**ANÁLISE DE PRODUÇÃO LEITEIRA EM EXPERIMENTOS EM "SWITCHBACK"
USANDO O MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA.**

TIEMI MATSUO

Licenciada em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A

Estado de São Paulo - Brasil

Fevereiro - 1992

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - ESALQ/USP

Miranda-Vilela, Maristela Parra

Influência da temperatura na determinação do sexo e do crescimento de jacarés-de-papo-amarelo (*Caiman latirostris*) / Maristela Parra Miranda-Vilela. - - Piracicaba, 2003.

67 p. : il.

Tese (doutorado) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, 2003.
Bibliografia.

1. Comportamento animal 2. Crescimento animal 3. Ganho de peso 4.
Incubação artificial 5. Jacaré-de-papo-amarelo 6. Sexo animal 7. Temperatura
ambiente (Efeitos) I. Título

CDD 639.394

ANÁLISE DE PRODUÇÃO LEITEIRA EM EXPERIMENTOS EM "SWITCHBACK"
USANDO O MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA.

TIEMI MATSUO

Aprovada em: 01.04.1992

Comissão julgadora:

Prof^a Dr^a Clarice Garcia Borges Demetrio

ESALQ/USP

Prof. Dr. Vivaldo Francisco da Cruz

ESALQ/USP

Prof. Dr. João Riboldi

UFRS

Prof^a Dr^a Sheila Zambello de Pinho

IB/UNESP

Prof. Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi

Orientador

Dedico este trabalho

**Aos meus pais,
pelo amor e conforto de um lar.**

**Aos meus irmãos, irmã e cunhadas,
que colaboraram nos bastidores.**

**Aos meus sobrinhos e sobrinhas,
pelas alegrias e carinho.**

**Aos amigos Iza, Rosa, Diva, Vó, Rita,
Rosana, João Paulo e Pixote,
provas vivas de que a amizade
sincera ainda existe**

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, Professor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela amizade, ensinamentos e orientação na elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Décio Barbin, Professor e Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pelo trabalho inicial de orientação, amizade e incentivo.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pelos ensinamentos.

Ao Departamento de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Londrina, pela oportunidade concedida para a realização do Curso.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela bolsa concedida.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela amizade e cooperação.

Ao Jonas Rodrigues de Matos e sua equipe da Coordenadoria de Recursos Humanos - Divisão de Documentação de Docentes da Universidade Estadual de Londrina, pela colaboração e amizade.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação da ESALQ/USP pelas gentilezas e incentivo recebidos.

Aos amigos da Pós-Graduação, e em especial a Rosa Salani Mota, João Maurício de Araújo Mota, Romeu Magnani, Dinara X. M. Fernandez e Amauri de Almeida Machado, pela colaboração, amizade e companheirismo.

Aos amigos, Sandra Giovanoni, Rejane Alves, Mário Luiz Venturini, José Antonio Scarinci e Fernando de Souza, pela convivência agradável.

Ao colega Rui da Silva Verneque e Marcelo Zacarias da Silva pela colaboração na elaboração dos programas utilizados neste trabalho.

À Prof^a Vera Lucia Iria Machado, Professora do Colégio Estadual "Prof. José Aloísio Aragão" pela revisão do "Summary".

S U M Á R I O

	Página
LISTA DE FIGURAS	vii
RESUMO	viii
SUMMARY	x
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	5
3. METODOLOGIA	13
3.1. Modelo Matemático	13
3.2. A função de Verossimilhança e suas derivadas .	17
3.3. Algoritmo de Newton-Raphson e "Scoring" de Fisher	23
3.4. Estimação	25
3.5. Análise de variância no modelo autorregressivo	25
3.5.1. Sistema de equações normais	25
3.5.2. Somas de quadrados	29
3.5.3. Quadro de análise de variância	31
3.5.4. Teste F	32
3.5.5. Programa no módulo CM do SOC - Software Científico	33
3.5.6. Exemplo	38
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	48
5. CONCLUSÕES	53
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54
APÊNDICE	56

LISTA DE FIGURAS

Página

Figura 1 - Histograma do nível mínimo de significância das análises dos 500 ensaios simulados com $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ e $t_3 = 0$	50
Figura 2 - Histograma do nível mínimo de significância das análises dos 500 ensaios simulados com $t_1 = -0,5$, $t_2 = 0,0$ e $t_3 = +0,5$	51

ANÁLISE DE PRODUÇÃO LEITEIRA EM EXPERIMENTOS EM "SWITCHBACK" USANDO O MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Autora: TIEMI MATSUO

Orientador: PROF. DR. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

RESUMO

Num dos estudos feitos sobre experimentos em "switchback", GODOI (1983) verificou a existência de correlação entre períodos para os dados de produção leiteira e apresentou uma análise baseada no método dos mínimos quadrados generalizados, porém com um estimador tendencioso para o coeficiente de correlação.

Desta forma, o presente trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta para a análise de dados de produção de leite em experimentos em "switchback" usando o método para máxima verossimilhança, baseada no esquema de tratamentos proposto por LUCAS (1956) e no seguinte modelo proposto por GODOI (1983):

$$y_{ijk} = \mu + p_j + t_k + \varepsilon_{ijk}$$

com $i=1,2,\dots,s$ indivíduos; $j=1,2,3$ períodos e $k=1,2,3$ tratamentos, onde y_{ijk} é a observação referente ao k -ésimo tratamento aplicado no i -ésimo indivíduo no j -ésimo período, μ é uma constante, p_j é o efeito do j -ésimo período, t_k é o

efeito do k -ésimo tratamento e ε_{ijk} é o erro experimental, tal que $\varepsilon_{ijk} = \rho\varepsilon_{i(j-1)k} + e_{ijk}$, onde ρ é o coeficiente de autocorrelação e $|\rho| < 1$; e_{ijk} tem distribuição $N(0, \sigma^2)$.

O método consistiu em efetuar a análise de variância e teste F, através dos parâmetros estimados pelo método da máxima verossimilhança, para dados de produção leiteira em experimentos em "switchback".

Para o método proposto foi elaborado um programa computacional desenvolvido no módulo CM do SOC - Software Científico, atualmente NTIA.

Os dados utilizados para o estudo do método proposto foram os mesmos utilizados por GODOI (1983), e referem-se à produção média quinzenal de 144 vacas holandesas abrangendo todos os períodos úteis para os experimentos em "switchback".

A partir desses dados foram simulados 500 ensaios, com e sem efeitos de tratamentos, para fazer um estudo sobre o poder do teste F nas condições desses experimentos.

Levando-se em consideração a correlação entre períodos concluiu-se que o método proposto é uma alternativa para a análise da produção de leite em experimentos em "switchback", pois para verificação dos efeitos de tratamentos o teste de significância mostrou ser tão poderoso quanto o proposto por GODOI (1983), que é mais poderoso do que o teste proveniente da análise de LUCAS (1956).

ANALYSIS OF MILK PRODUCTION IN SWITCHBACK EXPERIMENTS USING MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD

Author: TIEMI MATSUO

Adviser: PROF. DR. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

SUMMARY

In one of his studies about switchback experiments, GODOI (1983) noticed that there is a correlation between periods in the milk production data, and presented an analysis based on the generalized least squares method, using a biased estimator to the coefficient of correlation.

The aim of this thesis is to present a proposal to data analysis of milk production in switchback experiments, using the maximum likelihood method, based on the scheme of treatments proposed by LUCAS (1956) and on the following model, proposed by GODOI (1983):

$$y_{ijk} = \mu + p_j + t_k + \varepsilon_{ijk}$$

where y_{ijk} is the observation of the k -th treatment applied ($k=1,2,3$) to the i -th individual ($i=1,2,\dots,6$) in the j -th period ($j=1,2,3$), μ is a constant, p_j is the effect of the j -th period, t_k is the effect of the k -th treatment, and

ε_{ijk} is the error term, so that $\varepsilon_{ijk} = \rho \varepsilon_{i(j-1)k} + e_{ijk}$, where ρ is the coefficient of autocorrelation and $|\rho| < 1$; e_{ijk} has the distribution $N \cap (0, \sigma^2)$.

The method consisted in making the analysis of variance and the "F" test, through the parameters estimated by the of maximum likelihood method for milk production data in switchback experiments.

A computacional program was elaborated for the developed method using the CM proceeding of the SOC Scientific Software, nowadays NTIA.

The data used in the developed method were the same used by GODOI (1983). They refer to the fortnightly average production of 144 Dutch cows in all their usefull periods for switchback experiments.

Five hundred trials were simulated from those data, with and without effects of treatment, in order to study the power of the "F" test on those experiments.

Considering the correlation between periods, we concluded that the developed method is an alternative to the analysis of milk production in switchback experiments, because the test to observe the effects of the treatments proved to be as powerfull as the test developed by GODOI (1983), which is more powerfull than the test based on analysis of LUCAS (1956).

1. INTRODUÇÃO

O experimento em "switchback" foi introduzido por BRANDT (1938) e melhorado por LUCAS (1956), trazendo grande contribuição, principalmente para análise de dados de produção de leite devido ao uso de uma menor quantidade de animais do que nos delineamentos experimentais usuais, além de amenizar a influência da curva de lactação sobre os efeitos de tratamentos.

O esquema de tratamentos mais utilizado para análise destes dados é o caso de 3 tratamentos e 3 períodos que tem o seguinte aspecto:

ANIMAIS	PERÍODOS					
	P ₁	P ₂	P ₃			
1	(1)	(2)	(1)	}	Esquema Reduzido	}
2	(2)	(3)	(2)			
3	(3)	(1)	(3)			
4	(2)	(1)	(2)	}	Esquema Reduzido	
5	(3)	(2)	(3)			
6	(1)	(3)	(1)			

Onde os números entre parêntesis representam o tratamento aplicado.

Quando o número de tratamentos é ímpar, igual a ou maior do que 5, pode-se utilizar o esquema reduzido, que requer a metade das sequências exigidas pelo esquema completo proposto por LUCAS (1956).

Nesses trabalhos os autores apresentaram esquemas de análise de variância e testes de comparações múltiplas sem a definição de um modelo matemático, que foi apresentado mais tarde por GODOI (1971) da seguinte forma:

$$E\left(y_{ijk}\right) = \mu + a_i + p_j + t_k + x_{ij}l_i \quad (1)$$

onde,

μ : média geral;

a_i : efeito do animal i ($i=1,2,\dots,\sigma$);

p_j : efeito do período j ($j=1,2,3$);

t_k : efeito do tratamento k ($k=1,2,3$);

l_i : efeito do período (linear) x animal;

$$x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } j=1 \\ 0 & \text{se } j=2 \\ 1 & \text{se } j=3 \end{cases} \quad \text{para todo } i.$$

Segundo GODOI (1971), a adoção do modelo (1) é justificada pelo isolamento da interação Período (linear) x Animal que é substancialmente significativa quando comparada com os efeitos Período (quadrático) x Animal. Isso torna possível o aumento da sensibilidade do teste F comparada com a análise correspondente aos ensaios com reversão simples cujo modelo matemático é dado por:

$$E(y_{ijk}) = \mu + a_i + p_j + t_k \quad (2)$$

Ao se passar do modelo (2) para o modelo (1) há perda de graus de liberdade do resíduo correspondente ao número de animais menos um.

