DELINEAMENTOS ORTOGONAIS E PARCIALMENTE ORTOGONAIS: TEORIA E APLICAÇÃO

DENISE GARCIA DE SANTANA
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. **ANTONIO FRANCISCO IEMMA**

Tese apresentada à Escola Superior de
Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade
de São Paulo, para obtenção do título de
Doutor em Agronomia. Área de Concentração:
Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Dezembro - 2000

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - Campus "Luiz de Queiroz"/USP

Santana, Denise Garcia de
Delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais: teoria e aplicação / Denise Garcia
de Santana. - - Piracicaba, 2000.
135 p.

Tese (doutorado) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, 2000.
Bibliografia.

1. Análise de variância 2. Delineamento de experimento 3. Estatística experimental 4.
Modelo matemático I. Título

CDD 519.5

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor"

Aos meus pais,

Martha de Moraes e Altino Santana

DEDICO

Ao meu marido,

Carlos Alberto e a

meu filho ***Pedro Santana de Oliveira***

OFEREÇO

À minha irmã de coração

Greicilene Pedro

AGRADEÇO

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Antonio Francisco Iemma, por ter ido além da função de orientador.

À CAPES/PICDT pela bolsa de estudo concedida para a realização do curso.

Ao Instituto de Ciências Agrárias da Universidade Federal de Uberlândia-MG pela oportunidade e pela espera.

Aos professores e funcionários do Departamento de Ciências Exatas da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”.

Agradeço a oportunidade de ter encontrado nesse longo caminho Leda Maria Gurgel do Amaral Garrido, referência de dedicação, empenho e amizade.

À minha amiga Silvia Maria de Freitas por ter me estendido a mão nos momentos mais difíceis.

Às amigas Lara Hoffmann Xavier e Jeanete Alves Moreira pelo carinho e companheirismo.

À minha secretária Sandra Maria Aparecida Matias Orsalino pela dedicação ao meu filho Pedro.

SUMÁRIO

	Página
RESUMO.....	vii
SUMMARY.....	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO DE LITERATURA	4
2.1 Conceitos e definições	4
2.2 Funções estimáveis e hipóteses testáveis	9
2.3 Delineamentos ortogonais	11
2.4 Delineamentos parcialmente ortogonais.....	14
3 MATERIAL E MÉTODOS	17
3.1 Material.....	17
3.2 Métodos	17
3.2.1 O termo ortogonal na análise de variância.....	18
3.2.2 Delineamentos ortogonais	20
3.2.2.1 Modelos com dois fatores.....	20
3.2.2.2 Modelos com três fatores.....	24
3.2.2.3 Modelos com quatro fatores.....	30
3.2.2.4 Modelos com K fatores.....	32
3.2.2.5 Propriedades dos delineamentos ortogonais	33
3.2.2.5.1 Quanto às funções estimáveis.....	33
3.2.2.5.2 Quanto às hipóteses.....	34
3.2.3 Delineamentos parcialmente ortogonais.....	37
3.2.3.1 Modelos com três fatores.....	37
3.2.3.2 Modelos com quatro fatores.....	39
3.2.3.3 Modelos com K fatores.....	43
3.2.3.4 Propriedades dos delineamentos parcialmente ortogonais	43
3.2.3.4.1 Quanto às funções estimáveis.....	43
3.2.3.4.2 Quanto às hipóteses.....	44

4	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	47
4.1	Delineamentos ortogonais	47
4.1.1	Modelos com dois fatores	47
4.1.1.1	1º Exemplo	49
4.1.1.2	2º Exemplo	53
4.1.2	Modelos com três fatores.....	58
4.1.2.1	3º Exemplo	61
4.1.2.2	4º Exemplo	67
4.2	Delineamentos parcialmente ortogonais.....	85
4.2.1	Modelos com três fatores.....	85
4.2.1.1	5º Exemplo	85
4.2.2	Modelos com quatro fatores.....	105
4.2.2.1	6º Exemplo	105
4.3	Planejamento de delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais..	114
4.3.1	Planejamento de delineamentos ortogonais	114
4.3.1.1	Modelos com dois fatores.....	114
4.3.1.2	Modelos com três fatores.....	115
4.3.1.3	Modelos com quatro fatores.....	116
4.3.1.4	Modelos com cinco fatores.....	117
4.3.2	Planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais.....	118
4.3.2.1	Modelos com três fatores.....	119
4.3.2.2	Modelos com quatro fatores.....	120
4.3.2.3	Modelos com cinco fatores.....	122
5	CONCLUSÕES.....	127
5.1	Quanto aos delineamentos ortogonais.....	127
5.2	Quanto aos delineamentos parcialmente ortogonais	129
5.3	Considerações gerais.....	130
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	131

DELINEAMENTOS ORTOGONAIS E PARCIALMENTE ORTOGONAIS : TEORIA E APLICAÇÃO

Autora: DENISE GARCIA DE SANTANA

Orientador: Prof. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

RESUMO

Em situações experimentais, não raro, o pesquisador depara-se com a impossibilidade de planejar experimentos balanceados. Um grave problema surge imediatamente, no tocante à interpretação das hipóteses testadas através dos sistemas estatísticos, principalmente quando há vários fatores envolvidos e se faz presente um alto grau de desbalanceamento pois, em geral, as hipóteses sobre os efeitos principais de um dos fatores contêm os efeitos principais de outros fatores, além dos efeitos de interações. Diante disso, o objetivo deste trabalho está centrado no estudo das funções estimáveis e das hipóteses testáveis em delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais com mais de dois fatores, à luz do procedimento GLM do sistema estatístico SAS. Face aos resultados obtidos, concluiu-se que para todos os efeitos principais, nos quais o subespaço gerado é individualmente ortogonal aos subespaços inerentes aos demais fatores, são estimáveis e, portanto, as hipóteses correspondentes são testáveis nos modelos sem interações. Na presença de interações, as funções estimáveis apresentam além de parâmetros do próprio fator, parâmetros das interações nas quais o fator está presente. Para esses casos, independente do modelo conter ou não conter interações, as hipóteses sobre médias ponderadas (tipo I) são equivalentes às hipóteses sobre médias ponderadas ajustadas (tipo II) e, como o termo completo é condição necessária para a ortogonalidade parcial ou plena, ocorre também a equivalência entre as hipóteses sobre médias não ponderadas ajustadas (tipos III e IV). A igualdade entre as hipóteses dos tipos I e II ocorre para todas as interações, nos delineamentos ortogonais e, nos delineamentos parcialmente

ortogonais, ocorre para as interações formadas pelos fatores que não foram ortogonais entre si, pelas interações formadas por combinações de fatores que geraram subespaços individualmente ortogonais aos demais e para as todas as combinações formadas pelos fatores cujos subespaços não foram ortogonais entre si, além dos fatores cujos subespaços gerados foram individualmente ortogonais aos demais. Nessas interações as funções estimáveis apresentam parâmetros da própria interação, além de parâmetros das interações de grau maior que o grau da interação em estudo. Como uma aplicação imediata do conteúdo deste texto e, com o intuito de orientar os pesquisadores no tocante ao planejamento de experimentos ortogonais e parcialmente ortogonais, apresenta-se, ao final, um capítulo sobre o tema.

ORTHOGONAL AND PARTIALLY ORTHOGONAL DESIGNS: THEORY AND APPLICATION

Author: DENISE GARCIA DE SANTANA

Adviser: Prof. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

SUMMARY

In experimental situations, not rarely, the researcher faces the impossibility of planning balanced experiments. A serious problem arises immediately concerning the interpretation of the hypothesis tested with the statistical systems, mainly when there are several problems involved and a high unbalancing degree is present because, generally speaking, the hypothesis on the main effects of one of the factors contains the main effects of other effects, including the effects of the interactions. Taking that into account, the objective of this work is focused on the study of the estimable functions and of the testable hypothesis in orthogonal and partially orthogonal designs with more than two factors, based on the GLM procedure of the SAS statistical system. With the obtained results, one could conclude that for the main effects, in which the generated subspace is individually orthogonal to the inherent subspaces to the other factors, are estimable and, therefore, the corresponding hypothesis testable in models with no interactions. When interactions are present, the estimable functions present besides the parameters of the factor itself, parameters of the interactions in which the factor is present. In these cases, whether the model contains or not interactions, the hypothesis on weighted averages (type I) are equivalent to the hypothesis on proportional averages (type II) and, since the complete term is imperative to both full and partial orthogonalities, the equivalence between the hypothesis on non-proportional averages (types III and IV) also occurs. The equity between the hypothesis of the types I and II occurs in all interactions, in the orthogonal designs and, in the partially orthogonal designs, it occurs in the

interactions formed by the factors that were not orthogonal between themselves, by the interactions formed by a combination of factors that generated subspaces individually orthogonal to the others and in all the combinations formed by the factors of which subspaces were not orthogonal between themselves, including the factors of which generated subspaces were individually orthogonal to the others. In these interactions the estimable functions present parameters of the interaction itself, including parameters of the interactions of higher degree than the degree of the interaction being studied. As an immediate application of the contents of this text and, with the aim of instructing the researchers concerning the planning of orthogonal and partially orthogonal experiments, a chapter on this subject can be found at the end of this abstract.

1 INTRODUÇÃO

Um dos temas da estatística experimental, especificamente em análise de variância, que tem motivado e preocupado os pesquisadores, consiste no estudo das hipóteses realmente testadas através do modelo adotado. De fato, a forma das hipóteses é diretamente dependente da estrutura do delineamento, que está associada entre outras características, às freqüências das caselas. A distribuição das freqüências de maneira homogênea, que caracteriza os conjuntos completos e balanceados, é a mais discutida nos textos de estatística experimental e os modelos oriundos de tais conjuntos, apresentam as hipóteses mais simples de serem interpretadas. Entretanto, conjuntos balanceados podem ser, em muitos casos, uma exceção, pois a perda de parcelas por causas naturais ou acidentais, bem como a impossibilidade física de instalação de conjuntos balanceados constituem situações usuais na experimentação agronômica.

Sabe-se que a utilização de conjuntos desbalanceados afeta a interpretação prática dos resultados, no sentido de que as hipóteses de interesse do pesquisador que, em geral, são aquelas que envolvem apenas funções de um mesmo parâmetro, podem não ser testáveis. Ainda assim, muitos delineamentos de conjuntos desbalanceados ou mesmo incompletos foram, e ainda têm sido interpretados como se fossem balanceados. Naturalmente, tal procedimento pode gerar conclusões errôneas e afirmações que não serão reproduzíveis em ensaios futuros.

Nesse contexto, quando se pensou que a análise de variância era um tema bastante explorado, novos textos de estatística experimental (Azaïs, 1994; Iemma, 1995; Claustriau & Iemma, 1999; Iemma & Claustriau, 1999) surgiram com o enfoque principal no estudo das hipóteses do modelo.

Para o estudo de tais hipóteses, conceitos como os de delineamentos ortogonais e não ortogonais, assim como os de conjuntos

balanceados e desbalanceados, passaram a ser fundamentais. As primeiras idéias sobre delineamentos ortogonais foram apresentadas por Yates¹ (1933) citado por Preece (1977), onde o autor utiliza o termo ortogonal para indicar aqueles delineamentos cujas médias não eram afetadas pelas diferenças entre blocos. Posteriormente, modernizada e formalizada por Pearce (1970), a idéia de ortogonalidade ficou restrita aos modelos de classificação dupla ou de blocos casualizados de conjuntos balanceados, necessitando ser ampliada para modelos mais gerais envolvendo vários fatores e interações.

A grande vantagem dos delineamentos ortogonais consiste no fato de que as funções clássicas envolvendo níveis de apenas um dos fatores são estimáveis e portanto testáveis no modelo sem interação, sejam eles associados a conjuntos balanceados ou desbalanceados. Em relação aos tipos de hipóteses, a ortogonalidade garante a igualdade entre os tipos I e II, ou seja, as hipóteses construídas como funções de médias ponderadas são iguais às hipóteses construídas como funções de médias ponderadas ajustadas, para os efeitos principais e interações. Tal característica facilita de maneira significativa a utilização de programas computacionais para análise estatística. Essas vantagens se estendem aos delineamentos parcialmente ortogonais, pois a condição de ortogonalidade, para algumas combinações de fatores, possibilita a mesma igualdade de hipóteses dos tipos I e II para alguns efeitos principais e interações. Acrescenta-se aos delineamentos parcialmente ortogonais uma maior facilidade de planejamento pela não restrição de todas as combinações entre fatores apresentarem frequências proporcionais.

Diante do exposto, este texto tem por objetivos:

- definir delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais para qualquer número de fatores do modelo;

¹ Yates, F. The principles of orthogonality and confounding in replicated experiments. *Journal of Agricultural Science*, v.23, p.108-145, 1933.

- apresentar a forma geral das hipóteses sobre os efeitos principais e interações para os delineamentos ortogonais, assim como, estabelecer propriedades sob ortogonalidade;
- apresentar a forma geral das hipóteses sobre os efeitos principais e interações para os delineamentos parcialmente ortogonais, assim como, estabelecer propriedades sob ortogonalidade parcial;
- obter um critério para determinação das frequências de caselas de delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Conceitos e definições

A primeira referência consistente do termo ortogonal foi apresentada por Yates (1933), citado por Preece (1977). O autor define ortogonalidade como uma propriedade dos delineamentos que garante que as diferentes classes de efeitos, aos quais o material experimental está sujeito, podem ser isoladas e estimadas sem qualquer obstáculo. Entretanto, a definição de ortogonalidade de Yates (1933) não menciona especificamente o termo delineamento ortogonal.

Pearce (1953) apresenta a seguinte definição para a ortogonalidade: “Duas classificações são mutuamente ortogonais se os vários grupos de parcelas formadas por uma classificação, são compostos de um número de parcelas proporcionais à outra classificação. Quando todos os pares de classificações são mutuamente ortogonais, o delineamento é dito ortogonal.”

Preece (1977) faz uma revisão sobre os termos ortogonalidade e delineamento e mostra a confusão na literatura gerada pelos diferentes significados dos termos, principalmente entre os estatísticos e os chamados “combinatoristas”. O autor comenta, também, que a definição de delineamento ortogonal apresentada por Pearce (1953) deve ser ampliada, principalmente quando aplicada a experimentos fatoriais na presença de interações. Para justificar o comentário, o autor utiliza um exemplo de Yates (1935) de um delineamento com três fatores, onde o fator *A* apresenta três níveis (0, 1 e 2), o fator *B*, dois níveis (0 e 1) e o fator *C* dois níveis (0 e 1). O esquema está descrito no Quadro 1.

Quadro 1. Exemplo de Yates (1935) discutido por Preece (1977).

Bloco 1			Bloco 2			Bloco 3			Bloco 4			Bloco 5			Bloco 6		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	2	0	1	2	0	0	2	0	1	2	0	1	2	0	0
2	1	1	2	1	0	2	1	1	2	1	0	2	1	0	2	1	1

Fonte: Preece (1977).

Verificando os três fatores principais A , B e C , observa-se que eles são mutuamente ortogonais, segundo a definição de Pearce (1953), pois as freqüências dos fatores dois a dois são proporcionais. Além disso, há um balanceamento entre as freqüências geradas pelos três fatores (Quadro 2).

Assim, segundo a definição de Pearce (1953) esse delineamento poderia ser caracterizado como ortogonal, uma vez que os fatores são mutuamente ortogonais e cada fator é ortogonal ao bloco.

Quadro 2. Ortogonalidade segundo a definição de Pearce (1953).

		$B=0$		$B=1$				$B=0$		$B=1$				$C=0$		$C=1$	
		$C=0$	$C=1$	$C=0$	$C=1$			$C=0$	$C=1$			$C=0$	$C=1$			$C=0$	$C=1$
$A=0$	3	3	3	3	$A=0$	6	6	$A=0$	6	6	$A=0$	6	6	$B=0$	9	9	
$A=1$	3	3	3	3	$A=1$	6	6	$A=1$	6	6	$A=1$	6	6	$B=1$	9	9	
$A=2$	3	3	3	3	$A=2$	6	6	$A=2$	6	6	$A=2$	6	6				

Fonte: Preece (1977).

No entanto, observando-se a combinação dos fatores dois a dois dentro dos blocos, observa-se que os efeitos principais A e B , na interação AB são ortogonais aos blocos, mas os fatores principais B e C na interação BC não são ortogonais, pois não há proporcionalidade entre as freqüências de caselas, conseqüentemente a interação ABC também não é ortogonal aos blocos. Isso é mostrado no Quadro 3, com as freqüências de caselas dentro de cada bloco, entre os fatores A e B e os fatores B e C . O caso a mostra as freqüências das caselas dentro de cada bloco para os fatores A e B , e a proporcionalidade entre

as frequências de caselas, o que não ocorre para o caso b para os fatores B e C em relação aos blocos.

Quadro 3. Ortogonalidade parcial, segundo as idéias de Preece (1977).

a Parte ortogonal

Bloco 1			Bloco 2			Bloco 3		
	B=0	B=1		B=0	B=1		B=0	B=1
A=0	1	1	A=0	1	1	A=0	1	1
A=1	1	1	A=1	1	1	A=1	1	1
A=2	1	1	A=2	1	1	A=2	1	1

Bloco 4			Bloco 5			Bloco 6		
	B=0	B=1		B=0	B=1		B=0	B=1
A=0	1	1	A=0	1	1	A=0	1	1
A=1	1	1	A=1	1	1	A=1	1	1
A=2	1	1	A=2	1	1	A=2	1	1

b Parte não ortogonal

Bloco 1			Bloco 2			Bloco 3		
	B=0	B=1		B=0	B=1		B=0	B=1
C=0	2	1	C=0	1	2	C=0	2	1
C=1	1	2	C=1	2	1	C=1	1	2

Bloco 4			Bloco 5			Bloco 6		
	B=0	B=1		B=0	B=1		B=0	B=1
C=0	1	2	C=0	2	1	C=0	1	2
C=1	2	1	C=1	1	2	C=1	2	1

O que foi constatado no artigo de Preece (1977) é que há uma diferença entre delineamentos ortogonais e delineamentos onde apenas parte da estrutura é ortogonal. No exemplo dado, apenas os efeitos principais são ortogonais entre si.

Este tipo de delineamento, ou seja, com ortogonalidade entre efeitos principais, foi discutido também por Addelman (1962). O autor mostra que é possível ocorrer a ortogonalidade entre efeitos principais nos delineamentos com vários fatores e, por conseguinte, a estimação não viesada dos efeitos principais quando a interação não está presente. Entretanto, o

compromisso de se pressupor que não há interação para que as estimativas sejam não viesadas dificulta a modelagem e a interpretação dos resultados.

Claustrioux & Iemma (1999) generalizam a discussão de Preece (1977) incluindo uma discussão sobre os termos completo, ortogonal e balanceado em análise de variância, uma vez que esta trilogia parece confundir autores e pesquisadores. Os autores focalizam a definição de delineamentos ortogonais para modelos com dois fatores, com e sem interação, ampliando as definições anteriores que se fixavam em modelos sem interação. Mostram, ainda, a característica principal de um delineamento ortogonal que é apresentar hipóteses do tipo I iguais às hipóteses do tipo II, provando a propriedade de que sob ortogonalidade, médias ponderadas são iguais a médias ponderadas ajustadas. Esta característica já havia sido discutida sobre um outro enfoque por Yates (1933) citado por Pearce (1963;1983) mostrando que num delineamento ortogonal as médias de tratamentos não eram afetadas pelas diferenças entre blocos. Em termos de hipóteses isso significa que, as funções estimáveis para os efeitos de tratamentos não contêm parâmetros dos blocos.

Azaïs (1994) faz um amplo comentário sobre modelos ortogonais e não ortogonais, mostrando o que o autor chama de decomposições do tipo I, II, III e IV, além de outros tipos de decomposições. O autor também apresenta, de maneira didática, o que acontece com as decomposições quando o número de observações por casela não é constante ou mesmo quando há casela vazia.

Iemma & Claustrioux (1999) enfatizam a nomenclatura, e propiciam uma ampla discussão sobre a análise de variância a dois fatores de classificação com delineamentos ortogonais e não ortogonais, enfocando as funções estimáveis dos tipos I, II, III e IV fornecidas pelos sistemas SAS (X, 1990) e Minitab (X, 1996). Uma grande contribuição do artigo consiste na apresentação de uma figura resumo (Figura 1), contendo tipos de hipóteses associadas às estruturas dos delineamentos e dos dados.

Figura 1. Organograma dos delineamentos ortogonais e não ortogonais com dois fatores, para modelos com e sem interação; balanceados e desbalanceados de conjuntos completos e incompletos.

2.2 Funções estimáveis e hipóteses testáveis

No planejamento de delineamentos experimentais é importante que o pesquisador defina, antecipadamente, quais são as hipóteses de maior interesse. Na verdade, conforme a relação modelo-dados, muitas das hipóteses de interesse em sua pesquisa podem não ser testáveis. Para que uma hipótese seja testável é necessário que a função paramétrica que a descreve seja estimável. Segundo Rao (1945) uma função linear paramétrica $\lambda'\theta$ é dita estimável no modelo $y = X\theta + e$, Gauss Markov normal ordinário, se e somente se, existe uma combinação linear das observações, $a'y$, tal que $E[a'y] = \lambda'\theta$ (Lemma, 1990).

Se $\lambda'\theta$ é estimável, ela apresenta vários estimadores não viesados, dentro os quais um único é classificado como melhor. Seja o modelo de Gauss-Markov e sejam as possíveis combinações $a'y$ tais que: $E[a'y] = \lambda'\theta$. Então a^*y é o melhor estimador não viesado de $\lambda'\theta$, se e somente se, $\text{var}[a^*y] = \min \text{var}[a'y]$, $\forall a'y: E[a'y] = \lambda'\theta$. Nesse contexto, segundo o teorema de Gauss-Markov, seu BLUE é obtido de modo único, através de $\hat{\lambda'\theta} = \lambda'\theta^\circ$, onde θ° é qualquer solução das equações normais. Sua variância é dada por: $\text{var}[\hat{\lambda'\theta}] = \text{var}[\lambda'\theta^\circ] = \lambda'(X'X)^G \lambda \sigma^2$.

A definição apresentada por Rao (1945) tem grande importância nas demonstrações teóricas, mas tem de pouco valor prático, uma vez que depende da dimensão dos dados. Isto levou ao estabelecimento de regras práticas de estimabilidade. Dentre as regras de estimabilidade mais importantes estão as funções básicas estimáveis incorporadas pelo Proc GLM do SAS, que constrói uma forma geral para as funções estimáveis através das linhas não nulas de $L = (X'X)^{g^2} X'X$ (Mondardo, 1994). Assim, a forma geral apresentada pelo sistema SAS (X, 1990) das funções estimáveis envolve todos os parâmetros do modelo e à cada linha não nula, linearmente independente, de $(X'X)^{g^2} X'X$ é associado um símbolo L, de modo que o número de L's

diferentes representa o posto máximo da hipótese testada. O procedimento GLM do sistema estatístico SAS tem como padrão construir a matriz L , utilizando como inversa generalizada de $X'X$, a inversa reflexiva $g2$. A matriz L é a mesma matriz H descrita por Iemma (1987).

No sistema SAS (X, 1990) são incorporados quatro tipos de funções estimáveis: funções sobre médias ponderadas não ajustadas (Tipo I), funções sobre médias ponderadas ajustadas (Tipo II), funções sobre médias não ponderadas ajustadas (Tipo III) e funções sobre médias não ponderadas ajustadas, segundo as caselas vazias (Tipo IV) (Iemma, 1991).

A escolha das funções estimáveis do tipo I para os efeitos principais pode envolver parâmetros do outro fator quando na presença de caselas vazias ou mesmo em conjuntos completos não ortogonais de modelos sem interação, além de parâmetros da interação nos modelos com interação. Essa característica dificulta sobremaneira a interpretação dos resultados pelo pesquisador. Já as funções estimáveis do tipo II por serem ajustadas para o outro fator, podem testar hipóteses de maior interesse do pesquisador quando não há caselas vazias. As funções estimáveis do tipo III são importantes no estudo de modelos com interação, mas quando o número de caselas vazias e o número de níveis do fator aumenta, elas podem ser complexas e mesmo fugir do interesse do pesquisador (Mondardo, 1994).

Diante disso, Camarinha Filho (1995) discute que é indispensável que os manuais de pacotes estatísticos sejam mais esclarecedores, minimizando os erros de interpretações das hipóteses na análise dos dados. Acrescenta Santos (1994) a importância da interpretação correta das hipóteses devido a grande diversidade de programas computacionais, principalmente na presença de caselas vazias.

Aliado ao problema da interpretação das hipóteses está a escolha do modelo. Os modelos superparametrizados, conhecidos como modelo-S são de grande interesse pois mostram explicitamente os parâmetros. Entretanto, segundo Hocking (1985), Searle (1987) e Iemma (1989;1991) entre outros, esses modelos apresentam o inconveniente de apresentar mais parâmetros do que médias de caselas. Diante do problema, o modelo de média de caselas

descrito em Speed, Hocking & Hackney (1978), conhecido como modelo-M, é uma alternativa ao problema do excesso de parâmetros, apresentando ainda a vantagem de descrever as hipóteses com grande facilidade.

2.3 Delineamentos ortogonais

Pearce (1970) formaliza os delineamentos ortogonais no seu caso mais geral, onde a ortogonalidade é caracterizada pela independência da média ajustada de tratamentos, dos efeitos dos blocos. As considerações do autor iniciam com a utilização da notação apresentada por Tocher (1952) que, utilizando a teoria dos delineamentos em blocos incompletos, define uma matriz de incidência n , cujos elementos são formados pelo número de vezes em que cada tratamento ocorre em cada bloco e define $x^{\alpha\delta}$ como uma matriz diagonal com elementos, $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots$, onde $x_1, x_2, \dots$, são os elementos do vetor x . A seguir, o autor utiliza a notação apresentada por Jones (1959), que trabalha com duas matrizes de delineamento, a matriz D referente aos blocos e a matriz Δ referente aos tratamentos. Então, $n = \Delta D'$, $k^\delta = DD'$, $r^\delta = \Delta\Delta'$, $D1 = k$, $\Delta 1 = r$ e $D'1 = 1 = \Delta'1$. Se os dados são descritos através do vetor y , o vetor dos totais de blocos é $B = Dy$ e o vetor de totais de tratamentos é $T = \Delta y$. O total geral G é dado tanto por $B'1$ como por $T'1$ e a média geral é $m = G/N$, onde N é o número total de observações.

Tocher (1952) mostra a importância da matriz Ω definida como:

$$\Omega^{-1} = (r^\delta - nk^{-\delta}n' + rr'/N)^{-1} \quad (1)$$

sendo Ω^{-1} uma inversa clássica de Ω sob a restrição $r'\hat{\tau} = 0$.

Consequentemente,

$$Q = T - nk^{-\delta}B \quad (2)$$

onde Q é o vetor $v \times 1$ dos totais ajustados de tratamentos. Então, o vetor de efeitos de tratamentos γ é estimado por ΩQ . Se a média geral m é

acrescentada em cada elemento, o resultado é o vetor de médias ajustadas de tratamentos α , dado por

$$\alpha = m1 + \Omega Q \quad (3)$$

Assim, tem-se a matriz de covariâncias

$$\Omega \hat{\sigma}^2 \quad (4)$$

onde $\hat{\sigma}^2$ é o quadrado médio do resíduo da análise de variância. A soma de quadrados de tratamentos é dada por:

$$Q' \Omega Q \quad (5)$$

Segundo Pearce (1970), se o delineamento é ortogonal, todos elementos da diagonal de Ω e, conseqüentemente, $\Omega^{-1} = r^\delta$ e $nk^{-\delta}n' - rr'/N$ são iguais a zero.

Generalizando, o i -ésimo elemento da diagonal de $nk^{-\delta}n' - rr'/N$ é

$$\sum_j (n_{ij}^2 / k_j) - r_i^2 / N = \sum_j \{ (n_{ij} - r_i k_j / N)^2 / k_j \} = 0$$

Entretanto, para todos i e j , $n_{ij} = r_i k_j / N$, ou seja,

$$n = \frac{rk'}{N} \quad (6)$$

sendo descrita como condição de ortogonalidade, onde k é vetor que contém as frequências de blocos.

Segundo o autor, isso significa que todos os blocos são construídos proporcionalmente, da mesma maneira, com relação aos tratamentos e todos os tratamentos são distribuídos proporcionalmente entre os blocos. Substituindo (6) em (1), chega-se a:

$$\Omega = r^{-\delta}$$

isto é, as médias ajustadas de tratamentos são independentemente distribuídas.

Outro aspecto importante dos delineamentos ortogonais, segundo Pearce (1970), é que nestes, todos os contrastes são estimados com a mesma eficiência. Isto não significa que delineamentos não ortogonais sejam menos

eficientes, como é o caso dos desbalanceamentos planejados, que apesar de serem formados por conjuntos incompletos como os blocos incompletos balanceados, os latices e os quadrados latinos, possuem variâncias constantes nos contrastes simples entre dois níveis de um mesmo fator (Claustriau & Iemma, 1999).

O estudo dos delineamentos ortogonais com dois fatores (Iemma & Claustriau, 1999) e três fatores (Iemma & Santana, 2000) de modelos com e sem interações, ampliou a própria definição, que anteriormente era restrita a modelos com dois fatores sem interação, e enfatizou a propriedade dos delineamentos ortogonais de apresentarem hipóteses do tipo I iguais às hipóteses do tipo II. Uma prova dessa igualdade para modelos com dois fatores foi apresentada por Christensen (1987). Utilizando a notação $R(\cdot)$, o autor mostrou que para o modelo caracterizado por $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$ oriundo de um delineamento ortogonal, a hipótese do tipo I é igual a hipótese do tipo II para qualquer fator do modelo e, portanto, $R(\alpha | \mu) = R(\alpha | \mu, \beta)$ e $R(\beta | \mu) = R(\beta | \mu, \alpha)$.

A igualdade $R(\beta | \mu) = R(\beta | \mu, \alpha)$ ocorre para todo y , se e somente se $C(P_{\mu, \beta} - \frac{1}{n} JJ') \perp C(P_{\mu, \alpha} - \frac{1}{n} JJ')$, ou seja, $(P_{\mu, \beta} - \frac{1}{n} JJ')(P_{\mu, \alpha} - \frac{1}{n} JJ') = \phi$.

Sendo $R(\beta | \mu) = y'(P_{\mu, \beta} - \frac{1}{n} JJ')y$ e $R(\beta | \mu, \alpha) = y'(P - P_{\mu, \alpha})y$ é suficiente mostrar que

$$(P_{\mu, \beta} - \frac{1}{n} JJ') = (P - P_{\mu, \alpha}) \Leftrightarrow (P_{\mu, \beta} - \frac{1}{n} JJ')(P_{\mu, \alpha} - \frac{1}{n} JJ') = \phi$$

Outra maneira de verificar a ortogonalidade, sem a utilização da notação $R(\cdot)$ é obtida através da utilização do método de ortogonalização de Gram-Schmidt que segundo Christensen (1987) consiste em tornar todas as colunas de α e β ortogonais a J . Se as colunas transformadas α são ortogonais as colunas transformadas de β então $R(\beta | \mu) = R(\beta | \mu, \alpha)$ e pela simetria $R(\alpha | \mu) = R(\alpha | \mu, \beta)$. Em Iemma (1990) este algoritmo está descrito em detalhes.

