ESTIMABILIDADE DE FUNÇÕES PARAMÉTRICAS COM DADOS
DESBALANCEADOS ATRAVÉS DO PROC GLM DO SAS: APLICAÇÕES À
PESQUISA AGROPECUÁRIA

MARCIA MONDARDO

Dissertação apresentada à
Escola Superior de Agricultura
"Luiz de Queiroz", da
Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Mestre em
Agronomia, Área de Concentração:
Estatística e Experimentação
Agrônômica.

P I R A C I C A B A

Estado de São Paulo - Brasil

Julho - 1994

ESTIMABILIDADE DE FUNÇÕES PARAMÉTRICAS COM DADOS
DESBALANCEADOS ATRAVÉS DO PROC GLM DO SAS: APLICAÇÕES À
PESQUISA AGROPECUÁRIA

MARCIA MONDARDO

Engenheira Agrônoma

Orientador: Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

Dissertação apresentada à
Escola Superior de Agricultura
"Luiz de Queiroz", da
Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Mestre em
Agronomia, Área de Concentração:
Estatística e Experimentação
Agronômica.

P I R A C I C A B A

Estado de São Paulo - Brasil

Julho - 1994

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Livros da
Divisão de Biblioteca e Documentação - PCLQ/USP

Mondardo, Marcia

M741e Estimabilidade de funções paramétricas com dados
desbalanceados através do PROC GLM do SAS: aplicações
à pesquisa agropecuária. Piracicaba, 1994.
166p.

Diss.(Mestre) - ESALQ
Bibliografia.

1. Análise de variância 2. Estatística aplicada 3.
Modelo linear 4. Pesquisa agropecuária 1. Escola Supe
rior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba

CDD 519.535

ESTIMABILIDADE DE FUNÇÕES PARAMÉTRICAS COM DADOS
DESBALANCEADOS ATRAVÉS DO PROC GLM DO SAS: APLICAÇÕES À
PESQUISA AGROPECUÁRIA

MARCIA MONDARDO

Aprovado em: 29.08.94

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

ESALQ/USP

Prof^a. Dr^a. Maria Cristina Stolf Nogueira

ESALQ/USP

Prof. Dr. Lúcio Benedito Kroll

IB/UNESP

Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA
Orientador

Ao Mário

À Monike

Aos meus pais,

Euclides e Nelma

Dedico

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Antonio Francisco Iemma, pela orientação e apoio.

À Empresa de Pesquisa Agropecuária e Difusão de Tecnologia de Santa Catarina - EPAGRI.

À Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - EMBRAPA, pela concessão de bolsa de Mestrado.

À todos os professores, funcionários e colegas da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz".

Aos colegas da Estação Experimental de Caçador - EPAGRI.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE TABELAS	xi
RESUMO	xiv
SUMMARY.....	xvi
1. INTRODUÇÃO	01
2. REVISÃO DE LITERATURA	03
3. METODOLOGIA	35
3.1. MATRIZES INVERSAS GENERALIZADAS	35
3.1.1. Inversa Generalizada de Moore Penrose	36
3.1.2. Inversa Generalizada de Mínimos Quadrados	36
3.1.3. Inversa Condicional	37
3.1.4. Inversa Generalizada G2	37
3.2. ALGUMAS IDEIAS SOBRE MODELOS LINEARES	38
3.2.1. Modelo Superparametrizado	39
3.2.1.1. Equações Normais	39
3.2.1.2. Análise da Variância .	41
3.2.1.3. Notação $R(\cdot)$	42
3.2.2. Modelo de Médias de Caselas ...	43
3.2.2.1. Equações Normais	44
3.2.2.2. Análise da Variância .	45
3.2.3. Modelo com Restrição Paramétrica do Tipo Σ	45

3.2.3.1. Equações Normais	45
3.2.3.2. Análise da Variância .	45
3.3. ALGUMAS IDÉIAS SOBRE ESTIMAÇÃO	46
3.4. OS QUATRO TIPOS DE FUNÇÕES ESTIMÁVEIS	48
3.4.1. Forma Geral de Funções Estimáveis	48
3.4.2. Funções Estimáveis do Tipo I ..	48
3.4.3. Funções Estimáveis do Tipo II .	50
3.4.4. Funções Estimáveis do Tipo III	51
3.4.5. Funções Estimáveis do Tipo IV .	52
3.5. HIPÓTESES MAIS COMUNS SOBRE LINHAS, COLUNAS E INTERAÇÃO	54
3.5.1. Hipóteses Sobre a Interação ...	55
3.5.2. Hipóteses Mais Comuns Sobre Efeitos de Linhas	56
3.5.2.1. Hipóteses Sobre Médias Ponderadas de Linhas	56
3.5.2.2. Hipóteses Sobre Médias Ponderadas de Linhas Ajustada para Colunas	57
3.5.2.3. Hipóteses Sobre Médias Não Ponderadas de Linhas	58
3.5.2.4. Hipóteses Sobre Médias Não Ponderadas de Linhas, Segundo as	

Caselas Vazias	59
3.5.3. Hipóteses Mais Comuns Sobre	
Efeitos de Colunas	59
3.5.3.1. Hipóteses Sobre Médias	
Ponderadas de Colunas	60
3.5.3.2. Hipóteses Sobre Médias	
Ponderadas de Colunas	
Ajustadas para Linhas	61
3.5.3.3. Hipóteses Sobre Médias	
Não Ponderadas de	
Colunas	61
3.5.3.4. Hipóteses Sobre Médias	
Não Ponderadas de	
Colunas, Segundo as	
Caselas Vazias	62
3.6. COMENTÁRIOS ADICIONAIS SOBRE AS	
FUNÇÕES ESTIMÁVEIS E HIPÓTESES TIPO	
III	62
3.6.1. Outra Forma de Obtenção das	
Funções Estimáveis Tipo III ...	63
3.6.2. Um Algoritmo para Transformar	
as Hipóteses em Termos do	
Modelo Σ em Hipóteses em Termos	
do Modelo S Quando Ocorrem	
Caselas Vazias	66
3.7. PROCEDIMENTO	67

3.8. O SISTEMA SAS	68
4. DISCUSSÃO DE EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	69
4.1. 1 ^o CASO: FATORIAL 2x3 COM UMA CASELA VAZIA	69
4.1.1. Modelos Lineares	71
4.1.2. Obtenção da Forma Geral de Funções Estimáveis	72
4.1.3. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo I	75
4.1.4. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo II	84
4.1.5. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo III	90
4.1.6. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo IV	100
4.1.7. Consequências da Alteração da Ordem de Especificação do Modelo	104
4.2. 2 ^o CASO: FATORIAL 3x4 COM QUATRO CASELAS VAZIAS	110
4.2.1. Modelo Linear	111
4.2.2. Obtenção da Forma Geral de Funções Estimáveis	112
4.2.3. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo I	115
4.2.4. Obtenção das Funções Estimáveis	

Tipo II	126
4.2.5. Obtenção das Funções Estimáveis	
Tipo III	133
4.2.6. Obtenção das Funções Estimáveis	
Tipo IV	144
4.2.7. Consequências da Alteração da	
Ordem de Especificação do	
Modelo ao PROC GLM	150
5. CONCLUSÕES	156
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	159
APÊNDICE	161

