, tem-se que

$$E(\bar{y}_{1.1} - \bar{y}_{3.1}) = (b_1 - b_2)/2 + t_1 - t_3 + \delta_{11} - \delta_{31},$$

portanto, $\bar{y}_{1.1} - \bar{y}_{3.1}$ não é um estimador não-viesado da diferença entre os tratamentos principais 1 e 3 no tratamento secundário 1, pois inclui uma diferença entre blocos. Assim, por causa da presença de blocos, diferenças entre médias de tratamentos principais num mesmo tratamento secundário não são estimáveis.

No tocante às funções estimáveis de tratamentos principais pode-se verificar que uma função linear paramétrica do tipo $\lambda' \tau$ é estimável no modelo

$$y = X_1 \mu + X_2 \beta + X_3 \tau + X_4 \tau^* + X_5 \delta + \varepsilon$$

se, e somente se, $\lambda' \in C\{X'_3(I-P_2)X_3\}$ ou $\lambda' \in C(C)$.

Observa-se que a matriz C tem dimensões menores do que $X'X$, facilitando a obtenção de soluções e, nesse caso, uma função linear paramétrica é estimável, somente se $r[C] = r[C|\lambda]$, ou seja, λ' ou λ deve pertencer ao espaço coluna de C , pois C é uma matriz simétrica.

Por exemplo, as funções lineares $t_i - t_j$ são

estimáveis, enquanto que t_i é não estimável. Assim, para o exemplo ilustrativo de (3.1), aplicando operações elementares nas linhas de $[C \mid \lambda]$, obtém-se

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Logo, a função $t_1 - t_2$ é estimável, e a função t_1 é não estimável. De modo geral, $t_i - t_j$ constituem um conjunto de funções estimáveis, conhecidos como contrastes elementares, para o modelo irrestrito.

Se $\lambda'\tau$ é estimável no modelo

$$y = X_1\mu + X_2\beta + X_3\tau + X_4\tau^* + X_5\delta + \varepsilon$$

então o seu BLUE pode ser obtido por $\lambda'\tau^0$, que é invariante para qualquer τ^0 solução do SENR.

Seja $\lambda'\tau$ uma função linear estimável, então a variância de $\lambda'\hat{\tau}$ é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(\lambda'\tau) &= E\{[\lambda'\hat{\tau} - E(\lambda'\hat{\tau})][\lambda'\hat{\tau} - E(\lambda'\hat{\tau})]'\} \\ &= E\{\lambda'[\hat{\tau} - E(\hat{\tau})][\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]'\lambda\} \\ &= \lambda'E\{[\hat{\tau} - E(\hat{\tau})][\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]'\lambda\} \\ &= \lambda'D(\hat{\tau})\lambda \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\lambda'\tau) = \lambda' M^{-1}C M^{-1}\lambda (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.58})$$

Da definição de estimabilidade (RAO, 1946), tem-se que, se $\lambda'\tau$ é uma função estimável, então existe pelo menos um vetor $a' \neq 0$, tal que $\lambda' = a'C \Rightarrow \lambda = Ca$. Assim, substituindo em (b.58), fica

$$\text{Var}(\lambda'\hat{\tau}) = \lambda' M^{-1}C M^{-1}Ca (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)$$

Mas, segundo OGAWA (1974) e IEMMA (1987), a matriz M^{-1} é uma inversa condicional de C , com a propriedade $CM^{-1}C = CM^{-1}C = C$, pois C é uma matriz simétrica. Logo,

$$\text{Var}(\lambda'\hat{\tau}) = \lambda' M^{-1}Ca (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2)$$

mas, $Ca = \lambda$, então

$$\text{Var}(\lambda' \hat{\tau}) = \lambda' M^{-1} \lambda (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.59})$$

cuja estimativa é

$$\widehat{\text{Var}}(\lambda' \hat{\tau}) = \lambda' M^{-1} \lambda \text{QMR}(a) \quad (\text{b.60})$$

Assim, no caso particular de comparação entre dois efeitos estimados de tratamentos principais, tem-se que $\lambda' \hat{\tau} = \hat{t}_i - \hat{t}_l$, cuja estimativa da variância é

$$\widehat{\text{Var}}(\lambda' \hat{\tau}) = \text{Var}(\hat{t}_i - \hat{t}_l) = (m_{ii} + m_{ll} - m_{il} - m_{li}) \text{QMR}(a)$$

onde os elementos (m_{ii}) da matriz M^{-1} estão definidos em (a.41) ou (a.57) ou (a.60) ou (a.71).

Se $\lambda' \tau^*$ uma função paramétrica estimável, com BLUE dado por $\widehat{\lambda' \tau^*}$, então

$$\text{Var}(\widehat{\lambda' \tau^*}) = \lambda' \text{Var}(\hat{\tau}^*) \lambda = \lambda' D(\hat{\tau}^*) \lambda \quad (\text{b.61})$$

com $D(\hat{\tau}^*)$ sendo a matriz de dispersão dos efeitos de tratamentos secundários de (a.90).

No caso particular de um contraste entre efeitos de dois tratamentos secundários, tem-se $\lambda' \hat{\tau}^* = \hat{t}_i^* - \hat{t}_l^*$.

Se $\lambda' \delta$ é uma função paramétrica estimável, com BLUE dado por $\widehat{\lambda' \delta}$, então

$$\text{Var}(\widehat{\lambda' \delta}) = \lambda' D(\hat{\delta}) \lambda \quad (\text{b.62})$$

com $D(\hat{\delta})$, a matriz de dispersão dos efeitos da interação, de (a.96).

Para o caso particular de um contraste elementar, têm-se os seguintes casos de interesse:

- (i) $\hat{\delta}_{il} - \hat{\delta}_{il}$, diferença entre os efeitos estimados de dois tratamentos secundários, em um mesmo tratamento principal;
- (ii) $\hat{\delta}_{il} - \hat{\delta}_{il}$, diferença entre os efeitos estimados de dois tratamentos principais, em um mesmo tratamento secundário.

O BLUE de $t_l^* - t_l^* + \delta_{il} - \delta_{il}$ é $\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l}$, cuja variância é $\text{Var}(\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l}) = \frac{2}{r} \sigma_b^2$. Este contraste mede a diferença entre duas medias de tratamentos secundários num mesmo tratamento principal.

Para dois tratamentos principais em um mesmo tratamento secundário pode-se usar combinações lineares estimáveis das observações, por exemplo, o BLUE de

$$t_1 - t_2 + \delta_{11} - \delta_{21} \text{ é } y_{111} - y_{211}$$

cuja variância é $\text{Var}(y_{111} - y_{211}) = 2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)$, e sua estimativa é $\hat{\text{Var}}(y_{111} - y_{211}) = 2[(u-1)\text{QMR}(b) + \text{QMR}(A)]/u$.

Do mesmo modo, o BLUE de

$$t_3 - t_4 + \delta_{32} - \delta_{42} \text{ é } y_{322} - y_{422}$$

cuja variância é $\text{Var}(y_{322} - y_{422}) = 2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)$. O qual serve para verificar a diferença entre as médias dos tratamentos principais 3 e 4 dentro do tratamento secundário 2.

3.11. Testes de hipóteses

Nos ensaios em parcelas subdivididas, em geral, existe interesse em testar as seguintes hipóteses básicas:

$$H_0^1 : t_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, v$$

$$H_0^2 : t_l^* = 0, \forall l = 1, 2, \dots, u \quad (b.63)$$

$$H_0^3 : \delta_{il} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, v; l = 1, 2, \dots, u$$

que correspondem às hipóteses de não existência de efeitos de tratamentos principais, de tratamentos secundários e de interação respectivamente, de acordo com IEMMA (1983).

