MODELO AUTO-REGRESSIVO PARA ANÁLISE DE EXPERIMENTOS COM VACAS EM LACTAÇÃO

ADALBERTO JOSÉ CROCCI

Orientador: Prof. Dr. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

Tese apresentada à Escola Superior de
Agricultura "Luiz de Queiroz" da Univer-
sidade de São Paulo, para obtenção do
Título de Doutor em Agronomia. Área de
Concentração: Estatística e Experimen-
tação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Janeiro, 1984

Aos meus pais ROSA e NELSON

DEDICO

À minha esposa ROSANE e

aos meus filhos MARIANA, SUZANE e RAFAEL

OFEREÇO

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Cássio Roberto de Melo Codoi, pela orienta
ção eficiente durante o curso e na realização deste trabalho.

À Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Campus de Ja
boticabal - UNESP, pela oportunidade oferecida.

Aos colegas do Departamento de Ciências Exatas da Faculdade
de Ciências Agrárias e Veterinárias, Campus de Jaboticabal - UNESP, pelo
incentivo e colaboração.

Ao Professor Dr. Euclides Braga Malheiros, pelo auxílio e
constante disponibilidade, quer na troca de idéias, quer na parte de com
putação.

Ao Professor Dr. Dilermando Perecin, pelas valiosas sugestões
e revisão do texto.

À CAPES, em nome da Coordenação de Capacitação de Docentes da
da FCAVJ-UNESP, pelo auxílio financeiro prestado.

Aos funcionários da Unidade de Processamento de Dados da
FCAVJ-UNESP, pela constante colaboração.

À Maria de Lourdes Moretto, pela dedicação nos trabalhos de
datilografia.

A todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram pa
ra a realização deste trabalho.

ÍNDICE

	Página
RESUMO.....	v
SUMMARY.....	vii
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Apresentação do problema.....	1
1.2. Limitações do trabalho.....	4
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	5
2.1. Delineamentos alternativos ("change-over").....	5
2.1.1. Delineamentos de reversão ("switchback").....	6
2.1.2. Delineamentos rotativos ("rotational").....	8
2.2. Modelo auto-regressivo em ensaios de lactação.....	11
3. MATERIAL E MÉTODOS.....	14
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	22
4.1. Análise da variância no modelo auto-regressivo.....	22
4.1.1. O modelo linear geral.....	22
4.1.2. Sistema de equações normais.....	25
4.1.3. Soma de quadrados de tratamentos ajustada.....	34
4.1.4. Soma de quadrados de períodos e média ignorando tra- tamentos.....	40
4.1.5. Soma de quadrados total.....	42
4.1.6. Esperança matemática da soma de quadrados de trata- mentos ajustada.....	43
4.1.7. Esperança matemática da soma de quadrados de perío- dos e média, ignorando tratamentos.....	46
4.1.8. Esperança matemática da soma de quadrados residual..	49
4.2. Variância de estimativas de efeitos de tratamentos.....	51
4.3. Exemplo ilustrativo da análise da variância pelo modelo au- to-regressivo.....	53
4.4. Comparação da sensibilidade dos modelos e adequação do mode- lo auto-regressivo.....	57
5. CONCLUSÕES.....	61
6. LITERATURA CITADA.....	63
7. TABELAS.....	69

MODELO AUTO-REGRESSIVO PARA ANÁLISE DE EXPERIMENTOS COM VACAS EM LACTAÇÃO

Autor: ADALBERTO JOSÉ CROCCI

Orientador: Prof. Dr. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

RESUMO

Os modelos usuais para análise de dados de produção de leite, como o "switchback" introduzido por LUCAS (1956) ou o delineamento em quadrado latino para os ensaios rotativos, pertencem à classe dos chamados experimentos em "change-over", nos quais cada unidade experimental recebe uma seqüência de vários tratamentos em períodos sucessivos. Tais modelos apresentam uma estrutura de erros do tipo $\sigma^2 I$ à custa, em geral, de um número excessivo de parâmetros.

Neste trabalho é apresentado um modelo simplificado, denominado modelo auto-regressivo, no qual os erros apresentam uma distribuição probabilística que incorpora a clara correlação existente entre dados de um mesmo animal, com um menor número de parâmetros.

Após estabelecido o modelo matemático auto-regressivo procede-se à estimação dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados generalizados, descrito dentre outros por RAO (1965), e através de ensaios em branco com dados reais de produção de leite, amostrados de uma considerada população finita, simulam-se efeitos aditivos de tratamentos objetivando

do comparar os modelos, no que se refere à sensibilidade do teste F para a detecção de tais efeitos.

Para este estudo consideram-se três ensaios, escolhidos de forma a se ter uma desejável variação do número de graus de liberdade para o resíduo, e coerência com os casos mais comuns encontrados em aplicações práticas. Cada ensaio é analisado segundo os vários modelos considerando-se a existência ou não de efeitos de tratamentos, bem como diferentes valores do coeficiente de correlação linear entre períodos de observação, para o modelo auto-regressivo.

Os resultados deste trabalho mostram que:

(a) Existe uma boa adequação do modelo auto-regressivo às condições experimentais e que tal adequação piora com o aumento da discrepância entre o coeficiente de correlação linear usado e o exato;

(b) O modelo auto-regressivo proposto como competidor do "switchback" ou do rotativo, tem maior sensibilidade para indicar diferenças entre efeitos de tratamentos, e tal sensibilidade é dependente do coeficiente de correlação linear entre períodos adotado;

(c) A sensibilidade no modelo auto-regressivo é proporcional ao número de períodos adotado, indicando assim que tal modelo deve ser preferível com número máximo de períodos possível.

AUTOREGRESSIVE MODEL FOR DAIRY COWS EXPERIMENTS

Author: ADALBERTO JOSÉ CROCCI

Orienting: Prof. Dr. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

SUMMARY

The usual models for dairy cows data analysis like the switchback design introduced by LUCAS (1956) or the latin square design for rotational trials, belong to the so-called change-over class of design, in which each experimental unit receives a sequence of treatments in successive periods. Such models present an error structure of $\sigma^2 I$ type implied, in general, by an excessive number of additive parameters in the model.

A simplified model is presented in this work, namely the autoregressive model, in which the residual deviations present a probabilistic distribution that includes the obvious correlation among data from the same animal, with just a few number of additive parameters.

After the mathematical model has been established, parameter estimation was conducted by the generalized least squares method, described, for instance, by RAO (1965) and, through blank experiments with real dairy data, sampled from a finite fixed population, the "F" statistics was studied with respect to its statistical properties, specially its sensibility to additive treatment effects.

For this purpose three designs were considered, selected in a manner to cover a desirable variation of error degrees of freedom and best fitting with actual applied experiments.

Each simulated experiment is analysed under several mathematical models, considering or not the existence of treatment effects, as well as different values of linear correlation coefficients among periods, only for the autoregressive type.

The main results showed that:

(a) There exists a good fitting of the autoregressive model in the worked experimental conditions and such a fitting is worse when the difference of the real and the used linear correlation coefficient turns bigger;

(b) The proposed autoregressive model as competitor of the switchback and of the rotational models, is more sensible in detecting treatment differences, and such sensibility is dependent of the linear correlation coefficient adopted;

(c) The sensibility of the autoregressive model is proportional to the number of periods used, showing that such a model is preferred when the maximum possible number of periods is attained.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Apresentação do problema

O presente trabalho aborda experimentos com vacas em lactação, nos quais tratamentos são aplicados a unidades experimentais em um número de períodos sucessivos, sendo que cada unidade experimental recebe um tratamento diferente em cada período.

Sabe-se que, quando as observações são tomadas sequencialmente no tempo, como nos ensaios "switchback" ou rotativos, é prática comum considerar para a análise dos dados a hipótese de independência dos erros, o que facilita sobremaneira a aplicação de testes estatísticos. Entretanto, para que tal hipótese seja aceitável, é necessário que o modelo matemático inclua todos os parâmetros que possam de alguma forma afetar a estrutura de correlação das observações.

Existem porém, outros métodos possíveis, certamente menos convenientes em termos de facilidade de construção e aplicação, mas talvez mais sensíveis para a detecção, por exemplo, de efeitos de tratamentos.

Neste trabalho vamos admitir que os erros de observações entre períodos são correlacionados na forma de um processo Markoviano es tacionário de primeira ordem. Assim se y_j representa uma observação no j -ésimo período, então:

$$y_j = \underline{a}' \underline{\beta} + e_j$$

onde $\underline{a}' \underline{\beta}$ é a soma algébrica dos parâmetros explicativos de y_j , e

$$e_j = \rho e_{j-1} + \varepsilon_j$$

sendo ρ a correlação linear entre observações de dois períodos consecutivi vos, com $|\rho| < 1$, e $\varepsilon_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ e independentes dos e_j .

Desta forma para p períodos teremos

$$\text{Var}\{e_j\} = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2}$$

$$\text{Cov}\{e_j, e_{j'}\} = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2} \rho^{|j-j'|}; \quad j \text{ e } j' = 1, 2, \dots, p$$

de modo que a matriz de dispersão dos erros $\underline{e}' = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_p]$ será:

$$\text{Var}\{\underline{e}\} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{p-1} & \rho^{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2} \quad (1)$$

doravante denominada estrutura estocástica auto-regressiva.

Segundo GODOI (1983), para ensaios com vacas em lactação, admitida a estrutura de correlação (1), as observações podem ser descriri

tas pelo modelo:

$$y_{ijk_{ij}} = \mu + p_j + t_{k_{ij}} + e_{ijk_{ij}} \quad (2)$$

onde $y_{ijk_{ij}}$ é a observação no i -ésimo animal que no j -ésimo período recebeu o tratamento k , com:

$i = 1, 2, \dots, a$ (animais)

$j = 1, 2, \dots, p$ (períodos)

$k = 1, 2, \dots, K$ (tratamentos) com $k_{ij} \neq k_{ij'}$ para $j \neq j'$.

Portanto, para um total de $a.p$ observações teremos:

$$\tilde{Y}' = \begin{bmatrix} y_{11k_{11}} & y_{12k_{12}} & \dots & y_{1pk_{1p}} & \dots & y_{apk_{ap}} \end{bmatrix}$$

cujas matrizes de variâncias e covariâncias serão:

$$\text{Var}\{\tilde{Y}\} = V\sigma_e^2 = (I_a \otimes A) \sigma_e^2 \quad (3)$$

$$\text{onde } \sigma_e^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2}$$

e $(I_a \otimes A)$ é o produto de Kronecker entre I_a e A dado por

$$(I_a \otimes A) = \begin{bmatrix} A & \phi & . & . & . & \phi \\ \phi & A & . & . & . & \phi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi & \phi & . & . & . & A \end{bmatrix}_{ap \times ap}$$

com ϕ a matriz nula de ordem $(p \times p)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{p-1} & \rho^{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

Uma vez adotado o modelo matemático (2) com estrutura de correlações (3), estaremos interessados na sensibilidade do modelo para detecção de diferenças entre efeitos de tratamentos. Para tanto, tal modelo será comparado com dois outros usuais na análise de dados de produção de leite, ou seja, o de delineamento rotativo (quadrados latinos) e o de delineamento de reversão ("switchback").

1.2. Limitações do trabalho

Será considerado neste trabalho, somente a estimação dos efeitos de tratamentos, sem levar em consideração os possíveis efeitos residuais de um tratamento, aplicado em um dado período, sobre os períodos subsequentes. Na prática é comum, neste caso, desprezarem-se as produções iniciais de cada período (uma ou duas semanas), baseando-se a análise nas produções restantes.

Por outro lado, os dados da Tabela 1, que serão considerados na comparação das sensibilidades dos vários modelos citados, podem ser considerados como uma população finita, da qual serão amostrados animais e períodos que comporão os vários ensaios. Desta forma podemos afirmar que o coeficiente de correlação linear (ρ) entre períodos, calculado com tais dados, é o populacional ou exato, o qual será utilizado na metodologia do trabalho. Portanto, não será abordado o problema da estimação deste coeficiente no ensaio, nem sua influência na sensibilidade dos testes.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. Delineamentos alternativos ("change-over")

Na experimentação com animais, particularmente com vacas em lactação, são de grande utilidade os ensaios alternativos ou "change over", nos quais cada animal recebe durante o experimento uma seqüência de dois ou mais tratamentos, de forma que cada animal caracteriza um bloco. Esses ensaios são em geral classificados em duas categorias, segundo LUCAS (1960):

a) Ensaios de reversão ("switchback")

b) Ensaios rotativos ("rotational").

os quais se distinguem pela natureza das seqüências de tratamentos. Nos rotativos os tratamentos aplicados em uma dada seqüência são todos distintos, enquanto que nos ensaios de reversão um dado tratamento aparece em uma seqüência mais de uma vez em períodos não consecutivos.

Esses delineamentos, segundo PATTERSON e LUCAS (1962), são úteis no sentido de permitirem comparações de efeitos de tratamentos com alta precisão, devido à eliminação das diferenças entre seqüências ou ani

mais do erro experimental, bem como pela economia de animais para a comparação de um mesmo número de tratamentos.

Os esquemas de ensaio que se seguem ilustram a diferença entre os rotativos e os de reversão, no caso particular de $K = 3$ tratamentos.

a) Ensaio de Reversão

Períodos	Vacas ou seqüências		
	1	2	3
I	(1)	(2)	(3)
II	(2)	(3)	(1)
III	(1)	(2)	(3)

b) Ensaio Rotativo

Períodos	Vacas ou seqüências		
	1	2	3
I	(1)	(2)	(3)
II	(2)	(3)	(1)
III	(3)	(1)	(2)

onde os números entre parênteses codificam os tratamentos.

2.1.1. Delineamentos de reversão ("switchback")

BRANDT (1938) é o primeiro a abordar os ensaios de reversão, considerando o caso de somente dois tratamentos com extensão para três e quatro períodos, apresentando a análise estatística, a qual é também descrita em SNEDECOR (1946). No artigo, Brandt acrescenta a análise de covariância ajustando as produções de leite para um mesmo teor de gordura, visando aumentar a sensibilidade do teste F.

Outros autores como TAYLOR e ARMSTRONG (1953) estendem estes ensaios para mais de dois tratamentos, indicando o método da análise da variância e introduzindo o conceito de delineamento completo e reduzido, porém é de LUCAS (1956) a maior contribuição sobre os ensaios de reversão. Neste trabalho o autor aborda a extensão dos delineamentos para

mais de dois tratamentos, apresentando os esquemas para 3, 4, 5, 6, 7 e 9 tratamentos, cuja construção é baseada nos princípios dos blocos incompletos balanceados, abordando com detalhes a análise estatística nos casos comuns e com formação de blocos, além de indicar fórmulas para o cálculo de parcelas perdidas.

Segundo Lucas, a comparação de K tratamentos exige $K(K-1)$ seqüências ou animais (delineamento completo) subdivididas em até $K-1$ blocos, enquanto que se K for ímpar e maior ou igual a 5, podem ser usados esquemas com $\frac{1}{2} K(K-1)$ seqüências de tratamentos (delineamento reduzido) subdivididas em até $\frac{1}{2} (K-1)$ blocos de K seqüências cada.

Por outro lado, visando minimizar o erro experimental, todas as vacas devem estar com a produção entre o pico da lactação e a meta de da gestação seguinte, justificando assim a formação dos citados blocos no caso do número de animais disponíveis ser limitado.

GODOI (1972) e GODOI e NOGUEIRA (1972) apresentam a análise da variância do delineamento de Lucas, deduzida a partir do modelo matemático

$$E(y_{ijk}) = \mu + a_i + p_j + t_k + x_{ij} \ell_i$$

onde μ : média geral

a_i : efeito do i-ésimo animal ($i=1, 2, \dots, a$)

p_j : efeito do j-ésimo período ($j=1, 2, 3$)

t_k : efeito do k-ésimo tratamento ($k=1, 2, \dots, K$)

ℓ_i : efeito linear de período $\times$ animal, com

$$x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j = 2 \\ 1 & \text{se } j = 3, \text{ para todo } i. \end{cases}$$

Nestes trabalhos são apresentadas explicitamente as expressões das somas de quadrados, bem como as esperanças matemáticas dos quadrados médios, para o caso particular de $K = 3$ tratamentos.

Segundo PATTERSON e LUCAS (1962), nenhum delineamento do tipo reversão é suficientemente capaz de prover boas estimativas dos chamados efeitos residuais de um tratamento aplicado em um dado período sobre o período subsequente. Nestas condições, a única solução para os ensaios de reversão, quando há efeitos residuais de tratamentos, é desprezar as produções iniciais de cada período. Como esses são apenas três é aconselhável basear as interpretações sobre as produções de períodos de 4 a 5 semanas, após ter-se desprezado uma ou duas semanas.

2.1.2. Delineamentos rotativos ("rotational")

O tipo mais simples de delineamento rotativo é o quadrado latino ou um grupo de quadrados latinos, com linhas representando períodos de observação e colunas representando as seqüências de tratamentos.

