ESTUDO DA LEI DE AUTO-DESBASTE ATRAVÉS DE AJUSTE DE
MODELOS LINEARES E NÃO LINEARES, EM POVOAMENTOS DE
Eucalyptus grandis, NO ESTADO DE SÃO PAULO

MARÍA DEL PILAR DÍAZ
Lic. em Matemática

ORIENTADOR: DR. Hilton Thadeu Z. do Couto

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
ESTADO DE SÃO PAULO - BRASIL
DEZEMBRO - 1992

Divisão de Biblioteca e Documentação - PCLB/USP

D542e Diaz, Maria Del Pilar
Estudo da lei de auto-desbaste através de ajuste
de modelos lineares e não lineares, em povoamentos
de *Eucalyptus grandis*, no Estado de São Paulo. Pi-
racicaba, 1992.
93p.

Diss. (Mestre) ESALQ
Bibliografia.

1. Estatística 2. Eucalipto - Desbas-
te 3. Modelo matemático 4. Eucalipto - População -
Modelo matemático 5. Escola
Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba

CDD 634.9734

**ESTUDO DA LEI DE AUTO-DESBASTE ATRAVÉS DE AJUSTE DE
MODELOS LINEARES E NÃO LINEARES EM POVOAMENTOS DE
Eucalyptus grandis, NO ESTADO DE SÃO PAULO**

MARIA DEL PILAR DIAZ

APROVADA EM: 11. 12. 1992

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Hilton Thadeu Zarate do Couto	ESALQ/USP
Prof. Dr. Maria Cristina Stolf Nogueira	ESALQ/USP
Prof. Dr. Sergio do Nascimento Kronka	FCAV/UNESP

Prof. Dr. Hilton Thadeu Zarate do Couto
Orientador

Dedico

Aos meus pais pelo que deles obtive,
a vida, os ensinamentos, o amor, e
a oportunidade de estudo.

As minhas irmãs pelas demonstrações constantes de
carinho, apoio e tolerância da minha ausência
em suas vidas.

A assistência, orientação e amizade de muitas pessoas e instituições, permitiram-me chegar a este ponto. A todos eles, a minha gratidão.

A ARGENTINA e BRASIL,... por um degrau mais da minha vida profissional.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vi
RESUMO	vii
SUMMARY	ix
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
2.1. A Lei de Auto-desbaste	4
2.1.1. Considerações gerais	4
2.1.2. Considerações teóricas: Fundamentação geométrica	11
2.2. Tipos de modelos a serem estimados.....	14
2.2.1. Considerações gerais da modelagem	15
2.2.2. Métodos iterativos de estimação de parâmetros	17
2.2.3. Outra estimação dos parâmetros lineares.	19
2.3. Importância silvicultural	20
3. MATERIAL E MÉTODOS	24
3.1. Material	24
3.2. Métodos	25
3.2.1. Introdução	25
3.2.2. Métodos dos quadrados mínimos (Q.M.) pa- ra o modelo linear	27
3.2.3. Método de máxima verossimilhança (M.V.) para o modelo linear	31
3.2.4. Estrutura geral dos métodos para o mode- lo não linear	37
3.2.5. Método de Newton	39
3.2.5.1. Aplicação do Método de Newton ao modelo (B)	41

3.2.6. Método de Gauss	43
3.2.6.1. Aplicação do Método de Gauss ao modelo (5)	44
3.2.7. Método de Marquardt	44
3.2.7.1. Aplicação do Método de Marquardt ao modelo (5)	46
3.2.8. Método da Secante ou Falsa Posição (DUD).	47
3.2.9. Implementação dos métodos não lineares..	49
3.2.10. Comparação das metodologias usadas	51
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	53
4.1. Ajuste do modelo linearizado	53
4.2. Ajuste do modelo não linear	62
4.3. Comparação dos métodos	65
4.4. Comparação dos modelos	69
4.5. Implicações silviculturais	71
5. CONCLUSÕES	76
6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	78
7. BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA	83
8. APÊNDICES	84

LISTA DE FIGURAS

	Página
FIGURA 1: Interpretação do processo de Auto-desbaste: mudanças sofridas pelo volume médio da árvore em função do tempo.....	6
FIGURA 2: Esquema geométrico do território ocupado pela árvore.....	11
FIGURA 3: Dispersão dos volumes cilíndricos observados versus as densidades por hectare.....	54
FIGURA 4a: Dispersão dos volumes cilíndricos observados versus as densidades por hectare para o Horto 4 (Região 1).....	55
FIGURA 4b: Dispersão dos volumes cilíndricos observados versus as densidades por hectare para o Horto 7 (Região 2).....	54
FIGURA 4c: Dispersão dos volumes cilíndricos observados versus as densidades por hectare para o Horto 18 (Região 3).....	56
FIGURA 5: Comportamento do modelo linearizado estimado pelos métodos de Q.M. e M.V.....	60
FIGURA 6: Dispersão dos valores ajustados versus os resíduos para o modelo linearizado.....	60
FIGURA 7: Comportamento do modelo não linear estimado pelos métodos de Marquardt e DUD.....	68
FIGURA 8: Comportamento dos modelos linear e não linear.....	68

LISTA DE TABELAS

	Página
TABELA 1: Valores estimados, desvios padrão, e intervalos de confiança para os parâmetros do modelo linearizado através do SAS e do GLIM Decisão da hipótese $H_0: \beta_i = 0$	58
TABELA 2: Estatísticas de resumo para a descrição da distribuição de frequência dos resíduos obtidos através do SAS e do GLIM. Decisão da hipótese: Existência da Distribuição Normal.	61
TABELA 3: Análise da variância para os valores ajustados e os resíduos.....	62
TABELA 4: Características dos métodos não lineares...	63
TABELA 5: Equações estimadas, valores do teste F para a regressão e estimativas dos coeficientes de determinação para cada método.....	64
TABELA 6a: Análise da variância para os valores ajustados obtidos da estimação não linear.....	66
TABELA 6b: Análise da variância para os resíduos obtidos da estimação não linear.....	66
TABELA 7: Amplitudes relativas, em porcentagens, dos intervalos de confiança dos parâmetros para cada método.....	67
TABELA 8a: Análise da variância para os valores ajustados obtidos pelos dois tipos de modelos..	70
TABELA 8b: Análise da variância para os resíduos obtidos pelos dois tipos de modelos.....	70
TABELA 9: Valores estimados dos volumes cilíndricos segundo o modelo linearizado.....	74
TABELA 10: Espaçamentos sugeridos pelos modelos linear e não linear em função da produção desejada	75

Estudo da Lei de Auto-desbaste Através de Ajuste de Modelos Lineares e Não Lineares, em Povoamentos de *Eucalyptus grandis*, no Estado de São Paulo

Autor: Maria del Pilar Díaz

Orientador: Dr. Hilton Thadeu Z. do Couto

RESUMO

A Lei de Auto-desbaste (YODA et alii, 1963) descreve as mudanças recíprocas no tamanho médio ou massa da árvore e a densidade populacional durante o desenvolvimento de um talhão monoespecífico, equiâneo com fechamento de copa completo. Esta expressão da relação rendimento-densidade mediante um modelo não linear, tem sido considerada um dos princípios mais gerais de Biologia de Populações de Plantas e, recebido inumeráveis críticas em relação a seu desempenho.

Este trabalho teve como objetivo propor um método mais adequado para ajustar o modelo de auto-desbaste, considerado como não linear e linearizado via transformação, avaliando dados de inventários florestais obtidos em florestas monoespecíficas e equiâneas de *Eucalyptus grandis* para três qualidades de sítio. Para isso, foram desenvolvidos alguns programas nos pacotes estatísticos SAS e GLIM.

Não precisando da incorporação das variáveis idade e qualidade de sítio, o métodos utilizados para a estimação dos parâmetros nos dois tipos de modelos abordados mostraram a mesma eficiência. Foram recomendadas algumas dessas metodologias em função do potencial prático quanto a robustez e simplicidade de implementação.

Os resultados obtidos indicaram que aumentando o espaçamento entre plantas, aumenta-se o volume cilíndrico, e conseqüentemente a idade de estagnação ou auto-desbaste.

Visando os estudos dos modelos de crescimento para *E. grandis*, sugere-se a implementação de experimentos com diferentes qualidades de sítio e avaliadas em várias idades para alguns espaçamentos de interesse em termos de produção.

Self-thinning Law Adjusted Through Linear and Non-linear
Regression for *Eucalyptus grandis* Plantations in the State
of São Paulo, Brazil

Author: Maria del Pilar Diaz

Adviser: Hilton Thadeu Zarate do Couto

SUMMARY

The self-thinning law (YODA *et alii*, 1963) describes reciprocal changes in the average size or weight of trees and stand density along the life of a pure and even-aged stand with crown closure. This expression that relates yield and density through a non-linear model is considered one of the main law of the Biology of Plant Population and along its existence has received several criticisms because of its performance.

This paper proposes a method to adjust the self-thinning model using non-linear and linearized model, for pure and even-aged stands of *Eucalyptus grandis* in three sites with different qualities. It was used for parameter estimates two statistical packages, SAS and GLIM.

It was tested the influence of age and site quality in the models, but they did not show significance. The results indicated that increasing spacing among trees (stand density) the volume per hectare increases, and consequently the rotation age and self-thinning.

It was suggested that experiments be specially established in several site qualities to study the growth and yield of *Eucalyptus grandis* and the age of self-thinning.

1. INTRODUÇÃO

Desde que a matéria viva existe na forma de indivíduos discretos existem duas variáveis básicas para a descrição global dos seres vivos: sua massa e seu número por unidade de área. Na Taxonomia Ecológica existem duas ramificações principais de estudo : Ecologia de Produção e Ecologia de População (HARPER, 1977), as quais enfatizam, respectivamente, a massa e o número de indivíduos. A relação entre essas variáveis constitui o núcleo da Ecologia. Em termos gerais, as relações rendimento-densidade tentam dar informações acerca do efeito rendimento-densidade, assim como também determinar um limite superior para essa combinação.

O estudo da combinação rendimento-densidade tornou-se o objetivo de intensas pesquisas durante as últimas duas décadas desde que YODA *et alii* (1963) formularam a Lei da Potência $3/2$ de Auto-desbaste.

A Lei de Auto-Desbaste tem sido considerada um dos princípios mais gerais da Biologia de populações de plantas . Ela relaciona o tamanho ou massa da planta com a densidade quando o processo de auto-desbaste está ocorrendo, de tal forma que, a população diminui, tanto nos incrementos do tamanho como no número de indivíduos. Sob as pressuposições de que o desenvolvimento do talhão em estudo é monoespecífico, equiâneo e com fechamento de copa completo, essas mudanças podem ser descritas pela equação:

$$w = k N^{-3/2}$$

onde, w é o tamanho médio da planta, expresso em massa, volume, altura, área basal, etc; N é a densidade (número de plantas por unidade de área), e k é uma constante considerada como uma medida da taxa para a qual a massa de tecido requerida para sustentar uma área de copa estabelecida varia com as dimensões do dossel. Essas bases teóricas e empíricas envolvidas nessa simples equação têm recebido inumeráveis críticas em relação a seu desempenho.

É evidente que a credibilidade da Lei de Auto-desbaste será tanto maior quanto melhor se ajustar o modelo matemático ao fenômeno em questão.

Mas, o modelo em estudo é uma função considerada não linear nos parâmetros. Isto dificulta a obtenção das estimativas, que apesar do intenso tratamento na literatura universal não é sugerido um único método de mínimos quadrados como sendo o melhor para a resolução de modelos não lineares.

Dependendo da natureza experimental do problema, pode-se ter métodos mais adequados que outros para a obtenção das estimativas dos parâmetros. Dado que essas estimativas devem ser bem determinadas escolhemos entre os vários métodos de estimação não linear os métodos de Gauss, Newton, Marquardt, e da Secante, com os objetivos de transmitir metodologia de aplicação e verificar qual o melhor para esse modelo específico.

Por outro lado, é óbvio que esse modelo proposto é facilmente linearizável através da aplicação da transformação logarítmica nas duas variáveis (isto é, de resposta e preditora) e assim estimado mediante a aplicação do método dos mínimos quadrados à equação de regressão simples, quando a situação experimental o permitir. Ainda mais, dada uma estrutura linear da variável resposta em

função da variável preditora, poder-se-ia utilizar um outro método, o de máxima verossimilhança visando comparar metodologicamente o processo para fins de obter uma melhor predição.

Assim, este trabalho tem como objetivo propor um método mais adequado para ajustar o modelo de auto-desbaste. Para a estimativa dos parâmetros serão comparados os modelos lineares e não lineares. Para a validação dos modelos serão usados dados de inventários florestais obtidos em florestas monoespecíficas e equiâneas de *Eucalyptus grandis*, plantadas em três diferentes qualidades de sítio.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. A Lei de Auto-desbaste

2.1.1. Considerações Gerais

A Lei de Auto-desbaste de acordo com YODA *et alii* (1963) descreve as mudanças recíprocas no tamanho médio da árvore expresso em massa, volume, altura, área basal, diâmetro quadrático, etc, (w), e o número de plantas por unidade de área, (N), durante o desenvolvimento de um talhão monoespecífico, equiâneo com fechamento de copa completo:

$$w = k N^{-3/2} \quad (1)$$

onde k é um coeficiente e $-3/2$ é uma constante que independe da espécie, idade, densidade inicial e qualidade do sítio. O tamanho total da vegetação por unidade de área, W , a qual é igual ao produto de w e N , pode ser determinado através de:

$$W = k N^{-1/2} \quad (2)$$

Assim o tamanho da árvore do talhão é explicada por uma função univariada, (N), com um único coeficiente a ser determinado, (k), mais uma constante ecológica universal ($-1/2$ ou $-3/2$ no caso da equação (1)).

O auto-desbaste, isto é, a diminuição do número de plantas, $-dN$ (a diferencial do número) é causado pelo incremento do tamanho da árvore do talhão, dW (a diferencial do tamanho da árvore). Definindo a taxa relativa de auto-desbaste em relação ao crescimento relativo do tamanho da árvore, dW/W , como $(-dN/N)/(dW/W)$, esta razão é constante e igual a 2 (dois), para todas as condições:

$$(-dN/N)/(dW/W) = (-dN/N) \frac{k N^{-1/2}}{(-1/2)(1/N)k N^{-1/2} dN} = 2 \quad (3)$$

A forma diferencial da Lei contém uma constante somente e tem um significado ecológico claro: quando a massa total das plantas cresce em uma fração pequena f ($=dW/W$), a diminuição relativa do número de plantas é $2*f$ (ZEIDE, 1988).

Segundo OLIVER & LARSON (1990) o impacto de diferenciação do tamanho médio em relação ao número e idade das árvores pode ser traduzido como: desde que algumas árvores morrem repentinamente, o tamanho médio das restantes se incrementa. A Figura 1 apresenta, na escala logarítmica, as mudanças do tamanho médio, quantificado pelo volume, em relação ao tempo, para talhões de *Pseudotsuga mensiensii*. Interpreta-se que cada talhão é uma linha. Observa-se que acontecem mortes súbitas de árvores, e os tamanhos dos indivíduos aumentam diminuindo consideravelmente o número deles criando um padrão de crescimento que se desenvolve até um certo limite natural, representado pela linha de mortalidade.

A possibilidade de expressar assim, exatamente, um processo ecológico fundamental tem sido considerado como uma notável façanha e tem impressionado profundamente a presente geração de ecologistas florestais.

FIGURA 1: Interpretação do processo de Auto-desbaste: mudanças sofridas pelo volume médio da árvore em função do tempo.

A aplicação da Lei foi consideravelmente expandida por GORHAM (1979); MALMBERG & SMITH (1982); WESTOBY (1984) e foi usada como argumento principal para modelos mais complexos de acordo com LLOYD & HARMS (1986). Embora descreva talhões sem alterações, DREW & FLEWELLING (1977, 1979) e LONG & SMITH (1984) apresentaram algumas recomendações para manejo florestal quando a atividade produtiva é mista.

Segundo LONSDALE (1990), reavaliações recentes concluem que o expoente envolvido na lei pode ser considerado como uma variável, dependendo das características biológicas da planta, e que as linhas retas, como já foi observado na Figura 1, são mais uma

exceção do que uma regra Universal.

Acontece que, a questionada Lei de Auto-desbaste é perfeitamente correta, bem como trivial, dentro de certas pressuposições explicitamente estabelecidas pelos autores. Elas são a invariância da forma e o fechamento horizontal da copa no desenvolvimento completo de um talhão equiâneo. Quando essas condições são satisfeitas, a Lei vira uma simples regra empírica ou, por outro lado, uma proposição geométrica elementar. O problema é que algumas dessas suposições não são válidas na natureza, e segundo ZEIDE (1987), contrariamente à primeira pressuposição, a forma da copa muda com o crescimento da planta por razões mecânicas e ecológicas. Este fato é percebido tanto pelos autores, como pelos críticos da Lei, fazendo com que na atualidade, poucos pesquisadores continuem afirmando que o valor $-3/2$ seja Universal na descrição da relação entre as variáveis w e N .

As diferenças de opiniões não tornam desprezível a importância da Lei. Ainda mais, a capacidade de gerar conflitos testemunha o grande sucesso dela. Este sucesso não se focaliza na exatidão da descrição do auto-desbaste, senão na capacidade de captar a atenção da comunidade ecológica acerca das relações entre o tamanho e o número de plantas (ZEIDE, 1991).

Como já foi mencionado, a descrição da relação funcional entre o volume médio, $(\bar{V})$ e o número de indivíduos por unidade, (N) , é feita de maneira determinística, isto é, com um coeficiente angular fixo em $-3/2$, o que não leva em conta, entre outras coisas as diferenças das qualidades dos sítios. Portanto, não seria errado pensar numa linha curva que varie com os fatores controláveis que perturbam o crescimento e afetam a densidade.