Para modelos com três fatores Iemma & Santana (2000) mostram que a ortogonalidade é obtida quando combinações dos fatores dois a dois apresentam frequências de caselas proporcionais, sendo estas proporcionalidades para um modelo com três fatores caracterizado por: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$ com $i=1, \dots, a$ níveis do fator A ; $j=1, \dots, b$ níveis do fator B ; $k=1, \dots, c$ níveis do fator C e $l=1, \dots, n_{ijk}$ observações na casela $(i; j; k)$ as proporcionalidades dadas por:

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}} = \frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}}, \forall (i \neq i'; j \neq j'); \quad \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \quad \forall (i \neq i', k \neq k')$$

$$\frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} \quad \forall (j \neq j', k \neq k')$$

Os autores mostraram ainda, que dada a ortogonalidade, as somas de quadrados associadas as hipóteses dos tipos I e II são iguais para todos os efeitos principais e interações do modelo, e que funções de um mesmo parâmetro são estimáveis num modelo sem interações. Além disso, em decorrência da ortogonalidade, ocorre a igualdade entre todas as decomposições das somas de quadrados para cada efeito principal e interação.

2.4 Delineamentos parcialmente ortogonais

Pearce (1983) mostra que a condição de ortogonalidade proposta por Pearce (1970) dada por $n = \frac{rk'}{N}$ e pode não ser aplicada para todos os tratamentos, mas para apenas um grupo de tratamentos. Neste caso,

$$N = \frac{1}{n} \left[\frac{\rho}{M} k' \right], \quad r = N 1_b = \left[\frac{\rho}{\rho_o} \right]$$

onde ρ é o vetor de repetições dos tratamentos dispostos ortogonalmente e M é arbitrário ($M1_b/n = \rho_o$). Então,

$$\Omega^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \rho^\delta & 0' \\ \hline 0 & \rho_o^\delta - Mk^{-\delta}M^{-1}/n^2 + \rho_o\rho_o'/n \end{array} \right]$$

Isto mostra que os contrastes podem ser estimados com a maior eficiência se for considerada apenas a parte na qual a ortogonalidade foi alcançada. Em alguns casos é útil isolar o componente não ortogonal do delineamento. Escrevendo Ω^{-1} como:

$$\Omega^{-1} = r^\delta - N k^{-\delta} N' + rr'/n,$$

então,

$$\Omega^{-1} = r^\delta - Ak^{-\delta}A'$$

onde:

$$A = N - rk'/n$$

é uma matriz definida como a matriz de não ortogonalidade (Pearce 1970).

As idéias de estruturas parcialmente ortogonais foram largamente apresentadas e discutidas por Finney (1945a, 1945b, 1946a, 1946b) em seus estudos sobre as propriedades ortogonais de delineamentos em quadrados latinos, 4x4, 5x5 e 6x6, nos quais mostra a importância da ortogonalidade para o estudo de efeitos principais no modelo.

Como aconteceu com os delineamentos ortogonais, a teoria de delineamentos parcialmente ortogonais esteve centrada nos modelos com dois fatores, sem interação. Santana & Iemma (2000) estudando os delineamentos parcialmente ortogonais com três ou mais fatores, mostraram que quando até $K-2$ fatores, onde K é o número de fatores, apresentam subespaços gerados individualmente ortogonais aos demais fatores, a igualdade entre as hipóteses do tipo I e II é mantida para esse grupo de fatores e para a interação formada pela combinação de fatores cujos subespaços não foram ortogonais entre si, além de outras interações quando o modelo tem mais de três fatores.

Santana & Iemma (2000) apresentaram diagramas mostrando os casos de ortogonalidade parcial para modelos com três ou mais fatores que são referências para o planejamento de experimentos onde o interesse do pesquisador está centrado em apenas alguns parâmetros e interações e portanto, não se faz necessário que todas as combinações de fatores dois a dois apresentem frequências proporcionais nas caselas.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Material

Os exemplos utilizados nesse estudo, fazem parte do ensaio instalado sobre canafístula (*Pelthophorum dubium* Spreng) e conduzido no Laboratório de Análise de Sementes da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” –USP, com o objetivo de ilustrar os resultados aqui obtidos. O experimento constou de quatro fatores: substrato (rolo de papel e caixa “gerbox”), temperatura (25 e 30°C), dormência (com e sem quebra de dormência) e época de avaliação (5 e 10 dias), sendo que as frequências das caselas e o número de fatores utilizados em cada exemplo foram determinados em função do delineamento: ortogonal (balanceado ou desbalanceado) ou parcialmente ortogonal, com cada observação composta por 50 sementes de canafístula .

3.2 Métodos

A notação básica utilizada nesse estudo é aquela apresentada por Iemma & Palm (1992), Iemma & Claustrioux (1997; 1998) e Claustrioux & Iemma (1999) sobre os delineamentos ortogonais com dois fatores, que foi o ponto de partida desta pesquisa. As definições e propriedades dos delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais foram sedimentadas, após estudos sobre as frequências das caselas de modelos com dois, três e quatro fatores, na presença e ausência de interações.

3.2.1 O termo ortogonal na análise de variância

Seja o modelo linear $y = X\theta + e$, onde y é um vetor de dados, estocasticamente entendido como um vetor de realizações de variáveis aleatórias; X é uma matriz de delineamento, de posto completo ou incompleto; θ é um vetor de parâmetros desconhecidos e e é um vetor de variáveis aleatórias não-observáveis.

Nesse contexto, o correspondente sistema de equações lineares $y = X\theta$ é sabidamente inconsistente e uma alternativa para obter uma boa aproximação para θ , consiste na utilização do método de mínimos quadrados.

Ademais, o sistema de equações normais $X'X\theta = X'y$, sempre consistente, fornece soluções aproximadas de mínimos quadrados, $\theta^o = (X'X)^G X'y$, para o sistema inconsistente $y = X\theta$, onde $(X'X)^G$ é uma inversa generalizada qualquer de $X'X$. Além disso, para qualquer θ^o , solução das equações normais, a aproximação de mínimos quadrados $\hat{y} = X\theta^o$ para o vetor y , é invariante. Também, $\hat{y} = X\theta^o = Py$, ou seja, a aproximação de mínimos quadrados para y , coincide com a projeção ortogonal de y sobre o espaço gerado pelas colunas de X , $C(X)$ (Iemma & Palm, 1992).

Tem-se ainda, o erro devido à aproximação de mínimos quadrados, dado por $\hat{e} = y - \hat{y} = (I - P)y$, onde, $\hat{e}$ pertence ao complemento ortogonal do espaço coluna da matriz X . Assim, fica garantida a partição do vetor y de observações, na soma de dois vetores pertencentes a subespaços ortogonais: o vetor $\hat{y} \in C(X)$ e o vetor $\hat{e} \in C^\perp(X)$ (Figura 2).

Figura 2. Decomposição ortogonal do vetor y das observações.

Dada a ortogonalidade, aplica-se o Teorema de Pitágoras, obtendo-se a decomposição conhecida como análise de variância. Assim,

$$\|y\|^2 = \|\hat{y}\|^2 + \|\hat{e}\|^2$$

onde:

$$\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = y' y = \text{Soma de quadrados total}$$

$$\|\hat{y}\|^2 = \langle \hat{y}, \hat{y} \rangle = \hat{y}' \hat{y} = y' P y = \text{Soma de quadrados de parâmetros}$$

$$\|\hat{e}\|^2 = \langle \hat{e}, \hat{e} \rangle = \hat{e}' \hat{e} = y' (I - P) y = \text{Soma de quadrados de erros}$$

A primeira partição $\|y\|^2 = \|\hat{y}\|^2 + \|\hat{e}\|^2$ é sempre ortogonal, por construção, mas tem pouco valor prático (Iemma, Palm & Claustrioux, 1993). A segunda partição, isto é, a decomposição da soma de quadrados de parâmetros, é que reflete os anseios do pesquisador e é sobre tal decomposição que foram inseridos os termos delineamento ortogonal e parcialmente ortogonal.

3.2.2 Delineamentos ortogonais

3.2.2.1 Modelos com dois fatores

Definição 1. Segundo Azaïs (1994), um modelo com dois fatores cruzados sem interação, descrito por: $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$ com $i = 1, \dots, a$ níveis do fator A; $j = 1, \dots, b$ níveis do fator B; $k = 1, \dots, n_{ij}$ observações na casela (i, j) , é dito ortogonal se o subespaço gerado pelas colunas de X_α (submatriz de X referente ao fator A) após o ajuste de μ , é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas de X_β (submatriz de X referente ao fator B), após o ajuste de μ .

A matriz do modelo linear $y = X\theta + e$ apresenta, então, a seguinte partição:

$$X = [X_\mu \mid X_\alpha \mid X_\beta]$$

Tem-se um delineamento ortogonal se:

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$$

onde:

$X_{\alpha|\mu}$ é a submatriz de X que denota o ajuste de α , após o ajuste de μ ;

$X_{\beta|\mu}$ é a submatriz de X que denota o ajuste de β , após o ajuste de μ .

Teorema 1. “Uma condição necessária e suficiente para que os subespaços, descritos na definição 1, sejam ortogonais é que as frequências das caselas sejam proporcionais” (Claustrioux & Lemma, 1999).

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{ij}}{n_{i'j'}} = \frac{n_{ij'}}{n_{i'j}}; \quad \forall (i \neq i', j \neq j')$$

A prova do teorema 1, pode ser obtida, utilizando-se de propriedades da álgebra de matrizes ou por indução. Em álgebra de matrizes,

mostra-se que se o subespaço gerado pelas colunas de X_α , após ajuste de μ , é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas de X_β , após o ajuste de μ , o produto dos respectivos projetores é nulo,

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow P_{\alpha|\mu} P_{\beta|\mu} = \emptyset$$

Sendo $P_{\alpha|\mu} = P_{\mu,\alpha} - P_\mu$ e $P_{\beta|\mu} = P_{\mu,\beta} - P_\mu$, então,

$$(P_{\mu,\alpha} - P_\mu)(P_{\mu,\beta} - P_\mu) = P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\beta} - P_{\mu,\alpha} P_\mu - P_\mu P_{\mu,\beta} + P_\mu P_\mu = \emptyset \quad (1)$$

onde as matrizes envolvidas são simétricas e idempotentes, por serem projetores ortogonais.

Além disso, se $C(X_\mu) \subset C(X_{\mu,\alpha})$ e $C(X_\mu) \subset C(X_{\mu,\beta})$, então:

$$P_\mu P_{\mu,\alpha} = P_{\mu,\alpha} P_\mu = P_\mu \text{ e } P_\mu P_{\mu,\beta} = P_{\mu,\beta} P_\mu = P_\mu$$

Dada a idempotência de P_μ , a expressão 1 passa a ser escrita como:

$$P_{\alpha|\mu} P_{\beta|\mu} = P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\beta} - P_\mu = \emptyset,$$

resultando assim, na seguinte condição de ortogonalidade,

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\beta} = P_\mu \quad (2)$$

Para o modelo linear ordinário de Gauss-Markov $y = X\theta + e$, o projetor referente a μ é: $P_\mu = X_\mu X_\mu^+$, onde X^+ é a inversa generalizada de Moore-Penrose de X . Uma representação de cada termo de P_μ é apresentada a seguir.

$$P_\mu = (p_{ijk}); \quad p_{ijk} = \frac{1}{n_{..}}; \quad \forall (i, j, k)$$

Sendo $P_{\mu,\alpha} = P_\alpha$ e $P_{\mu,\beta} = P_\beta$ (Iemma 1989) o produto $P_{\mu,\alpha}P_{\mu,\beta}$ passa a ser escrito da seguinte forma: $P_{\mu,\alpha}P_{\mu,\beta} = X_\alpha X_\alpha^+ X_\beta X_\beta^+$. Como as matrizes X_α e X_β são de posto coluna completo e, portanto, possuem inversa à esquerda, tem-se:

$$P_{\mu,\alpha}P_{\mu,\beta} = X_\alpha (X_\alpha' X_\alpha)^{-1} X_\alpha' X_\beta (X_\beta' X_\beta)^{-1} X_\beta' \quad (3)$$

Estudando-se a forma de algumas matrizes definidas em (3), tem-se as seguintes estruturas,

$$(X_\alpha' X_\alpha)^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n_{.i}} \right\}; \quad (X_\beta' X_\beta)^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n_{.j}} \right\}$$

Como pode ser observado, a inversa clássica do produto $X_\alpha' X_\alpha$ é uma matriz diagonal cujos elementos não nulos, correspondem aos inversos das frequências de cada nível do fator A , o mesmo acontecendo para o fator B . O produto entre as matrizes devidas aos fatores A e B descrito por $X_\alpha' X_\beta$, tem como resultado uma matriz cujos elementos são exatamente as frequências das caselas de uma tabela de contingência de dupla entrada representada por:

$$X_\alpha' X_\beta = (x_{ij}), \quad x_{ij} = n_{ij}$$

O produto matricial da expressão 3, é apresentado a seguir.

$$P_{\mu,\alpha}P_{\mu,\beta} = X_\alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{.i}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{.j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{ij} & n_{ij'} \\ n_{i'j} & n_{i'j'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{.j}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{.j'}} \end{bmatrix} X_\beta'$$

Efetuando-se o produto, obteve-se uma representação de cada termo da matriz definida em (3),

$$P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\beta} = (p_{ijk}^*), \quad p_{ijk}^* = \frac{n_{ij}}{n_{i.} n_{.j}}$$

Portanto, da condição de ortogonalidade em (2), tem-se a seguinte relação,

$$\frac{n_{ij}}{n_{i.} n_{.j}} = \frac{1}{n_{..}}$$

Desse modo,

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{ij}}{n_{i.} n_{.j}} = \frac{1}{n_{..}}$$

Então,

$$n_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n_{..}} \quad (4)$$

é uma condição necessária e suficiente, em termos das freqüências das caselas, para a ortogonalidade dos dois subespaços de um modelo com dois fatores. Pode-se verificar também, que uma condição necessária e suficiente para $n_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n_{..}}$, é que as freqüências das caselas sejam proporcionais, isto é:

$$\frac{n_{ij}}{n_{ij'}} = \frac{n_{i'j}}{n_{i'j'}} \quad , \quad \forall (i \neq i', j \neq j') \quad (5)$$

Segundo Iemma & Claustriau (1997), a proporcionalidade entre as freqüências de caselas, faz com que muitos autores utilizem os termos ortogonal e proporcional como sinônimos sem grandes problemas. Assim, uma simplificação, em termos da compreensão do pesquisador, do conceito de delineamentos ortogonais pode ser feita, enfocando-se diretamente os casos nos quais as freqüências das caselas são proporcionais.

3.2.2.2 Modelos com três fatores

O estudo dos delineamentos ortogonais com três fatores é uma extensão dos trabalhos de Iemma & Palm (1992), Iemma & Claustrioux (1997, 1998) e Claustrioux & Iemma (1999) sobre os delineamentos ortogonais com dois fatores, como dito anteriormente, bem como da definição apresentada por Pearce (1953). Nessa definição, o autor afirma que a ortogonalidade é garantida quando todos os pares de “classificações” são mutuamente ortogonais. Fazendo uma ampliação dessa definição, isso implica que independente do número de fatores do modelo, a ortogonalidade é conseguida quando os fatores dois a dois são ortogonais.

As idéias de Pearce (1953) associadas às de Azaïs (1994), de Iemma & Claustrioux (1997; 1998) e de Claustrioux & Iemma (1999) motivaram a seguinte definição:

Definição 2. Um delineamento com três fatores cruzados sem interações, caracterizado por: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$ com $i=1, \dots, a$ níveis do fator A ; $j=1, \dots, b$ níveis do fator B ; $k=1, \dots, c$ níveis do fator C e $l=1, \dots, n_{ijk}$ observações na casela $(i; j; k)$, é dito ortogonal, se o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a cada fator, após o ajuste de μ , é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros dois fatores, após o ajuste de μ .

A matriz do modelo linear $y = X\theta + e$ apresenta, então, a seguinte partição:

$$X = [X_\mu \mid X_\alpha \mid X_\beta \mid X_\gamma]$$

onde:

X_μ é a submatriz de X referente a constante μ ;

X_α é a submatriz de X referente ao fator A ;

X_β é a submatriz de X referente ao fator B ;

X_γ é a submatriz de X referente ao fator C .

E, de modo análogo à definição 1 obtém-se: $X_{\alpha|\mu}, X_{\beta|\mu}$ e $X_{\gamma|\mu}$.

Teorema 2. “Uma condição necessária e suficiente para que um delineamento com K fatores ($K \geq 2$) seja ortogonal é que as frequências das caselas entre os fatores dois a dois sejam proporcionais”.

Para a prova do teorema 2 utilizou-se a mesma seqüência apresentada na prova do teorema 1, mas agora aplicada aos fatores dois a dois. Na seqüência discutem-se, detalhadamente, as formas de obtenção das proporções para as frequências de caselas de um modelo com três fatores.

a) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores A e B

Se num modelo com três fatores, conforme descrito na definição 2, o subespaço gerado pelas colunas de $X_{\alpha|\mu}$ é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas de $X_{\beta|\mu}$, então:

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$$

Da aplicação do teorema 2 para os fatores A e B , obteve-se a seguinte condição:

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{ij.}}{n_{i'j'.}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{ij'.}}, \quad \forall (i \neq i'; j \neq j') \quad (6)$$

A prova do teorema 2, como dito anteriormente, é uma extensão da prova do teorema 1. Algumas diferenças na notação diferenciam a maneira de provar de cada uma. Assim, os passos em comum não foram apresentados. Na seqüência são apresentadas apenas as etapas da prova do teorema 2 ainda não detalhadas neste texto.

Da condição de ortogonalidade apresentada em (2), tem-se:

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\beta} = P_{\mu} \quad (7)$$

O projetor referente a μ é dado por:

$$P_{\mu} = (p_{ijkl}); \quad p_{ijkl} = \frac{1}{n_{...}}, \quad \forall(i, j, k, l)$$

Da expressão 3, tem-se:

$$P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\beta} = X_{\alpha} (X'_{\alpha} X_{\alpha})^{-1} X'_{\alpha} X_{\beta} (X'_{\beta} X_{\beta})^{-1} X'_{\beta} \quad (8)$$

onde para um modelo com três fatores, os termos são:

$$(X'_{\alpha} X_{\alpha})^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n_{i..}} \right\}; \quad (X'_{\beta} X_{\beta})^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n_{.j.}} \right\}; \quad X'_{\alpha} X_{\beta} = (x_{ij.}), \quad x_{ij.} = n_{ij.}$$

O produto matricial da expressão 8, é apresentado na sequência:

$$P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\beta} = X_{\alpha} \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{i..}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{i..}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{ij.} & n_{ij'.} \\ n_{ij.} & n_{ij'.} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{.j.}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{.j.}} \end{bmatrix} X'_{\beta}$$

Assim, pode-se representar cada termo da expressão 8 por:

$$P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\beta} = (p_{ij.l}^*), \quad p_{ij.l}^* = \frac{n_{ij.}}{n_{i..} n_{.j.}}$$

Portanto, da condição de ortogonalidade dada em (2), tem-se:

$$\frac{n_{ij.}}{n_{i..} n_{.j.}} = \frac{1}{n_{...}}$$

Desse modo,

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{ij.}}{n_{i..} n_{.j.}} = \frac{1}{n_{...}} \quad (9)$$

obtendo-se a seguinte proporção entre as freqüências de caselas,

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'.}}, \quad \forall (i \neq i'; j \neq j') \quad (10)$$

b) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores A e C

Se num modelo com três fatores, conforme descrito na definição 2, o subespaço gerado pelas colunas de $X_{\alpha|\mu}$ é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas de $X_{\gamma|\mu}$, então:

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$$

Assim como para os fatores A e B , prova-se o teorema 2 para os fatores A e C , aplicando-se as mesmas deduções feitas para o teorema 1.

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \quad \forall (i \neq i'; j \neq j') \quad (11)$$

Adaptando-se a condição de ortogonalidade dada em (2), para os fatores A e C , tem-se:

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow P_{\alpha|\mu} P_{\gamma|\mu} = P_{\mu} \quad (12)$$

O projetor referente a μ , como já mencionado, é:

$$P_{\mu} = (p_{ijkl}); \quad p_{ijkl} = \frac{1}{n_{...}}, \quad \forall (i, j, k, l)$$

Adaptando-se a expressão 3, para os fatores A e C , obtém-se:

$$P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\gamma} = X_{\alpha} (X'_{\alpha} X_{\alpha})^{-1} X'_{\alpha} X_{\gamma} (X'_{\gamma} X_{\gamma})^{-1} X'_{\gamma} \quad (13)$$

onde:

$$(X'_{\alpha} X_{\alpha})^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n_{i..}} \right\}; \quad (X'_{\gamma} X_{\gamma})^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n_{..k}} \right\}; \quad X'_{\alpha} X_{\gamma} = (x_{i.k}), \quad x_{i.k} = n_{i.k}$$

O produto matricial da expressão 3, é apresentado na seqüência.

$$P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\gamma} = X_{\alpha} \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{i..}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{i'..}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{i.k} & n_{i.k'} \\ n_{i'.k} & n_{i'.k'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{..k}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{..k'}} \end{bmatrix} X'_{\gamma}$$

Assim, pode-se representar cada termo da expressão 3 por:

$$P_{\mu,\alpha} P_{\mu,\gamma} = (p_{i.kl}^*), \quad p_{i.kl}^* = \frac{n_{i.k}}{n_{i..} n_{..k}}$$

Portanto, da condição de ortogonalidade dada na expressão 12, obteve-se:

$$\frac{n_{i.k}}{n_{i..} n_{..k}} = \frac{1}{n_{...}}$$

Desse modo,

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{i.k}}{n_{i..} n_{..k}} = \frac{1}{n_{...}} \quad (14)$$

obtendo-se a seguinte proporção entre as freqüências de caselas,

$$\frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \quad \forall (i \neq i', k \neq k') \quad (15)$$

c) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores B e C

Se num modelo com três fatores, conforme descrito na definição 2, o subespaço gerado pelas colunas de $X_{\beta|\mu}$ é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas de $X_{\gamma|\mu}$, então:

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$$

Para os fatores B e C , prova-se que:

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}} \quad \forall (j \neq j'; k \neq k') \quad (16)$$

A condição de ortogonalidade dada em (2), adaptada para os fatores B e C , é:

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow P_{\mu,\beta} P_{\mu,\gamma} = P_{\mu} \quad (17)$$

onde:

$$P_{\mu} = (p_{ijkl}); \quad p_{ijkl} = \frac{1}{n_{...}}, \quad \forall (i, j, k, l)$$

Da expressão 3, adaptada para os fatores B e C , obtém-se:

$$P_{\mu,\beta} P_{\mu,\gamma} = X_{\beta} (X'_{\beta} X_{\beta})^{-1} X'_{\beta} X_{\gamma} (X'_{\gamma} X_{\gamma})^{-1} X'_{\gamma} \quad (18)$$

onde:

$$(X'_{\beta} X_{\beta})^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n_{.j}} \right\}; \quad (X'_{\gamma} X_{\gamma})^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n_{.k}} \right\}; \quad X'_{\beta} X_{\gamma} = (x_{.jk}), \quad x_{.jk} = n_{.jk}$$

O produto matricial da expressão 18, é apresentado na seqüência.

$$P_{\mu,\beta} P_{\mu,\gamma} = X_{\beta} \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{.j}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{.j'}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{.jk} & n_{.jk'} \\ n_{.j'k} & n_{.j'k'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{.k}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{.k'}} \end{bmatrix} X'_{\gamma}$$

Representando-se cada termo da expressão 18, obtém-se:

$$P_{\mu,\beta} P_{\mu,\gamma} = (p_{i.kl}^*), \quad p_{i.kl}^* = \frac{n_{.jk}}{n_{.j} \cdot n_{..k}}$$

Portanto, da condição de ortogonalidade dada em (17), tem-se a seguinte igualdade,

$$\frac{n_{.jk}}{n_{.j} \cdot n_{..k}} = \frac{1}{n_{...}}$$

Desse modo,

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{.jk}}{n_{.j} \cdot n_{..k}} = \frac{1}{n_{...}} \quad (19)$$

obtendo-se na seguinte proporção entre as freqüências de caselas:

$$\frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}}, \quad \forall (j \neq j', k \neq k') \quad (20)$$

3.2.2.3 Modelos com quatro fatores

Definição 3. Um delineamento com quatro fatores cruzados sem interações denotado por: $y_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varphi_l + e_{ijklm}$ com $i=1, \dots, a$ níveis do fator A ; $j=1, \dots, b$ níveis do fator B ; $k=1, \dots, c$ níveis do fator C ; $l=1, \dots, d$ níveis do fator D e $m=1, \dots, n_{ijkl}$ observações na casela $(i; j; k; l)$ é dito ortogonal, se o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a cada fator, após o ajuste de μ , é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros três fatores, após o ajuste de μ .

A matriz do modelo linear $y = X\theta + e$ apresenta, então, a seguinte partição:

$$X = [X_\mu \mid X_\alpha \mid X_\beta \mid X_\gamma \mid X_\varphi]$$

onde:

X_μ é a submatriz de X referente a constante μ ;

X_α é a submatriz de X referente ao fator A ;

X_β é a submatriz de X referente ao fator B ;

X_γ é a submatriz de X referente ao fator C ;

X_φ é a submatriz de X referente ao fator D .

obtendo-se $X_{\alpha|\mu}$, $X_{\beta|\mu}$, $X_{\gamma|\mu}$ e $X_{\varphi|\mu}$ como na definição 2.

Para provar a ortogonalidade através da proporcionalidade de frequências de caselas dos fatores dois a dois, utilizou-se uma adaptação do teorema 2, da mesma forma aplicada nos modelos com três fatores, obtendo-se os seguintes resultados.

a) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores A e B

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{ij..}}{n_{ij'..}} = \frac{n_{i'j..}}{n_{i'j'..}} \quad (21)$$

b) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores A e C

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{i.k.}}{n_{i.k'.}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'.}} \quad (22)$$

c) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores A e D

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{i..l}}{n_{i..l'}} = \frac{n_{i'..l}}{n_{i'..l'}} \quad (23)$$

d) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores B e C

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{.jk.}}{n_{.jk'.}} = \frac{n_{.j'k.}}{n_{.j'k'.}} \quad (24)$$

e) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores B e D

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{.j.l}}{n_{.j.l'}} = \frac{n_{.j'.l}}{n_{.j'.l'}} \quad (25)$$

f) Ortogonalidade entre os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos fatores C e D

$$C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{..kl}}{n_{..kl'}} = \frac{n_{..k'l}}{n_{..k'l'}} \quad (26)$$

3.2.2.4 Modelos com K fatores

Definição 4. Um delineamento com K fatores é dito ortogonal, se o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a cada fator, após o ajuste de μ , é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros $K-1$ fatores, após o ajuste de μ .

3.2.2.5 Propriedades dos delineamentos ortogonais

Dados os objetivos deste estudo, as propriedades aqui descritas estão direcionadas para as funções estimáveis. Ademais, embora elas independam do sistema computacional estatístico utilizado, a abordagem é feita à luz do Proc GLM do sistema estatístico SAS.

Sua descrição tem, aqui, o objetivo de estender sua validade para modelos com mais de dois fatores. Sendo assim seguem, entre parênteses, os nomes de autores que discutiram sua validade nos modelos com dois fatores.

3.2.2.5.1 Quanto às funções estimáveis

a) Modelo sem interações

P.1. As funções estimáveis de um fator contêm apenas os parâmetros relativos ao próprio fator e não contêm os parâmetros relativos aos outros fatores.

P.2 As funções estimáveis do tipo I são equivalentes às funções estimáveis do tipo II, uma vez que sob ortogonalidade (Iemma & Claustriau, 1997), as médias ponderadas são iguais às médias ponderadas ajustadas.

P.3 Dado que o termo completo é condição necessária para a ortogonalidade (Iemma & Claustriau, 1997), as funções estimáveis dos tipos III e IV são equivalentes.

P.4 Como o modelo não contém interações, as funções estimáveis dos tipos II e III são equivalentes (Speed, Hocking & Hackney, 1978).

P.5 Decorre das propriedades anteriores que, se o modelo é ortogonal e não contém interações, os quatro tipos de funções estimáveis são equivalentes, quer seja ou não balanceado.

b) Modelo com interações

b.1) Efeitos principais

Se o delineamento ortogonal é desbalanceado, as funções estimáveis preservam as propriedades P.2 e P.3 , às quais acrescentam-se:

P.6 As funções estimáveis de um fator contêm os parâmetros relativos ao próprio fator e os respectivos parâmetros das interações onde o fator está presente e não contêm os parâmetros relativos aos outros fatores, nem mesmo os parâmetros das interações nas quais o fator não está presente.

Se o delineamento ortogonal é balanceado, acrescenta-se ainda a propriedade:

P.7 Num delineamento ortogonal balanceado, os quatro tipos de funções estimáveis são equivalentes, quer o modelo contenha ou não interações.

b.2) Interações

P.8. As funções estimáveis de uma interação entre fatores, contêm os parâmetros relativos à própria interação e os parâmetros das interações de grau maior que o grau da interação em estudo e não contêm os parâmetros relativos aos efeitos principais, nem mesmo os parâmetros das interações de grau menor que o grau da interação em estudo.

3.2.2.5.2 Quanto às hipóteses

As propriedades descritas em 3.2.2.5.1 para as funções estimáveis, são mantidas para as hipóteses correspondentes.

Dado que as propriedades P.1 e P.2 são intrínsecas dos delineamentos ortogonais, apenas as hipóteses dos tipos I e II, isto é, apenas as hipóteses sobre médias ponderadas e sobre médias ponderadas ajustadas, serão discutidas neste item. O Quadro 4 descreve as somas de quadrados,

através da notação $R(\cdot)$, conforme Searle (1971), para as hipóteses dos tipos I e II em modelos com até quatro fatores ortogonais. Para os modelos com mais de quatro fatores, poderão ser feitas extensões da Quadro 4 com adaptações em função da notação utilizada.

Quadro 4. Hipóteses dos tipos I e II para os efeitos principais e interações dos delineamentos ortogonais para modelos com dois, três e quatro fatores e, as respectivas somas de quadrados em termos da notação $R(\cdot)$.

Hipóteses		Notação $R(\cdot)$
Modelo: $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$		
Dois fatores	Efeitos principais com ou sem interação	$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}$
		$R(\alpha \mu) = R(\alpha \mu, \beta)$
		$H_o^{1-B} = H_o^{2-B}$
		$R(\beta \mu) = R(\beta \mu, \alpha)$
Modelo: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varphi_{ij} + \tau_{ik} + \eta_{jk} + e_{ijkl}$		
Três fatores	Efeitos principais com ou sem interações	$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}$
		$R(\alpha \mu) = R(\alpha \mu, \beta) = R(\alpha \mu, \gamma) = R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
		$H_o^{1-B} = H_o^{2-B}$
		$R(\beta \mu) = R(\beta \mu, \alpha) = R(\beta \mu, \gamma) = R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
		$H_o^{1-C} = H_o^{2-C}$
		$R(\gamma \mu) = R(\gamma \mu, \alpha) = R(\gamma \mu, \beta) = R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
	Interações	$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB}$
		$R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma) = R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \tau) = R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau)$
		$H_o^{1-AC} = H_o^{2-AC}$
		$R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma) = R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi) = R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \tau) = R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \tau)$
		$H_o^{1-BC} = H_o^{2-BC}$
		$R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma) = R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi) = R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta) = R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta)$
Modelo: $y_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varphi_l + e_{ijklm}$		
Quatro fatores	Efeitos principais com ou sem interações	$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}$
		$R(\alpha \mu) = R(\alpha \mu, \beta) = R(\alpha \mu, \gamma) = R(\alpha \mu, \varphi) = R(\alpha \mu, \beta, \gamma) = R(\alpha \mu, \beta, \gamma, \varphi)$
		$H_o^{1-B} = H_o^{2-B}$
		$R(\beta \mu) = R(\beta \mu, \alpha) = R(\beta \mu, \gamma) = R(\beta \mu, \varphi) = R(\beta \mu, \alpha, \gamma) = R(\beta \mu, \alpha, \varphi) = R(\beta \mu, \gamma, \varphi) = R(\beta \mu, \alpha, \gamma, \varphi)$
		$H_o^{1-C} = H_o^{2-C}$
		$R(\gamma \mu) = R(\gamma \mu, \alpha) = R(\gamma \mu, \beta) = R(\gamma \mu, \varphi) = R(\gamma \mu, \alpha, \beta) = R(\gamma \mu, \alpha, \varphi) = R(\gamma \mu, \beta, \varphi) = R(\gamma \mu, \alpha, \beta, \varphi)$
		$H_o^{1-D} = H_o^{2-D}$
		$R(\varphi \mu) = R(\varphi \mu, \alpha) = R(\varphi \mu, \beta) = R(\varphi \mu, \gamma) = R(\varphi \mu, \alpha, \beta) = R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma) = R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi)$

(1) O traço "—" nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator.