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1 - Hipóteses Associadas ao Modelo de Classificação Dupla	09
Tabela 2 - Somas de Quadrados Tipo II em Termos da Notação RC)	50
Tabela 3 - Número de Observações Referentes a Cada Média de Casela	54
Tabela 4 - Número de Observações por Casela	63
Tabela 5 - Coeficientes m para a Combinação Linear f e para a Interação	65
Tabela 6 - Dados em kg de Frutos/Planta	70
Tabela 7 - Número de Observações por Casela Conforme Descrito na Tabela 6	70
Tabela 8 - Forma Geral de Funções Estimáveis para o Modelo Fatorial com Interação Aplicado aos Dados da Tabela 6	75
Tabela 9 - Funções Estimáveis Tipo I para A	77
Tabela 10 - Funções Estimáveis Tipo I para B	80
Tabela 11 - Funções Estimáveis Tipo I para AxB	83
Tabela 12 - Funções Estimáveis Tipo II para A	86
Tabela 13 - Funções Estimáveis Tipo II para B	89
Tabela 14 - Funções Estimáveis Tipo II para AxB	90
Tabela 15 - Funções Estimáveis Tipo III para A	92
Tabela 16 - Funções Estimáveis Tipo III para B	94

Tabela 17 - Coeficientes m para a Combinação Linear f e para a Interação	96
Tabela 18 - Funções Estimáveis Tipo IV para A	101
Tabela 19 - Funções Estimáveis Tipo IV para B	102
Tabela 20 - Funções Estimáveis Tipo I para B (Ordem B, A, $A \times B$)	106
Tabela 21 - Análise de Variância dos Dados da Tabela 6 Através do Modelo com Dois Fatores e Interação, para a Ordenação A, B, $A \times B$...	108
Tabela 22 - Análise de Variância dos Dados da Tabela 6 Através do Modelo com Dois Fatores e Interação, para a Ordenação B, A, $A \times B$...	109
Tabela 23 - Número de Frutos/Planta	110
Tabela 24 - Número de Observações por Casela	111
Tabela 25 - Forma Geral de Funções Estimáveis para os Dados do Exemplo da Tabela 23	115
Tabela 26 - Funções Estimáveis Tipo I para A	118
Tabela 27 - Funções Estimáveis Tipo I para B	121
Tabela 28 - Funções Estimáveis Tipo I para $A \times B$	124
Tabela 29 - Funções Estimáveis Tipo II para A	128
Tabela 30 - Funções Estimáveis Tipo II para B	132
Tabela 31 - Funções Estimáveis Tipo II para $A \times B$	133
Tabela 32 - Funções Estimáveis Tipo III para A	134
Tabela 33 - Coeficientes m para a Combinação Linear f e para a Interação	137
Tabela 34 - Funções Estimáveis Tipo III para B	140

Tabela 35 - Funções Estimáveis Tipo IV para A	145
Tabela 36 - Funções Estimáveis Tipo IV para B	148
Tabela 37 - Funções Estimáveis Tipo I para B (Ordem B, A, $A \times B$)	152
Tabela 38 - Análise de Variância dos Dados da Tabela 23 Através do Modelo com Dois Fatores e Interação, para a Ordenação A, B, $A \times B$...	154
Tabela 39 - Análise de Variância dos Dados da Tabela 23 Através do Modelo com Dois Fatores e Interação, para a Ordenação B, A, $A \times B$...	155

ESTIMABILIDADE DE FUNÇÕES PARAMÉTRICAS COM DADOS DESBALANCEADOS ATRAVÉS DO PROC GLM DO SAS: APLICAÇÕES À PESQUISA AGROPECUÁRIA

Autora: MARCIA MONDARDO

Orientador: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de alertar os pesquisadores para a complexidade da análise de dados desbalanceados com caselas vazias e orientá-los na escolha do método de análise mais adequado.

O programa computacional intitulado "Statistical Analysis Sistem" (SAS) através de seu "General Linear Models Procedure" (PROC GLM) utiliza a teoria de funções estimáveis para prover quatro tipos de somas de quadrados para dados desbalanceados.

Através de dois exemplos com diferentes padrões de caselas vazias, se mostrou passo a passo, a construção das funções estimáveis que geram os quatro tipos de somas de quadrados fornecidas pelo SAS e que são diferentes combinações lineares dos parâmetros do modelo.

Além da construção foram feitas tentativas no

sentido de interpretar o que as somas de quadrados provenientes destas funções, não raro muito complexas, pois não envolvem somente os parâmetros de interesse, estão testando.

Ao pesquisador, de posse destas informações, cabe escolher quais destas funções estimáveis são adequadas para representar a hipótese de seu interesse, podendo mesmo concluir que nenhuma delas é adequada ao seu conjunto de dados.

ESTIMABILITY OF PARAMETRICS FUNCTIONS WHIT UNBALANCED DATA THROUGH THE PROC GLM OF SAS: APLICATION TO AGRICULTURAL RESEARCH

Author: MARCIA MONDARDO

Adviser: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

SUMMARY

This study was developed with the purpose to alert researchers about the complexity of analysis of unbalanced data with missing cells, as well as to give them some orientations to choose the more adequate method.

The program named "Statistical Analysis System" (SAS), with its "General Models Procedure" (PROC GLMD, uses the theory of estimated functions in order to provide four types of sum of squares for unbalanced data.

Using two samples with different patterns of missing cells, it was shown, step by step, the construction of estimated functions that generate the four types of sum of squares which are given by SAS. They are different linear combinations of the parameters of the model. It was also tried to interpret what the sum of squares originated from this functions are testing.

The researcher needs to choose which of these functions are adequate in order to represent the hypothesis of his interest. It is possible to him to conclude that none of the functions are adequate to the data to be analyzed.

1. INTRODUÇÃO

Quando se trata de dados balanceados, as técnicas de análise de variância são amplamente conhecidas e divulgadas. Para dados desbalanceados, no entanto, isto pode não ocorrer. É comum tratarem-se tais dados usando-se extensões das técnicas conhecidas para dados balanceados ou estimação de parcelas perdidas.

Quando os dados são desbalanceados, surge a necessidade de se conhecer que hipóteses estão sendo testadas e se estas são de interesse para o pesquisador. Além disso, podem ocorrer caselas vazias, dificultando ainda mais a interpretação das verdadeiras hipóteses.

A bibliografia consultada apresenta algumas regras práticas para construção de hipóteses mais comuns bem como métodos para obtenção das somas de quadrados para testarem-se as referidas hipóteses.

O pacote computacional intitulado Statistical Analysis System (SAS), um dos mais importantes pacotes estatísticos da atualidade, fornece quatro tipos de funções estimáveis através de seu procedimento para análise de

modelos lineares (PROC GLM). Com base nessas funções estimáveis, são construídas as hipóteses associadas aos tipos I, II, III e IV de somas de quadrados, excelentes na análise de dados desbalanceados, mas praticamente desconhecidas dos pesquisadores de modo geral.

Com o intuito de orientar e esclarecer os pesquisadores da área agrônômica, usuários do PROC GLM do SAS, sobre a análise de variância de dados desbalanceados, será realizado este trabalho.

Através de exemplos, sobre os quais se aplicará a teoria disponível para obtenção das hipóteses testadas pelos quatro tipos de somas de quadrados fornecidas pelo SAS, pretende-se traduzir esta teoria numa linguagem mais simples e acessível.

Com isso, tem-se como principal objetivo o de informar os pesquisadores sobre a existência dessas hipóteses e sobre o fato de que, quando os dados são desbalanceados, suas somas de quadrados testam combinações lineares dos parâmetros que nem sempre são aquelas esperadas.

Isto posto, pretende-se oferecer condições para que o pesquisador construa e interprete as hipóteses que estão sendo testadas pelo procedimento GLM do SAS e escolha entre elas, qual a mais adequada aos propósitos de seu experimento.

2. REVISÃO DE LITERATURA

YATES (1934), publica um artigo que, segundo consta na literatura, é o primeiro que realmente propõe soluções razoáveis para o problema de estimar hipóteses com dados desbalanceados. Nesse artigo são apresentados três métodos:

- Método de médias não ponderadas: um método aproximado no sentido de que as somas de quadrados para testar linhas, colunas e interação, não tem distribuição exata de chi-quadrado.
- Método dos quadrados de médias ponderadas.
- Método do ajuste de constantes: através deste método Yates propõe uma parametrização sucessiva do modelo.