Segundo PATTERSON (1950), quando não existe efeito residual de tratamentos, o método de análise segundo tal delineamento como apresentado em COCHRAN e COX (1957), conduz a estimativa não viciada do erro experimental, desde que se proceda a uma correta aleatorização das seqüências ou animais e dos tratamentos nas seqüências.

Entretanto, em geral, considera-se a possibilidade de que tais efeitos residuais existam e deseja-se estimá-los além dos efeitos diretos de tratamentos.

Neste sentido, COCHRAN *et alii* (1941) utilizam conjuntos completos de quadrados latinos ortogonais, objetivando um balanceamento desejado para melhorar a eficiência da análise estatística, abordando es

pecificamente o caso em que $K=3$ e 4 tratamentos. Estes delineamentos são balanceados no sentido de que qualquer tratamento é precedido um igual número de vezes ($\Lambda/2$) por cada um dos outros tratamentos.

Willians (1949), citado em PATTERSON (1950), mostra que balanceamento desse tipo pode ser obtido com um único quadrado latino para um número par de tratamentos, e com dois quadrados latinos para um número ímpar de tratamentos.

Entretanto, existem certas restrições ao uso de delineamentos rotativos com $p=K$, devido às limitações em relação ao número de períodos, uma vez que estes devem ser, segundo LUCAS (1960), de tamanho razoável (4 a 5 semanas), o que os torna, para ensaios de uma única lactação, limitados a de 3 a 5.

Segundo PATTERSON (1950), é possível encontrar esquemas convenientes de tratamentos com $p < K$, simplesmente considerando as p linhas correspondentes de cada um dos $K-1$ quadrados de um conjunto de quadrados latinos ortogonais $K \times K$, formando os denominados retângulos latinos.

Nesse sentido são úteis os delineamentos construídos por PATTERSON (1952) e esquematizados em PATTERSON e LUCAS (1962) para $K = 3, 4, \dots, 16, 18, 21, 26$ e 36 tratamentos subdivididos em quatro categorias, ou seja:

- a) delineamentos rotativos balanceados
- b) delineamentos rotativos parcialmente balanceados
- c) delineamentos balanceados com período extra
- d) delineamentos parcialmente balanceados com período extra,

limitados aos casos em que:

$$p \leq 6$$

$$K \geq t \geq p - 1$$

$$a = bt \leq 6K < 100,$$

onde **b** é o número de blocos; **t** o número de animais em cada bloco e **a** o número total de animais ou seqüências de tratamentos.

Os delineamentos balanceados são caracterizados pela apresentação de todos os contrastes de tratamentos com estimação de igual precisão, bem como efeitos direto e residual de um dado tratamento negativamente correlacionados. Para os parcialmente balanceados, alguns contrastes de tratamentos apresentam grau de precisão na sua estimação, diferente de outros, ainda com correlação negativa entre efeitos direto e residual. Já os delineamentos com período extra são obtidos simplesmente repetindo-se o período final de um delineamento balanceado ou parcialmente balanceado. Segundo os autores, se os efeitos residuais são desprezíveis, os delineamentos balanceados e os parcialmente balanceados são mais eficientes do que os com período extra, os quais, por sua vez, são mais eficientes que os primeiros se os efeitos residuais são de importância na experimentação.

Segundo os autores, todo delineamento "Change-over" com **K** tratamentos e **p** períodos ($2 \leq p \leq K$) utilizando **a** animais, subdivididos em **b** blocos, com **t** animais por bloco, é dito balanceado, se quaisquer dois tratamentos **k** e **k'** ($k \neq k'$) satisfazem as condições:

- 1) tratamento **k** ocorre em cada período $\frac{a}{K}$ vezes;
- 2) tratamentos **k** e **k'** ocorrem juntos em $\frac{a(t-1)}{K(K-1)}$ blocos em cada período;
- 3) se os tratamentos **k** e **k'** ocorrem juntos em um dado blo

co em qualquer período, então eles também ocorrem juntos em todos os outros períodos;

4) cada animal recebe um dado tratamento uma única vez;

5) tratamento k é imediatamente precedido pelo tratamento k' em $\frac{\Lambda}{2} = \frac{a(p-1)}{K(K-1)}$ seqüências;

6) tratamentos k e k' ocorrem juntos em $\frac{ap(p-1)}{K(K-1)}$ seqüências;

7) tratamento k ocorre em $\frac{a(p-1)}{K(K-1)}$ das $\frac{a}{K}$ seqüências, nas quais o tratamento k' ocorre no p -ésimo período.

No presente trabalho, embora não seja abordada a existência de efeitos residuais de tratamentos, serão considerados na metodologia os delineamentos balanceados com $p \leq K$ apresentados em PATTERSON e LUCAS (1962), uma vez que uma seqüência lógica de pesquisa será a posterior consideração de tais efeitos.

2.2. Modelo auto-regressivo em ensaios de lactação

GODOI (1983) é o primeiro a utilizar o modelo auto-regressivo, cuja estrutura de correlação é dada em (1), para análise de dados de produção de leite, abordando especificamente uma confrontação com o ensaio de reversão. Neste trabalho o autor faz uso do mesmo desenho experimental proposto por LUCAS (1956), porém com a adoção do modelo auto-regressivo, e verifica uma maior sensibilidade desse modelo na detecção de contrastes de efeitos de tratamentos através do teste F. Entretanto, tal sensibilidade só é maior nos casos em que o coeficiente de correlação linear entre períodos é alto ($\rho \geq 0,70$), indicando assim que, se os animais amostrados para o ensaio estiverem com produções homogêneas, o modelo preferível seja o de reversão, já que tal coeficiente é dependente da variabi

lidade entre animais. Ainda neste trabalho o autor aventava a possibilidade de que os delineamentos em blocos incompletos ou ainda os rotativos sejam mais eficientes ou sensíveis, se incorporarmos a estes uma estrutura de correlação realista, ou seja a auto-regressiva.

Os resultados obtidos por Godoi, bem como suas sugestões, é que motivam preponderantemente a realização deste trabalho. Desta forma cuida-se de utilizar os delineamentos rotativos balanceados com $p \leq K$ de PATTERSON e LUCAS (1962) e, com a adoção do modelo matemático (2) com estrutura de correlação (3), estudar a sensibilidade deste modelo, comparada com os de métodos usuais de análise de ensaios com vacas em lactação.

Assim, para o modelo linear geral

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e}$$

onde $E(\underline{e}) = \underline{0}$; $E(\underline{e}\underline{e}') = V\sigma_e^2$

com V simétrica e definida positiva, definida em (3), temos dois casos a considerar.

Inicialmente se V for conhecida, como é abordada no presente trabalho, autores como RAO (1965), THEIL (1971) ou HOFFMANN e VIEIRA (1977) mostram que uma simples transformação linear não singular, nos leva à aplicação do método dos mínimos quadrados usual para a obtenção do estimador linear imparcial de variância mínima do vetor de parâmetros $\underline{\beta}$. Um resultado fundamental é que tal estimador apresenta as mesmas propriedades dos estimadores obtidos quando se trabalha com erros independentes e homocedásticos.

No caso em que V é desconhecida, isto é, quando ρ é desconhecido, pode-se adotar o procedimento recomendado por THEIL (1971) que mo

dificado é utilizado por GODOI (1983), o qual consiste na obtenção de uma estimativa $\hat{\rho}$, através dos resíduos $(y_{ijk} - \hat{y}_{ijk})$, por um processo iterativo de estabilização do valor de $\hat{\rho}$. Entretanto, verifica-se que a mera substituição de ρ por $\hat{\rho}$, e a aplicação do método dos mínimos quadrados, acarreta uma tendência indevida do modelo auto-regressivo de rejeitar a hipótese de igualdade de efeitos de tratamentos.

Ademais, não se pode descartar a possibilidade de que a fonte dos dados a serem utilizados em ensaios desta natureza, quer sejam institutos de pesquisa ou fazendas experimentais, disponham de arquivos com as produções de um grande número de animais, dos quais uma parte será amostrada para a realização do experimento. Assim, do conjunto total, pode ser obtido um valor para o coeficiente de correlação linear entre períodos, tomado de forma coerente com o ensaio, sob a hipótese de que tal valor não sofra grandes alterações para lactações consecutivas.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Para a comparação da sensibilidade na detecção de contrastes de efeitos de tratamentos pelos modelos: auto-regressivo, de reversão e rotativo, serão utilizados os dados da Tabela 1, os quais correspondem a médias quinzenais de produção de leite de 144 vacas da raça holandesa, sendo que a produção do primeiro período é tomada após o pico da lactação, de modo que os sete períodos considerados se encontram no intervalo de produção útil para experimentos desta natureza. A fonte destes dados é o Departamento de Zootecnia da ESALQ-USP, Setor de Ruminantes, os quais foram obtidos e trabalhados inicialmente por GODOI (1971), apresentados em GODOI (1983), com o qual estamos em débito pela permissão para a utilização dos mesmos.

Em se calculando a correlação linear entre períodos, cuja ordem de grandeza é dependente da variabilidade de produção entre vacas, obtém-se a Tabela 2, na qual pode-se observar uma constância nas correlações entre períodos separados por um intervalo fixo. Por outro lado, através da matriz de correlações do modelo auto-regressivo (1) considerando-se $\rho = 0,91$, que é a média das correlações entre períodos consecutivos, ob

têm-se a Tabela 3, donde se pode perceber uma boa adaptação desta estrutura de correlações aos dados originais.

Consideram-se três ensaios, variando o número de tratamentos, ou seja: $K = 3, 4$ e 5 , o que nos dá uma desejável variação do número de graus de liberdade para o resíduo dos modelos considerados. Sendo este um estudo comparativo, adota-se o mesmo número de animais ou seqüências de tratamentos para todos os modelos.

Para cada ensaio considera-se cinco situações para os efeitos de tratamentos t_k , os quais, além do efeito nulo, variam de 2% a 8% da produção média (10 kg/dia) obtida da Tabela 1. Os ensaios considerados são esquematizados a seguir:

a) Ensaio 1: $K = 3$ tratamentos

a.1) Esquema do ensaio para o modelo de reversão completo

Períodos	Animais (Seqüências de Tratamentos)					
	1	2	3	4	5	6
I	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
II	(2)	(3)	(1)	(3)	(1)	(2)
III	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)

Esquema da análise da variância segundo LUCAS (1956)

F. Variação	G.L.	G.L. Caso Geral
Tratamentos	2	$K - 1$
Resíduo	3	$(K - 1)^2 - 1$
Total	5	$K(K - 1) - 1$

a.2) Esquema do ensaio para o modelo rotativo com dois quadrados latinos (Q.L.)

Períodos	Animais					
	1	2	3	4	5	6
I	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
II	(2)	(3)	(1)	(3)	(1)	(2)
III	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)

Esquema da análise da variância segundo COCHRAN e COX (1957)

F. Variação	G.L.	G.L. Caso Geral
Quadrados Latinos (Q.L.)	1	$q - 1$
Períodos d. Q.L.	4	$q(K - 1)$
Animais d. Q.L.	4	$q(K - 1)$
Tratamentos (T)	2	$K - 1$
Interação T $\times$ Q.L.	2	$(q - 1)(K - 1)$
Resíduo	4	$q(K - 1)(K - 2)$
Resíduo Médio ^{1/}	6	$q(K - 1) - (K - 1)$
Total	17	$qK^2 - 1$

^{1/} O Resíduo médio (Resíduo + Interação T $\times$ Q.L.) será utilizado caso a interação T $\times$ Q.L. seja não significativa.

a.3) Esquema do ensaio para o modelo auto-regressivo segundo PATTERSON e LUCAS (1962)

Períodos	Animais					
	1	2	3	4	5	6
I	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
II	(2)	(3)	(1)	(3)	(1)	(2)
III	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)

Esquema da análise da variância

F. Variação	G.L.	G.L. Caso Geral
Períodos	2	$p - 1$
Tratamentos	2	$K - 1$
Resíduo	13	$p(a - 1) - (K - 1)$
Total	17	$ap - 1$

onde a = número de animais.

Valores considerados para os efeitos de tratamentos t_k

- 1) $t_k = 0, \quad k = 1, 2, 3$
- 2) $t_1 = 0,2; \quad t_2 = -0,2; \quad t_3 = 0,0$
- 3) $t_1 = 0,4; \quad t_2 = -0,4; \quad t_3 = 0,0$
- 4) $t_1 = 0,6; \quad t_2 = -0,6; \quad t_3 = 0,0$
- 5) $t_1 = 0,8; \quad t_2 = -0,8; \quad t_3 = 0,0$

b) Ensaio 2. $K = 4$ tratamentos

b.1) Esquema do ensaio para o modelo de reversão completo

Períodos	Animais											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
II	(2)	(3)	(4)	(1)	(3)	(4)	(1)	(2)	(4)	(1)	(2)	(3)
III	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)

com 8 g.l. para o resíduo.

b.2) Esquema do ensaio para o modelo rotativo com 3 Q.L.

Períodos	Animais											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
II	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)
III	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)
IV	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)

com 18 g.l. para o resíduo e 24 g.l. para o resíduo médio.

b.3) Esquema do ensaio para o modelo auto-regressivo com $p = 3$ períodos

Períodos	Animais											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
II	(2)	(3)	(4)	(1)	(3)	(4)	(1)	(2)	(4)	(1)	(2)	(3)
III	(3)	(4)	(1)	(2)	(4)	(1)	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)

com 30 g.l. para o resíduo.

b.4) Esquema do ensaio para o modelo auto-regressivo com $p = K$

O mesmo de b.2 com 41 g.l. para o resíduo.

Valores considerados para os efeitos de tratamentos t_k

1) $t_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$

2) $t_1 = 0,2$; $t_2 = -0,2$; $t_3 = 0,2$; $t_4 = -0,2$

3) $t_1 = 0,4$; $t_2 = -0,4$; $t_3 = 0,4$; $t_4 = -0,4$

4) $t_1 = 0,6$; $t_2 = -0,6$; $t_3 = 0,6$; $t_4 = -0,6$

5) $t_1 = 0,8$; $t_2 = -0,8$; $t_3 = 0,8$; $t_4 = -0,8$.

c) Ensaio 3. K = 5 tratamentos

c.1) Esquema do ensaio para o modelo de reversão completo

Períodos	Animais																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
II	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)
III	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

com 15 g.l. para o resíduo.

c.2) Esquema do ensaio para o modelo rotativo com 4 Q.L.

Períodos	Animais																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
II	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)
III	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)
IV	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)
V	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)

com 48 g.l. para o resíduo e 60 g.l. para o resíduo médio.

c.3) Esquema do ensaio para o modelo auto-regressivo com p = 3 períodos

Períodos	Animais																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
II	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)
III	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)

com 53 g.l. para o resíduo.

c.4) Esquema do ensaio para o modelo auto-regressivo com $p = K$

O mesmo de c.2 com 91 g.l. para o resíduo.

Valores considerados para os efeitos de tratamentos t_k

- 1) $t_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$
- 2) $t_1 = 0,2$; $t_2 = -0,2$; $t_3 = 0,2$; $t_4 = -0,2$; $t_5 = 0,0$
- 3) $t_1 = 0,4$; $t_2 = -0,4$; $t_3 = 0,4$; $t_4 = -0,4$; $t_5 = 0,0$
- 4) $t_1 = 0,6$; $t_2 = -0,6$; $t_3 = 0,6$; $t_4 = -0,6$; $t_5 = 0,0$
- 5) $t_1 = 0,8$; $t_2 = -0,8$; $t_3 = 0,8$; $t_4 = -0,8$; $t_5 = 0,0$.

Com o objetivo de verificar se pequenas alterações no valor populacional do coeficiente de correlação linear entre períodos, acarretam diferenças na sensibilidade do teste de significância ou algum tipo de viés nas estatísticas envolvidas nos testes, considera-se para o modelo auto-regressivo em cada ensaio, os seguintes valores de ρ : 0,88; 0,90; 0,91; 0,92; 0,94.

Para cada ensaio são efetuadas 100 amostragens de animais e períodos, entre os dados da Tabela 1, e obtidas as respectivas análises da variância para os diferentes valores de t_k , e ρ no caso do modelo auto-regressivo.

Das análises da variância são considerados os valores da estatística F para tratamentos, e para cada valor desta estatística determina-se o nível mínimo de significância (N.M.S.) com auxílio da função subprograma FF, adaptada da sub-rotina PF apresentada em KENNEDY e GENTLE (1980). Segundo MOOD *et alii* (1974), quando se considera $t_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, K$, os N.M.S. em cada ensaio serão uniformemente distribuídos no intervalo (0,1). Determina-se então, para cada ensaio, a distribuição de

frequência dos 100 N.M.S. no intervalo (0,1) em classes de amplitude 0,05, bem como efetua-se o teste de aderência ponto a ponto de Kolmogorov-Smirnov.