Os erros apropriados para se verificar essas hipóteses, são evidentes quando se observam as esperanças matemáticas dos quadrados médios, apresentadas na Tabela 1, visto que, as esperanças do numerador e denominador das estatísticas F, devem diferir somente na função positiva do efeito fixo que se deseja testar.

No experimento em parcela subdividida, quando a hipótese H_0^3 , referente a interação ($T \times T^*$) é rejeitada, é um indício de que os tratamentos secundários se comportam diferentemente em relação aos tratamentos principais. Assim, é conveniente que seja estudado o comportamento dos T^* dentro de cada T ou T dentro de T^* , cujas hipóteses a serem testadas são:

$$(i) H_0^4 : t_{(kl)} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, v$$

$$(ii) H_0^5 : t_{(kl)}^* = 0, \forall l = 1, 2, \dots, u$$

Os critérios para essas duas hipóteses estão apresentados nas Tabelas 2a e 2b, dadas a seguir.

Tabela 2a - Esquema da decomposição da soma dos graus de liberdade da SQ interação tratamentos principais com tratamentos secundários com os graus de liberdade da SQ tratamentos secundários.

Hipótese	Graus de liberdade	Teste F
$H_o^{(1)} : t_{(1)l} = 0 \quad (u-1); v(u-1)(r-1)$		$QM(t_{(1)l})/QMR(b)$
.....		
$H_o^{(v)} : t_{(v)l} = 0 \quad (u-1); v(u-1)(r-1)$		$QM(t_{(v)l})/QMR(b)$

onde: $SQt_{(i)l} = \left(\sum_{l=1}^u y_{i..l}^2 \right) / r - (y_{i..}^2) / ru$ para $i=1,2,\dots,v$

$$\frac{[SQ(t_{(i)l})]/(u-1)}{SQR(b)/v(u-1)(r-1)} \cap F[u-1; v(u-1)(r-1); \lambda_{(i)l}]$$

$$\text{com } \lambda_{(i)l} = (r \sum_{l=1}^u t_l^{*2} + r \sum_{l=1}^u \delta_{il}^2) / 2\sigma_b^2$$

Tabela 2b - Esquema da decomposição da soma dos graus de liberdade da SQ interação dos tratamentos principais com tratamentos secundários com graus de liberdade da SQ tratamentos principais

Hipótese	Graus de liberdade	Teste F
$H_o^{(1)} : t_{i(1)} = 0 \quad (v-1); v(u-1)(r-1)$		?
.....		
$H_o^{(u)} : t_{i(u)} = 0 \quad (v-1); v(u-1)(r-1)$		?

onde: $SQt_{i(l)} = \left(\sum_{i=1}^v y_{i.l}^2 \right) / r - (y_{..l}^2) / rv$ para $l=1,2,\dots,u$

$$\frac{[SQ(t_{i(l)})] / (v-1)}{SQR(b) / v(u-1)(r-1)} \cap F_{[v-1; v(u-1)(r-1); \lambda_{i(l)}]}$$

$$\text{com } \lambda_{i(l)} = (r \sum_{i=1}^v t_i^2 + r \sum_{i=1}^v \delta_{il}^2 + \sum_{j=1}^b b_j^2) / 2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)$$

Para essas u hipóteses, não existe um teste F exato ou apropriado, visto que, no parâmetro de não centralidade $\lambda_{i(l)}$, existe uma função positiva dos efeitos de blocos, isto é, não se está testando apenas o efeito de tratamentos primários dentro de um tratamento secundário, mas também, um efeito de blocos, conforme pode-se verificar pela expressão de parâmetro de não centralidade $\lambda_{i(l)}$, apresentado na Tabela 2b.

3.12. Comparações múltiplas

Admitindo-se a possibilidade de rejeição das hipóteses de nulidade, referentes aos efeitos de tratamentos principais e secundários e da interação, para continuar a análise estatística, deve-se considerar os seguintes casos de comparações múltiplas, dados a seguir.

3.12.1. Um contraste entre duas médias de tratamentos principais

Reportando-se a (a.41), tem-se que, no caso de um contraste entre duas médias de tratamentos principais, podem ser considerados os seguintes tipos de contrastes entre médias de dois tratamentos principais:

a) Dois tratamentos principais que são i-ésimos associados

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) &= (m_{ii} + m_{i'i'} - m_{ii'} - m_{i'i}) (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \\ &= \left[\frac{2}{ur(k-1)} - \frac{2}{r(k-1)} \right] \sum_{l=1}^m \lambda_l f_{li} (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \\ \text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) &= \frac{2}{ur(k-1)} \left[k - u \sum_{l=1}^m \lambda_l f_{li} \right] (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.64}) \end{aligned}$$

no caso geral de PBIB(m), e cuja estimativa é

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{ur(k-1)} \left[k - u \sum_{l=1}^m \lambda_l f_{li} \right] \text{QMR}(a) \quad (\text{b.65})$$

No caso de PBIB(2), tem-se

b.1) Dois tratamentos principais que são primeiros associados

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = 2 \frac{k\Delta - uA_1}{ur(k-1)\Delta} (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.66})$$

b.2) Dois tratamentos principais que são segundos associados

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = 2 \frac{k\Delta - uA_2}{ur(k-1)\Delta} (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.67})$$

b.3) Uma variância média

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = 2 \frac{k(v-1)\Delta - u(n_{11}A_1 + n_{22}A_2)}{ur(k-1)(v-1)\Delta} (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.68})$$

No caso de reticulados quadrados, tem-se

c.1) Dois tratamentos principais que são primeiros associados

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2(k+1)}{urk} (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.69})$$

c.2) Dois tratamentos principais que são segundos associados

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{ur} \left[1 + \frac{r}{k(r-1)} \right] (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.70})$$

c.3) Uma variância média é

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{ur} \left[1 + \frac{r}{(k+1)(r-1)} \right] (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.71})$$

No caso especial onde $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_v = \lambda$, as variâncias anteriores se modificam para:

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda vu} (\sigma_b^2 + u\sigma_a^2) \quad (\text{b.72})$$

cuja estimativa é

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda vu} \text{QMR}(a) \quad (\text{b.73})$$

a qual concorda com o resultado obtido por IEMMA (1981), para os experimentos em blocos incompletos balanceados.

3.12.2. Um contraste entre duas médias de tratamentos secundários

Se $\lambda' \tau^*$ é uma função paramétrica estimável que envolve efeitos de dois tratamentos secundários, então reportando-se a (a.14), tem-se que:

$$\text{Var}(\hat{t}_i^* - \hat{t}_{i'}^*) = \text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{vr} \sigma_b^2 \quad (\text{b.74})$$

o qual é um resultado idêntico àqueles encontrados na literatura para a variância entre duas médias de tratamentos secundários obtidas de experimentos em parcelas subdivididas em blocos incompletos balanceados (IEMMA, 1981). Cujas estimativas não viesadas são

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{vr} \text{QMR}(b) \quad (\text{b.75})$$

sendo uma estimativa não tendenciosa para σ_b^2 , o quadrado médio do resíduo(b).