Considerando outro ponto de vista, a Ciência Florestal através das técnicas de Manejo, confia parte do seu desenvolvimento a dois parâmetros padrões: densidade e

quantidade total de madeira em pé. Quando a densidade padrão está determinada analítica e não empiricamente, ela nos permite obter estimativas mais exatas das características de interesse, como: densidade real ótima, quantidade total de madeira em pé, qualidade do sítio, taxa de auto-desbaste e grau de perturbação (ZEIDE, 1987).

Tanto a equação de Reineke (REINEKE, 1933) como a Lei de Auto-desbaste (YODA *et alii*, 1963) são funções potência. Logo, o número de árvores em talhões totalmente fechados, N , pode ser apresentado como uma potência do tamanho médio da árvore, S . Sua forma linear será:

$$\ln(N) = a - b \ln(S)$$

onde, a e b são coeficientes positivos e $\ln$ é a função logarítmica natural (ZEIDE, 1984).

Por outro lado, a densidade de um talhão muda constantemente. Isto acontece devido ao fato de que existem fatores naturais que não estão sincronizados: o espaço criado pela falha de uma árvore não pode ser fechado imediatamente e devido a esse inevitável retardamento, o talhão real, como um todo, é perturbado num grau determinado, o fechamento da copa passa a ser incompleto e a ocupação da área não é total. Assim, tanto a função potência de Reineke como a Lei de Auto-desbaste pareceriam ser não viáveis, desde que a expressão para o expoente não contenha alguma informação das mudanças naturais e não controláveis observadas (ZEIDE, 1987).

A Lei de Auto-desbaste tem implicações importantes na área de Melhoramento Florestal. Segundo WHITE & HARPER (1990), se os coeficientes da equação linear forem fixos para uma dada espécie num sítio determinado, então o melhoramento estaria limitado somente à redução do intervalo de tempo em que o talhão de árvores melhoradas

alcançasse o limite de auto-desbaste.

A Lei tem sido confirmada empiricamente para mais de 100 (cem) espécies arbóreas, monoespecíficas e equiâneas, mas sem considerar diferenças de local, ou qualidade do sítio (WHITE, 1980; ZEIDE, 1991). Não obstante, uma análise empírica mostrou que os parâmetros da Lei foram correlacionados com a espécie, a tolerância à luz, local e qualidade do sítio. Assim, concluiu-se que a generalidade da Lei poderia ser rejeitada sugerindo-se três melhoramentos analíticos que deveriam ser usados na avaliação dela (WELLER, 1987) . Eles são:

ii) A biomassa total (ou o volume total) das plantas sobreviventes por unidade de área, e não a biomassa média (ou volume médio) por árvore, deveria estar relacionada com a densidade já que o último método é estatisticamente inválido.

iii) A estimação dos parâmetros da Lei deveria ser obtida através da análise de Componentes Principais (PCA) devido à estrutura de erro dos dados, e

iiii) Os testes estatísticos deveriam ser usados na hora de incorporar na modelagem parâmetros correspondentes a alguns componentes não contemplados na Lei original visando a interpretação dos resultados.

Para esse trabalho, o autor achou resultados semelhantes aos obtidos por WELLER (1987) quando avaliava novamente os dados de HATCHER (1983) pertencentes a talhões de *Picea abies* no norte de Quebec, Canadá. Houve significância para o coeficiente de correlação entre a biomassa total por unidade de área (B) e N; além disso a inclinação da relação não foi diferente do valor esperado, ao nível de confiança de 95% de probabilidade. Por outro lado, WANNAMAKER & CARLETON (1983) informaram que o valor da inclinação de auto-desbaste para a mesma espécie no norte de Ontario era significativamente diferente do que o valor esperado (-3.75), atribuindo esses desvios à heterogeneidade do padrão espacial e à alta tolerância da

espécie.

ZEIDE (1988) através das evidências empíricas coletadas, informou que durante o período de auto-desbaste intensivo, a linha de desbaste é uma curva côncava para baixo. Quando o fechamento da copa atinge o seu máximo, as tangentes à linha são mais saturadas que o valor indicado pela Lei ($-1/2$). Com a diminuição do fechamento a linha se torna mais semelhante ao valor da Lei, podendo assumir, em determinadas situações, o valor de $-1/2$. Além disso o autor achou que nos sítios de boa qualidade onde a copa mantém o fechamento por um longo período, os valores para a inclinação não apresentam desvios tão grandes como os obtidos para os sítios mais pobres.

SMITH & BRAND (1987) estudaram o desempenho do modelo de crescimento de Chapman-Richards, baseado na Lei de Auto-desbaste, concluindo que para a espécie *Pinus resinosa* Ait, a inclinação estimada não difere significativamente do valor $-3/2$. Nesse caso, todos os parâmetros estimados foram significativos conduzindo à conclusão que a Lei de Auto-desbaste assintótica existe para essa espécie e pode ser usada como um modelo básico de crescimento.

Outros autores (WELLER, 1987; ZEIDE, 1987) questionam a validade e são especialmente críticos em relação aos procedimentos de ajuste e seleção de dados. Além da estimação do modelo nas formas plausíveis que serão abordadas neste trabalho existem metodologias mais intuitivas como os diagramas descrevem graficamente as relações entre o volume, o diâmetro médio quadrático, a altura média dominante e o número de indivíduos por unidade de área.

Em termos metodológicos, as técnicas usadas para o ajuste da equação linearizada variam desde as análises gráficas (DREW & FLEWELLING, 1977) até as análises de regressão simples (YODA et alii, 1963) ou as análises de componentes principais (MOHLER et alii, 1978;

WELLER, 1987; OSAWA & SUGITA, 1989). Por outro lado existem estudos da natureza assintótica da Lei de Auto-desbaste, os quais conduziram a ajustes diferentes para a equação linear (LLOYD & HARMS, 1986).

2.1.2. Considerações Teóricas: Fundamentação Geométrica

WHITTINGTON (1984), fez um estudo da Lei e justificou sua validade mediante uma análise geométrica. A Figura 2 representa o crescimento de uma árvore dentro duma população de N indivíduos ocupando um território de área A .

Figura 2. Esquema geométrico do território ocupado pela árvore.

Antes de competir dentro das zonas de

exclusão de cada planta, aqueles volumes de ar e espaço de solo adequados para as necessidades de cada planta não interferirão entre si e as plantas acrescentarão sua massa sem perder nenhum indivíduo. Assim, o incremento da massa deveria ser obtido, após o começo da competição, com um custo de decréscimo da distribuição da densidade, como segue:

A massa média (m) do indivíduo é

$$\rho * x * a * b * c * l^3,$$

onde ρ é a densidade da madeira da árvore, x é a proporção do espaço ocupado pela planta dentro da sua zona de exclusão, l é a dimensão típica da planta, e a , b e c são constantes para um gênero particular, como por exemplo, o valor da constante a poderia ser uma representação esquemática da árvore. Assim, temos:

$$m = \rho * x * a * b * c * l^3 = k * l^3 = k * (1/l^2)^{-3/2} = k * (N/N^2)^{-3/2}$$

onde $k = \rho * x * a * b * c$, uma combinação de constantes para um gênero particular.

Ainda mais, se L é uma medida típica do território total ocupado pela população total, a área A desse território é $(dL) * (eL)$, onde d e e são constantes que determinam a forma da área nesta representação esquemática. Mas, como em uma comunidade de N indivíduos competindo entre si, $N = (aL) * (bL) = (dL) * (eL)$, e como

$$N * l^2 = (de/ab) * L^2, \text{ temos:}$$

$$m = k * \left(\frac{abN}{deL} \right)^{-3/2} = k * (ab) * \left(\frac{N}{deL} \right)^{-3/2} = K * (N/A)^{-3/2}$$

onde k é uma constante característica de um gênero particular.

Portanto,

$$\text{Log } m = - \frac{3}{2} \log \frac{N}{A} + \log k$$

que é a "Lei da Potência $-3/2$ ". Pode-se observar, então que a Lei é um fenômeno geométrico. Assim, ela descreve a distribuição da densidade em relação à massa média e não à biomassa combinada.

Embora a Lei tenha sido, originalmente obtida empiricamente, YODA et alii (1963) forneceram os elementos suficientes para sua validade pressupondo que :

1-A geometria das plantas fica constante durante o crescimento e desenvolvimento da população.

2-O auto-desbaste acontece somente em sítios totalmente densos. Ou seja, a ação combinada do crescimento da copa e o auto-desbaste mantém fechamento completo da mesma.

Dai, a Lei pode ser expressa da seguinte maneira (WHITE, 1981):

(i) a biomassa média por planta sobrevivente ($\bar{B}$) é diretamente proporcional ao cubo de alguma dimensão linear de tamanho não especificada (1), $\bar{B} \propto l^3$.

(ii) a área média ocupada por uma planta qualquer (s) é diretamente proporcional ao quadrado desta dimensão linear, $s \propto l^2$, e inversamente proporcional à densidade (N), $s \propto N^{-1}$.

(iii) Assim, combinando as relações em (i) e (ii), temos, $s \propto l^2 \propto (\bar{B})^{2/3} \propto \bar{B}^{-2/3} \propto N^{-1}$; a qual adicionando uma constante resulta a Lei de Auto-desbaste:

$$\bar{B} = k_1 N^{-3/2}, \text{ ou equivalentemente, } B = k_2 N^{-1/2},$$

onde, k_1 e k_2 são constantes e B é a biomassa total das plantas que sobreviveram por unidade de área.

Fazendo uma outra dedução, a primeira pressuposição (1) significa que o produto do número de árvores por unidade de área, N, e a área ocupada pela árvore média, $(\pi/4)cw^2$, é uma constante igual à unidade de área. Portanto,

$$cw \simeq N^{-1/2} \quad (a)$$

onde cw é a largura da copa. Esta medida está relacionada com um valor esperado que pode ser aproximado por algum tipo de média. A segunda pressuposição (2), implica que a largura da copa é proporcional ao comprimento médio da copa, cl , e que a massa média aérea, w , é proporcional à massa média da copa. A partir de considerações geométricas podemos estabelecer:

$$w \simeq cm \simeq cw^2 cl \simeq cw^3 \quad (b)$$

Assim, a Lei de Auto-desbaste segue de (a) e (b).

BREDENKAMP & BURKHART (1990) realizaram uma pesquisa em África do Sul para examinar os índices de densidades desenvolvidos a partir das leis de YODA e REINEKE. Para o *Eucalyptus grandis*, os resultados indicaram que o limite para as densidades populacionais de talhões deveria ser 0,5 para o espaçamento relativo. Além disso, as avaliações feitas em função a Lei de Auto-desbaste indicaram que o índice de densidade torna-se uma medida útil no planejamento florestal quando, tanto a qualidade do sítio, como a idade, são incorporadas na modelagem.

WELLER (1987) reavaliou 488 estudos publicados sobre a relação biomassa-densidade, e concluiu que, das 63 publicações que afirmaram ter concordância com o estabelecido na Lei de Auto-desbaste, 19 mostraram coeficientes de correlação não significante entre as variáveis volume e número de indivíduos por unidade de área, 20 rejeitaram o expoente igual a $-3/2$. Além disso, alguns trabalhos confirmaram a hipótese de que a inclinação da "reta de mortalidade" é correlacionada com as mudanças sofridas pela forma da copa da árvore, podendo diferir entre talhões de uma mesma espécie.

BRUCHWALD (1988) apresentou um algoritmo matemático para determinar a velocidade da diminuição

natural do número de árvores em talhões de *Pinus sylvestris*, concluindo que a intensidade desse processo dependeu da idade do povoamento e das classes de qualidade do sítio.

Por outro lado, BARRETO (1988) partindo da lei, mostrou que nas espécies nas quais a lei se satisfaz, o máximo de incremento médio anual de volume espera-se que ocorra para uma idade fixa e que o índice de área foliar fica constante quando a lei é aplicada.

2.2. Tipos de Modelos a Serem Estimados

Quando os gráficos dos dados sugerem alguma relação entre duas variáveis, uma de resposta (y) e outra explicatória (x), poder-se-ia esperar obter uma expressão da relação via alguma função de forma:

$$y \approx f(x) \quad (4)$$

Como os dados contém invariavelmente flutuações não explicadas, canalizadas em alguma medida do erro, esse tipo de relação nunca pode ser determinado exatamente.

Freqüentemente, e como é o nosso caso, a relação (4) é sugerida por investigações teóricas e/ou empíricas, portanto concentra-se o estudo no geral à obtenção de um bom ajuste dos dados ao modelo.

Dados os objetivos deste trabalho, faz-se uma rápida discussão sobre os métodos de estimação de parâmetros, incluindo um confronto entre o modelo linear e o não linear quando ajustados aos mesmos dados.

2.2.1. Considerações Gerais da Modelagem

Nas análises de regressão linear são usados modelos da forma:

$$y \approx \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{p-1} x_{p-1}$$

com erros aditivos. Assim, tem-se:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{p-1} x_{p-1} + \varepsilon$$

onde $E(\varepsilon)=0$. Aqui as variáveis x 's podem incluir potências (altas ou não), produtos cruzados e ainda transformações das medidas originais. A pressuposição importante é que a expressão deve ser linear nos parâmetros.

Descrito na forma matricial, o modelo fica:

$$Y = X \beta + E$$

onde X é a matriz dos coeficientes, β é o vetor dos parâmetros, Y e E são os vetores, respectivamente, de observações e erros. Dai, o método dos mínimos quadrados fornece uma solução única, dada por:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

desde que a matriz $(X'X)$ possua inversa. Assim, a partir de hipóteses para os erros, podem ser obtidas conclusões probabilísticas a respeito dos parâmetros e do modelo.

Por outro lado os modelos do tipo

$$y \approx \beta_0 + \beta_1 e^{\beta_2 x} ; y \approx \beta_0 x^{\beta_1} ; \dots \text{ etc, são}$$

considerados não lineares.

De acordo com SEBER (1989) esses tipos de modelos em geral, são ajustados pelo método dos mínimos quadrados, mas, do mesmo modo que na regressão linear, é

apropriado somente quando os erros são não correlacionados com variância constante. Às vezes tal pressuposição pode não ser satisfeita para uma situação experimental dada, pelo qual se opta pelo uso de transformações específicas.

Como foi mencionado, uma das pressuposições feitas na análise de regressão é que o modelo que descreve os dados é linear. Observando o gráfico de y versus x ou também, a partir de informações a priori (teóricas ou empíricas) a relação entre as variáveis pode não ser linear. Entretanto, vários modelos não lineares, mediante a aplicação de apropriadas transformações, podem chegar a ser lineares. CHATTERJEE & PRICE (1977) apresentaram alguns exemplos, como seguem:

$$\text{Função: } y = \beta_0 x^{\beta_1} \quad \Rightarrow \quad y' = \log(y) \quad \text{e} \quad x' = \log(x)$$

$$\text{Função: } y = \beta_0 x^{\beta_1 x} \quad \Rightarrow \quad y' = \ln(y)$$

$$\text{Função: } y = \beta_0 + \beta_1 \log(x) \quad \Rightarrow \quad x' = \log(x)$$

$$\text{Função: } y = \frac{x}{\beta_0 x - \beta_1} \quad \Rightarrow \quad y' = 1/y \quad \text{e} \quad x' = 1/x$$

$$\text{Função: } y = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}} \quad \Rightarrow \quad y' = \ln\left(\frac{1}{1-y}\right)$$

Existem outros modelos simples não lineares que não podem ser "linearizados" via alguma transformação, como por exemplo, $y = \beta_0 + \beta_1 \delta^x$.

Em termos gerais, os objetivos centrais do desenvolvimento teórico dos Modelos não lineares são:

- a previsão de valores de uma variável aleatória em função de outra;
- o estabelecimento de inferências através da interpretação dos estimadores obtidos para os parâmetros.

Os Modelos Não Lineares, de acordo com RATKOWSKY (1983) diferem substancialmente nas propriedades

de estimação dos Modelos Lineares. Isto é, com as pressuposições de normalidade e independência dos erros satisfeitas, os estimadores para o caso linear, são não-tendenciosos, de variância mínima e normalmente distribuídos. No caso não linear isto acontece somente quando o tamanho da amostra é suficientemente grande.

2.2.2. Métodos Iterativos de Estimação de Parâmetros

Segundo BARD (1974) o método de Gauss, originalmente aplicado em problemas de mínimos quadrados deu origem à filosofia geral para os desenvolvimentos dos outros métodos iterativos posteriores. A literatura, no geral, coincide em considerar o método de Gauss como o algoritmo básico e aos outros como simples modificações dele visando obter uma convergência mais rápida ou também, simplicidade nos cálculos (BARD, 1974).

HARTLEY (1961) introduziu o método modificado de Gauss-Newton para a estimação de parâmetros em equações não lineares. Partindo de estimativas preliminares para cada um dos parâmetros e efetuando-se correções convenientes, inicia-se um processo iterativo até se obterem as estimativas eficientes para todos os parâmetros que compõem o modelo. Esse será um dos métodos utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

Segundo BARD (1974); SEBER (1989), o método de Newton não é muito prático pelas seguintes duas razões:

- existes casos onde o método não se aplica pois a matriz hessiana (H) não é necessariamente definida positiva, exceto no caso em que a iteração já esteja bem próxima do mínimo.

- requer a avaliação das segundas derivadas da função, o qual às vezes pode ser uma tarefa muito difícil quando as expressões das funções forem complexas.