Nos casos em que $t_k \neq 0$ para algum $k = 1, 2, \dots, K$, os N.M.S. são calculados com o objetivo de se verificar qual modelo apresenta maior sensibilidade para detectar diferenças entre tais efeitos, bem como a influência do valor de ρ nesta sensibilidade no caso do modelo ser o auto-regressivo. O modelo mais sensível será aquele para o qual a distribuição dos N.M.S. se concentrar nas classes iniciais do intervalo (0,1).

Por outro lado, em se conhecendo as expressões das esperanças matemáticas dos quadrados médios para tratamentos e resíduo no modelo auto-regressivo, utiliza-se a média dos valores da estatística F, bem como o quociente de médias do Q.M. tratamentos pelo Q.M. resíduo, como uma forma de controle da adequação desse modelo às condições experimentais.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Análise da variância no modelo auto-regressivo

4.1.1. O modelo linear geral

Para o modelo $\underline{Y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e}$, onde

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} y_{11k_{11}} \cdots y_{1pk_{1p}} & y_{21k_{21}} \cdots y_{2pk_{2p}} & \cdots & y_{apk_{ap}} \end{bmatrix}_{(1 \times ap)}$$

com: $y_{ijk_{ij}}$ = observação no i -ésimo animal ($i=1, 2, \dots, a$) que no j -ésimo período ($j=1, 2, \dots, p$) recebeu o tratamento k ($k=1, 2, \dots, K$); $p \leq K$ e $k_{ij} \neq k_{ij'}$, para $j \neq j'$,

$$\underline{\beta}' = \begin{bmatrix} \mu : p_1 p_2 \cdots p_p : t_1 t_2 \cdots t_K \end{bmatrix}_{(1 \times n)} ; \quad n = 1 + p + K,$$

$\underline{X}$ = matriz de incidência de ordem $ap \times n$,

$\underline{e}$ = vetor de erros de ordem $ap \times 1$, com

$$E(\underline{e}) = \underline{0}; \quad \text{Var}(\underline{e}) = \sigma_e^2 \underline{V}$$

Seja então:

$$D = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(p \times p)}$$

satisfazendo (4) e seja a transformação não singular

$$\tilde{Y}(\rho) = (I_a \otimes D') \tilde{Y} \quad (5)$$

onde $\tilde{Y}$ é o vetor de observações originais e $\tilde{Y}(\rho)$ o vetor de observações transformadas. Então:

$$E [\tilde{Y}(\rho)] = (I_a \otimes D') X\beta$$

e

$$\text{Var} [\tilde{Y}(\rho)] = (I_a \otimes D') \text{Var}(\tilde{Y}) (I_a \otimes D')'$$

ou

$$\text{Var} [\tilde{Y}(\rho)] = (I_a \otimes D') (I_a \otimes A) (I_a \otimes D')' \sigma_e^2$$

Observando que $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$ e $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ temos pela expressão (4) que

$$\begin{aligned} \text{Var} [\tilde{Y}(\rho)] &= (I_a \otimes D') [I_a \otimes (D')^{-1} D^{-1}] (I_a \otimes D) \sigma_e^2 \\ &= [I_a \otimes D' (D')^{-1} D^{-1} D] \sigma_e^2 \\ &= (I_a \otimes I_p) \sigma_e^2 \end{aligned}$$

Logo:

$$\text{Var} [\tilde{Y}(\rho)] = I_{ap} \sigma_e^2 \quad (6)$$

ou seja, através da transformação não singular (5) passamos de um modelo linear com dispersão $V\sigma_e^2$ para outro também linear, porém com dispersão simplificada $I\sigma_e^2$. Portanto, as funções estimáveis segundo ambos os modelos, são as mesmas.

4.1.2. Sistema de equações normais

Se $C'\beta$ é estimável, então o estimador linear imparcial de variância mínima será $C'\underline{b}$, onde $\underline{b}$ é qualquer solução do sistema

$$[(I_a \otimes D')X]'[(I_a \otimes D')X]\underline{b} = [(I_a \otimes D')X]'Y(\rho)$$

Usando (5) vem

$$[X'(I_a \otimes D)][(I_a \otimes D')X]\underline{b} = [X'(I_a \otimes D)](I_a \otimes D')Y$$

por (4) obtemos

$$X'(I_a \otimes A^{-1})X\underline{b} = X'(I_a \otimes A^{-1})Y \quad (7)$$

Com o objetivo de ilustrarmos a obtenção das matrizes $X'(I_a \otimes A^{-1})X$ e $X'(I_a \otimes A^{-1})Y$ no caso geral de K tratamentos e p períodos ($p \leq K$), consideremos o caso particular de um delineamento com $K = p = 3$, cujo esquema balanceado é:

Períodos	Animais					
	1	2	3	4	5	6
I	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
II	(2)	(3)	(1)	(3)	(1)	(2)
III	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)

Neste caso temos:

$a = 6$ animais ou seqüências de tratamentos

$r = 6$ repetições de tratamentos

$K = 3$ tratamentos

$p = 3$ períodos

$\Lambda = 4$ número de vezes que um tratamento k é precedido e/ou sucedido por outro k' .

Então

$$\beta' = \left[\mu : p_1 p_2 p_3 : t_1 t_2 t_3 \right]$$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{122} \\ y_{133} \\ \dots \\ y_{212} \\ y_{223} \\ y_{231} \\ \dots \\ y_{313} \\ y_{321} \\ y_{332} \\ \dots \\ y_{411} \\ y_{423} \\ y_{432} \\ \dots \\ y_{512} \\ y_{521} \\ y_{533} \\ \dots \\ y_{613} \\ y_{622} \\ y_{631} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & : & 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & : & 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & : & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 1 & : & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & : & 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \\ 1 & : & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 1 & : & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \\ 1 & : & 0 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & : & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 1 & : & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & : & 0 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & : & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 1 & : & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \\ 1 & : & 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & : & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e obtemos as matrizes:

$$(I_a \otimes D')X = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \vdots & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 \\ 1-\rho & -\rho & 1 & 0 & \vdots & -\rho & 1 & 0 \\ 1-\rho & 0 & -\rho & 1 & \vdots & 0 & -\rho & 1 \\ \hdashline \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \vdots & 0 & \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ 1-\rho & -\rho & 1 & 0 & \vdots & 0 & -\rho & 1 \\ 1-\rho & 0 & -\rho & 1 & \vdots & 1 & 0 & -\rho \\ \hdashline \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \sqrt{1-\rho^2} \\ 1-\rho & -\rho & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -\rho \\ 1-\rho & 0 & -\rho & 1 & \vdots & -\rho & 1 & 0 \\ \hdashline \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \vdots & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 \\ 1-\rho & -\rho & 1 & 0 & \vdots & -\rho & 0 & 1 \\ 1-\rho & 0 & -\rho & 1 & \vdots & 0 & 1 & -\rho \\ \hdashline \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \vdots & 0 & \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ 1-\rho & -\rho & 1 & 0 & \vdots & 1 & -\rho & 0 \\ 1-\rho & 0 & -\rho & 1 & \vdots & -\rho & 0 & 1 \\ \hdashline \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \sqrt{1-\rho^2} \\ 1-\rho & -\rho & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -\rho \\ 1-\rho & 0 & -\rho & 1 & \vdots & 1 & -\rho & 0 \end{bmatrix}$$

$$X'(I_a \otimes A^{-1})X = \frac{1}{1-\rho^2}$$

$6(1-\rho)(3-\rho)$	$6(1-\rho)$	$6(1-\rho)^2$	$6(1-\rho)$	$2(1-\rho)(3-\rho)$	$2(1-\rho)(3-\rho)$	$2(1-\rho)(3-\rho)$
$6(1-\rho)$	6	-6ρ	0	$2(1-\rho)$	$2(1-\rho)$	$2(1-\rho)$
$6(1-\rho)^2$	-6ρ	$6(1+\rho^2)$	-6ρ	$2(1-\rho)^2$	$2(1-\rho)^2$	$2(1-\rho)^2$
$6(1-\rho)$	0	-6ρ	6	$2(1-\rho)$	$2(1-\rho)$	$2(1-\rho)$
$2(1-\rho)(3-\rho)$	$2(1-\rho)$	$2(1-\rho)^2$	$2(1-\rho)$	$2(3+\rho^2)$	-4ρ	-4ρ
$2(1-\rho)(3-\rho)$	$2(1-\rho)$	$2(1-\rho)^2$	$2(1-\rho)$	-4ρ	$2(3+\rho^2)$	-4ρ
$2(1-\rho)(3-\rho)$	$2(1-\rho)$	$2(1-\rho)^2$	$2(1-\rho)$	-4ρ	-4ρ	$2(3+\rho^2)$

$$(I_a \otimes D') \tilde{Y} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} y_{111} \\ -\rho y_{111} + y_{122} \\ -\rho y_{122} + y_{133} \\ \dots\dots\dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{212} \\ -\rho y_{212} + y_{223} \\ -\rho y_{223} + y_{231} \\ \dots\dots\dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{313} \\ -\rho y_{313} + y_{321} \\ -\rho y_{321} + y_{332} \\ \dots\dots\dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{411} \\ -\rho y_{411} + y_{423} \\ -\rho y_{423} + y_{432} \\ \dots\dots\dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{512} \\ -\rho y_{512} + y_{521} \\ -\rho y_{521} + y_{533} \\ \dots\dots\dots \\ \sqrt{1-\rho^2} y_{613} \\ -\rho y_{613} + y_{622} \\ -\rho y_{622} + y_{631} \end{bmatrix}$$

$$X'(I_a \otimes \tilde{A}^{-1}) \tilde{Y} = \frac{1}{1-\rho^2}$$

$$\begin{bmatrix} (1-\rho)P_1 + (1-\rho)^2 P_2 + (1-\rho)P_3 \\ \dots\dots\dots \\ P_1 - \rho P_2 \\ -\rho P_1 + (1+\rho^2)P_2 - \rho P_3 \\ -\rho P_2 + P_3 \\ \dots\dots\dots \\ T_1 - \rho(P_{11} + P_{21} + P_{31}) + \rho^2 T_1^{(2)} \\ T_2 - \rho(P_{12} + P_{22} + P_{32}) + \rho^2 T_2^{(2)} \\ T_3 - \rho(P_{13} + P_{23} + P_{33}) + \rho^2 T_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

onde: $P_1 = y_{111} + y_{212} + y_{313} + y_{411} + y_{512} + y_{613}$ é o total do 1º período;

P_2 e P_3 totais dos períodos II e III, respectivamente;

$T_1 = y_{111} + y_{231} + y_{321} + y_{411} + y_{521} + y_{631}$ é o total do 1º tratamento;

T_2 e T_3 analogamente definidos;

$T_1^{(2)} = y_{321} + y_{521}$ é o total do 1º tratamento no 2º período;

$T_2^{(2)}$ e $T_3^{(2)}$ analogamente definidos;

P_{jk} é o total das observações que no período j precedem ou sucedem o tratamento k , isto é:

$$P_{11} = y_{313} + y_{512}$$

$$P_{12} = y_{111} + y_{613} \quad \Rightarrow \quad P_{11} + P_{12} + P_{13} = P_1$$

$$P_{13} = y_{212} + y_{411}$$

$$P_{21} = y_{122} + y_{223} + y_{423} + y_{622}$$

$$P_{22} = y_{223} + y_{321} + y_{423} + y_{521} \quad \Rightarrow \quad P_{21} + P_{22} + P_{23} = 2P_2$$

$$P_{23} = y_{122} + y_{321} + y_{521} + y_{622}$$

$$P_{31} = y_{332} + y_{533}$$

$$P_{32} = y_{133} + y_{631} \quad \Rightarrow \quad P_{31} + P_{32} + P_{33} = P_3$$

$$P_{33} = y_{231} + y_{432}$$

Nas matrizes $X'(I_a \otimes \bar{A}^{-1})X$ e $X'(I_a \otimes \bar{A}^{-1})Y$ pode-se observar que a soma das linhas referentes a períodos, bem como a soma das linhas relativas a tratamentos é igual à linha relativa à média. De fato, na matriz $X'(I_a \otimes \bar{A}^{-1})Y$ para as linhas relativas a tratamentos, lembrando que:

$$\sum_k T_k = \sum_j P_j; \quad \sum_k T_k^{(2)} = P_2 \quad \text{e} \quad \sum_k P_{jk} = \begin{cases} P_j & \text{para } j = 1, 3 \\ 2P_j & \text{para } j = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{temos: } T_1 + T_2 + T_3 - \rho(P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{21} + P_{22} + P_{23} + P_{31} + P_{32} + P_{33}) \\
+ \rho^2(T_1^{(2)} + T_2^{(2)} + T_3^{(3)}) = P_1 + P_2 + P_3 - \rho(P_1 + 2P_2 + P_3) + \sigma^2 P_2 \\
= (1 - \rho)P_1 + (1 - \rho)^2 P_2 + (1 - \rho)P_3,
\end{aligned}$$

que é a linha referente à média.

No caso geral de K tratamentos e p períodos com $p \leq K$, te
remos

$$X' (I_a \otimes A^{-1}) X = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} c & \underline{L}' & \underline{M}' \\ \underline{L} & P & N' \\ \underline{M} & N & T \end{bmatrix}$$

$$\text{onde: } c = a(1 - \rho)[p - (p - 2)\rho] \quad (8)$$

$$\underline{L}' = a(1 - \rho)[1, (1 - \rho), (1 - \rho), \dots, (1 - \rho), 1]_{(1 \times p)} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\underline{M}' &= \frac{r}{p} (1 - \rho) [p - (p - 2)\rho] [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{(1 \times K)} \\
&= \frac{r}{p} (1 - \rho) [p - (p - 2)\rho] \underline{1}'_{(1 \times K)} \quad (10)
\end{aligned}$$

$$P = a \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 + \rho^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(p \times p)} = a(1 - \rho^2) A^{-1} \quad (11)$$

$$N' = \frac{r}{p} (1 - \rho) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ (1-\rho) & (1-\rho) & \dots & (1-\rho) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-\rho) & (1-\rho) & \dots & (1-\rho) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(p \times K)} \quad (12)$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{r}{p} [p + (p-2)\rho^2] & -\Lambda\rho & \dots & -\Lambda\rho \\ -\Lambda\rho & \frac{r}{p} [p + (p-2)\rho^2] & \dots & -\Lambda\rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Lambda\rho & -\Lambda\rho & \dots & \frac{r}{p} [p + (p-2)\rho^2] \end{bmatrix}_{(K \times K)} \quad (13)$$

onde Λ , pela condição de balanceamento vista em 2.1.2, é dado por

$$\Lambda = \frac{2a(p-1)}{K(K-1)}$$

De fato, sendo a soma das linhas referentes a tratamentos igual a linha relativa à media, então, das matrizes M' e T , obtemos

$$\frac{r}{p} [p + (p-2)\rho^2] - (K-1) \Lambda\rho = \frac{r}{p} (1-\rho) [p - (p-2)\rho]$$

donde se obtêm $\Lambda = \frac{2r(p-1)}{p(K-1)}$, como era de se esperar, lembrando que

$$ap = rK.$$

Por outro lado, para o caso geral, o segundo membro do sistema de equações normais será:

$$X' (I_a \otimes \tilde{A}^{-1}) \tilde{Y} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ \tilde{P}(\rho) \\ \tilde{T}(\rho) \end{bmatrix}$$

onde:

$$G(\rho) = (1-\rho)P_1 + (1-\rho)^2 \sum_{j=2}^{p-1} P_j + (1-\rho)P_p \quad (14)$$

$$\tilde{P}(\rho) = \begin{bmatrix} P_1 - \rho P_2 \\ -\rho P_1 + (1+\rho^2)P_2 - \rho P_3 \\ -\rho P_2 + (1+\rho^2)P_3 - \rho P_4 \\ \dots\dots\dots \\ -\rho P_{p-2} + (1+\rho^2)P_{p-1} - \rho P_p \\ -\rho P_{p-1} + P_p \end{bmatrix}_{(p \times 1)} \quad (15)$$

$$\tilde{T}(\rho) = \begin{bmatrix} T_1 - \rho \sum_{j=1}^p P_{j1} + \rho^2 \sum_{j=2}^{p-1} T_1^{(j)} \\ T_2 - \rho \sum_{j=1}^p P_{j2} + \rho^2 \sum_{j=2}^{p-1} T_2^{(j)} \\ \dots\dots\dots \\ T_K - \rho \sum_{j=1}^p P_{jK} + \rho^2 \sum_{j=2}^{p-1} T_K^{(j)} \end{bmatrix}_{(K \times 1)} \quad (16)$$

com P_j : total do período j ; $j = 1, 2, \dots, p$

T_k : total do tratamento k ; $k = 1, 2, \dots, K$

P_{jk} : soma das observações que no período j precedem ou sucedem o tratamento k

$T_k^{(j)}$: total do tratamento k no período j

satisfazendo:

$$\sum_j P_j = \sum_k T_k; \quad \sum_j \sum_k P_{jk} = P_1 + 2 \sum_{j=2}^{p-1} P_j + P_p; \quad \sum_k T_k^{(j)} = P_j \quad (17)$$

O sistema de equações normais (7) na forma matricial será

então:

$$\frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} c & \tilde{L}' & \tilde{M}' \\ \tilde{L} & P & N' \\ \tilde{M} & N & T \end{bmatrix} \tilde{b} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ P(\rho) \\ T(\rho) \end{bmatrix}$$

Se considerarmos a partição

$$\tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tilde{p} \\ \tilde{t} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \tilde{p}' = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_p]; \quad \tilde{t}' = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_K]$$

obtemos

$$\frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} c & \tilde{L}' & \tilde{M}' \\ \tilde{L} & P & N' \\ \tilde{M} & N & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tilde{p}} \\ \hat{\tilde{t}} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ P(\rho) \\ T(\rho) \end{bmatrix} \quad (18)$$

4.1.3. Soma de quadrados de tratamentos ajustada

Pré-multiplicando ambos os membros de (18) pela matriz não singular

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{O}' & \tilde{O}' \\ \tilde{O} & I_P & \phi \\ \tilde{O} & -NP^{-1} & I_K \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} c & \tilde{L}' & \tilde{M}' \\ \tilde{L} & P & N' \\ \tilde{M} - NP^{-1}\tilde{L} & \phi & T - NP^{-1}N' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{p} \\ \hat{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ P(\rho) \\ T(\rho) - NP^{-1}P(\rho) \end{bmatrix} \quad (19)$$

De (11) temos:

$$P = a(1-\rho^2)A^{-1} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{a(1-\rho^2)} A \quad (20)$$

ou

$$P^{-1} = \frac{1}{a(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{p-1} & \rho^{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Usando (12) temos:

$$\begin{aligned} -NP^{-1} &= \frac{-r(1-\rho)}{ap(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} 1 & 1-\rho & \dots & 1-\rho & 1 \\ 1 & 1-\rho & \dots & 1-\rho & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-\rho & \dots & 1-\rho & 1 \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{p-1} & \rho^{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}_P \\ &= \frac{-r(1-\rho)(1+\rho)}{ap(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(K \times p)} = -\frac{1}{K} E_{(K \times p)} \quad (21) \end{aligned}$$

pois $ap = rK$.