3.2.3 Delineamentos parcialmente ortogonais

Delineamentos parcialmente ortogonais são aqueles nos quais, entre todas combinações entre fatores dois a dois, apenas algumas apresentam freqüências de caselas proporcionais, ou seja, para alguns fatores do modelo o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a esses fatores, após o ajuste de μ , é individualmente ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes aos demais fatores, após o ajuste de μ .

Nos modelos com dois fatores, não faz sentido definir delineamento parcialmente ortogonal, uma vez que entre dois fatores as freqüências das caselas são ou não são proporcionais, definindo o delineamento como ortogonal ou não ortogonal, respectivamente.

A grande importância dos delineamentos parcialmente ortogonais consiste na possibilidade que tem o pesquisador, de planejar o experimento de tal modo que a ortogonalidade seja garantida para o fator ou para os fatores de maior interesse. Além disso, quando o número de fatores no modelo aumenta é mais difícil e oneroso estabelecer freqüências de caselas constantes ou mesmo proporcionais para todas as combinações.

3.2.3.1 Modelos com três fatores

Definição 5. Um delineamento com três fatores cruzados sem interações caracterizado por $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$ com $i=1, \dots, a$ níveis do fator A ; $j=1, \dots, b$ níveis do fator B ; $k=1, \dots, c$ níveis do fator C e $l=1, \dots, n_{ijk}$ observações na casela $(i; j; k)$ é dito parcialmente ortogonal, se o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a apenas um dos fatores, após o ajuste de μ , é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros dois fatores, após o ajuste de μ .

A matriz do modelo linear $y = X\theta + e$ apresenta, então, a seguinte partição:

$$X = [X_\mu \mid X_\alpha \mid X_\beta \mid X_\gamma]$$

onde:

X_μ é a submatriz de X referente a constante μ ;

X_α é a submatriz de X referente ao fator A ;

X_β é a submatriz de X referente ao fator B ;

X_γ é a submatriz de X referente ao fator C .

E, de modo análogo à definição 1 obtém-se: $X_{\alpha|\mu}$, $X_{\beta|\mu}$ e $X_{\gamma|\mu}$.

Num delineamento parcialmente ortogonal com três fatores, para o modelo descrito na definição 5, três casos distintos podem ocorrer:

Caso 1) Apenas o subespaço gerado pelas colunas de $X_{\alpha|\mu}$ é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas de $X_{\beta|\mu}$ e $X_{\gamma|\mu}$.

Em termos de frequências de caselas, tem-se:

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'.}}; \quad C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}}$$

Caso 2) Apenas o subespaço gerado pelas colunas de $X_{\beta|\mu}$ é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas de $X_{\alpha|\mu}$ e $X_{\gamma|\mu}$.

Em termos de frequências de caselas, tem-se:

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'.}}; \quad C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}}$$

Caso 3) Apenas o subespaço gerado pelas colunas de $X_{\gamma|\mu}$ é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas de $X_{\alpha|\mu}$ e $X_{\beta|\mu}$.

Em termos de freqüências de caselas, tem-se:

$$C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}}; \quad C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}) \Leftrightarrow \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}}$$

3.2.3.2 Modelos com quatro fatores

Definição 6. Um delineamento com quatro fatores cruzados sem interações caracterizado por: $y_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varphi_l + e_{ijklm}$ com $i=1,\dots,a$ níveis do fator A ; $j=1,\dots,b$ níveis do fator B ; $k=1,\dots,c$ níveis do fator C ; $l=1,\dots,d$ níveis do fator D e $m=1,\dots,n_{ijkl}$ observações na casela $(i; j; k; l)$, é dito parcialmente ortogonal, se os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes, no máximo, à dois fatores, após o ajuste de μ , são individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes os outros três fatores, após o ajuste de μ .

A matriz do modelo linear $y = X\theta + e$ apresenta, então, a seguinte partição:

$$X = [X_{\mu} \mid X_{\alpha} \mid X_{\beta} \mid X_{\gamma} \mid X_{\varphi}]$$

onde:

X_{μ} é a submatriz de X referente a constante μ ;

X_{α} é a submatriz de X referente ao fator A ;

X_{β} é a submatriz de X referente ao fator B ;

X_{γ} é a submatriz de X referente ao fator C ;

X_{φ} é a submatriz de X referente ao fator D .

obtendo-se $X_{\alpha|\mu}$, $X_{\beta|\mu}$, $X_{\gamma|\mu}$ e $X_{\varphi|\mu}$ como na definição 2.

Nos delineamentos parcialmente ortogonais com quatro fatores, para o modelo descrito na definição 6, podem ocorrer duas situações distintas.

A primeira situação foi subdividida em quatro casos e a segunda situação em seis casos distintos.

Situação 1) Apenas o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um dos fatores, após o ajuste de μ , é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros três fatores, após o ajuste de μ . Entretanto, se outras combinações entre fatores apresentarem subespaços ortogonais, de tal modo que apenas um dos fatores continue ortogonal aos demais, os casos descritos na sequência ainda serão válidos. Nessa situação, quatro casos distintos podem ocorrer:

Caso 1) Quando o subespaço do fator A for ortogonal aos demais

$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$, $C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$ e $C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$, então:

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'}} \text{ e } \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \text{ e } \frac{n_{i..l}}{n_{i..l'}} = \frac{n_{i'..l}}{n_{i'..l'}}$$

Caso 2) Quando o subespaço do fator B for ortogonal aos demais

$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu})$, $C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$ e $C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$, então:

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'}} \text{ e } \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}} \text{ e } \frac{n_{.j.l}}{n_{.j.l'}} = \frac{n_{.j'.l}}{n_{.j'.l'}}$$

Caso 3) Quando o subespaço do fator C for ortogonal aos demais

$C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu})$, $C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$ e $C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$, então:

$$\frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \text{ e } \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}} \text{ e } \frac{n_{..kl}}{n_{..kl'}} = \frac{n_{..k'l}}{n_{..k'l'}}$$

Caso 4) Quando o subespaço do fator D for ortogonal aos demais

$C(X_{\phi|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu})$, $C(X_{\phi|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$ e $C(X_{\phi|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$, então:

$$\frac{n_{i..l}}{n_{i..l'}} = \frac{n_{i'.l}}{n_{i'.l'}} \text{ e } \frac{n_{.j.l}}{n_{.j.l'}} = \frac{n_{.j'.l}}{n_{.j'.l'}} \text{ e } \frac{n_{.kl}}{n_{.kl'}} = \frac{n_{.k'l'}}{n_{.k'l'}}$$

Situação 2) O subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a dois fatores, após o ajuste de μ , é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros dois fatores, após o ajuste de μ . Assim, seis casos distintos podem ocorrer:

Caso 1) Quando os subespaços de A e B forem ortogonais aos demais

$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$, $C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$, $C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$, $C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$,
 $C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$, então:

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'.}} \text{ e } \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \text{ e } \frac{n_{i..l}}{n_{i..l'}} = \frac{n_{i'.l}}{n_{i'.l'}} \text{ e } \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}} \text{ e } \frac{n_{.j.l}}{n_{.j.l'}} = \frac{n_{.j'.l}}{n_{.j'.l'}}$$

Caso 2) Quando os subespaços de A e C forem ortogonais aos demais

$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$, $C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$, $C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$, $C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$,
 $C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$, então:

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'.}} \text{ e } \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \text{ e } \frac{n_{i..l}}{n_{i..l'}} = \frac{n_{i'.l}}{n_{i'.l'}} \text{ e } \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}} \text{ e } \frac{n_{.kl}}{n_{.kl'}} = \frac{n_{.k'l'}}{n_{.k'l'}}$$

Caso 3) Quando os subespaços de A e D forem ortogonais aos demais

$$C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}), C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}), C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}), C(X_{\phi|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}), \\ C(X_{\phi|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}), \text{ então:}$$

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'}} \text{ e } \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \text{ e } \frac{n_{i..l}}{n_{i..l'}} = \frac{n_{i'.l}}{n_{i'.l'}} \text{ e } \frac{n_{.j.l}}{n_{.j.l'}} = \frac{n_{.j'.l}}{n_{.j'.l'}} \text{ e } \frac{n_{..kl}}{n_{..kl'}} = \frac{n_{..k'l'}}{n_{..k'l'}}$$

Caso 4) Quando os subespaços de B e C forem ortogonais aos demais

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu}), C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}), C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}), C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu}), \\ C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}), \text{ então:}$$

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'}} \text{ e } \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}} \text{ e } \frac{n_{.j.l}}{n_{.j.l'}} = \frac{n_{.j'.l}}{n_{.j'.l'}} \text{ e } \frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \text{ e } \frac{n_{..kl}}{n_{..kl'}} = \frac{n_{..k'l'}}{n_{..k'l'}}$$

Caso 5) Quando os subespaços de B e D forem ortogonais aos demais

$$C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu}), C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu}), C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}), C(X_{\phi|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu}), \\ C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}), \text{ então:}$$

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'}} = \frac{n_{i'j.}}{n_{i'j'}} \text{ e } \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}} \text{ e } \frac{n_{.j.l}}{n_{.j.l'}} = \frac{n_{.j'.l}}{n_{.j'.l'}} \text{ e } \frac{n_{i..l}}{n_{i..l'}} = \frac{n_{i'.l}}{n_{i'.l'}} \text{ e } \frac{n_{..kl}}{n_{..kl'}} = \frac{n_{..k'l'}}{n_{..k'l'}}$$

Caso 6) Quando os subespaços de C e D forem ortogonais aos demais

$$C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu}), C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu}), C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu}), C(X_{\phi|\mu}) \perp C(X_{\alpha|\mu}), \\ C(X_{\phi|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$$

$$\frac{n_{i.k}}{n_{i.k'}} = \frac{n_{i'.k}}{n_{i'.k'}} \text{ e } \frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.j'k}}{n_{.j'k'}} \text{ e } \frac{n_{..kl}}{n_{..kl'}} = \frac{n_{..k'l}}{n_{..k'l'}} \text{ e } \frac{n_{i..l}}{n_{i..l'}} = \frac{n_{i'..l}}{n_{i'..l'}} \text{ e } \frac{n_{.j..l}}{n_{.j..l'}} = \frac{n_{.j'.l}}{n_{.j'.l'}}$$

3.2.3.3 Modelos com K fatores

Definição 7. Um delineamento com K fatores é dito parcialmente ortogonal, se os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes, no máximo, à $K-2$ fatores, após o ajuste de μ , são individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros $K-1$ fatores, após o ajuste de μ .

3.2.3.4 Propriedades dos delineamentos parcialmente ortogonais

3.2.3.4.1 Quanto às funções estimáveis

a) Modelo sem interações

Para o fator ou fatores nos quais os subespaços gerados são individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelos demais fatores, as funções estimáveis preservam as propriedades P.1, P.2, P.3, P.4 e P.5.

b) Modelo com interações

b.1) Efeitos principais

Para o fator ou fatores nos quais os subespaços gerados são individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelos demais fatores, as funções estimáveis preservam as propriedades P.2, P.3 e P.6

b.2) Interações

As funções estimáveis da interação entre fatores que preservam a propriedade P.8 são:

- i* A interação que envolve conjuntamente os fatores cujos subespaços gerados não são ortogonais entre si;
- ii* As interações formadas pelos fatores cujos subespaços gerados foram individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelos demais fatores;
- iii* As interações formadas pelos casos *i* e *ii*.

3.2.3.4.2 Quanto às hipóteses

As propriedades descritas em 3.2.2.5.1 para as funções estimáveis, são mantidas para as hipóteses correspondentes.

Dado que as propriedades P.1 e P.2 são intrínsecas dos delineamentos parcialmente ortogonais, apenas as hipóteses dos tipos I e II, isto é, apenas as hipóteses sobre médias ponderadas e sobre médias ponderadas ajustadas, serão discutidas neste item. O Quadro 5 descreve as somas de quadrados, através da notação $R(\cdot)$, conforme Searle (1971), para as hipóteses dos tipos I e II em modelos com até quatro fatores ortogonais. Para os modelos com mais de quatro fatores, poderão ser feitas extensões da Quadro 5 com adaptações em função da notação utilizada.

Quadro 5. Hipóteses dos tipos I e II para os efeitos principais e interações dos delineamentos parcialmente ortogonais para modelos com dois, três e quatro fatores e, as respectivas somas de quadrados em termos da notação $R(\cdot)$.^{(1) (2)}.

Hipóteses		Notação $R(\cdot)$	
Três fatores	Efeitos principais e interações	Caso 1	$H_O^{1-A} = H_O^{2-A}$ $H_O^{1-BC} = H_O^{2-BC}$ $R(\alpha \mu) = R(\alpha \mu, \beta) = R(\alpha \mu, \gamma) = R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
		Caso 2	$H_O^{1-B} = H_O^{2-B}$ $H_O^{1-AC} = H_O^{2-AC}$ $R(\beta \mu) = R(\beta \mu, \alpha) = R(\beta \mu, \gamma) = R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
		Caso 3	$H_O^{1-C} = H_O^{2-C}$ $H_O^{1-AB} = H_O^{2-AB}$ $R(\gamma \mu) = R(\gamma \mu, \alpha) = R(\gamma \mu, \beta) = R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Quatro fatores (situação 1)	Efeitos principais e interações	Caso 1	$H_O^{1-A} = H_O^{2-A}$ $H_O^{1-BCD} = H_O^{2-BDC}$ $R(\alpha \mu) = R(\alpha \mu, \beta) = R(\alpha \mu, \gamma) = R(\alpha \mu, \phi) = R(\alpha \mu, \beta, \gamma) = R(\alpha \mu, \beta, \gamma, \phi)$
		Caso 2	$H_O^{1-B} = H_O^{2-B}$ $H_O^{1-ACD} = H_O^{2-ACD}$ $R(\beta \mu) = R(\beta \mu, \alpha) = R(\beta \mu, \gamma) = R(\beta \mu, \phi) = R(\beta \mu, \alpha, \gamma) = R(\beta \mu, \alpha, \gamma, \phi)$
		Caso 3	$H_O^{1-C} = H_O^{2-C}$ $H_O^{1-ABD} = H_O^{2-ABD}$ $R(\gamma \mu) = R(\gamma \mu, \alpha) = R(\gamma \mu, \beta) = R(\gamma \mu, \phi) = R(\gamma \mu, \alpha, \beta) = R(\gamma \mu, \alpha, \beta, \phi)$
		Caso 4	$H_O^{1-D} = H_O^{2-D}$ $H_O^{1-ABC} = H_O^{2-ABC}$ $R(\phi \mu) = R(\phi \mu, \alpha) = R(\phi \mu, \beta) = R(\phi \mu, \gamma) = R(\phi \mu, \alpha, \beta) = R(\phi \mu, \alpha, \beta, \gamma)$

continua

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Delineamentos ortogonais

Para discussão dos delineamentos ortogonais foram utilizados modelos com dois e três fatores com e sem interações, de conjuntos balanceados e desbalanceados com freqüências de caselas proporcionais. Em todos os exemplos, enfatizou-se a propriedade inerente aos delineamentos ortogonais, de apresentarem hipóteses do tipo I iguais às hipóteses do tipo II, para todos os efeitos principais e interações do modelo. Outro aspecto ressaltado, foi a forma das funções estimáveis para os efeitos principais e interações, mostrando que nos modelos sem interações as funções estimáveis para os efeitos principais, contêm apenas os parâmetros relativos ao próprio fator e nos modelos com interações, contêm os parâmetros relativos ao próprio fator e os parâmetros das interações nas quais o fator está presente. Além disso, as funções estimáveis envolvendo interações, contêm os parâmetros relativos à própria interação e os parâmetros das interações de grau maior que o graus da interação em estudo.

4.1.1 Modelos com dois fatores

Para discussão foi utilizado o modelo $y = X\theta + e$ caracterizado por: $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$, ou seja, um modelo com dois fatores cruzados sem interação e $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$, um modelo com dois fatores cruzados e interação, para $i=1,\dots,a$ níveis do fator A ; $j=1,\dots,b$ níveis do fator B e $k=1,\dots,n_{ij}$ observações na casela (i,j) . Em todos os modelos, y é um vetor de

realizações de variáveis aleatórias; X é uma matriz de delineamento; θ é um vetor de parâmetros desconhecidos e e é um vetor de variáveis aleatórias não-observáveis, com estrutura estocástica de Gauss-Markov. Além disso, foram apresentados os quatro tipos de hipóteses, as respectivas funções estimáveis e somas de quadrados associadas incorporados pelo Proc GLM (General Linear Models Procedure) do SAS (Statistical Analysis System, 1990). Em todo o texto a igualdade apresentada entre as hipóteses dos tipos III e IV foi devida à ausência de caselas vazias, como pode ser visto em Speed, Hocking & Hackney (1978) uma vez que conforme Iemma & Claustriau (1997) o termo completo é condição necessária para a ortogonalidade. Nesse contexto, a abordagem deste trabalho concentrou-se nos conjuntos completos. Na seqüência apresentam-se a forma das funções estimáveis e as hipóteses correspondentes, para modelos com e sem interação de conjuntos balanceados e desbalanceados provenientes de delineamentos ortogonais.

i Hipóteses para o fator A

i.1 Sem interação: balanceado ou desbalanceado

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_i = \alpha_{i'} ; \forall (i, i'), i \neq i'$$

i.2 Com interação, balanceado

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_i + \bar{\gamma}_i = \alpha_{i'} + \bar{\gamma}_{i'} ; \forall (i, i'), i \neq i'$$

i.3 Com interação, desbalanceado

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} : \alpha_i + \bar{\gamma}_i = \alpha_{i'} + \bar{\gamma}_{i'} ; \forall (i, i'), i \neq i'$$

$$H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_i + \tilde{\gamma}_i = \alpha_{i'} + \tilde{\gamma}_{i'} ; \forall (i, i'), i \neq i'$$

Naturalmente, conforme discutido em 2.2, $\bar{\gamma}$ e $\tilde{\gamma}$ descrevem, respectivamente, funções de médias ponderadas e de médias não ponderadas dos efeitos da interação.

ii Hipóteses para o fator B

ii.1 Sem interação: balanceado ou desbalanceado

$$H_o^{1-B} = H_o^{2-B} = H_o^{3-B} = H_o^{4-B} : \beta_j = \beta_{j'} ; \forall (j, j'), j \neq j'$$

ii.2 Com interação, balanceado

$$H_o^{1-B} = H_o^{2-B} = H_o^{3-B} = H_o^{4-B} : \beta_j + \bar{\gamma}_{.j} = \beta_{j'} + \bar{\gamma}_{.j'} ; \forall (j, j'), j \neq j'$$

ii.3 Com interação, desbalanceado

$$H_o^{1-B} = H_o^{2-B} : \beta_j + \bar{\gamma}_{.j} = \beta_{j'} + \bar{\gamma}_{.j'} ; \forall (j, j'), j \neq j'$$

$$H_o^{3-B} = H_o^{4-B} : \beta_j + \tilde{\gamma}_{.j} = \beta_{j'} + \tilde{\gamma}_{.j'} ; \forall (j, j'), j \neq j'$$

iii Hipóteses para a interação A*B

Conforme anteriormente descrito na literatura:

$$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB} = H_o^{3-AB} = H_o^{4-AB} : \gamma_{ij} - \gamma_{i'j} - \gamma_{ij'} + \gamma_{i'j'} = 0 ; \forall (i, i', j, j'), i \neq i', j \neq j'$$

Na seqüência são apresentados alguns exemplos práticos de delineamentos ortogonais balanceados e desbalanceados com dois fatores, enfocando-se principalmente a igualdade entre as hipóteses e as respectivas somas de quadrados, além das formas das funções estimáveis.

a Conjuntos balanceados

4.1.1.1 1º Exemplo

Na Tabela 1 apresenta-se um exemplo clássico de delineamento ortogonal balanceado com dois fatores onde, apesar dos resultados quanto às hipóteses e as formas das funções estimáveis já serem amplamente conhecidos, serviram como uma referência indispensável para o estudo dos

delineamentos ortogonais desbalanceados. Pode ser observado que, conforme o teorema 1,

$$\frac{n_{ij}}{n_{ij'}} = \frac{n_{ij}}{n_{ij'}} = \frac{3}{3} = 1$$

e, portanto, o delineamento é ortogonal.

Tabela 1. Dados de porcentagem de germinação de canafistula (*Peltophorum dubium* Spreng) do delineamento ortogonal balanceado com dois fatores.

Substrato (fator A)	Dormência (fator B)	
	$j=1$	$j=2$
$i=1$	12	30
	22	22
	30	28
$i=2$	38	12
	46	15
	42	26

a.1 Modelo sem interação

Nos delineamentos ortogonais balanceados de modelos sem interação, ocorre a igualdade entre os quatro tipos de hipóteses fornecidos pelo Proc GLM do SAS. Para o exemplo da Tabela 1 são ilustradas as funções estimáveis dos tipos I e II apenas para o fator A (Quadro 6), ressaltando a propriedade dos delineamentos ortogonais, P.1, de apresentar apenas parâmetros relativos ao próprio fator para as funções estimáveis de efeitos principais, na ausência de interação.

Quadro 6. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 1, considerando o modelo sem interação.

Tipo I-A = Tipo II-A				Tipo III-A = Tipo IV-A			
Efeito	Coeficientes			Efeito	Coeficientes		
INTERCEPTO	0			INTERCEPTO	0		
A	1	L2		A	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	

$$H_o^{1-A} = H_o^2 = H_o^3 = H_o^4: \alpha_1 = \alpha_2$$

A análise de variância (Tabela 2) mostra a igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II, P.2, para o fator A, ou seja, $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta) = 40,0416667$. Para que a igualdade seja verificada para o fator B, $R(\beta|\mu) = R(\beta|\mu, \alpha)$, deve-se inverter a ordem de entrada dos fatores no modelo. A igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos II e III foi motivada pela ausência de interação, P.4, e a igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos III e IV é devida à ausência de caselas vazias, P.3, uma vez que o conjunto é completo.

Tabela 2. Análise de variância do delineamento ortogonal balanceado, descrito na Tabela 1, segundo o modelo $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$, declarando A como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M	R (.)
A	1	40,04166667	40,04166667	$R(\alpha \mu)$
B	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\beta \mu, \alpha)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	40,04166667	40,04166667	$R(\alpha \mu, \beta)$
B	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\beta \mu, \alpha)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo III = IV	Q.M.	R (.)
A	1	40,04166667	40,04166667	$R(\alpha \mu, \beta)$
B	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\beta \mu, \alpha)$

Como os conjuntos balanceados encontram-se amplamente discutidos na literatura, a verificação da igualdade entre as hipóteses dos tipos I e II, com a inversão na ordem de entrada dos fatores no modelo, para os efeitos principais do modelo, está abordada com mais detalhes no conjunto desbalanceado.

a.2 Modelo com interação

Para os delineamentos ortogonais balanceados de modelos com interação, os resultados são idênticos aos modelos sem interação em termos de igualdade de hipóteses, ou seja, ocorre também a igualdade entre os quatro tipos de hipóteses fornecidos pelo Proc GLM do SAS. A diferença entre os modelos sem interação e com interação consiste no fato de que as funções estimáveis envolvendo um único fator do modelo com interação apresentam além dos parâmetros do próprio fator, parâmetros da interação, como pode ser observado no Quadro 7.

Quadro 7. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 1, considerando o modelo com interação.

Tipo I-A= Tipo II-A				Tipo III-A= Tipo IV-A			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
A	1	L2		A	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
A*B	1 1	0,5*L2		A*B	1 1	0,5*L2	
	1 2	0,5*L2			1 2	0,5*L2	
	2 1	-0,5*L2			2 1	-0,5*L2	
	2 2	-0,5*L2			2 2	-0,5*L2	

$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_1 + \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{12}) = \alpha_2 + \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{22})$

Na Tabela 3 observa-se uma característica muito particular dos conjuntos balanceados, de apresentar igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos II e III, $R(\alpha|\mu, \beta) = R(\hat{\alpha}|\hat{\mu}, \hat{\beta}) = 40,0147$ e $R(\beta|\mu, \alpha) = R(\hat{\beta}|\hat{\mu}, \hat{\alpha}) = 1717,0417$, mesmo quando o modelo contém interação.

Tabela 3. Análise de variância do delineamento ortogonal balanceado, descrito na Tabela 1, segundo o modelo $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$, declarando A como primeiro fator.

Fontes	gl	SQ Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	40,04166667	40,04166667	$R(\alpha \mu)$
B	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\beta \mu, \alpha)$
A*B	1	92,04166667	92,04166667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	40,04166667	40,04166667	$R(\alpha \mu, \beta)$
B	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\beta \mu, \alpha)$
A*B	1	92,04166667	92,04166667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	40,04166667	40,04166667	$R(\hat{\alpha} \hat{\mu}, \hat{\beta})$
B	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\hat{\beta} \hat{\mu}, \hat{\alpha})$
A*B	1	92,04166667	92,04166667	$R(\hat{\gamma} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$

b Conjuntos desbalanceados

4.1.1.2 2º Exemplo

A discussão do exemplo da Tabela 4 retrata alguns resultados importantes quanto a igualdade de hipóteses e a forma das funções estimáveis de delineamentos ortogonais desbalanceados, com frequências de caselas proporcionais para modelos com dois fatores, já apresentados e discutidos por Claustriau & Iemma (1999). Sendo assim, foram abordados apenas os aspectos mais relevantes para dar ao texto uma sequência didática.

Tabela 4. Dados de porcentagem de germinação de canafistula (*Peltophorum dubium* Spreng) do delineamento ortogonal desbalanceado com dois fatores.

Substrato (fator A)	Dormência (fator B)	
	j=1	j=2
i=1	12	30
	22	22
	30	
	12	
	18	
	38	
i=2	38	12
	46	
	42	

Segundo Iemma & Clautriaux (1997), observa-se no teorema 1 que uma condição necessária e suficiente para que os subespaços gerados pelas submatrizes de X referentes a cada fator, após o ajuste de μ , sejam ortogonais e, portanto, o delineamento seja ortogonal, é que as frequências das caselas sejam proporcionais. A expressão da proporcionalidade foi apresentada em (5):

$$\frac{n_{ij}}{n_{ij'}} = \frac{n_{i'j}}{n_{i'j'}} , \quad \forall (i \neq i', j \neq j')$$

Verificando-se o teorema para os dados da Tabela 4, obteve-se a seguinte proporção:

$$\frac{n_{11}}{n_{12}} = \frac{n_{21}}{n_{22}} = 3 , \quad \forall (i \neq i', j \neq j')$$

Essa proporcionalidade garante que, apesar do desbalanceamento, as hipóteses do tipo I são iguais às hipóteses do tipo II para os efeitos principais e interação, caracterizando o delineamento como ortogonal.

Não se pode perder de vista que nos delineamentos com dois fatores cruzados, a hipótese sobre a interação é a mesma para os quatro tipos, conforme descrito por Speed, Hocking e Hackney (1978). Generalizações importantes são feitas nos próximos itens, para delineamentos com mais de dois fatores.

b.1 Modelo sem interação

A análise dos dados através do modelo com dois fatores sem interação mostra, no Quadro 8, que apesar do desbalanceamento, as hipóteses dos tipos I e II são iguais, P.2, e as funções estimáveis de um fator não apresentaram parâmetros relativos ao outro fator, P.1. Essa característica dos delineamentos ortogonais desbalanceados é a mesma dos conjuntos balanceados, onde se concentram as hipóteses de maior interesse do pesquisador. Em termos práticos, implica que as hipóteses testadas nos conjuntos balanceados com dois fatores cruzados sem interação, têm as mesmas características das hipóteses testadas nos conjuntos desbalanceados com frequências proporcionais nas caselas.

Quadro 8. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 4, considerando o modelo sem interação.

Tipo I-A= Tipo II-A				Tipo III-A= Tipo IV-A			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
A	1	L2		A	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_1 = \alpha_2$$

A análise de variância da Tabela 5 mostra, através da notação $R(\cdot)$, a igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II para o fator A, ou seja, $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta) = 352,6667$. Para verificar que tais resultados também ocorreram para o fator B, inverteu-se a ordem de entrada dos fatores no modelo, declarando B como o primeiro fator (Tabela 6), mostrando também que: $R(\beta|\mu) = R(\beta|\mu, \alpha) = 121,0000$. A igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos II e III é devida à

ausência de interação no modelo, assim, $R(\alpha | \mu, \beta) = R(\hat{\alpha} | \hat{\mu}, \hat{\beta}) = 352,6667$ e $R(\beta | \mu, \alpha) = R(\hat{\beta} | \hat{\mu}, \hat{\alpha}) = 121,0000$.

Tabela 5. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 4, segundo o modelo $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$, declarando A como primeiro fator.

Fontes	gl	SQ Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	352,66666667	352,66666667	$R(\alpha \mu)$
B	1	121,00000000	121,00000000	$R(\beta \mu, \alpha)$
Fontes	gl	SQ Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	352,66666667	352,66666667	$R(\alpha \mu, \beta)$
B	1	121,00000000	121,00000000	$R(\beta \mu, \alpha)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	352,66666667	352,66666667	$R(\hat{\alpha} \hat{\mu}, \hat{\beta})$
B	1	121,00000000	121,00000000	$R(\hat{\beta} \hat{\mu}, \hat{\alpha})$

Tabela 6. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 4, segundo o modelo $y_{ijk} = \mu + \beta_j + \alpha_i + e_{ijk}$, declarando B como primeiro fator.

Fontes	gl	SQ Tipo I	Q.M.	R (.)
B	1	121,00000000	121,00000000	$R(\beta \mu)$
A	1	352,66666667	352,66666667	$R(\alpha \mu, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo II	Q.M.	R (.)
B	1	121,00000000	121,00000000	$R(\beta \mu, \alpha)$
A	1	352,66666667	352,66666667	$R(\alpha \mu, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
B	1	121,00000000	121,00000000	$R(\hat{\beta} \hat{\mu}, \hat{\alpha})$
A	1	352,66666667	352,66666667	$R(\hat{\alpha} \hat{\mu}, \hat{\beta})$

b.2 Modelo com interação

Nos modelos com dois fatores e interação, a forma das funções estimáveis envolvendo um único fator é a mesma dos conjuntos balanceados. As funções estimáveis para o fator A apresentaram parâmetros relativos ao

próprio fator, parâmetros da interação e não apresentaram parâmetros relativos ao outro fator (Quadro 9).