Segundo BARD (1974), quando o método de Newton diverge, ou converge muito devagar, é desejável procurar algoritmos que convirjam globalmente. Eles possuem a característica de não levar em conta a segunda derivada da função, e portanto não carregam a falta de exatidão dela na expansão da série de Taylor. Assim esses métodos, como por exemplo o que é descrito a seguir, podem ser considerados como robustos e com frequência apresentam bom desempenho.

MARQUARDT (1963) descreveu um algoritmo mediante uma fórmula iterativa semelhante à obtida por Levenberg para obter estimativas de quadrados mínimos dos parâmetros de funções não lineares. Conciliou os métodos do Gradiente (chamados de "Steepest-Descent") e da Linearização. Essa combinação é baseada na máxima vizinhança, onde a série truncada de Taylor dá uma adequada representação do modelo não linear. Este método não é lento e em geral sempre converge.

BARD (1970) comparou os métodos gradientes: Newton, Gauss-Newton e Marquardt. Apresenta o desenvolvimento teórico dos mesmos e um exemplo numérico. Comenta sobre as vantagens e desvantagens de cada um deles. Basicamente:

-se o modelo se ajusta bem aos dados, o método de Gauss, com frequência não requer iterações a mais do que o de Newton.

-se o modelo não ajusta razoavelmente aos dados, o método de Newton pode requerer menos iterações do que o de Gauss, mas o tempo de computação para ambos é aproximadamente igual.

2.2.3. Outra Estimação dos Parâmetros Lineares

O método de Máxima Verossimilhança é usado para estimar os parâmetros lineares β_j e os valores

ajustados, de um modelo da forma:

$$y_{ij} = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n \quad (n > p)$$

NELDER & WEDDERBURN (1972), entre outros autores, apresentam o fundamento matemático do método. Mas, a essência é que, dada a matriz X do modelo como sendo de posto completo (como seria o nosso caso em que o modelo que descreve a Lei de Auto-desbaste for linearizado via transformação logarítmica), começa-se com a verossimilhança como uma função do β e maximiza-se para β .

O Método da Máxima Verossimilhança (MV) consiste em encontrar valores dos parâmetros para os quais a função de verossimilhança alcança o máximo para um conjunto determinado de dados. As duas características mais interessantes do método MV são:

- o método especifica um procedimento bem definido para a estimação de parâmetros não importando a complexidade do modelo, e
- o método é invariante sob transformações dos parâmetros.

Os estimadores são obtidos através da minimização da negativa do logaritmo da função MV, usando o método de Newton modificado. A aplicação deste método pode ser impraticável devido ser a matriz das derivadas parciais de segunda ordem (Matriz Hessiana) muito grande (GARCIA, 1983). Caso seja possível, este problema é contornado fazendo-se uma partição estratégica da matriz, manipulando-se as submatrizes de maneira sequencial. Assim, não é possível, às vezes, obter uma solução direta, mas pode-se resolver em forma iterativa.

2.3. Importância Silvicultural

A crescente demanda de matéria-prima oriunda do permanente aumento da capacidade e da instalação de novas unidades industriais, faz com que aumente o ritmo de implantação de florestas de rápido crescimento.

O gênero *Eucalyptus* tem sido amplamente utilizado na implantação de maciços florestais, pela maioria das empresas brasileiras. Mostrando características silviculturais desejáveis tais como: adaptação ambiental, rápido crescimento e boa forma, destacam-se algumas espécies como *Eucalyptus grandis*, *E. saligna* e *E. urophylla*. Características tecnológicas também são apreciáveis, como densidade básica homogênea e poder calorífico alto em relação à outras espécies nativas e exóticas.

As plantações das espécies do gênero *Eucalyptus* se espalham por, praticamente, todas as regiões do Brasil, sendo particularmente intensas na região sudeste. Dentre as diversas finalidades de uso do *Eucalyptus* sobressaem a fabricação de papel e celulose, chapas e aglomerados e carvão.

A distribuição geográfica da produção de celulose e papel teve sempre o Estado de São Paulo como seu principal produtor, participando com 47,76 % da produção nacional. O gênero *Eucalyptus* é responsável por 83 % dessa produção, distribuída entre as seguintes espécies: *E. grandis* (43 %), *E. saligna* (16,1 %) e *E. urophylla* (10,0 %) (ANFPC-Relatório Estatístico, 1991).

Em termos do volume de madeira efetivamente consumido pelas empresas para a produção de celulose e geração de energia, em 1991, a distribuição por gênero também indicou o eucalipto como a de maior percentagem (60,04 %).

A produção brasileira de papel e celulose em 1991 foi superior à do ano anterior em 4,21 % e 11,03 %, respectivamente, sendo que o consumo nacional cresceu 3,8 %. Isto resultou num faturamento do setor equivalente à 1,2

% do PIB (Produto Interno Bruto).

Visando atender os acréscimos da demanda interna e externa (esta última necessitando um crescimento da ordem de 2,5 % até o final do século), o setor de papel e celulose vem expandindo sua capacidade desde fins da década de 80. Durante 1991, o setor implantou e reformou 74.233 ha de reflorestamentos, estando os principais investimentos concentrados nos gêneros *Eucalyptus* (57,6%) e *Pinus* (39,5 %) (ANFPC-Relatório Estatístico, 1991).

São inumeráveis as pesquisas desenvolvidas no mundo acerca das práticas de manejo para o gênero *Eucalyptus*. Mas é conhecido também nessas práticas, que variáveis como o espaçamento e a densidade populacional de um talhão, são primariamente dependentes da qualidade do sítio e do objetivo do manejo silvicultural (SCHONAU & COETZEE, 1989).

O espaçamento de plantio é uma variável ambiental possível de manipulação, sendo que para sua escolha deve-se considerar basicamente a qualidade do produto final, as características do sítio e da cultura; os futuros tratos culturais; e a possibilidade de mecanização das diversas atividades desde a implantação até a exploração.

É conhecido que o número ideal de plantas por unidade de área condiciona o crescimento e portanto o volume dos produtos florestais. Segundo FLISHWICH (1973), os espaçamentos amplos são adequados a espécies de crescimento rápido, quando plantadas em sítios de baixa qualidade.

Mais precisamente, pode-se encontrar como uma citação frequente para o *Eucalyptus* que, em geral a distância entre fileiras de árvores não deve ser maior que 3,0 m e que a distância dentro delas (entre as árvores) deveria ser menor em qualidades de sítios consideradas como boas chegando até uma distância de 2,5 em detrimento da qualidade, quando a otimização do total de volume é o

objetivo principal do manejo (SCHONAU & COETZEE, 1989).

Num pesquisa realizada para avaliar o efeito do espaçamento sobre a produção e qualidade da madeira em *Eucalyptus grandis*, VITAL & LUCIA (1987) consideraram como o melhor espaçamento 3,0 x 0,5 m.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1- Material

Para ilustrar a metodologia aplicada ao ajuste da Lei do Auto-desbaste foram utilizados dados obtidos no sistema de Inventário Florestal de plantações de *Eucalyptus grandis* em três hortos diferentes, localizados nos municípios de Aguai, Brotas e Altinópolis, estado de São Paulo, e pertencentes à empresa Champion Papel e Celulose Ltda. localizada no município de Mogi-Guaçu (SP).

Em cada horto ou região foram escolhidas parcelas de aproximadamente 400 m² e selecionados ao acaso os indivíduos com as mesmas idades e procedência visando respeitar as hipóteses da lei enunciada por YODA *et alii* (1963).

Com as variáveis disponíveis, como DAP médio (diâmetro à altura do peito) e Altura Total (H), foi calculado o volume cilíndrico $((\pi * DAP^2 * H) / 4)$ e este extrapolado para hectare.

O número de indivíduos por essa unidade de área conjuntamente com o volume cilíndrico foram as variáveis preditora (ou independente) e resposta (ou dependente), respectivamente, usadas para o ajuste do modelo que representa a Lei de Auto-desbaste.

3.2. Métodos

3.2.1. Introdução

Para focalizar o esquema geral dos métodos iterativos de estimação, foi considerado o modelo

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i \quad i=1, \dots, n$$

onde:

- y_i é a i -ésima observação da variável resposta
- x_i é o vetor $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})$
- β é o vetor $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1})$ de parâmetros desconhecidos
- ε é o vetor dos erros das observações
- n é o número de observações, e
- p é o número total de parâmetros a estimar.

Achar os estimadores de quadrados mínimos do vetor β significa obter valores estimados, $\hat{\beta}$, satisfazendo:

$$S(\beta) = \sum [y_i - f(x_i, \hat{\beta})]^2, \text{ de modo que ela}$$

seja mínima.

Neste trabalho considerou-se a função $f(x, \beta)$, estimando β através de métodos lineares e não lineares. Isto é, dado o modelo original que descreve o fenômeno de auto-desbaste,

$$W = k N^{-b},$$

onde W e N representam, como já foi mencionado, o volume cilíndrico e número de indivíduos por hectare respectivamente; e k e b são constantes. Seguindo a notação tem-se,

$$\begin{aligned}
 y_i &\approx \beta_0 x_i^{\beta_1} \\
 \therefore y_i &= f(x_i, \beta) + \varepsilon_i
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

a qual será estimada através dos métodos (iterativos) de estimação de modelos não lineares. Contrariamente, se a transformação logarítmica é aplicada a ambas variáveis resposta e explicatórias como foi sugerido por LAASASENAHO & KOIVUNIEMI (1990), tem-se

$$\begin{aligned}
 \log(W) &= \log(k) - b \log(N) , \text{ ou} \\
 \log(y) &= \beta_0 - \beta_1 \log(x) \\
 \therefore \tilde{y} &= \beta_0 - \beta_1 \tilde{x} ,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Este modelo será estimado pelas duas metodologias mais usadas para estimar um modelo linear simples: Quadrados Mínimos e Máxima Verossimilhança.

Os métodos iterativos que serão aplicados para estimar os parâmetros considerando o modelo não linear são os seguintes:

- Método de Newton
- Método de Gauss
- Método de Marquardt
- Método da Secante ou Falsa Posição

Em termos gerais, os métodos de Gauss e Marquardt relacionam os resíduos expressos nas derivadas parciais do modelo com os parâmetros até as estimativas convergirem. O método de Newton relaciona os resíduos explicitados na função das derivadas parciais de primeira e segunda ordens do modelo com os parâmetros, até as estimativas convergirem. O método da Secante, comumente

chamado de DUD (Don't Use Derivative) é semelhante ao de Gauss-Newton exceto que as derivadas são estimadas através da evolução histórica das iterações e não analiticamente. Todos esses métodos serão apresentados nas Seções a seguir.

3.2.2. Método dos Quadrados Mínimos (Q.M.) para o Modelo Linear.

Para uma melhor compreensão, mudou-se a notação das variáveis $\tilde{y}_i$ e $\tilde{x}_i$ no modelo (6) por y_i e x_i , respectivamente. Consideraram-se então, n valores transformados dos volumes por hectare obtidos em n densidades de indivíduos transformadas também, relacionando-se segundo

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n$$

Matricialmente o modelo é

$$Y = X \beta + E$$

onde

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Assim, a única estimativa do vetor de parâmetros pelo método dos quadrados mínimos será a solução do seguinte sistema de equações normais, dado que a matriz X é de posto completo igual a 2:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{bmatrix}$$

Supondo que os erros ε_i são variáveis aleatórias, de modo que $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, então, para se obter as estimativas $\hat{y}$ de y , é preciso primeiramente testar a significância dos parâmetros, isto é, $H_0: \beta_0 = \beta_1 = 0$, o que pode ser feito através da estatística F da análise da variância

$$F = \frac{\text{QM Regressão}}{\text{QM Resíduo}}$$

$$F = \frac{[\hat{\beta}' X' Y - (Y' E Y)^2 / n]}{(Y' Y - \hat{\beta}' X' Y) / (n-2)}$$

onde $E_n = \{1\}_{i,j=1}^n$. Assim, rejeita-se a hipótese H_0 sempre que o valor de F for maior do que o valor crítico $F(1; n-2; \alpha)$. Rejeitada a hipótese nula, obtém-se o primeiro vetor das estimativas $\hat{y}$ da variável resposta mediante o modelo ajustado

$$\hat{Y}_1 = X \hat{\beta}$$

e o primeiro vetor $\hat{E}$ de residuais, ou seja

$$\begin{aligned} \hat{E}_1 &= \hat{Y} - Y \\ &= X \hat{\beta} - Y \end{aligned} \quad (7)$$

Por outro lado, o ajuste do modelo é determinado através do coeficiente de determinação, R^2 , o qual informa a proporção da variação total de Y explicada pelo regressão, ou seja,

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - [(Y'E Y)^2/n]}{Y'Y - (Y'E Y)^2/n}$$

Esta metodologia é facilmente desenvolvida no pacote estatístico SAS (Statistical Analysis System). Para isso foram utilizados, basicamente, dois procedimentos, o PROC REG para a estimação e teste de hipótese do modelo de regressão linear, e o PROC UNIVARIATE para a análise de diagnóstico dos resíduos obtidos após o ajuste do modelo (SAS, 1987).

No PROC REG foram observadas também, as mudanças das estatísticas procuradas em relação à imposição de algumas restrições nos parâmetros. O PROC UNIVARIATE permitiu a avaliação e a obtenção do nível de significância da estatística χ^2 (chi-quadrado) para a prova de consistência da distribuição normal para os resíduos.

Além disso, foram observadas as estatísticas de resumo e extraídos os valores dos quartis para o cálculo do coeficiente de Keley, adotado para quantificar o grau de achatamento da distribuição dos resíduos, comumente chamado de coeficiente de curtose. Para este coeficiente esperavam-se valores próximos a 0,263 (coeficiente de curtose de uma curva que descreve a distribuição normal).

Cabe assinalar que foi feito um gráfico após o ajuste do modelo, relacionando os resíduos e os valores ajustados. Este tipo de gráfico é capaz de revelar, entre outras coisas: pontos isolados com resíduos de magnitudes grandes; uma curvatura geral, indicando uma escala de covariáveis não satisfatória; indícios de alguma função de distribuição diferente daquela do teste de hipótese; ou uma tendência de dispersão a medida que os valores ajustados aumentam, indicando uma outra expressão da variância não

considerada no modelo.

Prevendo-se alguns destes problemas, os dados experimentais de volume cilíndrico por hectare foram primeiramente ajustados a um modelo contendo a estratificação dos diferentes hortos como três variáveis indicadoras ("dummy"). Isto foi feito para identificar se nas subsequentes análises para a obtenção do ajuste do modelo de auto-desbaste era necessário estabelecer alguma expressão que indicasse a dependência da variável resposta com essas qualidades de sítio avaliadas.

Para incorporar a idade no modelo a idéia usada foi semelhante à anterior. Embora os talhões estudados pudessem ser considerados como equiâneos, a idade dos indivíduos não era uma constante absoluta para todos eles. Ela estava dispersa em um intervalo entre 6 e 7 anos, obviamente de amplitude pequena. Assim, visto que para a variável idade não se dispunha de uma amplitude razoável para estabelecer diferentes classes de estratificação, pelo menos no sentido aplicado, a decisão foi regida pela significância ou não do coeficiente de correlação entre o volume e a idade das árvores.

Cabe assinalar, e como se deduz da origem desse material experimental informado na Seção 3.1, que a situação experimental não tinha sido criada para estudar os dois comportamentos acima relatados. Com essas análises somente tenta-se ajustar o modelo controlando todos os possíveis fatores que pudessem ser hipotetizados como fontes de variação na variável de resposta, de acordo com os objetivos expostos na Seção 1.

Os programas desenvolvidos no SAS para tais fins se encontram no Apêndice A.

3.2.3. Método da Máxima Verossimilhança (M.V.) para o Modelo Linear

Para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança do modelo linearizado apresentado em (6) o pacote estatístico "Generalized Linear Interactive Modelling" (GLIM), utiliza uma metodologia baseada principalmente nos conceitos teóricos que se incorporam brevemente na seguinte introdução aos Modelos Lineares Generalizados.

Seja uma variável dependente y_i considerada como uma soma de vários componentes sistemáticas e um componente aleatório (no caso, com distribuição Normal), isto é,

$$y_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j + \varepsilon_i \quad i=1,2,\dots,n$$

onde $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Por outro lado, o papel desempenhado pelas outras variáveis na estrutura de cada observação, é chamado de preditor linear e definido como sendo

$$\eta_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j, \text{ ou matricialmente,} \\ \eta_i = X \beta, \quad (8)$$

onde x_{ij} são valores conhecidos e os β_j são os parâmetros desconhecidos. A matriz X de ordem $n \times p$, é chamada de matriz do modelo e o termo à direita da expressão (8) é chamado de estrutura linear.

A relação entre a média da i -ésima observação e seu preditor linear é dada pela função de ligação g_i , isto é,

$$\eta_i = g_i(\mu_i)$$

onde g_i é uma função monotônica e diferenciável. Define-se h_i onde

$$\mu_i = h_i(\eta_i)$$

como sendo a função inversa da função de ligação.