3.12.3. Um contraste entre duas médias de tratamentos secundários, dado um tratamento principal

A variância para a diferença entre duas médias de tratamentos secundários dentro de um mesmo tratamento principal, foi obtida a partir das médias do exemplo ilustrativo de (3.1). Assim

$$\bar{y}_{1.1} = \mu + \frac{b_1 + b_9}{r} + t_1 + t_1^* + \delta_{11} + \frac{\eta_{11} + \eta_{19}}{r} + \frac{e_{111} + e_{191}}{r}$$

$$\bar{y}_{1.2} = \mu + \frac{b_1 + b_9}{r} + t_1 + t_2^* + \delta_{12} + \frac{\eta_{11} + \eta_{19}}{r} + \frac{e_{112} + e_{192}}{r}$$

Generalizando, tem-se

$$\bar{y}_{i.l} = \mu + \phi b(i) + t_i + t_l^* + \delta_{il} + \frac{\eta_{i.}}{r} + \frac{e_{i.l}}{r}$$

$$\bar{y}_{i.l'} = \mu + \phi b(i) + t_i + t_{l'}^* + \delta_{il'} + \frac{\eta_{i.}}{r} + \frac{e_{i.l'}}{r}$$

sendo $\phi b(i)$ a soma dos efeitos dos blocos que contêm o i -ésimo tratamento primário

Usando a definição de variância, tem-se

$$\text{Var}[\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l'}] = E[\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l'} - E(\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l'})]^2$$

$$\text{mas, } E(\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l'}) = t_l^* - t_{l'}^* + \delta_{il} - \delta_{il'}$$

então

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l'}) &= E\left[\frac{e_{i.l}}{r} - \frac{e_{i.l'}}{r}\right]^2 \\ &= \frac{1}{r^2} E[e_{i.l}^2 + e_{i.l'}^2 - 2e_{i.l}e_{i.l'}] \\ &= \frac{1}{r^2} [r\sigma_b^2 + r\sigma_b^2 - 0] \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l'}) = \frac{2}{r} \sigma_b^2$$

cuja estimativa para a diferença entre duas médias de tratamentos secundários em um mesmo tratamento principal ficou

$$\hat{\text{Var}}(\bar{y}_{i.l} - \bar{y}_{i.l'}) = \frac{2}{r} \text{QMR}(b) \quad (\text{b.76})$$

resultado análogo àqueles encontrados na literatura para os experimentos em parcelas subdivididas.

3.12.4. Um contraste entre duas médias de tratamentos principais, dado um tratamento secundário

A variância para a diferença entre duas médias

de tratamentos principais dentro de um mesmo tratamento secundário, foi obtida a partir das médias do exemplo ilustrativo de (3.1). Assim sendo, as médias são dadas por

$$\bar{y}_{1.1} = \mu + \frac{b_1 + b_9}{r} + t_1 + t_1^* + \delta_{11} + \frac{\eta_{11} + \eta_{19}}{r} + \frac{e_{111} + e_{191}}{r}$$

$$\bar{y}_{9.1} = \mu + \frac{b_2 + b_9}{r} + t_9 + t_1^* + \delta_{91} + \frac{\eta_{92} + \eta_{99}}{r} + \frac{e_{921} + e_{991}}{r}$$

Generalizando, tem-se

$$\bar{y}_{i.1} = \mu + \phi b(i) + t_i + t_1^* + \delta_{i1} + \frac{\eta_{i.}}{r} + \frac{e_{i.1}}{r}$$

$$\bar{y}_{i'.1} = \mu + \phi b(i') + t_{i'} + t_1^* + \delta_{i'1} + \frac{\eta_{i'.}}{r} + \frac{e_{i'.1}}{r}$$

Aplicando a definição de variância, tem-se

$$\text{Var}[\bar{y}_{i.1} - \bar{y}_{i'.1}] = E[\bar{y}_{i.1} - \bar{y}_{i'.1} - E(\bar{y}_{i.1} - \bar{y}_{i'.1})]^2$$

Do mesmo modo anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{y}_{i.1} - \bar{y}_{i'.1}) &= E\left[\frac{\eta_{i.}}{r} - \frac{\eta_{i'.}}{r} + \frac{e_{i.1}}{r} - \frac{e_{i'.1}}{r}\right]^2 \\ &= \frac{1}{r^2} [r\sigma_a^2 + r\sigma_a^2 + r\sigma_b^2 + r\sigma_b^2] \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{i.1} - \bar{y}_{i'.1}) = \frac{2}{r} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2]$$

cuja estimativa para a diferença entre duas médias de tratamentos principais em um mesmo tratamento secundário foi

$$\hat{\text{Var}}(\bar{y}_{i.1} - \bar{y}_{i'.1}) = \frac{2}{r} \frac{\text{QMR}(a) + (u-1)\text{QMR}(b)}{u} \quad (\text{b.77})$$

resultado análogo àquele encontrado por PIMENTEL GOMES (1985), que é uma combinação linear entre os resíduos (a) e (b), quando o experimento foi instalado em parcelas subdivididas.

3.12.5. Um contraste entre dois efeitos estimados de tratamentos secundários, dado um tratamento principal

Tomando-se o contraste $\delta_{i1} - \delta_{i'1}$, cujo BLUE é $\bar{y}_{i.1} - \bar{y}_{i'.1} = (\bar{y}_{...1} - \bar{y}_{...1})$, e reportando-se a (3.6.6),

tem-se que

$$\text{Var}(\hat{\delta}_{il} - \hat{\delta}_{il'}) = \frac{2(v-1)}{vr} \sigma_b^2 = \frac{2}{r} \frac{v-1}{v} \sigma_b^2 \quad (\text{b.78})$$

resultado análogo àquele encontrado por CHAKRABARTI (1962), quando o experimento com parcelas subdivididas foi instalado em blocos casualizados, e por IEMMA (1981), para os experimentos em blocos incompletos balanceados.

3.12.6. Um contraste entre dois efeitos estimados de tratamentos principais, dado um tratamento secundário

Tomando-se o contraste $\delta_{il} - \delta_{il'}$, cujo BLUE é $\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{i'..} - (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{i'..})$, e reportando-se a (3.6.6), tem-se que

$$\text{Var}(\hat{\delta}_{il} - \hat{\delta}_{il'}) = \frac{2(u-1)}{ur} \sigma_b^2 = \frac{2}{r} \frac{u-1}{u} \sigma_b^2 \quad (\text{b.79})$$

o qual é um resultado idêntico àquele encontrado por CHAKRABARTI (1962), para essa variância, para os experimentos em parcelas subdivididas instalados em blocos casualizados, e por IEMMA (1981), para os experimentos em blocos incompletos balanceados. Conforme relatado por IEMMA (1981), este resultado é contrastante com aquele de PIMENTEL GOMES (1985), que apresentou como variância para esse contraste uma combinação linear entre os resíduos (a) e (b), quando o experimento está delineado em blocos casualizados. Mas, esses resultados são distintos devido ao fato que PIMENTEL GOMES (1985) usou contrastes entre médias e não entre efeitos estimados.

4. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Para ilustrar a metodologia aplicada, utilizou-se dos dados provenientes dos seguintes exemplos ilustrativos.

1º Exemplo - Experimento em PBIB(2)

Os dados apresentados na Tabela 4, referem-se a produção de plântulas de milho, em gramas/parcela, obtidos de um experimento instalado em parcelas subdivididas em PBIB(2), com seis linhagens de milho, a nível de parcelas, submetidas à três níveis de saturação de alumínio, a nível de subparcelas [Dados adaptados de MAGNAVACA et alii (1986)].

Os números referentes às linhagens representam os tratamentos principais, e os valores relativos aos níveis de saturação de alumínio os tratamentos secundários. Este delineamento é um PBIB(2), cujos tipos de associados são:

Tratamento Principal	1ºs Associados	2ºs Associados
1	2	3,4,5,6
2	1	3,4,5,6
3	4	1,2,5,6
4	3	1,2,5,6
5	6	1,2,3,4
6	5	1,2,3,4

Tabela 3 - Produção de plântulas de milho, em gramas/parcela, do primeiro exemplo.