Uma outra alternativa apresentada por GODOI (1983), para análise de dados de tais experimentos, é adotar um modelo mais simples como:

$$y_{ijk} = \mu + p_j + t_k + e_{ijk} \quad (1)$$

admitindo que os erros das observações entre períodos são correlacionados na forma de um processo Markoviano estacionário de primeira ordem.

Ainda nesse trabalho, o autor concluiu que embora o modelo autorregressivo conduza a um teste de signifi-

cância mais poderoso do que os modelos de LUCAS (1956), no modelo autorregressivo, a análise decorrente leva a um teste F aproximado, faltando as devidas correções para o viés e para a determinação do número de graus de liberdade adequado quando se usa a estimativa do coeficiente de correlação proposta.

Com o intuito de obter melhores resultados na análise dos experimentos em "switchback", o objetivo deste trabalho é estudar o modelo proposto por GODOI (1983) através do método de estimação de máxima verossimilhança, o qual possibilita a incorporação da matriz de covariâncias, conforme sugerem os dados de produção leiteira.

2. REVISÃO DE LITERATURA

BRANDT (1938) iniciou os estudos sobre os ensaios em "switchback" fazendo uma extensão do teste " t " de Student para a comparação de médias de dois tratamentos para três e quatro períodos, apresentando a análise de variância; além disso, apresentou a análise de covariância para uma e duas variáveis concomitantes.

O autor exemplificou os resultados descritos através dos dados de um ensaio de alimentação para 10 vacas em lactação.

LUCAS (1956) fez uma abordagem dos delineamentos em "switchback" que permitem comparações de três ou mais tratamentos, porém, não apresentou deduções da análise de variância e nem sugestões de modelos matemáticos. Mas ressaltou a sensibilidade dos ensaios de reversão na pesquisa com gado de leite, pois permite eliminar do erro residual:

- a) efeito de períodos devido a mudanças no ambiente,
- b) variação entre vacas no nível de produção, e
- c) a maior parte da variação entre vacas na inclinação da curva de lactação.

Para os delineamentos em "switchback" o autor cita que, em geral, comparações de p tratamentos requerem $p(p-1)$ sequências de tratamentos (delineamento completo). Se p é ímpar e igual a 5 ou maior podem ser usados os delineamentos que requerem somente $p(p-1)/2$ sequências (delineamento reduzido).

O autor apresentou uma seleção de esquemas para delineamentos completos (para 3, 4 e 6 tratamentos) e reduzidos (para 5, 7 e 9 tratamentos). Os delineamentos completos foram subdivididos dentro de $p-1$ blocos de p sequências cada, e o delineamento reduzido dentro de $(p-1)/2$ blocos de p sequências cada.

Ainda, segundo o autor, para um erro experimental mínimo, as vacas designadas para o esquema devem ter passado do pico da lactação antes de iniciar o experimento e nenhum animal deverá passar do meio da gestação até o final do ensaio. Quando não é suficiente o número de animais que satisfazem a essas condições para iniciar todas as sequências do delineamento ao mesmo tempo recomenda-se o uso de blocos.

Nesse trabalho, LUCAS (1956) apresentou ainda a análise quando existem dados perdidos ou anormais, pois

ocasionalmente uma vaca pode iniciar o experimento e não terminar, ou sua produção durante um ou mais períodos experimentais pode ser anormal devido a fatores não controláveis.

O autor apresentou também um exemplo para ilustrar o procedimento em blocos no qual os dados simulam um experimento comparando 3 tratamentos com 12 vacas, dos quais 6 iniciam o experimento ao mesmo tempo com o delineamento completo, e as vacas remanescentes iniciam mais tarde em 2 grupos de 3, cada grupo formando um bloco de sequência padrão.

GODOI (1971) estudou dois modelos matemáticos para os ensaios em "switchback", o modelo simplificado ou reduzido e o modelo completo, sobre os quais concluiu que o modelo simplificado resolve a dedução da análise estatística porém, o resíduo decorrente desse modelo apresenta tendenciosidade, devido ao efeito da interação Período (efeito linear) x Vacas não isolado no modelo, mostrando que o modelo completo é o mais adequado.

A partir do modelo

$$y = X\beta + \varepsilon ,$$

onde:

y = vetor das observações;

X = matriz do delineamento;

β = vetor dos parâmetros;

ε = vetor dos erros, onde se pressupõe que os erros são

independentes e $\varepsilon \sim N(\phi, \sigma^2)$.

o autor baseou-se no método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros e deduziu a análise de variância para o modelo simplificado ou reduzido e para o modelo completo.

O autor apresentou também a aplicação do modelo matemático completo no estudo do delineamento em "switchback" quando se tem perda de parcela. As fórmulas apresentadas por LUCAS (1956), para o cálculo da parcela perdida foram discutidas pelo autor e através da esperança matemática demonstrou o viés na estimativa do quadrado médio de tratamentos, fato que compromete a aplicação do teste F.

O autor apresentou ainda um exemplo numérico para ilustrar as deduções feitas e também a introdução do efeito de blocos no modelo completo sem entrar em deduções teóricas. Apresentou também um programa para computador eletrônico na linguagem FORTRAN-IV e sugeriu um modelo matemático para a análise de covariância de dados de delineamentos em "switchback".

GODOI (1983) estudou dois modelos para análise de dados de produção de leite a fim de compará-los. No primeiro modelo os erros foram considerados independentes e no segundo, correlacionados segundo o esquema autorregressivo.

Além da análise da variância, o autor obteve a esperança matemática das somas de quadrados e quadrados médios, e a seguir fez a comparação da sensibilidade dos modelos quanto à detecção de efeitos de tratamentos, tomando

como base um delineamento completo com três tratamentos.

A seguir o autor apresentou um exemplo ilustrativo das análises de variância pelos dois modelos, verificando que o valor de F tende à não rejeição da hipótese de que $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, para os dois modelos, por serem dados não submetidos a tratamentos. O autor considerou também $t_1 = -0,5$, $t_2 = 0$ e $t_3 = 0,5$, que corresponde a uma amplitude de variação de aproximadamente 10% da produção média, considerada em torno de 10 kg; esses efeitos de tratamentos foram adicionados às observações, e refeitas as análises de variância, evidenciando maior sensibilidade da análise pelo modelo autorregressivo do que pelo modelo padrão, quando comparados os respectivos níveis mínimos de significância dos testes F .

A seguir o autor obteve a estimativa de ρ através dos resíduos, justificando que esse método de estimação mostrou-se pelo menos imparcial, dentro das condições experimentais utilizadas, mas concluiu que o teste F é apenas aproximado, necessitando de um estudo mais detalhado para corrigir o viés e determinar o número de graus de liberdade adequado. Ainda, na metodologia do trabalho, o autor fez uma generalização para o caso de k tratamentos.

A principal conclusão do autor foi que o modelo autorregressivo conduz a um teste de significância mais poderoso do que o modelo ajustado para o esquema proposto por LUCAS (1956).

BORA (1984) tratou o problema da análise do delineamento "change-over" com erros que seguem um processo autorregressivo de primeira ordem. Nesse trabalho, foi considerado o seguinte modelo linear fixo:

$$y_{ij(k)} = \mu + \pi_i + \chi_j + \tau_k + u_{ij}$$

onde $y_{ij(k)}$ é a observação devido ao k-ésimo tratamento aplicado no i-ésimo período e j-ésima sequência ($i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, v$), μ é a média geral, π_i é o efeito do i-ésimo período, χ_j é o efeito da j-ésima sequência, τ_k é o efeito do k-ésimo tratamento e u_{ij} é o erro, tal que:

$$u_{ij} = \rho u_{i-1,j} + e_{ij}$$

onde ρ é o coeficiente de autocorrelação e $|\rho| < 1$; $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ independentemente de $u_{i-1,j}$.

Os parâmetros foram estimados pelo método da máxima verossimilhança com o objetivo de estudar o balanceamento do delineamento.

Seguindo os passos dados por RAO (1958) o autor apresentou a condição necessária e suficiente para o balanceamento dos delineamentos "change-over".

Através dos exemplos pode-se verificar que um delineamento "change-over" balanceado na ausência de autocorrelação não é necessariamente balanceado na presença de autocorrelação. Além disso, BORA (1984) observou que o coeficiente de autocorrelação e o efeito de tratamento quando

$\rho \neq 0$ pode ser testado de modo usual com o teste da razão de verossimilhança.

JENNRICH & SCHLUCHTER (1986) estudaram o problema da estimação de máxima verossimilhança em um modelo geral, onde os valores esperados das respostas foram descritas como uma função linear arbitrária de parâmetros de regressão desconhecidos, e as covariâncias dentro de indivíduos foram modeladas como funções arbitrárias de um conjunto de parâmetros de covariância desconhecido.

Este modelo tem a característica de ser mais geral que os modelos utilizados por outros autores. Características de delineamentos não padrões tais como covariável tempo e dados incompletos são automaticamente incorporadas ao modelo.

A análise de variância para o modelo misto univariado e modelos multivariados são casos especiais deste modelo obtido, ao especificar a forma estrutural da matriz de covariâncias dentro de indivíduos: simétrica composta (variância constante, constante fora da diagonal) ou não estruturada (totalmente padronizada). Outras estruturas interessantes podem ser ajustadas incluindo estrutura de efeitos aleatórios, séries temporais e estrutura de fator analítico.

Ainda neste trabalho, os autores estudaram três algoritmos gerais para a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros de regressão e covariâncias: Newton-Raphson, "Scoring" de Fisher, e um algoritmo combinando

"Scoring" e EM generalizado.

O modelo considerado pelos autores foi:

$$y_i = X_i \beta_i + e_i$$

onde,

y_i é o vetor de observações ($t_i \times 1$) para o i -ésimo indivíduo,

com $i = 1, 2, \dots, n$;

X_i é uma matriz ($t_i \times p$), conhecida;

β_i é um vetor ($p \times 1$) de parâmetros desconhecidos e

e_i é o vetor de erros ($t_i \times 1$), e são distribuídos independentemente segundo a $N(0, \Sigma_i)$.

Além disso admitiu-se que os parâmetros β variam independentemente dos parâmetros θ da matriz de covariâncias.

3. METODOLOGIA

3.1. Modelo Matemático

Seja o delineamento completo para 3 tratamentos, segundo LUCAS (1956):

ANIMAIS	PERÍODOS		
	1	2	3
1	(1)	(2)	(1)
2	(2)	(3)	(2)
3	(3)	(1)	(3)
4	(1)	(3)	(1)
5	(2)	(1)	(2)
6	(3)	(2)	(3)

onde os números entre parêntesis indicam o tratamento aplicado.

Supondo que os dados provem de uma população, descrita pelo modelo:

$$E[y_{ijk}] = \mu + p_j + t_k$$

onde,

y_{ijk} é a observação do i -ésimo indivíduo no j -ésimo período aplicado ao k -ésimo tratamento,

μ é a média geral,

p_j é o j -ésimo período, e

t_k é o k -ésimo tratamento,

com, $j = 1, 2, 3$ (número de períodos), $k = 1, 2, 3$ (número de tratamentos) e $i = 1, 2, \dots, 6$ (número de animais).