No caso de um modelo linear com distribuição normal para o vetor dos erros, como é o nosso caso, tem-se:

$$\mu_i = \eta_i \text{ ou, } g(\mu) = \mu$$

isto é, a função de ligação é a função identidade. Assim a função de verossimilhança para esse modelo será:

$$\begin{aligned} L(\beta, \sigma) &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma^2} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (y_i - \mu_i)^2 \right\} \end{aligned}$$

onde

$$\mu_i = \beta' x_i = x_i' \beta$$

Logo, o logaritmo dessa função e suas derivadas são:

$$\ell(\beta, \sigma) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (y_i - x_i' \beta)^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \sum x_i (y_i - x_i' \beta) / \sigma^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum (y_i - x_i' \beta)^2 / \sigma^3$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \beta'} = -\sum x_i x_i' / \sigma^2$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \sigma} = -2 \sum x_i (y_i - x_i' \beta) / \sigma^3$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - 3 \sum (y_i - x_i' \beta)^2 / \sigma^4$$

Para um máximo da verossimilhança considera-se

$$\left[\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = 0 ; \quad \frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = 0 \right], \text{ logo:}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \Sigma (y_i - x_i' \hat{\beta})^2 / n = \Sigma (y_i - \hat{\mu}_i)^2 / n = \text{SQResiduo} / n$$

$$\hat{\beta} = (\Sigma x_i x_i')^{-1} \Sigma x_i y_i$$

Mais simplesmente, dado que a matriz X é de posto completo, então expressando a verossimilhança como uma função do β e maximizando para β , reduz-se à solução do seguinte sistema:

$$A\hat{\beta} = c \quad (9)$$

onde $\hat{\beta}$ representa o estimador M.V. de β . Tanto A como c , no geral, são funções de $\hat{\mu}$, o qual é desconhecido dado que é uma função do $\hat{\beta}$. Assim não é possível obter uma solução direta, mas pode-se resolver em forma iterativa. Escolhem-se as observações como estimativas iniciais de μ , e com isso obtem-se o primeiro valor do $\hat{\beta}$. Com esses valores de $\hat{\beta}$ obteve-se a seguir o segundo valor estimado de μ , e uma outra vez, obtem-se o $\hat{\beta}$. Continúa-se com o processo até convergir ao valor do estimador de máxima verossimilhança (EMV).

NELDER & WEDDERBURN (1972) mostraram que, em termos gerais

$$A = (X'V^{-1}X), \quad e \quad c = X'V^{-1}z, \quad (10)$$

onde

$$V = \text{diag} \left(\tau_i^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu} \right)^2 * a_i(\varphi) \right)$$

$$= \text{diag}\{u_i\}, \text{ com } u_i \text{ definidos como os pesos estabelecidos para cada iteração.}$$

$$z = \eta_i + (y_i - \mu_i) * \frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i}$$

tal que, as equações obtidas são as mesmas que as usadas na regressão de quadrados mínimos ponderados para uma variável

aleatória Z com $E(Z) = \eta$ e $\text{Var}(Z) = V$.

A equação (9) tem como solução:

$$b = \hat{\beta} = A^{-1}c \quad (11)$$

Expressa-se (11) para este caso em que a distribuição dos erros do modelo de regressão linear (6) é normal. Logo, essa distribuição pode ser expressa da seguinte forma exponencial:

$$f(y, \theta, \varphi) = \exp \{ [y\theta - b(\theta)]/a(\varphi) + c(y, \varphi) \}$$

cujas as funções $a(\cdot)$; $b(\cdot)$ e $c(\cdot, \cdot)$ são representadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bullet a(\varphi) &= \varphi = \sigma^2 \\ \bullet b(\theta) &= \theta^2/2 = \mu^2/2 \\ \bullet c(y, \varphi) &= -\frac{1}{2} [y^2/\sigma^2 + \ln(2\pi\sigma^2)] \end{aligned}$$

Assim as matrizes definidas em (10) apresentam:

$$\begin{aligned} \bullet X \text{ de ordem } (n \times 2) \text{ e de posto completo} &\rightarrow \begin{cases} (X'X) \text{ tem matriz} \\ \text{inversa} \end{cases} \\ \bullet V^{-1} &= \sigma^2 I, \text{ já que,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= \varphi = \sigma^2 ; \quad \eta = \mu \rightarrow \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu} \right)^2 = 1 ; \\ &\quad + \quad \tau_i^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} (\mu^2/2) \right) = 1 ; \end{aligned}$$

(ou seja que os pesos iterativos são todos iguais)

$$\begin{aligned} \bullet z &= \eta_i + (y_i - \mu_i) * \frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i} \\ &= \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j + (y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j) * 1 \\ &= y \end{aligned}$$

e portanto

$$b = A^{-1}c = (X'X)^{-1}X'y,$$

Da teoria geral da estimação, sabe-se que o estimador de máxima verossimilhança do β , $\hat{\beta}$ é assintoticamente não tendencioso. Daí, tem-se:

$$\text{Var}(b) \cong (X'V^{-1}X)^{-1} = (X'X)^{-1}\sigma^2$$

e que os estimadores de η e de μ são dados por Xb e $h(\hat{\eta})$, respectivamente.

Dado que o GLIM é um "software" especialmente criado para ajustar modelos lineares generalizados, ele possui poderosos recursos que permitem a aplicação de variadas técnicas estatísticas úteis, desde a Análise da Variância até a Análise Exploratória de Dados (ROYAL STATISTICAL SOCIETY-GLIM, 1986).

O GLIM ajusta o modelo escolhendo como estimativas dos parâmetros β_j aqueles valores que minimizam a discrepância, chamada no GLIM de "deviance", a qual depende da distribuição assumida. Cabe assinalar que nos modelos com distribuição normal para o erro, a diferença dos outros modelos plausíveis no GLIM, ajustam-se em um ciclo só, isto é, não precisa de um ajuste iterativo. Além disso, e neste caso especial em que a função de ligação é a identidade, os valores ajustados e os valores preditores estimados coincidem.

Assim, foram construídos vários programas visando o ajuste do modelo e o estudo da distribuição dos valores ajustados e dos resíduos, extraíndo-se os vetores do sistema em cada ajuste realizado. Esses programas são listados no Apêndice B.

Esses vetores foram submetidos a análise de diagnóstico mediante o uso de macros. Essas subrotinas foram adaptadas de rotinas macros que o próprio GLIM oferece ao usuário em arquivos biblioteca (macro library) tais como MACLIB.GLM; arquivos de exemplo, MACLIB.DOC, EXMACLIB.GLM e EXMACLIB.LOG.

A nível de exemplo, para o teste de consistência da distribuição dos resíduos, o GLIM determina o valor da estatística de Anderson-Darling, que permite levar a cabo o teste sem o conhecimento dos valores dos parâmetros. Essa estatística geralmente tem potência maior quando comparada com os outros testes usuais de normalidade para uma ampla variedade de alternativas para os parâmetros (STEPHENS, 1978). Para o cômputo da estatística de Anderson-Darling existem 4 etapas básicas:

1- Os dados devem ser padronizados e estar em ordem crescente de magnitude. Esses valores são representados por w_i , $i=1, \dots, n$.

2- Os valores de w_i são convertidos para as probabilidades acumuladas da distribuição normal padrão via:

$$z_i = P \{ Z < w_i \}, \quad i=1, \dots, n$$

onde Z é a variável aleatória normal padronizada e z_i é obtido usando uma tabela que contenha os valores das áreas abaixo da curva normal (SHAPIRO, 1990. Tabela A-4, p.72).

3-Computa-se

$$A^2 = - \frac{(\sum (2i - 1) [\ln(z_i) + \ln(1 - z_{n+1-i})])}{n} - n$$

onde $\ln(z_i)$ é o logaritmo natural de z_i .

4-Avalia-se a estatística:

$$A^{2*} = A^2 \left\{ 1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right\}.$$

Assim, se o valor desta estatística excede o valor de A_{α}^{2*} tabulado, então a hipótese de normalidade é rejeitada para um nível de $100(1-\alpha)$ % de confiança (SHAPIRO, 1990).

Por outro lado e paralelamente ao

desenvolvido no SAS mediante o método de quadrados mínimos, foi ajustado o modelo contendo a idade como variável preditora além do número de indivíduos por unidade de área. Para esse modelo, a decisão de extrair os conjuntos contendo os valores preditos e os valores residuais foi feita após a comparação com (6) mediante o teste do quociente de verossimilhança. Esse teste compara as funções de verossimilhança maximizadas nos dois modelos segundo:

$$\begin{aligned}\lambda &= -2 \{ \ell(\hat{\beta}_{red}, \hat{\sigma}_{red}) - \ell(\hat{\beta}_{sat}, \hat{\sigma}_{sat}) \} \\ &= n \{ \log SQR_{red} - \log SQR_{sat} \} \\ &= n \log (SQR_{red} / SQR_{sat})\end{aligned}$$

onde o subcritor *red* indica que o modelo conteve somente um parâmetro linear, aquele correspondente ao número de árvores por hectare; e o subcritor *sat* significa que o modelo conteve um parâmetro a mais, aquele representando a idade dos indivíduos, chamado de modelo saturado, respectivamente. Os valores críticos para λ são baseados na sua distribuição assintótica χ^2_1 (chi-quadrado com um grau de liberdade) quando a hipótese nula da igualdade dos modelos é verdadeira.

3.2.4. Estrutura Geral dos Métodos para o Modelo Não Linear

Em função do exposto na Seção 3.1, os métodos computacionais já mencionados, embora empregando metodologias diferentes, tem por objetivo minimizar

$$S(\theta) = \sum [y_i - f(x_i, \theta)]^2 \quad (12)$$

onde $f(x_i, \theta) = \beta_0 x_i^{\beta_1}$.

Todos esses métodos iniciam-se num ponto arbitrário θ_0 e de acordo com alguma premissa específica, isto é, uma lei ou expressão matemática que encaminhe a obtenção de uma sequência de pontos θ_i de modo que convirja para um ponto $\hat{\theta}$, tal que $S(\theta)$ definido em (12) seja mínima. Assim espera-se que, em cada passo, se aproxime ao valor mínimo, mas, dado que ele é desconhecido, essa sequência de iterações terminará após um número $< \infty$ (comumente representado por N), assim aceitando-se θ_N como uma aproximação de $\hat{\theta}$ quando $S(\theta_N)$ for menor que $S(\theta_{N-1})$.

Em termos gerais os métodos conhecidos, exceto o método da Falsa Posição (DUD), têm como base o seguinte algoritmo:

- 1-Estabelece-se um valor inicial θ_0 .
- 2-Determina-se um vetor d_i na direção do i -ésimo passo proposto.
- 3-Resolve-se um escalar p_i de modo que o passo definido como $\alpha_i = p_i d_i$ seja aceitável. Nesse caso estabelece-se

$$\theta_{i+1} = \theta_i + p_i d_i \quad (13)$$

- 4-Verifica-se se o término do critério foi obtido. Nesse caso aceita-se θ_{i+1} como valor de $\hat{\theta}$. Caso contrário, retorna-se à etapa 2.

Para essa estrutura geral, os métodos apresentam apenas diferenças na forma de escolher p_i e d_i , chamados de tamanho do passo e passo direcional, respectivamente. Dado um valor qualquer para θ_i e para a direção d_i , a expressão (13) pode ser considerada como uma função dependendo só de p expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_i(p) &= \phi [\theta(p)] \\ &= \phi (\theta_i + p d_i) \end{aligned}$$

Derivando essa função em relação a p , obtém-se:

$$D_i'(p) = q_i' d_i \quad (14)$$

onde $q(\theta) = \partial \phi / \partial \theta$ = gradiente de $\phi(\theta)$ e q_i representa esse vetor avaliado no ponto $\theta = \theta_i$. Assim, se (14) for negativo, $\phi(\theta)$ decresce, portanto, se p for suficientemente pequeno, o passo $p d_i$ é aceitável. Se contrariamente, (14) for positivo, pode não existir um valor positivo de p para o qual o passo seja aceitável. Considera-se então ao d_i como uma direção aceitável se $D_i'(p) < 0$ (SILVA, 1980).

Um critério que poderia ser usado é o apresentado por MAGNANI (1985), o qual estabelece a d_i como uma direção aceitável se e somente se existir uma matriz R_i definida positiva tal que

$$d_i = - R_i q_i$$

Assim θ_{i+1} será procurado através da expressão iterativa

$$\theta_{i+1} = \theta_i - p_i R_i q_i$$

dado que a direção $-q_i$ é aquela em que $S(\theta)$ decresce mais rapidamente. Como será apresentado, mudanças nos p_i 's e nas R_i 's determinarão as diferenças nos métodos iterativos.

3.2.5. Método de Newton

De acordo com a estrutura geral este método estabelece valores de p_i e R_i como sendo:

$$p_i = 1 \quad \text{e} \quad R_i = H_i^{-1}$$

onde H_i é a matriz Hessiana de $S(\theta)$,

$$H = \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_m}$$

calculada para $\theta = \theta_i$.

Isto parte do argumento de que, utilizando a série de Taylor e expandindo a função $S(\theta)$ até termos de segunda ordem em torno de $\theta = \theta_i$, ter-se-ia

$$\tilde{\Phi}_i(\theta) = S(\theta) + q_i (\theta - \theta_i)' + (\theta - \theta_i)' H_i (\theta - \theta_i) / 2$$

a qual se pode interpretar como a superfície que reflete melhor o comportamento de $S(\theta)$ no $\theta = \theta_i$ que qualquer outra superfície de segunda ordem. Esperar que $\tilde{\Phi}(\theta)$ seja estável é equivalente à:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial \theta} = q_i + H_i (\theta - \theta_i) = 0$$

para o qual, se H_i é não singular, tem-se a solução

$$\theta_{i+1} = \theta_i - H_i^{-1} q_i \quad (15)$$

que define a i -ésima iteração do Método de Newton (conhecido também como Método de Newton-Raphson) (BARD, 1974).

Se $S(\theta)$ é uma função quadrática, então θ_{i+1} é um ponto de estabilidade de S , o qual será mínimo se H_i é definida positiva. Neste caso, o método converge numa única iteração. Se H_i é definida negativa, θ_{i+1} é um máximo e se H_i é não definida, θ_{i+1} é um ponto de sela. Em ambos os casos o método não é aceitável (SEBER, 1989).

Se $S(\theta)$ não é uma função quadrática, então θ_{i+1} não coincide geralmente com o ponto de estabilidade e o método não converge numa única iteração, mas continua sendo aceitável, isto ocorre quando H_i é definida positiva e pelo menos em uma vizinhança do mínimo (BARD, 1974).

GREENSTADT (1967) apresentou uma discussão acerca da eficiência dos métodos iterativos, tomando como

definição dessa medida de eficiência, a diminuição do valor da função observada em um passo qualquer do método dividida pela máxima diminuição possível observada nas iterações. BARD (1974) utilizou esse conceito para comparar alguns dos algoritmos iterativos mais usados, concluindo que o método de Newton possui uma das melhores "performances" dentre todos eles. Entretanto não é um método prático, visto que requer a obtenção das segundas derivadas da função em estudo, e isto às vezes pode ser uma tarefa muito trabalhosa.

3.2.5.1. Aplicação do Método de Newton ao Modelo (5)

Considere-se $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (\beta_0, \beta_1)$ como sendo os parâmetros a estimar. Logo, a matriz Hessiana H da forma

$$H = \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_m}, \quad k, m = 1, 2.$$

$$= \left\{ 2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{\partial^2 f(x_j, \theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_m} + 2 \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta_k} \right] \left[\frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta_m} \right] \right\}_{k,m}$$

onde $\varepsilon_j = (y_j - f(x_j, \theta))$; pode-se expressar como $H = N + B$,

$$N = \begin{bmatrix} \sum x_j^{2\theta_2} & \theta_1 \sum x_j^{2\theta_2} \ln x_j \\ \theta_1 \sum x_j^{2\theta_2} \ln x_j & \theta_1^2 \sum x_j^{2\theta_2} (\ln x_j)^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_1 \sum (y_j - \theta_1 x_j^{\theta_2}) x_j^{2\theta_2} \ln x_j \\ -\theta_1 \sum (y_j - \theta_1 x_j^{\theta_2}) x_j^{2\theta_2} \ln x_j & -\theta_1 \sum (y_j - \theta_1 x_j^{\theta_2}) x_j^{\theta_2} (\ln x_j)^2 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, o vetor gradiente usado na fórmula de iteração descrita em (15) é:

$$\begin{aligned} q &= \{ q_k \}_{k=1,2} = -2 \sum (y_j - f(x_j, \theta)) \frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta_k} \\ &= [-2 \sum (y_j - \theta_1 x_j^{\theta_2}) x_j^{\theta_2}, -2 \theta_1 \sum (y_j - \theta_1 x_j^{\theta_2}) x_j^{\theta_2} \ln x_j] \end{aligned}$$

Assim, dado um valor inicial θ_0 , o sistema iterativo fica:

$$(N + B) \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \theta_2 - \theta_{20} \end{bmatrix} = -q_i$$

Como H avaliada em θ_i é definida positiva para valores θ_i na vizinhança do mínimo, tem-se que escolhendo um valor inicial adequado o sistema terá a solução:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \theta_2 - \theta_{20} \end{bmatrix} = -(N + B)^{-1} q_i$$

Substituindo o valor inicial θ_0 por

$$\theta_1 = [\theta_{10} - q H^{-1}, \theta_{20} - q H^{-1}]'$$

o processo é repetido até convergir para a solução no ponto de mínimo.

3.2.6. Método de Gauss

De acordo com a estrutura geral apresentada na Seção anterior, o Método de Gauss estabelece valores de p_i e R_i como sendo:

$$p_i = 1 \quad \text{e} \quad R_i = \tilde{H}_i^{-1}$$

onde $\tilde{H}_i$ é uma aproximação da matriz Hessiana de $S(\theta)$, H , e cujos elementos são da forma:

$$\tilde{h}_{km} = 2 \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta_k} \right] \left[\frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta_m} \right]$$

Considera-se $\tilde{H}_i$ como uma boa aproximação da matriz Hessiana já que

$$\begin{aligned} H = H_{\theta} &= \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_m} \\ &= -2 \sum \varepsilon_j \frac{\partial^2 f(x_j, \theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_m} + 2 \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta_k} \right] \left[\frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta_m} \right] \end{aligned}$$

onde o primeiro termo contém o resíduo como fator, espera-se, que eles sejam de pequena magnitude (BARD, 1974).

