A DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE PLANEJAMENTO POR VALORES SINGULARES EM MODELOS DE POSTO INCOMPLETO

ANTONIO ASSIZ DE CARVALHO FILHO

Orientador: Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

**Tese apresentada à Escola
Superior de Agricultura “Luiz de
Queiroz”, da Universidade de São
Paulo, para obtenção do título de
Doutor em Agronomia, Área de
Concentração: Estatística e Expe-
rimentação Agronômica.**

**PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Novembro - 1987**

Aos meus pais,

Antonio Assiz e Maria Aparecida

e aos meus filhos,

Antonio Assiz de Carvalho Neto e

Afonso Dallapiazza de Carvalho,

OFEREÇO.

À minha esposa Rosangela Maria,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A busca do ideal que aqui se concretiza exigiu cerca de oito anos de luta. Bem ou mal chegamos. No entanto, muitas vezes mãos amigas nos impulsionaram e permitiram que a caminhada não fosse truncada.

Na verdade, ninguém chega sozinho e seria honesto que esse rol fosse explicitado. Nesse contexto, apesar de erro por omissão, permito-me deixar registrada minha sincera gratidão, dentre muitos para:

- Antonio Francisco Iemma e Antonio Assiz de Carvalho, os e ternos orientadores.
- . Humberto de Campos e Décio Barbin, pelo estímulo e apoio em todos os momentos.
 - . Myrthes da Fonseca Pinto, por suas valiosas recomendações, amizade e apoio nos bons e nos maus momentos.
 - . Alvanir de Figueiredo, Carmen D. R. Daré, José Fernando Martins Bonilha, José Ferrari Leite, Marcos Alegre, Maria Kimie Koyanagui Horimoto e Roberto Pannain (in memorian), que confiaram nos primeiros passos.

- . Fernando Ferrari, companheiro de estudo e de luta.
- . Maria Helena Ferrete, amiga e incentivadora.
- . Maria Helena de Carvalho Guadanhin e José Roberto Guadanhin, pela revisão do manuscrito e preparo do original.
- . Suely Asami Takara Mendes Ferreira, pela datilografia da revisão final deste trabalho.

Clarice Garcia Borges Demétrio, pela redação do SUMMARY.

- . Maria Izalina Ferreira Alves e Rosa Maria Alves, pela amizade, atenção e apoio dado durante o Curso.

Aos professores do I.E. Fernando Costa, da gestão do saudoso diretor Krisan Martin, pelo bom ensino recebido.

- . Rosângela Maria, Antonio Assis de Carvalho Neto e Afonso Dallapiazza de Carvalho, que deram sentido a esta vida.

ÍNDICE

	Página
RESUMO	viii
SUMMARY	x
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
3. MÉTODO	19
3.1. Introdução	19
3.2. A Decomposição da Matriz X por Valores Singu- lares	19
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	25
4.1. Introdução	25
4.2. O Modelo Linear de Gauss-Markov	25
4.2.1. Caracterização	25
4.2.2. Solução de mínimos quadrados	26
4.2.3. Média de θ^0	31
4.2.4. Um estimador não tendencioso para σ^2 ..	32
4.2.5. Funções estimáveis	33
4.2.6. Obtenção do B.L.U.E.	35
4.3. Sistema de Equações Normais Reduzidas	36
4.3.1. O modelo linear	36
4.3.2. Estimabilidade de um subconjunto de pa- râmetros	41
4.3.3. Análise de Variância	41

	Página
4.4. Distribuição das Formas Quadráticas	45
4.4.1. Introdução	45
4.4.2. A distribuição de $y'P_{U_1}y$	46
4.4.3. A distribuição de $y'(I - P_{U_1})y$	47
4.4.4. A distribuição de $y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y$...	47
4.4.5. A distribuição de $y'(I - P_{U_{11}})y$	48
4.5. Intervalos e Regiões de Confiança	48
4.5.1. Intervalos de confiança	49
4.5.2. Regiões de confiança	51
4.5.3. Testes de hipóteses baseados em re- giões de confiança	56
4.6. Aplicações dos Resultados Básicos nos Modelos Lineares para um Fator Inteiramente Casuali- zado	57
4.6.1. Introdução	57
4.6.2. O algoritmo	60
4.6.3. Alguns resultados úteis	77
4.7. O Modelo Linear com um Fator Inteiramente Ca- sualizado	86
4.7.1. Descrição do modelo	86
4.7.2. Estimabilidade	89
4.7.3. No modelo $Y = [X_2, Y_2] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + e$	91
4.7.4. Distribuição das formas quadráticas ..	99
4.7.5. Estimação por intervalo e por região	101

	Página
4.8. Um Exemplo Numérico	102
5. CONCLUSÕES	113
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114

A DECOMPOSICAO DA MATRIZ DE PLANEJAMENTO POR VALORES SINGULARES EM MODELOS DE POSTO INCOMPLETO

AUTOR: ANTONIO ASSIZ DE CARVALHO FILHO
ORIENTADOR: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

RESUMO

Neste trabalho propoe-se uma alternativa para o estudo de modelos lineares através da substituição da matriz do delineamento pela sua Decomposição pelos Valores Singulares (D.V.S).

Visando ilustrar teoricamente o processo, apresenta-se o estudo do modelo linear $y = X\theta + d$ e do modelo linear caracterizado por $y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$; com estrutura gaussiana, onde $i = 1, 2, \dots, T$ tratamentos e $j = 1, 2, \dots, R$ repetições.

Verifica-se no desenvolvimento teórico do modelo adotado e na aplicação dos resultados obtidos sobre um exemplo numérico, que a D.V.S. proporciona de modo simples, rápido e objetivo, a obtenção de vários resultados de interesse estatístico, tais como:

. A obtenção de novas regras para verificar as funções estimáveis no modelo linear $y = X\theta + e$ (G.M.) do presente estudo;

. O estudo das distribuições das formas quadráticas no modelo reduzido;

. Os testes de interesse estatísticos.

. Além disso, obteve-se um método para decompor a matriz do delineamento ${}_nX_p$ pelos Valores Singulares (D.V.S.) sem a utilização de recursos computacionais.

THE SINGULAR - VALUE DECOMPOSITION OF THE DESIGN MATRIX IN NOT FULL RANK MODELS

AUTHOR: ANTONIO ASSIZ DE CARVALHO FILHO

ADVISER: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

SUMMARY

An alternative method is proposed for the study of linear models substituting the design matrix by its singular-value decomposition (S.V.D.).

The method is illustrated by the study of the linear model $y = X\theta + d$ and the linear $y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$ with Gaussian structure, where $i = 1, 2, \dots, T$ treatments and $j = 1, 2, \dots, R$ repetitions.

It is showed through the theoretical expansion of the adapted model and the application of the results to a numerical example, that S.V.D. gives in a simple, quick and objective way the following results:

- . New rules to verify the estimable functions in the linear model $y = X\theta + e$ under study.

- . The study of distributions of the quadratic forms in the reduced model.

The tests of statistical interest.

. Besides that a method to decompose the $X_{n \times p}$ design matrix in its singular values was obtained without the use of computer.

1. INTRODUÇÃO

A Decomposição em Valores Singulares (D.V.S.) tem sido em geral utilizada em modelos lineares de posto completo.

No presente estudo, adota-se o modelo linear de Gauss-Markov

$$y_i = \sum_{p=1}^p x_{ip} \theta_p + e_i,$$

onde

y é o vetor de observações, X é a matriz de planejamento ($\text{rank}(X) < \min(n, p)$), θ é o vetor de parâmetros e e é o erro aleatório com distribuição normal atribuído à observação y_{ij} , tal que $E(e) = 0$ e $\text{Var.}(e) = \sigma^2$.

Não há dúvidas de que dada a D.V.S. da matriz de delineamento em modelos lineares de posto incompleto (X), seja possível a obtenção de vários algoritmos para obter-se diversos resultados estatísticos de interesse. O que tem limitado sua utilização é a dificuldade numérica de obtenção dos autovalores e dos autovetores normalizados dos produtos matriciais de XX' e $X'X$.

Na análise de regressão, a substituição da matriz X pela sua D.V.S. tem sido associada à técnica conhecida

cida como Regressão por Componentes Principais, e permite atingir, de acordo com MANDELL (1982), vários objetivos, entre os quais destaca-se a visualização gráfica de eventuais problemas de colinearidade nas colunas de X, e seus efeitos sobre a Análise de Regressão.

Segundo LIMA FILHO (1981), mesmo que a colinearidade não exista, a D.V.S. fornece os algoritmos mais estáveis para os cálculos relacionados à regressão linear.

O presente trabalho objetiva:

a) desenvolver alguns aspectos básicos da teoria dos Modelos Lineares de Gauss-Markov (G.M.) pelo enfoque da D.V.S., visto que o assunto é atual e não são comuns as publicações sobre o uso da D.V.S. nos modelos de posto incompleto;

b) aplicar os resultados obtidos no modelo linear de G.M. com um fator inteiramente casualizado, caracterizado por:

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij},$$

com $i = 1, \dots, T$ tratamentos

$j = 1, \dots, R$ repetições:

c) verificar se a D.V.S. pode ser considerada um bom competidor junto aos procedimentos mais utilizados nesse tipo de delineamento para a solução do sistema de equações normais e nos testes de interesse, quando o pesquisador não tem o acesso fácil às rotinas computacionais dos vários pacotes estatísticos existentes, tais como o I.M.S.L. (International Mathematical and Statistical Library) e o S.A.S. (Statistical Analysis System), dentre outros.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Decompor uma matriz X por seus valores singulares consiste basicamente em obter uma matriz S formada pelos autovalores de XX' , uma matriz U dos correspondentes autovetores normalizados de $X'X$ e uma matriz V dos autovetores normalizados de $X'X$, donde se terá:

$$X = USV'$$

Vários textos, como ACTON (1970), MURDOCH (1970), BAYLEY (1971), COHEN (1973) e STEINBERG (1974) apresentam definições e teoremas básicos sobre autovalores e autovetores de matrizes reais e simétricas.

De acordo com SEARLE (1982), os autovalores de uma matriz $A_{(n)}$ são as raízes de uma equação polinomial em λ de ordem n , e à medida em que a dimensão de $A_{(n)}$ aumenta, vai se tornando impraticável calcular seu polinômio característico e, conseqüentemente, encontrar suas raízes. Em muitos casos, conhecendo-se o polinômio característico de uma matriz, a determinação de suas raízes ainda é um problema considerado difícil para matrizes de grande dimensão.

WILKINSON (1964) descreve vários algoritmos

para a obtenção de autovalores e autovetores de matrizes si
métricas: vários deles, tais como o Método Periódico de Jacobi,
Givens e de Householder, observa-se que são inspirados
no método clássico de Jacobi. No método de Jacobi, a matriz
original é posta na forma diagonal através de uma sequência
de rotações no plano, usualmente conhecidas como "Transformaç
ões de Jacobi". O método de Jacobi não é uma técnica efi
ciente para calcular autovalores de matrizes simétricas, pois
o número de rotações no plano, necessárias para produzir a
forma diagonal não é finito, isto é, os elementos fora da
diagonal principal não convergem necessariamente para zero.
Na prática, o processo termina quando os elementos fora da
diagonal principal são de pequena magnitude, de modo que não
comprometam a exatidão dos autovalores obtidos (os elementos
da diagonal principal).

Sua simplicidade recomenda a sua exposição
nesse trabalho, junto com a observação de que o aperfeiçoa
mento dessa técnica forneceu métodos numericamente mais es-
táveis na redução de matrizes simétricas para matrizes diag
onais.

Denotando a matriz original por A_0 , descre-
ve-se, a seguir, o processo de Jacobi:

Uma sequência de matrizes A_k , $k = 0, 1,$
e gerada satisfazendo a relação:

$$A_k = R_k A_{k-1} R_k'$$

onde a matriz R_k é determinada como se segue:

Suponha-se que os elementos fora da diagonal principal de A_{k-1} de maior valor absoluto esteja na posição (p,q) (p -ésima linha, q -ésima coluna), então R_k corresponde à rotação no plano (p,q) e o ângulo θ da rotação é selecionado de modo que reduza o elemento em (p,q) de A_{k-1} para zero. Tem-se então desde que $p < q$

$$R_{pp} = R_{qq} = \cos \theta$$

$$R_{pq} = -R_{qp} = \sin \theta$$

e

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j \neq p,q) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A_k difere de A_{k-1} somente na p -ésima linha e na q -ésima coluna. Todas A_k ($k = 0,1, \dots$) são simétricas. Define-se os valores modificados da seguinte maneira:

$$\left. \begin{aligned} a_{i,p}^{(k)} &= a_{i,p}^{(k-1)} \cos \theta + a_{i,q}^{(k-1)} \sin \theta = a_{p,i}^{(k)} \\ a_{i,q}^{(k)} &= -a_{i,p}^{(k-1)} \sin \theta + a_{i,q}^{(k-1)} \cos \theta = a_{q,i}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad i \neq p,q$$

$$a_{p,p}^{(k)} = a_{p,p}^{(k-1)} \cos^2 \theta + 2 a_{p,q}^{(k-1)} \cos \theta \sin \theta + a_{q,q}^{(k-1)} \sin^2 \theta$$

$$a_{q,q}^{(k)} = a_{p,p}^{(k-1)} \sin^2 \theta - 2 a_{p,q}^{(k-1)} \cos \theta \sin \theta + a_{q,q}^{(k-1)} \cos^2 \theta$$

$$a_{p,q}^{(k)} = (a_{q,q}^{(k-1)} - a_{p,p}^{(k-1)}) \cos \theta \sin \theta + a_{p,q}^{(k-1)} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a_{qp}^{(k)}$$

De acordo com WILKINSON (1964), sendo

$$a_{p,q}^{(k)} = 0$$

θ é definido da seguinte maneira:

$$\tan 2\theta = 2 a_{q,p}^{(k-1)} / (a_{p,p}^{(k-1)} - a_{q,q}^{(k-1)})$$

donde

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \left[\frac{2 a_{q,p}^{(k-1)}}{a_{p,p}^{(k-1)} - a_{q,q}^{(k-1)}} \right]$$

se $a_{p,p}^{(k-1)} = a_{q,q}^{(k-1)}$, toma-se $\theta = + \pi/4$, concordando com o sinal de $a_{qp}^{(k-1)}$.

O processo é essencialmente iterativo, uma

vez que um elemento que foi reduzido a zero por uma rotação é, em geral, diferente de zero nas rotações subsequentes.

WILKINSON (1964) prova que se θ é tomado do intervalo $|\theta| \leq \pi/4$, então

$$A_k \longrightarrow \text{diag}(\lambda_i) \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

onde os λ_i são os autovalores de A_0 , e conseqüentemente para todos A_k .

Uma estratégia simples de seleção dos elementos para efetuar-se as rotações no plano, obtém-se tomando-se os elementos da matriz A na ordem: $(1,2)$, $(1,3)$, ..., $(1,n)$; $(2,3)$, $(2,4)$, ..., $(2,n)$..., $(n-1, n)$, e então retorna-se para o elemento $(1,2)$. Tal esquema é denominado método de Jacobi Periódico.

HENRICI (1958) demonstra que o método de Jacobi Periódico realmente converge, se os ângulos de rotação são limitados adequadamente $|\theta| \leq \pi/4$.

A transformação de Jacobi não é um método prático para reduzir matrizes simétricas para matrizes diagonais, por não permitir construir um método eficiente tal que não destrua os zeros já obtidos anteriormente.

De acordo com LEMMA (1982), dada $A_{(k)}$ real e uniforme, existe uma matriz de Helmert $H_{(k)}$, tal que $HAH^T = D$,

onde D é a matriz diagonal que espelha os autovalores de A e H é uma matriz ortogonal cujas linhas contêm os autovetores normalizados de A .