HENDERSON (1953), propõe em artigo três métodos para obtenção de somas de quadrados utilizados no estudo de componentes de variância.

OVERALL & SPIEGEL (1969), propõe três métodos de análise de dados desbalanceados. Neste artigo eles generalizam e formalizam os principais métodos apresentados nos artigos anteriores. O sistema SAS incorpora em 1975 estes métodos :

- Método do delineamento experimental.
- Método da ordenação "a priori".

SPEED & HOCKING (1976), discutem o uso da notação $RC()$ para dados desbalanceados. Embora haja somente uma notação $RC()$, ou redução nas somas de quadrados, existem, segundo os autores, duas formas distintas pelas quais $RC()$ pode ser calculado.

Uma maneira é usada por SEARLE (1971) e consiste da aplicação da notação $RC()$ ao modelo de posto incompleto (procedimento 1). A outra forma consiste em aplicar a notação $RC()$ ao modelo reparametrizado de posto completo (procedimento 2). Os autores discutem os pontos em que os dois procedimentos discordam.

Os autores consideram o modelo

$$Y = X\beta + e, \quad (1)$$

onde Y é um vetor de observações de dimensão $n \times 1$;

X é uma matriz conhecida de dimensão $n \times p$ de posto $q < p$;

β é um vetor de parâmetros de dimensão $p \times 1$;

e é um vetor de erros de dimensão $n \times 1$.

A notação $RC()$ é definida por

$$RC(\beta) = \hat{\beta}' X' Y \quad (2)$$

onde $\hat{\beta}$ é alguma solução para $X' X \hat{\beta} = X' Y$.

Se X e β são particionados como

$$[X_1; X_2] \text{ e } \begin{bmatrix} \beta_1 \\ -1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \text{ e considerando-se o modelo}$$

5.

$$Y = X_2 \beta_2 + e, \quad (3)$$

então

$$R(\beta_2) = \hat{\beta}_2' X_2' Y \quad (4)$$

onde $\hat{\beta}_2$ é alguma solução para $X_2' X_2 \hat{\beta}_2 = X_2' Y$.

Define-se:

$$R(\beta_1 | \beta_2) = R(\beta_1, \beta_2) - R(\beta_2). \quad (5)$$

Neste contexto, a aplicação da notação $R(\)$ ao modelo de posto incompleto (Procedimento 1) consiste em:

- assumir (1) o modelo de posto incompleto; nesse caso ocorre (2). Restrições não estimáveis podem ser aplicadas para obter $\hat{\beta}$, mas os resultados são independentes da escolha destas restrições;

- assumir (3) e (4).

A aplicação da notação $R(\)$ ao modelo reparametrizado de posto completo (Procedimento 2) ocorre da seguinte forma:

- escolher um conjunto de restrições não estimáveis e reparametrizar o modelo de posto incompleto para obter

$$Y = X^* \beta^* + e; \quad (6)$$

obtem-se então:

$$R(\beta^*) = (\hat{\beta}^*)' (X^*)' Y \quad (7)$$

onde $\hat{\beta}^* = [(X^*)' X^*]^{-1} (X^*)' Y$;

A seguir assumir $\beta^* = \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ -\frac{1}{\beta_2^*} \end{bmatrix} e$

$$Y = X_2^* \beta_2^* + e; \quad (8)$$

$$R(\beta_2^*) = (\beta_2^*)' (X_2^*)' Y, \quad (9)$$

onde $\hat{\beta}_2^* = [(X_2^*)' X_2^*]^{-1} (X_2^*)' Y$.

Embora $R(\beta) = R(\beta^*)$, $R(\beta_2)$ não é necessariamente igual a $R(\beta_2^*)$. Neste caso o resultado pode depender do conjunto de restrições não estimáveis usadas para completar o posto do modelo.

Os autores apresentam uma comparação entre os dois procedimentos:

- No procedimento 2, $R(\beta_2^*)$ não é sempre definido e se o é, pode não ser único
- Se

$$R(\mu^*, \alpha^*), R(\mu^*, \beta^*) \text{ e } R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*)$$

são todos definidos,

então

$$R(\mu, \alpha) = R(\mu^*, \alpha^*), R(\mu, \beta) = R(\mu^*, \beta^*)$$

$$\text{e } R(\mu, \alpha, \beta) = R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*).$$

$$\text{Todavia } R(\mu, \alpha, \gamma) \neq R(\mu^*, \alpha^*, \gamma^*)$$

$$\text{e } R(\mu, \beta, \gamma) \neq R(\mu^*, \beta^*, \gamma^*).$$

- Em ambos os procedimentos 1 e 2 as hipóteses testadas não são claras. Ambos $R(\beta_2 | \beta_1)$ e $R(\beta_2^* | \beta_1^*)$ são usados para representar as somas de quadrados a serem usadas na tabela de análise de variância para testar algumas hipóteses sobre os parâmetros. Todavia, as hipóteses testadas podem não ser de todo óbvias.

- As reduções $RC()$ não indicam a natureza das hipóteses testadas.

$$RC(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = RC(\beta|\mu, \alpha, \gamma) = 0, \text{ para o procedimento 1.}$$

Já se no procedimento 2 forem usadas restrições do tipo "soma igual a zero"

$$RC(\alpha^*|\mu^*, \beta^*, \gamma^*) \text{ e } RC(\beta^*|\mu^*, \alpha^*, \gamma^*)$$

correspondem as somas de quadrados sugeridas por YATES (1934).

Com isto os autores concluem que tratando-se de dados desbalanceados o usuário de pacotes computacionais poderá interpretar de maneira errada as somas de quadrados por eles fornecidas se tomarem a notação $RC()$ no seu valor aparente.

A hipótese geral tal como $H:\beta=\gamma$ não pode ser testada usando a notação $RC()$ a qual torna a análise de dados bastante limitada.

Segundo SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978), para análise de modelos lineares de experimentos com dados balanceados existe um consenso geral sobre a análise de variância apropriada. A análise de dados desbalanceados é geralmente baseada numa extensão dos métodos balanceados. As várias formas de realizar análises desbalanceadas podem levar a diferentes resultados. O propósito destes autores é rever os métodos de análise mais comumente citados na literatura e relacionar as somas de quadrados associadas as hipóteses lineares a serem testadas.

Um critério natural para a seleção do método de análise parece ser a apropriação da hipótese a ser testada. Outros fatores como a facilidade de cálculos e a ortogonalidade das formas quadráticas não podem ser boas justificativas se a hipótese testada não tem significado prático.

Os autores incorporam dois métodos de HENDERSON (1953) ao rol de métodos utilizados em análise de variância para dados desbalanceados:

- Método 1 de Henderson deriva do método do ajuste de constante de Yates.
- Método 3 de Henderson é conhecido como método da ordenação "a priori".

Apresentam também os métodos usados pelo SAS:

- Método I SAS 76: é similar ao método do ajuste de constantes no qual H_2 e H_7 (apresentadas na Tabela 1) são as hipóteses para efeitos principais. Consiste do método de ordenação a priori de OVERALL & SPIEGEL (1969).
- Método II SAS 76: é o mais comum dos procedimentos, baseado no método do ajuste de constantes no qual as somas de quadrados ajustadas, $R(\alpha|\mu, \beta)$ e $R(\beta|\mu, \alpha)$ são usadas para testar efeitos principais. Este é o método do delineamento experimental de OVERALL & SPIEGEL (1969) no qual as hipóteses H_3 e H_7 (apresentadas na Tabela 1) são testadas.
- Métodos III e IV SAS 76: estes dois métodos são equivalentes ao método dos quadrados ponderados de médias ou

mínimos quadrados completos de OVERALL & SPIEGEL (1969) no qual as hipóteses dos efeitos principais são H_1 e H_5 (apresentadas na Tabela 1).

SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978), também citam as hipóteses mais comuns sobre linhas, colunas e interação em termos do modelo

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk} \quad (10)$$

Estas são apresentadas Tabela 1.

Tabela 1 - Hipóteses Associadas ao Modelo de Classificação Dupla.

Efeitos	
Linhas	$H_1: \bar{\mu}_{i.} = \bar{\mu}_{i'.$ $H_2: \sum_j n_{ij} \mu_{ij} / n_{i.} = \sum_j n_{i'.j} \mu_{i'.j} / n_{i'.$ $H_3: \sum_j n_{ij} \mu_{ij} = \sum_i \sum_j (n_{ij} n_{i'.j} \mu_{i'.j}) / n_{.j}$ $H_4: \mu_{i1} = \mu_{i'.1}$
Colunas	$H_5: \bar{\mu}_{.j} = \bar{\mu}_{.j'}$ $H_6: \sum_i n_{ij} \mu_{ij} / n_{.j} = \sum_i n_{ij'} \mu_{ij'} / n_{.j'}$ $H_7: \sum_i n_{ij} \mu_{ij} = \sum_j \sum_i (n_{ij} n_{ij'} \mu_{ij'}) / n_{i.}$ $H_8: \mu_{1j} = \mu_{1j'}$
Interação	$H_9: \mu_{ij} - \mu_{i'.j} - \mu_{ij'} + \mu_{i'j'} = 0$

As hipóteses H_1 , H_2 , H_3 e H_4 referem-se ao efeito principal de A, suas somas de quadrados são usadas para mensurar o efeito do fator A. As hipóteses H_1 , H_2 e H_3 coincidem se n_{ij} igual a n para todo i, j . A hipótese H_1 é fácil de interpretar desde que não haja diferença entre os níveis do fator A quando considerados os níveis de B. As hipóteses H_2 e H_3 não são fáceis de interpretar e representam comparações entre médias ponderadas com os pesos sendo funções das frequências de caselas. A hipótese H_4 é distinta das três primeiras e considera somente as comparações entre médias de caselas da primeira coluna. As hipóteses H_5 , H_6 , H_7 e H_8 são correspondentes à H_1 , H_2 , H_3 e H_4 , respectivamente, associadas ao fator B. H_9 é a hipótese da interação e é comum a todos os métodos, com n_{ij} maior que zero. A suposição de n_{ij} maior que zero não é essencial para todos os métodos. Por exemplo, o método de ajuste de constantes requer apenas que o delineamento seja conexo. As hipóteses são válidas considerando-se n_{ij} igual a zero, quando não há observação na casela (i, j) . Todavia, a hipótese associada com o método dos quadrados de médias ponderadas só é válida se n_{ij} maior que zero, para todo i, j .

Segundo os autores alguns programas empregam uma modificação no procedimento RC), fixando γ_{ij} igual a zero se n_{ij} igual a zero. Isto facilita o cálculos das somas de quadrados mas não fornece indicação de quais hipóteses estão sendo testadas. As somas de quadrados obtidas através

do SAS 76 tipos III e IV não necessariamente coincidem quando há caselas vazias. O tipo III também emprega a modificação acima e o tipo IV não o faz.

URQUHART & WEEKS (1978), afirmam que com dados incompletos raramente se conhece o modelo linear apropriado. O modelo de médias é uma alternativa robusta a assumir-se um modelo superparametrizado inapropriado. Os autores apresentam um experimento com dois fatores: raças (representadas por β_i) e dietas (representadas por γ_j) de acordo com o modelo

$$y_{ijk} = \mu + \beta_i + \gamma_j + e_{ijk} \quad (11)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

$$k = 0, 1, \dots, n_{ij}$$

e consideram seis padrões de frequências de caselas para este mesmo experimento, que consistem de um conjunto aditivo de médias de caselas e cinco conjuntos não aditivos.

Através da obtenção da estimativa da diferença entre raças um e três, isto é, $\widehat{(\beta_1 - \beta_3)}$, para todos estes casos eles observam que:

- O padrão de frequências de caselas (padrão n) não influencia a $\widehat{(\beta_1 - \beta_3)}$ se ocorre aditividade;
- Da mesma forma, $\widehat{(\beta_1 - \beta_3)}$ não muda entre os conjuntos de médias se o padrão n é balanceado.
- Por outro lado, se o modelo é inadequado, o padrão n e as médias de caselas, ambas influenciam a $\widehat{(\beta_1 - \beta_3)}$.

A questão é desejar-se um estimador de variância mínima que não estime algo de interesse se um modelo incorreto for assumido, ou um estimador que estime algo de interesse sobre um modelo no qual suposições são facilmente defendidas, mas talvez com uma variância maior. Confiar em assumir-se um modelo linear de posto incompleto pode levar a problemas. Os parâmetros μ_i do modelo de médias tem uma relação clara com o contexto experimental e as médias amostrais correspondentes proporcionam estimativas para eles. Além disso, alguma função linear dos μ_i pode ser também estimada. Neste caso para obter-se a diferença entre as médias, utilizar-se-á a diferença entre as médias da linha um e as médias da linha três.

Em resumo, os autores encorajam os pesquisadores e estatísticos a abordarem a análise de dados desbalanceados definindo e estudando combinações lineares das médias de caselas de interesse.

BURDICK & HERR (1980), afirmam que até então, a questão da análise de dados de classificação dupla desbalanceada não foi respondida de forma satisfatória. Pelo contrário, esta questão ainda provoca controvérsias entre os estatísticos. Seu propósito não é o de solucionar estas controvérsias, mas sim, discutir as respostas sugeridas.

Desenvolvem, através da notação geométrica, sete hipóteses associadas à linhas, colunas e interação. H_{R1} (H_{C1}) é a hipótese de que médias de linhas (colunas) são

iguais; HR2 (HC2) é a hipótese de não existência de efeito de linhas (colunas) não ajustadas; HR3 (HC3) é a hipótese de não existência de efeitos de linhas (colunas) ajustadas para colunas (linhas); HRC é a hipótese de não existência do efeito de interação entre linhas e colunas.

Destacam duas abordagens para a análise de dados desbalanceados de classificação dupla: a comparação de modelos e a abordagem paramétrica, que se concentra na interpretação paramétrica das hipóteses de efeitos principais. A desvantagem da abordagem paramétrica é a não ortogonalidade das hipóteses, gerando somas de quadrados que somadas não resultam na soma de quadrados dos parâmetros (HR1, HC1 e HRC). A mais séria consequência da não ortogonalidade é a possibilidade de que a detecção de efeitos significativos pode não ser observada.

A comparação de modelos consiste na comparação do "modelo completo" com o "modelo reduzido" o qual resultaria se a hipótese fosse verdadeira, isto é, sob H_0 . Seguidores da comparação de modelos neste caso, defendem HR2, HR3, HC2 e HC3 como hipóteses de efeitos principais. A desvantagem deste método é que a interpretação paramétrica de HR2, HR3, HC2 e HC3 depende do tamanho das caselas.

Um modelo quase aditivo é obtido justificando-se a pressuposição de não interação. Para este modelo eles enunciam o seguinte teorema:

"Num modelo quase aditivo de classificação dupla a hipótese

sobre linhas ajustadas para colunas é verdadeira se e somente se as médias de linhas são iguais. Se esta hipótese é falsa, então na ausência de interação o teste estatístico de linhas ajustadas para colunas tem o mesmo poder de um simples teste estatístico para médias de linhas."