Quadro 9. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 4, considerando o modelo com interação.

Tipo I-A= Tipo II-A				Tipo III-A= Tipo IV-A			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
A	1	L2		A	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
A*B	1 1	0,75*L2		A*B	1 1	0,5*L2	
	1 2	0,25*L2			1 2	0,5*L2	
	2 1	-0,75*L2			2 1	-0,5*L2	
	2 2	-0,25*L2			2 2	-0,5*L2	

$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}: \alpha_1 + \frac{1}{4}(3\gamma_{11} + \gamma_{12}) = \alpha_2 + \frac{1}{4}(3\gamma_{21} + \gamma_{22})$			
$H_0^{3-A} = H_0^{4-A}: \alpha_1 + \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{12}) = \alpha_2 + \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{22})$			

Diferentemente dos delineamentos ortogonais balanceados com interação, os delineamentos ortogonais desbalanceados com interação, não apresentam igualdade entre os quatro tipos de hipóteses fornecidos Proc GLM do SAS. São iguais as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II para os fatores A e B, pela ortogonalidade e as hipóteses dos tipos III e IV, pela ausência de caselas vazias. Consequentemente $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta)$ e $R(\beta|\mu) = R(\beta|\mu, \alpha)$ mas, a hipótese do tipo II é diferente da hipótese do tipo III na presença de interação com desbalanceamento (Tabela 7), ou seja, $R(\alpha|\mu, \beta) \neq R(\alpha|\mu, \hat{\beta})$ e $R(\beta|\mu, \alpha) \neq R(\beta|\mu, \hat{\alpha})$.

Tabela 7. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 4, segundo o modelo $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$, declarando A como primeiro fator.

Fontes	gl	SQ Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	352,66666667	352,66666667	$R(\alpha \mu)$
B	1	121,00000000	121,00000000	$R(\beta \mu, \alpha)$
A*B	1	578,00000000	578,00000000	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	352,66666667	352,66666667	$R(\alpha \mu, \beta)$
B	1	121,00000000	121,00000000	$R(\beta \mu, \alpha)$
A*B	1	578,00000000	578,00000000	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	18,00000000	18,00000000	$R(\alpha \mu, \beta)$
B	1	338,00000000	338,00000000	$R(\beta \mu, \alpha)$
A*B	1	578,00000000	578,00000000	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$

4.1.2 Modelos com três fatores

Para a discussão adotou-se o modelo $y = X\theta + e$, caracterizado por: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$, ou seja, um modelo com três fatores sem interações e por: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \phi_{ij} + \eta_{ik} + \tau_{jk} + \rho_{ijk} + e_{ijkl}$, um modelo com três fatores e interações, para $i = 1, \dots, a$ níveis do fator A; $j = 1, \dots, b$ níveis do fator B, $k = 1, \dots, c$ níveis do fator C e $l = 1, \dots, n_{ijk}$ observações de cada casela ($i; j; k$).

A forma das hipóteses e, portanto, das funções estimáveis nos modelos com e sem interações está apresentada a seguir:

i Hipóteses para o fator A

i.1 Sem interações: balanceado ou desbalanceado

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_i = \alpha_{i'} ; \forall (i, i'), i \neq i'$$

i.2 Com interações, balanceado

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_i + \bar{\phi}_{i.} + \bar{\eta}_{i.} + \bar{\rho}_{i..} = \alpha_{i'} + \bar{\phi}_{i'.} + \bar{\eta}_{i'.} + \bar{\rho}_{i'..} ; \forall (i, i'), i \neq i'$$

i.3 Com interações, desbalanceado

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} : \alpha_i + \bar{\varphi}_{i.} + \bar{\eta}_{i.} + \bar{\rho}_{i.} = \alpha_{i'} + \bar{\varphi}_{i'.} + \bar{\eta}_{i'.} + \bar{\rho}_{i'..} ; \forall (i, i'), i \neq i'$$

$$H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_i + \tilde{\varphi}_{i.} + \tilde{\eta}_{i.} + \tilde{\rho}_{i.} = \alpha_{i'} + \tilde{\varphi}_{i'.} + \tilde{\eta}_{i'.} + \tilde{\rho}_{i'..} ; \forall (i, i'), i \neq i'$$

ii Hipóteses para o fator B

ii.1 Sem interações, balanceado ou desbalanceado

$$H_o^{1-B} = H_o^{2-B} = H_o^{3-B} = H_o^{4-B} : \beta_j = \beta_{j'} ; \forall (j, j'), j \neq j'$$

ii.2 Com interações, balanceado

$$H_o^{1-B} = H_o^{2-B} = H_o^{3-B} = H_o^{4-B} : \beta_j + \bar{\varphi}_{.j} + \bar{\tau}_{.j} + \bar{\rho}_{.j} = \beta_{j'} + \bar{\varphi}_{.j'} + \bar{\tau}_{.j'} + \bar{\rho}_{.j} ; \forall (j, j'), j \neq j'$$

ii.3 Com interações, desbalanceado

$$H_o^{1-B} = H_o^{2-B} : \beta_j + \bar{\varphi}_{.j} + \bar{\tau}_{.j} + \bar{\rho}_{.j} = \beta_{j'} + \bar{\varphi}_{.j'} + \bar{\tau}_{.j'} + \bar{\rho}_{.j} ; \forall (j, j'), j \neq j'$$

$$H_o^{3-B} = H_o^{4-B} : \beta_j + \tilde{\varphi}_{.j} + \tilde{\tau}_{.j} + \tilde{\rho}_{.j} = \beta_{j'} + \tilde{\varphi}_{.j'} + \tilde{\tau}_{.j'} + \tilde{\rho}_{.j} ; \forall (j, j'), j \neq j'$$

iii Hipóteses para o fator C

iii.1 Sem interações: balanceado ou desbalanceado

$$H_o^{1-C} = H_o^{2-C} = H_o^{3-C} = H_o^{4-C} : \gamma_k = \gamma_{k'} ; \forall (k, k'), k \neq k'$$

iii.2 Com interações, balanceado

$$H_o^{1-C} = H_o^{2-C} = H_o^{3-C} = H_o^{4-C} : \gamma_k + \bar{\eta}_{.k} + \bar{\tau}_{.k} + \bar{\rho}_{.k} = \gamma_{k'} + \bar{\eta}_{.k'} + \bar{\tau}_{.k'} + \bar{\rho}_{.k'} ; \forall (k, k'), k \neq k'$$

iii.3 Com interações, desbalanceado

$$H_o^{1-C} = H_o^{2-C} : \gamma_k + \bar{\eta}_{.k} + \bar{\tau}_{.k} + \bar{\rho}_{.k} = \gamma_{k'} + \bar{\eta}_{.k'} + \bar{\tau}_{.k'} + \bar{\rho}_{.k'} ; \forall (k, k'), k \neq k'$$

$$H_o^{3-C} = H_o^{4-C} : \gamma_k + \tilde{\eta}_{.k} + \tilde{\tau}_{.k} + \tilde{\rho}_{.k} = \gamma_{k'} + \tilde{\eta}_{.k'} + \tilde{\tau}_{.k'} + \tilde{\rho}_{.k'} ; \forall (k, k'), k \neq k'$$

iii Hipóteses para a interação A*B

iii.1 Balanceado

$$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB} = H_o^{3-AB} = H_o^{4-AB} : \varphi_{ij} - \varphi_{i'j} - \varphi_{ij'} + \varphi_{i'j'} + \bar{\rho}_{ij} - \bar{\rho}_{i'j} - \bar{\rho}_{ij'} + \bar{\rho}_{i'j'} = 0$$

$$\forall (i, i', j, j'), i \neq i', j \neq j'$$

iii.2 Desbalanceado

$$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB} : \varphi_{ij} - \varphi_{i'j} - \varphi_{ij'} + \varphi_{i'j'} + \bar{\rho}_{ij} - \bar{\rho}_{i'j} - \bar{\rho}_{ij'} + \bar{\rho}_{i'j'} = 0 ;$$

$$\forall (i, i', j, j'), i \neq i', j \neq j'$$

$$H_o^{3-AB} = H_o^{4-AB} : \varphi_{ij} - \varphi_{i'j} - \varphi_{ij'} + \varphi_{i'j'} + \tilde{\rho}_{ij} - \tilde{\rho}_{i'j} - \tilde{\rho}_{ij'} + \tilde{\rho}_{i'j'} = 0 ;$$

$$\forall (i, i', j, j'), i \neq i', j \neq j'$$

iv Hipóteses para a interação A*C

iv.1 Balanceado

$$H_o^{1-AC} = H_o^{2-AC} = H_o^{3-AC} = H_o^{4-AC} : \eta_{ik} - \eta_{ik'} - \eta_{i'k} + \eta_{i'k'} + \bar{\rho}_{i.k} - \bar{\rho}_{i'.k} - \bar{\rho}_{i.k'} + \bar{\rho}_{i'.k'} = 0$$

$$\forall (i, i', k, k'), i \neq i', k \neq k'$$

iv.2 Desbalanceado

$$H_o^{1-AC} = H_o^{2-AC} : \eta_{ik} - \eta_{ik'} - \eta_{i'k} + \eta_{i'k'} + \bar{\rho}_{i.k} - \bar{\rho}_{i'.k} - \bar{\rho}_{i.k'} + \bar{\rho}_{i'.k'} = 0$$

$$\forall (i, i', k, k'), i \neq i', k \neq k'$$

$$H_o^{3-AC} = H_o^{4-AC} : \eta_{ik} - \eta_{ik'} - \eta_{i'k} + \eta_{i'k'} + \tilde{\rho}_{i.k} - \tilde{\rho}_{i'.k} - \tilde{\rho}_{i.k'} + \tilde{\rho}_{i'.k'} = 0$$

$$\forall (i, i', k, k'), i \neq i', k \neq k'$$

v Hipóteses para a interação B*C

v.1 Balanceado

$$H_o^{1-BC} = H_o^{2-BC} = H_o^{3-BC} = H_o^{4-BC} : \tau_{jk} - \tau_{jk'} - \tau_{j'k} + \tau_{j'k'} + \bar{\rho}_{.jk} - \bar{\rho}_{.j'k} - \bar{\rho}_{.jk'} + \bar{\rho}_{.j'k'} = 0$$

$$\forall (j, j', k, k'), j \neq j', k \neq k'$$

v.2 Desbalanceado

$$H_o^{1-BC} = H_o^{2-BC} : \tau_{jk} - \tau_{jk'} - \tau_{j'k} + \tau_{j'k'} + \bar{\rho}_{.jk} - \bar{\rho}_{.j'k} - \bar{\rho}_{.jk'} + \bar{\rho}_{.j'k'} = 0$$

$$\forall (j, j', k, k'), j \neq j', k \neq k'$$

$$H_o^{2-BC} = H_o^{3-BC} : \tau_{jk} - \tau_{jk'} - \tau_{j'k} + \tau_{j'k'} + \tilde{\rho}_{.jk} - \tilde{\rho}_{.j'k} - \tilde{\rho}_{.jk'} + \tilde{\rho}_{.j'k'} = 0$$

$$\forall (j, j', k, k'), j \neq j', k \neq k'$$

vi Hipóteses para a interação A*B*C

$$H_o^{1-ABC} = H_o^{2-ABC} = H_o^{3-ABC} = H_o^{4-ABC} : \rho_{ijk} + \rho_{ijk} - \rho_{ijk} - \rho_{ijk} - \rho_{ijk} - \rho_{ijk} + \rho_{ijk} + \rho_{ijk} = 0$$

$$\forall (i, i', j, j', k, k'), i \neq i', j \neq j', k \neq k'$$

Como pode ser observado, as hipóteses sobre a interação de mais alta ordem é a mesma para os quatro tipos e não contêm componentes das interações de ordem inferior.

a Conjuntos balanceados

4.1.2.1 3º Exemplo

Para os delineamentos ortogonais balanceados com três fatores, assim como feito para os modelos com dois fatores, são apresentados apenas alguns resultados quanto a igualdade de hipóteses e a forma das funções estimáveis, que serviram como uma referência para a discussão dos delineamentos desbalanceados com frequências proporcionais nas caselas.

Tabela 8. Dados de porcentagem de germinação de canafistula (*Peltophorum dubium* Spreng) do delineamento ortogonal balanceado com três fatores.

Temperatura (fator A)	Dormência (fator C)			
	k=1		k=2	
	Substrato (fator B)		Substrato (fator B)	
	$\bar{j}=1$	$\bar{j}=2$	$\bar{j}=1$	$\bar{j}=2$
$\bar{I}=1$	12	38	30	12
	22	46	22	15
	30	42	28	26
$\bar{I}=2$	58	40	34	28
	56	46	26	20
	62	36	22	22

a.1 Modelo sem interações

O Quadro 10 apresenta as funções estimáveis apenas para o fator A, mostrando que nos conjuntos balanceados, funções do próprio fator são estimáveis nos modelos sem interações. Esse resultado também ocorre para as funções estimáveis relativas aos fatores B e C, como pode ser verificado invertendo-se a ordem de entrada dos fatores no modelo.

Quadro 10. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 8, considerando o modelo sem interações.

Tipo I-A= Tipo II-A				Tipo III-A= Tipo IV-A			
Efeito			Coefficientes	Efeito			Coefficientes
INTERCEPTO			0	INTERCEPTO			0
A	1	L2		A	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
C	1	0		C	1	0	
	2	0			2	0	

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_1 = \alpha_2$$

Na Tabela 9, estão destacados apenas os resultados para o fator A. A igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos

I e II, ou seja, $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = 672,0417$ que são, ainda, iguais às decomposições, $R(\alpha|\mu, \beta)$ e $R(\alpha|\mu, \gamma)$. As igualdades para as hipóteses dos efeitos principais e interações são apresentadas no conjunto desbalanceado. A igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos II e III é devida à ausência de interações, $R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = R(\alpha|\mu, \beta, \dot{\gamma}) = 672,0147$, $R(\beta|\mu, \alpha, \gamma) = R(\beta|\mu, \dot{\alpha}, \dot{\gamma}) = 40,0417$ e $R(\gamma|\mu, \alpha, \beta) = R(\dot{\gamma}|\mu, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = 1717,0417$.

Tabela 9. Análise de variância do delineamento ortogonal balanceado, descrito na Tabela 8, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$, declarando A como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	672,04166667	672,04166667	$R(\alpha \mu)$
B	1	40,04166667	40,04166667	$R(\beta \mu, \alpha)$
C	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	672,04166667	672,04166667	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
B	1	40,04166667	40,04166667	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
C	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	672,04166667	672,04166667	$R(\alpha \mu, \beta, \dot{\gamma})$
B	1	40,04166667	40,04166667	$R(\beta \mu, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$
C	1	1717,04166667	1717,04166667	$R(\dot{\gamma} \mu, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$

a.2 Modelo com interações

Pelo Quadro 11 observa-se a característica dos delineamentos ortogonais balanceados de modelos com três fatores e interações, onde as funções estimáveis envolvendo um único fator, no exemplo, o fator A, apresentaram parâmetros relativos ao próprio fator (α) e parâmetros das interações onde o fator está presente (φ e ρ). Ademais, funções estimáveis das interações, no exemplo, a interação A*B como se observa no Quadro 12, revelam a presença de parâmetros da própria interação (φ) e parâmetros da interação de maior grau (ρ).

Quadro 11. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 8, considerando o modelo com interações.

Tipo I-A= Tipo II-A

Efeito		Coeficientes
INTERCEPTO		0
A	1	L2
	2	-L2
B	1	0
	2	0
C	1	0
	2	0
A*B	1 1	0,5*L2
	1 2	0,5*L2
	2 1	-0,5*L2
	2 2	-0,5*L2
A*C	1 1	0,5*L2
	1 2	0,5*L2
	2 1	-0,5*L2
	2 2	-0,5*L2
B*C	1 1	0
	1 2	0
	2 1	0
	2 2	0
A*B*C	1 1 1	0,25*L2
	1 1 2	0,25*L2
	1 2 1	0,25*L2
	1 2 2	0,25*L2
	2 1 1	-0,25*L2
	2 1 2	-0,25*L2
	2 2 1	-0,25*L2
	2 2 2	-0,25*L2

Tipo III-A= Tipo IV-A

Efeito		Coeficientes
INTERCEPTO		0
A	1	L2
	2	-L2
B	1	0
	2	0
C	1	0
	2	0
A*B	1 1	0,5*L2
	1 2	0,5*L2
	2 1	-0,5*L2
	2 2	-0,5*L2
A*C	1 1	0,5*L2
	1 2	0,5*L2
	2 1	-0,5*L2
	2 2	-0,5*L2
B*C	1 1	0
	1 2	0
	2 1	0
	2 2	0
A*B*C	1 1 1	0,25*L2
	1 1 2	0,25*L2
	1 2 1	0,25*L2
	1 2 2	0,25*L2
	2 1 1	-0,25*L2
	2 1 2	-0,25*L2
	2 2 1	-0,25*L2
	2 2 2	-0,25*L2

$$H_0^{1-A} = H_0^{2-A} = H_0^{3-A} = H_0^{4-A} : \alpha_1 + \frac{1}{4}(2\phi_{11} + 2\phi_{12} + 2\eta_{11} + 2\eta_{12} + \rho_{111} + \rho_{112} + \rho_{121} + \rho_{122}) =$$

$$= \alpha_2 + \frac{1}{4}(2\phi_{21} + 2\phi_{22} + \eta_{21} + \eta_{22} + \rho_{211} + \rho_{212} + \rho_{221} + \rho_{222})$$

Quadro 12. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre a interação fator $A*B$, para os dados da Tabela 8.

Tipo I-$A*B$ = Tipo II-$A*B$				Tipo III-$A*B$ = IV-$A*B$			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
A	1	0		A	1	0	
	2	0			2	0	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
C	1	0		C	1	0	
	2	0			2	0	
A*B	1 1	L8		A*B	1 1	L8	
	1 2	-L8			1 2	-L8	
	2 1	-L8			2 1	-L8	
	2 2	L8			2 2	L8	
A*C	1 1	0		A*C	1 1	0	
	1 2	0			1 2	0	
	2 1	0			2 1	0	
	2 2	0			2 2	0	
B*C	1 1	0		B*C	1 1	0	
	1 2	0			1 2	0	
	2 1	0			2 1	0	
	2 2	0			2 2	0	
A*B*C	1 1 1	0,5*L8		A*B*C	1 1 1	0,5*L8	
	1 1 2	0,5*L8			1 1 2	0,5*L8	
	1 2 1	-0,5*L8			1 2 1	-0,5*L8	
	1 2 2	-0,5*L8			1 2 2	-0,5*L8	
	2 1 1	-0,5*L8			2 1 1	-0,5*L8	
	2 1 2	-0,5*L8			2 1 2	-0,5*L8	
	2 2 1	0,5*L8			2 2 1	0,5*L8	
	2 2 2	0,5*L8			2 2 2	0,5*L8	

$$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB} = H_o^{3-AB} = H_o^{4-AB}: \varphi_{11} - \varphi_{12} - \varphi_{21} - \varphi_{22} + \frac{1}{2}(\rho_{111} + \rho_{112} - \rho_{121} - \rho_{122} - \rho_{211} - \rho_{212} + \rho_{221} + \rho_{222}) = 0$$

Na Tabela 10 observa-se, quanto aos efeitos principais de modelos com interações, a mesma igualdade de hipóteses e decomposições verificadas nos modelos sem interações, ou seja, $R(\alpha | \mu) = R(\alpha | \mu, \beta, \gamma) = 672,0417$. As somas de quadrados das interações, no exemplo, a interação $A*B$, mostram a igualdade entre $R(\varphi | \mu, \alpha, \beta, \gamma) = R(\varphi | \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau) = 425,0417$, ou seja, a soma de quadrados associada à hipótese do tipo I para a interação $A*B$ é igual a uma soma de quadrados associada à hipótese do tipo II. Esses resultados só puderam ser ilustrados para o fator A e para a interação $A*B$, uma vez que entre os efeitos principais e entre as interações foram os primeiros a serem

declarados. Maiores detalhes quanto a ordem de entrada dos efeitos principais e das interações são apresentados no conjunto desbalanceado com frequências proporcionais.

Tabela 10. Análise de variância do delineamento ortogonal balanceado, descrito na Tabela 8, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \phi_{ij} + \eta_{ik} + \tau_{jk} + \rho_{ijk} + e_{ijkl}$, sendo A o primeiro fator declarado entre os efeitos principais e A*B a primeira entre as interações.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	672,04166667	672,04166667	R ($\alpha \mu$)
B	1	40,04166667	40,04166667	R ($\beta \mu, \alpha$)
C	1	1717,04166667	1717,04166667	R ($\gamma \mu, \alpha, \beta$)
A*B	1	425,04166667	425,04166667	R ($\phi \mu, \alpha, \beta, \gamma$)
A*C	1	330,04166667	330,04166667	R ($\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi$)
B*C	1	92,04166667	92,04166667	R ($\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \eta$)
A*B*C	1	715,04166667	715,04166667	R ($\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \eta, \tau$)
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	672,04166667	672,04166667	R ($\alpha \mu, \beta, \gamma$)
B	1	40,04166667	40,04166667	R ($\beta \mu, \alpha, \gamma$)
C	1	1717,04166667	1717,04166667	R ($\gamma \mu, \alpha, \beta$)
A*B	1	425,04166667	425,04166667	R ($\phi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau$)
A*C	1	330,04166667	330,04166667	R ($\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \tau$)
B*C	1	92,04166667	92,04166667	R ($\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \eta$)
A*B*C	1	715,04166667	715,04166667	R ($\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \eta, \tau$)
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	672,04166667	672,04166667	R ($\hat{\alpha} \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$)
B	1	40,04166667	40,04166667	R ($\hat{\beta} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}$)
C	1	1717,04166667	1717,04166667	R ($\hat{\gamma} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$)
A*B	1	425,04166667	425,04166667	R ($\hat{\phi} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\eta}, \hat{\tau}$)
A*C	1	330,04166667	330,04166667	R ($\hat{\eta} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\phi}, \hat{\tau}$)
B*C	1	92,04166667	92,04166667	R ($\hat{\tau} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\phi}, \hat{\eta}$)
A*B*C	1	715,04166667	715,04166667	R ($\hat{\rho} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\tau}$)

Nos modelos com três fatores e interações, é importante não só a ordem de entrada dos efeitos principais, mas também, a ordem de entrada das interações. A variação na ordem de entrada das interações, amplia o estudo da ortogonalidade, antes centrada na igualdade entre as hipóteses dos tipos I e II para efeitos principais, agora expandida para as interações.

b Conjuntos desbalanceados

4.1.2.2 4º Exemplo

A Tabela 11 apresenta o exemplo do delineamento ortogonal desbalanceado com três fatores, através do qual são feitas discussões sobre igualdade de hipóteses, formas das funções estimáveis e formas de obtenção das hipóteses dos tipos I e II para os efeitos principais e interações pelo Proc GLM do SAS. Na direção dos delineamentos ortogonais desbalanceados com mais de dois fatores é que se concentrou grande parte dos objetivos deste trabalho e por isso a ortogonalidade foi abordada com maior detalhamento.

Tabela 11. Dados de porcentagem de germinação de canafistula (*Peltophorum dubium* Spreng) do delineamento ortogonal desbalanceado com três fatores.

Temperatura (fator A)	Substrato (fator B)			
	$j=1$		$j=2$	
	Dormência (fator C)		Dormência (fator C)	
$i=1$	$k=1$	$k=2$	$k=1$	$k=2$
	12	28	38	40
			46	46
			42	36
$i=2$	30	34	12	58
	22	26	22	56
			30	62
			12	52
			18	58
			38	70

No teorema 2 comprovou-se, que uma condição necessária e suficiente para que os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes a cada fator, após o ajuste de μ , sejam ortogonais e portanto, que um delineamento com três fatores seja ortogonal, é que as freqüências das caselas dos fatores dois a dois sejam proporcionais, sendo tais proporções apresentadas nas expressões 10, 15 e 20.

Aplicando-se as expressões aos dados da Tabela 11, foram obtidas as seguintes proporções:

i) Ignorando o fator C

Fator B	Fator A		$n_{.j.}$
	$i=1$	$i=2$	
$j=1$	$n_{11.} = 2$	$n_{21.} = 4$	$n_{.1.} = 6$
$j=2$	$n_{12.} = 6$	$n_{22.} = 12$	$n_{.2.} = 18$
$n_{i..}$	$n_{1..} = 8$	$n_{2..} = 16$	$n_{...} = 24$

$$\frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}} = \frac{n_{ij.}}{n_{ij'.}} = \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

$$n_{ij.} = \frac{n_{i..} n_{.j.}}{n_{...}}, \quad \forall (i, j)$$

$$\therefore C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$$

ii) Ignorando o fator B

Fator C	Fator A		$n_{..k}$
	$i=1$	$i=2$	
$k=1$	$n_{1.1} = 4$	$n_{2.1} = 8$	$n_{..1} = 12$
$k=2$	$n_{1.2} = 4$	$n_{2.2} = 8$	$n_{..2} = 12$
$n_{i..}$	$n_{1..} = 8$	$n_{2..} = 16$	$n_{...} = 24$

$$\frac{n_{i.k}}{n_{i'.k}} = \frac{n_{i.k'}}{n_{i'.k'}} = \frac{1}{2} \text{ ou } 1$$

$$n_{i.k} = \frac{n_{i..} n_{..k}}{n_{...}}, \quad \forall (i, k)$$

$$\therefore C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$$

iii) Ignorando o fator A

Fator C	Fator B		$n_{..k}$
	$j=1$	$j=2$	
$k=1$	$n_{.11} = 3$	$n_{.21} = 9$	$n_{..1} = 12$
$k=2$	$n_{.12} = 3$	$n_{.22} = 9$	$n_{..2} = 12$
$n_{.j.}$	$n_{.1.} = 6$	$n_{.2.} = 18$	$n_{...} = 24$

$$\frac{n_{.jk}}{n_{.jk'}} = \frac{n_{.jk'}}{n_{.jk'}} = \frac{1}{3} \text{ ou } 1$$

$$n_{.jk} = \frac{n_{.j.} n_{..k}}{n_{...}}, \quad \forall (j, k)$$

$$\therefore C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$$

Como as frequências entre os fatores dois a dois são proporcionais, o delineamento desbalanceado apresentado na Tabela 11 é ortogonal e portanto as hipóteses sobre médias ponderadas são iguais às hipóteses sobre médias ponderadas ajustadas, para todos os efeitos principais e interações. Essa afirmação e outras considerações sobre a ortogonalidade em conjuntos desbalanceados são apresentados à seguir dentro de modelos com e sem interações.

b.1 Modelos sem interações

A forma matricial do modelo $y = X\theta + e$ caracterizado por $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$, para os dados da Tabela 11 é dada por:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 28 \\ 38 \\ 46 \\ 42 \\ 40 \\ 46 \\ 36 \\ 30 \\ 22 \\ 34 \\ 26 \\ 12 \\ 22 \\ 30 \\ 12 \\ 18 \\ 38 \\ 58 \\ 56 \\ 62 \\ 52 \\ 58 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1111} \\ e_{1121} \\ e_{1211} \\ e_{1212} \\ e_{1213} \\ e_{1221} \\ e_{1222} \\ e_{1223} \\ e_{2111} \\ e_{2112} \\ e_{2121} \\ e_{2122} \\ e_{2211} \\ e_{2212} \\ e_{2213} \\ e_{2214} \\ e_{2215} \\ e_{2216} \\ e_{2221} \\ e_{2222} \\ e_{2223} \\ e_{2224} \\ e_{2225} \\ e_{2226} \end{bmatrix}$$

onde:

$$X = [X_\mu | X_\alpha | X_\beta | X_\gamma]; \quad X_{\mu,\alpha} = [X_\mu | X_\alpha]; \quad X_{\mu,\beta} = [X_\mu | X_\beta]; \quad X_{\mu,\gamma} = [X_\mu | X_\gamma]$$

Para ilustrar as propriedades dos delineamentos ortogonais desbalanceados com três fatores, foram utilizados os dados da Tabela 11 e formuladas hipóteses dos tipos I e II apenas para o fator A, segundo o critério de Searle (1987). O modelo adotado para a construção das hipóteses foi o de médias de caselas caracterizado por $y_{ijkl} = \mu_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$ (Speed, Hocking e Hackney, 1978), como apresenta a Tabela 12.

Tabela 12. Representação do modelo de médias caselas do delineamento ortogonal desbalanceado descrito na Tabela 11.

Fator A	Fator B			
	j=1		j=2	
	Fator C		Fator C	
	k=1	k=2	k=1	k=2
i=1	$\mu_1 + \beta_1 + \gamma_1^{(1)}$	$\mu_1 + \beta_1 + \gamma_2^{(1)}$	$\mu_1 + \beta_2 + \gamma_1^{(3)}$	$\mu_1 + \beta_2 + \gamma_2^{(3)}$
i=2	$\mu_2 + \beta_1 + \gamma_1^{(2)}$	$\mu_2 + \beta_1 + \gamma_2^{(2)}$	$\mu_2 + \beta_2 + \gamma_1^{(6)}$	$\mu_2 + \beta_2 + \gamma_2^{(6)}$

a Hipótese do tipo I para o fator A

Observa-se, sob ortogonalidade, que através da ponderação pelas frequências de caselas da hipótese do tipo I para o fator A, já ocorre automaticamente o ajuste para os outros fatores.

$$H_o^{1-A} : \frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (\mu_1 + \beta_1 + \gamma_2) + 3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_1) + 3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_2)}{8} = \frac{2(\mu_2 + \beta_1 + \gamma_1) + 2(\mu_2 + \beta_1 + \gamma_2) + 6(\mu_2 + \beta_2 + \gamma_1) + 6(\mu_2 + \beta_2 + \gamma_2)}{16}$$

Uma simplificação é apresentada no modelo-M e posteriormente transformada no modelo-S.

a.1 Modelo-M

$$H_o^{1-A} : \mu_1 = \mu_2$$

a.2 Modelo-S

$$H_o^{1-A} : \alpha_1 = \alpha_2$$

b Hipótese do tipo II para o fator A

São as hipóteses do tipo II para conjuntos completos, as mais importantes para a interpretação prática de resultados. Mas, no exemplo a ortogonalidade faz com que os tipos I e II sejam equivalentes o que valoriza e estimula o planejamento de delineamentos ortogonais.

$$H_o^{2-A} : \frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (\mu_1 + \beta_1 + \gamma_2) + 3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_1) + 3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_2)}{8} = \frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 3\bar{C}_3 + 3\bar{C}_4}{8}$$

onde:

$$\bar{C}_1 = \frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_1) + 2(\mu_2 + \beta_1 + \gamma_1)}{3}, \quad \bar{C}_3 = \frac{3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_1) + 6(\mu_2 + \beta_2 + \gamma_1)}{9}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_2) + 2(\mu_2 + \beta_1 + \gamma_2)}{3}, \quad \bar{C}_4 = \frac{3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_2) + 6(\mu_2 + \beta_2 + \gamma_2)}{9}$$

b.1 Modelo-M

$$H_o^{1-A} : \mu_1 = \mu_2$$

b.2 Modelo-S

$$H_o^{2-A} : \alpha_1 = \alpha_2$$

Observando-se o resultado do item a.2, pode-se verificar que nas funções estimáveis de delineamentos ortogonais com três fatores, funções do próprio parâmetro em estudo são estimáveis. No exemplo, o fator A. Consequentemente, ocorre a igualdade entre as funções estimáveis dos tipos I e II como verificado nos itens a.2 e b.2. Esses resultados podem ser ainda ilustrados no Quadro 13.