O método de Gauss se baseia no desenvolvimento em série de Taylor até o termo de primeira ordem da função $f(x_j, \theta)$, em torno do ponto θ_i e considera um novo vetor y_j^* definido como:

$$\begin{aligned} y_j^* &= y_j - f(x_j, \theta_i) \\ &= \sum_{k=1}^p \alpha_k x_{kj}^* + \varepsilon_j \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_k = \theta_k - \theta_{ki}; \quad x_{kj}^* = \left[\frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta_k} \right]_{\theta=\theta_i}; \quad j=1, \dots, n; \quad n > m$$

o qual é linear nos parâmetros e cuja solução de quadrados mínimos empregada para esse tipo de modelo pode ser utilizada para a obtenção de $\hat{\alpha}_k = \hat{\theta} - \theta_i$. Assim, a fórmula iterativa do método é:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \hat{\alpha}_k = \theta_i - \hat{H}_i^{-1} q_i$$

3.2.6.1. Aplicação do Método de Gauss ao Modelo (5)

Neste método a matriz H é igual a matriz N . A matriz B é desprezada dado que os seus elementos ou são nulos ou são somas ponderadas de desvios e portanto os valores absolutos dos elementos são pequenos em comparação aos da matriz N .

Assim, o sistema de equações que define o algoritmo é:

$$N \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \theta_2 - \theta_{20} \end{bmatrix} = -q$$

o qual produzirá uma sequência de valores até o processo convergir para a solução de ponto de mínimo.

3.2.7. Método de Marquardt

Segundo BARD (1974), Marquardt (1963) desenvolveu esse método partindo do resultado apresentado por Levenberg em 1944 que diz que, se P é qualquer matriz definida positiva, então $(A + \lambda P)$ é definida positiva para λ suficientemente grande, não interessando a natureza de A . Com isto, qualquer matriz arbitrária, pode ser convertida

numa matriz definida positiva escolhendo-se λ convenientemente.

Adoptando a matriz A como a aproximação da matriz Hessiana do método de Gauss, $\tilde{H}$, e $P = B^2$ onde B é definida como:

$$B_{ii} = \begin{cases} |A_{ii}|^{1/2} & \text{se } A_{ii} \neq 0 \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pode-se definir a matriz R_i da expressão iterativa geral como sendo:

$$\begin{aligned} R_i &= (A_i + \lambda B_i^2)^{-1} \\ &= (\tilde{H}_i + \lambda P)^{-1} \end{aligned}$$

e portanto a fórmula iterativa se reduz a:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - R_i q_i$$

Observa-se que se λ tende a infinito, $\lambda_i B_i^2$ domina A_i , estabelecendo um passo de magnitude pequena e da forma $-\lambda_i B_i^2 q_i$ numa direção de declive, o que indica que para um valor grande de λ_i obter-se-ia um passo aceitável. Por outro lado, se λ_i é muito pequeno o processo iterativo se aproxima ao método de Newton.

BARD (1974) apresenta o algoritmo proposto por Marquardt para a escolha do valor apropriado de λ :

1-Se $i=1$, começa-se com $\lambda = 0.01$.

2-Para começar com a i -ésima iteração, calcular

$$v = -(A_i + \lambda B_i^2)^{-1} q_i, \quad \theta^{(1)} = \theta_i + v, \quad S^{(1)} \equiv S(\theta^{(1)})$$

3-Se $S^{(1)} < S(\theta_i)$, aceita-se $\theta_{i+1} = \theta^{(1)}$ e substitui-se λ pelo $\max(0.1 \lambda, \varepsilon)$, onde ε é tal que $0 < \varepsilon < 1$, por exemplo 10^{-7} . Continua-se no caso contrário.

4- Se $\frac{(v'q_i)^2}{[(q_i'q_i)(v'v)]} < 1/2$, substitui-se λ por 10λ e

volta-se ao item 2. Senão, interpola-se, isto é, acha-se um valor suficientemente pequeno ρ tal que $S(\theta_i + \rho v) < S_i$. Aceita-se $\theta_{i+1} = \theta_i + \rho v$.

SMITH & SHANNO (1971) descrevem uma outra forma de escolha para λ . Para computar o v pode-se:

-Resolver o conjunto de equações lineares simultâneas:

$$(A_i + \lambda_i B_i^2) v = -q_i$$

Se vários valores de λ_i devem ser calculados numa iteração só, essas equações devem ser resolvidas a cada vez. Observa-se que se os elementos da diagonal de A_i são todos positivos, então $(A_i + \lambda_i B_i^2)$ é idêntico a A_i exceto que cada elemento da diagonal está multiplicado por $(1 + \lambda_i)$. Se $(A_i + \lambda_i B_i^2)$ pode ser considerado a priori como uma função definida positiva, então o método da decomposição de Cholesky (SEBER, 1989) deveria ser usado para a obtenção do v .

3.2.7.1. Aplicação do Método de Marquardt ao Modelo (5)

O sistema de equações que define o algoritmo do método é:

$$(N + \lambda B^2) \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \theta_2 - \theta_{20} \end{bmatrix} = -q, \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} \sum x_j^{2\theta_2} (1+\lambda) & \theta_1 \sum x_j^{2\theta_2} \ln x_j \\ \theta_1 \sum x_j^{2\theta_2} \ln x_j & \theta_1^2 \sum x_j^{2\theta_2} (\ln x_j)^2 (1+\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \theta_2 - \theta_{20} \end{bmatrix} =$$

$$= - \sum (y_j - \theta_1 x_j^{\theta_2}) \begin{bmatrix} x_j^{\theta_2} \\ \theta_1 x_j^{\theta_2} \ln x_j \end{bmatrix}$$

para o qual aplica-se o algoritmo apresentado por BARD (1974) para a escolha do valor apropriado para λ .

3.2.8. Método da Secante ou Falsa Posição (DUD)

Este método tem a característica de não precisar das expressões das derivadas de primeira e de segunda ordem da função estabelecida no modelo não linear (RALSTON *et alii*, 1978). Se essa função contém um único parâmetro, a derivada para a $(i+1)$ -ésima iteração pode ser estimada a partir das iterações prévias segundo:

$$\text{Derivada}_{(i+1)} = \frac{(\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1})}{(\theta_i - \theta_{i-1})}$$

Mas, se a função possui k parâmetros a serem estimados, o método usa as últimas $(k+1)$ iterações para estimar as derivadas necessárias (SAS, 1987).

Basicamente o método DUD aproxima $f(x_j, \theta)$ em cada iteração por uma função afim, a qual coincide com a $f(.,.)$ em $(p+1)$ valores estabelecidos de antemão do vetor de parâmetros. Isto é, a k -ésima iteração do algoritmo pode ser resumida como segue:

Seja θ_k uma estimativa do vetor solução, de dimensões $(p+1) \times 1$, calculada em iterações prévias. Logo, aproxima-se $f(x_j, \theta)$ por uma função linear $L_k(\theta)$ a qual é igual à $f(x_j, \theta)$ nesses $(p+1)$ valores e encontra-se o $\theta_{k(\text{novo})}$, definido como o ponto que minimiza a

distância entre $L_k(\theta)$ e y . Assim, substitui-se um dos $\theta_{k,i}$'s pelo $\theta_{k(\text{novo})}$ para a obtenção do $\theta_{(k+1)i}$ a ser usado na $(k+1)$ -ésima iteração. A construção da k -ésima iteração requer, aproximadamente, $[np^2 + (3p^3)/2]$ operações aritméticas (RALSTON *et alii*, 1978).

A aproximação linear $L_k(\theta)$ escreve-se como uma função do vetor α , cujos componentes se relacionam com os componentes do vetor θ em cada iteração segundo:

$$\theta = \theta_{p+1} + \Delta \theta \alpha \quad (16)$$

onde, $\theta_1, \dots, \theta_{p+1}$ são estimados na iterações prévias (isto é, θ_1 como sendo o primeiro ou o mais "velho" valor que foi calculado), e a coluna i -ésima da matriz $\Delta \theta$ é dada por:

$$\Delta \theta_i = \theta_i - \theta_{p+1}, \quad i=1, \dots, p$$

Logo, a aproximação linear é:

$$L(\alpha) = f(x_j, \theta_{p+1}) + \Delta F \alpha$$

onde a coluna i -ésima da matriz ΔF é da forma

$$\Delta F_i = f(\theta_i) - f(\theta_{p+1}), \quad i=1, \dots, p$$

Assim, minimizando $S(\theta) = \sum [y - L(\alpha)]^2$, a solução resulta:

$$\alpha = (\Delta F' \Delta F)^{-1} \Delta F' [y - f(\theta_{p+1})]$$

e um valor novo de θ , $\theta_{(\text{novo})}$ é calculado a partir de (16).

Um critério de convergência considerado como satisfatório é o seguinte:

$$\text{Converge se } \frac{|S(\theta_{(\text{novo})}) - S(\theta_{p+1})|}{S(\theta_{p+1})} \leq T$$

para 5 (cinco) iterações sucessivas, onde T é um número positivo pequeno, como ser, 10^{-5} . O uso deste particular critério de convergência não é importante, mas o uso de um

critério de convergência que requeira satisfazer essa desigualdade para várias iterações consecutivas sem que o é.

3.2.9. Implementação dos Métodos Não Lineares

Os quatro métodos não lineares descritos nas seções anteriores foram aplicados aos dados de inventários florestais de *Eucalyptus grandis* através do procedimento NLIN (NonLinear) do SAS.

Este procedimento possui opções que permitem, entre outras coisas, a escolha do método em particular (Newton, Gauss, Marquardt, e Secante (DUD)), o critério de convergência, a quantidade de iterações (ou equivalentemente, a amplitude do passo para cada iteração), e o estabelecimento de intervalos (uni e bilaterais) válidos para os parâmetros do modelo.

Entretanto, o PROC NLIN precisa da especificação da expressão matemática que define para o modelo em estudo, os valores iniciais dos parâmetros e, segundo o método escolhido, das derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função em relação aos parâmetros.

Como seu nome indica, todo processo iterativo requer uma seleção de valores iniciais (θ_{10} , θ_{20}) como ponto de partida para iterar segundo algum critério estabelecido a priori. Dessa escolha inicial então pode depender o sucesso ou fracasso na determinação da solução ou ainda uma rápida ou lenta convergência para esse valor. Pelo geral, não existem algoritmos para determinar bons valores iniciais, portanto deve-se contar com a intuição ou com algum conhecimento sugerido por pesquisas prévias, em situações experimentais semelhantes.

NEWTON & SMITH (1990) experimentaram 5 expoentes para a Lei de Auto-desbaste aplicada a dados de volume de *Picea mariana* em florestas do Canadá. Os resultados indicaram dois expoentes diferentes, um dos quais não diferia do -0.5 e o outro dentro do intervalo de confiança (-0.20, -0.30). VERWIJST (1989) descrevendo a relação massa/densidade de *Betula pubescens* encontrou valores de -0.37 para o expoente e um limite inferior para o intervalo de confiança do parâmetro β_0 igual a 100.

Pelo exposto e por comparações feitas desses resultados de volumes com os achados usualmente para o gênero *Eucalyptus* (CONVENIO CCM/IPEF, 1988), foram estabelecidos como valores iniciais de β_0 e β_1 1000 e -0.10, respectivamente. Os programas desenvolvidos no SAS para a aplicação destes métodos são apresentados no Apêndice C. Para todos eles o PROC NLIN apresentou como resultado o total das iterações realizadas, os valores estimados dos parâmetros em cada iteração, informações acerca da não convergência quando existir, e os valores das estatísticas do teste F com as significâncias respectivas para cada parâmetro estimado.

Além disso e como é comum para todos os procedimentos de estimação de modelos que o SAS oferece, foram obtidos os correspondentes aos valores ajustados para a variável resposta e os de seus respectivos resíduos. Todos eles foram submetidos ao PROC UNIVARIATE para análise de diagnóstico segundo a descrição feita na Seção 3.2.2 para o modelo linearizado.

No sistema GLIM foram construídas as sub-rotinas macros para a obtenção das estimativas dos parâmetros no modelo não linear mediante processo iterativo de estimação. Para esse processo iterativo foram usados os mesmos pontos iniciais que aqueles estabelecidos para os métodos não lineares de estimação por quadrados mínimos. Essas sob-rotinas são apresentadas no Apêndice D.

3.2.10. Comparação das Metodologias Usadas

Se as pressuposições feitas acerca da distribuição do resíduo foram satisfeitas no que diz respeito à normalidade, já foi mostrado analiticamente na Seção 3.2.3 que os Métodos dos Quadrados Mínimos e de Máxima Verossimilhança fornecem estimativas semelhantes dos parâmetros do modelo linearizado via transformação logarítmica.

Visto que as medidas de resumo obtidas para as distribuições dos resíduos para cada método (coeficientes de simetria; de curtose; etc.) não foram exatamente as correspondentes às de uma distribuição normal, mas, foram estimados os intervalos de confiança, calculados pelo método dos Quadrados Mínimos para corroborar a inclusão das estimativas por Máxima Verossimilhança.

Uma outra forma de verificar a igualdade das estimativas do modelo, foi aplicar, após o ajuste, a análise da variância aos valores ajustados e os resíduos considerando os métodos de estimação como os tratamentos aplicados.

Já para o modelo não linear, ao se aplicar algoritmos iterativos de estimação que, em princípio, se apresentam como diferentes, seria óbvio tentar estabelecer se verdadeiramente existe algum tipo de diferenças entre elas quanto à eficiência do ajuste. Para responder a essa questão foram usados os pares de conjuntos obtidos depois de cada estimação contendo os valores ajustados e os seus respectivos resíduos.

Assim, procedeu-se à verificação da igualdade, quanto à eficiência, dos métodos utilizados

para refletir a mesma situação experimental. Isto foi feito para os valores ajustados e os resíduos separadamente, considerando cada conjunto como um tratamento. Ou seja, cada método de estimação aplicado ao modelo não linear significou um tratamento diferente, os quais foram submetidos a uma análise da variância para testar a hipótese de igualdade em relação às duas variáveis resposta, isto é, valores ajustados e residuais.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Ajuste do Modelo Linearizado

O modelo linearizado contendo informações sobre as diferentes qualidades do sítio mediante três variáveis indicadoras não foi o adequado para o volume cilíndrico. Estabeleceu-se então, o ajuste do modelo linearizado sem levar em conta informações do horto, isto é, foram ajustados segundo o modelo linear (6) todos os pares de observações de volume cilíndrico e número de indivíduos por hectare independentemente da qualidade do sítio.

Esses resultados concordam com os obtidos por WILLIAMS et alii (1991) numa pesquisa sobre a relação entre a qualidade do sítio e a produção de biomassa em *Picea rubens* e *P. mariana*. Os autores informaram que o índice da qualidade do sítio foi um preditor pobre para a produção vegetal nos quatro solos estudados na região de Maine-Louisiana (USA).

BARRETO (1988) forneceu uma expressão para a constante k da Lei de Auto-desbaste em talhões de *Pinus pinaster* igual a uma função dependente da qualidade do sítio, de modo que para qualidades melhores associavam-se maiores valores absolutos para essa constante. Já para o caso das florestas implantadas de *Eucalyptus grandis* que este trabalho trata, e como pode-se observar nas Figuras 3

e 4a-c, as diferenças observadas do rendimento para as três qualidades do sítio não foram suficientes para merecer sua incorporação no modelo geral.

FIGURA 3: Dispersão dos valores calculados do volume cilíndrico versus as densidades populacionais.

FIGURA 4a: Dispersão dos valores calculados do volume cilíndrico versus as densidades para a Região 1.

FIGURA 4b: Dispersão dos valores calculados do volume cilíndrico versus as densidades para a Região 2

FIGURA 4c: Dispersão dos valores calculados do volume cilíndrico versus as densidades para a Região 3

Por outro lado, o coeficiente de correlação estimado entre o volume por hectare e a idade dos indivíduos não foi significativo ($R < 0.50$ ns). Isto foi devido, provavelmente, ao fato de que a idade dos talhões estudados esteve dentro de um intervalo de valores de amplitude relativamente pequena. Entretanto, a literatura em geral (ZEIDE, 1991; WHITE, 1989) informa como altamente significativa a variação conjunta entre o tamanho e a idade dos indivíduos.

Assim, o ajuste do modelo linearizado (via transformação logarítmica) foi realizado no SAS com uma única variável explicatória, isto é, o número de indivíduos por hectare, cujo coeficiente de correlação com a variável; volume foi aproximadamente de 0,80 ($pr < 0.05$).

A Tabela 1 apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo linearizado com seus respectivos intervalos de confiança estimados mediante o uso do SAS e do GLIM.

Observa-se que no caso do ajuste pelo método dos Quadrados Mínimos o modelo foi adequado, dada a significância da hipótese para a análise da variância, isto é, $H_0: \beta_i = 0$ ($i=0,1$). Paralelamente, usando o método de Máxima Verossimilhança, a estatística "deviance" quando comparada com percentil do 0.95 % da distribuição de Chi-quadrado não apresentou significância para a hipótese H_0 : "O modelo proposto é adequado".

Também desses resultados deduz-se, que o expoente estimado no modelo não difere significativamente daquele estabelecido na Lei de Auto-desbaste, igual a -0,5, já que este valor está dentro do intervalo de confiança construído para o coeficiente linear.

OLIVER & LARSON (1990) e ZEIDE (1987), informaram que dependendo da espécie, condições climáticas, qualidade do sítio e outros fatores, podem-se encontrar valores entre -0,2 e -0,8 para esse expoente. NEWTON (1987) encontrou valores para esse parâmetro entre -0,30 e -0,86, aceitando a hipótese $H_0: \beta_1 = -0,5$ em plantios de *Picea mariana* na Noruega.