FREUND (1980), menciona que a grande disponibilidade de computadores tem permitido a aplicação da metodologia de modelos lineares na análise de dados desbalanceados e que os programas estatísticos, que usam estas metodologias, são apropriados para resolver os problemas onde há caselas vazias, porém nunca se esquecendo da limitação existente neste tipo de solução.

A ocorrência de caselas vazias tem sido um problema muito discutido. Metodologias específicas tem sido desenvolvidas para certos casos, no entanto, nenhuma é universalmente aceita.

Segundo FREUND (1980), o procedimento GLM do SAS usa a metodologia de funções estimáveis, provendo um mecanismo para verificação das bases das estimativas obtidas. O procedimento também provê métodos pelos quais diferentes resultados podem ser obtidos ilustrando o fato de que não há somente uma resposta correta para o caso de caselas vazias. As funções estimáveis são uma classe especial de funções dos parâmetros. O procedimento obtém uma solução através da inversa generalizada : $\hat{\gamma} = (X'X)^{-}X'y$.

As funções estimáveis são obtidas construindo-se um vetor

de constantes 1 tal que $1'\gamma$ é unicamente estimável.

A análise de dados com frequências desiguais de caselas é afetada pelo fato de que estimativas de alguns parâmetros podem conter outros parâmetros sem interesse. O PROC GLM reconhece este dilema e proporciona informações sobre os quatro tipos de funções estimáveis correspondendo à quatro "filosofias" para produzir somas de quadrados. As funções estimáveis tipos III e IV produzem diferentes resultados quando há caselas vazias. O conjunto de estimativas à escolher depende do seu sentido com relação a estrutura dos dados. As funções estimáveis tipo IV podem produzir diferentes estimativas e somas de quadrados se os dados forem reorganizados.

A localização das caselas vazias não afeta a estimativa e soma de quadrados tipo III.

Os autores concluem que os resultados obtidos nas análises de dados com caselas vazias são bastante confusos, o que dificulta a obtenção de funções usuais aos pesquisadores. Isto é coerente pois a presença de caselas vazias deixa uma lacuna nos dados, impossibilitando a estimativa dos parâmetros desejados. Não há como sustentar que o PROC GLM tenha a solução correta para estas situações, todavia, ele provê uma informação sobre a natureza das estimativas possíveis e cabe ao pesquisador decidir entre os resultados qual tem aplicação prática.

GOODNIGHT (1980), diz que usando o conceito

de estimabilidade, testes de hipóteses em modelos lineares fixos com muitos fatores são desenvolvidos sem recorrer às "pressuposições usuais". Ele define três tipos de funções estimáveis, um tipo é caracterizado pelo número desigual de observações por casela, outro pela presença de caselas vazias e um terceiro caso quando ocorre algum grau de confundimento para algum modelo linear de efeitos fixos

Segundo o mesmo autor, no campo dos modelos lineares aparece a notação $R(\cdot)$ que calcula a redução em soma de quadrados devido a um efeito específico fixando todos os efeitos exceto aqueles que contém o efeito especificado sem reparametrizar o modelo. Por outro lado a notação $R^*(\cdot)$ reparametriza o modelo usando a pressuposição usual e calcula a redução de somas de quadrados devido a um efeito específico fixando todos os outros efeitos.

O autor apresenta o conceito de estimabilidade dado pelo manual do SAS e diz que alguns possíveis conjuntos geradores para uma função linear estimável dos parâmetros (L) são:

- X ;
- $X'X$;
- As matrizes $X'X$ Forward Doolittle ou Cholesky;
- $(X'X)^{-1}X'X$;
- A forma canônica de Hermite de $X'X$;
- Alguma matriz produzida por operações nas linhas em algumas das mencionadas acima.

Um número infinito de funções estimáveis L pode ser construído dos conjuntos geradores acima. Para um determinado modelo um conjunto de funções estimáveis L pode ser gerado, um L para cada efeito no modelo.

De acordo com o autor três tipos de funções estimáveis podem ser descritas. Tipos I e II são para o campo RC e tipo III é para o campo $R^*(C)$. A forma por ele apresentada para obtenção das funções estimáveis tipo I de um determinado modelo, consiste em: calcular-se a matriz de Forward Doolittle para $X'X$, e tomar-se o L para cada efeito, como as linhas não nulas associadas com este efeito.

As funções estimáveis L tipo I produzem formas quadráticas ortogonais que, devido a estrutura dos erros, são independentes. Todavia, as hipóteses tipo I não são invariantes com respeito a ordem dos efeitos no modelo e para delineamentos desbalanceados, cada hipótese envolve parâmetros do efeito testado acrescido de todos os outros parâmetros que o seguem na especificação do modelo. Além disso, as hipóteses tipo I são dependentes das frequências de caselas.

Segundo GOODNIGHT (1980), a construção das funções estimáveis tipo II se baseia na seguinte definição de efeito contido:

"Um efeito E_2 é dito conter um efeito E_1 se todas as colunas da matriz X associadas com E_1 podem ser representadas como combinações lineares das colunas associadas com E_2 ."

No modelo sem restrição nos parâmetros, se E_2 contém E_1 , então $R(E_1|E_2)=0$. É claro então, que as funções estimáveis L tipo II para cada efeito envolvem somente os parâmetros deste efeito e do efeito que o contém. A correta ordenação do modelo deve ser feita e a matriz de Forward Doolittle para $X'X$ calculada. As funções estimáveis L tipo II para um efeito E_1 são as linhas da Doolittle associadas com o modelo que foi rearranjado colocando-se todos os efeitos que não contém E_1 antes de E_1 .

GOODNIGHT (1980) acrescenta que, a hipótese tipo III para delineamentos sem caselas vazias corresponde as funções estimáveis usadas no caso balanceado. Ao contrário das tipo I e II, as funções estimáveis tipo III não dependem da frequências de caselas. Elas são definidas da seguinte forma: um conjunto de funções estimáveis L, um para cada efeito no modelo, são do tipo III se cada L é uma hipótese de posto máximo envolvendo somente os parâmetros do efeito em questão e parâmetros de efeitos que contém estes e cada L é ortogonal a todas as funções estimáveis L de efeitos que contém o efeito em questão.

HOCKING, SPEED & COLEMAN (1980), dizem que a escolha da análise para um modelo de efeitos fixos com dados desbalanceados é ilimitada. O usuário da maioria dos pacotes estatísticos pode obter várias tabelas de análise de variância especificando diferentes opções e/ou mudando a ordem dos termos no modelo. Isto leva os usuários a ficarem

confusos sobre qual conjunto de somas de quadrados é apropriada. Neste artigo os autores se propõem a prover um critério para escolha da hipótese a ser testada no caso desbalanceado e apresentam um algoritmo para obtenção da hipótese desejada. Oferecem a base teórica para testar-se as referidas hipóteses: se o modelo é caracterizado em termos do vetor de parâmetros μ e uma hipótese na forma $H\mu$ igual a zero é proposta, então o teste estatístico é dado por

$$F_{(q,n-p)} = \frac{SQ(H)}{qs^2} \quad (12)$$

onde q é o posto de H , s^2 é o quadrado médio residual com $n-p$ graus de liberdade e a soma de quadrados do numerador $SQ(H)$ é dada por

$$SQ(H) = (Hp)' \left[H V(p) H' / \sigma^2 \right]^{-1} Hp \quad (13)$$

HOCKING, SPEED & COLEMAN (1980), colocam que, em parte dos programas computacionais a matriz de hipóteses H não é especificada e a $SQ(H)$ não é calculada diretamente. Não haveria objeção à aproximação se a hipótese efetiva fosse conhecida e razoável. O SAS gera a matriz de hipóteses usando um algoritmo computacional. Isto é ao menos um passo para a decisão correta.