Além disso, a matriz $H_{(k)}$ tem lei de formação extremamente simples, dependente apenas de sua dimensão K .

$$H_{(K)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{K}} & \frac{1}{\sqrt{K}} & \frac{1}{\sqrt{K}} & \frac{1}{\sqrt{K}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{K}} \\ \frac{1}{\sqrt{1.2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \frac{-2}{\sqrt{K}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{(K-1)K}} & \frac{1}{\sqrt{(K-1)K}} & \frac{1}{\sqrt{(K-1)K}} & \dots & \dots & \frac{-K(K-1)}{\sqrt{(K-1)K}} \end{bmatrix}$$

LEMMA (1985), fazendo $H_{(k)} = \begin{bmatrix} h' \\ H^* \end{bmatrix}$, obtém a decomposição espectral de $A_{(k)}$ real e uniforme através de

$$A = \gamma_1 h h' + \gamma_2 H^*{}' H^*$$

onde γ_1 e γ_2 são autovalores de A , γ_2 com multiplicidade $K-1$. De modo análogo, obtém a inversa clássica generalizada de Moore-Penrose para A de posto incompleto, respectivamente por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\gamma_1} h h' + \frac{1}{\gamma_2} H^* H^*$$

$$A^+ = \frac{1}{\gamma_2} H^* H^*$$

Mostra também que uma condição necessária e suficiente para que as soluções de mínimos quadrados ordinários sejam soluções das equações de Aitken é que P e Ω comutem. Aqui P é projetor ortogonal de y em $C(X)$ e Ω é a matriz de variâncias e covariâncias.

LEMMA (1987a) apresenta procedimentos gerais para a manipulação didática de conceitos como Decomposição Espectral, Decomposição por Valores Singulares e define a matriz K^n - uniforme, obtida pelo produto de Kronecker entre n matrizes uniformes, apresentando as regras básicas para a obtenção de seus autovalores.

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ matrizes uniformes e sejam $H_1, H_2, \dots, H_n$ matrizes de Helmert tais que $H_i A_i H_i' = D_i$. Então,

$$\begin{aligned} & (H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n) (A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) (H_1' \otimes H_2' \otimes \dots \otimes H_n') = \\ & = D_1 \otimes D_2 \otimes \dots \otimes D_n = D = \text{matriz diagonal que exhibe os autova-} \end{aligned}$$

lores da matriz $B = K^N A_i$.

Os três últimos trabalhos citados irão alieraçar o estudo da obtenção da D.V.S. da matriz ${}_n X_p$ no modelo linear do presente estudo.

Por outro lado, no modelo linear ${}_n Y_1 = {}_n X_p \cdot \theta_1 + {}_n e_1$, o posto da matriz ${}_n X_p$ é, em geral, nos delineamentos experimentais, menor que o mínimo entre p e n , tendo então ${}_n X_p$ posto coluna incompleto, e conseqüentemente o sistema de equações normais (S.E.N.) $X'X\hat{\theta} = X'y$ sempre consistente, é nesse caso, indeterminado.

Para solução do sistema de equações normais indeterminado, encontra-se, entre outros, o procedimento de inversas generalizadas.

Uma solução do sistema de equações normais através da inversa generalizada pode ser obtida, por exemplo, em RAO (1965), SEARLE (1971), SEBER (1977), SEARLE (1984) e IEMMA (1985) por $\hat{\theta} = (X'X)^+ X'y$, onde $(X'X)^+$ é a inversa generalizada de Moore-Penrose de $X'X$.

De acordo com GRAYBILL (1969), para cada matriz $X'X$, de posto t , existe uma única matriz $(X'X)^+$ e ela é definida por

$$(X'X)^+ = C' (CC')^{-1} (B'B)^{-1} B'$$

onde ${}_p X'X_p = {}_p B_{tt} C_p$ e $r(X'X) = r(B) = r(C)$.

Sem dúvida, a obtenção de $(X'X)^+$ é, em geral, bastante trabalhosa, mormente quando não se pode contar com o uso de pacotes estatísticos para computação. No entanto, a obtenção de B e C pode ser com clareza simplificada através do uso do excelente algoritmo de DWIVEDI (1975).

SEBER (1977) utiliza o procedimento de reduzir o modelo ao de posto coluna completo, onde considera-se apenas as colunas linearmente independentes de X. Chamando-se essa matriz de X_1 , a solução do sistema é dada por $\hat{\theta} = (X_1' X_1)^{-1} X_1' y$.

CARVALHO (1982) considera o modelo linear $y = X\theta + e$ com as condições G-M em e, e toma $X = U_1 S_1 V_1$ a decomposição em valores singulares de X. O valor de θ que minimiza a norma Euclidiana $\|y - X\theta\|$ é dada por

$$\hat{\theta} = V_1 S_1^{-1} U_1' y,$$

onde a obtenção de $V_1 S_1^{-1} U_1'$ é, em geral, feita com auxílio de pacotes estatísticos.

O uso de restrições não estimáveis nas soluções tem sido, segundo RAO (1965), SEARLE (1971) e SEBER (1977), o mais empregado dentre os procedimentos de busca de solução única para o sistema de equações normais.

GOMES (1967) propõe que a restrição $M\theta^0 = \phi$ seja imposta a matriz $X'X$, obtendo-se uma matriz $(X'X - M)$ não singular, facilitando a obtenção de uma forma geral pa-

ra as soluções do S.E.N. restrito.

SEARLE (1971) distingue restrição paramétrica e restrições nas soluções (constraint). As restrições paramétricas são originadas da definição feita sobre os parâmetros. Como exemplo considera os parâmetros como os três ângulos de um triângulo. A restrição natural é que a sua soma seja 180° . Já a restrição nas soluções tem como objetivo determinar solução única para o S.E.N., evitando o uso de inversas generalizadas.

RAO (1965) e CARVALHO (1982) não fazem essa distinção, e determinam o S.E.N. com restrição paramétrica não estimável através da minimização de $\|y - X\theta\|^2$ sujeito à restrição $B'\theta = C$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange, obtendo:

$$\begin{bmatrix} X'X & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ c \end{bmatrix}$$

onde λ é um vetor de multiplicadores de Lagrange.

SEARLE (1984) considera uma inversa generalizada $(X'X)^+ = G$, da qual obtém a inversa generalizada G_r sujeita a restrição não estimável $B'\theta = 0$, sendo que B tem posto coluna completo.

Geralmente utiliza-se desse processo quando se tem acesso fácil a rotinas computacionais como o S.A.S.-G.L.M. dentre outros, obtendo-se um vetor solução (com al-

guns elementos iguais a zero) e G , que são convertidos para o modelo com as restrições impostas; resultando:

$$G_r = G - (I-H) [B' [I-H]]^+ B' G, \text{ onde}$$

$$H = (X'X)^+ X'X \quad \text{e} \quad \theta_r^0 = G_r X'y$$

De acordo com GRAYBILL (1961) e JOHN (1971), outro procedimento utilizado na busca do modelo de posto completo tem sido a reparametrização, a qual consiste em diminuir o número de parâmetros através de transformações lineares, de tal forma que a matriz X obtida seja de rank coluna completo.

CARVALHO (1982) apresenta uma condição para que dois modelos sejam reparametrizações um do outro.

Nos modelos lineares do presente estudo, frequentemente surge o interesse sobre funções lineares dos parâmetros; entretanto, nem todas as funções lineares dos parâmetros são identificáveis dos dados.

De acordo com CARVALHO (1982), no modelo $y = X\theta + d$, a função linear paramétrica $\lambda'\theta$ é identificável se e só se $\lambda' \in R(X)$, onde $R(X)$ denota o espaço gerado pelas linhas de X ; e destaca a diferença entre os conceitos de identificabilidade (no modelo linear sem estrutura de erros) e estimabilidade (no modelo estocástico) da função $\lambda'\theta$.

Segundo RAO (1945), o melhor estimador line-

ar não vizado (b.l.u.e.) da função-estimável $\lambda' \theta$ é dado por $\widehat{\lambda' \theta} = \lambda' \theta^0$ (Teorema de Gauss-Markov), onde θ^0 é qualquer solução das equações normais. Naturalmente $\theta^0 = X^+ y$ e $\hat{\theta} = V_1 S_1^{-1} U_1' y$ são elementos do conjunto de soluções.

LEMMA (1987b), utilizando os conceitos de Decomposição Espectral, de D.V.S. e de Equações Normais Reduzidas, apresenta a lei de formação para as matrizes inversas generalizadas de Moore-Penrose nos delineamentos em Blocos Casualizados, Blocos Incompletos Balanceados, Redes e Quadrados Latinos. Através das leis de formação, verifica que o sistema de E.N.R. $CT = Q$ pode ser resolvido sem a inversão da matriz C . Assim, uma solução geral pode ser obtida no modelo irrestrito por $\theta^0 = mCQ$, onde m é um valor facilmente determinável e constante para cada planejamento.

Apresentaremos a seguir alguns resultados, já conhecidos da literatura atinente a modelos lineares, em face aos objetivos desse estudo.

Definição 1 - Dada a matriz ${}_m A_n$, se existe a matriz ${}_n A_m^+$ que satisfaz às quatro condições a seguir, então ${}_n A_m^+$ é definida como a inversa de Moore-Penrose de A .

i) AA^+ é simétrica

iii) $A^+AA^+ = A^+$

ii) A^+A é simétrica

iv) $AA^+A = A$

Teorema 1 (GRAYBILL, 1969)

Para cada matriz ${}_m A_n$, de posto r , existe uma única matriz ${}_n A_m^+$ e ela é definida por:

$$A^+ = C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1}B', \quad \text{onde}$$

$${}_m A_n = {}_m B_r {}_r C_n \quad \text{e} \quad r(A) = r(B) = r(C) = r$$

Teorema 2 (GRAYBILL, 1969)

Dada as matrizes ${}_m A_n$ e ${}_n M_m$, então:

i) $(A^+)' = (A')^+$

ii) $(A^+)^+ = A$

iii) $(A'A)^+ = A^+A'^+$

iv) $(AA^+)^+ = AA^+$ e $(A^+A)^+ = A^+A$

v) $A^2 = A \Leftrightarrow AA^+ = A^+A$

vi) Se $r(A) = m$, então $A^+ = A'(AA')^{-1}$ e $AA^+ = I$

Se $r(A) = n$, então $A^+ = (A'A)^{-1}A'$ e $A^+A = I$

vii) Se $\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = A^+$

viii) Se A é idempotente, então $A^+ = A$

ix) Se $r(A) = r(M) = n$, então $(A \ M)^+ = M^+ A^+$

x) $r(A^+) = r(AA^+) = r(A^+A) = r(AA^+A) = r(A^+AA^+)$

Teorema 3 (GRAYBILL, 1969)

Seja ${}_m A_n$ uma matriz que transforma o vetor $y \in V_n$ no vetor $\hat{y} \in C(A)$, isto é, $\hat{y} = {}_m A_n \theta_1$, então existe uma matriz simétrica e idempotente

$$P = AA^+$$

tal que $y = Py$. Nesse caso, P é projetor ortogonal do vetor y sobre o espaço coluna de A .

Teorema 4 (GRAYBILL, 1961)

O vetor θ^0 é solução de mínimos quadrados de $X\theta - y = e(\theta)$, se e somente se o vetor $X\theta^0$ é projeção ortogonal de y no espaço coluna de X . Nesse caso, $\hat{y} = X\theta^0 = P_y$ é a aproximação de mínimos quadrados para y .

Os resultados enunciados a seguir, podem ser encontrados em SEARLE (1971, cap. 5), dentre outros.

Sejam:

${}_n y_1$ um vetor de variáveis aleatórias com distribuição normal tal que $y \sim N(\mu, \Omega \sigma^2)$;

A_n uma matriz real e simétrica;

Ω_n uma matriz real, simétrica e positiva definida;

B_k uma matriz real;

C_n uma matriz real e simétrica.

Teorema 5 (Searle, 1971)

i) $E [y' Ay] = \text{Tr} [A \Omega] \sigma^2 + \mu' A \mu$

ii) $\frac{y' Ay}{\sigma^2} \sim \chi^2 \left[r(A); \frac{1}{2\sigma^2} \mu' A \mu \right]$ se e só se $A \Omega$ é idempotente

iii) $y' Ay$ e $y' Cy$ são independentemente distribuídas se e só se $A \Omega C = \emptyset$ ou $C \Omega A = \emptyset$ (simétricas)

iv) $y' Ay$ e $B'y$ são independentemente distribuídas se e só se $B \Omega A = \emptyset$.

3. MÉTODO

3.1. INTRODUÇÃO

Para a compreensão de resultados oriundos do uso da Decomposição por Valores Singulares, é necessário abordar alguns aspectos básicos da teoria da Decomposição pelo Valor Singular de uma matriz X . Nesse contexto, a propriedade sobre a qual discorre-se a seguir é fundamental para os propósitos do presente estudo, e a sua prova segue as diretrizes apresentadas, com riquezas de detalhes, em CARVALHO (1982).

3.2. A DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ X POR VALORES SINGULARES

Segundo Eckart e Young (1936), citado por CARVALHO (1982), dada uma matriz ${}_n X_p$ de rank $r \leq \min \{n, p\}$ com valores singulares $s_1 \geq s_2 \geq \dots s_r$, existem matrizes ortogonais ${}_n U_n$ e ${}_p V_p$ tais que

$${}_n X_p = {}_n U_n {}_n S_n {}_p V_p'$$

Eckart, C. e Young, G. The approximation of a matrix by another of lower rank. Psychometrika, (1): 211-218, 1936.

onde

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & & & & & & \\ & s_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & s_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Demonstração (por construção)

- i) Os vetores $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n$, as n colunas de U , são escolhidas como um conjunto de autovetores ortogonais normalizados de ${}_nXX'$, correspondendo aos autovalores $s_1^2, s_2^2, \dots, s_r^2, 0, 0, \dots, 0$ de XX' ; toma-se então

$$U = [U_1 \mid U_2] ; \text{ onde}$$

$U_1 = [u_1, u_2, \dots, u_r]$ são os autovetores normalizados correspondentes aos autovalores não nulos de XX' ; $s_1^2, s_2^2, \dots, s_r^2$; e

$U_2 = [u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n]$ são os autovetores correspondentes aos autovalores nulos de XX' ; $s_{r+1}^2, s_{r+2}^2, \dots, s_n^2$.

Seja U_1 um conjunto ortonormal de autovetores de XX' , correspondente aos autovalores não nulos.

$$XX'u_i = s_i^2 u_i; \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

CARVALHO (1982) define v_i ; $i = 1, 2, \dots, r$ por

$$v_i = \frac{1}{s_i} X'u_i$$

tendo-se então:

$$v_i' v_j = \frac{1}{s_i s_j} (X'u_i)' (X'u_j)$$

$$= \frac{1}{s_i s_j} u_i' XX' u_j;$$

$$= \frac{1}{s_i s_j} u_i' s_j^2 u_j$$

$$v_i' v_j = \frac{s_j}{s_i} u_i' u_j; \quad \text{mas os } u_i \text{ são ortogonais, então:}$$

$$v_i' v_j = \frac{s_i}{s_j} \delta_{ij} = \delta_{ij}, \quad \text{onde } \delta_{ij} \text{ refere-se ao } \delta \text{ de}$$

Kronecker; portanto v_i , $1 \leq i \leq r$ são ortogonais.

$\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ constitue uma base ortonormal para $C(X)$, $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ onde $v_i = (1/s_i) X'u_i$, constitue uma base ortonormal para $C(X')$, $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ constitue uma base ortonormal para $C^1(X)$ e $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_p\}$ constitue uma base ortonormal para $C^1(X')$.