Blocos	Linhagens	Níveis de saturação de alumínio		
		1	2	3
1	1	127,9	102,4	86,4
	2	156,9	113,8	101,0
	3	115,9	102,5	108,9
2	3	131,0	121,1	99,6
	4	162,1	121,2	87,3
	5	156,5	90,7	78,0
3	2	154,2	135,9	115,0
	5	133,8	101,1	91,7
	6	181,9	70,7	78,4
4	1	138,7	118,7	99,1
	2	138,7	125,3	97,6
	4	166,9	105,3	86,9
5	3	105,8	116,9	85,4
	4	144,2	93,2	65,8
	6	154,8	70,3	59,5
6	1	114,8	121,6	103,4
	5	154,1	104,3	94,2
	6	185,5	90,2	70,4

Este delineamento, de acordo com BOSE & NAIR (1939), é um PBIB(2) que possui os seguintes parâmetros do primeiro tipo:

$v=6$, $b=6$, $k=3$, $r=3$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $n_1=1$, $n_2=4$
e os parâmetros do segundo tipo são:

$$p_{11}^1=0, p_{12}^1=p_{21}^1=0, p_{22}^1=4, p_{11}^2=0, p_{12}^2=p_{21}^2=1, p_{22}^2=2$$

Inicialmente é conveniente obter informações sobre o cumprimento das exigências do modelo, usando os testes de homogeneidade e uniformidade das matrizes de variâncias e covariâncias entre os tratamentos principais.

Para testar a hipótese de homogeneidade

$H_0 : \Sigma_i = \Sigma$ versus $H_a : \Sigma_i \neq \Sigma$ para algum $i=1,2,\dots,6$
obtiveram-se as estimativas das matrizes de variâncias e co-variâncias seguintes:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \begin{bmatrix} 143,2402 & -24,1348 & -31,3847 \\ -24,1348 & 107,1211 & 90,9785 \\ -31,3847 & 90,9785 & 78,1309 \end{bmatrix}, \ln|S_1| = 3,4825 \\
 S_2 &= \begin{bmatrix} 96,4648 & -17,4453 & 48,9609 \\ -17,4453 & 122,1699 & 75,7910 \\ 48,9609 & 75,7910 & 85,0527 \end{bmatrix}, \ln|S_2| = 2,6983 \\
 S_3 &= \begin{bmatrix} 160,8438 & 40,2109 & 75,7930 \\ 40,2109 & 95,1602 & -75,2891 \\ 75,7930 & -75,2891 & 140,0654 \end{bmatrix}, \ln|S_3| = 3,8946 \\
 S_4 &= \begin{bmatrix} 143,1211 & 116,5918 & 143,6484 \\ 116,5918 & 197,2031 & 143,9443 \\ 143,6484 & 143,9443 & 151,2695 \end{bmatrix}, \ln|S_4| = 2,6752 \\
 S_5 &= \begin{bmatrix} 155,5235 & -33,9590 & -49,8535 \\ -33,9590 & 50,5625 & 61,7998 \\ -49,8535 & 61,7998 & 76,0635 \end{bmatrix}, \ln|S_5| = 3,4906 \\
 S_6 &= \begin{bmatrix} 281,6406 & 115,3262 & 136,3359 \\ 115,3262 & 129,4033 & 11,4126 \\ 136,3359 & 11,4126 & 90,0049 \end{bmatrix}, \ln|S_6| = 4,4979
 \end{aligned}$$

A estimativa para a matriz comum de variâncias e covariâncias é:

$$S = \begin{bmatrix} 163,4724 & 32,7650 & 53,9167 \\ 32,7650 & 116,9367 & 51,4395 \\ 53,9167 & 51,4395 & 66,6644 \end{bmatrix}, \ln(S) = 14,0588$$

Aplicando o teste de (3.5.1), tem-se

$$M = v(r-1)\ln|S| - (r-1) \sum_{i=1}^6 \ln|S_i| = 127,2271$$

$$A_1 = 49/72 = 0,6906 \quad \text{e} \quad (1-A_1)M = X_{obs}^2 = 40,64$$

$$f_1 = (v-1)u(u+1)/2 = 60/2 = 30 \text{ g.l.}$$

Então, como $X_{obs}^2 = 40,64 < X_{tab}^2 = 43,8$, não se rejeita $H_0 : \Sigma_i = \Sigma$, portanto, não existem evidências, que induzam que a matriz de covariância comum não possa

representar as covariâncias entre tratamentos secundários dentro de cada tratamento principal.

Para a verificação da hipótese de uniformidade

$$H_0 : \Sigma = \Sigma^* \text{ versus } H_a : \Sigma \neq \Sigma^*$$

a estimativa da matriz uniforme é:

$$U = \begin{bmatrix} 127,9468 & 46,0404 & 46,0404 \\ 46,0404 & 127,9468 & 46,0404 \\ 46,0404 & 46,0404 & 127,9468 \end{bmatrix}, \ln|U| = 14,2049$$

Aplicando o teste de (3.5.2), tem-se

$$N = -(vr-v)\ln(\det(S)/\det(U)) = -12(14,0588-14,2049) = 1,7537$$

$$A_2 = 1/8 = 0,125, (1-A_2)N = X_{obs}^2 = 1,53$$

$$f_2 = (u^2+u-4)/2 = 8/2 = 4 \text{ g.l.}$$

Então, como $X_{obs}^2 = 1,53 < X_{tab}^2 = 9,49$, não se rejeita $H_0 : \Sigma = \Sigma^*$, portanto, não existem evidências que induzam que a matriz de covariância não seja do tipo uniforme.

Os efeitos de tratamentos principais ($\hat{t}_i$) ajustados foram obtidos, considerando-se a expressão:

$$\hat{t}_i = \frac{1}{ur(k-1)\Delta} [(k\Delta - uA_2)Q_i + u(A_1 - A_2)S_1(Q_i)] =$$

$$\hat{t}_i = \frac{1}{48} [7Q_i - S_1(Q_i)]$$

onde: $a_{11}=8$, $a_{12}=1$, $a_{21}=0$, $a_{22}=6$, $\Delta=48$, $A_1=12$, $A_2=6$

Sendo $\hat{\mu}=G/vru = 6067,5/54=112,36$, tem-se que as médias ajustadas de tratamentos principais podem ser obtidas por $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{t}_i$. A análise de variância intrablocos pode ser obtida com o auxílio da seguinte tabela auxiliar (Tabela 4).

Tabela 4 - Tabela auxiliar para a análise intrablocos do experimento em PBIB(2).

i	T _i	A _i	Q _i	S ₁ (Q _i)	$\hat{t}_i$	$\hat{m}_i$
1	1013,0	3131,4	-92,4/3	259,6/3	-906,2/144	107,36
2	1138,4	3155,6	259,6/3	-92,4/3	1909,6/144	126,92
3	987,1	2959,1	2,2/3	78,1/3	-62,7/144	113,22
4	1032,9	3020,6	78,1/3	2,2/3	544,5/144	117,44
5	1004,4	3148,7	-135,5/3	-112,0/3	-836,5/144	107,85
6	961,7	2997,1	-112,0/3	-135,5/3	-648,5/144	109,15

Total 6137,5 18412,5 0,0 0,0 0,0

$$SQT(aj.) = \sum_{i=1}^6 \hat{t}_i Q_i = \frac{807848,78}{432} = 1870,020$$

O quadro da análise de variância intrablocos é:

V.C.M.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	5	2395,765	479,153	
Trat. Prin.(T)(aj.)	5	1870,020	374,004	5,51 ⁺
Resíduo(a)	7	475,408	67,915	

Parcelas	17	4741,193		

Tra. Sec.(T*)	2	30271,145	15135,572	184,79 ⁺⁺
T x T*	10	10871,837	1087,184	13,27 ⁺⁺
Resíduo(b)	24	1965,744	81,906	
Total	53	47849,911		

+,++ Significativo ao nível de 5% e 1% de probabilidade respectivamente.