Portanto, $\underline{Q}(\rho) = \left[Q_k(\rho) \right]_{(K \times 1)}$ com

$$Q_k(\rho) = T_k(\rho) - \frac{1}{K} G(\rho) \quad (26)$$

onde $T_k(\rho)$ é definido em (16).

Observamos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K Q_k(\rho) &= \sum_{k=1}^K T_k(\rho) - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K G(\rho) \\ &= \sum_{k=1}^K T_k(\rho) - G(\rho) \end{aligned} \quad (27)$$

De (16)

$$\sum_{k=1}^K T_k(\rho) = \sum_k T_k - \rho \sum_k \sum_j P_{jk} + \rho^2 \sum_k \sum_{j=2}^{p-1} T_k^{(j)}$$

Das igualdades em (17) vem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K T_k(\rho) &= \sum_j P_j - \rho(P_1 + 2 \sum_{j=2}^{p-1} P_j + P_p) + \rho^2 \sum_{j=2}^{p-1} P_j \\ &= (1-\rho)P_1 + (1-\rho)^2 \sum_{j=2}^{p-1} P_j + (1-\rho)P_p = G(\rho) \end{aligned}$$

Levando em (27) obtemos

$$\sum_{k=1}^K Q_k(\rho) = 0 \quad (28)$$

Substituindo (22), (24) e (26) em (19) obtemos o sistema

de equações:

$$\frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} c & \underline{L}' & \underline{M}' \\ \underline{L} & P & N' \\ 0 & \phi & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}} \\ \hat{\underline{p}} \\ \hat{\underline{t}} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ \underline{P}(\rho) \\ \underline{Q}(\rho) \end{bmatrix} \quad (29)$$

De (29) podemos obter a equação normal para tratamentos ajustada para média e período, ou seja

$$\frac{1}{1-\rho^2} C \hat{\underline{t}} = \frac{1}{1-\rho^2} \underline{Q}(\rho) \quad (30)$$

De (24) e (28) temos que posto (C) = K-1 e $\sum_k Q_k(\rho) = 0$, portanto, utilizando a restrição $\sum_{k=1}^K t_k = 0$, a qual implica em $\sum_{k=1}^K \hat{t}_k = 0$, podemos obter a solução de (30) resolvendo o sistema:

$$\left[\frac{r(p-2)}{pK} \rho^2 + \frac{2r(p-1)}{pK(K-1)} \rho + \frac{r}{K} \right] \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \dots \\ \hat{t}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(\rho) \\ Q_2(\rho) \\ \dots \\ Q_K(\rho) \end{bmatrix}$$

ou

$$\left[\frac{r(p-2)}{p} \rho^2 + \frac{2r(p-1)}{p(K-1)} \rho + r \right] I_K \hat{\underline{t}} = \underline{Q}(\rho)$$

Lembrando que $ap = rK$ e $\Lambda = \frac{2r(p-1)}{p(K-1)}$ obtemos

$$\hat{t}_k = \frac{1}{\frac{a(p-2)}{K} \rho^2 + \Lambda \rho + r} Q_k(\rho) \quad (31)$$

e utilizando (30) vem

$$SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = \sum_{k=1}^K \hat{t}_k Q_k(\rho) \frac{1}{1-\rho^2}$$

ou

$$SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = \frac{1}{\left[\frac{a(p-2)}{K} \rho^2 + \Lambda \rho + r \right] (1-\rho^2)} \sum_{k=1}^K Q_k^2(\rho) \quad (32)$$

4.1.4. Somas de quadrados de períodos e média ignoran do tratamentos

Se no modelo linear $\underline{Y} = X\beta + \underline{e}$ ignorarmos efeitos de tratamentos, então do sistema (18) as equações normais na forma matricial para períodos e média serão:

$$\frac{1}{1-\rho^2} (\underline{L} \hat{\underline{\mu}} + \underline{P} \hat{\underline{p}}) = \frac{1}{1-\rho^2} \underline{P}(\rho)$$

fazendo $\hat{\underline{\mu}} = 0$ podemos obter uma solução do sistema

$$\frac{1}{1-\rho^2} \underline{P} \hat{\underline{p}} = \frac{1}{1-\rho^2} \underline{P}(\rho) \quad (33)$$

ou, por (11)

$$\frac{1}{1-\rho^2} a \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \dots \\ \hat{p}_p \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} P_1(\rho) \\ P_2(\rho) \\ P_3(\rho) \\ \dots \\ P_p(\rho) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\rho^2} a (1-\rho^2) A^{-1} \hat{\underline{p}} = \frac{1}{1-\rho^2} \underline{P}(\rho) \Rightarrow \hat{\underline{p}} = \frac{1}{a(1-\rho^2)} A \underline{P}(\rho) \quad (34)$$

Usando (33) vem

$$SQ \{ \text{Períodos e Média} \} = \frac{1}{a(1-\rho^2)^2} \underline{P}'(\rho) A \underline{P}(\rho) \quad (35)$$

Mas de (15) temos

$$\underline{P}(\rho) = \begin{bmatrix} P_1 - \rho P_2 \\ -\rho P_1 + (1+\rho^2)P_2 - \rho P_3 \\ -\rho P_2 + (1+\rho^2)P_3 - \rho P_4 \\ \dots\dots\dots \\ -\rho P_{p-1} + P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \dots \\ P_p \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{P}(\rho) = (1 - \rho^2) \underline{A}^{-1} \underline{P}$$

Levando em (34) obtemos

$$\hat{p} = \frac{1}{a} \underline{P} \quad \dots \quad \hat{p}_j = \frac{1}{a} P_j$$

E (35) pode ser escrita

$$SQ \{ \text{Períodos e Média} \} = \frac{1}{a(1-\rho^2)} \sum_{j=1}^p P_j P_j(\rho) \quad (36)$$

Da mesma forma, se no modelo linear geral ignorarmos tratamentos e efeitos de períodos, então do sistema (18) obtemos a equação normal para a média

$$\frac{1}{1-\rho^2} c \hat{\mu} = \frac{1}{1-\rho^2} G(\rho) \quad (37)$$

ou por (8)

$$\frac{1}{1-\rho^2} a(1-\rho)[p - (p-2)\rho] \hat{\mu} = \frac{1}{1-\rho^2} G(\rho) \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{G(\rho)}{a(1-\rho)[p - (p-2)\rho]}$$

Logo, por (37)

$$SQ \{ \text{Média} \} = \frac{G^2(\rho)}{a(1-\rho)(1-\rho^2)[p - (p-2)\rho]} \quad (38)$$

De (36) e (38) obtemos por diferença a Soma de Quadrados de Períodos ajustada para a Média e ignorando tratamentos, ou seja

$$SQ \{ \text{Períodos} \} = SQ \{ \text{Períodos e Média} \} - SQ \{ \text{Média} \}$$

4.1.5. Soma de quadrados total

Da expressão (5) obtemos

$$\begin{aligned} SQ \{ \text{Total} \} &= \underline{Y}'(\rho) \underline{Y}(\rho) \\ &= \underline{Y}'(I_a \otimes D')'(I_a \otimes D') \underline{Y} \end{aligned}$$

ou

$$SQ \{ \text{Total} \} = \underline{Y}'(I_a \otimes A^{-1}) \underline{Y} \quad (39)$$

onde $\underline{Y}$ é o vetor de observações originais.

Desenvolvendo (39) obtemos

$$SQ \{ \text{Total} \} = \frac{1}{1 - \rho^2} \sum_{i=1}^a \{ (1 - \rho^2) y_{i1}^2 + \sum_{j=2}^p (y_{ij} - \rho y_{i(j-1)})^2 \}$$

Os resultados obtidos são sumarizados no quadro que se segue:

Análise da variância no modelo auto-regressivo

F. Variação	G.L.	Soma de Quadrados
Períodos e Média	p	$\frac{1}{a(1-\rho^2)} \sum_{j=1}^p P_j P_j(\rho)$
Tratamentos (aj.)	K-1	$\frac{1}{\left[\frac{a(p-2)}{K} \rho^2 + \Lambda \rho + r \right] (1-\rho^2)} \sum_{k=1}^K Q_k^2(\rho)$
Resíduo	p(a-1)-(K-1)	por diferença
Total	ap	$\frac{1}{1 - \rho^2} \sum_{i=1}^a \{ (1 - \rho^2) y_{i1}^2 + \sum_{j=2}^p (y_{ij} - \rho y_{i(j-1)})^2 \}$

4.1.6. Esperança matemática da soma de quadrados de tratamentos ajustada

Consideremos a partição

$$(I_a \otimes D')X = \begin{bmatrix} \underline{j} & : & X_1 & : & X_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad (40)$$

com $\underline{j}$ de ordem $(ap \times 1)$ o vetor relativo à média

X_1 de ordem $(ap \times p)$ a matriz relativa a períodos

X_2 de ordem $(ap \times K)$ a matriz relativa a tratamentos

então o primeiro e segundo membros do sistema (18) podem ser escritos na forma:

$$X'(I_a \otimes \tilde{A}^{-1})X = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} c & \underline{L}' & \underline{M}' \\ \underline{L} & P & N' \\ \underline{M} & N & T \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \underline{j}'\underline{j} & \underline{j}'X_1 & \underline{j}'X_2 \\ X_1'\underline{j} & X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'\underline{j} & X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$X'(I_a \otimes \tilde{A}^{-1})\underline{Y} = X'(I_a \otimes D)(I_a \otimes D')\underline{Y} = X'(I_a \otimes D)\underline{Y}(\rho)$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} G(\rho) \\ \underline{P}(\rho) \\ \underline{T}(\rho) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \underline{j}'\underline{Y}(\rho) \\ X_1'\underline{Y}(\rho) \\ X_2'\underline{Y}(\rho) \end{bmatrix} \quad (42)$$

De (25) temos que

$$\underline{Q}(\rho) = \underline{T}(\rho) - N\tilde{P}^{-1}\underline{P}(\rho)$$

usando (42)

$$\underline{Q}(\rho) = \left[X_2'\underline{Y}(\rho) - N\tilde{P}^{-1}X_1'\underline{Y}(\rho) \right] \sqrt{1-\rho^2}$$

$$\underline{Q}(\rho) = (\underline{X}'_2 - \underline{N}\underline{P}^{-1}\underline{X}'_1) \underline{Y}(\rho) \sqrt{1-\rho^2}$$

ou

$$\underline{Q}(\rho) = \underline{H}' \underline{Y}(\rho) \sqrt{1-\rho^2} \quad (43)$$

onde $\underline{H}' = \underline{X}'_2 - \underline{N}\underline{P}^{-1}\underline{X}'_1$.

Entretanto, (32) pode ser escrita na forma

$$SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = \frac{1}{1-\rho^2} \underline{\hat{t}}' \underline{Q}(\rho) \quad (44)$$

De (30) temos

$$\underline{C} \underline{\hat{t}} = \underline{Q}(\rho) \Rightarrow \underline{\hat{t}} = \underline{C}^{-} \underline{Q}(\rho) \quad (45)$$

com $\underline{C}^{-}$ uma inversa generalizada de $\underline{C}$

substituindo (45) em (44) vem

$$SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = \underline{Q}'(\rho) (\underline{C}^{-})' \underline{Q}(\rho) \frac{1}{1-\rho^2}$$

Usando (43) temos

$$SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = \underline{Y}'(\rho) (\underline{X}_2 - \underline{X}_1 \underline{P}^{-1} \underline{N}') (\underline{C}^{-})' (\underline{X}'_2 - \underline{N}\underline{P}^{-1}\underline{X}'_1) \underline{Y}(\rho) \quad (46)$$

observemos que

$$\underline{H}'\underline{H} = (\underline{X}'_2 - \underline{N}\underline{P}^{-1}\underline{X}'_1)(\underline{X}_2 - \underline{X}_1 \underline{P}^{-1} \underline{N}') = \underline{X}'_2 \underline{X}_2 - \underline{X}'_2 \underline{X}_1 \underline{P}^{-1} \underline{N}' - \underline{N}\underline{P}^{-1} \underline{X}'_1 \underline{X}_2 + \underline{N}\underline{P}^{-1} \underline{X}'_1 \underline{X}_1 \underline{P}^{-1} \underline{N}'$$

que na notação de (41) resulta

$$\underline{H}'\underline{H} = \underline{T} - \underline{N}\underline{P}^{-1} \underline{N}' - \underline{N}\underline{P}^{-1} \underline{N}' + \underline{N}\underline{P}^{-1} \underline{P}\underline{P}^{-1} \underline{N}' = \underline{T} - \underline{N}\underline{P}^{-1} \underline{N}' = \underline{C} \quad (47)$$

substituindo em (46) vem

$$SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = \underline{Y}'(\rho) \underline{H} [(\underline{H}'\underline{H})^{-}]' \underline{H}' \underline{Y}(\rho)$$

ou equivalentemente

$$SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = SQ \{ H' \underline{Y}(\rho) \} \quad (48)$$

Utilizando um resultado devido a SCHEFFÉ (1959), em (48)

temos

$$E SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = E SQ \{ H' \underline{Y}(\rho) \} = \text{posto}(H) \sigma_e^2 + SQ \{ H' \underline{Y}(\rho) \} \Big|_{\underline{Y}(\rho)=E(\underline{Y}(\rho))} \quad (49)$$

Mas $\text{posto}(H) = \text{posto}(H'H) = \text{posto}(C) = K-1$, por (47) e (24).