O modelo na forma matricial será:

$$y = X\beta + e$$

ou ainda, o modelo proposto por JENNRICH & SCHLUCHTER (1986) fica:

$$y_i = X_i\beta + e_i$$

onde,

y_i é o vetor de observações (3x1) para o i -ésimo indivíduo,

X_i é uma matriz de delineamento (3x3) para o i -ésimo indivíduo,

β é um vetor (3x1) de parâmetros desconhecidos e

e_i é um vetor de erros (3x1), e são distribuídos independentemente segundo a $N(0; \Sigma_i)$.

Para o presente delineamento X e y ficam

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ \hline y_{212} \\ y_{223} \\ y_{232} \\ \hline y_{313} \\ y_{321} \\ y_{333} \\ \hline y_{411} \\ y_{423} \\ y_{431} \\ \hline y_{512} \\ y_{521} \\ y_{532} \\ \hline y_{613} \\ y_{622} \\ y_{633} \end{bmatrix}$$

e,

$$\beta = \begin{bmatrix} \mu^* \\ p_1^* \\ p_2^* \\ \hline t_1^* \\ t_2^* \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \rho \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \hline e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

onde $p_1^* = p_1 - p_3$, $p_2^* = p_2 - p_3$, $t_1^* = t_1 - t_3$ e $t_2^* = t_2 - t_3$.

Além disso admite-se que os parâmetros β variam independentemente dos parâmetros θ .

Com as suposições do modelo tem-se que

$$y_i \sim N[X_i \beta; \Sigma_i].$$

Segundo GODOI (1983) A matriz Σ_i sugerida pelos dados de produção de leite pode ser

$$\Sigma_i = A\sigma^2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix} \sigma^2.$$

A matriz inversa de A é

$$A^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando

$$D = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & -\rho & 0 \\ 0 & 1 & -\rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tal que, $DD' = A^{-1}$, então $A = (D^{-1})'D^{-1} = (D')^{-1}D^{-1}$ e seja

$$y_\rho = (I_\sigma \otimes D')y$$

onde, y é o vetor das observações originais e y_ρ o vetor de observações transformadas, então

$$E[y_\rho] = (\mathbb{I}_\sigma \otimes D')X\beta$$

e,

$$\text{Var}[y_\rho] = (\mathbb{I}_\sigma \otimes D') \text{Var}[y] (\mathbb{I}_\sigma \otimes D')'$$

ou seja,

$$\text{Var}[y_\rho] = (\mathbb{I}_\sigma \otimes D')(\mathbb{I}_\sigma \otimes A)(\mathbb{I}_\sigma \otimes D')'\sigma^2,$$

onde σ^2 é a variância de e_{ijk} no modelo autorregressivo.

Ainda,

$$\begin{aligned} \text{Var}[y_\rho] &= (\mathbb{I}_\sigma \otimes D') [\mathbb{I}_\sigma \otimes (D')^{-1}D^{-1}] (\mathbb{I}_\sigma \otimes D') \sigma^2 \\ &= [\mathbb{I}_\sigma \otimes D'(D')^{-1}D^{-1}D] \sigma^2 \\ &= (\mathbb{I}_\sigma \otimes \mathbb{I}_3) \sigma^2 \\ &= \mathbb{I}_{18} \sigma^2 \end{aligned}$$

3.2. A função de Verossimilhança e suas derivadas

A estimação simultânea de β e θ será feita através do método da máxima verossimilhança com base na distribuição conjunta de $y = [y_1', \dots, y_n']'$. Como, sob a suposição de normalidade, a distribuição marginal dos y_i 's é dada por

$$y_i \sim N(X_i\beta; \Sigma_i),$$

a função de verossimilhança associada é

$$L(y; \beta, \theta) = (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^n |\Sigma_i|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i\beta)' \Sigma_i^{-1} (y_i - X_i\beta) \right].$$

Para obter as estimativas de máxima verossimilhança de β e θ é preciso encontrar $\hat{\beta}$ e $\hat{\theta}$ que maximizam a função de verossimilhança. Isso é equivalente a maximizar o logaritmo da função de verossimilhança que é dado por:

$$\lambda = \text{CTE} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log |\Sigma_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \beta)' \Sigma_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \beta)$$

onde CTE é uma constante que não depende de β e nem de θ .

O vetor escore s e a matriz Hessiana H são:

$$s = \begin{bmatrix} s_{\beta} \\ s_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \lambda / \partial \beta \\ \partial \lambda / \partial \theta \end{bmatrix}$$

e

$$H = \begin{bmatrix} H_{\beta\beta} & H_{\beta\theta} \\ H_{\theta\beta} & H_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 \lambda / \partial \beta \partial \beta & \partial^2 \lambda / \partial \beta \partial \theta \\ \partial^2 \lambda / \partial \theta \partial \beta & \partial^2 \lambda / \partial \theta \partial \theta \end{bmatrix}$$

onde as expressões para os elementos de s e H são dadas por:

a) Cálculo de s_{β}

$$s_{\beta} = \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{y}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{y}_i - 2 \mathbf{y}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{X}_i \beta + \beta' \mathbf{X}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{X}_i \beta \right) \right]$$

$$s_{\beta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[-2 \mathbf{X}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{y}_i + 2 \mathbf{X}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{X}_i \beta \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{X}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{X}_i \beta \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i' \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \beta \right)$$

como $y_i - X_i \beta = e_i$,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n X_i' \Sigma_i^{-1} e_i$$

b) Cálculo de s_θ

Antes de calcular s_θ , o logaritmo da função de verossimilhança foi organizada na seguinte forma:

$$\lambda = \text{CTE} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log |\Sigma_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i' \Sigma_i^{-1} e_i$$

lembrando que

$$e_i' \Sigma_i^{-1} e_i = \text{tr} \left(e_i' \Sigma_i^{-1} e_i \right) = \text{tr} \left(e_i e_i' \Sigma_i^{-1} \right)$$

e

$$\log |\Sigma_i| = \text{tr} \left[\log |\Sigma_i| \right]$$

o logaritmo da função de verossimilhança fica

$$\lambda = \text{CTE} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\log |\Sigma_i| \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left(e_i e_i' \Sigma_i^{-1} \right).$$

Lembrando ainda que:

$$\frac{\partial \log |A|}{\partial A} = \left(A' \right)^{-1} \quad \left(|A| > 0 \right)$$

e

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial x} = - A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x} A^{-1}$$

então, usando no caso em questão

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta_r} = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\frac{\partial \log |\Sigma_i|}{\partial \Sigma_i} \frac{\partial \Sigma_i}{\partial \theta_r} \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[e_i e_i' \frac{\partial \Sigma_i^{-1}}{\partial \theta_r} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \Sigma_i \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} - \Sigma_i^{-1} \Sigma_i \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right]
\end{aligned}$$

com $r=1,2$, onde $\dot{\Sigma}_{ir} = \frac{\partial \Sigma_i}{\partial \theta_r}$

c) Cálculo de $\mathbb{H}_{\beta\beta}$

$$\mathbb{H}_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \beta \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i' \Sigma_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathcal{X}_i \beta) \right]$$

$$\mathbb{H}_{\beta\beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{y}_i - \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i' \Sigma_i^{-1} \mathcal{X}_i \beta \right]$$

assim,

$$\mathbb{H}_{\beta\beta} = - \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i' \Sigma_i^{-1} \mathcal{X}_i$$

d) Cálculo de $\mathbb{H}_{\beta\theta}$

$$\mathbb{H}_{\beta\theta} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \beta \partial \theta} = \left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \beta_i \partial \theta_r} \right] = \left[\langle \mathbb{H}_{\beta\theta} \rangle_{lr} \right]$$

$$\text{como } \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \mathcal{X}'_i \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta_l} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_{il} \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i$$

onde $\mathbf{x}_{il}$ é a l -ésima coluna de $\mathcal{X}_l$, logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \beta_l \partial \theta_r} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_{il} \frac{\partial \Sigma_i^{-1}}{\partial \theta_r} \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_{il} \left(-\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} \right) \mathbf{e}_i \\ &= - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_{il} \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

com $l=1,2,\dots,5$ colunas da matriz $\mathcal{X}_l$ e $r=1,2$ parâmetros do vetor θ .

e) Cálculo de $H_{\theta\theta}$

$$\left[H_{\theta\theta} \right]_{rs} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta_r \partial \theta_s}$$

$$\left[H_{\theta\theta} \right]_{rs} = \frac{\partial}{\partial \theta_s} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \Sigma_i^{-1} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}'_i - \Sigma_i) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right]$$

$r=1,2,\dots,q$.

Sejam,

$$\mathbb{T} = \Sigma_i^{-1} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}'_i - \Sigma_i)$$

$$\mathbb{U} = \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir}$$

sabemos que:

$$\frac{\partial \langle \Pi U \rangle}{\partial \mathbf{x}} = \Pi \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} U$$

assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \Pi U \rangle}{\partial \theta_s} &= \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \frac{\partial}{\partial \theta_s} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta_s} \left[\Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \right] \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \\ &= \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \left(\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{i,rs} - \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right) + \\ &+ \left[-\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} - \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \right] \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \\ &= \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{i,rs} - \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} + \\ &+ \left[-\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} - \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' + \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \right] \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \\ &= \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{i,rs} - \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} - \\ &- \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \end{aligned}$$

$$\left[\mathbb{H}_{\theta\theta} \right]_{rs} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\frac{\partial \Pi U}{\partial \theta_s} \right]$$

assim,

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] &= \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i \right) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \right] \\ \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \right] &= \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \right] = \\ &= \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \right] \end{aligned}$$

$$[\mathbb{H}_{\theta\theta}]_{rs} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i) \Sigma_i^{-1} \ddot{\Sigma}_{i,rs} \right] + \\ & - \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \right] + \\ & - \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$[\mathbb{H}_{\theta\theta}]_{rs} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i) \Sigma_i^{-1} \ddot{\Sigma}_{i,rs} \right] +$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} (2\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' - \Sigma_i) \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \right]$$

onde $\ddot{\Sigma}_{i,rs} = \frac{\partial^2 \Sigma_i}{\partial \theta_r \partial \theta_s}$. Os elementos de $\dot{\Sigma}_{ir}$, $\ddot{\Sigma}_{i,rs}$, são respectivamente, as derivadas parciais de primeira e segunda ordem dos elementos de Σ_i com relação a $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$.

Por outro lado,

$$E[\mathbb{H}_{\beta\beta}] = - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i' \Sigma_i^{-1} \mathbf{x}_i,$$

$$E\left[\left[\mathbb{H}_{\theta\theta}\right]_{rs}\right] = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{is} \right]$$

$$\text{pois, } E[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i'] = \Sigma_i \text{ e } \Sigma_i^{-1} \Sigma_i \Sigma_i^{-1} = \Sigma_i^{-1} \text{ e,}$$

$$E\left[\left[\mathbb{H}_{\beta\theta}\right]_{jr}\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i' \Sigma_i^{-1} \dot{\Sigma}_{ir} \Sigma_i^{-1} E[\mathbf{e}_i] = \phi$$

$$\text{pois, } E[\mathbf{e}_i] = \phi.$$

3.3. Algoritmo de Newton-Raphson e "Scoring" de Fisher

O Algoritmo de Newton-Raphson é um processo iterativo utilizado para encontrar pontos de máximo de uma função.