Tem-se então:

$$U_1 = (u_1, u_2, \dots, u_r) \quad ; \quad U_2 = (u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n)$$

$$U = [U_1 \quad ; \quad U_2]$$

$$V_1 = (v_1, v_2, \dots, v_r) \quad ; \quad V_2 = (v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_p)$$

$$V = [V_1 \quad ; \quad V_2]$$

tem-se então, por construção:

$$a) \quad U = [U_1 \quad ; \quad U_2] \quad e \quad V = [V_1 \quad ; \quad V_2] \quad \text{são ortogonais}$$

$$b) \quad XV_2 = \phi \quad e \quad X'U_2 = \phi$$

Seja $S = U'XV = s_{ij}$, então

$$S = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V_1 \quad ; \quad V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' XV_1 & U_1' XV_2 \\ U_2' XV_1 & U_2' XV_2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} U_1' & XV_1 & \phi \\ \phi & \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & \phi \\ \phi & \phi \end{bmatrix}$$

Dessa forma:

$$a) \text{ se } i < r \quad \vee \quad j > r \Rightarrow s_{ij} = \phi$$

$$b) \text{ se } i < r \quad \wedge \quad j < r \Rightarrow s_{ij} = u_i' X v_j, \text{ mas } v_j = \frac{1}{s_j} X' u_j$$

portanto,

$$s_{ij} = u_i' X X' \frac{1}{s_j} u_j; \text{ mas } X X' u_j = s_j^2 u_j$$

$$s_{ij} = u_i' \frac{s_j^2}{s_j} u_j = s_j u_i' u_j$$

$$s_{ij} = s_j \delta_{ij}, \text{ i\acute{e}:}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

logo:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & & & & \phi \\ & s_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & s_r & \\ & & & & \phi \\ \phi & & & & & \phi \end{bmatrix}$$

o que completa a demonstração.

A D.V.S. fornece imediatamente as matrizes dos projetores ortogonais em $C(X)$ e $C(X')$, bem como em seus complementos ortogonais

$$P_X = U_1 U_1'$$

$$P_{X'} = V_1 V_1'$$

$$P_{X^\perp} = I - U_1 U_1'$$

$$P_{X'^\perp} = I - V_1 V_1'$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentam-se as propostas originais desta tese para o estudo dos modelos lineares de Gauss-Markov, no tocante às equações normais, estimação e testes estatísticos, e que formam a base para o estudo dos modelos lineares de G.M. sob o prisma dessa técnica.

4.2. O MODELO LINEAR DE GAUSS-MARKOV

4.2.1. CARACTERIZAÇÃO

O modelo linear

$$y = X\theta + e \quad [4.1]$$

onde

y é um vetor aleatório relativo às observações,

X é a matriz de planejamento,

θ é um vetor de parâmetros,

e_1 é um vetor aleatório, que tem distribuição normal com média 0 e variância $1\sigma^2$, é conhecido como modelo linear de Gauss-Markov.

Como y_{ij} do modelo [4.1.] são funções lineares de e_{ij} , das pressuposições sobre os componentes do modelo, tem-se que:

$$E(y) = X\theta \quad [4.2]$$

$$V(y) = 1\sigma^2 \quad [4.3]$$

$$y \sim N(X\theta, 1\sigma^2) \quad [4.4]$$

4.2.2. SOLUÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS

Estaremos aqui buscando vetores θ^0 , tais que a distância euclidiana $d(y, X\theta^0)$ seja mínima.

Formando-se a função

$$Z(\theta) = ||y - X\theta||^2$$

que nos cumpre minimizar, tem-se então que

$$Z(\theta) = y'y - 2\theta'X'y + \theta'X'X\theta$$

Derivando-se em relação a θ , resulta

$$\frac{dZ}{d\theta} = -2X'y + 2X'X\theta$$

Igualando-se a zero obtém-se o sistema de equações normais:

$$X'X\theta^0 = X'y. \quad [4.5]$$

Substituindo-se X pela sua D.V.S., o sistema de equações normais [4.5] será dado por

$$P V_1 T T' S_1^2 T T' V_1' P P \theta^0_1 = V_1 S_1 U_1' y \quad [4.6]$$

$$X = U_1 S_1 V_1' \quad e$$

$$X'X = V_1 S_1^2 V_1'.$$

Obs.: $T = \text{posto}(X)$

O sistema de equações [4.6] é consistente.

PROVA:

De acordo com GRAYBILL (1969), o sistema $Ax = g$ é consistente se e só se $AA^+g = g$.

Tomando-se $A = V_1 S_1^2 V_1' = X'X$ e $g = V_1 S_1 U_1' y = X'y$ tem-se que $\text{rank}[A] = \text{rank}[V_1] = \text{rank}[S_1^2] = \text{rank}[V_1'] = T$, portanto, tem-se que:

$$a) A^+ = [V_1 S_1^2 V_1']^+ = V_1'^+ S_1'^{-2} V_1^+ = V_1'^+ S_1'^{-2} V_1^+$$

$$b) V_1^+ = [V_1' V_1]^{-1} V_1' \quad ; \text{ mas } V_1' V_1 = I_{(T)} \Rightarrow V_1^+ = V_1'$$

$$c) U_1^+ = U_1' [U_1' U_1]^{-1} \quad ; \text{ mas } U_1' U_1 = I_{(T)} \Rightarrow U_1^+ = U_1'$$

donde segue-se que

$$AA^+g = [V_1 S_1^2 V_1'] [V_1'^+ S_1'^{-2} V_1^+] [V_1 S_1 U_1' y]$$

$$= V_1 S_1^2 V_1' V_1'^+ S_1'^{-2} V_1^+ V_1 S_1 U_1' y$$

$$= V_1 V_1^+ V_1 S_1 U_1' y$$

$$= V_1 S_1 U_1' y$$

$$= g$$

$\therefore$ o sistema [4.6] é consistente.

Proposição 1

O vetor $\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' y$ é solução do sistema de equações [4.6].

Prova:

Sejam $A_p = V_1 S_1^2 V_1'$ e $A^+ = V_1'^+ S_1'^{-2} V_1^+$. Pré-multiplicando [4.6] por A^+ tem-se

$$V_1^+ S_1^{-2} V_1^+ V_1 S_1^2 V_1^+ \theta^0 = V_1^+ S_1^{-2} V_1^+ V_1 S_1 U_1^+ y ; \text{ mas } V_1^+ = V_1, \text{ então}$$

$$V_1 V_1^+ \theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1^+ y , \text{ ou seja}$$

$$V_1 V_1^+ \theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1^+ y \quad [4.7]$$

Pré-multiplicando [4.7] por V_1^+

$$V_1^+ V_1 V_1^+ \theta^0 = V_1^+ V_1 S_1^{-1} U_1^+ y$$

$$V_1^+ \theta^0 = V_1^+ V_1 S_1^{-1} U_1^+ y \Rightarrow \theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1^+ y$$

portanto, $\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1^+ y$ é uma solução para o sistema de equações [4.6.].

Proposição 2

$V_1 S_1^{-1} U_1^+$ é a inversa generalizada de Moore-Penrose de ${}_n X_p$.

Prova

A matriz ${}_p X_n^+ = V_1 S_1^{-1} U_1^+$ satisfaz as quatro condições da Definição da inversa de Moore-Penrose. De fato:

$$a_1) XX^+ = U_1 S_1 V_1^+ V_1 S_1^{-1} U_1^+ = U_1 U_1^+ \Rightarrow XX^+ \text{ é simétrica}$$

$$a_2) X^+X = V_1 S_1^{-1} U_1^+ U_1 S_1 V_1^+ = V_1 V_1^+ \Rightarrow X^+X \text{ é simétrica}$$

$$a_3) X^+ X X^+ = (X^+ X) X^+ = V_1 V_1' V_1 S_1^{-1} U_1' = V_1 S_1^{-1} U_1' = X^+$$

$$a_4) X X^+ X = (X X^+) X = U_1 U_1' U_1 S_1 V_1' = U_1 S_1 V_1' = X$$

Definição (LEMMA, 1987 a): Se θ^0 é qualquer solução das E.N., $X'X\theta = X'y$, é portanto solução de mínimos quadrados para o sistema inconsistente $y = X\theta$, então o vetor $\hat{y} = X\theta^0$ é definido como a aproximação de mínimos quadrados para y .

De acordo com [4.6], substituindo-se X por $U_1 S_1 V_1'$ nas E.N., tem-se:

$$V_1 S_1^2 V_1' \theta^0 = V_1 S_1 U_1' y$$

De acordo com a proposição 1,

$$\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' y$$

é uma solução para [4.6.] e por conseguinte,

$$\hat{y} = X\theta^0 = U_1 S_1 V_1' V_1 S_1^{-1} U_1' y = U_1 U_1' y = P_{U_1} y \quad [4.8]$$

é uma aproximação de mínimos quadrados para y .

Fato: A melhor solução aproximada de $Ax = g$ inconsistente é dada por $x^* = A^+ g$.

De acordo com a proposição 2, $V_1 S_1^{-1} U_1' = X^+$, portanto, $\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' y = X^+ y$. Consequentemente,

$\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' y$ é a melhor solução aproximada (B.A.S.) para $y = X\theta$.

Portanto,

$$\hat{y} = X \theta^0 = X X^+ y = U_1 S_1 V_1' V_1 S_1^{-1} U_1' y = U_1 U_1' y = P_{U_1} y$$

ou seja

$$\hat{y} = P_{U_1} y$$

é a aproximação de mínimos quadrados para o vetor y , das observações.

4.2.3. MÉDIA DE θ^0

De $\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' y$, obtém-se que

$$E(\theta^0) = E[V_1 S_1^{-1} U_1' y]$$

$$= V_1 S_1^{-1} U_1' E(y) \quad ; \quad \text{mas } E(y) = X\theta$$

$$= U_1 S_1 V_1' \theta.$$

Portanto

$$E(\theta^0) = V_1 S_1^{-1} U_1' U_1 S_1 V_1' \theta$$

$$= V_1 V_1' \theta = P_{V_1} \theta$$

Fato: Nota-se que θ^0 é viesado para as funções de θ que estão em $P_{V_1} \theta$.

4.2.4. UM ESTIMADOR NÃO TENDENCIOSO PARA σ^2

Proposição 3:

No modelo linear de Gauss-Markov,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - T} y' P_{U_2} y$$

é um estimador não tendencioso para σ^2 .

Prova: $P_{U_2} = (I - P_{U_1})$ é uma matriz real, simétrica e idempotente, e $y \sim N(X\theta, I\sigma^2)$. Logo,

$$\begin{aligned} E(y' P_{U_2} y) &= \text{Tr}(P_{U_2}) I \sigma^2 + \theta' X' P_{U_2} X \theta \\ &= \text{Tr}(P_{U_2}) I \sigma^2 + \theta' V_1 S_1 U_1' P_{U_2} U_1 S_1 V_1' \theta \\ &= \text{Tr}(P_{U_2}) I \sigma^2 + \theta' V_1 S_1 U_1' (I - P_{U_1}) U_1 S_1 V_1' \theta \\ &= (n - T) \sigma^2 + \theta' V_1 S_1^2 V_1' \theta - \theta' V_1 S_1 U_1' P_{U_1} U_1 S_1 V_1' \theta \\ &= (n - T) \sigma^2 + \theta' V_1 S_1^2 V_1' \theta - \theta' V_1 S_1^2 V_1' \theta \\ &= (n - T) \sigma^2 \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\sigma}^2] &= E \left[\frac{1}{n-T} y' P_{U_2} y \right] \\
 &= \frac{1}{n-T} E(y' P_{U_2} y) \\
 &= \frac{1}{n-T} (n-T) \sigma^2 \\
 &= \sigma^2
 \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

4.2.5. FUNÇÕES ESTIMÁVEIS

Proposição 4. A função $\lambda' \theta$ é estimável no modelo linear de Gauss-Markov se e somente se $\lambda' V_1 V_1' = \lambda'$.

Prova: De acordo com Rao (1945) a função paramétrica $\lambda' \theta$ é dita estimável no modelo de Gauss-Markov se e só se existe uma combinação linear das observações, $a'y$, tal que

$$E(a'y) = \lambda' \theta$$

($\Rightarrow$) $\lambda' \theta$ é estimável

então existe uma função linear das observações, $a'y$, tal que

$$E(a'y) = \lambda' \theta \quad (\text{Rao, 1945})$$

ou seja

$$E(a'y) = a'E(y) = a'X\theta = \lambda' \theta.$$

Substituindo X por sua D.V.S. $U_1 S_1 V_1'$, tem-se para a expressão anterior:

$$a'X\theta = a'U_1 S_1 V_1' \theta = \lambda' \theta, \text{ donde, por serem escalares, conclui-se}$$

$$a'U_1 S_1 V_1' = \lambda', \forall \theta. \quad (1.a)$$

Pós-multiplicando a expressão obtida por $V_1 V_1'$, tem-se: $a'U_1 S_1 V_1' V_1 V_1' = \lambda' V_1 V_1'$; simplificando o primeiro membro,

$$a'U_1 S_1 V_1' = \lambda' V_1 V_1'. \quad (1.b)$$

De (1.a) e (1.b) tem-se então que

$$\lambda' = \lambda' V_1 V_1'$$

$$(\Leftarrow) \quad \lambda' = \lambda' V_1 V_1'.$$

Pós-multiplicando por θ ,

$$\lambda' \theta = \lambda' V_1 V_1' \theta; \quad \text{De 4.2.3. segue-se:}$$

$\lambda' \theta = \lambda' E(\theta^0) = \lambda' E(V_1 S_1^{-1} U_1' y) = \lambda' V_1 S_1^{-1} U_1' E(y)$. Tomando-se

$$a' = \lambda' V_1 S_1^{-1} U_1' , \text{ tem-se}$$

$\lambda' \theta = \lambda' V_1 S_1^{-1} U_1' E(y) = a' E(y) = E(a' y)$. Portanto, existe uma função linear das observações, $a' y$, tal que

$$E(a' y) = \lambda' \theta.$$

Então, de acordo com Rao (1945) $\lambda' \theta$ é estimável.

4.2.6. OBTENÇÃO DO B.L.U.E.

De acordo com o teorema de Gauss-Markov, o B.L.U.E. (Best Linear Unbiased Estimator) de $\lambda' \theta$ estimável é dado por

$$\widehat{\lambda' \theta} = \lambda' \theta^0$$

onde θ^0 é qualquer solução do sistema de equações normais do modelo linear de Gauss-Markov

$$\text{para } \theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' y,$$

verifica-se então que;

$$\begin{aligned}
 \text{i) } E[\lambda' \theta^0] &= E[\lambda' V_1 S_1^{-1} U_1' y] \\
 &= \lambda' V_1 S_1^{-1} U_1' E(y) \\
 &= \lambda' V_1 S_1^{-1} U_1' U_1 S_1 V_1' \theta \\
 &= \lambda' V_1 V_1' \theta ; \text{ de acordo com a proposição 4,} \\
 &\quad \lambda' V_1 V_1' = \lambda' \quad [4.9]
 \end{aligned}$$

$$\therefore E[\lambda' \theta^0] = \lambda' \theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } V[\lambda' \theta^0] &= \lambda' V[\theta^0] \lambda \\
 &= \lambda' V[V_1 S_1^{-1} U_1' y] \lambda \\
 &= \lambda' V_1 S_1^{-1} U_1' V(y) U_1 S_1 V_1' \lambda ; \text{ mas } V(y) = I \sigma^2 \\
 \therefore V[\lambda' \theta^0] &= \lambda' V_1 S_1^{-1} U_1' I \sigma^2 U_1 S_1 V_1' \lambda \\
 &= \lambda' V_1 S_1^{-2} V_1' \lambda \sigma^2 \quad [4.10]
 \end{aligned}$$

4.3. SISTEMA DE EQUAÇÕES NORMAIS REDUZIDAS

4.3.1. O MODELO LINEAR

Tomando-se a partição

$$X = [X_1 \quad ; \quad X_2]$$

tem-se o modelo linear

$$y = [X_1 \quad X_2] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + e$$

ou seja

$$y = X_1\theta_1 + X_2\theta_2 + e.$$

As equações normais, convenientemente parti-
das, resultam

$$X_1'X_1\theta_1 + X_1'X_2\theta_2 = X_1'y \quad [4.11]$$

$$X_2'X_1\theta_1 + X_2'X_2\theta_2 = X_2'y \quad [4.12]$$

pré-multiplicando [4.11] por $X_2'X_1^+$, vem:

$$X_2'X_1^+X_1'X_1\theta_1 + X_2'X_1^+X_1'X_2\theta_2 = X_2'X_1^+X_1'y$$

de acordo com as propriedades da inversa generalizada de Moo-
re-Penrose, tem-se que;

$$X_2'X_1X_1^+X_1\theta_1 + X_2'X_1X_1^+X_2\theta_2 = X_2'X_1X_1^+y,$$

$$X_2'X_1\theta_1 + X_2'X_1X_1^+X_2\theta_2 = X_2'X_1X_1^+y,$$

de acordo com o teorema 3, $X_1X_1^+ = P_{X_1}$; portanto

$$X_2'X_1\theta_1 + X_2'P_{X_1}X_2\theta_2 = X_2'P_{X_1}y, \quad [4.13]$$

Subtraindo [4.13.] de [4.12.],

$$X_2' X_1 \theta_1 - X_2' X_1 \theta_1 + X_2' X_2 \theta_2 - X_2' P_{X_1} X_2 \theta_2 = X_2' y - X_2' P_{X_1} y$$

que resultará:

$$X_2' (I - P_{X_1}) X_2 \theta_2 = X_2' (I - P_{X_1}) y \quad [4.14]$$

que é o sistema de equações normais reduzidas, eliminando o efeito do parâmetro θ_1 .