Sendo $E(\underline{Y}(\rho)) = (I_a \otimes D') X \underline{\beta}$, temos que

$$\begin{aligned} SQ \{ H' \underline{Y}(\rho) \} \Big|_{\underline{Y}(\rho)=E(\underline{Y}(\rho))} &= \underline{Y}'(\rho) H [(H'H)^{-1}]' H' \underline{Y}(\rho) \Big|_{\underline{Y}(\rho)=(I_a \otimes D') X \underline{\beta}} \\ &= \underline{\beta}' X' (I_a \otimes D) H [(H'H)^{-1}]' H' (I_a \otimes D') X \underline{\beta} \end{aligned} \quad (50)$$

mas por (40)

$$(I_a \otimes D') X \underline{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \underline{j} : X_1 : X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{p} \\ \underline{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \underline{j} \mu \\ X_1 \underline{p} \\ X_2 \underline{t} \end{bmatrix}$$

e

$$H' (I_a \otimes D') X \underline{\beta} = (X_2' - NP^{-1} X_1') \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \underline{j} \mu \\ X_1 \underline{p} \\ X_2 \underline{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} (X_2' \underline{j} - NP^{-1} X_1' \underline{j}) \mu \\ (X_2' X_1 - NP^{-1} X_1' X_1) \underline{p} \\ (X_2' X_2 - NP^{-1} X_1' X_2) \underline{t} \end{bmatrix}$$

que a notação de (41) fica

$$H' (I_a \otimes D') X \underline{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} (\underline{M} - NP^{-1} \underline{L}) \mu \\ (\underline{N} - NP^{-1} \underline{P}) \underline{p} \\ (\underline{T} - NP^{-1} \underline{N}') \underline{t} \end{bmatrix}$$

Usando (22) e (23) vem

$$H'(I_a \otimes D') X \tilde{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi \\ Ct \end{bmatrix} \quad (51)$$

substituindo (51) em (50) obtemos

$$\begin{aligned} SQ\{H'Y(\rho)\} \Big|_{Y(\rho)=E(Y(\rho))} &= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 0' & \phi' & t'C' \end{bmatrix} (C^-)' \begin{bmatrix} 0 \\ \phi \\ Ct \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2} t'C t \end{aligned} \quad (52)$$

Levando (52) em (49) obtemos

$$E SQ\{\text{Tratamentos aj.}\} = (K-1)\sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} t'C t \quad (53)$$

para C definida em (24) e para $\sum_{k=1}^K t_k = 0$ temos desenvolvendo (53), que

$$E SQ\{\text{Tratamentos aj.}\} = (K-1)\sigma_e^2 + \frac{\frac{a(p-2)}{K} \rho^2 + \Lambda\rho + r}{1-\rho^2} \sum_{k=1}^K t_k^2$$

4.1.7. Esperança matemática da soma de quadrados de períodos e média, ignorando tratamentos

De (35) temos

$$SQ\{\text{Períodos e Médias}\} = \frac{1}{a(1-\rho^2)^2} P'(\rho) A P(\rho)$$

onde por (42) $P(\rho) = \sqrt{1-\rho^2} X_1' Y(\rho)$

Logo

$$SQ \{ \text{Períodos e Média} \} = \frac{1}{a(1-\rho^2)} \underline{Y}'(\rho) \underline{X}_1' A \underline{X}_1' \underline{Y}(\rho) \quad (54)$$

usando (41) e (20) temos que

$$[(\underline{X}_1' \underline{X}_1)^{-}]' = (\underline{P}^{-})' = \frac{1}{a(1-\rho^2)} A \Rightarrow A = a(1-\rho^2) [(\underline{X}_1' \underline{X}_1)^{-}]'$$

substituindo em (54) vem

$$SQ \{ \text{Períodos e Média} \} = \underline{Y}'(\rho) \underline{X}_1' [(\underline{X}_1' \underline{X}_1)^{-}]' \underline{X}_1' \underline{Y}(\rho) = SQ \{ \underline{X}_1' \underline{Y}(\rho) \}$$

portanto

$$E SQ \{ \text{Períodos e Média} \} = \text{posto}(\underline{X}_1) \sigma_e^2 + SQ \{ \underline{X}_1' \underline{Y}(\rho) \} \Big|_{\underline{Y}(\rho)=E(\underline{Y}(\rho))} \quad (55)$$

$$\text{com } E(\underline{Y}(\rho)) = (\underline{I}_a \otimes \underline{D}') \underline{X} \Big|_{R(\mu, p)}^{\underline{\beta}} \quad \text{para } \underline{\beta}' = \begin{bmatrix} \mu : p_1 & p_2 & \dots & p_p \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad (\underline{I}_a \otimes \underline{D}') \underline{X} \Big|_{R(\mu, p)} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} j : \underline{X}_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_1 = (\underline{I}_a \otimes \underline{D}') \dots \text{posto}(\underline{X}_1) = \text{posto}(\underline{D}) = p \quad (56)$$

$$SQ \{ \underline{X}_1' \underline{Y}(\rho) \} \Big|_{\underline{Y}(\rho)=E(\underline{Y}(\rho))} = \underline{\beta}' \underline{X}' (\underline{I}_a \otimes \underline{D}) \Big|_{R(\mu, p)} \underline{X}_1' [(\underline{X}_1' \underline{X}_1)^{-}]' \underline{X}_1' (\underline{I}_a \otimes \underline{D}') \underline{X} \Big|_{R(\mu, p)}^{\underline{\beta}}$$

mas por (40)

$$(\underline{I}_a \otimes \underline{D}') \underline{X} \Big|_{R(\mu, p)}^{\underline{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} j\mu \\ \dots \\ \underline{X}_1 p \end{bmatrix}$$

e por (41)

$$\underline{X}_1' (\underline{I}_a \otimes \underline{D}') \underline{X} \Big|_{R(\mu, p)}^{\underline{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} L\mu \\ \dots \\ p p \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \text{SQ}\{X_1' Y(\rho)\} \Big|_{Y(\rho) = (I_a \otimes D') X} \Big|_{R(\mu, \underline{p})} &= \frac{1}{1 - \rho^2} \left[\underline{L}' \underline{\mu} : \underline{p}' \underline{P}' \right] (P^-)' \begin{bmatrix} \underline{L} \underline{\mu} \\ \dots \\ \underline{P} \underline{p} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{1 - \rho^2} \{ \underline{L}' \underline{P}^{-1} \underline{L} \underline{\mu}^2 + \underline{p}' \underline{P} \underline{p} \} \quad (57)
 \end{aligned}$$

pois P é simétrica e não singular. Logo, usando (20) vem

$$\underline{L}' \underline{P}^{-1} \underline{L} = \frac{1}{a(1 - \rho^2)} \underline{L}' A \underline{L}$$

para A e $\underline{L}$ definidas em (20) e (9) obtemos

$$\underline{L}' \underline{P}^{-1} \underline{L} = a(1 - \rho)[p - (p-2)\rho] = c$$

substituindo em (57) vem

$$\text{SQ}\{X_1' Y(\rho)\} \Big|_{Y(\rho) = E(Y(\rho))} = \frac{1}{1 - \rho^2} \{ c \underline{\mu}^2 + \underline{p}' \underline{P} \underline{p} \} \quad (58)$$

levando (56) e (58) em (55) obtemos

$$E \text{SQ}\{\text{Períodos e Média}\} = p \sigma_e^2 + \frac{1}{1 - \rho^2} \{ c \underline{\mu}^2 + \underline{p}' \underline{P} \underline{p} \} \quad (59)$$

Por outro lado, de (38) temos que a soma de quadrados da média ignorando tratamentos e períodos é:

$$\text{SQ}\{\text{Média}\} = \frac{1}{c(1 - \rho^2)} G^2(\rho) \quad \text{com } c = \underline{j}' \underline{j} \text{ por (41).}$$

De (42) temos

$$G(\rho) = \sqrt{1 - \rho^2} \underline{j}' \underline{Y}(\rho)$$

Logo

$$\text{SQ}\{\text{Média}\} = \underline{Y}'(\rho) \underline{j} (\underline{j}' \underline{j})^{-1} \underline{j}' \underline{Y}(\rho) = \text{SQ}\{\underline{j}' \underline{Y}(\rho)\}$$

Portanto

$$E \text{ SQ}\{\text{Média}\} = \text{posto } (\underline{j}) \sigma_e^2 + \text{SQ}\{\underline{j}'\underline{Y}(\rho)\} \Big|_{\underline{Y}(\rho)=E(\underline{Y}(\rho))} \quad (60)$$

Mas, $\text{posto } (\underline{j}) = 1$ e $E(\underline{Y}(\rho)) = (\underline{I}_a \otimes \underline{D}')\underline{X} \Big|_{\underline{R}(\mu)} \underline{\beta}$ para $\underline{\beta} = \underline{\mu}$ e

$$(\underline{I}_a \otimes \underline{D}')\underline{X} \Big|_{\underline{R}(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \underline{j}$$

Logo por (40)

$$(\underline{I}_a \otimes \underline{D}')\underline{X} \Big|_{\underline{R}(\mu)} \underline{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \underline{j} \underline{\mu}$$

e

$$\underline{j}'(\underline{I}_a \otimes \underline{D}')\underline{X} \Big|_{\underline{R}(\mu)} \underline{\beta} = \underline{j}'\underline{j} \underline{\mu} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} c \underline{\mu}$$

sendo $(\underline{j}'\underline{j})^{-1} = \frac{1}{c}$ obtemos

$$\text{SQ}\{\underline{j}'\underline{Y}(\rho)\} = \frac{1}{1-\rho^2} c \underline{\mu}^2$$

substituindo em (60) obtemos

$$E \text{ SQ}\{\text{Média}\} = \sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} c \underline{\mu}^2 \quad (61)$$

Portanto, de (59) e (61) podemos obter a esperança matemática da soma de quadrados de períodos ajustada para a média e ignorando tratamentos, isto é:

$$E \text{ SQ}\{\text{Períodos}\} = (p-1) \sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} \underline{p}'\underline{P}\underline{p}$$

4.1.8. Esperança matemática da soma de quadrados residual

De (5) temos

$$\text{SQ}\{\text{Total}\} = \underline{Y}'(\rho) \underline{Y}(\rho) = \underline{Y}'(\rho) \underline{I}_{ap} \underline{Y}(\rho)$$

Logo

$$\begin{aligned}
 E\{SQ\{Total\}\} &= \text{posto } (I_{ap}) \sigma_e^2 + \tilde{Y}'(\rho) \tilde{Y}(\rho) \Big|_{\tilde{Y}(\rho)=E(\tilde{Y}(\rho))=(I_a \otimes D') X \beta} \\
 &= ap \sigma_e^2 + \tilde{\beta}' X' (I_a \otimes D) (I_a \otimes D') X \tilde{\beta} \quad (62)
 \end{aligned}$$

Mas por (41)

$$(I_a \otimes D') X \tilde{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} \tilde{j}\mu \\ \dots \\ X_1 \tilde{p} \\ \dots \\ X_2 \tilde{t} \end{bmatrix}$$

Portanto, em (62) obtemos

$$E\{SQ\{Total\}\} = ap \sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} (\tilde{j}' \tilde{j} \mu^2 + \tilde{p}' X_1' X_1 \tilde{p} + \tilde{t}' X_2' X_2 \tilde{t})$$

ou, pela notação de (41)

$$E\{SQ\{Total\}\} = ap \sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} (c \mu^2 + \tilde{p}' P \tilde{p} + \tilde{t}' T \tilde{t})$$

Por diferença podemos obter a esperança matemática da soma de quadrados do resíduo,

$$E\{SQ\{Resíduo\}\} = E\{SQ\{Total\}\} - E\{SQ\{Períodos e Média\}\} - E\{SQ\{Tratamentos aj.\}\}$$

$$= [ap - p - (K-1)] \sigma_e^2$$

ou

$$E\{SQ\{Resíduo\}\} = [p(a-1) - (K-1)] \sigma_e^2$$

uma vez que $\tilde{t}' C \tilde{t} = \tilde{t}' T \tilde{t} - \tilde{t}' N P^{-1} N' \tilde{t}$ e para $\sum_{k=1}^K t_k = 0$ temos que $N' \tilde{t} = 0$.

Os resultados obtidos são sumarizados no quadro que se segue:

Esperanças matemáticas das somas de quadrados

F. Variação	G.L.	E SQ
Períodos (aj. para Média, ignorando Tratamentos)	$p-1$	$(p-1) \sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} \underline{p}' P \underline{p}$
Média (ignorando Períodos e Tratamentos)	1	$\sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} c \mu^2$
Períodos e Média (ignorando Tratamentos)	p	$p \sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} (c \mu^2 + \underline{p}' P \underline{p})$
Tratamentos (ajustado)	$K-1$	$(K-1) \sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{a(p-2)}{K} \rho^2 + \Lambda \rho + r \right] \sum_{k=1}^K t_k^2$
Resíduo	$p(a-1)-(K-1)$	$[p(a-1)-(K-1)] \sigma_e^2$
Total	ap	$ap \sigma_e^2 + \frac{1}{1-\rho^2} (c \mu^2 + \underline{p}' P \underline{p} + \underline{t}' T \underline{t})$

4.2. Variância de estimativas de efeitos de tratamentos

De (43) temos que

$$\underline{Q}(\rho) = H' \underline{Y}(\rho) \sqrt{1-\rho^2}$$

onde $H' = X_2' - NP^{-1} X_1'$

Logo

$$\text{Var} \{ \underline{Q}(\rho) \} = (1-\rho^2) H' \text{Var} \{ \underline{Y}(\rho) \} H$$

por (6) $\text{Var} \{ \underline{Y}(\rho) \} = I_{ap} \sigma_e^2$

portanto

$$\text{Var} \{ \underline{Q}(\rho) \} = (1 - \rho^2) \underline{H}' \underline{I}_{ap} \underline{H} \sigma_e^2$$

ou

$$\text{Var} \{ \underline{Q}(\rho) \} = (1 - \rho^2) \underline{H}' \underline{H} \sigma_e^2$$

usando (47) temos

$$\text{Var} \{ \underline{Q}(\rho) \} = (1 - \rho^2) \underline{C} \sigma_e^2 \quad (63)$$

Por outro lado, de (45)

$$\underline{\hat{t}} = \underline{C}^- \underline{Q}(\rho)$$

Logo

$$\text{Var} \{ \underline{\hat{t}} \} = \underline{C}^- \text{Var} \{ \underline{Q}(\rho) \} (\underline{C}^-)'$$

usando (63) vem

$$\text{Var} \{ \underline{\hat{t}} \} = (1 - \rho^2) \underline{C}^- \underline{C} (\underline{C}^-)' \sigma_e^2 \quad (64)$$

Portanto, se $\underline{Z}' \underline{t}$ é estimável, isto é, $\underline{Z}' = \underline{\alpha}' \underline{C}$, então

$$\text{Var} \{ \underline{Z}' \underline{\hat{t}} \} = \underline{Z}' \text{Var} \{ \underline{\hat{t}} \} \underline{Z}$$

Usando (64) temos

$$\text{Var} \{ \underline{Z}' \underline{\hat{t}} \} = \underline{Z}' \underline{C}^- \underline{C} (\underline{C}^-)' \underline{Z} (1 - \rho^2) \sigma_e^2$$

Para $\underline{Z} = \underline{C} \underline{\alpha}$, pois $\underline{C} = \underline{C}'$, vem

$$\begin{aligned} \text{Var} \{ \underline{Z}' \underline{\hat{t}} \} &= \underline{Z}' \underline{C}^- \underline{C} (\underline{C}^-)' \underline{C} \underline{\alpha} (1 - \rho^2) \sigma_e^2 \\ &= \underline{Z}' \underline{C}^- \underline{C} \underline{\alpha} (1 - \rho^2) \sigma_e^2 \\ &= \underline{Z}' \underline{C}^- \underline{Z} (1 - \rho^2) \sigma_e^2 \end{aligned}$$

e para $\tilde{Z}' = [0 \dots 1 \dots -1 \dots 0]$ temos

$$\text{Var} \{ \hat{t}_k - \hat{t}_{k'} \} = \frac{2 \sigma_e^2 (1 - \rho^2)}{\frac{a(p-2)}{K} \rho^2 + \Lambda \rho + r} \quad (65)$$

4.3. Exemplo ilustrativo da análise da variância pelo modelo auto-regressivo

Como ilustração, consideremos o caso de $K = 3$ tratamentos e $p = 3$ períodos, adotando-se as observações da Tabela 1, relativas aos 6 primeiros animais e os 3 primeiros períodos, obtendo o seguinte quadro de dados.