Mais especificamente, a $(w+1)$ -ésima iteração do algoritmo de Newton-Raphson para obtenção das estimativas de máxima verossimilhança é dada por:

$$\theta^{(w+1)} = \theta^{(w)} - H[\theta^{(w)}]^{-1} s[\theta^{(w)}]$$

para $w = 0, 1, 2, \dots$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \beta^{(w+1)} \\ \theta^{(w+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^{(w)} \\ \theta^{(w)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{\beta\beta}^{(w)} & H_{\beta\theta}^{(w)} \\ H_{\theta\beta}^{(w)} & H_{\theta\theta}^{(w)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_{\beta}^{(w)} \\ s_{\theta}^{(w)} \end{bmatrix}$$

O algoritmo "Scoring" de Fisher é uma modificação do algoritmo de Newton-Raphson, também utilizado para encontrar estimativas de máxima verossimilhança.

Esse algoritmo consiste em substituir na expressão anterior, $H[\theta^{(w)}]$ por $-I[\theta^{(w)}]$, onde $I[\theta] = E[-H(\theta)]$ é a matriz de informação de Fisher.

Dessa forma, o algoritmo "Scoring" de Fisher pode ser definido como:

$$\theta^{(w+1)} = \theta^{(w)} + I[\theta^{(w)}]^{-1} s[\theta^{(w)}]$$

para $w = 0, 1, 2, \dots$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \beta^{(v+1)} \\ \theta^{(v+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^{(v)} \\ \theta^{(v)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\beta\beta} & \phi \\ \phi & \mathcal{J}_{\theta\theta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_{\beta}^{(v)} \\ s_{\theta}^{(v)} \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \beta^{(v+1)} \\ \theta^{(v+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^{(v)} + \left(\mathcal{J}_{\beta\beta}^{(v)} \right)^{-1} s_{\beta}^{(v)} \\ \theta^{(v)} + \left(\mathcal{J}_{\theta\theta}^{(v)} \right)^{-1} s_{\theta}^{(v)} \end{bmatrix}$$

onde as expressões de $\mathcal{J}_{\beta\beta}^{(v)} = -E \left[H_{\beta\beta} \right]$ e $\mathcal{J}_{\theta\theta}^{(v)} = -E \left[H_{\theta\theta} \right]$ também são dadas no item 3.2.

3.4. Estimação

Quando o critério de convergência desejado é atingido, obtém-se o estimador de máxima verossimilhança de β e θ , onde

$$\beta^{(v+1)} = \beta^{(v)} + \left(\mathcal{J}_{\beta\beta}^{(v)} \right)^{-1} s_{\beta}^{(v)}$$

e

$$\theta^{(v+1)} = \theta^{(v)} + \left(\mathcal{J}_{\theta\theta}^{(v)} \right)^{-1} s_{\theta}^{(v)}.$$

3.5. Análise da variância no modelo autorregressivo

3.5.1. Sistema de equações normais

Para facilitar a notação será adotado

$$\beta^{(v+1)} = \hat{\beta}.$$

O sistema de equações normais para o delineamento em estudo é dado, por:

$$[\mathbf{I}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{D}')\mathbf{X}][\mathbf{I}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{D}')\mathbf{X}]\hat{\beta} = [\mathbf{I}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{D}')\mathbf{X}]\mathbf{y}_\rho$$

$$[\mathbf{X}'(\mathbf{I} \otimes \mathbf{D}')][\mathbf{I}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{D}')\mathbf{X}]\hat{\beta} = [\mathbf{X}'(\mathbf{I} \otimes \mathbf{D}')]\mathbf{y}_\rho$$

$$\mathbf{X}'(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}^{-1})\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}'(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}^{-1})\mathbf{y}.$$

Dado que no presente delineamento o número de períodos é 3, o número de tratamentos é 3 e o número de animais é 6, obtêm-se as seguintes matrizes do sistema de equações normais:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbb{I}_6 \otimes \mathbb{D}' \rangle \mathbb{X} &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\begin{array}{ccc|cc}
 \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\
 1-\rho & -\rho & 1 & -\rho & 1 \\
 1-\rho & -1 & -1-\rho & 1 & -\rho \\
 \hline
 \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & -\sqrt{1-\rho^2} \\
 1-\rho & -\rho & 1 & -1 & -1-\rho \\
 1-\rho & -1 & -1-\rho & \rho & 1+\rho \\
 \hline
 \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & -\sqrt{1-\rho^2} & -\sqrt{1-\rho^2} \\
 1-\rho & -\rho & 1 & 1+\rho & \rho \\
 1-\rho & -1 & -1-\rho & -1-\rho & -1 \\
 \hline
 \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\
 1-\rho & -\rho & 1 & -1-\rho & -1 \\
 1-\rho & -1 & -1-\rho & 1+\rho & \rho \\
 \hline
 \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \sqrt{1-\rho^2} \\
 1-\rho & -\rho & 1 & 1 & -\rho \\
 1-\rho & -1 & -1-\rho & -\rho & 1 \\
 \hline
 \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & -\sqrt{1-\rho^2} & -\sqrt{1-\rho^2} \\
 1-\rho & -\rho & 1 & \rho & 1+\rho \\
 1-\rho & -1 & -1-\rho & -1 & -1-\rho
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{X}' \langle \mathbb{I}_6 \otimes \mathbb{D}' \rangle \mathbb{X} = \left[\begin{array}{ccc|cc}
 6(1-\rho)(3-\rho) & 0 & -6\rho(1-\rho) & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\
 -6\rho(1-\rho) & 6 & 6[1+(1+\rho)^2] & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 12+8\rho+4\rho^2 & 6+4\rho+2\rho^2 \\
 0 & 0 & 0 & 6+4\rho+2\rho^2 & 12+8\rho+4\rho^2
 \end{array} \right]$$

$$(\mathbb{I}_6 \otimes \mathbb{D}')\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} y_{111} \\ -\rho y_{111} + y_{122} \\ -\rho y_{122} + y_{131} \\ \dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{212} \\ -\rho y_{212} + y_{223} \\ -\rho y_{223} + y_{232} \\ \dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{313} \\ -\rho y_{313} + y_{321} \\ -\rho y_{321} + y_{333} \\ \dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{411} \\ -\rho y_{411} + y_{423} \\ -\rho y_{423} + y_{431} \\ \dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{512} \\ -\rho y_{512} + y_{521} \\ -\rho y_{521} + y_{532} \\ \dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{613} \\ -\rho y_{613} + y_{622} \\ -\rho y_{622} + y_{633} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{X}'(\mathbb{I}_6 \otimes \mathbb{D}')\mathbf{y} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} (1-\rho)P_1 + (1-\rho)^2P_2 + (1-\rho)P_3 \\ \dots \\ P_1 - P_3 \\ -\rho P_1 + (1+\rho+\rho^2)P_2 - (1-\rho)P_3 \\ \dots \\ [T_1 - T_3] - \rho T_{13} + \rho^2 [T_1^{(2)} - T_3^{(2)}] \\ [T_2 - T_3] - \rho T_{23} + \rho^2 [T_2^{(2)} - T_3^{(2)}] \end{bmatrix}$$

onde,

P_{jk} : soma das observações que no período j precedem ou sucedem o tratamento k ;

T_k : soma das observações referentes ao tratamento k ;

$T_k^{(2)}$: soma das observações referentes ao tratamento k , no período j ;

P_j : soma das observações do período j ;

$$T_{13} = (P_{11} + 2P_{21} + P_{31}) - (P_{13} + 2P_{23} + P_{33})$$

$$T_{23} = (P_{12} + 2P_{22} + P_{32}) - (P_{13} + 2P_{23} + P_{33})$$

Outra forma matricial e mais simples do sistema de equações normais pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} c & l' & m' \\ 1 & P & N' \\ m & N & T \end{bmatrix} \hat{\beta} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ P(\rho) \\ T(\rho) \end{bmatrix}.$$

Considerando $\beta' = [\mu \quad p' \quad t']$, com

$$p = \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* \end{bmatrix} \text{ e } t = \begin{bmatrix} t_1^* & t_2^* \end{bmatrix},$$

o sistema fica da seguinte forma:

$$\frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} c & l' & m' \\ 1 & P & N' \\ m & N & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{p} \\ \hat{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ P(\rho) \\ T(\rho) \end{bmatrix}.$$

3.5.2. Somas de quadrados

Considerando

$$y_\rho = (I_0 \otimes D')y \rightarrow E(y_\rho) = (I_0 \otimes D')\beta$$

sabe-se que

$$\varepsilon = y_{\rho} - E(y_{\rho})$$

logo,

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} &= [y_{\rho} - E(y_{\rho})]'[y_{\rho} - E(y_{\rho})] \\ &= [y_{\rho} - (I_{\rho} \otimes D')X\hat{\beta}]'[y_{\rho} - (I_{\rho} \otimes D')X\hat{\beta}] \\ &= y'_{\rho}y_{\rho} - y'_{\rho}(I_{\rho} \otimes D')X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes D)y_{\rho} + \\ &\quad + \hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes D)(I_{\rho} \otimes D')X\hat{\beta} \\ &= y'(I_{\rho} \otimes D)(I_{\rho} \otimes D')y - y'(I_{\rho} \otimes D)(I_{\rho} \otimes D')X\hat{\beta} + \\ &\quad - \hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes D)(I_{\rho} \otimes D')y + \hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})X\hat{\beta} \\ &= y'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y - 2\hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y + \\ &\quad + \hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})X[X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})X]^{-1}X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y \\ &= y'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y - 2\hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y + \hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y\end{aligned}$$

Desta forma

$$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = y'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y - \hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y$$

ou ainda,

$$S.Q.Resíduo = S.Q.Total - S.Q.Parâmetros$$

onde,

$$S.Q.Total = y'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y$$

e

$$S.Q.Parâmetros = \hat{\beta}'X'(I_{\rho} \otimes A^{-1})y,$$

no qual,

$$S.Q.Parâmetros = \begin{bmatrix} \hat{\mu} & \hat{p}' & \hat{t}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ P(\rho) \\ T(\rho) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$= \hat{\mu}.G(\rho) + \hat{p}'.P(\rho) + \hat{t}'.T(\rho)$$

sendo,

$$S.Q.Média = \hat{\mu}.G(\rho)$$

$$S.Q.Períodos = \hat{p}'.P(\rho)$$

$$S.Q.Tratamentos_{aj} = \hat{t}'.T(\rho)$$

3.5.3. Quadro de análise de variância

HARVILLE (1977) comentou que geralmente é feita uma crítica aos estimadores de máxima verossimilhança dos elementos de θ , pois não levam em consideração a perda de graus de liberdade resultantes da estimação de β , sendo em geral viciados e subestimados, ou seja, alguns componentes de $\hat{\theta}$ são menores que os correspondentes obtidos pela análise de variância.