De acordo com IEMMA (1985), o sistema [4.14] é consistente, visto que tem a mesma estrutura de [4.2].

Definindo-se:

$U_{1i} \ (i = 1,2) \ [V_{1i} \ (i = 1,2)]$ a matriz formada pelos autovetores ortonormais de $X_i X_i'$ ($i = 1,2$) [$X_i' X_i$ ($i = 1,2$)] correspondentes aos autovalores não nulos de $X_i X_i'$ ($i = 1,2$) [$X_i' X_i$ ($i = 1,2$)]

$S_{1i} \ (i = 1,2)$ a matriz formada pelos autovalores não nulos da matriz $X_i X_i'$ ($i = 1,2$) e $X_i' X_i$ ($i = 1,2$), respectivamente.

da matriz $X_2 X_2' (X_2' X_2)$, respectivamente);

tem-se então, sem perda de generalidade, que:

$$a) X_1 = U_{11} S_{11} V_{11}'$$

$$b) X_1^+ = V_{11} S_{11}^{-1} U_{11}'$$

$$c) P_{X_1} = X_1 X_1^+ = U_{11} U_{11}' = P_{U_{11}}$$

$$d) X_2 = U_{12} S_{12} V_{12}'$$

$$e) X_2^+ = V_{12} S_{12}^{-1} U_{12}'$$

$$f) P_{X_2} = X_2^+ X_2 = U_{12} U_{12}' = P_{U_{12}}$$

pelo enfoque D.V.S., tem-se por [4.14]

$$V_{12} S_{12} U_{12}' (I - P_{U_{11}}) U_{12} S_{12} V_{12}' \theta_2 = V_{12} S_{12} U_{12}' (I - P_{U_{11}}) y \quad [4.15]$$

tomando-se $A = V_{12} S_{12} U_{12}'$, teremos $A^+ = U_{12}^+ S_{12}^{-1} V_{12}^+$

De acordo com a teoria das inversas generalizadas de Moore-Penrose, obtêm-se que:

$$V_{12}^+ = V_{12}' \quad (V_{12}^{++} = V_{12}) \quad [4.16]$$

$$U_{12}^+ = U_{12}' \quad (U_{12}^{++} = U_{12}) \quad [4.17]$$

pré-multiplicando ambos os lados de [4.15] por A^+ tem-se

$$U_{12}'^+ S_{12}^{-1} V_{12}^+ V_{12} S_{12} U_{12}' (I - P_{U_{11}}) X_2 \theta_2 = U_{12}'^+ S_{12}^{-1} V_{12}^+ V_{12} S_{12} U_{12}' (I - P_{U_{11}}) y$$

$$U_{12}'^+ U_{12}' (I - P_{U_{11}}) X_2 \theta_2 = U_{12}'^+ U_{12}' (I - P_{U_{11}}) y;$$

por [4.17]

$$U_{12} U_{12}' (I - P_{U_{11}}) X_2 \theta_2 = U_{12} U_{12}' (I - P_{U_{11}}) y \quad [4.18]$$

$$\text{mas } (I - P_{U_{11}}) = P_{X_1}^\perp = U_{21} U_{21}' = P_{U_{21}},$$

onde U_{21} é a matriz formada pelos autovetores ortonormais correspondentes aos autovalores nulos de $X_1 X_1'$; tem-se então para [4.18]

$$P_{U_{12}} P_{U_{21}} X_2 \theta_2 = P_{U_{12}} P_{U_{21}} y \quad [4.19]$$

é o sistema de equações normais reduzidas, eliminando o efeito do parâmetro θ_1 , substituindo-se X_1 pela sua D.V.S.

Nas expressões [4.18] e [4.19] optou-se em não substituir X_2 pela sua D.V.S. para que as expressões ficassem reduzidas às formas mais simples.

De maneira análoga,

$$P_{U_{21}} P_{U_{12}} X_1 \theta_1 = P_{U_{21}} P_{U_{12}} y$$

é o sistema de equações normais reduzidas eliminando o efeito do parâmetro θ_2 e substituindo X_1 e X_2 pelas respectivas D.V.S.

4.3.2. ESTIMABILIDADE DE UM SUBCONJUNTO DE PARÂMETROS

Vejamos que condições deveria satisfazer λ_2 para que $\lambda'_2 \theta_2$, $\theta_2 \in \theta$, seja estimável no modelo

$$y = X_1 \theta_1 + X_2 \theta_2 + e.$$

Seja, sem perda de generalidade

$$[\phi' ; \lambda'_2] \theta = \lambda'_2 \theta$$

isto é;

$$\lambda'_2 \theta_2 = \lambda'_2 \theta = [\phi' \phi \dots \phi' \lambda'_{21} \lambda'_{22} \dots \lambda'_{2(n-p)}] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\phi' ; \lambda'_2] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad [4.20]$$

nessas condições, de acordo com a proposição 4,

$$\lambda'_2 \theta_2 \text{ é estimável se } [\phi' ; \lambda'_2] V_1 V_1' = [\phi' ; \lambda'_2]$$

4.3.3. ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Suponha-se, de início, que o modelo esteja par-

ticionado.

$$y = X_1 \theta_1 + X_2 \theta_2 + e$$

$$\text{Seja } X = (X_1 \mid X_2) ; \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

tomando-se como base o submodelo

$$y = X_1 \theta_1 + e$$

tem-se que

$$\text{i) Existe } P_{U_{11}} = U_{11} U_{11}' \quad \text{tal que } X_1 \theta_1^0 = P_{U_{11}} y$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \| y - X_1 \theta_1^0 \|^2 &= y'y - y'X_1 \theta_1^0 \\ &= y'y - y'P_{U_{11}} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore y'y &= y'P_{U_{11}} y + \| y - X_1 \theta_1^0 \|^2 \\ &= y'P_{U_{11}} y + y'y - y'P_{U_{11}} y \\ &= y'P_{U_{11}} y + y'(I - P_{U_{11}})y \end{aligned}$$

onde $y'P_{U_{11}} y$ é a soma de quadrados devido a θ_1

$y'(I - P_{U_{11}})y$ é a soma de quadrados devido ao erro de a
justamento através do submodelo adotado.

Tomando-se o modelo completo, tem-se agora que:

$$\text{iii) } P_{U_1} = U_1 U_1'$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } ||y - x\theta^0||^2 &= y'y - y'x\theta^0 \\ &= y'y - y'P_{U_1}y \end{aligned}$$

$$\therefore y'y = y'P_{U_1}y + y'(I - P_{U_1})y ;$$

da invariância de $y'y$ tem-se:

$$y'P_{U_1}y + y'(I - P_{U_1})y = y'P_{U_{11}}y + y'(I - P_{U_{11}})y$$

$$y'P_{U_1}y + y'y - y'P_{U_1}y = y'P_{U_{11}}y + y'y - y'P_{U_{11}}y$$

Reagrupando tem-se

$$y'y = y'P_{U_{11}}y + y'P_{U_1}y - y'P_{U_{11}}y - y'P_{U_1}y + y'y$$

$$\therefore y'y = y'P_{U_{11}}y + y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y + y'(I - P_{U_1})y$$

é comum também a forma

$$y'(I - P_{U_1})y = y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y + y'(I - P_{U_1})y.$$

De acordo com GRAYBILL (1969), se A_n e B_n são matrizes simétricas e idempotentes, então $A - B$ é uma matriz simétrica e idempotente se e somente se

$$B(A - B) = \phi$$

Fato: P_{U_1} e $P_{U_{11}}$ são matrizes simétricas e idempotentes.

De fato:

$$P_{U_1}P_{U_1} = U_1U_1'U_1U_1' = U_1U_1' = P_{U_1}$$

$$P_{U_{11}} P_{U_{11}} = U_{11} U'_{11} U_{11} U'_{11} = U_{11} U'_{11} = P_{U_{11}}$$

$$P_{U_1} = U_1 U'_1 = (U_1 U'_1)' = P'_{U_1}$$

$$P_{U_{11}} = U_{11} U'_{11} = (U_{11} U'_{11})' = P'_{U_{11}}$$

Obs.:

$$\begin{aligned} P_{U_{11}} (P_{U_1} - P_{U_{11}}) &= P_{U_{11}} P_{U_1} - P_{U_{11}} P_{U_{11}} \\ &= P_{U_{11}} P_{U_1} - P_{U_{11}}; \text{ visto que} \end{aligned}$$

P_{U_1} é o projetor ortogonal em $C(X)$ e $P_{U_{11}}$ é o projetor ortogonal em $C(X_1)$ e $X_1 \subset X$, tem-se que:

$$\begin{aligned} P_{U_{11}} (P_{U_1} - P_{U_{11}}) &= P_{U_{11}} - P_{U_{11}} \\ &= \phi \end{aligned}$$

$\therefore (P_{U_1} - P_{U_{11}})$ é simétrica e idempotente.

Pode-se então construir o quadro da Análise de Variância.

Quadro 1 - Análise de Variância

CV	G.L.	SQ
Devido a θ_1	$r(U_{11})$	$y'P_{U_{11}}y$
Devido a θ_2/θ_1	$r(U_1) - r(U_{11})$	$y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y$
Resíduo	$n - r(U_1)$	$y'(I - P_{U_1})y$
Total	n	$y'y$

4.4. DISTRIBUIÇÃO DAS FORMAS QUADRÁTICAS

4.4.1. INTRODUÇÃO

Uma função do tipo

$$Q = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j, \text{ onde}$$

a_{ij} são constantes reais, é definida como uma forma quadrática de n variáveis.

Sob a forma matricial, uma forma quadrática é escrita por

$Q = x'Ax$, onde

x_1 é um vetor de variáveis

A_n é a matriz ou núcleo da forma quadrática.

Estudam-se a seguir as distribuições das formas quadráticas de interesse, sob as condições de Gauss-Markov.

4.4.2. A DISTRIBUIÇÃO DE $y'P_{U_1}y$

Sendo a matriz P_{U_1} real, simétrica e idempotente então, de acordo com o Teorema 5, item (i) e (ii)- capítulo 2, tem-se que:

$$E(y'P_{U_1}y) = \text{Tr}(P_{U_1})\sigma^2 + \theta'V_1S_1^2V_1'\theta \quad e$$

$$\frac{y'P_{U_1}y}{\sigma^2} \sim \chi^2 \left[r(P_{U_1}); \frac{1}{2\sigma^2} \theta'V_1S_1^2V_1'\theta \right], \text{ respectivamente.}$$

4.4.3. A DISTRIBUIÇÃO DE $y'(I - P_{U_1})y$

$$\begin{aligned}
 E(y'(I - P_{U_1})y) &= \text{tr}(I - P_{U_1})\sigma^2 + \theta'V_1S_1U_1'(I - P_{U_1})U_1S_1V_1'\theta \\
 &= (n-T)\sigma^2 + \theta'V_1S_1^2V_1'\theta - \theta'V_1S_1U_1'P_{U_1}U_1S_1V_1'\theta \\
 &= (n-T)\sigma^2 + \theta'V_1S_1V_1'\theta - \theta'V_1S_1V_1'\theta \\
 &= (n-T)\sigma^2 ;
 \end{aligned}$$

então:

$$\frac{y'(I - P_{U_1})y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{[n-T]} \quad [4.21]$$

4.4.4. A DISTRIBUIÇÃO DE $y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y$

Segundo GRAYBILL (1969), se a matriz $(A - B)$ é simétrica e idempotente, então $\text{tr}(A - B) = \text{tr}(A) - \text{tr}(B)$.

Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
 E(y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y) &= \text{tr}(P_{U_1} - P_{U_{11}})\sigma^2 + \theta'V_1S_1U_1'(P_{U_1} - P_{U_{11}})U_1S_1V_1'\theta \\
 &= [\text{tr}(P_{U_1}) - \text{tr}(P_{U_{11}})]\sigma^2 + \theta'V_1S_1^2V_1'\theta - \theta'V_1S_1U_1'P_{U_{11}}U_1S_1V_1'\theta \\
 &= [T - \text{tr}(P_{U_{11}})]\sigma^2 + \theta'V_1S_1^2V_1'\theta - \theta'V_1S_1U_1'P_{U_{11}}U_1S_1V_1'\theta
 \end{aligned}$$

então

$$\frac{y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y}{\sigma^2} \sim \chi^2 \left[T - \text{tr}(P_{U_{11}}); \frac{1}{2\sigma^2} [\theta' V_1 S_1^2 V_1' \theta - \theta' V_1 S_1 U_1' P_{U_{11}} U_1 S_1 V_1' \theta] \right] \quad [4.22]$$

4.4.5. A DISTRIBUIÇÃO DE $y'(I - P_{U_{11}})y$

$$\begin{aligned} E[y'(I - P_{U_{11}})y] &= \text{tr}(I - P_{U_{11}})\sigma^2 + \theta' V_1 S_1 U_1' (I - P_{U_{11}}) U_1 S_1 V_1' \theta \\ &= [n - \text{tr}(P_{U_{11}})]\sigma^2 + \theta' V_1 S_1^2 V_1' \theta - \theta' V_1 S_1 U_1' P_{U_{11}} U_1 S_1 V_1' \theta \end{aligned}$$

e

$$\frac{y'(I - P_{U_{11}})y}{\sigma^2} \sim \chi^2 \left[n - \text{tr}(P_{U_{11}}); \frac{1}{2\sigma^2} (\theta' V_1 S_1^2 V_1' \theta - \theta' V_1 S_1 U_1' P_{U_{11}} U_1 S_1 V_1' \theta) \right] \quad [4.23]$$

4.5. INTERVALOS E REGIÕES DE CONFIANÇA

No modelo de Gauss-Markov

$$y = X\theta + e,$$

onde $E(e) = \phi$ e

$$E(e'e) = I\sigma^2,$$

$\hat{\lambda}'\theta = \lambda'\theta^0 = \lambda'V_1S_1^{-1}U_1'y$ é uma combinação linear de variáveis normais, sendo portanto normal.