Produção média diária de leite em kg e estatísticas básicas para análise da variância pelo modelo auto-regressivo com $\rho = 0,9$ e $t_1 = t_2 = t_3 = 0$

Animais	Períodos			Totais
	P_1	P_2	P_3	
1	9,64 (1)	9,88 (2)	7,96 (3)	-
2	13,95 (2)	13,13 (3)	10,49 (1)	-
3	8,26 (3)	7,69 (1)	7,50 (2)	-
4	8,75 (1)	8,48 (3)	8,37 (2)	-
5	9,38 (2)	8,55 (1)	7,43 (3)	-
6	17,07 (3)	14,61 (2)	14,30 (1)	-
P_{j1}	17,64	46,10	14,93	82,67
P_{j2}	26,71	37,85	22,26	86,82
P_{j3}	22,70	40,73	18,86	82,29
P_j	67,05	62,34	56,05	-
$P_j(\rho)$	10,9440	2,0454	-0,0560	-
$T_1^{(j)}$	18,39	16,24	24,79	$T_1 = 59,42$
$T_2^{(j)}$	23,33	24,49	15,87	$T_2 = 63,69$
$T_3^{(j)}$	25,33	21,61	15,39	$T_3 = 62,33$

No esquema temos

$$a = 6; \quad r = 6; \quad K = p = 3 \quad \text{e} \quad \Lambda = \frac{2r(p-1)}{p(K-1)} = 4$$

com P_{jk} ; $P_j(\rho)$ e $T_k^{(j)}$ definidos em 4.1.2

e

$$G(\rho) = (1-\rho)P_1 + (1-\rho)^2 \sum_{j=2}^{p-1} P_j + (1-\rho)P_p = 12,9334$$

$$T_k(\rho) = T_k - \rho \sum_{j=1}^p P_{jk} + \rho^2 \sum_{j=2}^{p-1} T_k^{(j)}$$

ou seja

$$T_1(\rho) = 59,42 - 0,9 \cdot (78,67) + 0,81 \cdot (16,24) = 1,7714$$

$$T_2(\rho) = 63,69 - 0,9 \cdot (86,82) + 0,81 \cdot (24,49) = 5,3889$$

$$T_3(\rho) = 62,33 - 0,9 \cdot (82,29) + 0,81 \cdot (21,61) = 5,7731$$

$$Q_k(\rho) = T_k(\rho) - \frac{1}{K} G(\rho)$$

ou seja

$$Q_1(\rho) = 1,7714 - \frac{1}{3} 12,9334 = -2,5397$$

$$Q_2(\rho) = 5,3889 - \frac{1}{3} 12,9334 = 1,0778$$

$$Q_3(\rho) = 5,7731 - \frac{1}{3} 12,9334 = 1,4620$$

Portanto,

$$SQ \{ \text{Média (ignor. Trat. e Per.)} \} = \frac{G^2(\rho)}{a(1-\rho)(1-\rho^2)[p-(p-2)\rho]} = 698,7169$$

$$SQ \{ \text{Períodos e Média (ignor. Trat.)} \} = \frac{1}{a(1-\rho^2)} \sum_{j=1}^p P_j P_j(\rho) = 752,7778$$

donde

$$SQ \{ \text{Períodos (aj. para Média, ignor. Trat.)} \} = 54,0609$$

$$SQ \{ \text{Tratamentos aj.} \} = \frac{1}{\left[\frac{a(p-2)}{K} \rho^2 + \Lambda \rho + r \right] (1-\rho^2)} \sum_{k=1}^K Q_k^2(\rho) = 4,5732$$

$$SQ \{ \text{Total} \} = \frac{1}{1-\rho^2} \sum_{i=1}^a \{ (1-\rho^2) y_{i1}^2 + \sum_{j=2}^p (y_{ij} - \rho y_{i(j-1)})^2 \}$$

$$= \frac{1}{0,19} \{ 0,19 \cdot (811,6915) + 2,7905 + 4,9045 \} = 852,1915$$

por diferença obtemos a $SQ \{ \text{Resíduo} \}$ e o quadro da análise da variância será:

F. Variação	G.L.	SQ	QM	F	N.M.S.
Média	1	698,7169			
Períodos	2	54,0609			
Tratamentos aj.	2	4,5732	2,2866	0,3134	≈ 73 %
Resíduo	13	94,8405	7,2954		
Total	18	852,1915			

Portanto, o valor de F nos leva à não rejeição da hipótese de que $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, como era de se esperar. Em GODOI (1983) o autor utiliza os mesmos dados deste exemplo ilustrativo, e obtém para o modelo auto-regressivo no esquema de reversão um valor $F = 1,0369$ com 2 e 13 g.l. correspondendo a um N.M.S. ≈ 37%, enquanto que para o modelo "switchback" obtém $F = 0,8180$ com 2 e 3 g.l. correspondendo a um N.M.S. ≈ 52%.

Se considerarmos $t_1 = -0,5$ kg; $t_2 = 0,0$ kg e $t_3 = 0,5$ kg e adicionarmos estes valores às observações respectivas do quadro anterior, obtemos

Animais	Períodos		
	P ₁	P ₂	P ₃
1	9,14 (1)	9,88 (2)	8,46 (3)
2	13,95 (2)	13,63 (3)	9,99 (1)
3	8,76 (3)	7,19 (1)	7,50 (2)
4	8,25 (1)	8,98 (3)	8,37 (2)
5	9,38 (2)	8,05 (1)	7,93 (3)
6	17,57 (3)	14,61 (2)	13,80 (1)

e utilizando as mesmas fórmulas anteriores, obtemos o quadro da análise da variância que se segue:

F. Variação	G.L.	SQ	QM	F	N.M.S.
Média	1	698,7169			
Períodos	2	54,0609			
Tratamentos aj.	2	70,6612	35,3306	4,8429	≈ 2,7%
Resíduo	13	94,8405	7,2954		
Total	18	918,2795			

Portando, o valor de F nos leva à rejeição da hipótese que $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, como era de se esperar. Já em GODOI (1983), os resultados obtidos pelo autor foram: para o modelo auto-regressivo no esquema de reversão $F = 6,0473$ (N.M.S. ≈ 1,3%) e para o modelo "switchback" $F = 5,39$ (N.M.S. ≈ 10%). Assim, a adoção do esquema "change-over" para o modelo auto-regressivo se apresenta mais sensível que o modelo usual de Lucas, como será verificado na seqüência deste trabalho.

4.4. Comparação da sensibilidade dos modelos e adequação do modelo auto-regressivo

Nas Tabelas de 4 a 15 são apresentados os resultados das análises, baseados nos quais podemos discutir a adequação do modelo auto-regressivo às várias situações experimentais, bem como comparar a sensibilidade na detecção de efeitos de tratamentos pelos modelos:

- (a) "Switchback"
- (b) Rotativo no esquema em quadrados latinos
- (c) Auto-regressivo com $p = 3$ períodos
- (d) Auto-regressivo com $p = K$

Nas análises efetuadas através do modelo do delineamento rotativo (b), para cada valor de K considerado, não mais que 5% delas apresentaram interação (Tratamento $\times$ Quadrados Latinos) significativa, o que nos leva à não rejeição da hipótese de ausência desta interação e consequente adoção do resíduo médio como estimador do erro amostral para este modelo.

Na Tabela 4 são apresentadas as médias das distribuições dos níveis mínimos de significância (N.M.S.) para os vários ensaios na ausência de efeitos de tratamentos, bem como os respectivos valores da estatística D do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov, da distribuição dos N.M.S. à distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Nesta tabela observa-se uma boa adequação dos vários modelos às condições experimentais e pode-se verificar para o modelo auto-regressivo uma tendência em rejeitar indevidamente a hipótese de ausência de efeitos de tratamentos, à medida que o valor de ρ adotado supera o populacional 0,91. Por outro lado, para valores de ρ inferiores ao populacional, constata-se uma assimetria à direita na distribuição dos N.M.S.

Nas Tabelas 5, 6 e 7 são apresentadas as médias e desvios padrões das distribuições dos N.M.S. na presença de efeitos aditivos de tratamentos. Nestas tabelas pode-se verificar a superioridade dos modelos auto-regressivos (c) e (d) em relação aos usuais (a) e (b), no que se refere à sensibilidade na detecção de contrastes de tais efeitos. Para os modelos (c) e (d) percebe-se que tal sensibilidade aumenta em função do valor de p adotado, e que se tal valor supera o populacional existe uma tendência de se detectar mais diferenças significativas do que realmente existem, em função dos resultados apresentados na Tabela 4.

Comparando-se os resultados obtidos para os modelos auto-regressivos (c) e (d), percebe-se que a sensibilidade aumenta em função do número de períodos adotados, indicando assim que o caso em que $p = K$ deve ser preferível ao caso em que $p < K$.

Nas Tabelas 8, 9 e 10 são apresentadas as distribuições de frequências para as quatro classes iniciais, dos 100 N.M.S. para cada ensaio, considerando-se efeitos não todos nulos de tratamentos. Também destas tabelas podemos comprovar a superioridade dos modelos (c) e (d) na detecção de contrastes entre tais efeitos, uma vez que as frequências dos N.M.S. nas classes iniciais são maiores para estes modelos do que para os usuais (a) e (b). Percebe-se porém que o modelo rotativo (b) é mais sensível que o auto-regressivo com $p = 3$ períodos (c), quando $K = 4$, sendo que tal superioridade inexiste para $K = 5$. Esse resultado vem mais uma vez confirmar que o modelo auto-regressivo deve ser preferível com número máximo de períodos, isto é $p = K$. Entretanto, em se comparando com o modelo "switchback" (a), a sensibilidade é maior para o auto-regressivo mesmo com $p = 3$ períodos.

Na Tabela 11 são apresentadas as médias e variâncias dos 100 valores da estatística F, obtidas nas análises da variância para os vários ensaios com ausência de efeitos de tratamentos. Observa-se nesta tabela que os resultados obtidos são bastante próximos dos valores esperados das distribuições F correspondentes, os quais também são apresentados nesta tabela, indicando, portanto, uma boa adequação dos modelos. Observa-se ainda que, para os modelos auto-regressivos, o valor de F é proporcional ao valor do coeficiente ρ adotado, sendo que para ρ em torno de 0,91 é que se obtém uma melhor adequação. Estes resultados sugerem que, variando o valor de ρ , os valores de F passam de subestimativas para superestimativas do valor exato.

Nas Tabelas 12, 13 e 14 são apresentados os quocientes de médias de 100 análises do QM Trat. (aj.) pelo QM Res., para os vários ensaios com efeitos não todos nulos de tratamentos. Para os modelos auto-regressivos observa-se que os valores obtidos são muito próximos dos esperados segundo a expressão

$$\frac{E(QMT)}{E(QMR)} = 1 + \left[\frac{a(p-2)}{K} \rho^2 + \Lambda \rho + r \right] \frac{\sum_{k=1}^K t_k^2}{(K-1)(1-\rho^2) \sigma_e^2} \quad (66)$$

onde $\sigma_e^2 = 6,00$ é adotado e indicado por GODOI (1983) para os dados da Tabela 1, segundo o modelo auto-regressivo. Observa-se ainda nestas tabelas que os valores dos quocientes passam de superestimativas a subestimativas dos valores esperados, a medida que se aumenta o valor do coeficiente ρ , sendo que, em geral, para ρ em torno de 0,91 se obtém resultados mais concordantes.

Na Tabela 15 são apresentadas as médias e os desvios padrões dos 100 valores do Quadrado Médio Residual para os vários ensaios,

donde se pode inferir que os modelos auto-regressivos (c) e (d) com ρ em torno de 0,91 apresentam resultados concordantes com o valor populacional $\sigma_e^2 = 6,00$. Percebe-se ainda que a variância residual passa de subestimada para superestimada, conforme se aumenta o valor de ρ , o que leva a resultados concordantes com os apresentados nas tabelas anteriores.

Por outro lado, podemos notar que alguns resultados são concordantes com os que se podem inferir da expressão (65) relativa à variância de um contraste entre dois tratamentos. De fato, nesta expressão observamos que aumentando o valor de p e/ou o valor de ρ , diminui a variância, o que implica em uma maior sensibilidade para a detecção destes contrastes. Ademais se $\rho < 0$, o que em geral não ocorre em experimentos com vacas em lactação, a variância é maior do que se $\rho \geq 0$, resultando uma menor sensibilidade do modelo.

5. CONCLUSÕES

Em função dos resultados obtidos e apresentados no capítulo anterior, destacam-se as seguintes conclusões:

(a) O modelo auto-regressivo com $3 \leq p \leq K$ é adequado para experimentos com vacas em lactação, desde que o coeficiente de correlação linear entre períodos possa ser obtido de lactações anteriores de animais que poderão ser amostrados para o ensaio;

(b) Se tal coeficiente exceder o populacional, haverá uma tendência indevida, do modelo, de detectar mais diferenças de efeitos de tratamentos, enquanto que a sensibilidade diminui se utilizarmos um valor menor que o populacional;

(c) Em condições ideais, isto é, com o verdadeiro valor de ρ , os modelos auto-regressivos com $p=3$ e $p=K$ são mais sensíveis do que os modelos dos delineamentos "switchback" e rotativo, respectivamente;

(d) Deve-se dar preferência ao modelo auto-regressivo com $p=K$, pois a sensibilidade do modelo se mostrou proporcional ao número de períodos;

(e) Aumentando-se os valores de ρ , a variância residual passa de subestimada a superestimada e conseqüentemente os valores da estatística F passam de superestimativas a subestimativas da média da distribuição F correspondente;

(f) O modelo auto-regressivo se mostra sensível a pequenas variações no valor adotado do coeficiente de correlação linear entre períodos, o que exigirá que este seja conhecido ou bem estimado;

(g) Os resultados sugerem que se proceda a investigação do efeito da estimação do coeficiente ρ na sensibilidade do modelo auto-regressivo, bem como a continuidade nesta linha de pesquisa considerando a estimação do efeito residual de um tratamento sobre outro aplicado no período subsequente.

6. LITERATURA CITADA

- BRANDT, A.E., 1938. Tests of significance in reversal or switchback trial. *Research Bulletin 234*. Agr. Exp. Sta. Ames, Iowa.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. *Experimental designs*. 2ª Ed., Nova York, John Wiley & Sons. 611 p.
- COCHRAN, W.G.; K.M. AUTREY e C.Y. CANNON, 1941. A double change-over design for dairy cattle feeding experiments. *J. Dairy Sci.*, 24:937-951.
- GODOI, C.R.M., 1971. Modelo matemático dos ensaios em dupla reversão. Piracicaba, ESALQ/USP, 52 p. (Tese de Doutorado).
- GODOI, C.R.M., 1972. Análise da variância dos ensaios em "switchback" para animais quando há perda de parcela: correção da tendenciosidade da soma de quadrados de tratamentos. *Anais da VIII Reunião da SBZ*. p.143.
- GODOI, C.R.M., 1983. Modelo linear com auto-correlação nos resíduos para análise de produção leiteira em experimentos com dupla reversão. Piracicaba, ESALQ/USP, 110 p. (Tese de Livre Docência).
- GODOI, C.R.M. e I.R. NOGUEIRA, 1972. Modelo matemático dos ensaios em dupla reversão para experimentos com animais. *Anais da VIII Reunião da SBZ*. p. 145.

- HOFFMANN, R. e S. VIEIRA, 1977. *Análise de regressão*. Hucitec-Edusp, São Paulo. 339 p.
- KENNEDY, W. e J.E. GENTLE, 1980. *Statistical computing*. Nova York, Marcel Dekker. 589 p.
- LUCAS, H.L., 1956. Switchback trials for more than two treatments. *J. Dairy Sci.*, 39:1-7.
- LUCAS, H.L., 1960. Critical features of good dairy feeding experiments. *J. Dairy Sci.*, 43:193-212.
- MOOD, A.M.; F.A. GRAYBILL, D.C. BOES, 1974. *Introduction to the theory of statistics*. 3ª ed., Nova York, McGraw-Hill. 564 p.
- PATTERSON, H.D., 1950. The analysis of change-over trials. *J. Agric. Sci.*, 40:375-380.
- PATTERSON, H.D., 1952. The construction of balanced designs for experiments involving sequences of treatments. *Biometrika*, 39:32-48.
- PATTERSON, H.D. e H.L. LUCAS, 1962. Change-over designs. *Tech. Bul.* 147, North Carolina Agric. Exper. Station and U.S. Department of Agric.
- RAO, C.R., 1965. *Linear statistical inference and its applications*. Nova York, John Willey & Sons. 522 p.
- SCHEFFÉ, H., 1959. *The analysis of variance*. Nova York, John Willey & Sons. 477 p.
- SNEDECOR, G.W., 1946. *Statistical methods*. 4ª ed. Iowa State College Press, Ames. 593 p.
- TAYLOR, W.B. e P.J. ARMSTRONG, 1953. The efficiency of some experimental designs used in dairy husbandry experiments. *J. Agric. Sci.*, 43:407-412.
- THEIL, H., 1971. *Principles of econometrics*. Nova York, John Willey & Sons. 735 p.

WILLIAMS, E.J., 1949. Experimental designs balanced for the estimation of residual effects of treatments. *Austr. J. Sci. Res.*, 2(A):149.

7. TABELAS

TABELA 1 - Médias (em kg) de períodos de 15 dias da produção leiteira de vacas da raça holandesa.

VACAS	PERÍODOS						
	1	2	3	4	5	6	7
1	9,64	9,88	7,96	6,40	6,84	6,12	5,79
2	13,95	13,13	10,49	10,67	9,64	9,00	8,25
3	8,26	7,69	7,50	8,08	7,97	6,45	6,20
4	8,75	8,48	8,37	8,18	7,36	6,82	7,65
5	9,38	8,55	7,43	6,98	6,25	6,02	5,80
6	17,07	14,61	14,30	13,36	13,94	12,44	10,69
7	11,94	10,74	10,22	9,33	9,37	8,04	7,97
8	10,79	10,56	10,00	8,13	10,84	8,76	9,04
9	8,56	7,32	7,74	6,71	6,88	6,77	5,19
10	9,01	9,14	8,58	8,54	6,49	5,99	5,36
11	10,02	10,91	10,22	8,80	6,58	6,34	5,84
12	12,41	12,38	12,78	13,05	11,35	11,86	11,73
13	7,18	7,25	6,59	7,22	5,45	4,79	4,74
14	7,20	6,79	5,48	4,68	3,75	3,64	4,17
15	8,58	7,94	7,11	4,97	3,64	3,75	4,24
16	7,13	6,62	5,77	5,30	5,16	5,12	5,32
17	8,92	8,53	8,45	10,99	8,33	6,86	8,11
18	11,35	10,79	9,30	9,42	9,41	8,41	8,86
19	7,83	6,45	6,13	6,06	5,64	5,19	5,09
20	8,82	8,43	7,77	7,11	5,33	5,33	5,15
21	11,46	9,54	7,82	7,28	7,46	5,74	4,85
22	6,45	6,20	5,54	5,10	4,72	5,55	5,42
23	11,79	12,53	10,71	9,30	9,60	7,51	5,89
24	7,25	7,50	7,29	7,25	7,50	6,67	7,18

TABELA 1 - Continuação.