Quadro 13. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 11, considerando o modelo sem interações.

Tipo I-A= Tipo II-A				Tipo III-A= Tipo IV-A			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
A	1	L2		A	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
C	1	0		C	1	0	
	2	0			2	0	

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_1 = \alpha_2$$

A Tabela 13 apresenta a análise da variância dos dados da Tabela 11, mostrando que para o fator A, a soma de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II são iguais. Como consequência dessa igualdade, tem-se $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = 12,0000$; que por sua vez são iguais à $R(\alpha|\mu, \beta)$, apresentada na Tabela 14 e $R(\alpha|\mu, \gamma)$ apresentada na Tabela 15.

Para verificar a primeira igualdade, $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta, \gamma)$ foi aplicada a prova apresentada por Christensen (1987) que se baseia na igualdade entre os projetores ortogonais de cada decomposição. Aqui, para um modelo com três fatores sem interações, a soma de quadrados de parâmetros, $R(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$, tem o seguinte projetor ortogonal: $P = P_\mu + P_{\gamma|\mu} + P_{\beta|\mu, \gamma} + P_{\alpha|\mu, \beta, \gamma}$, que corresponde ao projetor da matriz de delineamento X. Se o projetor P puder ser escrito como $P' = P_\mu + P_{\gamma|\mu} + P_{\beta|\mu, \gamma} + P_{\alpha|\mu}$ implica que o subespaço gerado por P' é igual ao subespaço gerado pelas colunas de X e, portanto, $P' = P$.

Para o exemplo da Tabela 11, os vetores linearmente independentes que formam uma das bases do subespaço gerado pelas colunas de X e de $P' = P_\mu + P_{\gamma|\mu} + P_{\beta|\mu, \gamma} + P_{\alpha|\mu}$, são apresentados a seguir.

Entretanto, para que o delineamento seja definido como ortogonal é preciso também que o subespaço gerado pelas colunas de $P'' = P_{\mu} + P_{\alpha|\mu} + P_{\gamma|\mu, \alpha} + P_{\beta|\mu}$ e o subespaço gerado pelas colunas $P''' = P_{\mu} + P_{\alpha|\mu} + P_{\beta|\mu, \gamma} + P_{\gamma|\mu}$ estejam individualmente contidos no subespaço gerado pelas colunas de X . Como, para exemplo da Tabela 11, $C(P'') \subset C(X)$ e $C(P''') \subset C(X)$, o delineamento é ortogonal. Logo $R(\beta|\mu) = R(\beta|\mu, \alpha, \gamma) = 108,8889$ e $R(\gamma|\mu) = R(\gamma|\mu, \alpha, \beta) = 2480,6667$. Para a verificação numérica dessas igualdades, inverteu-se a ordem de entrada dos fatores no modelo, declarando-se em primeiro lugar, respectivamente, o fator B (Tabela 14) e o fator C (Tabela 15).

Tabela 13. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 11, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$, declarando A como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	12,00000000	12,00000000	R ($\alpha \mu$)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \alpha)$
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	12,00000000	12,00000000	R ($\alpha \mu, \beta, \gamma$)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	12,00000000	12,00000000	R ($\hat{\alpha} \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\hat{\beta} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\hat{\gamma} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$

Tabela 14. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 11, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \beta_j + \alpha_i + \gamma_k + e_{ijkl}$, declarando B como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \beta)$
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$

Uma das grandes implicações da ortogonalidade é que nos delineamentos ortogonais, por construção, há apenas uma partição ortogonal da soma de quadrados de parâmetros. Isso implica que a ordem de entrada dos fatores no modelo, como se verifica nas Tabelas 13, 14 e 15, passa a não se fazer necessária, quando as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II são requeridas pelo pesquisador. Por consequência indireta da ortogonalidade, as somas de quadrados dos tipos III são iguais às do tipo IV e pela ausência de interações tipo II é igual ao tipo III. Uma avaliação menos cuidadosa das Tabelas 13, 14 e 15 poderia levar a uma interpretação dos resultados como feita para conjuntos balanceados. Essa identidade entre os conjuntos balanceados e desbalanceados para modelos sem interações revela a grande aplicação e facilidade de interpretação quando os experimentos são planejados de tal forma a gerar frequências proporcionais.

Tabela 15. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 11, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + e_{ijkl}$, declarando C como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \gamma)$
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\dot{\gamma} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\dot{\alpha} \dot{\mu}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\dot{\beta} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$

Neste estudo, a ordem de entrada dos fatores no modelo foi importante, pois mostrou as conseqüências da ortogonalidade para todos os fatores do modelo. Entretanto, após o planejamento de delineamentos ortogonais, essa ordem de entrada dos fatores no modelo passa a não ser mais importante o que amplia a utilização dos sistemas computacionais.

b.2 Modelo com interações

Para a discussão dos modelos com três fatores e interações, foram utilizados os mesmos dados da Tabela 11 e formuladas hipóteses dos tipos I e II apenas para o fator A, segundo o critério de Searle (1987). O modelo adotado para a construção das hipóteses foi o de médias de caselas caracterizado por $y_{ijkl} = \mu_{ijk} + e_{ijkl}$ (Speed, Hocking e Hackney, 1978), como mostra a Tabela 16.

Tabela 16. Representação do modelo de médias de caselas do delineamento ortogonal desbalanceado descrito na Tabela 11.

Fator A	Fator B			
	$j=1$		$j=2$	
	Fator C		Fator C	
	$k=1$	$k=2$	$k=1$	$k=2$
$i=1$	$\mu_{111}^{(1)}$	$\mu_{112}^{(1)}$	$\mu_{121}^{(3)}$	$\mu_{122}^{(3)}$
$i=2$	$\mu_{211}^{(2)}$	$\mu_{212}^{(2)}$	$\mu_{221}^{(6)}$	$\mu_{222}^{(6)}$

a Hipótese do tipo I para o fator A

A formulação da hipótese sobre médias ponderadas de delineamentos ortogonais mostra que quando a ponderação para um determinado fator é realizada, automaticamente já ocorre o ajuste para os outros fatores, fazendo com que uma hipótese sobre médias ponderadas iguale-se à hipótese sobre médias ponderadas ajustadas.

$$H_o^{1-A} : \frac{\mu_{111} + \mu_{112} + 3\mu_{121} + 3\mu_{122}}{8} = \frac{2\mu_{211} + 2\mu_{212} + 6\mu_{221} + 6\mu_{222}}{16}$$

a.1 Modelo-M

$$H_o^{1-A} : \mu_{111} + \mu_{112} + 3\mu_{121} + 3\mu_{122} - \mu_{211} - \mu_{212} - 3\mu_{221} - 3\mu_{222} = 0$$

a.2 Modelo-S

$$\begin{aligned} H_o^{1-A} : \alpha_1 + \frac{1}{8}(2\phi_{11} + 6\phi_{12} + 4\eta_{11} + 4\eta_{12} + \rho_{111} + \rho_{112} + 3\rho_{121} + 3\rho_{122}) = \\ = \alpha_2 + \frac{1}{8}(2\phi_{21} + 6\phi_{22} + 4\eta_{21} + 4\eta_{22} + \rho_{211} + \rho_{212} + 3\rho_{221} + 3\rho_{222}) \end{aligned}$$

Apesar da ortogonalidade, a função estimável do tipo I para o fator A com a presença de parâmetros de interações, dificulta a interpretação dos resultados, tornando-se confusa e complexa.

Conforme descrito em P.6, a ortogonalidade fez com que as funções estimáveis para os efeitos principais apresentassem parâmetros do

próprio fator e parâmetros das interações onde o fator está presente, característica anteriormente discutida para os conjuntos balanceados e presente nos conjuntos desbalanceados. Portanto, para o fator A apresentado no item a.2, tem-se funções dos seguintes parâmetros: α , ϕ , η e ρ que são parâmetros correspondentes ao próprio fator, à interação $A*B$, à interação $A*C$ e à interação $A*B*C$, respectivamente (Quadro 14).

b Hipótese tipo II para o fator A

$$H_o^{2-A} : \frac{\mu_{111} + \mu_{112} + 3\mu_{121} + 3\mu_{122}}{8} = \frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 3\bar{C}_3 + 3\bar{C}_4}{8}$$

onde:

$$\bar{C}_1 = \frac{\mu_{111} + 2\mu_{211}}{3}; \bar{C}_2 = \frac{\mu_{112} + 2\mu_{212}}{3}; \bar{C}_3 = \frac{3\mu_{121} + 6\mu_{221}}{9} \text{ e } \bar{C}_4 = \frac{3\mu_{122} + 6\mu_{222}}{9}$$

Trabalhando com o segundo termo da hipótese chega-se a seguinte igualdade,

$$H_o^{2-A} : \frac{\mu_{111} + \mu_{112} + 3\mu_{121} + 3\mu_{122}}{8} = \frac{2\mu_{211} + 2\mu_{212} + 6\mu_{221} + 6\mu_{222}}{16}$$

b.1 Modelo-M

$$H_o^{2-A} : \mu_{111} + \mu_{112} + 3\mu_{121} + 3\mu_{122} - \mu_{211} - \mu_{212} - 3\mu_{221} - 3\mu_{222} = 0$$

b.2 Modelo-S

$$\begin{aligned} H_o^{2-A} : & \alpha_1 + \frac{1}{8}(2\phi_{11} + 6\phi_{12} + 4\eta_{11} + 4\eta_{12} + \rho_{111} + \rho_{112} + 3\rho_{121} + 3\rho_{122}) = \\ & = \alpha_2 + \frac{1}{8}(2\phi_{21} + 6\phi_{22} + 4\eta_{21} + 4\eta_{22} + \rho_{211} + \rho_{212} + 3\rho_{221} + 3\rho_{222}) \end{aligned}$$

Quadro 14. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 11, considerando o modelo com interações.

Tipo I-A = Tipo II-A

Efeito		Coeficientes
INTERCEPTO		0
A	1	L2
	2	-L2
B	1	0
	2	0
C	1	0
	2	0
A*B	1 1	0,25*L2
	1 2	0,75*L2
	2 1	-0,25*L2
	2 2	-0,75*L2
A*C	1 1	0,5*L2
	1 2	0,5*L2
	2 1	-0,5*L2
	2 2	-0,5*L2
B*C	1 1	0
	1 2	0
	2 1	0
	2 2	0
A*B*C	1 1 1	0,125*L2
	1 1 2	0,125*L2
	1 2 1	0,375*L2
	1 2 2	0,375*L2
	2 1 1	-0,125*L2
	2 1 2	-0,125*L2
	2 2 1	-0,375*L2
	2 2 2	-0,375*L2

$$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}: \alpha_1 + \frac{1}{8}(2\varphi_{11} + 6\varphi_{12} + 4\eta_{11} + 4\eta_{12} + \rho_{111} + \rho_{112} + 3\rho_{121} + 3\rho_{122}) = \alpha_2 + \frac{1}{8}(2\varphi_{21} + 6\varphi_{22} + 4\eta_{21} + 4\eta_{22} + \rho_{211} + \rho_{212} + 3\rho_{221} + 3\rho_{222})$$

Tipo III-A = Tipo IV-A

Efeito		Coeficientes
INTERCEPTO		0
A	1	L2
	2	-L2
B	1	0
	2	0
C	1	0
	2	0
A*B	1 1	0,5*L2
	1 2	0,5*L2
	2 1	-0,5*L2
	2 2	-0,5*L2
A*C	1 1	0,5*L2
	1 2	0,5*L2
	2 1	-0,5*L2
	2 2	-0,5*L2
B*C	1 1	0
	1 2	0
	2 1	0
	2 2	0
A*B*C	1 1 1	0,25*L2
	1 1 2	0,25*L2
	1 2 1	0,25*L2
	1 2 2	0,25*L2
	2 1 1	-0,25*L2
	2 1 2	-0,25*L2
	2 2 1	-0,25*L2
	2 2 2	-0,25*L2

$$H_o^{3-A} = H_o^{4-A}: \alpha_1 + \frac{1}{4}(2\varphi_{11} + 2\varphi_{12} + 2\eta_{11} + 2\eta_{12} + \rho_{111} + \rho_{112} + \rho_{121} + \rho_{122}) = \alpha_2 + \frac{1}{4}(2\varphi_{21} + 2\varphi_{22} + 2\eta_{21} + 2\eta_{22} + \rho_{211} + \rho_{212} + \rho_{221} + \rho_{222})$$

Quadro 15. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre a interação $A*B$, para os dados da Tabela 11, considerando o modelo com interações.

Tipo I-A*B = Tipo II-A*B				Tipo III-A*B = Tipo IV-A*B			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
A	1	0		A	1	0	
	2	0			2	0	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
C	1	0		C	1	0	
	2	0			2	0	
A*B	1 1	L8		A*B	1 1	L8	
	1 2	-L8			1 2	-L8	
	2 1	-L8			2 1	-L8	
	2 2	L8			2 2	L8	
A*C	1 1	0		A*C	1 1	0	
	1 2	0			1 2	0	
	2 1	0			2 1	0	
	2 2	0			2 2	0	
B*C	1 1	0		B*C	1 1	0	
	1 2	0			1 2	0	
	2 1	0			2 1	0	
	2 2	0			2 2	0	
A*B*C	1 1 1	0,5*L8		A*B*C	1 1 1	0,5*L8	
	1 1 2	0,5*L8			1 1 2	0,5*L8	
	1 2 1	-0,5*L8			1 2 1	-0,5*L8	
	1 2 2	-0,5*L8			1 2 2	-0,5*L8	
	2 1 1	-0,5*L8			2 1 1	-0,5*L8	
	2 1 2	-0,5*L8			2 1 2	-0,5*L8	
	2 2 1	0,5*L8			2 2 1	0,5*L8	
	2 2 2	0,5*L8			2 2 2	0,5*L8	
$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} : \varphi_{11} - \varphi_{12} - \varphi_{21} + \varphi_{22} + \frac{1}{2}(\rho_{111} + \rho_{112} - \rho_{121} - \rho_{122} - \rho_{211} - \rho_{212} + \rho_{221} + \rho_{222}) = 0$							
$H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \varphi_{11} - \varphi_{12} - \varphi_{21} + \varphi_{22} + \frac{1}{2}(\rho_{111} + \rho_{112} - \rho_{121} - \rho_{122} - \rho_{211} - \rho_{212} + \rho_{221} + \rho_{222}) = 0$							

O Quadro 14 revela para o fator A a esperada igualdade entre as funções estimáveis dos tipos I e II pela ortogonalidade e a igualdade entre os tipos III e IV devida a ausência de caselas vazias. Entretanto, um resultado pouco comum ocorreu para a interação $A*B$ que apresentou igualdade entre as funções estimáveis dos tipos II e III mesmo o conjunto sendo desbalanceado. Esse resultado ocorre porque na hipótese do tipo II, apenas para a interação $A*B$, as frequências são constantes, ou seja, hipóteses sob médias ponderadas ajustadas e não ponderadas ajustadas coincidem, como se observa no Quadro

15. Esse resultado não ocorre para as outras interações pois na hipótese do tipo II as frequências não são constantes.

As Tabelas 17, 18 e 19 mostram a igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II para todos os efeitos principais e interações do modelo, apresentando uma variação na ordem de entrada dos fatores e das interações. Além da igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II, são iguais as seguintes decomposições para o fator A: $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta) = R(\alpha|\mu, \gamma) = R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = 12,0000$. Ademais, como o modelo contém interações, a ordem de entrada das interações no modelo passa a ser um recurso didático importante para mostrar, que além da igualdade entre as somas de quadrados associadas as hipóteses dos tipos I e II para as interações são iguais as seguintes decomposições para A*B: $R(\varphi|\mu, \alpha, \beta, \gamma) = R(\varphi|\mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta) = R(\varphi|\mu, \alpha, \beta, \gamma, \tau) = R(\varphi|\mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau) = 75,1111$.

Nos modelos com dois fatores, como só há uma interação, não faz sentido a discussão entre hipóteses do tipo I e II para a interação, que passa a ser importante em modelos com mais de dois fatores. A Tabela 17 apresenta as somas de quadrados associadas às hipóteses do tipo III para os efeitos principais e interações, mostrando a diferença com o tipo II devida à presença de interações no modelo e a igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos III e IV devida à ausência de caselas vazias.

Os resultados da Tabela 18 mostram, para o fator B, que $R(\beta|\mu) = R(\beta|\mu, \alpha, \gamma) = 1088,8889$ e para a interação A*C, que $R(\eta|\mu, \alpha, \beta, \gamma) = R(\eta|\mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \tau) = 90,3333$, enquanto que na Tabela 19 observa-se que para o fator C, $R(\gamma|\mu) = R(\gamma|\mu, \alpha, \beta) = 2480,6667$ e para a interação B*C $R(\tau|\mu, \alpha, \beta, \gamma) = R(\tau|\mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \varphi) = 304,2222$.

Tabela 17. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 11, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varphi_{ij} + \eta_{ik} + \tau_{jk} + \rho_{ijk} + e_{ijkl}$, com A sendo o primeiro fator declarado entre os efeitos principais e A*B a primeira entre as interações.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	12,00000000	12,00000000	R ($\alpha \mu$)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	R ($\beta \mu, \alpha$)
C	1	2480,66666667	2480,66666667	R ($\gamma \mu, \alpha, \beta$)
A*B	1	75,11111111	75,11111111	R ($\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma$)
A*C	1	901,33333333	901,33333333	R ($\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi$)
B*C	1	304,22222222	304,22222222	R ($\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta$)
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	R ($\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta, \tau$)
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	12,00000000	12,00000000	R ($\alpha \mu, \beta, \gamma$)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	R ($\beta \mu, \alpha, \gamma$)
C	1	2480,66666667	2480,66666667	R ($\gamma \mu, \alpha, \beta$)
A*B	1	75,11111111	75,11111111	R ($\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau$)
A*C	1	901,33333333	901,33333333	R ($\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \tau$)
B*C	1	304,22222222	304,22222222	R ($\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta$)
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	R ($\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta, \tau$)
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	53,77777778	53,77777778	R ($\dot{\alpha} \dot{\mu}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$)
B	1	1156,00000000	1156,00000000	R ($\dot{\beta} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma}$)
C	1	784,00000000	784,00000000	R ($\dot{\gamma} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$)
A*B	1	75,11111111	75,11111111	R ($\dot{\varphi} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\eta}, \dot{\tau}$)
A*C	1	177,77777778	177,77777778	R ($\dot{\eta} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\varphi}, \dot{\tau}$)
B*C	1	64,00000000	64,00000000	R ($\dot{\tau} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\varphi}, \dot{\eta}$)
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	R ($\dot{\rho} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\varphi}, \dot{\eta}, \dot{\tau}$)

Tabela 18. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 11, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \beta_j + \alpha_i + \gamma_k + \eta_{ik} + \phi_{ij} + \tau_{jk} + \rho_{ijk} + e_{ijkl}$, sendo B o primeiro fator declarado entre os efeitos principais e $A*C$ a primeira entre as interações.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
B	1	1088,88888889	1088,00000009	$R(\beta \mu)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \beta)$
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
A*C	1	901,33333333	901,33333333	$R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma)$
A*B	1	75,11111111	75,11111111	$R(\phi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta)$
B*C	1	304,22222222	304,22222222	$R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \phi)$
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	$R(\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \phi, \tau)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
A*C	1	901,33333333	901,33333333	$R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \tau)$
A*B	1	75,11111111	75,11111111	$R(\phi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau)$
B*C	1	304,22222222	304,22222222	$R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \phi)$
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	$R(\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \eta, \tau)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
B	1	1156,00000000	1156,00000000	$R(\hat{\beta} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$
A	1	53,77777778	53,77777778	$R(\hat{\alpha} \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$
C	1	784,00000000	784,00000000	$R(\hat{\gamma} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$
A*C	1	177,77777778	177,77777778	$R(\hat{\eta} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\phi}, \hat{\tau})$
A*B	1	75,11111111	75,11111111	$R(\hat{\phi} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\eta}, \hat{\tau})$
B*C	1	64,00000000	64,00000000	$R(\hat{\tau} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\phi}, \hat{\tau})$
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	$R(\hat{\rho} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\tau})$

Tabela 19. Análise de variância do delineamento ortogonal desbalanceado, descrito na Tabela 11, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \beta_j + \alpha_i + \tau_{jk} + \eta_{jk} + \phi_{ij} + \rho_{ijk} + e_{ijkl}$, sendo *C* o primeiro fator declarado entre os efeitos principais e *B*C* a primeira entre as interações.

<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo I</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu)$
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \gamma)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
B*C	1	304,22222222	304,22222222	$R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma)$
A*C	1	901,33333333	901,33333333	$R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \tau)$
A*B	1	75,11111111	75,11111111	$R(\phi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau)$
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	$R(\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \eta, \tau)$
<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo II</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
C	1	2480,66666667	2480,66666667	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
B	1	1088,88888889	1088,88888889	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
A	1	12,00000000	12,00000000	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
B*C	1	304,22222222	304,22222222	$R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \phi)$
A*C	1	901,33333333	901,33333333	$R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \tau)$
A*B	1	75,11111111	75,11111111	$R(\phi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau)$
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	$R(\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \eta, \tau)$
<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>SQ Tipo III=IV</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
C	1	784,00000000	784,00000000	$R(\dot{\gamma} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$
B	1	1156,00000000	1156,00000000	$R(\dot{\beta} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$
A	1	53,77777778	53,77777778	$R(\dot{\alpha} \dot{\mu}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$
B*C	1	64,00000000	64,00000000	$R(\dot{\tau} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\phi}, \dot{\tau})$
A*C	1	177,77777778	177,77777778	$R(\dot{\eta} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\phi}, \dot{\tau})$
A*B	1	75,11111111	75,11111111	$R(\dot{\phi} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\eta}, \dot{\tau})$
A*B*C	1	641,77777778	641,77777778	$R(\dot{\rho} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\phi}, \dot{\eta}, \dot{\tau})$

Todas as igualdades entre as somas de quadrados associadas às hipóteses podem ser verificadas de outras maneiras, como por exemplo, aplicando-se a prova de Christensen (1987) baseada na igualdade entre os subespaços gerados pelos projetores e o subespaço gerado pelas colunas do projetor da matriz de delineamento contendo as interações. Uma demonstração dessa igualdade foi apresentada nos modelos sem interação, para o mesmo exemplo, e por isso não está aqui detalhada.

4.2 Delineamentos parcialmente ortogonais

A ortogonalidade parcial confere à forma das funções estimáveis e às hipóteses, características semelhantes aos delineamentos ortogonais para o fator ou fatores cujas freqüências de caselas são proporcionais aos demais fatores. As maiores diferenças entre os dois delineamentos concentra-se nos modelos com interações que, nos delineamentos parcialmente ortogonais, apresentam características muito próprias. Nos itens apresentados a seguir são mostrados dois exemplos que incluem modelos com três e quatro fatores com e sem interações, contemplando pelo menos um exemplo das diversas situações apresentadas na metodologia.

4.2.1 Modelos com três fatores

Nos modelos com três fatores a ortogonalidade parcial pode gerar três casos distintos, nos quais cada fator, *A*, *B* ou *C* apresenta freqüências de caselas proporcionais aos demais. O 5º exemplo na Tabela 20 apresenta o caso 1 do Quadro 4, na qual a proporcionalidade das freqüências com os demais fatores ocorre com o fator *A*.

4.2.1.1 5º Exemplo

Tabela 20. Dados de porcentagem de germinação de canafistula (*Peltophorum dubium* Spreng) do delineamento parcialmente ortogonal com três fatores.

Temperatura (fator <i>A</i>)	Substrato (fator <i>B</i>)			
	<i>j</i> =1		<i>j</i> =2	
	Dormência (fator <i>C</i>)		Dormência (fator <i>C</i>)	
<i>i</i> =1	<i>k</i> =1	<i>k</i> =2	<i>k</i> =1	<i>k</i> =2
	12	28	38	40
			46	46
			42	
<i>i</i> =2	30	34	12	58
	22	26	22	56
			30	62
			12	52
			18	
			38	

Para os dados da Tabela 20, através das expressões 15, 20 e 25 foram obtidos os seguintes resultados:

i) Ignorando o fator C

Fator B	Fator A		$n_{.j.}$
	$i=1$	$i=2$	
$j=1$	$n_{11.} = 2$	$n_{21.} = 4$	$n_{.1.} = 6$
$j=2$	$n_{12.} = 5$	$n_{22.} = 10$	$n_{.2.} = 15$
$n_{i..}$	$n_{1..} = 7$	$n_{2..} = 14$	$n_{...} = 21$

$$\frac{n_{ij.}}{n_{i'j.}} = \frac{n_{ij.}}{n_{i'j.}} = \frac{2}{5} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

$$n_{ij.} = \frac{n_{i..} n_{.j.}}{n_{...}}, \forall (i, j)$$

$$\therefore C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\beta|\mu})$$

ii) Ignorando o fator B

Fator C	Fator A		$n_{..k}$
	$i=1$	$i=2$	
$k=1$	$n_{1.1} = 4$	$n_{2.1} = 8$	$n_{..1} = 12$
$k=2$	$n_{1.2} = 3$	$n_{2.2} = 6$	$n_{..2} = 9$
$n_{i..}$	$n_{1..} = 7$	$n_{2..} = 14$	$n_{...} = 21$

$$\frac{n_{i.k}}{n_{i'.k}} = \frac{n_{i.k}}{n_{i'.k}} = \frac{4}{3} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

$$n_{i.k} = \frac{n_{i..} n_{..k}}{n_{...}}, \forall (i, k)$$

$$\therefore C(X_{\alpha|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$$

iii) Ignorando o fator A

Fator C	Fator B		$n_{..k}$
	$j=1$	$j=2$	
$k=1$	$n_{.11} = 3$	$n_{.21} = 9$	$n_{..1} = 12$
$k=2$	$n_{.12} = 3$	$n_{.22} = 6$	$n_{..2} = 9$
$n_{.j.}$	$n_{.1.} = 6$	$n_{.2.} = 15$	$n_{...} = 21$

$$\frac{n_{.jk}}{n_{.j'k}} \neq \frac{n_{.jk}}{n_{.j'k}}$$

$$n_{.jk} \neq \frac{n_{.j.} n_{..k}}{n_{...}}, \forall (j, k)$$

$$\therefore C(X_{\beta|\mu}) \not\perp C(X_{\gamma|\mu})$$

Uma observação pouco cuidadosa das freqüências poderia definir o delineamento como não ortogonal, em virtude da desigualdade entre a proporcionalidade das freqüências correspondentes aos fatores *B* e *C*. Entretanto, as freqüências do fator *A* são individualmente ortogonais às freqüências dos fatores *B* e *C* caracterizando, assim, o delineamento como parcialmente ortogonal. As implicações desse resultado nos efeitos principais de modelos sem interações e nas interações estão detalhadas nos itens seguintes.

***a* Modelo sem interações**

A forma matricial do modelo $y = X\theta + e$ caracterizado por $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$, para os dados da Tabela 20 é dada por:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 28 \\ 38 \\ 46 \\ 42 \\ 40 \\ 46 \\ 30 \\ 22 \\ 34 \\ 26 \\ 12 \\ 22 \\ 30 \\ 12 \\ 18 \\ 38 \\ 58 \\ 56 \\ 62 \\ 52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1111} \\ e_{1121} \\ e_{1211} \\ e_{1212} \\ e_{1213} \\ e_{1221} \\ e_{1222} \\ e_{2111} \\ e_{2112} \\ e_{2121} \\ e_{2122} \\ e_{2211} \\ e_{2212} \\ e_{2213} \\ e_{2214} \\ e_{2215} \\ e_{2216} \\ e_{2211} \\ e_{2222} \\ e_{2223} \\ e_{2224} \end{bmatrix}$$

onde:

$$X = [X_\mu | X_\alpha | X_\beta | X_\gamma]; \quad X_{\mu,\alpha} = [X_\mu | X_\alpha]; \quad X_{\mu,\beta} = [X_\mu | X_\beta]; \quad X_{\mu,\gamma} = [X_\mu | X_\gamma]$$

Para mostrar como a ortogonalidade parcial afeta a forma das funções estimáveis do exemplo da Tabela 20 foram formuladas hipóteses dos tipos I e II para os efeitos principais, utilizando-se o modelo de médias de

caselas caracterizado por $y_{ijkl} = \mu_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$, para o fator A ; $y_{ijkl} = \mu_j + \alpha_i + \gamma_k + e_{ijkl}$ para o fator B e $y_{ijkl} = \mu_k + \alpha_i + \beta_j + e_{ijkl}$ para o fator C (Speed, Hocking e Hackney, 1978).

a.1 Hipótese do tipo I para o fator A

Procedendo-se de modo análogo aos anteriores, obteve-se:

$$H_o^{1-A} : -\frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (\mu_1 + \beta_1 + \gamma_2) + 3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_1) + 2(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_2)}{7} = \\ = \frac{2(\mu_2 + \beta_1 + \gamma_1) + 2(\mu_2 + \beta_1 + \gamma_2) + 6(\mu_2 + \beta_2 + \gamma_1) + 4(\mu_2 + \beta_2 + \gamma_2)}{14}$$

que com as simplificações sobre o modelo-M e, a parametrização e as simplificações sobre o modelo-S, resulta:

a.1.1 Modelo-M

$$H_o^{1-A} : \mu_1 = \mu_2$$

a.1.2 Modelo-S

$$H_o^{1-A} : \alpha_1 = \alpha_2$$

a.2 Hipótese do tipo II para o fator A

$$H_o^{2-A} : -\frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (\mu_1 + \beta_1 + \gamma_2) + 3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_1) + 2(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_2)}{7} = -\frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 3\bar{C}_3 + 2\bar{C}_4}{7}$$

onde:

$$\bar{C}_1 = \frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_1) + 2(\mu_2 + \beta_1 + \gamma_1)}{3}; \quad \bar{C}_3 = \frac{3(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_1) + 6(\mu_2 + \beta_2 + \gamma_1)}{9}$$

$$\bar{C}_2 = -\frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_2) + 2(\mu_2 + \beta_1 + \gamma_2)}{3}; \quad \bar{C}_4 = \frac{2(\mu_1 + \beta_2 + \gamma_2) + 4(\mu_2 + \beta_2 + \gamma_2)}{6}$$

a.2.1 Modelo-M

$$H_o^{2-A} : \mu_1 = \mu_2$$

a.2.2 Modelo-S

$$H_o^{2-A} : \alpha_1 = \alpha_2$$

b.1 Hipótese do tipo I para o fator B

$$H_o^{1-B} : \frac{(\mu_1 + \alpha_1 + \gamma_1) + (\mu_1 + \alpha_1 + \gamma_2) + 2(\mu_1 + \alpha_2 + \gamma_1) + 2(\mu_1 + \alpha_2 + \gamma_2)}{6} =$$

$$= \frac{3(\mu_2 + \alpha_1 + \gamma_1) + 2(\mu_2 + \alpha_1 + \gamma_2) + 6(\mu_2 + \alpha_2 + \gamma_1) + 4(\mu_2 + \alpha_2 + \gamma_2)}{15}$$

b.1.1 Modelo-M

$$H_o^{1-B} : \mu_1 + \frac{1}{10}\gamma_1 = \mu_2 + \frac{1}{10}\gamma_2$$

b.1.2 Modelo-S

$$H_o^{1-B} : \beta_1 + \frac{1}{10}\gamma_1 = \beta_2 + \frac{1}{10}\gamma_2$$

Observa-se para o fator B que a ponderação não ajusta para o fator C , o que se visualiza pela presença de parâmetro γ . Esta característica comum aos delineamentos não ortogonais, como visto, ocorre para os delineamentos parcialmente ortogonais para os fatores cujas frequências não foram proporcionais aos demais.

b.2 Hipótese do tipo II para o fator B

$$H_o^{2-B} : \frac{(\mu_1 + \alpha_1 + \gamma_1) + (\mu_1 + \alpha_1 + \gamma_2) + 2(\mu_1 + \alpha_2 + \gamma_1) + 2(\mu_1 + \alpha_2 + \gamma_2)}{6} = \frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 + 2\bar{C}_4}{6}$$

onde:

$$\bar{C}_1 = \frac{(\mu_1 + \alpha_1 + \gamma_1) + 3(\mu_2 + \alpha_1 + \gamma_1)}{4}; \quad \bar{C}_3 = \frac{2(\mu_1 + \alpha_2 + \gamma_1) + 6(\mu_2 + \alpha_2 + \gamma_1)}{8}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{(\mu_1 + \alpha_1 + \gamma_2) + 2(\mu_2 + \alpha_1 + \gamma_2)}{3}; \quad \bar{C}_4 = \frac{2(\mu_1 + \alpha_2 + \gamma_2) + 4(\mu_2 + \alpha_2 + \gamma_2)}{6}$$

b.2.1 Modelo-M

$$H_o^{2-B} : \mu_1 = \mu_2$$

b.2.2 Modelo-S

$$H_o^{2-B} : \beta_1 = \beta_2$$

c.1 Hipótese do tipo I para o fator C

$$H_o^{1-C} : \frac{(\mu_1 + \alpha_1 + \beta_1) + 3(\mu_1 + \alpha_1 + \beta_2) + 2(\mu_1 + \alpha_2 + \beta_1) + 6(\mu_1 + \alpha_2 + \beta_2)}{12} =$$

$$= \frac{(\mu_2 + \alpha_1 + \beta_1) + 2(\mu_2 + \alpha_1 + \beta_2) + 2(\mu_2 + \alpha_2 + \beta_1) + 4(\mu_2 + \alpha_2 + \beta_2)}{9}$$

c.1.1 Modelo-M

$$H_o^{1-C}: \gamma_1 + \frac{1}{12}\beta_1 = \gamma_2 + \frac{1}{12}\beta_2$$

c.1.2 Modelo-S

$$H_o^{1-C}: \gamma_1 + \frac{1}{12}\beta_1 = \gamma_2 + \frac{1}{12}\beta_2$$

c.2 Hipótese do tipo II para o fator C

$$H_o^{2-C}: \frac{(\mu_1 + \beta_1 + \gamma_1) + 3(\mu_1 + \alpha_1 + \beta_2) + 2(\mu_1 + \alpha_2 + \beta_1) + 6(\mu_1 + \alpha_2 + \beta_2)}{12} = \frac{\bar{C}_1 + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 + 6\bar{C}_4}{12}$$

onde:

$$\bar{C}_1 = \frac{(\mu_1 + \alpha_1 + \beta_1) + (\mu_2 + \alpha_1 + \beta_1)}{2}; \quad \bar{C}_3 = \frac{2(\mu_1 + \alpha_2 + \beta_1) + 2(\mu_2 + \alpha_2 + \beta_1)}{4}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{3(\mu_1 + \alpha_1 + \beta_2) + 2(\mu_2 + \alpha_1 + \beta_2)}{5}; \quad \bar{C}_4 = \frac{6(\mu_1 + \alpha_2 + \beta_2) + 4(\mu_2 + \alpha_2 + \beta_2)}{10}$$

c.2.1 Modelo-M

$$H_o^{2-C}: \mu_1 = \mu_2$$

c.2.2 Modelo-S

$$H_o^{2-C}: \gamma_1 = \gamma_2$$

Os resultados dos itens a.1.2 e a.2.2 evidenciam a igualdade entre as hipóteses dos tipos I e II para o fator A, decorrente da ortogonalidade e, conseqüentemente, a ausência de parâmetros dos fatores B e C nas funções estimáveis, apresentando apenas parâmetros do próprio fator A. Ainda, como foi detectado que as frequências de caselas entre os fatores B e C não são proporcionais não ocorreu, portanto, a igualdade entre as hipóteses dos tipos I e II para o fator B (b.1.2 e b.2.2) e para o fator C (c.1.2 e c.2.2).