4.5.1. INTERVALOS DE CONFIANÇA

De acordo com [4.9] e [4.10], tem-se que

$$\hat{\lambda}'\theta \sim N(\lambda'\theta; \lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda\sigma^2).$$

Definindo-se:

$$Z = \frac{\hat{\lambda}'\theta - \lambda'\theta}{\sigma[\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda]^{1/2}}; \text{ tem-se que}$$

$$E(Z) = \frac{1}{\sigma[\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda]^{1/2}} E[\hat{\lambda}'\theta - \lambda'\theta] = 0$$

$$\begin{aligned} V[Z] &= \frac{1}{\sigma^2\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda} V[\hat{\lambda}'\theta - \lambda'\theta] \\ &= \frac{\sigma^2\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda}{\sigma^2\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda} = 1 \end{aligned}$$

Desse modo, $Z \sim N(0, 1)$;

De acordo com IEMMA (1982), $\lambda'\theta$ e $y'(I-P)y$, onde P é o projetor ortogonal de y em $C(X)$, são independentes.

Definição (SEARLE, 1982): Seja o modelo Gauss-Markov Normal, com y_1 e $r(X) = T$, então

$$\frac{(n - T)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{y'(I-P)y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-T)}$$

Definição (SEARLE, 1982): Dadas as variáveis aleatórias $Z \sim N(0,1)$ e $W \sim \chi^2_{(n)}$, independentes, então a variável aleatória M , onde

$$M = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}}, \text{ tem distribuição t de Student com n graus de liberdade.}$$

Então, para o caso em questão:

$$M = \frac{\frac{\hat{\lambda}'\theta - \lambda'\theta}{\sigma \sqrt{\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda}}}{\sqrt{\frac{y'(I-P)y}{(n-T)\sigma^2}}} \sim t_{(n-T)} \quad ; \text{ isto é}$$

$$M = \frac{\frac{\hat{\lambda}'\theta - \lambda'\theta}{\sigma \sqrt{\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda}}}{\sqrt{\frac{(n-T)\hat{\sigma}^2}{(n-T)\sigma^2}}} = \frac{\hat{\lambda}'\theta - \lambda'\theta}{\hat{\sigma} \sqrt{\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda}} \sim t_{(n-T)}$$

Então, com base na distribuição "t", pode-se obter uma regra para estimativas por intervalo para $\lambda'\theta$ estimável, ao nível de confiança $1-\alpha$.

Como os valores $\hat{\lambda}'\theta$ e $\hat{\sigma}$ são "observados" através dos dados, adotar-se-á a notação

$$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\lambda}'\theta - \lambda'\theta}{\hat{\sigma} \sqrt{\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda}}$$

Assim, tem-se que:

$$P[-t_{(n-T; \alpha/2)} \leq t_{\text{obs}} \leq t_{(n-T; \alpha/2)}] = 1 - \alpha;$$

$$\therefore P[-t_{(n-T; \alpha/2)} \leq \frac{\hat{\lambda}'\theta - \lambda'\theta}{\hat{\sigma} \sqrt{\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda}} \leq t_{(n-T; \alpha/2)}] = 1 - \alpha;$$

donde se obtêm:

$$P[\hat{\lambda}'\theta - t_{[n-T; \alpha/2]} \hat{\sigma} \sqrt{\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda} \leq \lambda'\theta \leq \hat{\lambda}'\theta + t_{[n-T; \alpha/2]} \hat{\sigma} \sqrt{\lambda'V_1S_1^{-2}V_1'\lambda}]$$

e, dada a simetria da distribuição t, podemos denotar:

$$I.C.[\lambda'\theta]_{1-\alpha} = \hat{\lambda}'\theta \pm t_{[n-T; \alpha/2]} [\hat{V}(\hat{\lambda}'\theta)]^{1/2} \quad [4.24]$$

4.5.2. REGIÕES DE CONFIANÇA

Sejam $\lambda_1'\theta$, $\lambda_2'\theta$, ..., $\lambda_m'\theta$ funções estimáveis.

Seja também $B'\theta = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]'\theta$ um con-

junto de m funções estimáveis e linearmente independentes.

De acordo com o teorema de Gauss-Markov

$$\widehat{B'\theta} = B'\theta^0;$$

e de acordo com a proposição 4,

$$B'V_1V_1' = B'$$

A média e a variância da matriz $\widehat{B'\theta}$ são dadas

por:

$$i) E(\widehat{B'\theta}) = E(B'\theta^0) = B'E(\theta^0) = B'V_1V_1'\theta = B'\theta$$

$$ii) V(\widehat{B'\theta}) = V(B'\theta^0)$$

$$= V(B'V_1S_1^{-1}U_1'y)$$

$$= B'V_1S_1^{-1}U_1'V(y)U_1S_1^{-1}V_1'B$$

$$= B'V_1S_1^{-2}V_1'B\sigma^2$$

portanto, tem-se que

$$\widehat{B'\theta} \sim N_m(B'\theta; B'V_1S_1^{-2}V_1'B\sigma^2)$$

Seja ${}_mM_T = B'V_1S_1^{-1}$ tal que

$\text{rank}({}_mM_T) = m \leq T = \text{rank}(V_1) = \text{rank}(S_1^{-1})$; então, de acordo com a teoria das inversas generalizadas de Moore-Penrose, tem-se que $M^+ = M'(MM')^{-1}$, portanto

$$M M^+ = I_{(m)}$$

Tomando-se

$$\ell = \frac{M^+(B'\theta^0 - B'\theta)}{\sigma} ; \text{ tem-se que:}$$

$$i) E(\ell) = E \left[\frac{M^+(B'\theta^0 - B'\theta)}{\sigma} \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma} M^+ E(B'\theta^0 - B'\theta)$$

$$= \phi$$

$$ii) \text{Var}(\ell) = \text{Var} \left[\frac{M^+(B'\theta^0 - B'\theta)}{\sigma} \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \text{Var} [M^+(B'\theta^0 - B'\theta)]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \text{Var} [M^+ B' \theta^0]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} M^{+'} \text{Var}(B' \theta^0) M^+$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} M^{+'} B' V_1 S_1^{-2} V_1' B M^+ \sigma^2$$

$$= M^{+'} M' M M^+$$

$$= (M M^+)' M M^+ = I_{(m)} I_{(m)} = I_{(m)}$$

Desse modo,

$\ell \sim N_m(\phi, I_{(m)})$; tendo-se então que

$\ell' \ell \sim \chi^2_{(m)}$; mas

$$\begin{aligned}\ell' \ell &= \frac{1}{\sigma^2} (B' \theta^0 - B' \theta)' M^+ M^+ (B' \theta^0 - B' \theta) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (B' \theta^0 - B' \theta)' (MM')^+ (B' \theta^0 - B' \theta) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (B' \theta^0 - B' \theta)' (B' V_1 S_1^{-2} V_1' B)^+ (B' \theta^0 - B' \theta) \sim \chi^2_{r[B]}\end{aligned}$$

por outro lado; de [4.21]

$$\frac{1}{\sigma^2} y'(I - P_{U_1})y \sim \chi^2_{n-T}$$

De acordo com SEARLE (1971)

$$W = \frac{\frac{\chi^2_{[r(B)]}}{r(B)}}{\frac{\chi^2_{(n-T)}}{n-T}} \sim F_{r[B], n-T}$$

então

$$W = \frac{\frac{(B' \theta^0 - B' \theta)' (B' V_1 S_1^{-2} B)^+ (B' \theta^0 - B' \theta)}{r[B] \sigma^2}}{\frac{(n-T) y'(I - P_{U_1}) y}{(n-T) \sigma^2}} \sim F_{r[B], n-T}$$

Por outro lado,

$$\frac{(n - T)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-T)} . \text{ Logo, como}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{y'(I - P_{U_1})y}{n - T} \text{ é um estimador não tendencioso}$$

de σ^2 , então

$$W = \frac{(B'\theta^0 - B'\theta)'(B'V_1S_1^{-2}V_1B)^+(B'\theta^0 - B'\theta)}{r[B] \frac{(n - T)\hat{\sigma}^2}{n - T}} \sim F_{r[B], n-T} \quad [4.25]$$

Portanto, um estimador por região ao nível de confiança $1-\alpha$, para a coleção de m funções paramétricas estimáveis $B'\theta$ linearmente independentes, é dada por

$$(B'\theta^0 - B'\theta)'(B'V_1S_1^{-2}V_1B)^+(B'\theta^0 - B'\theta) \leq r[B]\hat{\sigma}^2 F_{[m=r[B], n-T, 1-\alpha]} \quad [4.26]$$

se $r[B] = 2$, a região de confiança é uma elipse,

se $r[B] > 2$, a região de confiança é um elipsóide do espaço

$$R^{r[B]}.$$

4.5.3. TESTES DE HIPÓTESES BASEADOS EM REGIÕES DE CONFIANÇA

Considerando-se um conjunto $B'\theta$ de m funções estimáveis linearmente independentes;

i.é., $r(B) = m$, $B = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ e cada $\lambda'_i\theta$ é uma função estimável, serão testada a hipótese

$$H_0 : B'\theta = \phi \quad \text{vs} \quad H_a : B'\theta \neq \phi$$

com base em regiões de confiança.

De acordo com [4.26], a região de confiança para um conjunto de m funções estimáveis linearmente independentes, ao nível $(1-\alpha)$ de probabilidade, é dada por

$$(B'\theta^0 - B'\theta)'(B'V_1S_1^{-2}V_1'B)^+(B'\theta^0 - B'\theta) \leq m\hat{\sigma}^2 F_{[m, n-T; 1-\alpha]}$$

Para se verificar $H_0 : B'\theta = \phi$, escreve-se primeiramente a curva que contorna a região de confiança (sob $H_0 : B'\theta = \phi$)

$$(B'\theta^0)'(B'V_1S_1^{-2}V_1'B)^+(B'\theta^0) \leq m\hat{\sigma}^2 F \quad ; \quad [4.27]$$

TABELADO

consequentemente, a região de rejeição de H_0 será

$$(B'\theta^0)'(B'V_1S_1^{-2}V_1'B)^+(B'\theta^0) > m\hat{\sigma}^2 F \quad [4.28]$$

TABELADO

ou seja,

rejeita-se $H_0 : B'\theta = \phi$ se e só se a elipse ou o elipsóide não contém a origem.

4.6. APLICAÇÃO DOS RESULTADOS BÁSICOS NOS MODELOS LINEARES PARA UM FATOR INTEIRAMENTE CASUALIZADO

4.6.1. INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste item, algumas aplicações dos resultados básicos aos modelos de um fator inteiramente casualizado, objetivando-se divulgar o uso da D.V.S. e mostrar que ela tende a ser extremamente simples, a partir do momento em que a matriz X fica bem determinada.

4.6.1.1. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE AS MATRIZES DE HELMERT (IEMMA, 1985)

Tomando-se, sem perda de generalidade, uma matriz H_T , genérica, conforme descrita a seguir,

$$H_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{T}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T}} \\ \frac{1}{\sqrt{1.2}} & \frac{-1}{\sqrt{1.2}} & \phi & \dots & \phi \\ \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \frac{-2}{\sqrt{2.3}} & \dots & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} & \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} & \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{(T-1)T}} \end{bmatrix} \quad [4.30]$$

tem-se uma matriz ortogonal com lei de formação extremamente conveniente, que depende apenas de sua dimensão T .

Dada a matriz

$$H_T = \begin{bmatrix} 1 & h_T' \\ - & H_T^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & h' \\ & H^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_T' \\ (2) & H_T^* \\ & \vdots \\ (i) & H_T^* \\ & \vdots \\ (T) & H_T^* \end{bmatrix}$$

onde

$1 \quad h_T'$ é a primeira linha da matriz H_T

(j) ${}_1H_T^*$ é a j-ésima linha da matriz H_T , com $j = 2, 3, \dots, T$

da ortogonalidade da matriz H_T , IEMMA (1985) demonstra que:

$$a) hh' + H^*{}'H^* = I_{(T)} \quad [4.31]$$

$$b) h'h = 1 \quad [4.32]$$

$$c) h'H^{*'} = 0 \text{ e } H^*h = 0 \quad [4.33]$$

$$d) H^{*'}H^{*'} = I_{(T-1)} \quad [4.34]$$

$$e) H^{*'}H^{*'} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} T-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & T-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & T-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & T-1 \end{bmatrix} \quad [4.35]$$

4.6.2. O ALGORITMO

4.6.2.1. A DECOMPOSIÇÃO PELO SEU VALOR SINGULAR DA MATRIZ ${}_n X_p$ DO DELINEAMENTO COM UM FATOR INTEIRAMENTE CASUALIZADO

No delineamento com $(p-1)$ tratamentos e R repetições, a matriz de planejamento é da forma:

$${}_n X_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_p \quad [4.36]$$

$$\text{onde } \text{posto}(X) = p-1 = T \quad [4.37]$$

$$n = R \times T \quad [4.38]$$

4.6.2.1.1. Os autovalores não nulos $s_1^2, s_2^2, \dots, s_T^2$ de XX' ($X'X$, respectivamente)

Proposição 5. No modelo do presente estudo, a matriz XX' é gerada pelo produto de Kronecker de matrizes uniformes.

Prova:

Sejam as matrizes uniformes

$$E_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}_R ;$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}_T$$

então

$$A_T \otimes E_R = \begin{matrix} n=(R.T) & \begin{bmatrix} 2 E_R & E_R & E_R & \dots & E_R \\ E_R & 2 E_R & E_R & \dots & E_R \\ E_R & E_R & 2 E_R & \dots & E_R \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_R & E_R & E_R & \dots & 2 E_R \end{bmatrix} & n=(R.T) \end{matrix} = XX'$$

concluindo a demonstração.

De acordo com IEMMA (1982), os autovalores das matrizes uniformes A_T e E_R são dados por:

a) Autovalores de A_T : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_T$,

onde

$$\alpha_1 = 2 + (T-1) = T+1$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha_2 = 1 \\ \vdots \\ \alpha_T = 1 \end{matrix} \right\} \text{multiplicidade } (T-1)$$

b) Autovalores de E_R : $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_R$

onde

$$\beta_1 = 1 + (R-1) = R$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \beta_3 = 0 \end{array} \right\} \text{multiplicidade } (R-1)$$

LEMMA (1987a) demonstra que os autovalores não nulos de $A_T \otimes E_R$ serão:

$$s_1^2 = \alpha_1 \beta_1 = (T+1)R$$

$$s_2^2 = \alpha_2 \beta_1 = R$$

$$\vdots$$

$$s_T^2 = \alpha_T \beta_1 = R$$

portanto,

$$S_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{(T+1)R} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \sqrt{R} & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \phi & \sqrt{R} & \dots & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi & \phi & \phi & \dots & \sqrt{R} \end{bmatrix}_T \quad [4.39]$$

4.6.2.1.2. Os autovetores normalizados de XX' , correspondentes aos autovalores não nulos

$$s_1^2, s_2^2, \dots, s_T^2$$

De acordo com IEMMA (1985), sendo A_T uma matriz uniforme de ordem T , existe uma matriz ortogonal H_T tal que

$$H'AH = D \text{ (decomposição espectral de } A_T\text{)}$$

onde

H é uma matriz de Helmert, cujas linhas são os vetores característicos normalizados, associados aos autovalores de A ;

D é a matriz diagonal que exhibe as raízes características de A .

$$\text{Sendo } A_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix},$$

os autovetores associados aos autovalores não nulos

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_T, \text{ serão:}$$

$${}_1h_T' = \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \quad \frac{1}{\sqrt{T}} \quad \frac{1}{\sqrt{T}} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt{T}} \right)$$

$${}^{(2)}_1h_T^* = \left(\frac{1}{\sqrt{1.2}} \quad \frac{-1}{\sqrt{1.2}} \quad \phi \quad \phi \quad \dots \quad \phi \right)$$

$${}^{(3)}_1h_T^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2.3}} \quad \frac{1}{\sqrt{2.3}} \quad \frac{-2}{\sqrt{2.3}} \quad \phi \quad \dots \quad \phi \right)$$