VACAS	PERÍODOS						
	1	2	3	4	5	6	7
25	7,26	7,34	7,20	7,46	8,49	7,73	6,86
26	10,27	8,95	7,90	7,13	7,41	7,17	6,60
27	10,38	9,50	7,90	7,25	7,66	6,88	7,55
28	10,41	9,49	9,14	8,62	9,96	9,26	8,33
29	8,21	7,48	8,36	7,90	8,16	7,17	6,29
30	12,22	11,34	10,71	9,79	9,22	9,76	9,23
31	12,62	11,24	9,94	10,69	9,53	8,75	7,63
32	12,20	10,89	10,75	9,99	9,56	8,24	8,46
33	9,78	9,75	8,42	8,25	7,84	8,20	8,23
34	9,86	9,68	8,66	7,34	6,70	6,48	5,62
35	11,88	9,28	10,17	9,39	8,72	9,68	6,25
36	13,87	10,86	9,78	9,59	9,30	9,76	9,28
37	10,10	10,08	9,06	8,04	7,66	7,54	5,47
38	7,68	7,49	7,79	8,42	6,26	5,97	5,99
39	6,70	7,12	5,59	5,56	6,79	5,59	4,82
40	9,19	7,61	6,38	6,89	6,69	6,26	5,90
41	14,39	14,68	13,57	14,06	12,43	13,22	12,33
42	12,93	11,20	10,68	9,80	9,39	8,52	7,60
43	14,03	14,78	12,15	10,71	8,94	8,34	7,72
44	17,79	14,89	14,51	13,45	13,13	13,06	12,53
45	5,97	7,01	4,44	5,73	4,98	3,88	3,59
46	7,91	5,38	4,54	5,05	4,54	4,72	5,21
47	8,76	8,81	8,11	6,99	7,59	6,88	6,32
48	8,74	9,26	8,89	7,40	6,53	5,49	5,86

TABELA 1 - Continuação.

VACAS	PERÍODOS						
	1	2	3	4	5	6	7
49	8,20	8,12	8,03	7,35	6,07	5,95	6,47
50	10,83	10,04	10,34	12,63	12,92	10,29	11,13
51	11,70	10,81	10,11	10,37	9,90	9,59	8,95
52	10,66	11,51	10,00	8,50	7,67	7,96	7,44
53	11,60	13,40	11,50	10,13	9,41	9,57	8,64
54	9,76	11,30	9,08	7,56	6,45	7,40	5,48
55	7,51	8,46	8,37	8,15	8,20	9,31	9,46
56	7,55	7,35	6,72	7,99	6,32	6,54	5,86
57	9,97	8,37	7,86	5,99	6,04	7,67	8,18
58	9,37	9,97	9,64	9,01	9,08	9,00	8,67
59	14,36	12,62	11,80	11,33	11,75	10,57	9,80
60	13,70	13,64	12,18	11,39	12,09	11,12	10,47
61	10,11	9,02	9,97	8,90	8,02	7,77	10,45
62	12,77	12,87	12,47	11,72	13,45	12,96	11,74
63	8,38	9,15	7,88	8,67	8,04	7,39	8,51
64	12,97	10,53	11,81	11,49	9,02	9,70	11,84
65	11,33	9,76	9,48	9,29	8,11	7,41	9,34
66	17,09	15,13	13,85	12,47	10,86	11,40	12,45
67	12,26	11,96	9,87	9,77	8,68	7,08	9,59
68	13,43	12,54	12,21	11,77	9,83	9,67	11,06
69	9,44	8,57	8,50	8,01	7,06	7,23	7,71
70	9,01	8,62	8,68	7,82	7,68	7,89	8,13
71	7,90	7,43	7,23	8,09	8,42	9,16	10,05
72	10,95	10,91	7,63	7,52	8,14	8,29	9,38

TABELA 1 - Continuação.

VACAS	PERÍODOS						
	1	2	3	4	5	6	7
73	8,85	9,07	8,74	7,64	7,52	8,57	8,51
74	8,08	8,36	8,52	7,64	8,22	9,54	7,50
75	10,18	8,58	8,10	8,70	9,35	9,35	8,28
76	10,33	8,97	7,88	7,64	9,34	9,45	8,34
77	19,26	18,17	15,22	15,03	15,70	14,30	14,42
78	16,17	15,53	12,95	12,02	12,44	11,88	13,04
79	14,84	14,45	10,59	11,30	10,58	9,33	9,46
80	10,20	9,04	8,47	8,48	8,65	8,08	7,37
81	11,86	9,31	10,11	9,61	12,17	11,31	11,01
82	7,54	8,13	7,70	9,30	9,77	11,20	10,40
83	9,68	9,32	7,89	9,14	10,31	10,15	10,76
84	9,74	9,40	9,74	8,66	10,40	13,63	12,97
85	10,18	9,25	10,19	11,39	9,38	9,57	9,54
86	11,96	10,56	8,98	10,99	11,76	12,89	12,21
87	7,40	9,31	7,75	9,45	10,80	11,10	10,06
88	13,50	11,58	11,50	11,76	11,66	10,55	10,11
89	10,25	11,01	10,74	9,67	10,95	10,55	9,84
90	10,41	10,90	10,54	11,47	10,16	9,96	10,50
91	9,29	8,90	9,56	9,62	9,08	9,50	10,48
92	9,86	9,35	9,96	10,15	7,39	7,78	8,38
93	8,94	9,68	9,34	8,18	7,53	7,05	6,17
94	9,45	9,69	10,82	11,12	9,67	8,10	8,58
95	11,45	13,58	13,02	12,69	12,76	15,62	12,99
96	15,76	13,97	12,96	14,31	14,62	15,12	14,04

TABELA 1 - Continuação.

VACAS	PERÍODOS						
	1	2	3	4	5	6	7
97	11,56	11,10	11,76	10,92	10,16	9,57	9,11
98	8,65	10,86	11,65	11,64	9,56	9,03	8,98
99	11,27	10,82	10,75	10,95	9,93	8,51	6,61
100	11,06	11,92	11,82	10,85	10,26	9,35	7,08
101	8,65	8,13	8,04	6,56	8,97	8,03	7,05
102	11,46	11,70	11,58	14,23	12,40	10,76	10,17
103	14,23	13,33	13,59	12,34	13,09	12,22	9,59
104	13,44	15,82	13,23	15,10	15,17	15,35	16,10
105	11,62	11,74	12,31	10,22	10,68	11,12	8,78
106	10,89	8,92	7,86	8,25	7,38	7,32	7,14
107	9,94	8,70	9,33	10,91	10,11	9,36	6,36
108	9,12	8,58	8,34	8,08	7,96	7,23	7,20
109	9,64	11,40	10,90	8,07	8,59	7,72	6,84
110	12,14	10,42	9,54	9,11	6,82	6,28	5,68
111	8,67	8,76	7,97	7,88	8,11	7,46	7,32
112	7,56	5,78	4,76	7,60	11,02	10,41	6,15
113	11,67	10,11	10,57	10,92	9,31	8,67	8,12
114	8,47	7,93	7,32	7,37	6,67	5,22	4,67
115	13,31	13,44	12,41	12,65	11,35	9,49	9,06
116	11,34	8,48	10,31	10,66	9,26	8,24	8,12
117	12,34	11,45	13,64	13,21	13,56	12,11	12,17
118	11,45	14,95	14,54	13,74	13,19	13,65	11,59
119	9,71	10,03	8,52	8,58	7,53	7,90	8,10
120	7,65	8,72	8,38	8,60	8,18	7,74	7,69

TABELA 1 - Continuação.

VACAS	PERÍODOS						
	1	2	3	4	5	6	7
121	9,90	9,22	9,15	9,06	9,26	8,74	9,76
122	10,90	10,74	10,97	10,23	9,26	7,59	7,06
123	12,85	10,05	7,47	7,88	8,66	7,69	6,58
124	9,24	11,77	8,70	7,41	7,78	7,83	6,25
125	7,54	8,85	8,28	8,40	7,90	6,76	6,32
126	10,29	10,07	9,20	9,34	9,11	8,43	7,80
127	14,40	12,33	14,34	13,39	12,06	10,96	10,53
128	19,71	17,98	16,48	15,75	15,85	12,59	11,60
129	9,72	9,94	8,84	8,21	7,66	7,73	5,17
130	8,91	8,49	7,96	7,54	7,53	7,10	6,39
131	12,07	12,17	10,94	9,09	8,15	7,93	6,16
132	12,40	14,45	15,09	16,82	11,44	10,84	9,45
133	5,58	6,03	5,99	5,68	5,09	5,02	5,32
134	8,68	9,06	8,32	8,27	7,50	6,91	6,05
135	14,99	14,41	14,11	11,97	10,76	9,59	7,79
136	8,81	8,08	8,10	7,71	7,51	7,39	6,62
137	6,73	7,51	7,19	6,43	5,57	5,89	5,81
138	8,96	8,61	7,93	7,86	6,84	6,82	5,73
139	10,78	9,10	8,52	6,74	6,22	5,38	3,58
140	7,62	6,81	7,45	8,01	7,52	4,88	5,83
141	7,90	8,59	8,89	8,34	8,53	7,58	6,46
142	9,23	8,51	8,36	5,95	6,63	6,25	4,80
143	12,45	12,52	10,90	10,23	8,19	7,49	8,53
144	15,30	14,96	12,84	12,33	14,14	14,19	11,34

TABELA 2 - Correlações entre períodos estimados a partir de 144 lactações.

PERÍODOS	PERÍODOS						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,000	0,897	0,846	0,773	0,750	0,676	0,642
2	-	1,000	0,913	0,827	0,776	0,721	0,669
3	-	-	1,000	0,909	0,818	0,762	0,712
4	-	-	-	1,000	0,884	0,816	0,787
5	-	-	-	-	1,000	0,930	0,845
6	-	-	-	-	-	1,000	0,900
7	-	-	-	-	-	-	1,000

TABELA 3 - Correlações entre períodos a partir do modelo autoregressivo ($\rho = 0,91$).

PERÍODOS	PERÍODOS						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,000	0,910	0,828	0,754	0,687	0,625	0,568
2	-	1,000	0,910	0,828	0,754	0,687	0,625
3	-	-	1,000	0,910	0,828	0,754	0,687
4	-	-	-	1,000	0,910	0,828	0,754
5	-	-	-	-	1,000	0,910	0,828
6	-	-	-	-	-	1,000	0,910
7	-	-	-	-	-	-	1,000

TABELA 4 - Médias de 100 análises, dos níveis mínimos de significância (N.M.S.) e teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov, para os vários ensaios com $t_k = 0$; $k = 1, 2, \dots, K$.

MODELOS	K = 3			K = 4			K = 5		
	N.M.S.	$D \frac{1}{\sqrt{}}$		N.M.S.	D		N.M.S.	D	
(a)	0,4899	0,0786		0,5271	0,0649		0,4743	0,0756	
(b)	0,5050	0,1012		0,5192	0,0681		0,4891	0,0973	
(c)	0,5357	0,0927	$\rho = 0,88$	0,5557	0,1111		0,5101	0,0581	
	0,5097	0,0767	$\rho = 0,90$	0,5230	0,0667		0,4754	0,0968	
	0,5006	0,0621	$\rho = 0,91$	0,5099	0,0461		0,4572	0,1162	
	0,4897	0,0597	$\rho = 0,92$	0,4944	0,0483		0,4390	0,1465	
	0,4609	0,0820	$\rho = 0,94$	0,4641	0,0818		0,4006	0,2156	
(d)	0,5682		$\rho = 0,88$	0,5682	0,1599		0,5154	0,0653	
	0,5444		$\rho = 0,90$	0,5444	0,1298		0,4929	0,0476	
	0,5321		$\rho = 0,91$	0,5321	0,1096		0,4816	0,0604	
	0,5194		$\rho = 0,92$	0,5194	0,0898		0,4703	0,0780	
	0,4935		$\rho = 0,94$	0,4935	0,0736		0,4483	0,1179	

$\frac{1}{\sqrt{}}$ D max = 0,134

- (a): Modelo "Switchback"
- (b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)
- (c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$
- (d): Modelo Auto-Regressivo com $p = K$.

TABELA 5 - Média e desvio padrão de 100 análises, dos níveis mínimos de significância, para o ensaio com K = 3 tratamentos com efeitos não todos nulos.

MODELOS	(1)		(2)		(3)		(4)	
	$\bar{X}$	s	$\bar{X}$	s	$\bar{X}$	s	$\bar{X}$	s
(a)	0,4437	0,2910	0,2972	0,2545	0,1754	0,1878	0,1042	0,1305
(b)	0,3801	0,2671	0,2186	0,2243	0,1071	0,1657	0,0555	0,1257
(c)	$\rho = 0,88$	0,4195	0,2862	0,2192	0,0823	0,1145	0,0301	0,0809
	$\rho = 0,90$	0,3969	0,2875	0,2011	0,0714	0,1082	0,0261	0,0781
	$\rho = 0,91$	0,3853	0,2879	0,1921	0,0675	0,1050	0,0243	0,0768
	$\rho = 0,92$	0,3773	0,2880	0,1831	0,0590	0,0948	0,0227	0,0755
	$\rho = 0,94$	0,3513	0,2857	0,1651	0,0545	0,0962	0,0199	0,0730

- (a): Modelo "Switchback"
- (b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)
- (c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$
- (1) $t_1 = 0,2; t_2 = -0,2; t_3 = 0,0$
- (2) $t_1 = 0,4; t_2 = -0,4; t_3 = 0,0$
- (3) $t_1 = 0,6; t_2 = -0,6; t_3 = 0,0$
- (4) $t_1 = 0,8; t_2 = -0,8; t_3 = 0,0$

TABELA 6 - Média e desvio padrão de 100 análises, dos níveis mínimos de significância, para o ensaio com K = 4 tratamentos com efeitos não todos nulos.

MODELOS	(1)		(2)		(3)		(3)	
	$\bar{X}$	s	$\bar{X}$	s	$\bar{X}$	s	$\bar{X}$	s
(a)	0,4047	0,2592	0,1539	0,1661	0,0412	0,0578	0,0102	0,0164
(b)	0,2671	0,2702	0,0479	0,0795	(*)		(*)	
(c)	$\left[\begin{array}{l} \rho = 0,88 \\ \rho = 0,90 \\ \rho = 0,91 \\ \rho = 0,92 \\ \rho = 0,94 \end{array} \right.$	0,3809	0,2816	0,1031	0,1521	0,0159	0,0017	0,0074
		0,3551	0,2785	0,0892	0,1436	0,0130	0,0013	0,0059
		0,3417	0,2766	0,0826	0,1394	0,0118	0,0011	0,0053
		0,3284	0,2741	0,0763	0,1353	0,0106	0,0010	0,0047
		0,3009	0,2680	0,0644	0,1262	0,0087	0,0008	0,0039
(d)	$\left[\begin{array}{l} \rho = 0,88 \\ \rho = 0,90 \\ \rho = 0,91 \\ \rho = 0,92 \\ \rho = 0,94 \end{array} \right.$	0,2620	0,2670	0,0304	0,0608	(*)	(*)	
		0,2430	0,2638	0,0254	0,0531	(*)	(*)	
		0,2330	0,2605	0,0231	0,0495	(*)	(*)	
		0,2237	0,2582	0,0211	0,0460	(*)	(*)	
		0,2060	0,2533	0,0174	0,0396	(*)	(*)	

(*): Menor que 0,0001

(a): Modelo "Switchback"

(b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)

(c): Modelo Auto-Regressivo com p = 3

(d): Modelo Auto-Regressivo com p = K

$$(1) t_1 = t_3 = 0,2; t_2 = t_4 = -0,2$$

$$(2) t_1 = t_3 = 0,4; t_2 = t_4 = -0,4$$

$$(3) t_1 = t_3 = 0,6; t_2 = t_4 = -0,6$$

$$(4) t_1 = t_3 = 0,8; t_2 = t_4 = -0,8$$

TABELA 7 - Média e desvio padrão de 100 análises, dos níveis mínimos de significância, para o ensaio com K = 5 tratamentos com efeitos não todos nulos.