Para VERWIJST (1989) o valor encontrado para plantios de *Betula pubescens* realizados na Suécia foi igual a -0,37, valor este diferente ($pr < 0,05$) do estabelecido por YODA *et alii* (1963), que é -0,5. O autor adotou a massa como variável de resposta e justificou esse desvio à pouca habilidade da espécie de adicionar sua massa dentro do

espaço já ocupado.

Tabela 1: Valores estimados, desvios padrão, e intervalos de confiança para os parâmetros do modelo linearizado através do SAS e do GLIM. Significância da hipótese $H_0: \beta_i = 0$.

Via SAS	Valor da Estimativa	Desvio Padrão	Valor da Estatística F	Intervalo de confiança
$\hat{\beta}_0$	8,0109	1,0067	63,2311 (**)	[6,0387; 9,9840]
$\hat{\beta}_1$	-0,3141	0,1987	4,4423 (*)	[-0,5075; -0,120]
Mod. Est. $y = \theta_0 x^{-\theta_1} = 3013,6279 x^{-0,3141}$; $R^2 = 0,7834$				
Via GLIM	Valor da Estimativa	Desvio Padrão	"Deviance"	Intervalo de confiança
$\hat{\beta}_0$	7,8030	1,3640	31,0170 (ns)	[5,1374; 10,4686]
$\hat{\beta}_1$	-0,2960	0,1081		[-0,086; -0,5064]
Mod. Est. $y = \theta_0 x^{-\theta_1} = 2447,9346 x^{-0,2960}$; $R^2 = 0,8001$				

Observa-se também, que as estimativas dos parâmetros segundo o método de máxima verossimilhança estão dentro dos intervalos de confiança para esses parâmetros obtidos pelo método dos quadrados mínimos. Acontece, como será exposto a seguir, que a distribuição dos erros do modelo é aproximadamente normal e isto já foi mostrado na Seção 3.2.3.

Por outro lado, considerando a expressão original da lei como dependente de um parâmetro só, isto é $W = \theta N^{-0.5}$, o valor estimado $\hat{\theta}$ foi igual a 9,0121, valor este que fica dentro do intervalo de confiança obtido para β_0 . Assim e como era de se esperar, o modelo (6) aceita significativamente a imposição da restrição:

$\lambda'\theta = -0,5$, onde $\lambda' = [0, 1]$ e $\theta' = [\beta_0, \beta_1]$.

SCHMIDTLING (1987) testando dados obtidos em povoamentos de *Pinus taeda* na Georgia informou que o valor da intersecção da equação linear correlacionava-se positivamente com a procedências das sementes e que, os valores dos expoentes podiam ser considerados significativamente inferiores ao proposto na Lei de Auto-desbaste.

A bondade de ajuste dos modelos saturados e reduzidos, isto é, contendo o número e a idade dos árvores e o número de árvores por hectare, respectivamente foi testada mediante o teste do quociente de verossimilhança. Esse teste comparou as funções de verossimilhança maximizadas nos dois modelos, obtendo um valor igual a:

$$\begin{aligned}\lambda &= -2 \{ \ell(\hat{\beta}_{red}, \hat{\sigma}_{red}) - \ell(\hat{\beta}_{sat}, \hat{\sigma}_{sat}) \} \\ &= n \log (SQR_{red} / SQR_{sat}) \\ &= 240 \log (0,2708 / 0,2616) \\ &= 3,6026 \text{ (ns)}\end{aligned}$$

indicando que o modelo adequado para explicar o comportamento do volume cilíndrico inclui somente o número de indivíduos por hectare, como foi já informado da análise feita no SAS.

Para LAASASENAHO & KOIVUNEMI (1990) a regra que descreve o auto-desbaste pode ser definida como a dependência que existe unicamente entre os logaritmos do número de indivíduos e o volume. Para o autor essa dependência é linear e altamente influenciada pelo grau de auto-desbaste.

As Figuras 5 e 6 apresentam os comportamentos dos dois modelos obtidos, e dos valores ajustados versus os resíduos, respectivamente, descrevendo

FIGURA 5: Comportamento dos modelos lineares estimados por Q.M. e M.V.

FIGURA 6: Dispersão dos valores ajustados versus os resíduos para o modelo linearizado.

uma dispersão não tendenciosa para esses pares de valores. O Apêndice E apresenta o Quadro E-1a contendo os dois conjuntos de volumes cilíndricos estimados para alguns valores do número de indivíduos por hectare.

A Tabela 2 mostra as estatísticas de resumo que descrevem o comportamento dos erros ajustados obtidos da análise apresentada na Tabela 1. Esses valores indicaram uma distribuição adequada para os resíduos do modelo, e as estatísticas Chi-quadrado (Proc UNIVARIATE-SAS, 1983) e Anderson-Darling (MACLIB.GLM-GLIM, 1987; SHAPIRO, 1990) calculadas para testar a hipótese de normalidade dos valores estimados e dos resíduos foram não significativas com uma probabilidade de 0.95.

Tabela 2: Estatísticas de resumo para a descrição da distribuição de frequências dos resíduos obtidos através do SAS e do GLIM, e significância da hipótese H_0 : Existe distribuição Normal.

Estatísticas	Através do SAS	Através do GLIM
Média	0,0000	0,0000
Desvio Padrão (DP)	0,2936	0,3201
D.P. Média	0,0200	0,0195
Coefficiente de Simetria	-0,0109	-0,1511
Coefficiente de Curtose	0,4998	0,1857
W / H_0 : Normal	$\chi^2_{obs} = 0,6340$ (ns)	$A^{*2}_{obs} = 0,4572$ (ns)

Como já foi observado na Tabela 1, os dois métodos obtiveram estimativas dos parâmetros equivalentes. Mas, dado que a distribuição dos erros pode ser considerado como aproximadamente normal, provou-se a equivalência entre

os métodos através da análise da variância dos resíduos e dos valores ajustados no modelo. Nesta análise cada método de estimação foi considerado como um tratamento. Os resultados são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3: Análise da variância para os valores ajustados e os resíduos considerando os métodos de estimação como tratamentos.

Variável	Valor de F para tratamento	P-Value	C. V. (%)
Valores Ajustados	0,0102	0,9272	1,1022
Resíduos	0,0010	0,9463	2387,7

Cabe assinalar que a grandeza do coeficiente de variação obtido para os valores dos resíduos era o esperado, pois os valores médios para cada conjunto (Tabela 2) são menores que 10^{-4} , e o desvio padrão possui intervalo de confiança igual a (0,2108; 0,3351).

4.2. Ajuste do Modelo Não Linear

Aplicando os programas construídos no SAS (Apêndice C) para a estimação por quadrados mínimos do modelo não linear através dos métodos de Newton, Gauss, Marquardt e Falsa Posição (DUD), obteve-se os resultados expostos na Tabela 4. Essa Tabela apresenta o número de iterações necessário para a obtenção da convergência, valores estimados dos parâmetros, seus respectivos

intervalos de confiança assintóticos e as correlações assintóticas entre eles.

Tabela 4: Descrição dos métodos não lineares quanto ao número de iterações; valores estimados e intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros; e correlações assintóticas entre eles.

Método	Nº de Iter.	$\hat{\beta}_0$ $\hat{\beta}_1$	Intervalo de confiança com 95% de probabilidade	$\hat{\rho}_{(\beta_0, \beta_1)}^2$ Assint.
Newton	14	1967,9914 -0,2586	[987,5351; 2845,5173] [-0,4854; -0,0412]	0,9995
Gauss	5	1983,1117 -0,2500	[491,7633; 3454,9401] [-0,5803; -0,0008]	0,9997
Marquardt	2	1822,7292 -0,2500	[791,5824; 2754,9401] [-0,5023; -0,0023]	0,9996
DUD	12	479,4072 -0,0541	[90,2388; 939,1009] [-0,1021; -0,0003]	0,9996

De posse das estimativas dos parâmetros pode-se escrever as equações estimadas pelos quatro métodos, as quais são apresentadas na Tabela 5 conjuntamente com os valores da estatística F para testar a regressão e os coeficientes de determinação em cada ajuste.

Observa-se que, operacionalmente, se distinguiram dois grupos quanto ao número de iterações necessárias para a obtenção da convergência.

Tabela 5: Equações estimadas, valores do teste F para a regressão e estimativas dos coeficientes de determinação do ajuste para cada método.

Método	Modelo estimado	Teste F para regressão	R ²
Newton	$1967,9914 x^{-0,2586}$	848,8448 (**)	0,8500
Gauss	$1983,1117 x^{-0,2500}$	739,0656 (**)	0,8622
Marquardt	$1822,7292 x^{-0,2500}$	888,2023 (**)	0,8728
DUD	$479,4072 x^{-0,0540}$	901,8012 (**)	0,7834

Os métodos de Newton e DUD precisaram de mais iterações para encontrar o ponto de mínimo do que os métodos de Marquardt e Gauss. Além disso, tanto os cálculos das derivadas de segunda ordem requeridas pelo método de Newton, como a obtenção da estimativa da matriz das derivadas parciais para o DUD, significaram diferenças não desprezíveis em termos do tempo de processamento dos algoritmos.

Por outro lado, todos os métodos, exceto o DUD, produziram estimativas semelhantes para os dois parâmetros, isto é, os intervalos de confiança para os parâmetros, obtidos por um método qualquer, contém as respectivas estimativas obtidas pelos métodos restantes.

Essa diferença pode ser originada pelo seguinte: os algoritmos de Newton, Gauss e Marquardt, em cada iteração, aproximam a função $f(\theta)$ pela expansão de Taylor de primeira ordem em torno do valor corrente do vetor de parâmetros. Do sistema linear que resulta e pelo métodos dos Quadrados Mínimos, obtém-se um valor novo para a estimativa do vetor dos parâmetros. Por outro lado, o DUD aproxima a $f(\theta)$ em cada iteração por uma função afim, a qual coincide com a $f(\theta)$ em $(p+1)$ -valores prévios dos parâmetros. Isso conduz também a um sistema de equações

lineares do qual é obtido um valor novo de θ para conformar uma nova iteração.

Desde o ponto de vista geométrico, os algoritmos do tipo gradiente (Newton, Gauss e Marquardt) aproximam ao corpo (por exemplo: plano, se fora em duas dimensões) estabelecido pelos valores de $f(\theta)$ pelo plano tangente ao valor atual de $f(\theta)$. O DUD aproxima esse corpo pelo plano secante através dos $(p+1)$ valores prévios de $f(\theta)$. Intuitivamente observa-se então que os caminhos de busca do vetor solução são de diferentes origens para esses dois tipos de metodologias (RALSTON & JENNRICH, 1978).

No Apêndice E se apresenta o Quadro E-1b contendo os volumes cilíndrico estimados (m^3/ha) para alguns valores do número de indivíduos por hectare.

4.3. Comparação dos métodos

Por outro lado, se o critério da escolha do método de melhor "performance" fosse através do coeficiente de determinação (Tabelas 1 e 5), esses resultados não permitiriam escolher nenhum deles, dado que a proporção da variação total da variável resposta explicada pelo modelo foi semelhante para todos os métodos.

Se a análise da variância indicar que não houve diferenças entre os conjuntos de valores ajustados e se, os resíduos que esses métodos produziram tivessem comportamentos semelhantes, induziria pensar que embora metodologias diferentes, esses conjuntos representavam uma única situação experimental, isto é, a eficiência dos métodos seria a mesma para todos eles.

Os resultados obtidos da aplicação do PROC UNIVARIATE (SAS, 1987) aos pares de conjuntos provenientes de cada método garantiram que as pressuposições da análise da variância eram satisfeitas. As Tabelas 6a-b apresentam

as análises feitas para as duas variáveis resposta. Do mesmo modo que para a Tabela 3, é válida para esta situação a acotação sobre o coeficiente de variação obtido para os valores resíduos.

Tabela 6a: Análise da variância para os valores ajustados obtidos pelos métodos não lineares.

V a l o r e s		A j u s t a d o s	
Fonte de Variação	g.l	F _{obs}	P-value
Bloco	240	483,9322	0,0001
Tratamento	3	0,0320	0,6832

C. V. = 6,41 %

Tabela 6b: Análise da variância para os resíduos estimados pelos métodos não lineares.

R e s i d u o s		E s t i m a d o s	
Fonte de Variação	g.l	F _{obs}	P-value
Bloco	240	348,8453	0,0001
Tratamento	3	0,0100	0,9393

C. V. = 1838,06 %

Dado que os métodos utilizados apuraram conjuntos iguais de valores estimados e de resíduos, pode-se concluir que eles possuem a mesma eficiência, ou seja, esses métodos estimaram modelos não lineares que explicaram da mesma forma a relação entre o volume e o número de árvores por hectare.

Assim, a escolha de um desses métodos como proposta metodológica se limitou a sugerir aquele método que possua intervalos de confiança mais precisos para os parâmetros do modelo. Seguindo esse critério, a Tabela 7

apresenta as amplitudes desses intervalos de confiança definidas como as porcentagens relativas às estimativas obtidas em cada método.

Tabela 7: Amplitudes relativas, em porcentagens, dos intervalos de confiança dos parâmetros para cada método.

Método	Amplitude Rel.	Amplitude Rel
	do I.C. (β_0) (%)	do I.C. (β_1) (%)
Newton	0,94	1,70
Gauss	1,49	2,32
Marquardt	1,08	1,99
DUD	1,77	1,79

Assim, os métodos de Newton e Marquardt proporcionaram os melhores resultados. Mas, dado que o primeiro desses métodos tem o inconveniente de requerer o cálculo das derivadas de segunda ordem e o número de iterações necessárias à convergência é o maior que para todos eles, pode-se recomendar para este tipo de situação experimental, a aplicação do método de Marquardt para a obtenção das estimativas dos parâmetros do modelo não linear.

Além disso, o método de Newton em muitos casos pode não convergir pois a matriz H_θ definida como

$$H = \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_m}$$

não é necessariamente positiva definida, exceto próximo do mínimo (SILVA, 1980). As Figuras 7 e 8 apresentam os comportamentos dos modelos estimados para os casos linear e não linear, respectivamente.

FIGURA 7: Comportamento dos modelos estimados pelos métodos de Marquardt e DUD.

FIGURA 8: Comportamento dos modelos lineares e não lineares

Este tipo de comparação pode ser criticado sob vários pontos de vista dado que por exemplo, e dentre outras considerações, os critérios utilizados na comparação podem ser considerados como arbitrários e, no nosso caso particular de aplicação os resíduos foram adequados e de pequena magnitude. Segundo RALSTON & JENNRICH (1978), é conhecido que nesses casos os algoritmos do tipo gradiente têm desempenho bom, chegando algumas vezes a se comprovar que a robustez deles vá em detrimento do ajuste. Em alguns casos, as "performances" dos métodos podem depender mais de detalhes de implementação do que os algoritmos básicos considerados.

O método DUD funciona razoavelmente para uma variedade grande de situações práticas e, juntamente com a sua simplicidade e seu potencial para a aplicação a problemas de ajuste de funções definidas por equações cujas derivadas parciais envolvem procedimento complexos, RALSTON & JENNRICH (1978) desenvolveram um algoritmo bastante atrativo de ser incorporado nos procedimentos básicos de pacotes mundialmente difundidos, como o SAS e o BMDP.

4.4. Comparação dos Modelos

Por último, é escolhido o método de Marquardt como viável para a estimação, as Tabelas 8a-b apresentam os resultados da comparação dos conjuntos de valores ajustados e resíduos provenientes do modelo linearizado (por Quadrados Mínimos e por Máxima Verossimilhança) e do modelo não linear (através do método de Marquardt). Isto é, cada metodologia de estimação (duas correspondentes ao ajuste do modelo linearizado via transformação logarítmica, e uma para o modelo não linear) foi considerada como um

tratamento. Assim, pronta já a comparação dos métodos em cada tipo de modelo (linear e não linear) separadamente, testou-se a equivalência dos modelos.

Tabela 8a: Análise da variância para os valores ajustados obtidos pelos dois tipos de modelos.

V a l o r e s		A j u s t a d o s	
Fonte de Variação	g.l	F _{obs}	P-value
Bloco	240	128,6199	0,0001
Tratamento	2	0,1300	0,8751

C. V. = 5,34 %

Tabela 8b: Análise da variância para os resíduos estimados obtidos pelos dois tipos de modelos

R e s i d u o s		E s t i m a d o s	
Fonte de Variação	g.l	F _{obs}	P-value
Bloco	240	385,9401	0,0001
Tratamento	2	1,3098	0,4381

C. V. = 2846,00 %

Na análise anterior não foram considerados os resultados obtidos no ajuste do modelo não linear através do GLIM dado que a aplicação do processo iterativo usando máxima verossimilhança ofereceu estimativas semelhantes as anteriores quando comparadas através dos intervalos de confiança para os parâmetros.

Esses resultados ressaltam que a eleição entre o modelo linear e não linear por critérios exclusivamente estatísticos não é correta. Uma ponderação que ajudasse

essa eleição deveria considerar que:

-O uso do modelo linearizado eliminou tanto a necessidade de uma pesquisa prévia de valores iniciais como a obtenção das derivadas de primeira e segunda ordem do modelo em relação aos parâmetros, fatos estes que dificultam a implementação dos métodos não lineares em geral;

-Uma análise visual dos gráficos obtidos evidenciou que os ajustamentos se assemelham, de um modelo para outro, em um certo intervalo para o qual os dados se concentram em formas diferentes ($1000 < x < 1500$), e onde os modelos estabelecidos como não linear acompanhou melhor essa tendência, dando uma confiança maior no caso de extrapolação.