⋮

$${}^{(T)}_1h_T^* = \left(\frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \quad \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \quad \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \quad \dots \quad \frac{-(T-1)}{\sqrt{(T-1)T}} \right),$$

e para matriz uniforme $E_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$

o autovetor associado ao autovalor não nulo $\beta_1 = R$ será:

$${}_1h_R = \left(\frac{1}{\sqrt{R}} \quad \frac{1}{\sqrt{R}} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt{R}} \right)$$

Proposição 6. Os autovetores normalizados de XX' , relativos aos autovalores não nulos $s_1^2, s_2^2, \dots, s_T^2$ são dados por:

$$u_1' = {}_1h'_T \otimes {}_1h'_R \quad e$$

$$u_j' = {}^{(j)}_1H_T^* \otimes {}_1h'_R \quad \text{com } j = 2, 3, \dots, T$$

portanto,

$$u_1 = {}_n[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_T]_T$$

ou seja,

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \frac{1}{\sqrt{1.2R}} & \frac{1}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \frac{1}{\sqrt{1.2R}} & \frac{1}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \frac{1}{\sqrt{1.2R}} & \frac{1}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \frac{-1}{\sqrt{1.2R}} & \frac{1}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \frac{-1}{\sqrt{1.2R}} & \frac{1}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \frac{-1}{\sqrt{1.2R}} & \frac{1}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{2.3R}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \phi & \phi & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{(T-1).T.R}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T.R}} & \phi & \phi & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{(T-1).T.R}} \end{bmatrix}_T$$

n

deixando-se $\frac{1}{\sqrt{R}}$ em evidência,

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{R}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \phi & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \phi & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{T(T-1)}} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ T \end{matrix}$$

como

$$H_T^I = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{2.3}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \phi & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \phi & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{(T-1)T}} \end{bmatrix}$$

então tem-se que

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{R}} \left[H_T^I \otimes R^{E_1} \right] \quad [4.40]$$

onde

$$R^{E_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_R$$

4.6.2.1.3. Os autovetores normalizados de $X'X$, correspondentes aos autovalores não nulos

$$s_1^2, s_2^2, \dots, s_T^2$$

Os autovetores $v_1, v_2, \dots, v_T$; relativos aos autovalores positivos $s_1^2, s_2^2, \dots, s_T^2$ de $X'X$, são dados por:

$$v_i = \frac{1}{s_i} X' u_i$$

ou seja

$$V_P = S^{-1} X' U_T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_T \end{bmatrix}_T$$

assim sendo, tem-se que:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{(T+1)R}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{TR}} \\ \frac{1}{\sqrt{TR}} \\ \frac{1}{\sqrt{TR}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{TR}} \end{bmatrix}$$

efetuando-se o produto matricial,

$$v_1^i = \left(\frac{T}{\sqrt{T(T+1)}} \quad \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} \quad \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} \right)$$

de maneira análoga,

$$v_2^i = \left(\phi \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \phi \quad \dots \quad \phi \right)$$

$$v_3^i = \left(\phi \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad \dots \quad \phi \right)$$

$$v_4^i = \left(\phi \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \frac{-3}{\sqrt{12}} \quad \phi \quad \dots \quad \phi \right)$$

$\vdots$

$$v_T^i = \left(\phi \quad \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \quad \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \quad \frac{-(T-1)}{\sqrt{T(T-1)}} \right)$$

Portanto, a matriz V_1 é dado por:

$$V_1 = \begin{bmatrix} v_1 & \vdots & v_2 & \vdots & v_3 & \vdots & v_4 & \vdots & \dots & \vdots & v_T \end{bmatrix}_T$$

ou seja,

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{T(T+1)}} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \phi & \phi & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \phi & \phi & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{T(T-1)}} \end{bmatrix} \quad [4.41]$$

Fato: A lei de formação dos autovalores de XX' e $X'X$ e dos respectivos autovetores normalizados é extremamente simples pelo enfoque proposto neste estudo, estando em função do número de tratamentos $T = p-1$ e o número R de repetições da matriz do delineamento ${}_nX_p$.

Verifica-se a seguir que $U_1 S_1 V_1' = {}_nX_p$, o que valida o algoritmo.

4.6.2.1.4, Verificando $U_1 S_1 V_1^I = {}_n X_p$

De acordo com os resultados [4.39] e [4.41],

tem-se

$$S_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{(T+1)R} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \sqrt{R} & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \phi & \sqrt{R} & \dots & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi & \phi & \phi & \dots & \sqrt{R} \end{bmatrix}$$

e

$$V_1^I = \begin{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{T(T+1)}} & \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} \\ \phi & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \dots & \phi \\ \vdots & & & & \\ \phi & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{T(T-1)}} \end{bmatrix}$$

[4.42]

e o produto $S_1 V_1^I$ é dado por:

$$S_1 V_1' = \sqrt{R} \begin{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{T}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T}} \\ \phi & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \dots & \phi \\ \vdots & & & & & \\ \phi & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{T(T-1)}} \end{bmatrix}$$

Do resultado [4.30], tem-se:

$$S_1 V_1' = \sqrt{R} \begin{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{T}} & | & {}_1 h_T' \\ \phi & | & {}^{(2)}_1 H_T^* \\ \phi & | & {}^{(3)}_1 H_T^* \\ \vdots & | & \vdots \\ \phi & | & {}^{(T)}_1 H_T^* \end{bmatrix} = \sqrt{R} \begin{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{T}} & | & \\ \phi & | & \\ \phi & | & H_T \\ \vdots & | & \\ \phi & | & \end{bmatrix} \quad [4.43]$$

onde H_T é a matriz de Helmert.

Dos resultados [4.40] e [4.43] segue-se que:

$$U_1 S_1 V_1^i = \frac{1}{\sqrt{R}} (H_T^i \otimes R^{E_1}) \sqrt{R} \left[\begin{array}{c|c} \frac{T}{\sqrt{T}} & \\ \hline \phi & H_T \\ \phi & \\ \vdots & \\ \phi & \end{array} \right]$$

$$= (H_T^i \otimes R^{E_1}) \left[\begin{array}{c|c} \frac{T}{\sqrt{T}} & \\ \hline \phi & H_T \\ \phi & \\ \vdots & \\ \phi & \end{array} \right]$$

$$U_1 S_1 V_1^i = \left[\begin{array}{c|c} H_T^i & \\ \hline \left[\begin{array}{c} \frac{T}{\sqrt{T}} \\ \phi \\ \vdots \\ \phi \end{array} \right] & \end{array} \right] \otimes R^{E_1} \left[\begin{array}{c} H_T^i \cdot H_T \end{array} \right] \otimes R^{E_1}$$

de acordo com [4.31], $H_T^i \cdot H_T = I_T$, então

$$U_1 S_1 V_1^i = \left[\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \otimes R^{E_1}$$

donde se conclui

$$U_1 S_1 V_1' = \begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \\ \begin{matrix} n \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ p \end{matrix} & \end{matrix} = {}_n X_p \quad [4.44]$$

finalizando a demonstração.

4.6.2,1.5. Resumo

Dada a matriz do delineamento do modelo experimental inteiramente casualizado com T tratamentos e R repetições, de acordo com o processo aqui proposto, que será denominado de "Algoritmo ASSIZ CARVALHO/IE MMA" sua D.V.S., da da por ${}_n X_p = U_1 S_1 V_1'$, será:

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{R}} \left(H_T^1 \otimes R E_1 \right)_T ; \text{ de acordo com [4.40]}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{(T+1)R} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \sqrt{R} & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \phi & \sqrt{R} & \dots & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi & \phi & \phi & \dots & \sqrt{R} \end{bmatrix}_T ; \text{ de acordo com [4.39]}$$

$$V_1^1 = \begin{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{T(T+1)}} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \frac{1}{\sqrt{1.2}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \frac{-1}{\sqrt{1.2}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(T-1)T}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & \phi & \phi & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{(T-1)T}} \end{bmatrix} ; \text{ de acordo com [4.42]}$$

4.6.3. ALGUNS RESULTADOS ÚTEIS

4.6.3.1. O PROJETO R ORTOGONAL EM $C(X)$

O projetor ortogonal em $C(X)$ é dado por

$$P_X = U_1 U_1^1 = P_{U_1}.$$

De acordo com o resultado [4.26], tem-se:

$$\begin{aligned}
 P_{U_1} &= \frac{1}{\sqrt{R}} \left[H_T' \otimes R^{E_1} \right] \left[I_R^{E_R} \otimes H_T \right] \frac{1}{\sqrt{R}} \\
 &= \frac{1}{R} H_T' H_T \otimes R^{E_R} \quad ; \quad \text{mas } H_T' H_T = I_{(T)} \\
 &= \frac{1}{R} I_{(T)} \otimes R^{E_R}
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

4.6.3.2. O PROJETOR ORTOGONAL EM $C(X')$

De [4.41] tem-se que:

$$V_1 = \left[\begin{array}{c|cccc} \frac{T}{\sqrt{T(T+1)}} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \hline \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & & & & \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} & & & & \end{array} \right]$$

H_T^{*1}

O projetor ortogonal em $C(X')$, é dado por

$$P_{X'} = V_1 V_1' = P_{V_1}$$

De acordo com o resultado [4.41] viu-se que

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{T(T+1)}} & \vdots & \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \vdots \\ H_T^{*'} \end{bmatrix}; \text{ resultando:}$$

$$P_{V_1} = V_1 V_1' = \begin{bmatrix} \frac{T}{T+1} & \frac{1}{T+1} & \frac{1}{T+1} & \dots & \frac{1}{T+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{T+1} & \frac{1}{T(T+1)} & H_T^{*'} & H_T^* \end{bmatrix};$$

pondo-se $\frac{1}{T+1}$ em evidência e das propriedades das matrizes de Helmert, vem:

$$P_{V_1} = \frac{1}{T+1} \begin{bmatrix} T & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & T & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & T & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & -1 & T & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & T \end{bmatrix} \quad [4.46]$$

4.6.3.3. A MATRIZ $V_1 S_1^{-1} U_1'$

De acordo com o resultado obtido em [4.39],
tem-se que:

$$S_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(T+1)R}} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \frac{1}{\sqrt{R}} & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \phi & \frac{1}{\sqrt{R}} & \dots & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi & \phi & \phi & \dots & \frac{1}{\sqrt{R}} \end{bmatrix}$$

Logo, de [4.41],

$$V_1 S_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{R}} \begin{bmatrix} \frac{T}{(T+1)\sqrt{T}} & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \frac{1}{(T+1)\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \frac{1}{(T+1)\sqrt{T}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \frac{1}{(T+1)\sqrt{T}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(T+1)\sqrt{T}} & \phi & \phi & \dots & \frac{-(T-1)}{\sqrt{T(T-1)}} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$V_1 S_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{R}} \begin{bmatrix} \frac{T}{(T+1)\sqrt{T}} & \vdots & \frac{1}{(T+1)\sqrt{T}} \\ \hline \frac{T}{(T+1)\sqrt{T}} & \vdots & \frac{1}{(T+1)\sqrt{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \vdots \\ H_T^{*1} \end{bmatrix} \quad [4.47]$$

P T

de acordo com [4.40]

$$V_1 S_1^{-1} U_1^t = \frac{1}{\sqrt{R}} \begin{bmatrix} \frac{T}{(T+1)\sqrt{T}} & \vdots & \phi \\ \frac{1}{(T+1)\sqrt{T}} & \vdots & H_T^{*t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(T+1)\sqrt{T}} & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{R}} \left\{ \begin{bmatrix} T h_1 & H_T^{*t} \end{bmatrix} : \otimes 1 E_R \right\}$$

efetuando-se o produto matricial

$$V_1 S_1^{-1} U_1^t = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \frac{1}{T+1} & \frac{1}{T+1} & \dots & \frac{1}{T+1} \\ \frac{1}{(T+1)} + \frac{(1)_{H_1}^{*t} (1)_{H_T}^*}{T} & \frac{1}{T+1} + \frac{(1)_{H_1}^{*t} (2)_{H_T}^*}{T} & \dots & \frac{1}{T+1} + \frac{(1)_{H_1}^{*t} (1)_{H_T}^*}{T} \\ \frac{1}{(T+1)} + \frac{(2)_{H_1}^{*t} (1)_{H_T}^*}{T} & \frac{1}{T+1} + \frac{(2)_{H_1}^{*t} (2)_{H_T}^*}{T} & \dots & \frac{1}{T+1} + \frac{(2)_{H_1}^{*t} (T)_{H_T}^*}{T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(T+1)} + \frac{(T)_{H_1}^{*t} (1)_{H_T}^*}{T} & \frac{1}{T+1} + \frac{(T)_{H_1}^{*t} (2)_{H_T}^*}{T} & \dots & \frac{1}{T+1} + \frac{(T)_{H_1}^{*t} (T)_{H_T}^*}{T} \end{bmatrix} \otimes 1 E_R$$

de acordo com [4.35],

$$\frac{(i)_{H_1}^{*t} (j)_{H_T}^*}{T} = \begin{cases} \frac{T-1}{T} & \text{se } i = j \\ \frac{-1}{T} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

tendo-se então que:

$$V_1 S_1^{-1} U_1' = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \frac{1}{T+1} & \frac{1}{T+1} & \dots & \frac{1}{T+1} \\ \frac{T}{T+1} & \frac{-1}{T+1} & \dots & \frac{-1}{T+1} \\ \frac{-1}{T+1} & \frac{T}{T+1} & \dots & \frac{-1}{T+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-1}{T+1} & \frac{-1}{T+1} & \dots & \frac{T}{T+1} \end{bmatrix} \quad \textcircled{\times} \quad 1^E_R$$

P P

ou seja

$$V_1 S_1^{-1} U_1' = \frac{1}{R} \quad \frac{1}{P} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ T & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & T & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & T & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & & T \end{bmatrix} \quad \textcircled{\times} \quad 1^E_R \quad [4.48]$$

P P

onde $p = T+1$

4.6.3.4. A MATRIZ $V_1 S_1^{-2} V_1'$

Pós-multiplicando [4.47] por S_1^{-1} , tem-se:

$$V_1 S_1^{-1} S_1^{-1} = V_1 S_1^{-2} = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{1}{\sqrt{R}} \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{(T+1) \sqrt{T(T+1)}} & \phi \\ \hline \frac{1}{(T+1) \sqrt{T(T+1)}} & \\ \frac{1}{(T+1) \sqrt{T(T+1)}} & H_T^{*'} \\ \vdots & \\ \frac{1}{(T+1) \sqrt{T(T+1)}} & \end{array} \right] \quad [4.49]$$

pós-multiplicando [4.49] por V_1' , tem-se:

$$V_1 S_1^{-2} V_1' = \left[\begin{array}{c|c} \frac{T}{(T+1) \sqrt{T(T+1)}} & \phi \\ \hline \frac{1}{(T+1) \sqrt{T(T+1)}} & \\ \frac{1}{(T+1) \sqrt{T(T+1)}} & H_T^{*'} \\ \vdots & \\ \frac{1}{(T+1) \sqrt{T(T+1)}} & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \frac{T}{\sqrt{T(T+1)}} & \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} \dots \frac{1}{\sqrt{T(T+1)}} \\ \hline \phi & \\ \phi & H_T^{*'} \\ \vdots & \\ \phi & \end{array} \right]$$

efetuando-se o produto,

$$V_1 S_1^{-2} V_1' = \left[\begin{array}{c|ccc} \frac{T^2}{(T+1) T (T+1)} & \frac{T}{(T+1) T (T+1)} & \dots & \frac{T}{(T+1) T (T+1)} \\ \hline \frac{T}{(T+1) T (T+1)} & & & \\ \frac{T}{(T+1) T (T+1)} & \frac{1}{(T+1) T (T+1)} \odot & T^E T & + H_T^{*'} H_T^* \\ \vdots & & & \\ \frac{T}{(T+1) T (T+1)} & & & \end{array} \right]$$

sendo

$$\frac{1}{(T+1) T (T+1)} + \frac{T-1}{T} = \frac{1+(T-1)(T+1)^2}{T(T+1)^2}$$

$$\frac{1}{(T+1) T (T+1)} - \frac{1}{T} = \frac{1-(T+1)^2}{T(T+1)^2} \quad ; \text{ tem-se então,}$$

$$V_1 S_1^{-2} V_1' = \frac{1}{R} \frac{1}{T(T+1)^2} \left[\begin{array}{cccc} T^2 & T & T & \dots T \\ T & 1+(T-1)(T+1)^2 & 1-(T+1)^2 & 1-(T+1)^2 \\ T & 1-(T+1)^2 & 1+(T-1)(T+1)^2 & \dots 1-(T+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T & 1-(T+1)^2 & 1-(T+1)^2 & \dots 1+(T-1)(T+1)^2 \end{array} \right]$$

de X_p , tem-se: $T+1 = p$; $R.T = n$; logo:

$$V_1 S_1^{-2} V_1' = \frac{1}{np^2} \begin{bmatrix} T^2 & T & T & \dots & T \\ T & 1+(T-1)p^2 & 1-p^2 & \dots & 1-p^2 \\ T & 1-p^2 & 1+(T-1)p^2 & \dots & 1-p^2 \\ \vdots & & & \ddots & \\ T & 1-p^2 & 1-p^2 & \dots & 1+(T-1)p^2 \end{bmatrix} \quad [4.50]$$

4.6.1: DESCRIÇÃO DO MODELO

Seja o modelo de Gauss-Markov, de acordo com [4.1].

$$y = X\theta + e ;$$

Seja também a caracterização

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$$

onde, para $i = 1, 2, \dots, T$ tratamentos
e $j = 1, 2, \dots, R$ repetições

tem-se que:

y_{ij} é o valor observado na j -ésima repetição do i -ésimo tratamento.