Segundo os mesmos autores, alguns procedimentos computacionais produzem hipóteses que dependem da frequência de caselas e são difíceis de interpretar. Outros procedem como se estivessem construindo um modelo

considerando submodelos de crescente complexidade através do qual testam as hipóteses. Aqui, os autores alertam para o fato de que estas somas de quadrados são frequentemente usadas para testes com efeitos principais em situações nas quais o modelo inclui a interação.

No caso de todas as caselas não nulas, estes autores recomendam que se use as mesmas hipóteses que seriam testadas se todas as frequências de caselas fossem as mesmas. Quando ocorrem caselas vazias eles propõe um procedimento para determinar hipóteses razoáveis a serem testadas. O procedimento é baseado na premissa de que o pesquisador tem em mente as hipóteses que são apropriadas se todas as caselas são completas.

HOCKING, SPEED & COLEMAN (1980), partem do modelo

$$Y = W\mu + e \quad (14)$$

sujeito a $G\mu=0$

onde μ é o vetor de dimensão p de médias de caselas das populações incluídas no estudo;

W é a matriz de contagem tal que $W'W$ é diagonal com o i -ésimo elemento da diagonal igual ao número de observações na i -ésima população;

G é uma matriz $r \times p$ de posto r , tal que $G\mu=0$ represente um conjunto de relações lineares entre médias de caselas.

Particionam o vetor μ em μ_m e μ_o correspondendo

respectivamente as médias de caselas para caselas vazias e observadas. Obtém-se as hipóteses efetivas construindo-se as hipóteses para o caso desbalanceado através das hipóteses que seriam testadas se o experimento fosse balanceado, colocando-se as médias de caselas que não podem ser estimadas, em função das que podem ser estimadas. Os autores consideram que a aproximação feita neste método é consistente e baseada em princípios fundamentais, tem mérito considerável sobre aproximações baseadas somente em critérios computacionais.

GOODNIGHT (1980), diz que usando o conceito de estimabilidade, testes de hipóteses em modelos lineares fixos com muitos fatores são desenvolvidos sem recorrer às "pressuposições usuais". Ele define três tipos de funções estimáveis, um tipo é caracterizado pelo número desigual de observações por casela, outro pela presença de caselas vazias e um terceiro tipo quando ocorre algum grau de confundimento para algum modelo linear de efeitos fixos.

SEARLE (1980), ressalva que o PROC GLM do SAS inclui em sua saída quatro tipos de funções estimáveis que possuem um componente arbitrário (representado pela letra L) nos seus coeficientes. Ele mostra como tais funções estimáveis arbitrárias são derivadas da conhecida expressão geral para hipóteses testadas pela tradicional estatística F, na análise de variância efetuada para dados balanceados.

Segundo ele os programas de computadores

oferecem cálculos da estatística F facilmente obtidos, sem formulação da hipótese a ser testada anteriormente. As hipóteses testadas por estas estatísticas F podem não ter uso ou interesse.

SEARLE (1980) acrescenta ainda que as somas de quadrados intituladas tipos I, II e III fornecidas pelo PROC GLM do SAS são interpretadas em termos das funções estimáveis que são bases para as hipóteses testadas pelas somas de quadrados. Entretanto, estas funções estimáveis são mais informativas que os valores R^2 . Como estas somas de quadrados são facilmente obtidas pelos usuários do programa, se faz necessária uma descrição do seu significado. Esta descrição pode ser feita em termos das expressões explícitas para as hipóteses testadas, usando funções lineares dos parâmetros do modelo com coeficientes que são funções dos números de observações por casela ou em termos das funções estimáveis tendo coeficientes que envolvam valores arbitrários.

Segundo o mesmo autor, as funções estimáveis tipos I, II, III e IV fornecidas pelo SAS consistem de funções de valores L ao lado de cada parâmetro do modelo. Multiplicando-se estes valores L pelos seus parâmetros correspondentes e somando-se os produtos, obtém-se uma função estimável f . Correspondendo a f há uma soma de quadrados $SS(f)$. Segundo SEARLE (1980), diz-se que " f explica $SS(f)$ ".

O autor apresenta as seguintes somas de quadrados $SS(f)$, explicadas desta forma:

- Tipo I: valores RC sequenciais;
- Tipo II: valores RC para cada fator ajustado para todos os outros que não o contém;
- Tipo III: valores RC para cada fator ajustado para todos os outros.

Ao contrário dos tipos I, II e III o procedimento tipo IV não pretende proporcionar funções estimáveis que expliquem alguma soma de quadrados pré definida. Ele fixa uma hipótese e calcula a estatística F para testá-la.

SEARLE (1980), descreve para modelos com e sem interação, com caselas vazias, um procedimento para se obter os contrastes para cada efeito e os quatro tipos de funções estimáveis. Através deste critério se irá seguir a sequência lógica de primeiro se construir uma hipótese de interesse e então testá-la. A hipótese de interesse pode ser testada em termos das funções estimáveis do SAS.

FREUND (1980), ressalva que o procedimento GLM do SAS (SAS Institute, 1979) usa a metodologia de funções estimáveis para se verificarem as bases para as estimativas obtidas.

MILLIKEN & JOHNSON (1984), afirmam que quando todas as combinações de tratamentos são observadas, as hipóteses tipo III são as mesmas testadas quando os dados são balanceados. Quando alguma combinação de tratamentos é

perdida, todavia, tais hipóteses não podem ser testadas pois elas envolvem parâmetros sobre os quais não se tem informação. Ambas as hipóteses tipos I e II para efeitos principais dependem do número de observações por casela . Se há ao menos uma observação em uma determinada casela, então essa média de casela é estimável. O desenvolvimento de hipóteses tipo III não depende do tamanho das caselas mas somente de quais caselas são observadas. Eles não discutem a construção de hipóteses tipo III para o caso com caselas vazias, mas afirmam ser a tipo III a pior hipótese a considerar-se nesta situação porque eles não vêem uma forma razoável de interpretá-la.

Segundo esses autores, as hipóteses tipo IV são construídas de tal forma que os coeficientes de médias de caselas sejam balanceados e por isso as hipóteses resultantes são interpretáveis. Basicamente, para uma estrutura de tratamentos de classificação dupla, a hipótese tipo IV compara os níveis de um tratamento sobre um ou mais níveis comuns do outro. O PROC GLM do SAS gera algumas hipóteses tipo IV que podem ser interpretadas, mas uma interpretação apropriada não pode ser feita sem primeiro examinar-se as funções estimáveis tipo IV, para ver que hipóteses são geradas e testadas. Isto é, não há uma única interpretação apropriada para todos os conjuntos de dados com combinações ou tratamentos perdidos. Reordenando os tratamentos pode-se obter diferentes hipóteses tipo IV e

portanto, diferentes somas de quadrados e testes F. Então, a análise tipo IV obtida depende de como os tratamentos são chamados ou como eles são numerados.

SEARLE (1987), menciona que vários pacotes computacionais podem, atualmente, realizar cálculos de modelos lineares para grandes conjuntos de dados, incluindo aqueles com número desigual de observações nas subclasses (dados desbalanceados). Interpretar as saídas dos pacotes para estes dados de maneira análoga às saídas provenientes de dados de experimentos bem executados cujos delineamentos são bem conhecidos, pode levar a erros. Ele define dados desbalanceados como os dados nos quais o número de observações nas caselas não é igual, podendo incluir caselas sem observação. Ao contrário do desbalanceamento planejado, aqui as caselas vazias ocorrem de maneira não planejada.