A forma da função estimável do tipo I para o fator B (b.1.1 ou b.1.2) revelou a presença de parâmetros do fator C, pela não ortogonalidade entre os subespaços gerados entre os dois fatores, e a ausência de parâmetros do fator A devida à ortogonalidade dos subespaços gerados pelos fatores A e B e, para o fator C (c.1.1 ou c.1.2) as funções estimáveis revelaram parâmetros do fator B e ausência de parâmetros de A. Todos esses resultados podem ser observados no Quadro 16.

Quadro 16. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre os fatores A, B e C para os dados da Tabela 20, considerando o modelo sem interações.

Tipo I-A = Tipo II-A				Tipo III-A = Tipo IV-A			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
A	1	L2		A	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
C	1	0		C	1	0	
	2	0			2	0	
$H_o^{1-A} = H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A} : \alpha_1 = \alpha_2$							
Tipo I-B				Tipo II-B = Tipo III-B = Tipo IV-B			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
B	1	L2		B	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
A	1	0		A	1	0	
	2	0			2	0	
C	1	-0,1*L2		C	1	0	
	2	0,1*L2			2	0	
$H_o^{1-B} : \beta_1 + \frac{1}{10}\gamma_1 = \beta_2 + \frac{1}{10}\gamma_2$				$H_o^{2-B} = H_o^{3-B} = H_o^{4-B} : \beta_1 = \beta_2$			
Tipo I-C				Tipo II-C = Tipo III-C = Tipo IV-C			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
C	1	L2		C	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	-0,0833*L2		B	1	0	
	2	0,0833*L2			2	0	
A	1	0		A	1	0	
	2	0			2	0	
$H_o^{1-C} : \gamma_1 + \frac{1}{12}\beta_1 = \gamma_2 + \frac{1}{12}\beta_2$				$H_o^{2-C} = H_o^{3-C} = H_o^{4-C} : \gamma_1 = \gamma_2$			

As consequências da ortogonalidade parcial nas somas de quadrados associadas às hipóteses do exemplo da Tabela 20, são apresentadas

nas Tabelas 21, 22 e 23 que correspondem a mesma análise, mas com a variação da ordem de entrada dos fatores no modelo.

A Tabela 21 apresenta a análise de variância do exemplo da Tabela 20 e mostra que, com o fator *A* sendo declarado em primeiro lugar no modelo, a soma de quadrados associada à hipótese do tipo I para o fator é igual à soma de quadrados associada à hipótese do tipo II, ou seja, $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = 24,3809$. Assim, $P_{\alpha|\mu} = P_{\alpha|\mu, \beta, \gamma}$ e como consequência, $P_{\alpha|\mu} = P_{\alpha|\mu, \beta} = P_{\alpha|\mu, \gamma} = P_{\alpha|\mu, \beta, \gamma}$, então $R(\alpha|\mu) = R(\alpha|\mu, \beta) = R(\alpha|\mu, \gamma) = R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = 24,3809$ (Tabelas 21, 22 e 23). Como o modelo não contém interações $R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = R(\hat{\alpha}|\hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = 24,3809$, $R(\beta|\mu, \alpha, \gamma) = R(\hat{\beta}|\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = 919,1176$ e $R(\gamma|\mu, \alpha, \beta) = R(\hat{\gamma}|\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 1852,5176$.

Tabela 21. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 20, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$, declarando *A* como primeiro fator

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	24,38095238	24,38095238	R ($\alpha \mu$)
B	1	702,17142857	702,17142857	$R(\beta \mu, \alpha)$
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	24,38095238	24,38095238	R ($\alpha \mu, \beta, \gamma$)
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	24,38095238	24,38095238	R ($\hat{\alpha} \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$)
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\hat{\beta} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\hat{\gamma} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$

Como as frequências entre os fatores *B* e *C* não são proporcionais, a soma de quadrados associada à hipótese do tipo I para o fator *B* não é igual a soma de quadrados associada à hipótese do tipo II, ou seja, $R(\beta|\mu) \neq R(\beta|\mu, \alpha, \gamma)$ (Tabela 22). Entretanto, essa desigualdade não permite inferir que todas as decomposições de somas de quadrados para o fator *B*

ajustado para constante μ são diferentes das demais decomposições. No exemplo, a ortogonalidade entre A e B fez com que a soma de quadrados para o fator B ajustado para μ fosse igual a soma de quadrados ajustado para μ e para o fator A , ou seja, $R(\beta|\mu) = R(\beta|\mu, \alpha) = 702,1714$ (Tabelas 21 e 22) e portanto, $P_{\beta|\mu} = P_{\beta|\mu, \alpha}$. Os resultados mostram que a desigualdade entre as hipóteses dos tipos I e II, para os efeitos principais de modelos com mais de dois fatores não implica na desigualdade de todos os projetores referentes aos ajustamentos.

Tabela 22. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 20, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \beta_j + \alpha_i + \gamma_k + e_{ijkl}$, declarando B como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
B	1	702,17142857	702,17142857	$R(\beta \mu)$
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\alpha \mu, \beta)$
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\hat{\beta} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\hat{\alpha} \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\hat{\gamma} \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$

Da mesma forma que ocorrido para o fator B , a soma de quadrados associada à hipótese do tipo I para o fator C é diferente da soma de quadrados associada à hipótese do tipo II, $R(\gamma|\mu) \neq R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$, como apresentou a Tabela 23. No entanto, $R(\gamma|\mu) = R(\gamma|\mu, \alpha) = 1635,5714$ e, portanto, $P_{\gamma|\mu} = P_{\gamma|\mu, \alpha}$.

Tabela 23. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 20, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + e_{ijkl}$, declarando C como primeiro fator.

<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo I</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
C	1	1635,57142857	1635,57142857	$R\{\gamma \mu\}$
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\alpha \mu, \gamma)$
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo II</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R\{\gamma \mu, \alpha, \beta\}$
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo III=IV</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R\{\dot{\gamma} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}\}$
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\dot{\alpha} \dot{\mu}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\dot{\beta} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$

b Modelos com interações

Resultados ainda mais reveladores sobre a ortogonalidade parcial, ocorrem quando o modelo contém interações. A forma das funções estimáveis para os efeitos principais e para as interações está condicionada à combinação ou às combinações entre os fatores que apresentaram freqüências de caselas proporcionais. Como no exemplo da Tabela 20 apenas o fator A apresenta freqüências proporcionais aos demais fatores, as funções estimáveis de A contêm parâmetros do próprio fator (α) e parâmetros das interações onde o fator esteve presente; interações $A*B$, $A*C$ e $A*B*C$, como se observa no Quadro 17. Entretanto, as funções estimáveis do tipo I para o fator B (Quadro 18) apresentam, além de parâmetros do próprio fator, (β), e do fator C, (γ), parâmetros de todas as interações. Da mesma forma ocorre para o fator C que, dada a não ortogonalidade com B, apresenta as funções estimáveis do tipo I com parâmetros do próprio fator, parâmetros do fator B e parâmetros de todas as interações (Quadro 19).

Nos Quadros 20, 21 e 22 encontram-se os resultados das funções estimáveis dos tipos I e II para todas as interações de segunda ordem. Como se

pode observar, a única interação que apresenta funções estimáveis do tipo I iguais às funções do tipo II é a interação $B \times C$ (Quadro 22), justamente a interação formada pelos fatores que não apresentam frequências proporcionais entre si, apresentando parâmetros da própria interação, (τ), e parâmetros da interação de maior grau, (ρ). Como consequência, as funções estimáveis do tipo I para as interações $A \times B$ (Quadro 20) e $A \times C$ (Quadro 21) só não apresentaram parâmetros dos efeitos principais e da interação $B \times C$.

Quadro 17. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator A, para os dados da Tabela 20, considerando o modelo com interações.

Tipo I- A = Tipo II- A			
Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0	
A	1	L2	
	2	-L2	
B	1	0	
	2	0	
C	1	0	
	2	0	
A*B	1 1	0,2857*L2	
	1 2	0,7143*L2	
	2 1	-0,2857*L2	
	2 2	-0,7143*L2	
A*C	1 1	0,5714*L2	
	1 2	0,4286*L2	
	2 1	-0,5714*L2	
	2 2	-0,4286*L2	
B*C	1 1	0	
	1 2	0	
	2 1	0	
	2 2	0	
A*B*C	1 1 1	0,1429*L2	
	1 1 2	0,1429*L2	
	1 2 1	0,4286*L2	
	1 2 2	0,2857*L2	
	2 1 1	-0,1429*L2	
	2 1 2	-0,1429*L2	
	2 2 1	-0,4286*L2	
	2 2 2	-0,2857*L2	

$$H_0^{1-A} = H_0^{2-A} : \alpha_1 + \frac{1}{7}(2\phi_{11} + 5\phi_{12} + 4\eta_{11} + 3\eta_{12} + \rho_{111} + \rho_{112} + 3\rho_{121} + 2\rho_{122}) =$$

$$= \alpha_2 + \frac{1}{7}(2\phi_{21} + 5\phi_{22} + 4\eta_{21} + 3\eta_{22} + \rho_{211} + \rho_{212} + 3\rho_{221} + 2\rho_{222})$$

Tipo III-A = Tipo IV- A			
Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0	
A	1	L2	
	2	-L2	
B	1	0	
	2	0	
C	1	0	
	2	0	
A*B	1 1	0,5*L2	
	1 2	0,5*L2	
	2 1	-0,5*L2	
	2 2	-0,5*L2	
A*C	1 1	0,5*L2	
	1 2	0,5*L2	
	2 1	-0,5*L2	
	2 2	-0,5*L2	
B*C	1 1	0	
	1 2	0	
	2 1	0	
	2 2	0	
A*B*C	1 1 1	0,25*L2	
	1 1 2	0,25*L2	
	1 2 1	0,25*L2	
	1 2 2	0,25*L2	
	2 1 1	-0,25*L2	
	2 1 2	-0,25*L2	
	2 2 1	-0,25*L2	
	2 2 2	-0,25*L2	

$$H_0^{3-A} = H_0^{4-A} : \alpha_1 + \frac{1}{4}(2\phi_{11} + 2\phi_{12} + 2\eta_{11} + 2\eta_{12} + \rho_{111} + \rho_{112} + \rho_{121} + \rho_{122}) =$$

$$= \alpha_2 + \frac{1}{4}(2\phi_{21} + 2\phi_{22} + 2\eta_{21} + 2\eta_{22} + \rho_{211} + \rho_{212} + \rho_{221} + \rho_{222})$$

Quadro 18. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator B, para os dados da Tabela 20, considerando o modelo com interações.

Tipo I - B			Tipo II - B			Tipo III -B = Tipo IV -B		
Efeito INTERCEPTO		Coefficientes	Efeito INTERCEPTO		Coefficientes	Efeito INTERCEPTO		Coefficientes
B	1 2	L2 -L2	B	1 2	L2 -L2	B	1 2	L2 -L2
A	1 2	0 0	A	1 2	0 0	A	1 2	0 0
C	1 2	-0,1*L2 0,1*L2	C	1 2	0 0	C	1 2	0 0
A*C	1 1 1 2 2 1 2 2	-0,0333*L2 0,0333*L2 -0,0667*L2 0,0667*L2	A*C	1 1 1 2 2 1 2 2	0 0 0 0	A*C	1 1 1 2 2 1 2 2	0 0 0 0
A*B	1 1 1 2 2 1 2 2	0,3333*L2 -0,3333*L2 0,6667*L2 -0,6667*L2	A*B	1 1 1 2 2 1 2 2	0,3333*L2 -0,3333*L2 0,6667*L2 -0,6667*L2	A*B	1 1 1 2 2 1 2 2	0,5*L2 -0,5*L2 0,5*L2 -0,5*L2
B*C	1 1 1 2 2 1 2 2	0,5*L2 0,5*L2 -0,6*L2 -0,4*L2	B*C	1 1 1 2 2 1 2 2	0,5294*L2 0,4706*L2 -0,5294*L2 -0,4706*L2	B*C	1 1 1 2 2 1 2 2	0,5*L2 0,5*L2 -0,5*L2 -0,5*L2
A*B*C	1 1 1 1 1 2 1 2 1 1 2 2 2 1 1 2 1 2 2 2 1 2 2 2	0,1667*L2 0,1667*L2 -0,2*L2 -0,1333*L2 0,3333*L2 0,3333*L2 -0,4*L2 -0,2667*L2	A*B*C	1 1 1 1 1 2 1 2 1 1 2 2 2 1 1 2 1 2 2 2 1 2 2 2	0,1765*L2 0,1569*L2 -0,1765*L2 -0,1569*L2 0,3529*L2 0,3137*L2 -0,3529*L2 -0,3137*L2	A*B*C	1 1 1 1 1 2 1 2 1 1 2 2 2 1 1 2 1 2 2 2 1 2 2 2	0,25*L2 0,25*L2 -0,25*L2 -0,25*L2 0,25*L2 0,25*L2 -0,25*L2 -0,25*L2
$H_o^{I-B} : \beta_1 + \frac{1}{30}(3\tau_1 + \eta_{11} + 2\eta_{21} + 10\phi_{11} + 20\phi_{21} + 6\tau_{11} + 6\tau_{12} + 5\phi_{111} + 5\phi_{112} + 10\phi_{211} + 10\phi_{212}) = \beta_2 + \frac{1}{30}(3\tau_2 + \eta_{21} + 2\eta_{22} + 10\phi_{12} + 20\phi_{22} + 18\tau_{21} + 12\tau_{22} + 6\phi_{121} + 4\phi_{122} + 12\phi_{221} + 8\phi_{222})$			$H_o^{II-B} : \beta_1 + \frac{1}{3}(3\phi_{11} + 2\phi_{21}) + \frac{1}{7}(9\tau_{11} + 8\tau_{12}) + \frac{3}{7}(\phi_{111} + 2\phi_{211}) + \frac{8}{51}(\phi_{112} + 2\phi_{212}) = \beta_2 + \frac{1}{7}(\phi_{12} + 2\phi_{22}) + \frac{1}{7}(9\tau_{21} + 8\tau_{22}) + \frac{3}{7}(\phi_{121} + 2\phi_{221}) + \frac{8}{51}(\phi_{122} + 2\phi_{222})$			$H_o^{III-B} = H_o^{IV-B} : \beta_1 + \frac{1}{4}(2\phi_{11} + 2\phi_{21} + 2\tau_{11} + 2\tau_{12} + \phi_{111} + \phi_{112} + \phi_{211} + \phi_{212}) = \beta_2 + \frac{1}{4}(2\phi_{12} + 2\phi_{22} + 2\tau_{21} + 2\tau_{22} + \phi_{121} + \phi_{122} + \phi_{221} + \phi_{222})$		

Quadro 19. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre o fator C, para os dados da Tabela 20, considerando o modelo com interações.

Tipo I - C			Tipo II - C			Tipo II - C		
Efeito INTERCEPTO	Coeficientes		Efeito INTERCEPTO	Coeficientes		Efeito INTERCEPTO	Coeficientes	
C	1 L2 2 -L2		C	1 L2 2 -L2		C	1 L2 2 -L2	
B	1 -0,0833*L2 2 0,0833*L2		B	1 0 2 0		B	1 0 2 0	
A	1 0 2 0		A	1 0 2 0		A	1 0 2 0	
B*C	1 1 0,25*L2 1 2 -0,3333*L2 2 1 0,75*L2 2 2 -0,6667*L2		B*C	1 1 0,2941*L2 1 2 -0,2941*L2 2 1 0,7059*L2 2 2 -0,7059*L2		B*C	1 1 0,5*L2 1 2 -0,5*L2 2 1 0,5*L2 2 2 -0,5*L2	
A*C	1 1 0,3333*L2 1 2 -0,3333*L2 2 1 0,6667*L2 2 2 -0,6667*L2		A*C	1 1 0,3333*L2 1 2 -0,3333*L2 2 1 0,6667*L2 2 2 -0,6667*L2		A*C	1 1 0,5*L2 1 2 -0,5*L2 2 1 0,5*L2 2 2 -0,5*L2	
A*B	1 1 -0,0278*L2 1 2 0,0278*L2 2 1 -0,0556*L2 2 2 0,0556*L2		A*B	1 1 0 1 2 0 2 1 0 2 2 0		A*B	1 1 0 1 2 0 2 1 0 2 2 0	
A*B*C	1 1 1 0,0833*L2 1 1 2 -0,1111*L2 1 2 1 0,25*L2 1 2 2 -0,2222*L2 2 1 1 0,1667*L2 2 1 2 -0,2222*L2 2 2 1 0,5*L2 2 2 2 -0,4444*L2		A*B*C	1 1 1 0,098*L2 1 1 2 -0,098*L2 1 2 1 0,2353*L2 1 2 2 -0,2353*L2 2 1 1 0,1961*L2 2 1 2 -0,1961*L2 2 2 1 0,4706*L2 2 2 2 -0,4706*L2		A*B*C	1 1 1 0,25*L2 1 1 2 -0,25*L2 1 2 1 0,25*L2 1 2 2 -0,25*L2 2 1 1 0,25*L2 2 1 2 -0,25*L2 2 2 1 0,25*L2 2 2 2 -0,25*L2	
$H_0^{I-C} : \gamma_1 + \frac{1}{36}(3\beta_2 + 9\tau_{11} + 24\tau_{21} + 3\eta_{11} + 6\eta_{21} + \varphi_{12} + 2\varphi_{22} + 3\rho_{111} + 9\rho_{121} + 6\rho_{211} + 18\rho_{221}) = \gamma_2 + \frac{1}{36}(3\beta_1 + 12\tau_{12} + 24\tau_{22} + 3\eta_{12} + 6\eta_{22} + \varphi_{11} + 2\varphi_{21} + 4\rho_{112} + 8\rho_{122} + 4\rho_{212} + 16\rho_{222})$			$H_0^{II-C} : \gamma_1 + \frac{1}{7}(5\tau_{11} + 12\tau_{21}) + \frac{1}{3}(\eta_{11} + 2\eta_{21}) + \frac{1}{51}(5\rho_{111} + 12\rho_{121} + 10\rho_{211} + 8\rho_{221}) = \gamma_2 + \frac{1}{7}(5\tau_{12} + 12\tau_{22}) + \frac{1}{3}(\eta_{12} + 2\eta_{22}) + \frac{1}{51}(5\rho_{112} + 12\rho_{122} + 10\rho_{212} + 8\rho_{222})$			$H_0^{3-C} = H_0^{3-C} : \gamma_1 + \frac{1}{4}(2\tau_{11} + 2\tau_{21} + 2\eta_{11} + 2\eta_{21} + \rho_{111} + \rho_{121} + \rho_{211} + \rho_{221}) = \gamma_2 + \frac{1}{4}(2\tau_{12} + 2\tau_{22} + 2\eta_{12} + 2\eta_{22} - 2\eta_{22} + \rho_{112} + \rho_{122} + \rho_{212} + \rho_{222})$		

Quadro 20. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre a interação A*B, para os dados da Tabela 20.

Tipo I- A*B			Tipo II-A*B			Tipo III-A*B = Tipo IV-A*B		
Efeito INTERCEPTO	1	Coeficientes 0	Efeito INTERCEPTO	1	Coeficientes 0	Efeito INTERCEPTO	1	Coeficientes 0
A	1	0	A	1	0	A	1	0
	2	0		2	0		2	0
B	1	0	B	1	0	B	1	0
	2	0		2	0		2	0
C	1	0	C	1	0	C	1	0
	2	0		2	0		2	0
A*B	1 1	L8	A*B	1 1	L8	A*B	1 1	L8
	1 2	-L8		1 2	-L8		1 2	-L8
	2 1	-L8		2 1	-L8		2 1	-L8
	2 2	L8		2 2	L8		2 2	L8
A*C	1 1	-0,1*L8	A*C	1 1	0	A*C	1 1	0
	1 2	0,1*L8		1 2	0		1 2	0
	2 1	0,1*L8		2 1	0		2 1	0
	2 2	-0,1*L8		2 2	0		2 2	0
B*C	1 1	0	B*C	1 1	0	B*C	1 1	0
	1 2	0		1 2	0		1 2	0
	2 1	0		2 1	0		2 1	0
	2 2	0		2 2	0		2 2	0
A*B*C	1 1 1	0,5*L8	A*B*C	1 1 1	0,5294*L8	A*B*C	1 1 1	0,5*L8
	1 1 2	0,5*L8		1 1 2	0,4706*L8		1 1 2	0,5*L8
	1 2 1	-0,6*L8		1 2 1	-0,5294*L8		1 2 1	-0,5*L8
	1 2 2	-0,4*L8		1 2 2	-0,4706*L8		1 2 2	-0,5*L8
	2 1 1	-0,5*L8		2 1 1	-0,5294*L8		2 1 1	-0,5*L8
	2 1 2	-0,5*L8		2 1 2	-0,4706*L8		2 1 2	-0,5*L8
	2 2 1	0,5*L8		2 2 1	0,5294*L8		2 2 1	0,5*L8
	2 2 2	0,4*L8		2 2 2	0,4706*L8		2 2 2	0,5*L8

$$H_0^{I-AB}: \varphi_{11}-\varphi_{12}-\varphi_{21}+\varphi_{22}+\frac{1}{6}(\eta_{11}+\eta_{12}+\eta_{21}-\eta_{22})+ \\ +\frac{1}{6}(5\varphi_{111}+5\varphi_{112}-6\varphi_{121}-4\varphi_{122}-5\varphi_{211}-5\varphi_{212}+ \\ +6\varphi_{221}+4\varphi_{222})=0$$

$$H_0^{II-AB}: \varphi_{11}-\varphi_{12}-\varphi_{21}+\varphi_{22}+\frac{1}{6}(9\varphi_{111}+8\varphi_{112}-9\varphi_{121}- \\ -8\varphi_{122}-9\varphi_{211}-8\varphi_{212}+9\varphi_{221}+8\varphi_{222})=0$$

$$H_0^{3-AB} = H_0^{4-AB}: \varphi_{11}-\varphi_{12}-\varphi_{21}+\varphi_{22}+\frac{1}{2}(\varphi_{111}+ \\ +\varphi_{112}-\varphi_{121}-\varphi_{122}-\varphi_{211}-\varphi_{212}+ \\ +\varphi_{221}+\varphi_{222})=0$$

Quadro 21. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre a interação A*C, para os dados da Tabela 20.

Tipo I- A*C			Tipo II - A*C			Tipo II - A*C		
Efeito INTERCEPTO	Coeficientes		Efeito INTERCEPTO	Coeficientes		Efeito INTERCEPTO	Coeficientes	
B	1 0		B	1 0		B	1 0	
	2 0			2 0			2 0	
A	1 0		A	1 0		A	1 0	
	2 0			2 0			2 0	
C	1 0		C	1 0		C	1 0	
	2 0			2 0			2 0	
A*C	1 1 L8		A*C	1 1 L8		A*C	1 1 L8	
	1 2 -L8			1 2 -L8			1 2 -L8	
	2 1 -L8			2 1 -L8			2 1 -L8	
	2 2 L8			2 2 L8			2 2 L8	
A*B	1 1 -0,0833*L8		A*B	1 1 0		A*B	1 1 0	
	1 2 0,0833*L8			1 2 0			1 2 0	
	2 1 0,0833*L8			2 1 0			2 1 0	
	2 2 -0,0833*L8			2 2 0			2 2 0	
B*C	1 1 0		B*C	1 1 0		B*C	1 1 0	
	1 2 0			1 2 0			1 2 0	
	2 1 0			2 1 0			2 1 0	
	2 2 0			2 2 0			2 2 0	
A*B*C	1 1 1 0,25*L8		A*B*C	1 1 1 0,2941*L8		A*B*C	1 1 1 0,5*L8	
	1 1 2 -0,3333*L8			1 1 2 -0,2941*L8			1 1 2 -0,5*L8	
	1 2 1 0,75*L8			1 2 1 0,7059*L8			1 2 1 0,5*L8	
	1 2 2 -0,6667*L8			1 2 2 -0,7059*L8			1 2 2 -0,5*L8	
	2 1 1 -0,25*L8			2 1 1 -0,2941*L8			2 1 1 -0,5*L8	
	2 1 2 0,3333*L8			2 1 2 0,2941*L8			2 1 2 0,5*L8	
	2 2 1 -0,75*L8			2 2 1 -0,7059*L8			2 2 1 -0,5*L8	
	2 2 2 0,6667*L8			2 2 2 0,7059*L8			2 2 2 0,5*L8	
$H_o^{I-AC}: \eta_{11}-\eta_{12}-\eta_{21}+\eta_{22}-\frac{1}{2}(\varphi_{11}-\varphi_{12}-\varphi_{21}+\varphi_{22})+ \frac{1}{2}(3\varphi_{111}-4\varphi_{112}+9\varphi_{121}-8\varphi_{122}-3\varphi_{211}+4\varphi_{212}-9\varphi_{221}+8\varphi_{222})=0$			$H_o^{2-AC}: \eta_{11}-\eta_{12}-\eta_{21}+\eta_{22}+\frac{1}{7}(5\varphi_{111}-5\varphi_{112}+12\varphi_{121}-12\varphi_{122}-5\varphi_{211}+5\varphi_{212}-12\varphi_{221}+12\varphi_{222})=0$			$H_o^{3-AC}=H_o^{I-AC}: \eta_{11}-\eta_{12}-\eta_{21}+\eta_{22}+\frac{1}{2}(\varphi_{111}-\varphi_{112}+\varphi_{121}-\varphi_{122}-\varphi_{211}+\varphi_{212}-\varphi_{221}+\varphi_{222})=0$		

Quadro 22. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre a interação B*C, para os dados da Tabela 20.