μ é uma constante inerente a todas as observações.

t_i é o efeito do i-ésimo tratamento.

e_{ij} é o erro aleatório atribuído à observação y_{ij} ,
tal que $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

desse modo, tem-se a seguinte configuração:

$$\begin{matrix}
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & ; y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \dots \\ y_{1R} \\ y_{21} \\ \dots \\ y_{2R} \\ \dots \\ y_{T1} \\ \dots \\ y_{TR} \end{bmatrix} & ; \theta = \begin{bmatrix} \mu \\ t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_T \end{bmatrix} & ; e = \begin{bmatrix} e_{11} \\ \dots \\ e_{1R} \\ e_{21} \\ \dots \\ e_{2R} \\ \dots \\ e_{T1} \\ \dots \\ e_{TR} \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

No delineamento em questão, a solução, de acordo com [4.7], dada por

$$\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' y$$

do sistema de equações [4.5] será, de acordo com [4.48], dada por:

$$\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' y = \frac{1}{R} \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ T & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & T & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & T & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & & T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \otimes \end{pmatrix} R E_1 \begin{bmatrix} y_{11} \\ \dots \\ y_{1R} \\ y_{21} \\ \dots \\ y_{2R} \\ \dots \\ y_{T1} \\ \dots \\ y_{TR} \end{bmatrix}$$

resultando

$$\theta^0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..} \\ \dots \\ \bar{y}_{T.} - \bar{y}_{..} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^0 \\ t_1^0 \\ t_2^0 \\ \dots \\ t_T^0 \end{bmatrix} \quad [4.51]$$

e de acordo com [4.8], a aproximação de mínimos quadrados para $\hat{y}$ é dada por:

$$\hat{y} = X\theta^0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_{..} + \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} \\ \vdots \\ \bar{y}_{..} + \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{..} + \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..} \\ \vdots \\ \bar{y}_{..} + \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{..} + \bar{y}_{3.} - \bar{y}_{..} \\ \vdots \\ \bar{y}_{..} + \bar{y}_{3.} - \bar{y}_{..} \\ \vdots \\ \bar{y}_{..} + \bar{y}_{T.} - \bar{y}_{..} \\ \vdots \\ \bar{y}_{..} + \bar{y}_{T.} - \bar{y}_{..} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1.} \\ \bar{y}_{2.} \\ \bar{y}_{3.} \\ \vdots \\ \bar{y}_{T.} \end{bmatrix} \otimes_{R^E} \mathbf{1} \quad [4.52]$$

4.6.2. ESTIMABILIDADE

De acordo com a proposição 4 tem-se que as funções dos parâmetros $\lambda'\theta$, tal que $\lambda'V_1V_1' = \lambda' = \lambda'P_{V_1}$ são estimáveis.

Do resultado [4.46], tem-se que:

$$\lambda'V_1V_1' = \lambda'P_{V_1} = \lambda' \frac{1}{T+1} \begin{bmatrix} T & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & T & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & T & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

Proposição 7. No modelo do presente estudo, uma condição necessária e suficiente para que

$$P_{V_1}\lambda = \lambda \text{ (ou } \lambda'P_{V_1} = \lambda') \text{ é que}$$

$$\sum_{i=1}^P \lambda_i = 2\lambda_1$$

Prova:

Dado $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_P \end{bmatrix}$; tem-se então que a

seguinte igualdade matricial se verifica, ou seja, a função $\lambda' \theta$ é estimável.

$$V_1 V_1' \lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{T+1} \left[(T-1)\lambda_1 + \sum_{i=1}^P \lambda_i \right] \\ \frac{1}{T+1} \left[2\lambda_1 + (T+1)\lambda_2 - \sum_{i=1}^P \lambda_i \right] \\ \frac{1}{T+1} \left[2\lambda_1 + (T+1)\lambda_3 - \sum_{i=1}^P \lambda_i \right] \\ \vdots \\ \frac{1}{T+1} \left[2\lambda_1 + (T+1)\lambda_P - \sum_{i=1}^P \lambda_i \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_P \end{bmatrix} = \lambda$$

se e somente se,

$$a) \frac{1}{T+1} \left[(T-1)\lambda_1 + \sum_{i=1}^P \lambda_i \right] = \lambda_1$$

$$b) \frac{1}{T+1} \left[2\lambda_1 + (T+1)\lambda_j - \sum_{i=1}^P \lambda_i \right] = \lambda_j ; j = 2, 3, \dots, p$$

Assim, a) e b) serão verdadeiros se e só se

$$\sum_{i=1}^P \lambda_i = 2\lambda_1$$

completando a demonstração.

Corolário 9. Se $\lambda_1 = \phi$, $V_1 V_1' \lambda = \lambda$ se e só se $\lambda' \theta^0$ for um contraste, i.é.,

$$\sum_{i=1}^P \lambda_i = \phi.$$

$$4.6.3. \text{ NO MODELO } y = [X_1 \mid X_2] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_2 \end{bmatrix} + e$$

Nesse modelo, a matriz de planejamento tem a seguinte configuração

$${}_nX_P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad ; \text{ sendo } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e } X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$n \qquad \qquad \qquad P \qquad \qquad \qquad n \quad 1 \qquad \qquad \qquad n \qquad \qquad \qquad T$

4.6.3.1. A D.V.S. DA MATRIZ $X_2 = U_{12} S_{12} V_{12}'$

4.6.3.1.2. Os autovalores não nulos $s_{121}^2, s_{122}^2, \dots, s_{12T}^2$ de $X_2'X_2$ (X_2X_2' , respectivamente)

Tem-se que:

$$X_2'X_2 = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R \end{bmatrix} ;$$

verifica-se imediatamente que os autovalores de $X_2'X_2$, são:

$$s_{121}^2 = R$$

$$s_{122}^2 = R$$

$$\vdots$$

$$s_{12T}^2 = R$$

portanto,

$$S_{12} = \begin{bmatrix} \sqrt{R} & \phi & \dots & \phi \\ \phi & \sqrt{R} & \dots & \phi \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi & \phi & \dots & \sqrt{R} \end{bmatrix} = \sqrt{R} \, I_{(T)}; \quad [4.55]$$

4.6.3.1.2. Os autovetores normalizados de $X_2'X_2$, correspondentes aos autovalores não nulos

$$s_{121}^2, s_{122}^2, \dots, s_{12T}^2$$

A matriz V_{21} dos autovetores $v_{121}, v_{122}, \dots, v_{12T}$; relativos aos autovalores positivos $s_{121}^2, s_{122}^2, \dots, s_{12T}^2$ de $X_2'X_2$, de acordo com a teoria vista no desenvolvimento do algoritmo ASSIZ CARVALHO/IEEMMA, será dada por:

$$V_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & \phi & \dots & \frac{1}{\sqrt{T(T-1)}} \end{bmatrix} = H_T^I \quad [4.56]$$

4.6.3.1.3. Os autovetores normalizados de $X_2 X_2^I$, correspondentes aos autovalores não nulos

$$s_{121}^2, s_{122}^2, \dots, s_{12T}^2$$

A matriz U_{12} dos autovetores normalizados $u_{121}, u_{122}, \dots, u_{12T}$; relativos aos autovalores positivos $s_{121}^2, s_{122}^2, \dots, s_{12T}^2$ de $X_2 X_2^I$, será dada por:

$$u_i = \frac{1}{s_i} X_2 v_i \quad e$$

pelo algoritmo ASSIZ CARVALHO/IEEMA,

$$n U_T = \frac{1}{\sqrt{R}} (H_T^I \otimes R^{E_1}) \quad [4.57]$$

$$4.6.3.1.4. \text{ Verificando } U_{12} S_{12} V_{12}^I = X_2$$

De [4.55], [4.56] e [4.57]

$$S_{12} = \sqrt{R} \, I_{(T)}$$

$$V_{12} = H_T^I$$

$$U_{12} = \frac{1}{\sqrt{R}} (H_T^I \otimes R^{E_1})$$

portanto,

$$U_{12} S_{12} V_{12}^I = \frac{1}{\sqrt{R}} (H_T^I \otimes R^{E_1}) \sqrt{R} \, I_{(T)} H_{(T)}$$

$$= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R}} (H_T^I \otimes R^{E_1}) H_T$$

$$= (H_T^I H_T) \otimes R^{E_1}$$

$$= I_{(T)} \otimes R^{E_1}$$

$$= X_2$$

concluindo a verificação.

4.6.3.2. A D.V.S. DA MATRIZ $X_1 = U_{11} S_{11} V_{11}'$

De maneira análoga ao 4.3.3.1., tem-se que a matriz S_{11} , correspondente a raiz quadrada dos autovalores positivos de $X_1' X_1$, é dada por,

$$S_{11} = [s_{111}^2] = \begin{bmatrix} \sqrt{TR} \\ 1 \end{bmatrix};$$

a matriz U_{11} dos autovetores de $X_1' X_1$ correspondente ao autovetor não nulo s_{111}^2 , é dado por

$$U_{11} = \frac{1}{\sqrt{TR}} \otimes n E_1; \quad [4.58]$$

a matriz V_{11} dos autovetores de $X_1' X_1$ correspondente ao autovetor não nulo s_{111}^2 , é dado por

$$V_{11} = [1] \quad [4.59]$$

e então,

$$\begin{aligned} U_{11} S_{11} V_{11}' &= \left(\frac{1}{\sqrt{TR}} \otimes n E_1 \right) \sqrt{TR} \cdot 1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = X_1 \end{aligned}$$

4.6.3.3, PROJETORES ORTOGONAIS

4.6.3.3.1. O projetor ortogonal em $C(X_1): P_{U_{11}}$

$$P_{U_{11}} = X_1 X_1^+ = U_{11} U_{11}^+$$

De acordo com [4.58],

$$P_{U_{11}} = \left[\frac{1}{\sqrt{TR}} \otimes {}_n E_1 \right] \left[\frac{1}{\sqrt{TR}} \otimes {}_1 E_n \right]$$

$$\therefore P_{U_{11}} = \frac{1}{TR} {}_n E_n \quad [4.60]$$

4.6.3.3.2. O projetor ortogonal em $C(X_2): P_{U_{12}}$

$$P_{U_{12}} = X_2 X_2^+ = U_{12} U_{12}^+$$

De acordo com [4.57]

$$P_{U_{12}} = \left[\frac{1}{\sqrt{R}} H_T^+ \otimes {}_R E_1 \right] \left[\frac{1}{\sqrt{R}} H_T^+ \otimes {}_R E_1 \right]$$

$$= \frac{1}{R} H_T^+ H_T \otimes {}_R E_R$$

$$\therefore P_{U_{12}} = \frac{1}{R} I_{(T)} \otimes {}_R E_R \quad [4.61]$$

4.6.3.4. FORMAS QUADRÁTICAS

4.6.3.4.1. A forma quadrática $y'P_{U_{11}}y$

$$y'P_{U_{11}}y = y' \frac{1}{TR} E_n y = \frac{1}{TR} \left[\sum_i \sum_j y_{ij} \right]^2 = \frac{\left[\sum_{i,j} y_{ij} \right]^2}{TR}$$

$$\therefore y'P_{U_{11}}y = \frac{\left[\sum_{i,j} y_{ij} \right]^2}{TR} = \frac{1}{TR} y_{..}^2.$$

4.6.3.4.2. A forma quadrática $y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y$

$$\begin{aligned} y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y &= y'P_{U_1}y - y'P_{U_{11}}y \\ &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^T y_i^2 - \frac{1}{TR} y_{..}^2. \end{aligned}$$

4.6.3.4.3. A forma quadrática $y'(I - P_{U_1})y$

$$\begin{aligned} y'(I - P_{U_1})y &= y'y - y'P_{U_1}y \\ &= \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{1}{R} \sum_{i=1}^T y_i^2. \end{aligned}$$

4.6.4. DISTRIBUIÇÃO DAS FORMAS QUADRÁTICAS

De acordo com SEARLE (1971),

$$W = \frac{\frac{\chi^2_m}{m}}{\frac{\chi^2_{n-T}}{n-T}} \sim F_{m, n-T}$$

Do resultado [4.22], têm-se que

$$\frac{y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{[T - \text{tr}(P_{U_{11}}); \frac{1}{2\sigma^2}(\theta'V_1S_1^2V_1'\theta - \theta'V_1S_1U_1'P_{U_{11}}U_1S_1V_1'\theta)]}$$

Como $\theta'V_1S_1U_1'P_{U_{11}}U_1S_1V_1'\theta = \theta'X'P_{U_{11}}X\theta$, do

resultado [4.60] segue-se que :

$$\begin{aligned} \theta'V_1S_1U_1'P_{U_{11}}U_1S_1V_1'\theta &= \theta'X' \frac{1}{\text{TR}} n E_n X\theta \\ &= \theta'X' n E_n X\theta \frac{1}{\text{TR}} \\ &= \theta' \text{TR} X'X\theta \frac{1}{\text{TR}} \\ &= \theta'X'X\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \theta'V_1S_1U_1'P_{U_{11}}U_1S_1V_1'\theta = \theta'V_1S_1^2V_1'\theta$$

então, conclui-se que:

$$\frac{y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{[T - \text{tr}(P_{U_{11}})]} \quad [4.62]$$

e de acordo com o resultado [4.21]

$$\frac{y'(I - P_{U_1})y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{[n-T]}$$

então, tem-se:

$$W = \frac{\frac{\chi^2_{[T-1]}}{T-1}}{\frac{\chi^2_{[n-T]}}{n-T}} = \frac{\frac{y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y}{(T-1)\sigma^2}}{\frac{y'(I - P_{U_1})y}{\sigma^2(n-T)}} \sim F_{T-1, n-T}$$

ou seja

$$\frac{\frac{y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y}{T-1}}{\frac{y'(I - P_{U_1})y}{n-T}} \sim F_{T-1, n-T} \quad [4.63]$$

Dos resultados obtidos, tem-se o seguinte quadro para a Análise de Variância.