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes elementares entre médias de tratamentos, obtidas de acordo com (3.12), são:

i) Para contrastes entre duas médias de tratamentos principais tidos como primeiros associados:

$$\text{Var}(\hat{m}_i - \hat{m}_j) = 2 \frac{k\Delta - uA_1}{ur(k-1)\Delta} \text{QMR}(a) = \frac{1}{4} \text{QMR}(a) = 16,979$$

ii) Para contrastes entre duas médias de tratamentos principais tidos como segundos associados:

$$\hat{\text{Var}}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = 2 \frac{k\Delta - uA_2}{ur(k-1)\Delta} \text{QMR}(a) = \frac{7}{24} \text{QMR}(a) = 19,809$$

iii) Para contrastes entre duas médias de tratamentos secundários:

$$\hat{\text{Var}}(\bar{y}_{..l} - \bar{y}_{..l'}) = \frac{2}{vr} \text{QMR}(b) = \frac{1}{9} \text{QMR}(b) = 9,101$$

iv) Para contrastes entre duas médias de tratamentos secundários, em um dado tratamento principal

$$\hat{\text{Var}}(\bar{y}_{il} - \bar{y}_{il'}) = \frac{2}{r} \text{QMR}(b) = \frac{2}{2} \text{QMR}(b) = 81,906$$

v) Para contrastes entre duas médias de tratamentos principais, em um dado tratamento secundário

$$\hat{\text{Var}}(\bar{y}_{il} - \bar{y}_{il'}) = \frac{2}{r} \frac{\text{QMR}(a) + (u-1)\text{QMR}(b)}{u} = 77,242$$

vi) Para efeitos estimados de dois tratamentos secundários, em um dado tratamento principal:

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\delta}_{il} - \hat{\delta}_{il'}) = \frac{2(v-1)}{vr} \text{QMR}(b) = \frac{5}{9} \text{QMR}(b) = 44,503$$

vii) Para efeitos estimados entre dois tratamentos principais, em um dado tratamento secundário:

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\delta}_{il} - \hat{\delta}_{i'l'}) = \frac{2(u-1)}{ur} \text{QMR}(b) = \frac{4}{9} \text{QMR}(b) = 36,403$$

2º Exemplo - Experimento em reticulados quadrados

Os dados apresentados na Tabela 5, referem-se a produção de grãos de cultivares de milho, em kg/ha, obtidos de um experimento instalado em parcelas subdivididas, com as cultivares, a nível de parcelas, dispostas em PBIB(2) do tipo reticulado quadrado, onde em cada cultivar foram testados três níveis de endogamia [Dados adaptados de GAMA et alii, 1985].

Tabela 5 - Produção de grãos de algumas cultivares de milho, em kg/ha, do segundo exemplo.

Repetição	Bloco	Cultivar	Nível de endogamia		
			1	2	3
1	1	1	6461	5271	5995
		2	7128	4522	5131
		3	5490	3575	4174
	2	4	5697	5879	4572
		5	5262	4275	5477
		6	5262	4255	5477
	3	7	5404	3838	3420
		8	5386	5608	3944
		9	4872	3075	4064
2	1	1	5628	6434	4613
		4	4517	5255	5336
		7	5804	5122	2925
	2	2	7322	5046	4471
		5	4420	5475	4693
		8	5981	4484	3348
	3	3	4720	4805	3649
		6	4420	5475	4267
		9	4023	2847	2782
3	1	1	5226	5181	5116
		5	4088	4185	4167
		9	3582	4150	3291
	2	2	6295	5754	5694
		6	4088	3985	4593
		7	6604	3951	4228
	3	3	4278	3736	4931
		4	5942	4551	4098
		8	6799	4345	4776

Esse delineamento experimental corresponde a um PBIB(2) do tipo quadrado latino, conhecido como reticulado quadrado triplo, cujos tipos de associados são:

Tratamento Principal	1 ^{os} Associados	2 ^{os} Associados
1	2 3 4 5 7 9	6 8
2	1 3 5 6 7 8	4 9
3	1 2 4 6 8 9	5 7
4	1 3 5 6 7 8	2 9
5	1 2 4 6 8 9	3 7
6	2 3 4 5 7 9	1 8
7	1 2 4 6 8 9	3 5
8	2 3 4 5 7 9	1 6
9	1 3 5 6 7 8	2 4

De acordo com BOSE & NAIR (1939), os parâmetros do primeiro tipo são:

$v=9$, $b=9$, $r=3$, $k=3$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $n_1=6$, $n_2=2$
e os parâmetros do segundo tipo são:

$$p_{11}^1=3, p_{12}^1=p_{21}^1=2, p_{22}^1=0, p_{11}^2=6, p_{12}^2=p_{21}^2=0, p_{22}^2=1$$

Os efeitos de tratamentos principais ($\hat{t}_i$) ajustados foram obtidos considerando-se a expressão:

$$\hat{t}_i = \frac{1}{ur(k-1)\Delta} [(k\Delta - uA_1)Q_i + u(A_2 - A_1)S_2(Q_i)] =$$

$$\hat{t}_i = \frac{1}{54} [8Q_i - S_2(Q_i)]$$

onde: $a_{11}=9$, $a_{12}=0$, $a_{21}=-2$, $a_{22}=6$, $\Delta=54$, $A_1=6$, $A_2=0$

A análise de variância intrablocos pode ser desenvolvida com o auxílio da Tabela 6.

Sendo $\hat{\mu}=G/vru = 389010/81=4802,59$, tem-se que as médias ajustadas de tratamentos principais podem ser obtidas por $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{t}_i$.

Tabela 6 - Tabela auxiliar para a análise de variância intrablocos do segundo exemplo considerado.

i	T _i	A _i	Q _i	S ₁ (Q _i)	S ₂ (Q _i)	$\hat{t}_i$
1	49925	132367	17408/3	-6748	2836/3	45476/54
2	51363	138179	15910/3	-226	-15232/3	47504/54
3	39358	128191	-10117/3	6974	-10805/3	-23377/54
4	45847	135246	2295/3	-226	-1617/3	6659/54
5	42042	130382	-4256/3	6974	-16666/3	-5794/54
6	41822	128336	-2870/3	-6748	23114/3	-15358/54
7	41296	130437	-6549/3	6974	-14373/3	-12673/54
8	44671	128307	5706/3	-6748	14538/3	10370/54
9	32686	115585	-17527/3	-226	18205/3	-52807/54
	389010	1167030	0	0	0	0

As somas de quadrados são:

$$SQT(aj.) = \sum_{i=1}^p \hat{t}_i Q_i = \frac{2935674072}{162} = 18121445$$

$$SQB = \frac{1}{ku} \sum_{j=1}^b B_j^2 - Cor = 12528385$$

$$SQTot = \sum_{ijl} y_{ijl}^2 - Cor = 77648510$$

$$SQPar = \frac{1}{u} \sum_{ij} y_{ij.}^2 - Cor = 34199043$$

$$SQR(a) = SQPar - SQB - SQT(aj.) = 3549213$$

$$SQT^* = \frac{1}{vr} \sum_{l=1}^u y_{...l}^2 - Cor = 13181480$$

$$SQ\ T \times T^* = 12479439$$

$$SQR(b) = SQTot - SQPar - SQT^* - SQ\ T \times T^* = 17788547$$

A soma de quadrados de blocos pode ser decomposta em duas partes: soma de quadrados de repetição (SQR) e soma de quadrados de blocos dentro de repetição (SQB/R), as quais são:

$$SQR = \frac{1}{vu} \sum_{j=1}^r R_j^2 - Cor = 821856$$

$$SQB/R = SQB - SQR = 11706529$$

Desse modo, o quadro de análise de varância é:

V.C.M.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	8	12528385	1566048	
Repet.	2	821856	410928	
Blocos/Rep.	6	11706529	1951088	
Trat. Prin.(T)(aj.)	8	18121445	2265181	6,38 ⁺⁺
Resíduo(a)	10	3549213	354921	
Trat. Sec.(T*)	2	13181480	6590740	13,34 ⁺⁺
T x T*	16	12479439	779965	1,58
Resíduo(b)	36	17788547	494126	
Total	80	77648510		

++ Significativo ao nível de 1% de probabilidade.