Os quadrados médios que compõem o quadro da análise de variância são obtidos pelos quocientes das somas de quadrados pelos seus respectivos graus de liberdade. Desta forma, o quadrado médio da média e períodos será

$$Q.M.(M+P) = S.Q.(M+P)/3,$$

o quadrado médio de tratamentos ajustados:

$$Q.M.Trat_{aj} = S.Q.Trat_{aj}/2$$

e o quadrado médio do resíduo:

$$Q.M.Res = S.Q.Res/13.$$

O esquema de análise de variância contendo os graus de liberdade, somas de quadrados e quadrados médios são apresentadas no quadro a seguir:

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.
Períodos e Média	3	$\hat{\mu}.G(\rho) + \hat{p}'.P(\rho)$	QM(M+P)
Tratamentos _(aj)	2	$\hat{t}'.T(\rho)$	QMTRAT _{aj}
Parâmetros	5	$\hat{\beta}'X'(\mathbb{I}_6 \otimes A^{-1})y$	QMPAR
Resíduo	13	$y'(\mathbb{I}_6 \otimes A^{-1})y - \hat{\beta}'X'(\mathbb{I}_6 \otimes A^{-1})y$	QMRES
Total	18	$y'(\mathbb{I}_6 \otimes A^{-1})y$	

3.5.4. Teste F

Para verificar a hipótese referente aos tratamentos através do teste F, a estatística será

$$F = \frac{Q.M.Trat_{(aj)}}{Q.M.Res}.$$

3.5.5. Programa no módulo CM do SOC - Software Científico

Para efetuar a análise foi elaborado um programa no módulo CM do SOC - Software Científico e é apresentado a seguir:

```
CM /* CHAMA MODULO CM */
```

```
Cmd "Cls";
```

```
Anote "***** Matriz Y' *****";
y = {9.64, 9.88, 7.96, 13.95, 13.13, 10.49, 8.26, 7.69,
7.50, 8.75, 8.48, 8.37, 9.38, 8.55, 7.43, 17.07, 14.61,
14.30};
Imprime y' $ 8:4;
```

```
a = {1 1 1 1 1 1};
um = {a,a,a};
c = {1 0, 0 1, (-1) (-1)};
b = {1 0,0 1,1 0,0 1,(-1) (-1),0 1,(-1) (-1),1 0,(-1) (-1),1
0,(-1) (-1),1 0,0 1,1 0,0 1,(-1) (-1), 0 1,(-1) (-1)};
```

```
Anote "***** Matriz X *****";
x = { um {c,c,c,c,c,c} b};
Imprime x $ 6:0;
```

```
a=;
b=;
c=;
```

```
Anote "***** Posto de X *****";
k = posto(x);
Imprime k $ 5:0;
```

```
Anote "***** Matriz de Parametros *****";
par = {1 3,4 6,7 9,10 12,13 15,16 18,0.9 0};
npar = Nlin(par);
Imprime par' $ 5:1;
```

```
Anote "***** Ro *****";
ro = par\inpar,1;
Imprime ro $ 5:4;
```

```

/* Calculando BETA0 */

k1 = inv(x'x);
nx = Nlin(x);
Beta0 = k1*x'y;
Anote "***** Beta0' *****";
Imprime Beta0' $ 8:4;
Sigma0 = (y'y - beta0'*x*y)/(nx - k);
Anote "***** Sigma0 *****";
Imprime sigma0' $ 8:4;

/* Valores iniciais dos parametros de covariancia */

teta0 = {sigma0,ro};
Anote "***** Teta0' *****";
Imprime teta0' $ 8:4;
it=1;
While (it < npar)
{
  if (it == 1)
  {
    x1=x[1:3,1];
    y1=y[1:3,1];
  }
  if (it == 2)
  {
    x2=x[4:6,1];
    y2=y[4:6,1];
  }
  if (it == 3)
  {
    x3=x[7:9,1];
    y3=y[7:9,1];
  }
  if (it == 4)
  {
    x4=x[10:12,1];
    y4=y[10:12,1];
  }
  if (it == 5)
  {
    x5=x[13:15,1];
    y5=y[13:15,1];
  }
  if (it == 6)
  {
    x6=x[16:18,1];
    y6=y[16:18,1];
  }
  it = it + 1;
}
it = it - 1;

```

```

iter = 1;
cond = 1;
Nx1 = Nlin(x1);
cov = 0*Ident(Nx1);
dro = cov;
While (iter <= 20 && cond > 0.001)
{
  i = 1;
  While(i <= Nx1)
  {
    j = 1;
    While(j <= Nx1)
    {
      Covf1,j] = sigma0*(ro#abs(i-j));
      drof1,j] = sigma0*abs(i-j)*(ro#(abs(i-j)-1));
      j = j + 1;
    }
    i = i + 1;
  }
  icov = inv(cov);
  i = 1;

```

/* Calculo de Beta Chapeu */

```

z1 = x1'*icov*x1;
z2 = x1'*icov*y1;
i = 2;
if (i <= it)
{
  z1 = z1 + x2'*icov*x2;
  z2 = z2 + x2'*icov*y2;
  i = 3;
}
if (i <= it)
{
  z1 = z1 + x3'*icov*x3;
  z2 = z2 + x3'*icov*y3;
  i = 4;
}
if (i <= it)
{
  z1 = z1 + x4'*icov*x4;
  z2 = z2 + x4'*icov*y4;
  i = 5;
}
if (i <= it)
{
  z1 = z1 + x5'*icov*x5;
  z2 = z2 + x5'*icov*y5;
  i = 6;
}
if (i <= it)

```

```

{
  z1 = z1 + x6'*icov*x6;
  z2 = z2 + x6'*icov*y6;
  i = 7;
}
betas = inv(z1)*z2;
Anote "***** Betas' *****";
Imprime betas' $ 8:4;
ht11 = (-1/(2*sigma0*sigma0))*(it*nx1);
ht12 = (-0.5/sigma0)*(it*traco(icov*dro));
ht22 = (-0.5)*it*traco((icov*dro)*(icov*dro));
Anote "***** HTT's *****";
htt = {ht11 ht12,ht12 ht22};
Imprime htt $ 12:4;
I = 1;
st1 = 0;st2=0;
aux1 = 0*ident(Nx1);
While (I <= it)
{
  if(i == 1)aux1=icov*((y1-x1*betas)*(y1-x1*betas)')-cov);
  if(i == 2)aux1=icov*((y2-x2*betas)*(y2-x2*betas)')-cov);
  if(i == 3)aux1=icov*((y3-x3*betas)*(y3-x3*betas)')-cov);
  if(i == 4)aux1=icov*((y4-x4*betas)*(y4-x4*betas)')-cov);
  if(i == 5)aux1=icov*((y5-x5*betas)*(y5-x5*betas)')-cov);
  if(i == 6)aux1=icov*((y6-x6*betas)*(y6-x6*betas)')-cov);
  st1 = st1 + (0.5/sigma0)*traco(aux1);
  st2 = st2 + 0.5*traco(aux1*icov*dro);
  i = i + 1;
}
st = {st1,st2};
Anote "***** ST *****";
Imprime st $ 8:4;
tetas = teta0 - 0.5*inv(htt)*st;
Anote "***** Tetas ' *****";
Imprime tetas' $ 8:4;
cond = sqrt(squad(tetas - teta0)/squad(teta0));
Anote "***** CONDICAO ITERACAO *****";
Imprime { cond iter } $ 10:4 ("Condicao,Iteracao");

/* Novos valores iniciais */

beta0 = betas;
teta0 = tetas;
sigma0 = teta0[1,];
ro = teta0[2,];
iter = iter + 1;
}

/* ANALISE DE VARIANCIA */

d = (1/(1-ro^2))*(1 (-ro) 0, (-ro) (1+ro^2) (-ro), 0 (-ro) 1);
g = ident(6) @ d;

```

```

xlm = x'*g;
xlmx = xlm*x;
xlmy = xlm*y;

/* Particao do vetor de parametros estimados */

m = beta0[1,1];
p = beta0[2 3, 1];
t = beta0[4 5, 1];

/* Particao do vetor do segundo membro das equacoes normais
*/
mro = xlmy[1,1];
pro = xlmy[2 3,1];
tro = xlmy[4 5,1];

/* Somas de quadrados */

sqpar = beta0'*xlmy;
sqm = m*mro;
sqper = p'*pro;
sqtrat = t'*tro;
sqto = y'*g*y;
sqres = sqto - sqpar;
sqmp = sqm + sqper;

/* Quadrados médios */

qmtrat = sqtrat/2;
qmres = sqres/13;

/* Calculo da estatistica F e nivel minimo de significancia
*/
f = qmtrat/qmres;
alfa = fprob(f,2,13);

/* Saida resultados finais */

Anote "";
Anote "";
Anote "          +-----+";
Anote "          + R e s u l t a d o s +";
Anote "          +-----+";
Anote "";
Anote "***** iter Cond Sigma Ro *****
*****";
Imprime {iter cond sigma0 ro} $ 10:4 (" Iteracao, Condicao,
Sigma, Ro");
Anote "***** Cov *****
*****";

```

```

Imprime Cov $ 8:4;
Anote "***** BETA0' *****";
Imprime beta0' $ 8:4;

Anote "";
Anote "";
Anote "                ANALISE DE VARIÂNCIA";
Anote "";
Anote "";
Imprime {sqmp sqtrat sqpar sqres sqto qmtrat qmres f alfa
ro} $ 10:4 ("sqmp, sqtrat, sqpar, sqres, sqto, qmtrat,
qmres, fcal, nms, ro");
Anote "";
Anote "";

fim;

```

3.5.6. Exemplo

A título de ilustração foram considerados os mesmos dados analisados por GODOI (1983), ou seja, foram tomados da tabela 1 (apêndice) os primeiros dados referentes às 6 primeiras vacas e três períodos.

Quadro 1 - Produção média de leite em kg ($t_1 = t_2 = t_3 = 0$).

Animais	Períodos		
	P ₁	P ₂	P ₃
1	9,64 (1)	9,88 (2)	7,96 (1)
2	13,95 (2)	13,13 (3)	10,49 (2)
3	8,26 (3)	7,69 (1)	7,50 (3)
4	8,75 (1)	8,48 (3)	8,37 (1)
5	9,38 (2)	8,55 (1)	7,43 (2)
6	17,07 (3)	14,61 (2)	14,30 (3)

Através do programa computacional apresentado no item anterior, para estimativa dos parâmetros, pelo método da máxima verossimilhança, e a análise de variância foi obtida a seguinte saída:

<1>> CM /* CHAMA MODULO CM */

Nota: Modulo CM executado em 1 m 27.00 s.