C.V.	G.L.	SQ	QM	F
Devido a θ_1	1	$[y_{..}]^2/TR$		
Devido a θ_2/θ_1	T-1	$\frac{1}{R} \sum_{i=1}^T y_{i.}^2 - \frac{[y_{..}]^2}{TR}$	$\frac{SQ_{\theta_2/\theta_1}}{T-1}$	$\frac{QM_{\theta_2/\theta_1}}{QMR}$
Resíduo	n-T	$\sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{1}{R} \sum_{i=1}^T y_{i.}^2$	$\frac{SQR}{n-T}$	
Total	n			

o qual é adequado para inferências sobre tratamentos (θ_2/θ_1)

4.6.5. ESTIMAÇÃO POR INTERVALO E POR REGIÃO

De acordo com [4.24], uma estimativa por intervalo ao nível de confiança $1-\alpha$, para $\lambda'\theta$ estimável, pode ser obtida de:

$$IC[\lambda'\theta]_{1-\alpha} = \hat{\lambda'\theta} \pm t_{[\alpha/2; N-T]} \sqrt{\hat{V}(\lambda'\theta^0)} ; \text{ onde } [4.64]$$

de acordo com [4.50],

$$V_1' S_1^{-2} V_1 = \frac{1}{np^2} \begin{bmatrix} T^2 & T & T & \dots & T \\ T & 1+(T-1)p^2 & 1-p^2 & \dots & 1-p^2 \\ T & 1-p^2 & 1+(T-1)p^2 & \dots & 1-p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T & 1-p^2 & 1-p^2 & \dots & 1+(T-1)p^2 \end{bmatrix} \quad [4.65]$$

e a região de confiança ao nível $1-\alpha$ para a coleção de m funções paramétricas estimáveis $B'\theta$ linearmente independente, é dada, segundo [4.26]

$$[\widehat{B'\theta} - B'\theta][B'V_1 S_1^{-2} V_1 B]^+ [\widehat{B'\theta} - B'\theta] \leq r[B] \hat{\sigma}^2 F_{[r[B]; n-r; 1-\alpha]}$$

4.7. UM EXEMPLO NUMÉRICO

Face aos objetivos deste estudo, julgou-se oportuno apresentar um exemplo numérico para ilustrar o processo.

Seja, então, o conjunto de dados que constam do quadro 2.

Quadro 2 - Ensaio de competição de variedades e híbridos de milho na Estação Experimental de milho de Piraju (SP), em t/ha.

Tratamentos	1ª rep.	2ª rep.	3ª rep.	4ª rep.	5ª rep.
Armour	1,9	2,3	2,0	2,5	1,8
Azteca	2,2	2,6	1,9	2,4	2,3
H 6099	2,8	2,7	3,0	2,9	3,1
H 3025	2,6	2,6	2,8	2,4	2,7
IAC 40/65	2,9	3,1	3,3	3,4	3,0
IAC 65/70	3,8	3,9	3,7	3,6	4,0

A matriz do delineamento do presente estudo é dada por:

$$30^x_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No exemplo tem-se

$$N = 30 \quad T = 6 \quad R = 5$$

A D.V.S. da matriz 30×7 , segundo o processo ASSIZ CARVALHO/IEEMA, é dada por:

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (H_{(6)}^J \times {}_5E_1)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{(6+1)5} & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \sqrt{5} & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \sqrt{5} & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \sqrt{5} & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \sqrt{5} & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{6(6+1)}} & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \frac{1}{\sqrt{6(6+1)}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6(6+1)}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6(6+1)}} & \phi & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6(6+1)}} & \phi & \phi & \frac{-3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6(6+1)}} & \phi & \phi & \phi & \frac{-4}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6(6+1)}} & \phi & \phi & \phi & \phi & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Os projetores ortogonais em $C(X)$ e $C(X')$ são dados por:

$$P_{U_1} = \frac{1}{5} \quad I_6 \quad \textcircled{x} \quad 5^E_5$$

$$P_{V_1} = \frac{1}{6+1} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Segundo [4.51], θ^0 é dado por:

$$\theta^0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{3.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{4.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{5.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{6.} - \bar{y}_{..} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8066 \\ 2,1000 - 2,8066 \\ 2,2800 - 2,8066 \\ 2,9000 - 2,8066 \\ 2,6200 - 2,8066 \\ 3,1400 - 2,8066 \\ 3,8000 - 2,8066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8066 \\ -0,7066 \\ -0,5266 \\ 0,0934 \\ -0,1866 \\ 0,3334 \\ 0,9934 \end{bmatrix}$$

e segundo [4.52] a aproximação de mínimos quadrados para y é dada por:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 2,1000 \\ 2,2800 \\ 2,9000 \\ 2,6200 \\ 3,1410 \\ 3,8100 \end{bmatrix} \quad \textcircled{x} \quad 5^E_1$$

Análise de Variância

$$y'P_{U_{11}}y = \frac{[\sum y_{ij}]^2}{30} = 236.3213$$

$$y'(P_{U_1} - P_{U_{11}})y = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 y_{i\cdot}^2 - 236.3213 = 9.5907$$

$$y'(I - P_{U_1})y = y'y - y'P_{U_1}y = 246.98 - 245.9120 = 1.0680$$

Quadro 3. Teste de $H_0 : t_1 = t_2 = \dots = t_6$

CV	GL	SQ	QM	F
θ_1	1	236,3213		
θ_2/θ_1	5	9,5907	1.9181	43,10**
Resíduo	24	1,0680	0.0445	
Total	30	10,6587		

Estimação por intervalo e por região

Testes sobre respostas

Nesse exemplo, são estimáveis as funções $\lambda'\theta$

tais que $\lambda'V_1V_1' = \lambda'$, ou seja:

$$\lambda' \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \lambda'; \text{ Proposição 4}$$

Tem-se, então, por exemplo, que

$$\lambda' \hat{\theta} = \hat{t}_1 - \hat{t}_6; \quad \lambda' = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1)$$

$$\lambda' P_{V_1} = \frac{1}{7} (0 \ 7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -7) = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1) = \lambda'$$

é estimável, e de acordo com 4.2.6., o BLUE de $\lambda' \theta$ é dado por

$$\hat{\lambda' \theta} = \lambda' \theta^0 = t_1^0 - t_6^0 = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} - (\bar{y}_{6.} - \bar{y}_{..}) = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{6.} = -1.7$$

$$V(\lambda' \theta) = V(\lambda' \theta^0) = \lambda' V_1 S_1^{-2} V_1' \lambda$$

$$V(\lambda' \theta^0) = \lambda' \frac{1}{30 \times 49} \begin{bmatrix} 49 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -48 \\ 6 & 246 & -48 & -48 & -48 & -48 & -48 \\ 6 & -48 & 246 & -48 & -48 & -48 & -48 \\ 6 & -48 & -48 & 246 & -48 & -48 & -48 \\ 6 & -48 & -48 & -48 & 246 & -48 & -48 \\ 6 & -48 & -48 & -48 & -48 & 246 & -48 \\ 6 & -48 & -48 & -48 & -48 & -48 & 246 \end{bmatrix} \lambda \sigma^2 \quad [4.66]$$

Para $\lambda_1' (\theta^0) = t_1^0 - t_6^0$, tem-se que

$\lambda_1' = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1)$, é de acordo com [4.66], obtêm-se:

$$V(\lambda_1' \theta^0) = 0,4 \sigma^2$$

Analogamente, para $\lambda_2' \theta^0 = t_1^0 + t_2^0 - 2t_6^0$, tem-se que

$\lambda_2' = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2)$, e de acordo com [4.66] obtêm-se que:

$$V(\lambda_2' \theta^0) = 1,2 \sigma^2$$

Sabe-se, de [4.22], que uma estimativa por intervalo ao nível de confiança $1-\alpha$ para $\lambda' \theta$ estimável, pode ser obtida de

$$I.C. [\lambda' \theta]_{1-\alpha} = \hat{\lambda' \theta} \pm t_{[\alpha/2; n-T]} \hat{\sigma} \sqrt{V_1 S_1^{-2} V_1'} ;$$

assim sendo, para $\hat{\sigma}^2 = 0,0445$ obtêm-se:

$$\hat{V}(\lambda_1' \theta_1) = \frac{12}{30} \hat{\sigma}^2 = 0,0178$$

$$\hat{V}(\lambda_2' \theta_2) = \frac{1764}{1470} \hat{\sigma}^2 = 0,0534$$

portanto, de acordo com [4.64],

$$I.C. [t_1 - t_6]_{0,95} = 1,7 \pm 2,064 \{0,0178\}^{1/2}$$

$$\therefore P\{-1,9754 \leq t_1 - t_2 \leq -1,4246\} = 0,95$$

$$I.C.[t_1 + t_2 - 2t_6]_{0,95} = 3,22 \pm 2,064 \{0,0534\}^{1/2}$$

$$\therefore P \{-3,6970 \leq t_1 + t_2 - 2t_6 \leq -2,7430\} = 0,95$$

Testes de Hipóteses baseados em regiões de con
fiança

$$\text{Seja a função estimável } B'\theta = \begin{bmatrix} \lambda_1' \\ -\lambda_2' \end{bmatrix} \theta$$

$$tq \quad \lambda_1'\theta = t_1 - t_6 \quad e$$

$$\lambda_2'\theta = t_1 + t_2 - 2t_6 \quad ;$$

Uma estimativa por região para $B'\theta$, ao nível de confiança conjunta $1-\alpha$ é dado em [4.65], por

$$(B'\theta^0 - B'\theta)'(B'V_1S_1^{-2}V_1'B)^+(B'\theta^0 - B'\theta) \leq m \hat{\sigma}^2 F_{[n, n-r; 1-\alpha]}$$

Aqui m = duas funções, $F_{0,05} = 3,40$ e $\hat{\sigma}^2 = 0,0445$.

Então, para $\alpha = 0,05$

$$\begin{bmatrix} -3,22 - (t_1 + t_2 - 2t_6) & -1,7 - (t_1 - t_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1764}{1470} & \phi \\ \phi & \frac{588}{1470} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3,22(t_1 + t_2 - 2t_6) \\ -1,7 - (t_1 - t_6) \end{bmatrix} \leq 2 \times 0,0445 \times 3,40$$

$$\frac{[-3,22 - (t_1 + t_2 - 2t_6)]^2}{\frac{1764}{1470} \times 0,0445 \times 2 \times 3,40} + \frac{[-1,7 - (t_1 - t_6)]^2}{\frac{588}{1470} \times 0,0445 \times 3,40 \times 2} \leq 1$$

$$\frac{[-3.22 - (t_1 + t_2 - 2t_6)]^2}{0,36312} + \frac{[-1.7 - (t_1 - t_2)]^2}{0,12104} \leq 1$$

Tem-se, então, uma elipse ($m=2$) de confiança para $B'\theta^0$ com centro em $(-3.22 ; -1.7)$ e que não contém o ponto $(0,0)$. Graficamente, temos:

Figura 1 - Estimativa por região para $B'\theta$ ao nível de confiança 0,95.

5. CONCLUSÕES

Face aos resultados obtidos, conclui-se que o estudo do modelo linear de Gauss-Markov através do enfoque da D.V.S., possibilitou de modo simples e objetivo:

5.1. Obter a melhor solução aproximada (Solução de Norma Mínimo) para o sistema de equações normais, dada por $\theta^0 = V_1 S_1^{-1} U_1' Y$, sem utilizar explicitamente a inversa de Moore Penrose.

5.2. Demonstrar que $V_1 S_1^{-1} U_1'$ é a inversa generalizada de Moore-Penrose de X .

5.3. Demonstrar que a função $\lambda' \theta$ é estimável no modelo experimental inteiramente casualizado com T tratamentos e R repetições se e só se
$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = 2\lambda_1.$$

5.4. Criar um algoritmo "Algoritmo Assiz Carvalho/lemma" que decompõe pelo valor singular qualquer matriz de planejamento X , desde que XX' seja K^2 -uniforme, sem necessidade de recursos computacionais.

Nesse contexto, permite-se entender que o enfoque através da D.V.S. revelou-se extremamente rico em informações do ponto de vista das deduções teóricas e das exemplificações, e conseqüentemente como recurso didático.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACTON, F.S. **Numerical Methods that Work.** Harper & Row, Publishers. New York, 1970. 215 p.

BAYLEY, D.W. & JACOB, H.G. **Linear Algebra.** Houghton Mifflin Company. Boston, 1971. 280 p.

CARVALHO, J.F. Modelos Lineares e sua Avaliação. São Carlos, 1982. 95 p. (Livre Docência - Universidade de São Paulo)

COHEN, A.M. **Numerical Analysis.** McGraw Hill Inc. New York, 1973. 341 p.

DWIVEDI, T.D. A Method to Compute the Rank Factors of a Matriz. **Sankhyā**, 37(B.4):463-64, 1975.

GRAYBILL, F.A. **An Introduction to Linear Statistical Models.** Vol. 1. McGraw Hill. 463 p.

GRAYBILL, F.A. **Introduction to Matrices with Applications in Statistics.** Wadworth, 1969. 372 p.

GOMES, F.P. **Curso de Estatística Experimental.** Nobel, 1967. 430 p.

HENRICI, P. On the Speed of Convergence of Cyclic and

Quasicyclic Jacobi Methods for Computing Eigen Values of Hermitian Matrices. **J. Soc. Industr. Appl. Math.**, 6:144-162, 1958.

ITEMMA, A.F. Valores Singulares de Matrizes Uniformes. **Ciência e Natura**, 4:21-26, 1982.

ITEMMA, A.F. Modelos Lineares para Experimentos com Medidas Repetidas e Covariância Uniforme: Um Enfoque Através das Matrizes de Helmert. Piracicaba, 1985. 155 p. (Livre-Docência - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" /USP)

ITEMMA, A.F. Modelos Lineares: Uma Introdução para Profissionais da Pesquisa Agropecuária. In: 2º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica; Londrina, PR, 1987. 263 p. (c)

ITEMMA, A.F. Usando Matrizes de Helmert e Matrizes Uniformes como Recurso Didático. In: I Simpósio de Métodos Quantitativos e II Encontro de Econometria da Região Sul, Santa Maria, RS, **Anais**, 1987 (a).

ITEMMA, A.F. Inversa Genralizada de Moore-Penrose nos Delineamentos com Restrição na Casualização. In: 10ª Reunião Regional da SBMAC. São Carlos, SP. **Anais**, 1987 (b).

JOHN, P.W.M. **Statistical Design and Analysis of Experiments**. Macmillan, 1971. 356 p.

LIMA FILHO, E.C. Planejamento de Observações Adicionais em Modelos Lineares: A Decomposição em Valores Singulares da Matriz de Planejamento e sua Utilização. São Carlos, 1981. 60 p. (Livre Docência - Universidade de São Paulo)

MANDEL, J. Use of Singular Decomposition in Regression Analysis. *The American Statistician*, 36(1):15-24, 1982.

MURDOCH, D.C. *Álgebra Linear*. Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro, 1970. 310 p.

RAO, C.R. On the Linear Combination of Observations and the General Theory of Least Squares. *Sankhya, The Ind. J. of Stat.*, 7(3):237-256, 1945.

RAO, C.R. *Linear Statistical Inference and its Applications*. Wiley, 1965. 552 p.

SEARLE, S.R. *Linear Models*. Wiley, 1971. 532 p.

SEARLE, S.R. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. John Wiley & Sons. New York, 1982. 438 p.

SEARLE, S.R. Restriction and Generalized Inverses in Linear Models. *The American Statistician*, 38:53-54, 1984.

SEBER, G.A.F. *Linear Regression Analysis*. Wiley, 1977. 466 p.

STEINBERG, D.I. *Computational Matrix Algebra*. McGraw-Hill Inc. New York, 1974. 280 p.

WILKINSON, J.H. **The Algebraic Eigenvalue Problem.** Claredon
Press. Oxford. 1964. 662 p.