Tipo I- B*C			Tipo II- B*C			Tipo II- B*C		
Efeito INTERCEPTO	Coefficientes		Efeito INTERCEPTO	Coefficientes		Efeito INTERCEPTO	Coefficientes	
C	1 0		C	1 0		C	1 0	
	2 0			2 0			2 0	
B	1 0		B	1 0		B	1 0	
	2 0			2 0			2 0	
A	1 0		A	1 0		A	1 0	
	2 0			2 0			2 0	
B*C	1 1 L8		B*C	1 1 L8		B*C	1 1 L8	
	1 2 -L8			1 2 -L8			1 2 -L8	
	2 1 -L8			2 1 -L8			2 1 -L8	
	2 2 L8			2 2 L8			2 2 L8	
A*C	1 1 0		A*C	1 1 0		A*C	1 1 0	
	1 2 0			1 2 0			1 2 0	
	2 1 0			2 1 0			2 1 0	
	2 2 0			2 2 0			2 2 0	
A*B	1 1 0		A*B	1 1 0		A*B	1 1 0	
	1 2 0			1 2 0			1 2 0	
	2 1 0			2 1 0			2 1 0	
	2 2 0			2 2 0			2 2 0	
A*B*C	1 1 1 0,3333*L8		A*B*C	1 1 1 0,3333*L8		A*B*C	1 1 1 0,5*L8	
	1 1 2 -0,3333*L8			1 1 2 -0,3333*L8			1 1 2 -0,5*L8	
	1 2 1 -0,3333*L8			1 2 1 -0,3333*L8			1 2 1 -0,5*L8	
	1 2 2 0,3333*L8			1 2 2 0,3333*L8			1 2 2 0,5*L8	
	2 1 1 0,6667*L8			2 1 1 0,6667*L8			2 1 1 0,5*L8	
	2 1 2 -0,6667*L8			2 1 2 -0,6667*L8			2 1 2 -0,5*L8	
	2 2 1 -0,6667*L8			2 2 1 -0,6667*L8			2 2 1 -0,5*L8	
	2 2 2 0,6667*L8			2 2 2 0,6667*L8			2 2 2 0,5*L8	
$H_0^{I-BC} : \tau_{11}-\tau_{12}-\tau_{21}+\tau_{22}+\frac{1}{3}(\rho_{111}-\rho_{112}-\rho_{121}+\rho_{122}+2\rho_{211}-2\rho_{212}-2\rho_{221}+2\rho_{222})=0$			$H_0^{II-BC} : \tau_{11}-\tau_{12}-\tau_{21}+\tau_{22}+\frac{1}{3}(\rho_{111}-\rho_{112}-\rho_{121}+\rho_{122}+2\rho_{211}-2\rho_{212}-2\rho_{221}+2\rho_{222})=0$			$H_0^{3-BC} = H_0^{I-BC} : \tau_{11}-\tau_{12}-\tau_{21}+\tau_{22}+\frac{1}{2}(\rho_{111}-\rho_{112}-\rho_{121}+\rho_{122}+2\rho_{211}-2\rho_{212}-2\rho_{221}+2\rho_{222})=0$		

Para os efeitos principais, os resultados quanto à igualdade de hipóteses no modelo com interações são idênticos aos ocorridos nos modelos sem interações, ou seja, apenas para o fator A a soma de quadrados associada à hipótese do tipo I A é igual à soma de quadrados associada à hipótese do tipo II, como mostra a Tabela 24. Como várias vezes mencionado neste texto, o Proc GLM do SAS apenas fornece hipóteses do tipo I e conseqüente soma de quadrados associada, se o fator ou a interação de interesse forem declarados em primeiro lugar no modelo.

Ainda na Tabela 24 tem-se a interação $A*B$ declarada em primeiro lugar, comprovando a desigualdade entre as somas de quadrados associadas as hipóteses dos tipos I e II, portanto, $R(\phi|\mu,\alpha,\beta,\gamma) \neq R(\phi|\mu,\alpha,\beta,\gamma,\eta,\tau)$. A ordem de entrada dos parâmetros no modelo é importante para que o SAS forneça uma soma de quadrados associada ao tipo I, na qual tem-se uma soma de quadrados ajustada apenas para a constante μ e para os efeitos principais, ou seja, $R(\phi|\mu,\alpha,\beta,\gamma)$. As interações que não foram declaradas em primeiro lugar foram ajustadas, além da constante e dos efeitos principais, pelas interações que as antecederam. Outro resultado importante é a desigualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos II e III para todos efeitos principais e interações de segundo grau, devida a própria presença de interações no modelo.

Tabela 24. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 20, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varphi_{ij} + \eta_{ik} + \tau_{jk} + \rho_{ijk} + e_{ijkl}$, sendo A o primeiro fator declarado entre os efeitos principais e $A*B$ a primeira entre as interações.

<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo I</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\alpha \mu)$
B	1	702,17142857	702,17142857	$R(\beta \mu, \alpha)$
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
A*B	1	197,48571429	197,48571429	$R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma)$
A*C	1	474,91764706	474,91764706	$R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi)$
B*C	1	259,88235294	259,88235294	$R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta)$
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	$R(\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta, \tau)$
<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo II</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma)$
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma)$
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
A*B	1	144,11764706	144,11764706	$R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau)$
A*C	1	474,91764706	474,91764706	$R(\eta \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \tau)$
B*C	1	259,88235294	259,88235294	$R(\tau \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta)$
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	$R(\rho \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \eta, \tau)$
<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>SQ Tipo III=IV</i>	<i>Q.M.</i>	<i>R (.)</i>
A	1	23,52941176	23,52941176	$R(\dot{\alpha} \dot{\mu}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$
B	1	1088,00000000	1088,00000000	$R(\dot{\beta} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$
C	1	737,88235294	737,88235294	$R(\dot{\gamma} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$
A*B	1	113,88235294	113,88235294	$R(\dot{\varphi} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\eta}, \dot{\tau})$
A*C	1	113,88235294	113,88235294	$R(\dot{\eta} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\varphi}, \dot{\tau})$
B*C	1	60,23529412	60,23529412	$R(\dot{\tau} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\varphi}, \dot{\eta})$
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	$R(\dot{\rho} \dot{\mu}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\varphi}, \dot{\eta}, \dot{\tau})$

A análise da variância da Tabela 25 mostra que tanto para o fator B quanto para a interação $A*C$, a soma de quadrados associada às hipóteses dos tipos I e II são diferentes, ou seja, $R(\beta|\mu) \neq R(\beta|\mu, \alpha, \gamma)$ e $R(\eta|\mu, \alpha, \beta, \gamma) \neq R(\eta|\mu, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \tau)$.

Tabela 25. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 20, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \beta_j + \alpha_i + \gamma_k + \eta_{ik} + \varphi_{ij} + \tau_{jk} + \rho_{ijk} + e_{ijkl}$, sendo B o primeiro fator declarado entre os efeitos principais e $A*C$ a primeira entre as interações.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
B	1	702,17142857	702,17142857	R (β μ)
A	1	24,38095238	24,38095238	R (α μ, β)
C	1	1852,51764706	1852,51764706	R (γ μ, α, β)
A*C	1	528,28571429	528,28571429	R (η μ, α, β, γ)
A*B	1	144,11764706	144,11764706	R (φ μ, α, β, γ, η)
B*C	1	259,88235294	259,88235294	R (τ μ, α, β, γ, φ, η)
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	R (ρ μ, α, β, γ, φ, η, τ)
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
B	1	919,11764706	919,11764706	R (β μ, α, γ)
A	1	24,38095238	24,38095238	R (α μ, β, γ)
C	1	1852,51764706	1852,51764706	R (γ μ, α, β)
A*C	1	474,91764706	474,91764706	R (η μ, α, β, γ, φ, τ)
A*B	1	144,11764706	144,11764706	R (φ μ, α, β, γ, η, τ)
B*C	1	259,88235294	259,88235294	R (τ μ, α, β, γ, φ, η)
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	R (ρ μ, α, β, γ, φ, η, τ)
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
B	1	1088,00000000	1088,00000000	R (β̂ μ̂, α̂, γ̂)
A	1	23,52941176	23,52941176	R (α̂ μ̂, β̂, γ̂)
C	1	737,88235294	737,88235294	R (γ̂ μ̂, α̂, β̂)
A*C	1	113,88235294	113,88235294	R (η̂ μ̂, α̂, β̂, γ̂, φ̂, τ̂)
A*B	1	113,88235294	113,88235294	R (φ̂ μ̂, α̂, β̂, γ̂, η̂, τ̂)
B*C	1	60,23529412	60,23529412	R (τ̂ μ̂, α̂, β̂, γ̂, φ̂, τ̂)
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	R (ρ̂ μ̂, α̂, β̂, γ̂, φ̂, η̂, τ̂)

Assim como ocorreu para os efeitos principais, a desigualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II para algumas interações não implicou na diferença entre todos os projetores ajustados. Um exemplo é a interação $A*B$ onde $R(\varphi|\mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta) = R(\varphi|\mu, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau) = 144,1176$ apesar da desigualdade entre os tipos I e II. Isto ocorre porque a presença de parâmetros da interação $B*C$ não altera a soma de quadrados da decomposição, pois para $B*C$ a soma de quadrados associadas

às hipóteses do tipo I são iguais às do tipo II. Da mesma forma ocorre para a interação $A*C$, $R(\eta|\mu,\alpha,\beta,\gamma) = R(\eta|\mu,\alpha,\beta,\gamma,\tau) = 474,9176$.

Tabela 26. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 20, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \beta_j + \alpha_i + \tau_{jk} + \eta_{ik} + \phi_{ij} + \rho_{ijk} + e_{ijkl}$, sendo C o primeiro fator declarado entre os efeitos principais e $B*C$ a primeira entre as interações.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
C	1	1635,57142857	1635,57142857	$R(\gamma \mu)$
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\beta \mu,\gamma)$
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\alpha \mu,\beta,\gamma)$
B*C	1	259,88235294	259,88235294	$R(\tau \mu,\alpha,\beta,\gamma)$
A*B	1	528,28571429	528,28571429	$R(\phi \mu,\alpha,\beta,\gamma,\tau)$
A*C	1	144,11764706	144,11764706	$R(\eta \mu,\alpha,\beta,\gamma,\phi,\tau)$
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	$R(\rho \mu,\alpha,\beta,\gamma,\phi,\eta,\tau)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
C	1	1852,51764706	1852,51764706	$R(\gamma \mu,\alpha,\beta)$
B	1	919,11764706	919,11764706	$R(\beta \mu,\alpha,\gamma)$
A	1	24,38095238	24,38095238	$R(\alpha \mu,\beta,\gamma)$
B*C	1	259,88235294	259,88235294	$R(\tau \mu,\alpha,\beta,\gamma,\phi,\eta)$
A*B	1	474,91764706	474,91764706	$R(\phi \mu,\alpha,\beta,\gamma,\eta,\tau)$
A*C	1	144,11764706	144,11764706	$R(\eta \mu,\alpha,\beta,\gamma,\phi,\tau)$
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	$R(\rho \mu,\alpha,\beta,\gamma,\phi,\eta,\tau)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
C	1	737,88235294	737,88235294	$R(\dot{\gamma} \dot{\mu},\dot{\alpha},\dot{\beta})$
B	1	1088,00000000	1088,00000000	$R(\dot{\beta} \dot{\mu},\dot{\alpha},\dot{\gamma})$
A	1	23,52941176	23,52941176	$R(\dot{\alpha} \dot{\mu},\dot{\beta},\dot{\gamma})$
B*C	1	60,23529412	60,23529412	$R(\dot{\tau} \dot{\mu},\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\gamma},\dot{\phi},\dot{\tau})$
A*B	1	113,88235294	113,88235294	$R(\dot{\phi} \dot{\mu},\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\gamma},\dot{\eta},\dot{\tau})$
A*C	1	113,88235294	113,88235294	$R(\dot{\eta} \dot{\mu},\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\gamma},\dot{\phi},\dot{\tau})$
A*B*C	1	497,88235294	497,88235294	$R(\dot{\rho} \dot{\mu},\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\gamma},\dot{\phi},\dot{\eta},\dot{\tau})$

Dentre todas as interações de segunda ordem, a interação formada pelos fatores que não apresentaram frequências proporcionais entre si, $B*C$ apresentou soma de quadrados associada à hipótese do tipo I igual a do tipo II (Tabela 26). Assim, $R(\tau|\mu,\alpha,\beta,\gamma) = R(\tau|\mu,\alpha,\beta,\gamma,\phi,\eta) = 259,8824$ que garante também a igualdade com $R(\tau|\mu,\alpha,\beta,\gamma,\phi)$ e $R(\tau|\mu,\alpha,\beta,\gamma,\eta)$.

4.2.2 Modelos com quatro fatores

Apresenta-se, a seguir, para os delineamentos parcialmente ortogonais de modelos com quatro fatores, apenas alguns resultados, visando evitar que o texto fique exaustivo em função da notação, do número de tabelas e de quadros.

4.2.2.1 6º Exemplo

Tabela 27. Dados de porcentagem de germinação de canafistula (*Peltophorum dubium* Spreng) do delineamento parcialmente ortogonal com quatro fatores.

		Substrato (Fator B)							
		j=1				j=2			
		Dormência (Fator C)				Dormência (Fator C)			
		k=1		k=2		k=1		k=2	
		Épocas (fator D)				Épocas (fator D)			
Temp. (fator A)		l=1	l=2	l=1	l=2	l=1	l=2	l=1	l=2
i=1		82	72	36	40	62	70	42	48
		76	46	30	42	68	62		
		70	86			50	62		
		64	64						
		68	54						
		76	52						
i=2		70	76	38	40	70	70	40	38
		90	72	30	48	78	74	40	30
		90	74	38	40	72	64	38	32
		60	74	28	36	68	68		
		86	74	32	42	78	74		
		82	56	26	34	84	74		
		70	84						
		76	88						
		76	82						
		64	84						
		70	46						
		74	70						

Para os dados da Tabela 27 foram utilizadas as expressões 21, 22, 23, 24, 25 e 26, considerando o modelo : $y_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \phi_l + e_{ijklm}$, onde, para $i = 1, \dots, a$ níveis do fator A; $j = 1, \dots, b$ níveis do fator B, $k = 1, \dots, c$ níveis do fator C, $l = 1, \dots, d$ níveis do fator D e $m = 1, \dots, n_{ijk}$ observações de cada casela (i, j, k, l) . Foram obtidos os seguintes esquemas:

i Ignorando os fatores C e D

Fator B	Fator A		$n_{j..}$	$\frac{n_{ij..}}{n_{ij'..}} = \frac{n_{ij..}}{n_{ij'..}} = 2 \text{ ou } \frac{4}{9}$
	$i=1$	$i=2$		
$j=1$	$n_{11..}=16$	$n_{21..}=36$	$n_{.1..}=52$	$n_{ij..} = \frac{n_{i..} n_{.j..}}{n_{....}}, \forall (i,j)$ $\therefore C(X_{\alpha \mu}) \perp C(X_{\beta \mu})$
$j=2$	$n_{12..}=8$	$n_{22..}=18$	$n_{.2..}=26$	
$n_{i..}$	$n_{1...}=24$	$n_{2...}=54$	$n_{....}=78$	

ii Ignorando os fatores B e D

Fator C	Fator A		$n_{.k.}$	$\frac{n_{i.k.}}{n_{i.k'}} \neq \frac{n_{i'.k.}}{n_{i'.k'}}$
	$i=1$	$i=2$		
$k=1$	$n_{1.1.}=18$	$n_{2.1.}=36$	$n_{.1.}=54$	$n_{i.k.} \neq \frac{n_{i..} n_{.k.}}{n_{....}}, \forall (i,k)$ $\therefore C(X_{\alpha \mu}) \not\perp C(X_{\gamma \mu})$
$k=2$	$n_{1.2.}=6$	$n_{2.2.}=18$	$n_{.2.}=24$	
$n_{i..}$	$n_{1...}=24$	$n_{2...}=54$	$n_{....}=78$	

iii Ignorando os fatores B e C

Fator D	Fator A		$n_{...l}$	$\frac{n_{i..l}}{n_{i'..l}} = \frac{n_{i..l'}}{n_{i'..l'}} = 1 \text{ ou } \frac{4}{9}$
	$i=1$	$i=2$		
$l=1$	$n_{1..1}=12$	$n_{2..1}=27$	$n_{...1}=39$	$n_{i..l} = \frac{n_{i..} n_{...l}}{n_{....}}, \forall (i,l)$ $\therefore C(X_{\alpha \mu}) \perp C(X_{\phi \mu})$
$l=2$	$n_{1..2}=12$	$n_{2..2}=27$	$n_{...2}=39$	
$n_{i..}$	$n_{1...}=24$	$n_{2...}=54$	$n_{...}=78$	

iv Ignorando os fatores A e D

Fator C	Fator B		$n_{..k}$
	$j=1$	$j=2$	
$k=1$	$n_{.11.}=36$	$n_{.21.}=18$	$n_{..1.}=54$
$k=2$	$n_{.12.}=16$	$n_{.22.}=8$	$n_{..2.}=24$
$n_{.j.}$	$n_{.1.}=52$	$n_{.2.}=26$	$n_{....}=78$

$$\frac{n_{.jk.}}{n_{.j'k.}} = \frac{n_{.jk'}}{n_{.j'k'}} = 2 \text{ ou } \frac{9}{4}$$

$$n_{.jk.} = \frac{n_{.j.} \cdot n_{..k}}{n_{....}}, \forall (j,k)$$

$$\therefore C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\gamma|\mu})$$

v Ignorando os fatores A e C

Fator D	Fator B		$n_{..l}$
	$j=1$	$j=2$	
$l=1$	$n_{.1.1}=26$	$n_{.2.1}=13$	$n_{...1}=39$
$l=2$	$n_{.1.2}=26$	$n_{.2.2}=13$	$n_{...2}=39$
$n_{.j.}$	$n_{.1.}=52$	$n_{.2.}=26$	$n_{....}=78$

$$\frac{n_{.jl}}{n_{.j'l}} = \frac{n_{.jl'}}{n_{.j'l'}} = 1 \text{ ou } 2$$

$$n_{.jl} = \frac{n_{.j.} \cdot n_{..l}}{n_{....}}, \forall (j,l)$$

$$\therefore C(X_{\beta|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$$

vi Ignorando os fatores A e B

Fator D	Fator C		$n_{..l}$
	$k=1$	$k=2$	
$l=1$	$n_{.1.1}=27$	$n_{.2.1}=12$	$n_{...1}=39$
$l=2$	$n_{.1.2}=27$	$n_{.2.2}=12$	$n_{...2}=39$
$n_{..k}$	$n_{..1.}=54$	$n_{..2.}=24$	$n_{....}=78$

$$\frac{n_{..kl}}{n_{..k'l}} = \frac{n_{..kl'}}{n_{..k'l'}} = 1 \text{ ou } \frac{4}{9}$$

$$n_{..kl} = \frac{n_{..k.} \cdot n_{..l}}{n_{....}}, \forall (k,l)$$

$$\therefore C(X_{\gamma|\mu}) \perp C(X_{\phi|\mu})$$

Diante das proporcionalidades obtidas, seria natural concluir inicialmente que o delineamento não é ortogonal, uma vez, que as freqüências de caselas entre os fatores A e C não são proporcionais. No entanto, os fatores B e D apresentaram freqüências de caselas proporcionais aos demais fatores, caracterizando o delineamento como parcialmente ortogonal, correspondendo a situação 2 e caso 5, apresentada no Quadro 5.

a Modelo sem interações

Como consequência da ortogonalidade parcial as hipóteses do tipo I são iguais as hipóteses do tipo II para os fatores B e C e, as funções estimáveis envolvendo esses fatores apresentam apenas parâmetros relativos aos próprios fatores (Quadro 23).

Quadro 23. Funções estimáveis fornecidas pelo Proc GLM do SAS e respectivas hipóteses sobre os fatores A, B, C e D para os dados da Tabela 27.

Tipo I-A				Tipo II-A= Tipo III-A= Tipo IV-A			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		<u>INTERCEPTO</u>		0	
A	1	L2		A	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
C	1	0,0833*L2		C	1	0	
	2	-0,0833*L2			2	0	
D	1	0		D	1	0	
	2	0			2	0	
$H_o^{1-A}: \alpha_1 + \frac{1}{12}\gamma_1 = \alpha_2 + \frac{1}{12}\gamma_2$				$H_o^{2-A} = H_o^{3-A} = H_o^{4-A}: \alpha_1 = \alpha_2$			

continuação

Tipo I-B= Tipo II-B				Tipo III-B =Tipo IV-B			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
B	1	L2		B	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
A	1	0		A	1	0	
	2	0			2	0	
C	1	0		C	1	0	
	2	0			2	0	
D	1	0		D	1	0	
	2	0			2	0	
$H_o^{1-B} = H_o^{2-B} = H_o^{3-B} = H_o^{4-B} : \beta_1 = \beta_2$							
Tipo I-C				Tipo II-C= Tipo III-C= Tipo IV-C			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
C	1	L2		C	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
A	1	0,0833*L2		A	1	0	
	2	-0,0833*L2			2	0	
D	1	0		D	1	0	
	2	0			2	0	
$H_o^{1-C} : \gamma_1 + \frac{1}{12}\alpha_1 = \gamma_2 + \frac{1}{12}\alpha_2$				$H_o^{2-C} = H_o^{3-C} = H_o^{4-C} : \gamma_1 = \gamma_2$			
Tipo I-D= Tipo II-D				Tipo III-D= Tipo IV-D			
Efeito		Coeficientes		Efeito		Coeficientes	
INTERCEPTO		0		INTERCEPTO		0	
D	1	L2		D	1	L2	
	2	-L2			2	-L2	
C	1	0		C	1	0	
	2	0			2	0	
B	1	0		B	1	0	
	2	0			2	0	
A	1	0		A	1	0	
	2	0			2	0	
$H_o^{1-D} = H_o^{2-D} = H_o^{3-D} = H_o^{4-D} : \varphi_1 = \varphi_2$							

Tabela 28. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 27, segundo o modelo $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varphi_l + e_{ijkl}$, declarando A como primeiro fator

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
A	1	38,78205128	38,78205128	$R(\alpha \mu)$
B	1	8,30769231	8,30769231	$R(\beta \mu, \alpha)$
C	1	19108,01515152	19108,01515152	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
D	1	82,05128205	82,05128205	$R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II	Q.M.	R (.)
A	1	314,18181818	314,18181818	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma, \varphi)$
B	1	8,30769231	8,30769231	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma, \varphi)$
C	1	19108,01515152	19108,01515152	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta, \varphi)$
D	1	82,05128205	82,05128205	$R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma)$
Fontes	gl	SQ Tipo III=IV	Q.M.	R (.)
A	1	314,18181818	314,18181818	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma, \varphi)$
B	1	8,30769231	8,30769231	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma, \varphi)$
C	1	19108,01515152	19108,01515152	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta, \varphi)$
D	1	82,05128205	82,05128205	$R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma)$

Tabela 29. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 27, segundo o modelo $y_{ijklm} = \mu + \beta_j + \alpha_i + \gamma_k + \varphi_l + e_{ijklm}$, declarando B como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
B	1	8,30769231	8,30769231	$R(\beta \mu)$
A	1	38,78205128	38,78205128	$R(\alpha \mu, \beta)$
C	1	19108,01515152	19108,01515152	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta)$
D	1	82,05128205	82,05128205	$R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma)$
Fontes	gl	S.Q. Tipo II=III=IV	Q.M.	R (.)
B	1	8,30769231	8,30769231	$R(\beta \mu, \alpha, \gamma, \varphi)$
A	1	314,18181818	314,18181818	$R(\alpha \mu, \beta, \gamma, \varphi)$
C	1	19108,01515152	19108,01515152	$R(\gamma \mu, \alpha, \beta, \varphi)$
D	1	82,05128205	82,05128205	$R(\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma)$

Tabela 30. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 27, segundo o modelo $y_{ijklm} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + \varphi_l + e_{ijklm}$, declarando C como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
C	1	18832,61538462	18832,61538462	R ($\gamma \mu$)
B	1	8,30769231	8,30769231	R ($\beta \mu, \gamma$)
A	1	314,18181818	314,18181818	R ($\alpha \mu, \alpha, \gamma$)
D	1	82,05128205	82,05128205	R ($\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma$)
Fontes	gl	S.Q. Tipo II=III=IV	Q.M.	R (.)
C	1	19108,01515152	19108,01515152	R ($\gamma \mu, \alpha, \beta, \varphi$)
B	1	8,30769231	8,30769231	R ($\beta \mu, \alpha, \gamma, \varphi$)
A	1	314,18181818	314,18181818	R ($\alpha \mu, \beta, \gamma, \varphi$)
D	1	82,05128205	82,05128205	R ($\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma$)

Tabela 31. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 27, segundo o modelo $y_{ijklm} = \mu + \varphi_l + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + e_{ijklm}$, declarando D como primeiro fator.

Fontes	gl	S.Q. Tipo I	Q.M.	R (.)
D	1	82,05128205	82,05128205	R ($\varphi \mu$)
C	1	18832,61538462	18832,61538462	R ($\gamma \mu, \varphi$)
B	1	8,30769231	8,30769231	R ($\beta \mu, \varphi, \gamma$)
A	1	314,18181818	314,18181818	R ($\alpha \mu, \beta, \gamma, \varphi$)
Fontes	gl	S.Q. Tipo II=III=IV	Q.M.	R (.)
D	1	82,05128205	82,05128205	R ($\varphi \mu, \alpha, \beta, \gamma$)
C	1	19108,01515152	19108,01515152	R ($\gamma \mu, \alpha, \beta, \varphi$)
B	1	8,30769231	8,30769231	R ($\beta \mu, \alpha, \gamma, \varphi$)
A	1	314,18181818	314,18181818	R ($\alpha \mu, \beta, \gamma, \varphi$)

Na Tabela 28 verifica-se que $R(\alpha|\mu) \neq R(\alpha|\mu, \beta, \gamma, \varphi)$ e na Tabela 32 que $R(\gamma|\mu) \neq R(\gamma|\mu, \alpha, \beta, \varphi)$, ou seja, as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipo I e II são diferentes para os fatores A e C, respectivamente. No entanto, a igualdade ocorreu para o fator B, $R(\beta|\mu) = R(\beta|\mu, \alpha, \gamma, \varphi) = 8,3077$ (Tabela 29) e para o fator D, $R(\varphi|\mu) = R(\varphi|\mu, \alpha, \beta, \gamma) = 82,0513$ (Tabela 31).

b Modelos com interações

Como mostrou o Quadro 5, se apenas os fatores *B* e *D* apresentam frequências proporcionais aos demais fatores, então as interações que apresentam igualdade entre as somas de quadrados associadas às hipóteses dos tipos I e II são: *A*C*, *B*D*, *A*B*C* e *A*C*D* (Tabelas 32 e 33).

Tabela 32. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 27, sendo *B*D* e *A*B*C* as primeiras interações declaradas.

<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo I</i>	<i>Q.M</i>
A	1	38,78205128	38,78205128
B	1	8,30769231	8,30769231
C	1	19108,01515152	19108,01515152
D	1	82,05128205	82,05128205
B*D	1	0,41025641	0,41025641
A*C	1	388,04040404	388,04040404
A*B	1	10,77564103	10,77564103
A*D	1	0,11538462	0,11538462
B*C	1	62,73484848	62,73484848
C*D	1	354,68181818	354,68181818
A*B*C	1	112,12626263	112,12626263
A*B*D	1	210,00641026	210,00641026
A*C*D	1	17,81818182	17,81818182
B*C*D	1	211,28030303	211,28030303
A*B*C*D	1	1,13636364	1,13636364

<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>Q.M. Tipo II</i>	<i>Q.M</i>
A	1	314,18181818	314,18181818
B	1	8,30769231	8,30769231
C	1	19108,01515152	19108,01515152
D	1	82,05128205	82,05128205
B*D	1	0,41025641	0,41025641
A*C	1	388,04040404	388,04040404
A*B	1	6,81818182	6,81818182
A*D	1	1,51515152	1,51515152
B*C	1	62,73484848	62,73484848
C*D	1	354,68181818	354,68181818
A*B*C	1	112,12626263	112,12626263
A*B*D	1	175,03030303	175,03030303
A*C*D	1	17,81818182	17,81818182
B*C*D	1	211,28030303	211,28030303
A*B*C*D	1	1,13636364	1,13636364

Tabela 33. Análise de variância do delineamento parcialmente ortogonal, descrito na Tabela 27, sendo A*C e A*C*D as primeiras interações declaradas.

<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo I</i>	<i>Q.M.</i>
A	1	38,78205128	38,78205128
B	1	8,30769231	8,30769231
C	1	19108,01515152	19108,01515152
D	1	82,05128205	82,05128205
A*C	1	388,04040404	388,04040404
B*D	1	0,41025641	0,41025641
A*B	1	10,77564103	10,77564103
A*D	1	0,11538462	0,11538462
B*C	1	62,73484848	62,73484848
C*D	1	354,68181818	354,68181818
A*C*D	1	17,81818182	17,81818182
A*B*C	1	112,12626263	112,12626263
A*B*D	1	210,00641026	210,00641026
B*C*D	1	211,28030303	211,28030303
A*B*C*D	1	1,13636364	1,13636364
<i>Fontes</i>	<i>gl</i>	<i>S.Q. Tipo II</i>	<i>Q.M.</i>
A	1	314,18181818	314,18181818
B	1	8,30769231	8,30769231
C	1	19108,01515152	19108,01515152
D	1	82,05128205	82,05128205
A*C	1	388,04040404	388,04040404
B*D	1	0,41025641	0,41025641
A*B	1	6,81818182	6,81818182
A*D	1	1,51515152	1,51515152
B*C	1	62,73484848	62,73484848
C*D	1	354,68181818	354,68181818
A*C*D	1	17,81818182	17,81818182
A*B*C	1	112,12626263	112,12626263
A*B*D	1	175,03030303	175,03030303
B*C*D	1	211,28030303	211,28030303
A*B*C*D	1	1,13636364	1,13636364

4.3 Planejamento de delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais

Neste item estão ilustradas a partir de diagramas que representam a ortogonalidade entre subespaços gerados pelas submatrizes de X referentes a cada fator, a igualdade entre hipóteses de delineamentos ortogonais, balanceados ou desbalanceados e, parcialmente ortogonais. Com os diagramas, o pesquisador obtém uma orientação para determinar qual ou quais combinações de fatores deverão apresentar frequências proporcionais para que as hipóteses de seu interesse, tanto para efeitos principais quanto para interações, sejam testáveis.

É importante ressaltar que delineamentos ortogonais ou parcialmente ortogonais de conjuntos desbalanceados deverão ser planejados, pois não é possível esperar que um desbalanceamento acidental gere frequências de caselas proporcionais entre fatores. Nesses casos, se o grau de desbalanceamento permitir, pode ser conveniente que algumas observações sejam retiradas aleatoriamente do conjunto de dados, de modo a obter ortogonalidade. Nesse contexto, as hipóteses de interesse passam a ser testáveis, como inicialmente planejado.

4.3.1 Planejamento de delineamentos ortogonais

4.3.1.1 Modelos com dois fatores

Quadro 24. Esquema para o planejamento de delineamentos ortogonais de modelos com dois fatores, com algumas das hipóteses testáveis.

<i>Delineamentos ortogonais com dois fatores</i> ⁽¹⁾	
<i>A — B</i>	
<i>Efeitos principais</i>	<i>Interação</i>
$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}; \quad H_o^{1-B} = H_o^{2-B}$	$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB} = H_o^{3-AB} = H_o^{4-AB}$

(1) O traço “—” nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator.

a Exemplos de freqüências de caselas

a.1 Conjunto balanceado

Fator A	Fator B	
	j=1	j=2
i=1	3	3
i=2	3	3

a.2 Conjunto desbalanceado

Fator A	Fator B	
	j=1	j=2
i=1	9	3
i=2	6	2

4.3.1.2 Modelos com três fatores

Quadro 25. Esquema para o planejamento de delineamentos ortogonais de modelos com três fatores, com algumas das hipóteses testáveis.

(1) O traço “—” nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator.

a Exemplos de freqüências de caselas

a.1 Conjunto balanceado

Fatores		Fator C	
A	B	k=1	k=2
i=1	j=1	5	5
	j=2	5	5
i=2	j=1	5	5
	j=2	5	5

a.2 Conjunto desbalanceado

Fatores		Fator C	
A	B	k=1	k=2
i=1	j=1	4	2
	j=2	2	1
i=2	j=1	8	4
	j=2	4	2

4.3.1.3 Modelos com quatro fatores

Quadro 26. Esquema para o planejamento de delineamentos ortogonais de modelos com quatro fatores, com algumas das hipóteses testáveis.