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes elementares entre médias de tratamentos, obtidas de acordo com (3.12), são:

i) Um contraste entre duas médias de tratamentos principais, tidos como primeiros associados:

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = 2 \frac{k\Delta - uA_1}{ur(k-1)\Delta} \text{QM}(a) = \frac{8}{27} \text{QM}(a) = 105161,78$$

ii) Um contraste entre duas médias de tratamentos principais tidos como segundos associados:

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = 2 \frac{k\Delta - uA_2}{ur(k-1)\Delta} \text{QM}(a) = \frac{1}{3} \text{QM}(a) = 118307,00$$

iii) Um contraste entre duas médias de tratamentos secundários:

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = \frac{2}{vr} \text{QM}(b) = \frac{2}{27} \text{QM}(b) = 36601,93$$

iv) Um contrastes entre duas médias de tratamentos secundários, em um dado tratamento principal

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{y}_{il} - \bar{y}_{il'}) = \frac{2}{r} \text{QMR}(b) = \frac{2}{3} \text{QMR}(b) = 329417,33$$

v) Um contraste entre duas médias de tratamentos principais em um dado tratamento secundário

$$\hat{\text{Var}}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.l}) = \frac{2}{r} \frac{\text{QMR}(a) + (u-1)\text{QMR}(b)}{u} = 298482,89$$

vi) Um contraste entre efeitos estimados de dois tratamentos secundários, em um dado tratamento principal:

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\delta}_{i.} - \hat{\delta}_{.l}) = \frac{2(v-1)}{vr} \text{QM}(b) = \frac{16}{27} \text{QM}(b) = 282815,41$$

vii) Um contraste entre efeitos estimados de dois tratamentos principais, em um dado tratamento secundário:

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\delta}_{i.} - \hat{\delta}_{.l}) = \frac{2(u-1)}{ur} \text{QM}(b) = \frac{4}{9} \text{QM}(b) = 218611,56$$

5. CONCLUSÕES

O modelo matemático apresentou-se adequado com relação aos objetivos propostos, permitindo testar as hipóteses básicas de nulidade sobre os efeitos de tratamentos principais ou primários, tratamentos secundários e interação.

Os efeitos de tratamentos principais ajustados, em delineamento em blocos incompletos parcialmente balanceado (PBIB), foram estimados de modo análogo àqueles em blocos incompletos balanceados.

Os efeitos estimados de tratamentos secundários e interação foram obtidos como nos ensaios com parcelas subdivididas em blocos casualizados.

A primeira parte da análise de variância envolvendo blocos, tratamentos principais e resíduo(a), é semelhante às análises em blocos incompletos balanceados. A segunda parte, envolvendo tratamentos secundários, interação e resíduo(b) é semelhante às análises com parcelas subdivididas em blocos casualizados.

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$ recai-se em uma análise em blocos incompletos balanceados e, se $b=r$, a análise será de acordo com parcelas subdivididas em blocos casualizados, ficando, assim, caracterizados como casos particulares do modelo proposto.

Os testes F para tratamentos principais, tratamentos secundários e interação são exatos, enquanto, para tratamentos principais dentro de um dado tratamento secundário não existe um teste exato.

A precisão da estimativa de um contraste entre

duas médias de tratamentos principais, depende da classe de associados que esses tratamentos pertencem.

As funções lineares entre efeitos de tratamentos principais, dado um mesmo tratamento secundário, nem sempre são estimáveis. Serão estimáveis aquelas funções provenientes de combinações lineares das observações presentes no mesmo bloco.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, R.L. & BANCROFT, T.A. *Statistical theory in research*. New York, MacGraw-Hill, 1952. 399p.

BARBOSA, G.V.S. Planejamento e análise de ensaios em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados - PBIB₍₂₎. Piracicaba, 1986. 118p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

BOSE, R.C.; CLATWORTHY, W.H.; SHRIKHANDE, S.S. Tables of partially balanced designs with two associate classes. *North Carolina Agricultural Experimental Bulletin*, no. 107, Raleigh, 1954. 255p.

BOSE, R.C. & CONNOR, W.S. Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs. *Annals of Mathematical Statistics*, Baltimore, 23: 367-83, 1952.

BOSE, R.C. & NAIR, K.R. Partially balanced incomplete block design. *Sankhya*, Calcutta, 4: 337-72, 1939.

BOSE, R.C. & SHIMAMOTO, T. Classification and analysis of partially incomplete block designs with two associate. *Journal of the American Statistical Association*, Washington, 47: 151-84, 1952.

CAMPOS, H. *Estatística aplicada a experimentação com cana de açúcar*. São Paulo, Fundação de Estudos Agrários Luiz de Queiroz, 1984. 292p.

CHAKRABARTI, M.C. *Mathematics of design and analysis of experiments*. Bombay, Asia Publishing House, 1962. 120p.

- CLATWORTHY, W.H. Some new families of partially balanced designs of the latin square type and related designs. *Technometrics*, Washington, 9(2): 229-44, 1967.
- COCHRAN, W.G. & COX, G.M. *Experimental designs*. 2.ed. New York, John Wiley & Sons, 1957. 611p.
- CONDE, A.R. Estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas. Piracicaba, 1974. 57p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).
- DANFORD, M.B.; HUGHES, H.M. & McNEE, R.C. On the analysis of repeated measurements experiments. *Biometrics*, Raleigh, 16: 547-65, 1960.
- DAS, M.N. & GIRI, N.C. *Design and analysis of experiments*. 2.ed. New York, John Wiley, 1986. 488p.
- DEY, A. Some new partially balanced designs with two associate classes. *Sankhyā*, Calcutta, 50: 90-94, 1988.
- FEDERER, W.T. *Experimental design; theory and application*. New York, The MacMillan, 1955. 544p.
- GAMA, E.E.G.; VIANNA, R.T.; NASPOLINI FILHO, V. & MAGNAVACA, R. Efeito depressivo da endogamia em gerações avançadas de quatro tipos genéticos de híbridos de milho. *Pesquisa agropecuária brasileira*, Brasília, 20(11): 1293-300, 1985.
- GILL, L.G. *Design and analysis of experiments in the animal and medical sciences*. Ames, The Iowa State University Press, 1978. 3v.
- GRAYBILL, F.A. *An introduction to linear statistical models*. New York, McGraw-Hill, 1961. 463p.
- GRAYBILL, F.A. *Theory and application of the linear models*. 2.ed. Massachusetts, Duxbury Press, 1976. 703p.
- HALPERIN, M. Normal regression theory in the presence of intra-class correlation. *Annals of Mathematical Statistics*, Baltimore, 22: 573-80, 1951.