_____ Fim do exec _____

***** Matriz Y' *****

\$17	Col1	Col2	Col3	Col4	Col5	Col6	Col7	Col8
Lin1	9.64	9.88	7.96	13.95	13.13	10.49	8.26	7.69

\$17	Col9	Col10	Col11	Col12	Col13	Col14	Col15	Col16
Lin1	7.5	8.75	8.48	8.37	9.38	8.55	7.43	17.07

\$17	Col17	Col18
Lin1	14.61	14.3

***** Matriz X *****

x	Col1	Col2	Col3	Col4	Col5
Lin1	1	1	0	1	0
Lin2	1	0	1	0	1
Lin3	1	-1	-1	1	0
Lin4	1	1	0	0	1
Lin5	1	0	1	-1	-1
Lin6	1	-1	-1	0	1
Lin7	1	1	0	-1	-1
Lin8	1	0	1	1	0
Lin9	1	-1	-1	-1	-1
Lin10	1	1	0	1	0
Lin11	1	0	1	-1	-1
Lin12	1	-1	-1	1	0
Lin13	1	1	0	0	1
Lin14	1	0	1	1	0
Lin15	1	-1	-1	0	1
Lin16	1	1	0	-1	-1
Lin17	1	0	1	0	1
Lin18	1	-1	-1	-1	-1

***** Posto de X *****

k Col1

Lin1 5

***** Matriz de Parametros *****

\$106 Col1 Col2 Col3 Col4 Col5 Col6 Col7

Lin1 1 4 7 10 13 16 0.9

Lin2 3 6 9 12 15 18 0

***** Ro *****

ro Col1

Lin1 0.9

***** Beta0' *****

\$124 Col1 Col2 Col3 Col4 Col5

Lin1 10.3022 0.8728 0.0878 -1.8089 0.6544

***** Sigma0 *****

\$135 Col1

Lin1 8.3009

***** Teta0' *****

\$137 Col1 Col2

Lin1 8.3009 0.9

***** Betas' *****

\$602 Col1 Col2 Col3 Col4 Col5

Lin1 10.3022 0.8728 0.0878 -0.228 -0.1632

***** HTT's *****

htt Col1 Col2

Lin1 -0.1306 6.8477

Lin2 6.8477 -601.662

***** ST *****

st Col1

Lin1 -0.4621

Lin2 37.032

***** Tetas ' *****

\$792 Col1 Col2

Lin1 7.9154 0.9264

***** CONDICAO ITERACAO *****

\$799 Condicao Iteracao

Lin1 0.0463 1

***** Betas' *****

\$1150 Col1 Col2 Col3 Col4 Col5

Lin1 10.3022 0.8728 0.0878 -0.2124 -0.1672

***** HTT's *****

htt Col1 Col2

Lin1 -0.1436 9.9038

Lin2 9.9038 -1108.8573

***** ST *****

st Col1

Lin1 -0.3554

Lin2 37.7026

***** Tetas ' *****

\$1340 Col1 Col2

Lin1 7.7464 0.9419

***** CONDICAO ITERACAO *****

\$1347 Condicao Iteracao

Lin1 0.0213 2

***** Betas' *****

\$1698 Col1 Col2 Col3 Col4 Col5

Lin1 10.3022 0.8728 0.0878 -0.2037 -0.1692

***** HTT's *****

 Col1 Col2

Lin1 -0.15 12.9275

Lin2 12.9275 -1777.7056

***** ST *****

st Col1

Lin1 -0.2389

Lin2 31.7727

***** Tetas ' *****

\$1888 Col1 Col2

Lin1 7.6759 0.9503

***** CONDICAO ITERACAO *****

\$1895 Condicao Iteracao

Lin1 0.0091 3

***** Betas' *****

\$2246 Col1 Col2 Col3 Col4 Col5

Lin1 10.3022 0.8728 0.0878 -0.1991 -0.1702

***** HTT's *****

htt Col1 Col2

Lin1 -0.1528 15.3276

Lin2 15.3276 -2430.8514

***** ST *****

st Col1

Lin1 -0.1435

Lin2 22.2703

***** Tetas ' *****

\$2436 Col1 Col2

Lin1 7.6484 0.9547

***** CONDICAO ITERACAO *****

\$2443 Condicao Iteracao

Lin1 0.0036 4

***** Betas' *****

\$2794 Col1 Col2 Col3 Col4 Col5

Lin1 10.3022 0.8728 0.0878 -0.1968 -0.1707

***** HTT's *****

htt Col1 Col2

Lin1 -0.1539 16.9197

Lin2 16.9197 -2926.624

***** ST *****

st Col1

Lin1 -0.0796

Lin2 13.5855

***** Tetas ' *****

\$2984 Col1 Col2

Lin1 7.6387 0.957

***** CONDICAO ITERACAO *****

\$2991 Condicao Iteracao

Lin1 0.0013 5

***** Betas' *****

\$3342 Col1 Col2 Col3 Col4 Col5

Lin1 10.3022 0.8728 0.0878 -0.1956 -0.171

***** HTTP's *****

htt	Col1	Col2
Lin1	-0.1542	17.8546
Lin2	17.8546	-3242.6594

***** ST *****

st	Col1
Lin1	-0.0421
Lin2	7.589

***** Tetas ' *****

\$3532	Col1	Col2
Lin1	7.6359	0.9581

***** CONDICAO ITERACAO *****

\$3539	Condicao Iteracao
Lin1	0.0004 6

+-----+
+ R e s u l t a d o s +
+-----+

***** Iter Cond Sigma Ro *****

\$3658	Iteracao	Condicao	Sigma	Ro
Lin1	7	0.0004	7.6359	0.9581

***** Cov *****

cov	Col1	Col2	Col3
Lin1	7.6387	7.31	6.9955
Lin2	7.31	7.6387	7.31
Lin3	6.9955	7.31	7.6387

***** BETA0' *****

\$3659	Col1	Col2	Col3	Col4	Col5
Lin1	10.3022	0.8728	0.0878	-0.1956	-0.171

ANALISE DE VARIANCIA

\$3668	sqmp	sqtrat	sqpar	sqres	sqto
Lin1	784.1672	28.6839	812.8511	134.8808	947.7319
\$3668	qmtrat	qmres	fcal	nms	ro
Lin1	14.342	10.3754	1.3823	0.285	0.9581

Resumindo os resultados da saída, a análise de variância fica:

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	n.m.s.
Média e Períodos	3	784,1672	261,3891		
Tratamentos	2	28,6839	14,3420	1,38	0,285
Resíduo	13	134,8808	10,3754		
Total	18	947,7319			

Baseado no teste F para tratamentos, ao nível mínimo de significância de 0,285, conclui-se pela não rejeição da hipótese de que $t_1 = t_2 = t_3 = 0$.

GODOI (1983) utilizando os mesmos dados obteve para o modelo autorregressivo no esquema de reversão, um valor de $F = 1,0369$ e um $n.m.s. \cong 0,37$, e para o modelo "switchback" obteve $F = 0,8180$ e um $n.m.s. \cong 0,52$.

Considerando $t_1 = -0,5$ kg, $t_2 = 0,0$ kg e $t_3 = 0,5$ kg e adicionando estes efeitos de tratamentos às observações correspondentes do quadro 1, tem-se o seguinte:

Quadro 2 - Produção média de leite em kg ($t_1 = -0,5$, $t_2 = 0,0$, $t_3 = 0,5$).

Animais	Períodos		
	P_1	P_2	P_3
1	9,14 (1)	9,88 (2)	7,46 (1)
2	13,95 (2)	13,63 (3)	10,49 (2)
3	8,76 (3)	7,19 (1)	8,00 (3)
4	8,25 (1)	8,98 (3)	7,87 (1)
5	9,38 (2)	8,05 (1)	7,43 (2)
6	17,57 (3)	14,61 (2)	14,80 (3)

A análise de variância, seguindo o mesmo esquema da análise anterior resultou no seguinte:

F. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	n.m.s.
Média e Períodos	3	784,1672	261,3891		
Tratamentos	2	179,7617	89,8808	8,6678	0,004
Resíduo	13	134,8034	10,3695		
Total	18	1.098,7322			

Portanto, o teste F para tratamentos, baseado no nível mínimo de significância de 0,004, leva à rejeição da hipótese $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, conclusão obtida também por GODOI (1983) com um valor de $F = 6,0473$ e um $n.m.s. \cong 0,013$ para o modelo autorregressivo, e para o modelo "switchback" obteve um valor de $F = 5,39$ e um $n.m.s. \cong 0,10$.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A preocupação em fazer análises com testes mais poderosos tem sido uma constante, e estudos mais profundos em torno de dados reais tem sido possível com o auxílio de microcomputadores e pacotes estatísticos eficientes.

O programa utilizado para efetuar as análises superou as expectativas, dado que manualmente a análise seria impraticável e vale ressaltar que a linguagem utilizada é bastante simples. Quanto ao fator tempo de processamento pode-se dizer que dependerá do equipamento a ser utilizado, para se ter uma idéia, em um microcomputador AT-286, foram efetuadas 250 análises consecutivas em um tempo aproximado de 2 horas, logo para uma única análise o tempo médio é de aproximadamente 30 segundos, e pode ser considerado razoável.

As tabelas 2, 3, 4 e 5 em discussão se encontram no apêndice deste trabalho.

Para a discussão do método foram tomados como referência os 25 ensaios obtidos da tabela 1 e analisados por GODOI (1983).

Os resultados comparativos são apresentados na tabela 2 e 3, sendo que a tabela 2 apresenta 25 ensaios sob a hipótese de nulidade e a tabela 3 apresenta 25 ensaios adicionando-se, às parcelas convenientes, $t_1 = -0,5$, $t_2 = 0$ e $t_3 = 0,5$.

Para os dados sob a hipótese de nulidade (tabela 2) verifica-se que o método proposto neste trabalho apresenta um nível de significância médio menor do que o método proposto por GODOI (1983), tanto para o coeficiente de correlação verdadeiro como para o estimado, ocasionando maior número de análises com testes F significativos, ocorrendo o mesmo para os dados adicionando-se os efeitos de tratamentos (tabela 3).

Quanto às estimativas dos coeficientes de correlação os dois métodos apresentam resultados semelhantes.

Para o estudo do método com relação ao poder ou sensibilidade do teste F foram feitas análises de 500 ensaios simulados, obtidos da tabela 1.

Os resultados das análises dos dados sob a hipótese de nulidade são apresentados na tabela 4.

A tabela 4 apresenta a distribuição de frequências para o nível mínimo de significância das análises dos 500 ensaios simulados, cujo histograma é apresentado na

figura 1. Através desses resultados obteve-se um nível de significância médio igual a 0,4546 indicando uma pequena tendenciosidade, além disso, verifica-se que 90,8% das análises não rejeitam a hipótese de nulidade, o que pode ser considerado um bom resultado.

Figura 1 - Histograma do nível mínimo de significância das análises dos 500 ensaios simulados com $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ e $t_3 = 0$.

Para os mesmos 500 ensaios anteriores foram adicionados, às parcelas convenientes, $t_1 = -0,5$, $t_2 = 0,0$ e $t_3 = 0,5$ e analisados. Segundo o método proposto os níveis mínimos de significância resultante são apresentados na tabela 5 em forma de distribuição de frequências e cujo histograma é apresentado na figura 2.

Figura 2 - Histograma do nível mínimo de significância das análises dos 500 ensaios simulados com $t_1 = -0,5$, $t_2 = 0,0$ e $t_3 = +0,5$.