O autor afirma que a classe de dados desbalanceados tem duas subdivisões. Uma, quando todas as caselas contêm dados; outra, quando existe alguma casela vazia. Denomina-as dados com todas as caselas completas e dados com algumas caselas vazias, respectivamente. Com relação aos métodos de análise utilizados pelos pacotes computacionais o autor afirma que, primeiramente, para dados desbalanceados não é oferecido um método único de análise, que não apresente ambiguidade. Além disso, diversos métodos estão disponíveis, métodos estes que não são facilmente interpretados como os métodos para dados balanceados; não

são bem conhecidos nem amplamente divulgados. Em segundo lugar, como consequência de se terem diversos métodos de análise, nem todos os pacotes estatísticos fazem necessariamente as mesmas análises sobre um mesmo conjunto de dados desbalanceados. Consequentemente, no contexto de hipóteses testáveis e obtenção de somas de quadrados em uma análise de variância padrão, eles fornecem, para um mesmo conjunto de dados, uma variedade de somas de quadrados. O problema é identificar qual delas é proveitosa.

Um importante resultado para o modelo de classificação dupla sem interação, é que quando os dados são conexos, todas as médias de caselas são estimáveis. Ao contrário, no modelo com interação, somente são estimáveis as médias de caselas que não são vazias, seu melhor estimador linear não viesado (BLUE: Best Linear Unbiased Estimator) é dado por

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{y}_{ij} \quad , \text{ para } n_{ij} \neq 0. \quad (15)$$

Com relação aos quatro tipos de somas de quadrados, SEARLE (1987), afirma que o objetivo do SAS em prover os diferentes tipos de somas de quadrados é originado da filosofia fundamental da análise da variância. Os quatro conjuntos de somas de quadrados chamadas tipos I, II, III e IV e caracterizadas, respectivamente como sequencial, cada um após todos os outros, Σ restrições e hipóteses. Igualdade entre os tipos existem sob as seguintes circunstâncias:

I = II = III = IV para dados balanceados;

II = III = IV para modelos sem interação;

III = IV para dados com todas as caselas completas.

O autor apresenta uma breve discussão sobre o quatro tipos:

- Tipo I: a sequência com que os fatores do modelo são especificados à rotina, na entrada dos dados determina a sequência das somas de quadrados tipo I. A sequência de saída das somas de quadrados corresponde precisamente a sequência de entrada dos fatores, devendo fatores de efeitos principais preceder interações e também, fatores que têm outros hierárquicos com eles preceder os fatores hierárquicos. Então quando fatores são linhas, colunas e interação e são identificados na ordem A, B, e A*B, respectivamente, as somas de quadrados tipo I são

$$R(\alpha|\mu), R(\beta|\mu, \alpha) \text{ e } R(\alpha\beta|\mu, \alpha, \beta).$$

- Tipo II: as somas de quadrados chamadas tipo II são similares a algumas do tipo I. Elas são do tipo descrito como $R(\text{cada fator}|\text{todos os outros})$. Para a classificação dupla as somas de quadrados tipo II são $R(\alpha|\mu, \beta)$, $R(\beta|\mu, \alpha)$ e $R(\alpha\beta|\mu, \alpha, \beta)$. Na verdade $R(\text{um fator}|\text{todos os outros apropriados})$ é mais adequado, onde "apropriado" significa que esta soma de quadrados é para algum fator ajustado para todos os outros fatores exceto interações que envolvem este fator e fatores hierárquicos com este fator. Por exemplo, uma soma de quadrados tipo II devido a A é uma soma de quadrados ajustada para todos os outros fatores e interação,

exceto para interações envolvendo A e para fatores hierárquicos com A.

- Tipo III: estas são as somas de quadrados para modelos com restrição Σ . Equivale a:

$$R(\dot{\alpha}|\dot{\mu},\dot{\beta},\dot{\gamma}) \quad \text{e} \quad R(\dot{\alpha}|\dot{\mu},\dot{\beta},\dot{\gamma}) \neq R(\alpha|\mu,\beta,\gamma)=0.$$

Além disso, para dados com todas as caselas completas, as somas de quadrados tipo III são idênticas as da análise de quadrados de médias ponderadas.

- Tipo IV: somas de quadrados tipos I, II e III são derivadas do ajuste de um modelo e diferentes submodelos deste. Mas as somas de quadrados tipo IV são para testar hipóteses que são determinadas pela própria rotina GLM do SAS. A hipótese selecionada depende do padrão de caselas completas, e então a estatística F está de acordo com a prática estatística de arranjar uma hipótese e testá-la. Um exemplo é que a soma de quadrados tipo IV para linhas é a soma de quadrados do numerador para uma hipótese que consiste de contrastes entre médias de caselas para caselas completas que estão na mesma coluna e começando com aquelas que estão na última linha. Tais hipóteses dependem de quais caselas possuem dados e quais níveis do fator colunas são definidos na última linha. Em geral, hipóteses determinadas desta maneira não são necessariamente de interesse. Além disso, as somas de quadrados tipo IV para linhas, por exemplo, podem diferir de uma sequência de linhas para outra, para o mesmo conjunto de dados. Então, o que é

chamado de soma de quadrados tipo IV para linhas não é único, para um determinado conjunto de dados com algumas caselas vazias e as hipóteses correspondentes também não são únicas.

As saídas do GLM do SAS incluem uma forma especial de funções estimáveis para cada um dos tipos I, II, III e IV. A utilidade destas funções estimáveis é que cada uma proporciona uma base para o usuário ser capaz de expor as hipóteses associadas a cada soma de quadrados.

O mesmo autor apresenta algumas considerações sobre estimabilidade. O BLUE de uma função estimável $q'\beta$ é

$$q'\hat{\beta} = q'\beta^0 \quad (16)$$

sendo β^0 qualquer vetor solução das equações normais.

SEARLE (1987), afirma que o SAS GLM usa uma inversa generalizada G , de $X'X$ correspondente ao vetor solução. G é sempre simétrica e reflexiva e é chamada $G2$ na saída, para indicar que esta satisfaz as duas primeiras condições de Moore-Penrose. Além disso, a G sempre corresponde à restrições de que alguns elementos na solução são zeros. $X'X$ e G podem ser obtidas nas saídas. Obter G é essencial para o conhecimento de qual vetor solução é estimado e torna hábil deduzir os erros padrão das estimativas.

Ainda segundo SEARLE(1987) os valores numéricos do vetor solução são dados por

$$\beta^0 = GX'y \text{ das equações normais } X'X\beta^0 = X'y$$

e ele pode não ser o BLUE de β (que em modelos superparametrizados, pode não existir).

$$E(\beta^0) = H\beta \text{ para } H = (X'X)^{-1}X' \quad (17)$$

Portanto, BLUE de $H\beta = \beta^0$

Através de $H\beta$ se obtém as funções paramétricas para as quais β^0 é BLUE.

A matriz de variâncias e covariâncias de β^0 é dada por

$$\text{var}(\beta^0) = GX'XG'\sigma^2 = G\sigma^2 \quad (18)$$

esta última igualdade porque uma G simétrica e reflexiva é usada.

$$\text{Então } \hat{\text{var}}(\beta^0) = G\sigma^2.$$

O Manual do SAS, Capítulo 9 (1990), apresenta o conceito de "Estimabilidade", com o qual o pacote irá trabalhar na construção dos quatro tipos de funções estimáveis que ele oferece:

Para modelos lineares tais como

$$Y = X B + \epsilon \quad (19)$$

que têm $E(Y) = X B$, o objetivo inicial é estimar ou testar os elementos de B ou alguma combinação linear desses elementos. Isto é feito calculando combinações lineares dos Y 's observados. Para estimar uma função linear dos B 's, digamos LB , deve-se ser capaz de encontrar uma combinação linear dos Y 's que tem como valor esperado LB . Temos,

portanto, a seguinte definição, dada por RAO¹, citado pelo Manual do SAS, Capítulo 9 (1990):

LB é estimável se e somente se existe uma combinação linear dos elementos do vetor de observações Y cujo valor esperado é LB.