-Dado que os coeficientes de variação, de determinação e os testes usados não foram suficientes para indicar o melhor ajustamento para esta situação experimental, a facilidade de obtenção das estimativas nos dois modelos deve-se-ia considerar como prioridade. Dependendo tanto dos conhecimentos disponíveis a priori acerca da pesquisa como dos elementos teóricos que o pesquisador possua em relação à modelagem em geral, é que será feita a escolha do método a ser usado, como também do "software" para sua implementação.

4.5. Implicações Silviculturais

O exposto na Seção 4.4. indica que a eleição entre o modelo linear e não linear para representar a relação entre o volume cilíndrico e a densidade de árvores por hectare, não se limita exclusivamente às considerações estatísticas.

Considerando outro ponto de vista, a Ciência Florestal através das técnicas de Manejo, confia parte do seu desenvolvimento a dois parâmetros padrões: densidade e quantidade total de madeira em pé. Quando a densidade padrão está determinada analítica e não empiricamente, ela permite obter estimativas mais exatas das características de interesse, como: densidade real ótima, quantidade total de madeira em pé, qualidade do sítio, taxa de auto-desbaste e grau de perturbação (ZEIDE, 1987).

Tanto a equação de Reineke (REINEKE, 1933) como a Lei de Auto-desbaste (YODA *et alii*, 1963) são funções potência, nas quais, foi demonstrado que, para esta situação experimental em particular, a variável que representa a qualidade do sítio não forneceu elementos significativos que contribuíssem para diferenciar as estratégias de manejo, visando sempre a otimização da produção de madeira.

Visando incorporar outras variáveis (fatores controláveis) na formulação da lei, WILLIAMS *et alii* (1991) conduziram um experimento para determinar a existência de relações entre o índice da qualidade do sítio e a produção de biomassa em talhões de *Picea rubens* e *P. mariana*. Os resultados indicaram que o índice do sítio não pode ser estabelecido como um bom preditor da biomassa do talhão nos solos estudados, desde que não houvesse mudanças significativas na produção de biomassa em relação ao incremento do índice do sítio.

A relação entre o tamanho e o número de árvores é de vital importância prática. Ela liga o produto final de um manejo florestal com o número de árvores, determinando portanto o máximo do tamanho a ser atingido pela árvore dentro daquele espaçamento de plantio. Como já foi mencionado, um dos fatores que condiciona o crescimento e portanto o total de volume produzido é a densidade de indivíduos por unidade de área, ou, em alguns

casos, em função da qualidade da área disponível, o tipo de espaçamento escolhido na implantação da floresta.

Assim, e em função ao sugerido na literatura (VITAL, 1987; SCHONAU et al, 1989; IPEF, 1990) acerca dos espaçamentos convencionais (ou número de indivíduos por hectare), a Tabela 9 apresenta os valores estimados dos volumes por hectare obtidos para talhões de aproximadamente seis anos de idade, segundo os dois modelos (linear e não linear), e os dois métodos utilizados para cada abordagem.

Com frequência, o objetivo na área de produção é recíproco ao exposto no parágrafo anterior, isto é, a utilidade da modelagem no geral, é fornecer alguma contribuição para a escolha de um plano concreto de manejo florestal visando a otimização da produção.

Assim, considerando-se as sugestões que a literatura oferece acerca das distâncias mínimas apropriadas entre as fileiras das árvores (SCHONAU et al, 1989), poder-se-ia fixar no modelo proposto uma produção de madeira desejada para o *Eucalyptus grandis* (ou também exigida em função dos custos fixos) e obter uma estimativa de qual o espaçamento que a consegue, para um crescimento de até seis anos de idade.

A Tabela 10 apresenta as estimativas do espaçamento para algumas produções desejadas, supondo que a implementação dos modelos linear e não linear, estimados pelos métodos dos Quadrados Mínimos e Máxima Verossimilhança fossem as ferramentas das quais se dispõe para sua obtenção. Nota-se que aumentando o espaçamento entre plantas aumenta-se o volume, e conseqüentemente a idade de estagnação ou auto-desbaste.

Tabela 9: Valores estimados de volume cilíndrico (m^3/ha) segundo o modelo linearizado (via o SAS-Quadrados Mínimos e o GLIM-Máxima Verossimilhança) e o modelo não linear (via o SAS-Marquardt e DUD), até a estagnação ou início do auto-desbaste.

Espaçamento	Vol1	Vol2	Vol3	Vol4
(m)	(m^3 / ha)			
1,50 x 1,50	215,439	202,197	223,243	304,596
2,50 x 2,50	298,045	295,421	294,231	314,279
3,00 x 1,00	235,813	220,227	239,891	309,365
3,00 x 1,30	255,751	237,788	255,900	313,712
3,00 x 1,47	266,160	246,926	264,155	315,871
3,00 x 1,50	267,841	248,400	265,483	316,213
3,00 x 1,87	287,065	265,219	280,540	320,004
3,00 x 2,00	293,198	270,573	285,301	321,169
3,00 x 2,30	306,336	282,019	295,430	323,599
3,00 x 2,50	314,471	289,093	301,658	325,060
3,00 x 2,87	328,417	301,197	312,258	327,494
3,00 x 3,00	332,990	305,160	315,714	328,274
3,00 x 3,30	343,109	313,918	323,327	329,968
3,00 x 3,87	360,749	328,153	336,489	332,824
3,70 x 3,70	379,944	345,684	350,664	335,803

Nota: Os valores Voli ($i=1, \dots, 4$) foram obtidos das equações

$$\bullet \text{Vol1} = 3013,6279 \times^{-0,3141}$$

$$\bullet \text{Vol3} = 1822,7292 \times^{-0,2500}$$

$$\bullet \text{Vol2} = 2447,9346 \times^{-0,2969}$$

$$\bullet \text{Vol4} = 479,4072 \times^{-0,0540}$$

Tabela 10: Espaçamentos sugeridos pelos modelos linear e não linear em função da produção desejada até a estagnação ou auto-desbaste.

Produção Desejada (m^3/ha)	Espaçamentos Estimados (m)	
	Modelo Linear	Modelo Não Linear
270	3,00 x 1,60	3,00 x 1,53
300	3,00 x 2,40	3,00 x 2,14
330	3,25 x 3,25	3,22 x 3,22
350	4,00 x 3,40	3,20 x 3,20
380	4,35 x 4,35	4,00 x 3,40
400	4,70 x 4,70	4,00 x 4,00

A Lei de Auto-desbaste tem implicações importantes na área de Melhoramento Florestal. Segundo WHITE & HARPER (1970), se os coeficientes da equação linear forem fixos para uma dada espécie num sítio determinado, então o melhoramento estaria limitado somente à redução do intervalo de tempo em que o talhão de árvores melhoradas alcançasse o limite de auto-desbaste. Portanto, de acordo com SCHMIDTLING (1987), a validade desta Lei pode também ser determinada estudando-se os efeitos da variação genética sobre a inclinação e o intercepto das trajetórias de auto-desbaste.

SMITH & BRAND (1987) estudaram o desempenho do modelo de crescimento de Chapman-Richards, baseado na Lei de Auto-desbaste, concluindo que para a espécie *Pinus resinosa* Ait, a inclinação estimada não difere significativamente do valor $-3/2$. Nesse caso, todos os parâmetros estimados foram significativos conduzindo à conclusão que a Lei de Auto-desbaste assintótica existe para essa espécie e pode ser usada como um modelo básico de crescimento.

5. CONCLUSÕES

Do presente trabalho podem ser obtidas as seguintes conclusões:

1-Os métodos implementados através do modelo linear e não linear para a estimação dos parâmetros da Lei de Auto-desbaste mostraram a mesma eficiência, para dados de povoamentos de *Eucalyptus grandis* plantados em 4 locais de São Paulo.

2-A estimação dos parâmetros do modelo linearizado poderia ser recomendada já que esta elimina tanto o conhecimento prévio de valores iniciais para os parâmetros como o cálculo das derivadas parciais do modelo em relação a eles.

3-Em função ao Item 2, a escolha entre o uso do SAS ou do GLIM dependeria basicamente dos conhecimentos que o pesquisador possua em relação à teoria de Modelos Lineares, dado que em termos da interação com o usuário, esses dois pacotes oferecem vantagens semelhantes.

4-Para a abordagem da Lei de Auto-desbaste como um modelo não linear, dentre os quatro métodos utilizados para a obtenção das estimativas dos parâmetros, os métodos de Marquardt e de DUD apresentaram as menores

inconveniências de implementação.

5-O método de DUD poderia ser sugerido visto que ele é poderoso para uma ampla variedade de problemas práticos e não requer do usuário mais do que a expressão geral do modelo a estimar.

6-O modelo que representou a Lei de Auto-desbaste para os dados do povoamento de *Eucalyptus grandis* no estado de São Paulo, não precisou da incorporação das variáveis idade e qualidade do sítio, para descrever a relação entre o volume cilíndrico das árvores e a densidade populacional.

7-Na definição de técnicas de manejo florestal em povoamentos com características semelhantes aos que este trabalho tratou, deveria ser considerado o fato de que ao aumentar o espaçamento entre plantas aumenta-se o volume cilíndrico, e conseqüentemente a idade de estagnação ou auto-desbaste.

8-Para fins relacionados com o melhoramento florestal neste tipo de povoamentos, deve-se considerar somente a redução do intervalo de tempo em que o talhão implantado com árvores melhoradas alcançasse o limite de auto-desbaste.

9-A partir do conhecimento do processo de estagnação ou auto-desbaste e visando-se o estudo de um modelo de crescimento para *E. grandis*, sugere-se a implementação de experimentos em diferentes qualidades do sítio e avaliados em várias idades para alguns dos espaçamentos estabelecidos como adequados em termos da produção de interesse.

6.REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- ANFPC (Associação Nacional dos Fabricantes de Papel e Celulose)-Relatório Estatístico. São Paulo. 1991.
- BARD, Y. Non linear parameter estimation. John Wiley and Sons, New York, 1974. 341p.
- _____. Comparison of gradient methods for the solution of nonlinear problems. SIAM. J. Num. Anal, 7:157-186, 1970.
- BARRETO, L.S. Stands following the $3/2$ power law: maximum mean annual increment and LAI. In: Bul. Inst. Nac. Inv. Cient. Lisboa, Portugal. 1988a.
- _____. The $3/2$ power law: a comment on the specific constancy of k . In: Bul. Inst. Nac. Inv. Cient. Lisboa, Portugal. 1988b.
- BREDENKAMP, B.V.; BURKHART, H.E. An examination of spacing indices for *Eucalyptus grandis*. Can. Jour. For. Res., 20:1909-1916, 1990.
- BRUCHWALD, A. Self-thinning in Scots pine stands-A mathematical approach. Ann. Warsaw Agr. Univ., Warsaw, Poland, 35:11-16. 1988.
- CHATTERJEE, S.; PRICE, B. Regression analysis by example. John Wiley & Sons, New York, 1977. 228p.
- CONVÊNIO CCM/IPEF. Relatório técnico de visitas às pesquisas científicas sobre introdução e cultura de eucalipto. Piracicaba (SP), 1988. 102p.
- DREW, T.J.; FLEWELLING, J.W. Some recent japanese theories of yield-density relationships and their application to Monterey pine plantations. For. Sci., 23:517-534, 1977.
- _____. Stand density management: An

- alternative approach and its applications to Douglas Fir plantations. *Forest Science*, 25:518-532, 1979.
- FLISHWICH, R.W. Estudos de espaçamentos em plantações brasileiras. *Brasil Florestal*, 6(26):13-23, 1973.
- GARCIA, O. A stochastic differential equation model for the height of forest stands. *Biometrics*, Raleigh, NC, 9: 1059-1072, 1983.
- GORHAM, E. Shoot height, weight and standing crop in relation density in monospecific plant stands. *Nature*, 279:148-150, 1979.
- GREENSTADT, J. On the relative efficiencies of gradient methods. *Math. Comp.*, 21:369-367, 1967.
- HARTLEY, H. D. The modified Gauss-Newton method for the fitting on non-linear regression functions by least squares. *Technometrics*, Richmond, 3: 269-280, 1961.
- HATCHER, R.J. A study of black spruce forests in northern Quebec. *Can. Dep. of Forestry*, Ottawa, Ontario, 1018. 1963.
- LAASASENAHO, J.; KOIVUNIEMI, J. Dependence os some stands characteristics on stand density. In: *Proc. of Workshop DEP*, Wisconsin, 7:183-187. 1990.
- LLOYD, F T.; HARMS, J.F. An individual stand growth model for mean plant size based on the rule of self-thinning. *Ann. of Botany*, 57: 681-688, 1986.
- LONG, J.N.; F.W. SMITH. Relation between size and density in developing stands. *For. Ecol. Manag.* 7:101-206, 1985.
- LONSDALE, W.M. The self-thinning rule: dead or alive. *Ecology*, 71:1373-1388, 1990.
- MAGNANI, R. Alguns aspectos da aplicação da 2a. lei de Mitscherlich e da equação da regressão quadrática à maturação da cana-de-açúcar. Piracicaba-SP, 1985. (Mestrado. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP). 102p.
- MALMBERG, C.; SMITH, H. Relationship between plant weight

- and density in mixed populations. *Oikos*, 38:365-368, 1982.
- MARQUARDT, D. W. An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *Jour. Soc. Ind. Appl Math.*, 11:431-441, 1963.
- MOHLER, C.L.; MARKS, P.L.; SPRUGEL, D.G. Stand structure and allometry of trees during self-thinning of pure stand. *Jour. of Ecology*, 66: 599-614, 1978.
- NEWTON, P.F. Development of a stand density management model for pine black spruce forest types within central Newfoundland. Applicability of the self-thinning rule. In IUFRO Forest Growth Modeling and Prediction Conference. EK, A. R.; SR. SHIFLEY & T. E. BUCK (eds.). USDA For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC. Minneapolis, MN, p. 604-610, 1987.
- NEWTON, P.F.; SMITH, V.G. Reformulated self-thinning exponents as applied to black spruce. *Can. Jour. For. Res.*, 20:887-893. 1990.
- OLIVER, C.; LARSON, B. *Forest stand dynamics*. Mc. Graw Hill, Inc. New York, 1990. 467p.
- OSAWA, A.; SUGITA, J. The self-thinning rule: another interpretation of Weller's results. *Ecology*, 70:279-283, 1989.
- RALTON, M.; JENNRICH, R. DUD, A derivative-free algorithm for nonlinear least squares. *Technometrics*, Richmond, 20:7-14. 1978.
- RATKOWSKY, D. A. *Non linear regression modelling*. Marcel Dekker, Inc. New York, 356 p. 1983.
- REINEKE, L.H. Perfecting a stand-density index for even-aged forest. *Jour. Agric. Res.*, 46: 627-638, 1933.
- ROYAL STATISTICAL SOCIETY. *The GLIM system-release 3.77*. PAYNE, C.D. Ed., Oxford, 1986. 262p.
- SAS INSTITUTE. *STAT/SAS Inc. Carry Nc*, 1987.

- SCHMIDTLING, R.C. Racial variation in self-thinning trajectories in Loblolly pine. In Iufro: Forest Growth Modeling and Prediction Conference. EK, A.R.; SR. SHIFLEY & T.E. BUCK (eds.). USDA For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC. Minneapolis, MN, 1987.
- SCHONAU, A.P.; COETZEE, J. Initial spacing, stand density and thinning in *Eucalyptus* plantations. For. Ecol. and Man., 29:245-266. 1989.
- SEBER, G.A.F.; WILD, C.J. Nonlinear regression. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1989. 768p.
- SHAPIRO, S.S. How to test normality and other assumptions. Am. Soc. for Qual. Cont, Wisconsin, 1990. 92p.
- SILVA, M. A. P. Métodos de estimação dos parâmetros do modelo de Mitscherlich. Aplicação a dados de maturação da cana-de-açúcar. Piracicaba-SP, 1980. (Mestrado. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP). 89p.
- SMITH, N.J.; BRAND, D.G. Compatible growth models and density diagrams. In Iufro: Forest Growth Modeling and Prediction Conference. EK, A.R.; SR. SHIFLEY & T.E. BURK (eds.). USDA For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC. Minneapolis, MN., p.636-643, 1987.
- SMITH, J.F.; SHANNO, D.F. An improved Marquardt procedure for nonlinear regressions. Technometrics, Richmond, 13:63-74, 1971.
- STEPHENS, M.A. EDF statistics for goodness of fit and some comparasions. Jour. Am. Stat. As., 69:(347)730-737. 1978.
- VERWIJST, T. Self-thinning in even-aged natural stands of *Betula pubescens*. Oikos, Uppsala, 56:264-268. 1989.
- VITAL, B.R.; LUCIA, R.M. Effect os spacing on weight production and quality od wood of *Eucalyptus grandis* and *E. urophylla* at 52 months old. Revista Arvore, Viçosa-MG, 11:132-145. 1987.
- WANNAMAKER, B.A.; CARLETON, T. Self-thinning and growth of natural black spruce stands in Ontario. Ass. of Can.