Através dessas análises obteve-se um nível mínimo de significância médio igual a 0,0170, além disso verifica-se que 93,4% delas rejeitam a hipótese de nulidade, mostrando que o método produz um teste F poderoso.

Com relação ao coeficiente de correlação o estimador de máxima verossimilhança mostra ser viciado e subestimado, pois das 500 análises obteve-se um valor médio de 0,8687, menor do que o verdadeiro que é igual a 0,9.

5. CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos conclui-se que:

- 5.1. O estimador de máxima verossimilhança para o vetor θ , referente aos parâmetros de covariância, mostrou ser viciado e subestimado.
- 5.2. Embora a análise leve a um teste F aproximado, o método proposto mostra ser adequado.
- 5.3. O método da máxima verossimilhança é uma alternativa para a análise da produção leiteira em experimentos em "switchback" dado que os parâmetros de covariância são levados em conta.
- 5.4. Os resultados sugerem que haja uma extensão desses resultados para os ensaios em "switchback" com mais tratamentos e/ou mais períodos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BORA, A.C. Change over designs with errors following a first order autoregressive process. *Australi. J. Statist.*, 26(2): 179-188. 1984.
- BRANDT, A.E. Tests of significance in reversal or switchback trials. *Research Bulletin 234. Agr. Exp. Sta., Ames, Iowa.* 1938.
- GODOI, C.R.M. Modelo matemático dos ensaios em dupla reversão ("switchback"). Piracicaba, 1971. 52 p. [Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP]
- GODOI, C.R.M. Modelo linear com autocorrelação nos resíduos para análise de produção leiteira em experimentos com dupla reversão. Piracicaba, 1983. 110p. [Livre-Docência - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP]

HARVILLE, D.A. Maximum likelihood approaches to variance component estimation and to related problems. **JASA**, 72: 320-40. 1977.

JENNRICH, R.I. & SCHLUCHTER, M.D. Unbalanced repeated-measures models with structured covariance matrices. Washington, **Biometrics**, 42: 805-820. 1986.

LUCAS, H.L. Switchback trials for more than two treatments. Champaign, **Jour, Dairy Sci.**, 39(2): 146-154. 1956.

RAO, V.R. A note on Balanced Designs. **Ann. Math. Stat.**, 29: 290-294. 1958.

EMBRAPA, NTIA. **SOC - Software Científico**. Campinas, 1988.

A P Ê N D I C E

TABELA 1 - Médias (em kg) de períodos de 15 dias de produção leiteira de vacas da raça holandesa.

VA-	PERÍODOS						
CAS	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
1	9.64	9.88	7.96	6.40	6.84	6.12	5.79
2	13.95	13.13	10.49	10.67	9.64	9.00	8.25
3	8.26	7.69	7.50	8.08	7.97	6.45	6.20
4	8.75	8.48	8.37	8.18	7.36	6.82	7.65
5	9.38	8.55	7.43	6.98	6.25	6.02	5.80
6	17.07	14.61	14.30	13.36	13.94	12.44	10.69
7	11.94	10.74	10.22	9.33	9.37	8.04	7.97
8	10.79	10.56	10.00	8.13	10.84	8.76	9.04
9	8.56	7.32	7.74	6.71	6.88	6.77	5.19
10	9.01	9.14	8.58	8.54	6.49	5.99	5.36
11	10.02	10.91	10.22	8.80	6.58	6.34	5.84
12	12.41	12.38	12.78	13.05	11.35	11.86	11.73
13	7.18	7.25	6.59	7.22	5.45	4.79	4.74
14	7.20	6.79	5.48	4.68	3.75	3.64	4.17
15	8.58	7.94	7.11	4.97	3.64	3.75	4.24
16	7.13	6.62	5.77	5.30	5.16	5.12	5.32
17	8.92	8.53	8.45	10.99	8.33	6.86	8.11
18	11.3	10.79	9.30	9.42	9.41	8.41	8.86
19	7.83	6.45	6.13	6.06	5.64	5.19	5.09
20	8.82	8.43	7.77	7.11	5.33	5.33	5.15
21	11.46	9.54	7.82	7.28	7.46	5.74	4.85
22	6.45	6.20	5.54	5.10	4.72	5.55	5.42
23	11.79	12.53	10.71	9.30	9.60	7.51	5.89
24	7.25	7.50	7.29	7.25	7.50	6.67	7.18
25	7.26	7.34	7.20	7.46	8.49	7.73	6.86
26	10.27	8.95	7.90	7.13	7.41	7.17	6.60
27	10.38	9.50	7.90	7.25	7.66	6.88	7.55
28	10.41	9.49	9.14	8.62	9.96	9.26	8.33
29	8.21	7.48	8.36	7.90	8.16	7.17	6.29
30	12.22	11.34	10.71	9.79	9.22	9.76	9.23

Tabela 1 - Continuação.

VA-	PERÍODOS						
CAS	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
31	12.62	11.24	9.94	10.69	9.53	8.75	7.63
32	12.20	10.89	10.75	9.99	9.56	8.24	8.46
33	9.78	9.75	8.42	8.25	7.84	8.20	8.23
34	9.86	9.68	8.66	7.34	6.70	6.48	5.62
35	11.88	9.28	10.17	9.39	8.72	9.68	6.25
36	13.87	10.86	9.78	9.59	9.30	9.76	9.28
37	10.10	10.08	9.06	8.04	7.66	7.54	5.47
38	7.68	7.49	7.79	8.42	6.26	5.97	5.99
39	6.70	7.12	5.59	5.56	6.79	5.59	4.82
40	9.19	7.61	6.38	6.89	6.69	6.26	5.90
41	14.39	14.68	13.57	14.06	12.43	13.22	12.33
42	12.93	11.20	10.68	9.80	9.39	8.52	7.60
43	14.03	14.78	12.15	10.71	8.94	8.34	7.72
44	17.79	14.89	14.51	13.45	13.13	13.06	12.53
45	5.97	7.01	4.44	5.73	4.98	3.88	3.59
46	7.91	5.38	4.54	5.05	4.54	4.72	5.21
47	8.76	8.81	8.11	6.99	7.59	6.88	6.32
48	8.74	9.26	8.89	7.40	6.53	5.49	5.86
49	8.20	8.12	8.03	7.35	6.07	5.95	6.47
50	10.83	10.04	10.34	12.63	12.92	10.29	11.13
51	11.70	10.81	10.11	10.37	9.90	9.59	8.95
52	10.66	11.51	10.00	8.50	7.67	7.96	7.44
53	11.60	13.40	11.50	10.13	9.41	9.57	8.64
54	9.76	11.30	9.08	7.56	6.45	7.40	5.48
55	7.51	8.46	8.37	8.15	8.20	9.31	9.46
56	7.55	7.35	6.72	7.99	9.32	6.54	5.86
57	9.97	8.37	7.86	5.99	6.04	7.67	8.18
58	9.37	9.97	9.64	9.01	9.08	9.00	8.67
59	14.36	12.62	11.80	11.33	11.75	10.57	9.80
60	13.70	13.64	12.18	11.39	12.09	11.12	10.47

Tabela 1 - Continuação.

VA-	PERÍODOS						
CAS	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
61	10.11	9.02	9.97	8.90	8.02	7.77	10.45
62	12.77	12.87	12.47	11.72	13.45	12.96	11.74
63	8.38	9.15	7.88	8.67	8.04	7.39	8.51
64	12.97	10.53	11.81	11.49	9.02	9.70	11.84
65	11.33	9.76	9.48	9.29	8.11	7.41	9.34
66	17.09	15.13	13.85	12.47	10.86	11.40	12.45
67	12.26	11.96	9.87	9.77	8.68	7.08	9.59
68	13.43	12.54	12.21	11.77	9.83	9.67	11.06
69	9.44	8.57	8.50	8.01	7.06	7.23	7.71
70	9.01	8.62	8.68	7.82	7.68	7.89	8.13
71	7.90	7.43	7.23	8.09	8.42	9.16	10.05
72	10.95	10.91	7.63	7.52	8.14	8.29	9.38
73	8.85	9.07	8.74	7.64	7.52	8.57	8.51
74	8.08	8.36	8.52	7.64	8.22	9.54	7.50
75	10.18	8.58	8.10	8.70	9.35	9.35	8.28
76	10.33	8.97	7.88	7.64	9.34	9.45	8.34
77	19.26	18.17	15.22	15.03	15.70	14.30	14.42
78	16.17	15.53	12.95	12.02	12.44	11.88	13.04
79	14.84	14.45	10.59	11.30	10.58	9.33	9.46
80	10.20	9.04	8.47	8.48	8.65	8.08	7.37
81	11.86	9.31	10.11	9.61	12.17	11.31	11.01
82	7.54	8.13	7.70	9.30	9.77	11.20	10.40
83	9.68	9.32	7.89	9.14	10.31	10.15	10.76
84	9.74	9.40	9.74	8.66	10.40	13.63	12.97
85	10.18	9.25	10.19	11.39	9.38	9.57	9.54
86	11.96	10.56	8.98	10.99	11.76	12.89	12.21
87	7.40	9.31	7.75	9.45	10.80	11.10	10.06
88	13.50	11.58	11.50	11.76	11.66	10.55	10.11
89	10.25	11.01	10.74	9.67	10.95	10.55	9.84
90	10.41	10.90	10.54	11.47	10.16	9.96	10.50

Tabela 1 - Continuação.

VA-	PERÍODOS						
CAS	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
91	9.29	8.90	9.56	9.62	9.08	9.50	10.48
92	9.86	9.35	9.96	10.15	7.39	7.78	8.38
93	8.94	9.68	9.34	8.18	7.53	7.05	6.17
94	9.45	9.69	10.82	11.12	9.67	8.10	8.58
95	11.45	13.58	13.02	12.69	12.76	15.62	12.99
96	15.76	13.97	12.96	14.31	14.62	15.12	14.04
97	11.56	11.10	11.76	10.92	10.16	9.57	9.11
98	8.65	10.86	11.65	11.64	9.56	9.03	8.98
99	11.27	10.82	10.75	10.95	9.93	8.51	6.61
100	11.06	11.92	11.82	10.85	10.26	9.35	7.08
101	8.65	8.13	8.04	6.56	8.97	8.03	7.05
102	11.46	11.70	1.58	14.23	12.40	10.76	10.17
103	14.23	13.33	13.59	12.34	13.09	12.22	9.59
104	13.44	15.82	12.23	15.10	15.17	15.35	16.10
105	11.62	11.74	12.31	10.22	10.68	11.12	8.78
106	10.89	8.92	7.86	8.25	7.38	7.32	7.14
107	9.94	8.70	9.33	10.91	10.11	9.36	6.36
108	9.12	8.58	8.34	8.08	7.96	7.23	7.20
109	9.64	11.40	10.90	8.07	8.59	7.72	6.84
110	12.14	10.42	9.51	9.11	6.82	6.28	5.68
111	8.67	8.76	7.97	7.88	8.11	7.46	7.32
112	7.56	5.78	4.76	7.60	11.02	10.41	6.15
113	11.67	10.11	10.57	10.92	9.31	8.67	8.12
114	8.47	7.93	7.32	7.37	6.67	5.22	4.67
115	13.31	13.44	12.41	12.65	11.35	9.49	9.06
116	11.34	8.48	10.31	10.66	9.26	8.24	8.12
117	12.34	11.45	13.64	13.21	13.56	12.11	12.17
118	11.45	14.95	14.54	13.71	13.19	13.65	11.59
119	9.71	10.03	8.52	8.58	7.53	7.90	8.10
120	7.65	8.72	8.38	8.60	8.18	7.74	7.69

Tabela 1 - Continuação.