MODELOS	(1)			(2)			(3)			(4)		
	$\bar{X}$	s		$\bar{X}$	s		$\bar{X}$	s		$\bar{X}$	s	
(a)	0,3088	0,2760		0,0801	0,1275		0,0131	0,0337		0,0018	0,0060	
(b)	0,2601	0,2408		0,0435	0,1347		(*)			(*)		
(c)	0,3149	0,2846	$\rho = 0,88$	0,0599	0,1040		0,0036	0,0142		(*)		
	0,2855	0,2793	$\rho = 0,90$	0,0483	0,0922		0,0025	0,0109		(*)		
	0,2710	0,2759	$\rho = 0,91$	0,0432	0,0865		0,0021	0,0095		(*)		
	0,2565	0,2720	$\rho = 0,92$	0,0386	0,0809		0,0017	0,0081		(*)		
	0,2280	0,2626	$\rho = 0,94$	0,0301	0,0703		0,0011	0,0058		(*)		
(d)	0,1981	0,2217	$\rho = 0,88$	0,0105	0,0372		(*)			(*)		
	0,1813	0,2140	$\rho = 0,90$	0,0101	0,0351		(*)			(*)		
	0,1732	0,2101	$\rho = 0,91$	0,0082	0,0319		(*)			(*)		
	0,1655	0,2061	$\rho = 0,92$	0,0076	0,0303		(*)			(*)		
	0,1499	0,1964	$\rho = 0,94$	0,0064	0,0274		(*)			(*)		

(*) : Menor que 0,0001

(a): Modelo "Switchback"

(b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)

(c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$

(d): Modelo Auto-Regressivo com $p = K$

$$(1) \quad t_1 = t_3 = 0,2; \quad t_2 = t_4 = -0,2; \quad t_5 = 0,0$$

$$(2) \quad t_1 = t_3 = 0,4; \quad t_2 = t_4 = -0,4; \quad t_5 = 0,0$$

$$(3) \quad t_1 = t_3 = 0,6; \quad t_2 = t_4 = -0,6; \quad t_5 = 0,0$$

$$(4) \quad t_1 = t_3 = 0,8; \quad t_2 = t_4 = -0,8; \quad t_5 = 0,0$$

TABELA 8 - Distribuições de freqüências para as 4 classes iniciais, dos níveis mínimos de significância, para o ensaio com K=3 tratamentos com efeitos não todos nulos.

CLASSES		(a)	(b)	(c)				
				$\rho = 0,88$	$\rho = 0,90$	$\rho = 0,91$	$\rho = 0,92$	$\rho = 0,94$
(1)	[0,00; 0,05)	6	10	6	7	10	13	14
	[0,05; 0,10)	6	8	9	12	10	9	8
	[0,10; 0,15)	8	7	7	5	6	5	6
	[0,15; 0,20)	5	5	5	7	9	11	16
(2)	[0,00; 0,05)	16	28	29	33	36	39	41
	[0,05; 0,10)	10	12	15	13	10	9	12
	[0,10; 0,15)	13	12	7	9	11	10	12
	[0,15; 0,20)	8	8	9	6	10	9	7
(3)	[0,00; 0,05)	28	53	58	62	67	70	79
	[0,05; 0,10)	19	15	17	18	15	13	3
	[0,10; 0,15)	9	12	6	4	2	3	5
	[0,15; 0,20)	9	6	3	5	7	7	5
(4)	[0,00; 0,05)	46	80	87	90	91	92	92
	[0,05; 0,10)	17	7	7	5	4	3	3
	[0,10; 0,15)	17	6	2	1	1	2	2
	[0,15; 0,20)	6	2	1	2	2	1	1

(a): Modelo "Switchback"

(b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)

(c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$

(1) $t_1 = 0,2$; $t_2 = -0,2$; $t_3 = 0,0$

(2) $t_1 = 0,4$; $t_2 = -0,4$; $t_3 = 0,0$

(3) $t_1 = 0,6$; $t_2 = -0,6$; $t_3 = 0,0$

(4) $t_1 = 0,8$; $t_2 = -0,8$; $t_3 = 0,0$

TABELA 9 - Distribuições de frequências para as 4 classes iniciais, dos níveis mínimos de significância para o ensaio com $K = 4$ tratamentos com efeitos não todos nulos.

CLASSES	(a)	(b)	(c)												(d)			
			$\rho=0,88 \quad \rho=0,90 \quad \rho=0,91 \quad \rho=0,92 \quad \rho=0,94$												$\rho=0,88 \quad \rho=0,90 \quad \rho=0,91 \quad \rho=0,92 \quad \rho=0,94$			
(1)	[0,00; 0,05)	7	29	12	13	15	16	18	25	28	31	32	40					
	[0,05; 0,10)	9	11	7	9	10	11	13	15	16	17	16	10					
	[0,10; 0,15)	6	9	6	6	8	8	9	10	9	8	9	10					
	[0,15; 0,20)	3	6	8	10	8	8	10	7	6	5	5	6					
(2)	[0,00; 0,05)	26	73	55	60	63	66	69	84	84	86	87	90					
	[0,05; 0,10)	24	7	15	13	11	11	15	6	7	5	5	3					
	[0,10; 0,15)	19	7	5	10	11	10	4	3	3	4	3	4					
	[0,15; 0,20)	5	6	10	3	4	2	3	2	4	3	4	2					
(3)	[0,00; 0,05)	74	99	94	96	96	96	96	100	100	100	100	100					
	[0,05; 0,10)	13	1	3	1	1	1	1	-	-	-	-	-					
	[0,10; 0,15)	7	-	0	0	0	0	1	-	-	-	-	-					
	[0,15; 0,20)	3	-	0	0	0	2	1	-	-	-	-	-					
(4)	[0,00; 0,05)	97	100	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100					
	[0,05; 0,10)	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-					
	[0,10; 0,15)	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-					
	[0,15; 0,20)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-					

(a): Modelo "Switchback"

(b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)

(c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$

(d): Modelo Auto-Regressivo com $p = K$

(1) $t_1 = t_3 = 0,2; t_2 = t_4 = -0,2$

(2) $t_1 = t_3 = 0,4; t_2 = t_4 = -0,4$

(3) $t_1 = t_3 = 0,6; t_2 = t_4 = -0,6$

(4) $t_1 = t_3 = 0,8; t_2 = t_4 = -0,8$

TABELA 10 - Distribuições de frequências para as 4 classes iniciais, dos níveis mínimos de significância para o ensaio com $K = 5$ tratamentos com efeitos não todos nulos.

CLASSES	(a)	(b)	(c)					(d)					
			$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	$\rho=0,94$	$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	$\rho=0,94$	
(1)	[0,00; 0,05)	23	25	20	24	27	31	38	34	38	42	43	48
	[0,05; 0,10)	10	11	11	13	12	11	7	16	17	16	16	11
	[0,10; 0,15)	6	8	9	6	5	5	10	10	7	5	5	8
	[0,15; 0,20)	5	5	4	6	10	9	8	3	5	6	6	5
(2)	[0,00; 0,05)	59	86	68	73	77	79	83	95	96	97	97	97
	[0,05; 0,10)	16	7	12	10	8	10	8	2	0	0	0	0
	[0,10; 0,15)	11	2	6	6	6	4	4	0	1	0	0	0
	[0,15; 0,20)	4	0	4	5	4	3	2	0	3	3	3	3
(3)	[0,00; 0,05)	91	98	99	99	99	99	99	100	100	100	100	100
	[0,05; 0,10)	6	1	0	0	1	1	1	-	-	-	-	-
	[0,10; 0,15)	2	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
	[0,15; 0,20)	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
(4)	[0,00; 0,05)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	[0,05; 0,10)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	[0,10; 0,15)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	[0,15; 0,20)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(a): Modelo "Switchback"

(b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)

(c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$

(d): Modelo Auto-Regressivo com $p = K$

$$(1) \quad t_1 = t_3 = 0,2; \quad t_2 = t_4 = -0,2; \quad t_5 = 0,0$$

$$(2) \quad t_1 = t_3 = 0,4; \quad t_2 = t_4 = -0,4; \quad t_5 = 0,0$$

$$(3) \quad t_1 = t_3 = 0,6; \quad t_2 = t_4 = -0,6; \quad t_5 = 0,0$$

$$(4) \quad t_1 = t_4 = 0,8; \quad t_2 = t_4 = -0,8; \quad t_5 = 0,0$$

TABELA 11 - Média e variância de 100 análises, dos valores da estatística $F = \frac{\text{Q.M. Trat.}}{\text{Q.M. Res.}}$, para os vários ensaios com $t_k = 0$; $k = 1, 2, \dots, K$.

MODELOS	K = 3			K = 4			K = 5		
	$\bar{X}$	s^2		$\bar{X}$	s^2		$\bar{X}$	s^2	
(a)	1,7428 (3,0000) ^{1/}	8,4036 (-)		1,1148 (1,3333)	1,1931 (2,6667)		1,2823 (1,1538)	1,2921 (1,0288)	
(b)	1,3493 (1,5000)	3,3849 (6,7500)		0,9806 (1,0909)	0,6328 (0,9917)		0,9933 (1,0349)	0,3521 (0,5924)	
(c)	{	$\rho = 0,88$ $\rho = 0,90$ $\rho = 0,91$ $\rho = 0,92$ $\rho = 0,94$	0,9994	0,8885	0,5501	0,9832	0,4412		
			1,0852	0,9655	0,6442	1,0703	0,5582		
			1,1337	1,0085	0,6919	1,1273	0,6117		
			1,1880	1,0549	0,7451	1,1830	0,6673		
			1,3380	1,1602	0,8355	1,3091	0,7863		
			(1,1818)	(1,0714)	(0,9125)	(1,0392)	(0,6061)		
(d)	{	$\rho = 0,88$ $\rho = 0,90$ $\rho = 0,91$ $\rho = 0,92$ $\rho = 0,94$	0,8047	0,8047	0,4078	0,9540	0,4216		
			0,8634	0,8634	0,4729	1,0129	0,4972		
			0,8952	0,8952	0,5059	1,0537	0,5209		
			0,9287	0,9287	0,5418	1,0754	0,5594		
			1,0018	1,0018	0,6235	1,1416	0,6213		
			(1,0513)	(0,8192)		(1,0225)	(0,5588)		

^{1/} Os valores entre parenteses correspondem aos valores exatos das médias e variâncias das distribuições F correspondentes

(a): Modelo "Switchback"

(b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)

(c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$

(d): Modelo Auto-Regressivo com $p = K$

TABELA 12 - Quociente de médias de 100 análises do Q.M. Trat. (aj.) pelo Q.M. Res., para o ensaio com $K = 3$ tratamentos com efeitos não todos nulos.

		(c)				
		$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	$\rho=0,94$
(1)		1,3300	1,4611	1,5342	1,6131	1,7907
		(1,3271) ^{1/}	(1,3937)	(1,4381)	(1,4936)	(1,6602)
(2)		2,5410	2,7891	2,9272	3,0760	3,4109
		(2,3084)	(2,5747)	(2,7524)	(2,9444)	(3,6408)
(3)		4,5597	5,0008	5,2460	5,5102	6,1041
		(3,9438)	(4,9438)	(4,9428)	(5,4425)	(6,9419)
(4)		7,3861	8,0961	8,4907	8,9156	9,8703
		(6,2335)	(7,2989)	(8,0095)	(8,8978)	(11,5632)

^{1/} Valores esperados segundo a expressão (66)

(c) Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$

(1) $t_1 = 0,2$; $t_2 = -0,2$; $t_3 = 0$

(2) $t_1 = 0,4$; $t_2 = -0,4$; $t_3 = 0$

(3) $t_1 = 0,6$; $t_2 = -0,6$; $t_3 = 0$

(4) $t_1 = 0,8$; $t_2 = -0,8$; $t_3 = 0$

TABELA 13 - Quociente de médias de 100 análises do Q.M. Trat. (aj.) pelo Q.M. Res., para o ensaio com K = 4 tratamentos com efeitos não todos nulos.

		(c)					(d)				
		$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	$\rho=0,94$	$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	$\rho=0,94$
(1)		1,4153	1,5410	1,6104	1,6848	1,8502	1,9607	2,1836	2,1836	2,2644	2,4367
	^{1/}	(1,5848)	(1,7032)	(1,7821)	(1,8807)	(2,1768)	(1,8639)	(2,0414)	(2,1598)	(2,3078)	(2,7519)
(2)		3,3151	3,6034	3,7622	3,9319	4,3085	5,2384	5,6243	5,8298	6,0439	6,4997
		(3,3394)	(3,8126)	(4,1283)	(4,5230)	(5,7074)	(4,4557)	(5,1656)	(5,6391)	(6,2311)	(8,0017)
(3)		6,6520	7,1176	7,4286	7,7608	8,4973	10,6069	11,3842	11,7976	12,2284	13,4449
		(6,2636)	(7,3284)	(8,0386)	(8,9267)	(11,5916)	(8,7753)	(10,3723)	(11,4380)	(12,7700)	(16,7674)
(4)		11,1261	12,0834	12,6096	13,1714	14,4166	18,0662	19,3857	20,0871	20,8179	22,3724
		(10,3574)	(12,2505)	(13,5132)	(15,0919)	(19,8295)	(14,8288)	(17,6625)	(19,5564)	(21,9244)	(29,0310)
^{1/} Valores esperados segundo a expressão (66)		(1) $t_1 = 0,2; t_2 = -0,2; t_3 = 0,2; t_4 = -0,2$									
(c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$		(2) $t_1 = 0,4; t_2 = -0,4; t_3 = 0,4; t_4 = -0,4$									
(d): Modelo Auto-Regressivo com $p = K$		(3) $t_1 = 0,6; t_2 = -0,6; t_3 = 0,6; t_4 = -0,6$									
		(4) $t_1 = 0,8; t_2 = -0,8; t_3 = 0,8; t_4 = -0,8$									

TABELA 14 - Quociente de médias de 100 análises do Q.M. Trat. (aj.) pelo Q.M. Res., para o ensaio com K = 5 tratamentos com efeitos não todos nulos.

(c)						(d)				
	$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	$\rho=0,94$	$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	$\rho=0,94$
(1)	1,6158	1,7672	1,8509	1,9407	2,1409	2,1247	2,2565	2,3249	2,3948	2,5393
	$\frac{1}{(1,5502)}$					(1,7991)	(2,2954)	(2,4434)	(2,6283)	(3,1835)
(2)	3,6085	3,9367	4,1178	4,3118	4,7437	5,9774	6,3447	6,5350	6,7294	7,1303
	(3,2007)					(4,1962)	(6,1818)	(6,7735)	(7,5133)	(9,7338)
(3)	6,9271	7,5472	7,8891	8,2551	9,0694	12,5058	13,2715	13,6677	14,0726	14,9069
	(5,9515)					(8,1915)	(12,6589)	(13,9903)	(15,6550)	(20,6511)
(4)	11,5717	12,5987	13,1648	13,7706	15,1182	21,7100	23,0368	23,7232	24,4244	25,8691
	(9,8026)					(13,7849)	(21,7270)	(24,0939)	(27,0533)	(35,9353)

$\frac{1}{1/}$ Valores esperados segundo a expressão (66) (1) $t_1 = 0,2$; $t_2 = -0,2$; $t_3 = 0,2$; $t_4 = -0,2$; $t_5 = 0,0$
(c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$ (2) $t_1 = 0,4$; $t_2 = -0,4$; $t_3 = 0,4$; $t_4 = -0,4$; $t_5 = 0,0$
(d): Modelo Auto-Regressivo com $p = K$ (3) $t_1 = 0,6$; $t_2 = -0,6$; $t_3 = 0,6$; $t_4 = -0,6$; $t_5 = 0,0$
(4) $t_1 = 0,8$; $t_2 = -0,8$; $t_3 = 0,8$; $t_4 = -0,8$; $t_5 = 0,0$

TABELA 15 - Média e desvio padrão de 100 análises, dos quadrados médios residuais para os vários ensaios.

	(a)	(b)	(c)				(d)					
			$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	$\rho=0,94$	$\rho=0,88$	$\rho=0,90$	$\rho=0,91$	$\rho=0,92$	
K=3												
Média	0,4792	0,5848	4,8879	5,3462	5,6719	6,0990	7,3834					
Desvio Padrão	0,4745	0,3597	2,1439	2,3812	2,5550	2,7821	3,5095					
K=4												
Média	0,5471	0,7325	5,2486	5,8124	6,1961	6,6816	8,1608	4,9584	5,5750	5,9945	6,9552	8,1115
Desvio Padrão	0,3793	0,3520	1,5387	1,7247	1,8570	2,0291	2,5722	1,4551	1,6772	1,8318	2,7413	2,6372
K=5												
Média	0,4149	0,8595	4,9891	5,5049	5,8629	6,3259	7,6934	4,8149	5,4765	5,9262	6,4947	8,2053
Desvio Padrão	0,1864	0,2520	1,2278	1,3699	1,4734	1,5968	2,0269	1,0100	1,1746	1,2884	1,4336	1,8868

(a): Modelo "Switchback"

(b): Modelo Rotativo (esquema em Q.L.)

(c): Modelo Auto-Regressivo com $p = 3$

(d): Modelo Auto-Regressivo com $p = K$