- Admin. for Nat. Studies. Ottawa. p. 194-198, 1983.
- WELLER, D.E. A re-evaluation of the $-3/2$ power rule of self-thinning. *Ecological Monographs*, 57:23-43, 1987.
- WESTOBY, M. The self-thinning rule. *Advances in Ecolog. Research*, 14:167-225, 1984.
- WHITE, J. Demographic factors in populations of plants. In: *Botanical Monographs*, 15:21-48, Univ. Calif. Press. Berkeley, 1980. 222p.
- _____. The allometric interpretation of the self-thinning rule. *Jour. of Theoretical Biology*, 89:475-500, 1981.
- WHITE, J.; HARPER, J.L. Correlated changes in plants size and number in plant populations. *Jour. of Ecol.* 58:467-485, 1990.
- WHITTINGTON, R. Laying down the $-3/2$ power law. *Nature*, 311:217-222, 1984.
- WILLIAMS, R.A.; HOFFMAN, B.F.; SEYMOUR, R. S. Comparison of site index and biomass production of spruce-fir stands by soil drainage class in Maine. *Forest Ecology and Management*, Ruston, 41:279-290. 1991.
- YODA, R.T.; KIRA, T.; OGAEA, H.; OZUMI, K. Self-thinning in overcrowded pine stands under cultivated and natural conditions. *Jour. Biol. Osaka City*, 14:107-129, 1963.
- ZEIDE, B. Exponential diameter distribution: interpretation of coefficients. *Forest Science*, 30: 907-912, 1984.
- _____. Analysis of the $3/2$ power law of self-thinning. *Forest Science*, 33:517-537, 1987.
- _____. Search for a limiting density: reasons and approach. In *Iufro: Forest Growth Modeling and Prediction Conference*. EK, A.R.; SR. SHIFLEY & T.E. BURK (eds.). USDA For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC. Minneapolis, MN., p. 652-659. 1988.
- _____. Self-Thinning and stand density. *Forest Science*, 37, 2:517-523, 1991.

7. BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

- AITKIN, M.; ANDERSON, D.; FRANCIS, B.; HINDE, J.
Statistical modelling in GLIM. Clarendon Press, Oxford,
1989. 374p.
- DRAPER, N.K.; SMITH, H. Applied regression analysis. John
Wiley & Sons, Inc. 2nd. Ed. 1981. 709p.
- GALLANT, A.R. Non linear statistical models. John Wiley &
Sons. Nova Iorque, 1986. 804 p.
- GINGRICH, S.F. Measuring and evaluating stocking and stand
density in upland hardwood forests in the central
states. Forest Science, 13:(1):38-53, 1967.
- MC CULLAGH, P.; NELDER, J.A. Generalized linear models.
Univ. Press, Cambridge, 1983. 261p.
- NETER, J.; WASSERMAN, W. Applied linear statistical models.
Richard Irwin, Inc., Homewood, IL., 1974. 842p.
- SEAL, H.L. The historical development of the Gauss linear
model. Biometrika, 54:1-25, 1967.

8. APENDICES

Apêndice A: Programas construídos na linguagem SAS para a estimação do modelo linearizado, análise de diagnóstico dos valores estimados e resíduos, e análise da variância para a comparação das metodologias.

```

TITLE '----- Ajuste do Modelo Linearizado via -----
      ----- Transformação Logaritmica -----';
DATA Modelo;
  INPUT num vol @@;
  lvol=LOG(vol);
  lnum=LOG(num);
CARDS;
1194 290.080 1250 459.528 989 544.037 1575 399.376
900 351.825 1150 409.343 875 295.910 1617 507.910
.....
.....
.....
.....
.....
.....
1100 220.862 1350 211.650 1250 183.497 950 362.909
1325 292.320 1450 284.831 1250 192.124 875 495.343
;
PROC REG;
  MODEL lvol=lnum / TOL P R;
  TEST lnum=-0.5;
  OUTPUT OUT=Residuo1
    PREDICTED=pvol
    RESIDUAL=rvol;
TITLE '----- Valores Estimados versus Resíduos -----';
  PLOT r.*p. / SYMBOL='*';
TITLE '--- Valores Observados versus Valores Estimados ---';
  PLOT lvol*p. / SYMBOL='o';
TITLE '----- Modelo Restrito a  $\lambda'\beta = -0.5$ ,  $\lambda'=[0, 1]$ -----';
PROC REG;
  MODEL lvol=lnum / TOL;
  RESTRICT lnum=-0.5;
RUN;
TITLE '----- Análise da Distribuição dos Valores -----
      ----- Estimados e Resíduos do Modelo -----';
PROC UNIVARIATE DATA=Residuo1 FREQ ROUND=5 PLOT NORMAL;
  VAR pvol rvol;
RUN;

```



```
TITLE '--- Comparação dos Valores Estimados e Resíduos ---
      --- de cada Método ---';
```

```
DATA Teste;
  SET Residuo1
      Residuo2
      Residuo3
      Residuo4
      Residuo5
      Residuo6;
MERGE;
DATA Teste;
  SET Teste;
  DO bloc=1 TO 240;
    DO trat=1 TO 6;
      OUTPUT;
    END;
  OUTPUT;
END;
PROC SORT;
  BY bloc trat;
RUN;
PROC GLM DATA=Teste;
  CLASS bloc trat;
  MODEL pvol rvol=bloc trat / SOLUTION;
TITLE '----- Comparação dos Modelos e dos Métodos -----';
  CONTRAST 'Linear:Q.M. versus M.V.'
          trat 1 -1 0 0 0 0;
  CONTRAST 'Não Linear:Newton versus Gauss'
          trat 0 0 1 -1 0 0;
  CONTRAST 'Não Linear:Marquardt versus DUD'
          trat 0 0 0 0 1 -1;
  CONTRAST 'Não Linear:Gauss versus Marquardt'
          trat 0 0 0 1 -1 0;
  CONTRAST 'Modelo Linear versus Modelo Não Linear'
          trat 2 2 -1 -1 -1 -1;
RUN;
```

Apêndice B: Programas construídos no GLIM para a estimação do modelo linearizado e análise de diagnóstico dos resíduos.

```

$TRANS o!
$COMMENT 'Entrada de dados'!
$UNITS 240$
  $DATA num idade vol$
  $DINPUT 14$
(>File name? a:Modelo)
  $CALCULATE  lvol=%LOG(vol) :
              : lnum=%LOG(num) :
              : w=1$
  $YVAR lvol$
  $FIT lnum$
  $EXTRACT %PE$
  $CALCULATE  %bo=%PE(1) :
              : %b1=%PE(2)$
  $DISPLAY M E V S L D$
  $CALCULATE  %DV/%FV$ :
              : lvol_est=%bo+%b1*lnum :
              : residuo2=lvol-%f v$
$INPUT 11 normac ngof qplot$
(>File name? C:\GLIM\MACROS.PRG)
$
$COMMENT 'Cálculo do Coeficiente de Correlação'!
  $USE rsq$
$COMMENT 'Cálculo dos valores influentes após do ajuste do
          modelo normal'!
  $USE lev$
  $PLOT lvol_est lnum 'o'!
  $PLOT reseresiduo2 lvol_est '*'$
$COMMENT 'Teste de Normalidade para os Resíduos-Estatística
          de Anderson-Darling'$
  $USE ngof residuo2$
$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< Arquivo Residuo2 para a comparação dos métodos >'
$PRINT '=====!'
$
  $LOOK residuo2 lvol_est$
$
$STOP

```

```

$MACRO rsq!
  $CALCULATE  %z1=%CUC%YV)/%NU :
              : %z2=%CUC(%YV-%z1)**2) :
              : %R=1-%DU/%z2!
$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< Coeficiente de Correlação R2 >'
$PRINT '===== ' %R$
$
$ENDMAC

```

```

$MACRO lev2!
  $CALCULATE  PW_=%NE(%PW,0)+1 :
              : %z2=%CUC(PW_-1) :
              : %z3=%NU-%z2$!
$
$PRINT '=====!'
$PRINT *M 15 '----Variável peso é ' *N %PW 'com ' *I %z3!
$PRINT '----- unidades fora de bitola (.) -----'!
$PRINT '=====!'
$
$ENDMAC!
!
!
$MACRO lev1
  $CALCULATE PW_=2 : %z2+%NU$!
$ENDMAC!
!
$MACRO lev!
  $DELETE IND_ LEV_ LIM_ PW_ LWT_ %RE$!
  $FACTOR PW_ 2$!
  $EXTRACT %VL!
  $CALCULATE  $z1=PWF+1 :
              : LEV_=%VL/%SC :
              : IND_=%CUC1)!
$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< "Leverage Plot" >'!
$PRINT '=====!'
$
  $SWITCH %z1 lev1 lev2$!
  $CALCULATE  %z=LIM_=2*%PL/%z2
              : LWT_=%IFC(%GTCLEV_,%z),0,1)*(PW_-1)!
  $PLOT LEV_ LIM_ IND_ ' +-- ' PW_$!
  $DELETE PW_ LIM_ IND_$!
$
$ENDMAC!

```

```

$COMMENT 'Macro para Testar Normalidade'$
$MACRO ngof!
  $CALCULATE argumentos : %1 - data, %2 - pesos$!
  $DELETE V S T OR ORD I$!
  $CALCULATE v=%NEC(%2,0)*%CUC(%NEC(%2,0)) :
    : %z1=%CUC(%NEC(%2,0))$!
  $VAR %z1 OR ORD I$!
  $CALCULATE OR (V )=%1$!
  $SORT OR$ !
$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< Gráfico dos "Normal Scores" >'!
$PRINT '=====!'
$
  $CALCULATE ORD =%NDC(GL(%z1,1)-0.375)/(%z1+0.25))$!
  $PLOT OR ORD$!
$COMMENT ' Cálculo da Estatística de Anderson-Darling'!
  $CALCULATE I =%CUC(1) : %z5=%CUC(OR )/%z1$!
  $CALCULATE %z2=%CUC(OR -%z5)**2)/(%z1-1) :
    : %z6=%CUC(OR -%z5)**3)/(%z1-1)$!
  $CALCULATE %z7=%CUC(OR -z5)**4)/(%z1-1) :
    : %z6=%z6/%z2**1.5 : %z7=%z7/%z2**2-3$!
$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< n, média, variância dos dados são >'
$PRINT '=====!'
$PRINT '----- %z1 %z5 %z2 -----'!
$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< Coeficientes de Simetria e Curtose são >'
$PRINT '=====!'
$PRINT '----- %z6 %z7 -----'!
$
  $CALCULATE OR =%NP((OR -%z5)/%SQRT(%z2))$!
  $CALCULATE %z4=%CUC(2*I -1)*(%LOG(OR )+%LOG(1-OR ( %z1-I +1)))$!
  $CALCULATE %z4=-%z4/%z1$!
$PRINT '=====!'
$PRINT '< Estatística de Anderson-Darling é >'
$PRINT '=====!'
$PRINT '----- %z4 -----'!
$
$ENDMAC

```

Apêndice C: Programas construídos na linguagem SAS para a
estimação do modelo não Linear.

```

TITLE '----- Ajuste do Modelo Não Linear pelo -----
      ----- Método de Newton -----';
PROC NLIN DATA=Modelo METHOD=NEWTON;
  PARAMETERS b0=1000
             b1=0.20;
  BOUNDS b1< = 0.8;
  MODEL vol=b0*num**b1;
  DER. b0=num**b1;
  DER. b0.b0=0;
  DER. b1=-b0*lnum*num**b1;
  DER. b1.b1=b0*(lnum**2)*num**b1;
  DER. b0.b1=-lnum*num**b1;
  OUTPUT OUT=Residuo3
         PREDICTED=pvol
         RESIDUAL=rvol;
PROC PLOT DATA=residuo3;
  PLOT rvol*pvol / SYMBOL='*';
  PLOT pvol*num='p' vol*num='o' / OVERLAY VPOS=25;
RUN;

```

```

TITLE '----- Ajuste do Modelo Não Linear pelo -----
      ----- Método de Gauss -----';
PROC NLIN DATA=Modelo METHOD=GAUSS;
  PARAMETERS b0=1000
             b1=0.20;
  BOUNDS b1< = 0.8;
  MODEL vol=b0*num**b1;
  DER. b0=num**b1;
  DER. b1=-b0*lnum*num**b1;
  OUTPUT OUT=Residuo4
         PREDICTED=pvol
         RESIDUAL=rvol;
PROC PLOT DATA=residuo4;
  PLOT rvol*pvol / SYMBOL='*';
  PLOT pvol*num='p' vol*num='o' / OVERLAY VPOS=25;
RUN;

```

```

TITLE '----- Ajuste do Modelo Não Linear pelo -----
      ----- Método de Marquardt -----';
PROC NLIN DATA=Modelo METHOD=MARQUARDT;
  PARAMETERS b0=1000
             b1=0.20;
  BOUNDS b1 <= 0.8;
  MODEL vol=b0*num**b1;
  DER b0=num**b1;
  DER b1=-b0*ln num*num**b1;
  OUTPUT OUT=Residuo5
         PREDICTED=pvol
         RESIDUAL=rvol;
PROC PLOT DATA=residuo5;
  PLOT rvol*pvol / SYMBOL='*';
  PLOT pvol*num='p' vol*num='o' / OVERLAY VPOS=25;
RUN;

```

```

TITLE '----- Ajuste do Modelo Não Linear pelo -----
      ----- Método da Falsa Posição -----';
PROC NLIN DATA=Modelo METHOD=DUD;
  PARAMETERS b0=1000
             b1=0.20;
  BOUNDS b1 <= 0.8;
  MODEL vol=b0*num**b1;
  OUTPUT OUT=Residuo6
         PREDICTED=pvol
         RESIDUAL=rvol;
PROC PLOT DATA=residuo6;
  PLOT rvol*pvol / SYMBOL='*';
  PLOT pvol*num='p' vol*num='o' / OVERLAY VPOS=25;
RUN;

```

Apêndice D: Programas construídos no GLIM para estimar o modelo não linear.

```

$COMMENT 'Macro central para o Processo Iterativo'!
$MACRO Ajuste!
    $CALCULATE c1=x**p(2)$!
    $CALCULATE c2=p(1)*%LOG(x)*c1$!
    $CALCULATE OF=-p(1)*p(2)*%LOG(x)*c1$!
    $OFF OF$!
    $RECYCLE 1$!
    $FIT c1+c2-%GM$!
    $DISPLAY E$!
    $EXTRACT %PE$!
    $CALCULATE %LP=p(1)*(x**p(2)) : %FV=%LP :
        : d=((%PE-p)/p)**2 : %t=%CU(d) :
        : %t=%SQRT(%t) : p=%PE :
        : %l=%IFC(%LT(%t), 0.001), 0, 1)$!
$ENDMAC
$COMMENT 'Entrada dos dados'!
$UNITS 240$
    $DATA num vol$
    $DINPUT 14$
(>File name? a:Modelo)
    $CALCULATE lvol=%LOG(vol)$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< Tabela de dados >'!
$PRINT '=====!'
$
    $LOOK (S=1) num vol$
$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< Gráfico de dispersão dos dados >'!
$PRINT '=====!'
$
    $PLOT num vol '+ '$
$COMMENT 'Ajuste do modelo linearizado'!
    $YVAR lvol$
    $FIT :+num$
    $DISPLAY M E R C A$
$
    $VAR 2 p$
    $CALCULATE p(1)=0.20 : p(2)=1000 : %l=1$
    $YVAR vol$
    $CALCULATE %LP=p(1)*(num**p(2)) :
        : %FV=%LP$
    $WHILE %l Ajuste$
$PRINT '=====!'
$PRINT '< Cálculo da Iteração %l >'!
$PRINT '=====!'
$STOP

```

Apêndice E:

Quadro E-1a: Valores estimados de volume cilíndrico (m^3/ha) segundo o modelo linear estimado por Quadrados Mínimos(SAS) e Máx. Verossimilhança(GLIM)

Núm. de árvores (ha)	Volume Cilíndrico Estimado (m^3/ha)	
	$y1=3013.6279 x^{-0.3141}$	$y2=2447.9346 x^{-0.2969}$
819	366.460	334.076
875	358.926	327.580
900	355.764	324.852
969	347.604	317.805
1050	338.949	310.319
1150	329.401	302.050
1175	327.183	300.127
1194	325.539	298.701
1200	325.027	298.257
1250	320.886	294.664
1292	317.572	291.787
1300	316.957	291.253
1325	315.066	289.610
1425	307.947	283.421
1469	305.020	280.874
1475	304.630	280.534
1500	303.026	279.138
1550	299.921	276.433
1575	298.417	275.123
1617	295.961	272.982
1638	294.763	271.938
1657	293.698	271.009
1700	291.344	268.955
1769	287.725	265.797
1775	287.420	265.330
2250	266.790	247.478
2475	258.921	240.573
2567	255.970	237.980

Nota: y1: estimativa de quadrados mínimos

y2: estimativa de máxima verossimilhança.

Quadro E-1a: Valores estimados de volume cilíndrico (m^3/ha)
segundo o modelo não linear estimado pelos
Métodos de Gauss, Newton, Marquardt e DUD.

Núm. de árvore (ha)	Volume Cilíndrico Estimado (m^3/ha)			
	Newton	Gauss	Marquardt	DUD
819	347.255	370.703	340.723	333.724
875	341.366	364.324	335.135	332.534
900	388.888	362.065	332.783	332.029
969	332.476	355.440	326.694	330.707
1050	325.644	348.377	320.203	329.276
1150	318.073	340.544	313.002	327.663
1175	316.309	338.718	311.324	327.282
1194	315.000	337.362	310.078	326.999
1200	314.591	336.939	309.690	326.910
1225	312.918	335.207	308.097	326.547
1250	311.288	333.518	306.545	326.191
1292	308.639	330.774	304.023	325.609
1300	308.147	330.264	303.554	325.500
1325	306.632	328.695	302.112	325.166
1425	300.917	322.770	296.666	323.891
1469	298.560	320.326	294.420	323.359
1475	298.245	319.999	294.120	323.288
1500	296.952	318.658	292.886	322.995
1550	294.444	316.056	290.495	322.423
1575	293.229	314.794	289.336	322.145
1617	291.240	312.730	287.438	321.688
1638	290.270	311.723	286.513	321.463
1657	289.405	310.825	285.688	321.263
1700	287.494	308.841	283.864	320.819
1769	284.551	305.784	281.054	320.131
1775	284.302	305.526	280.816	320.072
2250	267.392	287.940	264.653	316.000
2475	260.882	281.160	258.421	314.378
2567	258.432	278.606	256.074	313.759