VA-	PERÍODOS						
CAS	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
121	9.90	9.22	9.15	9.06	9.26	8.74	9.76
122	10.90	10.74	10.97	10.23	9.26	7.59	7.06
123	12.85	10.05	7.47	7.88	8.66	7.69	6.58
124	9.24	11.77	8.70	7.41	7.78	7.83	6.25
125	7.54	8.85	8.28	8.40	7.90	6.76	6.32
126	10.29	10.07	9.20	9.34	9.11	8.43	7.80
127	14.40	12.33	14.34	13.39	12.06	10.96	10.53
128	19.71	17.98	16.48	15.75	15.85	12.59	11.60
129	9.72	9.94	8.84	8.21	7.66	7.73	5.17
130	8.91	8.49	7.96	7.54	7.53	7.10	6.39
131	12.07	12.17	10.94	9.09	8.15	7.93	6.16
132	12.40	14.45	15.09	16.82	11.44	10.84	9.45
133	5.58	6.03	5.99	5.68	5.09	5.02	5.32
134	8.68	9.06	8.32	8.27	7.50	6.91	6.05
135	14.99	14.41	14.11	11.97	10.76	9.59	7.79
136	8.81	8.08	8.10	7.71	7.51	7.39	6.62
137	6.73	7.51	7.19	6.43	5.57	5.89	5.81
138	8.96	8.61	7.93	7.86	6.84	6.82	5.73
139	10.78	9.10	8.52	6.74	6.22	5.38	3.58
140	7.62	6.81	7.45	8.01	7.52	4.88	5.83
141	7.90	8.59	8.89	8.34	8.53	7.58	6.46
142	9.23	8.51	8.36	5.95	6.63	6.25	4.80
143	12.45	12.52	10.90	10.23	8.19	7.49	8.53
144	15.30	14.96	12.84	12.33	14.14	14.19	11.34

Tabela 2 - Resultados dos 25 ensaios simulados com $t_1 = 0$, $t_2 = 0 \otimes t_3 = 0$.

LACTAÇÕES										PERÍODOS		QMR ₁		F ₁		α ₁ ($\hat{\rho}_1$)		$\hat{\rho}_1$		QMR ₂		QMT ₂		F ₂ ($\hat{\rho}_2$)		$\hat{\rho}_2$		α ₂ ($\hat{\rho}_2$)		
01	83	137	4	10	103	26	1	2	3	6,49	10,27	1,58	0,2429	0,97	3,66	3,13	0,85	0,4479	1,66	0,97	0,2785									
02	106	66	118	73	19	113	5	6	7	10,45	15,51	1,48	0,2628	0,94	7,84	9,53	1,21	0,3279	1,96	0,98	0,2351									
03	66	66	66	122	65	87	1	2	3	10,51	2,66	0,25	0,7804	0,93	8,52	1,72	0,20	0,8192	0,37	0,95	0,7027									
04	66	114	134	141	4	125	3	4	5	0,33	0,65	1,95	0,1812	0,84	0,44	0,97	2,18	0,1520	2,19	0,90	0,2085									
05	82	88	10	56	31	53	4	5	6	4,08	0,89	0,22	0,8078	0,89	4,37	1,53	0,35	0,7100	0,23	0,85	0,7992									
06	110	42	58	45	107	25	5	6	7	4,45	4,08	0,92	0,4247	0,94	3,26	1,70	0,52	0,5052	0,92	0,94	0,4568									
07	16	66	33	122	76	1	5	6	7	2,84	3,42	1,20	0,3315	0,87	3,33	4,43	1,32	0,2984	1,19	0,87	0,3767									
08	73	134	79	66	137	102	1	2	3	7,64	4,22	0,55	0,5890	0,93	6,26	2,70	0,43	0,6581	0,63	0,94	0,5697									
09	36	45	32	7	111	103	5	6	7	8,00	24,75	3,09	0,0797	0,94	6,08	13,78	2,26	0,1430	3,11	0,93	0,1325									
10	38	51	40	142	137	53	1	2	3	4,98	4,19	0,84	0,4535	0,90	4,96	4,14	0,83	0,4551	1,02	0,93	0,4239									
11	141	30	27	57	31	38	1	2	3	3,35	2,99	0,89	0,4331	0,82	4,97	4,29	0,86	0,4450	0,86	0,87	0,4745									
12	29	10	29	106	96	132	5	6	7	13,04	14,85	1,14	0,3502	0,99	5,91	0,51	0,08	0,9173	0,79	0,99	0,5016									
13	31	133	18	135	144	14	1	2	3	15,49	23,92	1,54	0,2503	0,99	6,95	5,19	0,74	0,4964	1,60	0,98	0,2902									
14	16	68	45	22	92	143	4	5	6	6,79	8,96	1,32	0,3007	0,94	4,79	6,06	1,26	0,3146	1,36	0,95	0,3372									
15	103	93	136	90	21	36	4	5	6	6,25	6,76	1,08	0,3699	0,94	4,63	4,04	0,87	0,4404	1,13	0,94	0,3918									
16	82	118	84	91	7	16	4	5	6	11,57	1,55	0,13	0,8757	0,91	10,60	1,41	0,13	0,8763	0,13	0,92	0,8770									
17	69	76	53	141	10	16	3	4	5	3,52	0,84	0,24	0,7922	0,86	4,41	1,16	0,26	0,7726	0,23	0,84	0,8013									
18	127	103	125	37	39	114	5	6	7	8,82	34,96	3,96	0,0453	0,98	4,62	6,15	1,33	0,2980	4,27	0,98	0,0825									
19	117	36	97	52	88	137	4	5	6	5,99	1,96	0,33	0,7267	0,95	4,13	1,32	0,32	0,7305	0,34	0,98	0,7219									
20	69	33	60	116	46	25	4	5	6	3,15	5,70	1,81	0,2026	0,93	2,48	3,58	1,44	0,2721	2,02	0,94	0,2264									
21	29	46	69	49	4	87	5	6	7	7,19	6,96	0,97	0,4058	0,97	4,07	1,54	0,37	0,6916	1,16	0,97	0,3935									
22	82	66	45	68	76	67	3	4	5	8,68	10,79	1,24	0,3207	0,93	6,77	7,57	1,11	0,3564	1,24	0,93	0,3641									
23	91	49	120	66	114	18	1	2	3	9,50	12,15	1,28	0,3110	0,96	9,77	5,79	1,00	0,3934	1,48	0,98	0,3120									
24	22	46	2	104	110	84	1	2	3	12,09	6,45	0,53	0,5999	0,91	11,13	5,58	0,50	0,6166	0,68	0,96	0,5438									
25	1	60	139	86	49	33	5	6	7	6,62	1,99	0,30	0,7451	0,96	4,10	1,07	0,26	0,7729	0,30	0,96	0,7519									
Médias														7,27	8,46	3,96	0,42	0,5203	1,23	0,94	0,4496									

Tabela 3 - Resultados dos 25 ensaios simulados com $t_1 = -0.5$, $t_2 = 0$ e $t_3 = 0.5$.

LACTAÇÕES														PERÍODOS			QMR ₁				QMT ₁				F ₁				$\alpha_1(\hat{\rho}_1)$				$\hat{\rho}_1$				QMR ₂				QMT ₂				F ₂ (ρ)				$\alpha_2(\rho)$				$\hat{\rho}_2$				$\alpha_2(\hat{\rho}_2)$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	</			

Tabela 4 - Distribuição de frequências para nível mínimo de significância das análises dos 500 ensaios simulados com $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ e $t_3 = 0$.

Classes n.m.s.	Ponto Médio	Frequên- cia	Frequ. Rel.	Frequ. Acuml.	Freq. Relat. acumulada
0,00 — 0,05	0,025	46	0,092	46	0,092
0,05 — 0,10	0,075	31	0,062	77	0,154
0,10 — 0,15	0,125	24	0,048	101	0,202
0,15 — 0,20	0,175	28	0,056	129	0,258
0,20 — 0,25	0,225	23	0,046	152	0,304
0,25 — 0,30	0,275	32	0,064	184	0,368
0,30 — 0,35	0,325	25	0,050	209	0,418
0,35 — 0,40	0,375	26	0,052	235	0,470
0,40 — 0,45	0,425	27	0,054	262	0,524
0,45 — 0,50	0,475	29	0,058	291	0,582
0,50 — 0,55	0,525	18	0,036	309	0,618
0,55 — 0,60	0,575	20	0,040	329	0,658
0,60 — 0,65	0,625	21	0,042	350	0,700
0,65 — 0,70	0,675	17	0,034	367	0,734
0,70 — 0,75	0,725	24	0,048	391	0,782
0,75 — 0,80	0,775	25	0,050	416	0,832
0,80 — 0,85	0,825	11	0,022	427	0,854
0,85 — 0,90	0,875	28	0,056	455	0,910
0,90 — 0,95	0,925	17	0,034	472	0,944
0,95 — 1,00	0,975	28	0,056	500	1,000
Média = 0,4546			Desvio Padrão = 0,2991		

Tabela 5 - Distribuição de frequências para nível mínimo de significância das análises dos 500 ensaios simulados com $t_1 = -0,5$, $t_2 = 0,0$ e $t_3 = +0,5$.

Classes n.m.s.	Ponto Médio	Frequên cia	Frequ. Rel.	Frequ. Acuml.	Freq. Relat. acumulada
0,00 - 0,05	0,025	467	0,934	467	0,934
0,05 - 0,10	0,075	12	0,024	479	0,958
0,10 - 0,15	0,125	5	0,010	484	0,968
0,15 - 0,20	0,175	5	0,010	489	0,978
0,20 - 0,25	0,225	3	0,006	492	0,984
0,25 - 0,30	0,275	2	0,004	494	0,988
0,30 - 0,35	0,325	1	0,002	495	0,990
0,35 - 0,40	0,375	1	0,002	496	0,992
0,40 - 0,45	0,425	1	0,002	497	0,994
0,45 - 0,50	0,475	1	0,002	498	0,996
0,50 - 0,55	0,525	0	0,000	498	0,996
0,55 - 0,60	0,575	0	0,000	498	0,996
0,60 - 0,65	0,625	0	0,000	498	0,996
0,65 - 0,70	0,675	1	0,002	499	0,998
0,70 - 0,75	0,725	0	0,000	499	0,998
0,75 - 0,80	0,775	0	0,000	499	0,998
0,80 - 0,85	0,825	0	0,000	499	0,998
0,85 - 0,90	0,875	0	0,000	499	0,998
0,90 - 0,95	0,925	0	0,000	499	0,998
0,95 - 1,00	0,975	1	0,002	500	1,000
Média = 0,0170			Desvio Padrão = 0,0703		