- HARTER, H.L. On the analysis of split-plot experiments. *Biometrics*, Raleigh, 17(1): 144-9, 1961.
- HICKS, C.R. *Fundamental concepts in the design of experiments*. 2.ed. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1973. 349p.
- IEMMA, A.F. *Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados*. Piracicaba, 1981. 145p. (Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).
- IEMMA, A.F. *Testes de hipóteses nos experimentos com parcelas subdivididas em blocos incompletos balanceados*. *Desarrollo Rural en las Américas*, San José, 15(2): 143-151, 1983.
- IEMMA, A.F. *Modelos lineares; uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária*. Londrina, Departamento de Matemática Aplicada/UEL, 1987. 263p.
- IEMMA, A.F. *Matrizes para estatística; um texto para profissionais de ciências aplicadas*. Piracicaba, ESALQ, Departamento de Matemática e Estatística, 1988. 339p.
- JOHN, P.W.M. *Incomplete block designs*. New York, Marcel Dekker, 1980. 101p.
- KAGEYAMA, S. Connectedness of two-associates PBIB designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Amsterdam, 7: 77-82, 1982.
- KEMPTHORNE, O. Recent developments in the design of field experiments. IV. Lattice squares with split plots. *Journal of Agriculture Science*, Cambridge, 37: 156-62, 1947.
- KEMPTHORNE, O. *The design and analysis of experiments*. New York, John Wiley, 1952. 631p.
- LEAL, M.L.S. *Análise de dados experimentais com medidas repetidas*. Brasília, 1979. 99p. (Mestrado - Universidade Federal de Brasília).

- LEONARD, W.H. & CLARK, A.G. Field plot technique. Minneapolis, Burgess, 1939. 288p.
- LITTLE, T.M. & HILLS, J.F. Agricultural experimentation; design and analysis. New York, John Wiley, 1978. 349p.
- MAGNAVACA, R.; BAHIA FILHO, A.F.C.; LOPES, M.A.; GAMA, E.E. G. Avaliação de híbridos triplos de milho para solos de cerrado. Rel. tec. anu. CNPMS, Sete Lagoas, 3: 40-1, 1986.
- McELROY, F.W. A necessary and sufficient condition that ordinary least-squares estimators be best linear unbiased. Journal of the American Statistician Association, Washington, 62(320): 1302-04, 1967.
- MILLIKEN, G.A. & JOHNSON, D.E. Analysis of messy data; designed experiments. New York, Van Nostrand Reinhold. 1984. 485p.
- MIRANDA FILHO, J.B.; SOUZA JR., C.L. & GERALDI, I.O. Avaliação de híbridos So x So entre duas variedades de milho. In: CONGRESSO NACIONAL DE MILHO E SORGO, 15., Maceió, 1984. Anais. Brasília, EMBRAPA-DDT, 1986. p.177-81.
- MOORE, W. & BLISS, C.I. A method for determining insecticidal effectiveness using *Aphis rumicis* and certain organic compounds. Journal of Economic Entomology, Menasha, 35: 544 - 53, 1942.
- NAIR, K.R. Analysis of partially balanced incomplete block designs illustrated on the simple square and rectangular lattices. Biometrics, Raleigh, 8: 122-55, 1952.
- NIGAM, A.K.; PURI, P.D. & GUPTA, V.K. Characterizations and analysis of block designs. New York, John Wiley, 1989. 176p.
- NOGUEIRA, M.C.S. Curso de estatística experimental aplicada a experimentação agrônoma. Piracicaba, ESALQ-DME, 1991. 168p.

- OGAWA, J. Statistical theory of analysis of experimental designs. New York, Marcel Dekker, 1974. 465p.
- OLIVEIRA, A.C. de Análise intrablocos de experimentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com alguns tratamentos comuns adicionados em cada bloco. Piracicaba, 1985. 153p. (Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).
- PEARSON, E.S. Some comments on the accuracy of Box's approximations to the distribution of M. *Biometrika*, Londres, 56: 219-20, 1969.
- PIMENTEL GOMES, F. Método geral de análise para delineamentos em quadrados reticulados. *Seminários de Estatística*, Piracicaba, 10: 33-54, 1954.
- PIMENTEL GOMES, F. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. *Ciência e Cultura*, São Paulo, 20: 733-46, 1968.
- PIMENTEL GOMES, F. Curso de estatística experimental. 11.ed. Piracicaba, Livraria Nobel, 1985. 466p.
- PINHO, S.Z. Estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas com uma observação perdida. Piracicaba, 1975. 45p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).
- RAGHAVARAO, D. Constructions and combinatorial problems in designs of experiments. New York, John Wiley, 1971. 386p.
- RAO, C.R. On the linear combination of observations and the general theory of least squares. *Sankhyā*, Calcutta, 7: 237-56, 1946.
- RAO, C.R. General methods of analysis for incomplete block designs. *Journal of the American Statistical Association*, Washington, 42: 541-61, 1947.

- RAO, C.R. *Linear statistical inference and its applications*. New York, John Wiley, 1973. 625p.
- REGAZZI, A.J. *Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos secundários em apenas alguns dos tratamentos principais*. Piracicaba, 1984. 105p. (Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).
- RIBOLDI, J. *A decomposição da soma de quadrados de tratamentos nos delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados*. Piracicaba, 1988. 165p. (Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).
- ROBINSON, J. *Incomplete split plot designs*. *Biometrics*, Raleigh, 23: 793-802, 1967.
- SANCHES, S.F. *Análise de experimentos em parcelas subdivididas, em blocos casualizados, com perda de uma ou mais subparcelas ou parcelas*. Piracicaba, 1980. 119p. (Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).
- SCARIANO, S.M. & DAVENPORT, J.M. *The effects of violations of independence assumptions in the one-way ANOVA*. *The American Statistician*, Washington, 41(2): 123-9, 1987.
- SEARLE, S.R. *Linear models*. New York, John Wiley, 1971. 532p.
- SEARLE, S.R. *Linear models for unbalanced data*. New York, John Wiley, 1987. 536p.
- STEEL, R.G.D. & TORRIE, J.H. *Principles and procedures of statistics*. Nova York, McGraw-Hill, 1960. 593p.
- VIZONI, E. *Análise de experimentos em blocos casualizados completos aumentados (blocos de Federer), com parcelas subdivididas no tempo*. Piracicaba, 1984. 125p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

WILKS, S.S. Sample criteria for testing equality of means, equality of variances, and equality of covariances in a normal multivariate distribution. *The Annals of Mathematics Statistics*, Ann Arbor, 17: 257-81, 1946.

YATES, F. A new method of arranging variety involving a large number of varieties. *Journal of Agricultural Science*, Cambridge, 26: 424-55, 1936.

APÊNDICE 1 - Núcleos das formas quadráticas

Aqui estão relacionadas as matrizes dos projetores ortogonais que forneceram as somas de quadrados para a análise da variância. Com finalidade didática, foram considerados os projetores do exemplo ilustrativo do item (3.1).

$$Q_1 = \frac{1}{vru} \begin{bmatrix} E & E & E & E & E & E & E & E \\ E & E & E & E & E & E & E & E \\ E & E & E & E & E & E & E & E \\ E & E & E & E & E & E & E & E \\ E & E & E & E & E & E & E & E \\ E & E & E & E & E & E & E & E \\ E & E & E & E & E & E & E & E \\ E & E & E & E & E & E & E & E \end{bmatrix}_{vru}$$

onde E é uma sub-matriz de uns, de dimensão (u x u).

$$Q_2 = \frac{1}{vru} \begin{bmatrix} B_1 & B_1 & -E & -E & -E & -E & -E & -E \\ B_1 & B_1 & -E & -E & -E & -E & -E & -E \\ -E & -E & B_1 & B_1 & -E & -E & -E & -E \\ -E & -E & B_1 & B_1 & -E & -E & -E & -E \\ -E & -E & -E & -E & B_1 & B_1 & -E & -E \\ -E & -E & -E & -E & B_1 & B_1 & -E & -E \\ -E & -E & -E & -E & -E & -E & B_1 & B_1 \\ -E & -E & -E & -E & -E & -E & B_1 & B_1 \end{bmatrix}_{vru}$$

onde: B_1 é uma sub-matriz com os elementos (b-1), de dimensões (u x u);