Delineamentos ortogonais com quatro fatores ⁽¹⁾

Efeitos principais				
$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}; H_o^{1-B} = H_o^{2-B}; H_o^{1-C} = H_o^{2-C}; H_o^{1-D} = H_o^{2-D}$				
Interações duplas				
$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB}; H_o^{1-AC} = H_o^{2-AC}; H_o^{1-AD} = H_o^{2-AD}; H_o^{1-BC} = H_o^{2-BC};$				
$H_o^{1-BD} = H_o^{2-BD}; H_o^{1-CD} = H_o^{2-CD}$				
Interações triplas				
$H_o^{1-ABC} = H_o^{2-ABC}; H_o^{1-ABD} = H_o^{2-ABD}; H_o^{1-ACD} = H_o^{2-ACD}; H_o^{1-BCD} = H_o^{2-BCD}$				
Interação de 4º grau				
$H_o^{1-ABCD} = H_o^{2-ABCD} = H_o^{3-ABCD} = H_o^{4-ABCD}$				

(1) O traço “—” nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator.

a Exemplos de frequências de caselas

a.1 Conjunto balanceado

Fatores			Fator D	
A	B	C	i=1	i=2
i=1	j=1	k=1	2	2
		k=2	2	2
	j=2	k=1	2	2
		k=2	2	2
i=2	j=1	k=1	2	2
		k=2	2	2
	j=2	k=1	2	2
		k=2	2	2

a.2 Conjunto desbalanceado

Fatores			Fator D	
A	B	C	i=1	i=2
i=1	j=1	k=1	2	4
		k=2	1	2
	j=2	k=1	6	12
		k=2	3	6
i=2	j=1	k=1	4	8
		k=2	2	4
	j=2	k=1	12	24
		k=2	6	12

4.3.1.4 Modelos com cinco fatores

Quadro 27. Esquema para o planejamento de delineamentos ortogonais de modelos com cinco fatores, com algumas das hipóteses testáveis.

Delineamentos ortogonais com cinco fatores ⁽¹⁾

Efeitos principais	
$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}; \quad H_o^{1-B} = H_o^{2-B}; \quad H_o^{1-C} = H_o^{2-C}; \quad H_o^{1-D} = H_o^{2-D}; \quad H_o^{1-E} = H_o^{2-E}$	
Interações duplas	
$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB}; \quad H_o^{1-AC} = H_o^{2-AC}; \quad H_o^{1-AD} = H_o^{2-AD}; \quad H_o^{1-AE} = H_o^{2-AE}; \quad H_o^{1-BC} = H_o^{2-BC};$ $H_o^{1-BD} = H_o^{2-BD}; \quad H_o^{1-BE} = H_o^{2-BE}; \quad H_o^{1-CD} = H_o^{2-CD}; \quad H_o^{1-CE} = H_o^{2-CE}; \quad H_o^{1-DE} = H_o^{2-DE}$	
Interações triplas	
$H_o^{1-ABC} = H_o^{2-ABC}; \quad H_o^{1-ABD} = H_o^{2-ABD}; \quad H_o^{1-ABE} = H_o^{2-ABE}; \quad H_o^{1-ACD} = H_o^{2-ACD};$ $H_o^{1-ACE} = H_o^{2-ACE}; \quad H_o^{1-ADE} = H_o^{2-ADE}; \quad H_o^{1-BCD} = H_o^{2-BCD}; \quad H_o^{1-BCE} = H_o^{2-BCE};$ $H_o^{1-BDE} = H_o^{2-BDE}; \quad H_o^{1-CDE} = H_o^{2-CDE}$	
Interações de 4º grau	
$H_o^{1-ABCD} = H_o^{2-ABCD}; \quad H_o^{1-ABCE} = H_o^{2-ABCE}; \quad H_o^{1-ABDE} = H_o^{2-ABDE}; \quad H_o^{1-ACDE} = H_o^{2-ACDE};$ $H_o^{1-BCDE} = H_o^{2-BCDE}$	
Interação de 5º grau	
$H_o^{1-ABCDE} = H_o^{2-ABCDE} = H_o^{3-ABCDE} = H_o^{4-ABCDE}$	

(1) O traço "____" nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator.

a Exemplos de freqüências de caselas

a.1 Conjunto balanceado

Fatores				Fator E	
A	B	C	D	m=1	m=2
i=1	j=1	k=1	l=1	4	4
			l=2	4	4
		k=2	l=1	4	4
			l=2	4	4
	j=2	k=1	l=1	4	4
			l=2	4	4
		k=2	l=1	4	4
			l=2	4	4
i=2	j=1	k=1	l=1	4	4
			l=2	4	4
		k=2	l=1	4	4
			l=2	4	4
	j=2	k=1	l=1	4	4
			l=2	4	4
		k=2	l=1	4	4
			l=2	4	4

a.2 Conjunto desbalanceado

Fatores				Fator E	
A	B	C	D	m=1	m=2
i=1	j=1	k=1	l=1	2	4
			l=2	1	2
		k=2	l=1	6	12
			l=2	3	6
	j=2	k=1	l=1	4	8
			l=2	2	4
		k=2	l=1	12	24
			l=2	6	12
i=2	j=1	k=1	l=1	4	8
			l=2	2	4
		k=2	l=1	12	24
			l=2	6	12
	j=2	k=1	l=1	8	16
			l=2	4	8
		k=2	l=1	24	48
			l=2	12	24

4.3.2 Planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais

Um destaque no estudo dos conjuntos desbalanceados consiste nos delineamentos parcialmente ortogonais que, como citado anteriormente, permitem que a proporcionalidade entre as freqüências de caselas ocorra apenas para os fatores de maior interesse. Essa característica acarreta no planejamento situações distintas nos testes das hipóteses para os efeitos principais e interações. Seguindo as propriedades apresentadas no item 3.2.3.4 do material e métodos, os Quadros 28, 29, 30, 31, 32 e 33, ilustram de maneira resumida, as conseqüências da ortogonalidade parcial em modelos com até cinco fatores. Contudo, nos modelos com cinco fatores os exemplos de freqüências de caselas não foram apresentados pela própria dificuldade de interpretação dos resultados do experimento oriundos desses modelos.

4.3.2.1 Modelos com três fatores

Quadro 28. Esquema para o planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais de modelos com três fatores, com algumas das hipóteses testáveis.

Delineamentos parcialmente ortogonais com três fatores ⁽¹⁾		
Caso 1	Caso 2	Caso 3
Efeitos principais		
$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}$	$H_o^{1-B} = H_o^{2-B}$	$H_o^{1-C} = H_o^{2-C}$
Interações duplas		
$H_o^{1-BC} = H_o^{2-BC}$	$H_o^{1-AC} = H_o^{2-AC}$	$H_o^{1-AB} = H_o^{2-AB}$
Interação tripla		
$H_o^{1-ABC} = H_o^{2-ABC} = H_o^{3-ABC} = H_o^{4-ABC}$		

(1) O traço “—” nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator.

a Exemplos de frequências de caselas

a.1 Caso 1

Fatores		Fator C	
A	B	k=1	k=2
i=1	j=1	1	2
	j=2	4	12
i=2	j=1	2	4
	j=2	8	24

a.2 Caso 2

Fatores		Fator C	
A	B	k=1	k=2
i=1	j=1	10	6
	j=2	5	3
i=2	j=1	14	4
	j=2	7	2

a.3 Caso 3

Fatores		Fator C	
A	B	k=1	k=2
i=1	j=1	1	2
	j=2	3	6
i=2	j=1	2	4
	j=2	4	8

4.3.2.2 Modelos com quatro fatores

Quadro 29. Esquema para o planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais de modelos com quatro fatores, com algumas das hipóteses testáveis para os casos onde um dos fatores é individualmente ortogonal aos demais (situação 1).

Delineamentos parcialmente ortogonais (situação 1) ^{(1) (2)}			
Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Efeitos principais			
$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}$	$H_o^{1-B} = H_o^{2-B}$	$H_o^{1-C} = H_o^{2-C}$	$H_o^{1-D} = H_o^{2-D}$
Interações triplas			
$H_o^{1-BCD} = H_o^{2-BCD}$	$H_o^{1-ACD} = H_o^{2-ACD}$	$H_o^{1-ABD} = H_o^{2-ABD}$	$H_o^{1-ABC} = H_o^{2-ABC}$
Interações triplas			
$H_o^{1-ABCD} = H_o^{2-ABCD} = H_o^{3-ABCD} = H_o^{4-ABCD}$			

- (1) O traço “—” nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator;
- (2) O pontilhado “.....” indica que se uma das ortogonalidades ocorrer, as igualdades e as hipóteses testáveis não se alteram.

a Exemplos de frequências de caselas

a.1 Situação 1 caso 1

Fatores			Fator D	
A	B	C	i=1	i=2
i=1	j=1	k=1	2	1
		k=2	4	2
	j=2	k=1	6	2
		k=2	4	2
i=2	j=1	k=1	2	1
		k=2	4	2
	j=2	k=1	6	2
		k=2	4	2

a.2 Situação 2 caso 5

Fatores			Fator D	
A	B	C	i=1	i=2
i=1	j=1	k=1	1	2
		k=2	2	4
	j=2	k=1	1	2
		k=2	2	4
i=2	j=1	k=1	1	2
		k=2	3	6
	j=2	k=1	1	2
		k=2	3	6

Quadro 30. Esquema para o planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais de modelos com quatro fatores, com algumas das hipóteses testáveis para os casos onde dois fatores são individualmente ortogonais aos demais (situação 2).

Delineamentos parcialmente ortogonais com quatro fatores (situação 2) ⁽¹⁾					
Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$	$H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$	$H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$	$H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$
$H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$ $H_0^{1-CD} = H_0^{2-CD}$	$H_0^{1-AC} = H_0^{2-AC}$ $H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$	$H_0^{1-AD} = H_0^{2-AD}$ $H_0^{1-BC} = H_0^{2-BC}$	$H_0^{1-BC} = H_0^{2-BC}$ $H_0^{1-AD} = H_0^{2-AD}$	$H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$ $H_0^{1-AC} = H_0^{2-AC}$	$H_0^{1-CD} = H_0^{2-CD}$ $H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$
$H_0^{1-ACD} = H_0^{2-ACD}$ $H_0^{1-BCD} = H_0^{2-BCD}$	$H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$ $H_0^{1-BCD} = H_0^{2-BCD}$	$H_0^{1-ABC} = H_0^{2-ABC}$ $H_0^{1-BCD} = H_0^{2-BCD}$	$H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$ $H_0^{1-ACD} = H_0^{2-ACD}$	$H_0^{1-ABC} = H_0^{2-ABC}$ $H_0^{1-ACD} = H_0^{2-ACD}$	$H_0^{1-ABC} = H_0^{2-ABC}$ $H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$
<div> <div>Efeitos principais</div> <div>Interações duplas</div> <div>Interações triplas</div> <div>Interações 4º grau</div> </div>					
$H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD} = H_0^{3-ABCD} = H_0^{4-ABCD}$					

(1) O traço " " nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator.

4.3.2.3 Modelos com cinco fatores

Quadro 31. Esquema para o planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais de modelos com cinco fatores, com algumas das hipóteses testáveis para os casos onde um fator é individualmente ortogonal aos demais (situação 1).

Delineamentos parcialmente ortogonais com cinco fatores (situação 1) ^{(1) (2)}				
Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
$H_o^{1-A} = H_o^{2-A}$	$H_o^{1-B} = H_o^{2-B}$	$H_o^{1-C} = H_o^{2-C}$	$H_o^{1-D} = H_o^{2-D}$	$H_o^{1-E} = H_o^{2-E}$
$H_o^{1-BCDE} = H_o^{2-BCDE}$	$H_o^{1-ACDE} = H_o^{2-ACDE}$	$H_o^{1-ABDE} = H_o^{2-ABDE}$	$H_o^{1-ABCE} = H_o^{2-ABCE}$	$H_o^{1-ABCD} = H_o^{2-ABCD}$
Efeitos principais				
Interações triplas				
Interações 4º grau				
$H_o^{1-ABCDE} = H_o^{2-ABCDE} = H_o^{3-ABCDE} = H_o^{4-ABCDE}$				

- (1) O traço " " nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator;
- (2) O pontilhado "" indica que se uma das ortogonalidades ocorrer, as igualdades e as hipóteses testáveis não se alteram.

Quadro 32. Esquema para o planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais de modelos com cinco fatores, com algumas das hipóteses testáveis para os casos onde dois fatores são individualmente ortogonais aos demais (situação 2).

<i>Delineamentos parcialmente ortogonais com cinco fatores (situação 2)</i> ^{(1) (2)}				
Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5

<i>Efeitos principais</i>				
$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-E} = H_0^{2-E}$	$H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$
<i>Interações duplas</i>				
$H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$	$H_0^{1-AC} = H_0^{2-AC}$	$H_0^{1-AD} = H_0^{2-AD}$	$H_0^{1-BC} = H_0^{2-BC}$	$H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$
<i>Interações triplas</i>				
$H_0^{1-CDE} = H_0^{2-CDE}$	$H_0^{1-BDE} = H_0^{2-BDE}$	$H_0^{1-BCE} = H_0^{2-BCE}$	$H_0^{1-BCD} = H_0^{2-BCD}$	$H_0^{1-ADE} = H_0^{2-ADE}$
<i>Interações de 4º grau</i>				
$H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABDE} = H_0^{2-ABDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABCE} = H_0^{2-ABCE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABDE} = H_0^{2-ABDE}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$
<i>Interação de 5º grau</i>				
$H_0^{1-ABCDE} = H_0^{2-ABCDE} = H_0^{3-ABCDE} = H_0^{4-ABCDE}$				

Quadro 33. Esquema para o planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais de modelos com cinco fatores, com algumas das hipóteses testáveis para os casos onde dois fatores são individualmente ortogonais aos demais.

Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4		Caso 5
$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$	Efeitos principais $H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-E} = H_0^{2-E}$			$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$ $H_0^{1-E} = H_0^{2-E}$	$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$ $H_0^{1-E} = H_0^{2-E}$	
$H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$ $H_0^{1-AC} = H_0^{2-AC}$ $H_0^{1-BC} = H_0^{2-BC}$ $H_0^{1-DE} = H_0^{2-DE}$	$H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$ $H_0^{1-AD} = H_0^{2-AD}$ $H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$ $H_0^{1-CE} = H_0^{2-CE}$	$H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$ $H_0^{1-AD} = H_0^{2-AD}$ $H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$ $H_0^{1-CE} = H_0^{2-CE}$	$H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$ $H_0^{1-AD} = H_0^{2-AD}$ $H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$ $H_0^{1-CE} = H_0^{2-CE}$	Interações duplas $H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$ $H_0^{1-AE} = H_0^{2-AE}$ $H_0^{1-BE} = H_0^{2-BE}$ $H_0^{1-CD} = H_0^{2-CD}$			$H_0^{1-AC} = H_0^{2-AC}$ $H_0^{1-AE} = H_0^{2-AE}$ $H_0^{1-CE} = H_0^{2-CE}$ $H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$	$H_0^{1-AC} = H_0^{2-AC}$ $H_0^{1-AE} = H_0^{2-AE}$ $H_0^{1-CE} = H_0^{2-CE}$ $H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$	
$H_0^{1-ABC} = H_0^{2-ABC}$ $H_0^{1-ADE} = H_0^{2-ADE}$ $H_0^{1-BDE} = H_0^{2-BDE}$ $H_0^{1-CDE} = H_0^{2-CDE}$	$H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$ $H_0^{1-ACE} = H_0^{2-ACE}$ $H_0^{1-BCE} = H_0^{2-BCE}$ $H_0^{1-CDE} = H_0^{2-CDE}$	$H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$ $H_0^{1-ACE} = H_0^{2-ACE}$ $H_0^{1-BCE} = H_0^{2-BCE}$ $H_0^{1-CDE} = H_0^{2-CDE}$	$H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$ $H_0^{1-ACE} = H_0^{2-ACE}$ $H_0^{1-BCE} = H_0^{2-BCE}$ $H_0^{1-CDE} = H_0^{2-CDE}$	Interações triplas $H_0^{1-ABE} = H_0^{2-ABE}$ $H_0^{1-ACD} = H_0^{2-ACD}$ $H_0^{1-BCD} = H_0^{2-BCD}$ $H_0^{1-CDE} = H_0^{2-CDE}$			$H_0^{1-ACD} = H_0^{2-ACD}$ $H_0^{1-ABE} = H_0^{2-ABE}$ $H_0^{1-BCE} = H_0^{2-BCE}$ $H_0^{1-BDE} = H_0^{2-BDE}$	$H_0^{1-ACE} = H_0^{2-ACE}$ $H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$ $H_0^{1-BCD} = H_0^{2-BCD}$ $H_0^{1-BDE} = H_0^{2-BDE}$	
$H_0^{1-ABDE} = H_0^{2-ABDE}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABCE} = H_0^{2-ABCE}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABCE} = H_0^{2-ABCE}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABCE} = H_0^{2-ABCE}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	Interações de 4º grau $H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$			$H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD}$ $H_0^{1-ABDE} = H_0^{2-ABDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD}$ $H_0^{1-ABDE} = H_0^{2-ABDE}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	
Interação de 5º grau $H_0^{1-ABCDE} = H_0^{2-ABCDE} = H_0^{3-ABCDE} = H_0^{4-ABCDE}$									

Continuação...

Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9	Caso 10

$H_0^{1-A} = H_0^{2-A}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$ $H_0^{1-E} = H_0^{2-E}$ $H_0^{1-AE} = H_0^{2-AE}$ $H_0^{1-AD} = H_0^{2-AD}$ $H_0^{1-DE} = H_0^{2-DE}$ $H_0^{1-BC} = H_0^{2-BC}$	$H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$ $H_0^{1-BC} = H_0^{2-BC}$ $H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$ $H_0^{1-CD} = H_0^{2-CD}$ $H_0^{1-AE} = H_0^{2-AE}$	Efeitos principais $H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$ $H_0^{1-E} = H_0^{2-E}$ Interações duplas $H_0^{1-BC} = H_0^{2-BC}$ $H_0^{1-BE} = H_0^{2-BE}$ $H_0^{1-CE} = H_0^{2-CE}$ $H_0^{1-AD} = H_0^{2-AD}$	$H_0^{1-B} = H_0^{2-B}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$ $H_0^{1-E} = H_0^{2-E}$ $H_0^{1-BD} = H_0^{2-BD}$ $H_0^{1-BE} = H_0^{2-BE}$ $H_0^{1-DE} = H_0^{2-DE}$ $H_0^{1-AC} = H_0^{2-AC}$	$H_0^{1-C} = H_0^{2-C}$ $H_0^{1-D} = H_0^{2-D}$ $H_0^{1-E} = H_0^{2-E}$ $H_0^{1-CD} = H_0^{2-CD}$ $H_0^{1-CE} = H_0^{2-CE}$ $H_0^{1-DE} = H_0^{2-DE}$ $H_0^{1-AB} = H_0^{2-AB}$
$H_0^{1-ADE} = H_0^{2-ADE}$ $H_0^{1-ABC} = H_0^{2-ABC}$ $H_0^{1-BCD} = H_0^{2-BCD}$ $H_0^{1-BCE} = H_0^{2-BCE}$	$H_0^{1-BCD} = H_0^{2-BCD}$ $H_0^{1-ABE} = H_0^{2-ABE}$ $H_0^{1-ACE} = H_0^{2-ACE}$ $H_0^{1-ADE} = H_0^{2-ADE}$	Interações triplas $H_0^{1-BCE} = H_0^{2-BCE}$ $H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$ $H_0^{1-ACD} = H_0^{2-ACD}$ $H_0^{1-ADE} = H_0^{2-ADE}$	$H_0^{1-BDE} = H_0^{2-BDE}$ $H_0^{1-ABC} = H_0^{2-ABC}$ $H_0^{1-ACD} = H_0^{2-ACD}$ $H_0^{1-ACE} = H_0^{2-ACE}$	$H_0^{1-CDE} = H_0^{2-CDE}$ $H_0^{1-ABC} = H_0^{2-ABC}$ $H_0^{1-ABD} = H_0^{2-ABD}$ $H_0^{1-ABE} = H_0^{2-ABE}$
$H_0^{1-ABCE} = H_0^{2-ABCE}$ $H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD}$ $H_0^{1-BCDE} = H_0^{2-BCDE}$	$H_0^{1-ABCE} = H_0^{2-ABCE}$ $H_0^{1-ABDE} = H_0^{2-ABDE}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$	Interações de 4º grau $H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD}$ $H_0^{1-ABDE} = H_0^{2-ABDE}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$	$H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD}$ $H_0^{1-ABCE} = H_0^{2-ABCE}$ $H_0^{1-ACDE} = H_0^{2-ACDE}$	$H_0^{1-ABCD} = H_0^{2-ABCD}$ $H_0^{1-ABCE} = H_0^{2-ABCE}$ $H_0^{1-ABDE} = H_0^{2-ABDE}$
Interação de 5º grau $H_0^{1-ABCDE} = H_0^{2-ABCDE} = H_0^{3-ABCDE} = H_0^{4-ABCDE}$				

(1) O traço “ ” nos diagramas, entre as letras maiúsculas que descrevem os fatores, indica que o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a um fator é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes ao outro fator.

5 CONCLUSÕES

Neste estudo, buscou-se discutir e definir conceitos clássicos da estatística experimental, como ortogonalidade e análise de variância, visando formalizar a estrutura das funções estimáveis e das hipóteses testáveis nos modelos com e sem interações, utilizados para analisar delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais.

Face aos resultados obtidos, concluiu-se que:

5.1 Quanto aos delineamentos ortogonais

Um delineamento com K fatores é dito ortogonal, se o subespaço gerado pelas colunas da submatriz de X referentes a cada fator, após o ajuste de μ , é individualmente ortogonal aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros $K-1$ fatores, após o ajuste de μ .

a) Modelos sem interações

a.1) As funções paramétricas envolvendo um único fator são estimáveis. Então, as hipóteses sobre os efeitos de um fator, não contêm parâmetros que descrevem efeitos de nenhum outro fator, quer o conjunto seja ou não balanceado;

a.2) Dado que o modelo não contempla interações e que os conjuntos de dados não apresentam caselas vazias, condição necessária para ortogonalidade, então as hipóteses do tipo II são iguais às dos tipos III e IV. Nesse contexto, tanto para conjuntos balanceados quanto para conjuntos

desbalanceados, um único quadro de análise de variância pode ser utilizado, simplificando sobremaneira a interpretação dos resultados;

b) Modelos com interações

b.1) As funções estimáveis de um fator contêm os parâmetros relativos ao fator e os respectivos componentes das interações nas quais o fator está presente;

b.2) As funções estimáveis para uma interação contêm parâmetros relativos a própria interação e parâmetros das interações de grau maior que o grau da interação em estudo;

b.3) Como o modelo contempla interações, as hipóteses do tipo II são diferentes das hipóteses dos tipos III e IV. Dessa forma, deve-se solicitar ao sistema de análise as hipóteses do tipo III, além da hipótese do tipo I encontrada no padrão dos programas.

c) Como consequência de a.1 e b.1 as hipóteses do tipo I ou hipóteses sobre médias ponderadas, são iguais às hipóteses do tipo II ou hipóteses sobre médias ponderadas ajustadas para todos os efeitos principais e interações;

d) A ortogonalidade, seja nos conjuntos balanceados ou nos desbalanceados, tem como consequência a igualdade entre todas as decomposições das somas de quadrados ajustadas de um mesmo fator ou interação.

5.2 Quanto aos delineamentos parcialmente ortogonais

Um delineamento com K fatores é dito parcialmente ortogonal, se os subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes, no máximo, a $K-2$ fatores, após o ajuste de μ , são individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelas colunas das submatrizes de X referentes aos outros $K-1$ fatores, após o ajuste de μ .

a) Modelos sem interações

As funções estimáveis do fator ou dos fatores nos quais os subespaços gerados são individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelos demais fatores, contêm apenas os parâmetros relativos ao próprio fator, gerando hipóteses sob médias ponderadas iguais às hipóteses sob médias ponderadas ajustadas;

b) Modelos com interações

b.1) Efeitos principais

As funções estimáveis do fator ou dos fatores, nos quais os subespaços gerados são individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelos demais fatores, após o ajuste de μ , contêm os parâmetros relativos ao próprio fator e os respectivos parâmetros das interações nas quais o fator está presente. Como consequência, as hipóteses sob médias ponderadas são iguais às hipóteses sob médias ponderadas ajustadas;

b.2) Interações

Funções estimáveis de interações que contêm os parâmetros relativos a própria interação e os parâmetros relativos à todas interações de

grau maior à interação em estudo e apresentam hipóteses sob médias ponderadas iguais às hipóteses sob médias ponderadas ajustadas foram;

b.2.1) A interação que envolveu conjuntamente os fatores cujos subespaços gerados não foram ortogonais entre si;

b.2.2) As interações formadas pelos fatores cujos subespaços gerados foram individualmente ortogonais aos subespaços gerados pelos demais fatores;

b.2.3) As interações formadas pelos casos *b.2.1* e *b.2.2*;

c) A ortogonalidade parcial não implica na desigualdade entre as decomposições das somas de quadrados para os efeitos principais e interações que não apresentaram hipóteses do tipo I iguais às hipóteses do tipo II;

5.3 Considerações gerais

O planejamento de delineamentos parcialmente ortogonais envolve a decisão antecipada do pesquisador sobre as hipóteses de seu maior interesse, pois nem todas as hipóteses sobre os efeitos principais e interações são testáveis.

Como conjunto completo é condição necessária tanto para os delineamentos ortogonais quanto para os parcialmente ortogonais sempre ocorre a igualdade entre as hipóteses dos tipos III e IV, bastando que apenas uma seja solicitada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADDELMAN, S. Orthogonal main-effect plans for assymetrical factorial experiments, **Technometrics**, Alexandria, v.4, p. 21-46, 1962.

AZAÏS, J.M. Analyse de variance non-orthogonale: l'exemple de SAS/GLM. **Rev. Statist. Appl.** Paris, v.17, n.2, p. 27-41, 1994.

CAMARINHA FILHO, J.A. Testes de hipóteses em modelos lineares com dados desbalanceados e caselas vazias. Piracicaba, 1995. 142p. Dissertação (M.S.)-Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo.

CHRISTENSEN, R.A. **Plane answer to complex questions. The teory of linear models.** New York :Spring-Verlag, 1987. 380p.

CLAUSTRIAUX, J.J.; IEMMA, A.F. A propos des qalificatif complet, orthogonal et équilibré en analyse de la variance. **Notes de Statist. et d'Inform.** Gembloux, v.2, p.1-16, 1999.

FINNEY, D.J. Some orthogonal properties of the 4 x 4 and 6 x 6 latin squares. **Ann. Eugenics**, London, v.12, p.213-219, 1945a.

FINNEY, D.J. The fractional replication of factorial experiments **Ann. Eugenics**, London, v.12, p.291-301, 1945b.

- FINNEY, D.J. Orthogonal properties of the 5 x 5 latin squares. ***Ann. Eugenics***, London, v.13, p.1-3, 1946a.
- FINNEY, D.J. Orthogonal properties of the 6 x 6 latin squares. ***Ann. Eugenics***, London, v.13, p.184-196, 1946b.
- HOCKING, R.R. ***The analysis of linear models***. Monterrey: Brooks/Cole, 1985, 385p.
- IEMMA, A.F. ***Modelos lineares: uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária***. Imprensa Oficial Est. Paraná, Londrina, 1987. 236p.
- IEMMA, A.F. ***Matrizes para a estatística***. Departamento de Matemática e Estatística. ESALQ/USP, Piracicaba, 1989, 418p.
- IEMMA, A.F. ***Álgebra de matrizes com aplicações em estatística***. Departamento de Matemática e Estatística. ESALQ/USP, Piracicaba, 1990, 411p.
- IEMMA, A.F. ***Testes de hipóteses em modelos com amostras desequilibradas***. Gembloux, 1991. 101p.
- IEMMA, A.F. Que hipóteses estatísticas testamos através do SAS em presença de caselas vazias? ***Scientia Agricola***, Piracicaba, v.52, n.2, p. 210-220, 1995.
- IEMMA, A.F.; CLAUSTRIAUX, J.J. ***Une condition nécessaire et suffisante pour que l'analyse des resultats d'une expérience croisée soit orthogonale***. Faculté des Sciences Agronomiques. Gembloux, 1997. 21p. (seminário)

- IEMMA, A.F.; CLAUSTRIAUX, J.J. **Sobre os termos “completo” “ortogonal e balanceado em análise de variância**, Piracicaba, 1998, 36p. (Seminário).
- IEMMA, A. F.; CLAUSTRIAUX, J. J. Étude des hypothèses de la variance à deux critères de classification: approche par l'exemple. **Notes de Statist. et d'Inform.** Gembloux, v.3, p. 1-37, 1999.
- IEMMA, A.F.; PALM, R. Les inverses généralisées et leur application dans le modèle lineaire. Gembloux. **Notes de Statist. et d'Inform.**, v.1, 25p, 1992.
- IEMMA, A.F.; PALM, R.; CLAUSTRIAUX, J.J. Sobre a construção de projetores ortogonais. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v.11, p.133-142, 1993 .
- IEMMA, A. F.; SANTANA, D. G. Delineamentos ortogonais com três fatores: teoria e hipóteses sobre os parâmetros. In: 45a REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA. **Resumos**. São Carlos, 2000. 186p.
- JONES, R.M. On a property of incomplete blocks. **Journal of Royal Statist. Soc B**, London, v.21, p.172-179, 1959.
- MONDARDO, M. Estimabilidade de funções estimáveis paramétricas com dados desbalanceados através do PROC GLM dos SAS: Aplicações à pesquisa agropecuária. Piracicaba, 1994. 166p. Tese (Doutorado)-Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo.
- PEARCE, S.C. Field experimentation with fruit trees and othres perenial plants. **Tech. Commun**, Harpenden, v.23, 1953.

- PEARCE, S.C. The use and classification of non-orthogonal designs. **Journal of Royal Statist. Soc**, London, A. v.126, p.353-377, 1963.
- PEARCE, S.C. The efficiency of block designs in general. **Biometrika**, Cambridge, v.57, n.2, p.339-346, 1970.
- PEARCE, S.C. **The agricultural field experiments**. London: John Wiley & Sons, 1983. 355p.
- PREECE, D.A. Orthogonality and designs: a terminological muddle. **Utilitas Mathematica**, Winnipeg, v.12, p.201-223, 1977.
- RAO, C.R. **Linear statistical inference and its applications**. New York: John Wiley & Sons, 1945. 522p.
- SANTANA, D. G.; IEMMA, A. F. Delineamentos ortogonais e parcialmente ortogonais: planejando para testar hipóteses de interesse. In: 45a REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA. **Resumos**. São Carlos, 2000. 186p.
- SANTOS, E. S. Utilização de “softwares” estatísticos na interpretação de hipóteses com dados desbalanceados. Piracicaba, 1994. 230p. Tese (Doutorado)-Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo.
- SEARLE, S.R. **Linear models data**. New York: Wiley, 1971, 532p.
- SEARLE, S.R. Arbitrary in linear models with unbalanced data. **Commun. Statist.** London v.2, p:181-200, 1980.
- SEARLE, S.R. **Linear models for unbalanced data**. New York: Wiley, 1987, 536p.

SPEED, F.M.; HOCKING, R.R. ; HACKNEY, O.P. Methods of analysis of linear models with unbalanced data. Washington, ***Journal Amer. Statist. Assoc.***, Boston, v.73, p. 105-112, 1978.

TOCHER, K.D. The design and analysis of block experiments. ***Journal of Royal Statist. Soc. B***, London, v.14, p.45-100, 1952.

YATES, F. Complex experiments. ***Jornal Royal Statist.***, London, v.2, p.181-247, 1935.

X [1990] ***SAS User's guide: statistics version 6 edition***. Cary, SAS Institute, 846p.

X [1996] ***Minitab reference manual***. Enterprise drive, State college.