E é uma sub-matriz de uns de dimensão (u x u).

$$Q_3 = \frac{1}{k^3 r u (r-1)} \begin{bmatrix} k_1 E & k_2 E & k_3 E & k E & k_4 E & k_5 E & k_6 E & k_7 E \\ k_2 E & k_1 E & k E & k_3 E & k_6 E & k_7 E & k_4 E & k_5 E \\ k_3 E & k E & k_1 E & k_2 E & k_5 E & k_4 E & k_7 E & k_6 E \\ k E & k_3 E & k_2 E & k_1 E & k_7 E & k_6 E & k_5 E & k_4 E \\ k_4 E & k_6 E & k_5 E & k_7 E & k_1 E & k_2 E & k_3 E & k E \\ k_5 E & k_7 E & k_4 E & k_6 E & k_2 E & k_1 E & k E & k_3 E \\ k_6 E & k_4 E & k_7 E & k_5 E & k_3 E & k E & k_1 E & k_2 E \\ k_7 E & k_5 E & k_6 E & k_4 E & k E & k_3 E & k_2 E & k_1 E \end{bmatrix}_{vru}$$

onde; $k_1 = k(k-1)(r-1)(k+1)$; $k_2 = -k(r-1)(k+1)$;
 $k_3 = k(k-1)$; $k_4 = (k-1)^2[(r-1)(k+1)-1]$;
 $k_5 = -(k-1)[(r-1)(k+1)-1]$;
 $k_6 = -(k-1)[(r-1)(k+1)-1]$; $k_7 = (r-1)(k+1)-1$;
 E é uma submatriz de uns, de dimensões $(u \times u)$.

$$Q_4 = \frac{1}{k^3 r u (r-1)} \begin{bmatrix} k_8 E & k_9 E & -k_3 E & k E & -k_4 E & k_5 E & k_6 E & -k_7 E \\ k_9 E & k_8 E & k E & -k_3 E & k_6 E & -k_7 E & -k_4 E & k_5 E \\ -k_3 E & k E & k_8 E & k_9 E & k_5 E & -k_4 E & -k_7 E & k_6 E \\ k E & k_3 E & k_9 E & k_8 E & -k_7 E & k_6 E & k_5 E & -k_4 E \\ -k_4 E & k_6 E & k_5 E & -k_7 E & k_8 E & k_9 E & -k_3 E & k E \\ k_5 E & -k_7 E & -k_4 E & k_6 E & k_9 E & k_8 E & k E & -k_3 E \\ k_6 E & -k_4 E & -k_7 E & k_5 E & -k_3 E & k E & k_8 E & k_9 E \\ -k_7 E & k_5 E & k_6 E & -k_4 E & k E & -k_3 E & k_9 E & k_8 E \end{bmatrix}_{vru}$$

onde: $k_8 = k(k-1)(r-1)(kr-k-1)$; $k_9 = -k(r-1)(kr-k-1)$;
 $k_3 = k(k-1)$; $k_4 = (k-1)^2[(r-1)(k+1)-1]$;
 $k_5 = -(k-1)[(r-1)(k+1)-1]$;
 $k_6 = -(k-1)[(r-1)(k+1)-1]$; $k_7 = (r-1)(k+1)-1$;
 E é uma submatriz de uns, de dimensões $(u \times u)$.

$$Q_5 = \frac{1}{vru} \begin{bmatrix} U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 \\ U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 \\ U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 \\ U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 \\ U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 \\ U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 \\ U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 \\ U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 & U_1 \end{bmatrix}_{vru}$$

onde U_1 é uma submatriz uniforme, de dimensões $(u \times u)$, com os elementos $(u-1)$ na diagonal principal e -1 fora da diagonal.

$$Q_6 = \frac{1}{vru} \begin{bmatrix} (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 \\ -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 \\ -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 \\ -U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 \\ (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 \\ -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 \\ -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 \\ -U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 & -U_1 & -U_1 & -U_1 & (v-1)U_1 \end{bmatrix}_{vru}$$

onde U_1 é uma sub-matriz uniforme, de dimensões $(u \times u)$, com os elementos $u-1$ na diagonal principal e -1 fora da diagonal.

$$Q_7 = \frac{1}{ru} \begin{bmatrix} (r-1)U_1 & \phi & \phi & \phi & -U_1 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & (r-1)U_1 & \phi & \phi & \phi & \phi & -U_1 & \phi \\ \phi & \phi & (r-1)U_1 & \phi & \phi & -U_1 & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & (r-1)U_1 & \phi & \phi & \phi & -U_1 \\ -U_1 & \phi & \phi & \phi & (r-1)U_1 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & -U_1 & \phi & \phi & (r-1)U_1 & \phi & \phi \\ \phi & -U_1 & \phi & \phi & \phi & \phi & (r-1)U_1 & \phi \\ \phi & \phi & \phi & -U_1 & \phi & \phi & \phi & (r-1)U_1 \end{bmatrix}_{vru}$$

onde: ϕ é uma submatriz de zeros, de dimensões $(u \times u)$;

U_1 é uma submatriz uniforme de dimensões $(u \times u)$, com os elementos $u-1$ na diagonal principal e -1 fora da diagonal.

$$P_P = \frac{1}{vru} \begin{bmatrix} (vr-1)E & -E & -E & -E & -E & -E & -E & -E \\ -E & (vr-1)E & -E & -E & -E & -E & -E & -E \\ -E & -E & (vr-1)E & -E & -E & -E & -E & -E \\ -E & -E & -E & (vr-1)E & -E & -E & -E & -E \\ -E & -E & -E & -E & (vr-1)E & -E & -E & -E \\ -E & -E & -E & -E & -E & (vr-1)E & -E & -E \\ -E & -E & -E & -E & -E & -E & (vr-1)E & -E \\ -E & -E & -E & -E & -E & -E & -E & (vr-1)E \end{bmatrix}_{vru}$$

onde E é uma submatriz de uns, de dimensões $(u \times u)$.

APENDICE 2 - Um programa de análise

Aqui está apresentado um programa para ser utilizado no software NTIA, para análise intrabloco de um experimento em parcelas subdivididas com tratamentos principais em um PBIB. Através desse programa, pode-se fazer a análise do Exemplo 1, apresentado no item 4, a partir de um arquivo externo, editado por exemplo, pelo WS, com o nome de NOME.PRG.

```

genese exemplo1
num bloco tp ts vary1; /* nome das variáveis*/
arquivo m = fopen(exemplo1) bloco tp ts vary1;
{
    leiaf(m);
}
modlin -b exemplo1
t1 Exemplo de uma análise intrabloco de um PBIB em parcelas
    subdivididas;
mod vary1 = {bloco tp} [bloco*tp] bloco*tp ts tp*ts;
med tp ts tp*ts;
/* médias de mínimos quadrados*/
}
ordena exemplo1 exelo
class tp ts; /* ordena por trat. primário e trat.
                secundário*/
}
estat exelom
var vary1;
class tp ts;
t1 Médias da interação tratamentos principais x secundários;

```

```

}
estat exelo exelomtp
var vary1;
class tp;
tl Médias de tratamentos principais;
}
ordena exelo exelots
class ts;
}
estat exelots exelomts
var vary1;
class ts;
tl Médias de tratamentos secundários;
} ou fim

```

Sendo que:

- (i) exemplo1 nome de um arquivo externo;
- (ii) exelo, exelom, exelomtp, exelots, exelomts são arquivos criados pelo programa: dados ordenados, médias de interação, médias de tratamentos primários, dados ordenados por tratamentos secundários, médias de tratamentos secundários, respectivamente.

Para executar o programa usa-se o modulo EXEC.

Exec nome.prg > exe1.sai