Qualquer combinação linear dos elementos do vetor de observações Y, por exemplo $K Y$, terá como valor esperado, $E(KY) = K X B$. Assim, o valor esperado de qualquer combinação linear dos elementos do vetor de observações Y é igual aquela mesma combinação linear das linhas de X multiplicadas por B. Portanto:

LB é estimável se e somente se uma combinação linear das linhas de X que é igual a L pode ser encontrada.

Assim, segundo o Manual do SAS, Capítulo 9 (1990), as linhas de X formam um conjunto gerador do qual um L pode ser construído. Como X pode ser construída das linhas de $X'X$, isto é, $X = [X(X'X)^{-1}(X'X)]$, as linhas de $X'X$ formam também um conjunto gerador do qual todas as funções estimáveis L podem ser construídos. Similarmente, as linhas de $(X'X)^{-1}X'X$ formam também um conjunto gerador para L.

Portanto, se L é gerado como uma combinação linear das linhas de X, $X'X$ ou $(X'X)^{-1}X'X$, LB é estimável.

¹RAO, C.R. On the linear combination of observations and the general theory of least squares. Sankhyā, 7(2): 237-56, 1945.

Uma vez que um L , de posto linha completo tenha sido formado de um conjunto gerador, LB pode ser estimado por Lb , onde $b = (X'X)^{-1}X'Y$. Da teoria geral de modelos lineares, Lb é o melhor estimador imparcial de LB .

De acordo com o Manual do SAS, Capítulo 9 (1990), surge a questão: com muitos conjuntos geradores disponíveis, qual o melhor para representar L ? Naturalmente, um conjunto gerador contendo o mínimo de linhas (de posto linha completo) e um máximo de elementos nulos é desejável. Por isso, o PROC GLM calcula uma inversa generalizada ($G2$) de $X'X$ tal que $(X'X)^{G2} X'X$ contém usualmente numerosos zeros e tal que as linhas não nulas são linearmente independentes. O GLM usa as linhas não nulas de $(X'X)^{G2} X'X$ para representar L .

IE MMA (1993), apresenta as hipóteses mais comuns sobre linhas, colunas e interação. Em geral, para tratar efeitos de linhas (Fator A) existem quatro hipóteses mais comuns:

- hipóteses sobre médias ponderadas de linhas;
- hipóteses sobre médias ponderadas de linhas ajustadas para colunas;
- hipóteses sobre médias não ponderadas de linhas;
- hipóteses sobre médias não ponderadas de linhas, segundo as caselas vazias.

De modo análogo, para testar os efeitos de colunas:

- hipóteses sobre médias ponderadas de colunas;
- hipóteses sobre médias ponderadas de colunas ajustadas para linhas;
- hipóteses sobre médias não ponderadas de colunas;
- hipóteses sobre médias não ponderadas de colunas, segundo as caselas vazias.

A ocorrência de caselas vazias pode conduzir a graves problemas em relação à estimação de funções paramétricas e, portanto, à testabilidade dessas funções. Estes problemas se refletem sobre a interpretação das verdadeiras hipóteses testadas pelas somas de quadrados fornecidas pelos pacotes estatísticos, ocasionando sérios problemas tanto aos estatísticos como aos pesquisadores de ciências aplicadas.

Entre outros, IEMMA (1993), cita alguns dos problemas mais importantes ocasionados pela presença de caselas vazias:

- Podem ocorrer desconexões;
- O teste da interação, em geral, testa que somente algumas interações são nulas;
- As hipóteses sobre médias não ponderadas de linhas e colunas, em geral, têm uma interpretação bastante diferente daquelas com caselas ocupadas
- A interpretação da hipótese depende da posição e do número de caselas vazias;
- Os graus de liberdade da interação devem ser

escolhidos com cautela.

IEMMA, PALM & CLAUSTRIAUX (1993) apresentam uma forma simples para obtenção do projetor associado à hipótese H_0 para qualquer nível de desbalanceamento.

Os autores se baseiam na definição de funções estimáveis dada por RAO (1945) já apresentada e obtém a soma de quadrados da hipótese através de

$$SQH_0 = y'a (a'a)^{-1} a'y = y' P_{H_0} y \quad (20)$$

onde y é o vetor de observações;

a é o vetor de coeficientes da combinação linear dos componentes do vetor de observações y ;

e $a(a'a)^{-1}a' = P_{H_0}$ é o projetor ortogonal associado a H_0 .

3. METODOLOGIA

Inicialmente serão apresentadas algumas idéias básicas sobre matrizes inversas generalizadas e sobre modelos lineares superparametrizados, de médias de caselas e com restrição Σ , essenciais para o entendimento da metodologia utilizada neste trabalho.

3.1. MATRIZES INVERSAS GENERALIZADAS

As matrizes inversas generalizadas são importantes no estudo de modelos lineares, no tocante à estimação. Neste contexto, elas serão usadas exaustivamente nos algoritmos de obtenção das funções estimáveis.

Entre outros, serão citados aqui quatro tipos de interesse:

● Inversa Generalizada de Moore-Penrose	A^+
● Inversa Generalizada de Mínimos Quadrados	A^{ℓ}
● Inversa Generalizada Condicional	A^{-}
● Inversa Generalizada G2	A^{G2}

3.1.1. Inversa Generalizada de Moore-Penrose

Dada uma matriz $A_{m \times n}$ de posto k , a matriz $A_{n \times m}^+$, de posto k , que satisfaz as quatro condições seguintes é definida como **inversa generalizada de Moore-Penrose** de A :

- a) $A A^+ A = A$
- b) $A^+ A A^+ = A^+$
- c) $AA^+ = (AA^+)'$ (simétrica)
- d) $A^+A = (A^+A)'$ (simétrica)

Uma regra para sua obtenção é dada por:

$$A^+ = C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1}B' \quad (21)$$

onde B é uma matriz de posto coluna completo e C é de posto linha completo, tais que $A = BC$.

Pode-se verificar que A^+ assim definida existe sempre e é única.

Além disso AA^+ e A^+A são simétricas e idempotentes.

3.1.2. Inversa Generalizada de Mínimos Quadrados

Dada uma matriz $A_{m \times n}$, toda matriz $A_{n \times m}^l$ que satisfaz as duas condições seguintes, é definida como **inversa generalizada de mínimos quadrados** de A :

- a) $AA^l A = A$
- b) $AA^l = (AA^l)'$ (simétrica)

Toda matriz do tipo $A^l = (A'A)^{-1}A'$ é uma

inversa de mínimos quadrados de A.

3.1.3. Inversa Condicional

Dada uma matriz $A_{m \times n}$, então toda matriz $A_{n \times m}^-$ tal que $A A^- A = A$ é dita inversa generalizada condicional de A.

Uma regra de obtenção é dada pelo Algoritmo de SEARLE (1971).

Dada a matriz $A_{m \times n}$, de posto K:

- a) tomar qualquer matriz não singular, M, de ordem K;
- b) obter $(M^{-1})'$;
- c) substituir em A, os elementos de M por seus correspondentes em $(M^{-1})'$;
- d) fazer todos os outros elementos iguais a zero;
- e) transpor a matriz resultante;
- f) o resultado é uma inversa condicional de A.

3.1.4. Inversa Generalizada G2

Por ser considerada um caso especial das inversas condicionais, a matriz inversa G2 também atende a propriedade $A A^{G2} A = A$.

A regra para sua obtenção pode ser considerada uma adaptação do algoritmo de SEARLE (1971), dada a seguir.

Para a matriz $X_{m \times n}$, de posto K:

- a) Obter a matriz X_1 que é constituída das colunas linearmente independentes da matriz X , tomadas sequencialmente;
- b) obter $(X_1'X_1)^{-1}$;
- c) substituir em $X'X$ os elementos de $(X_1'X_1)$ pelos seus correspondentes em $(X_1'X_1)^{-1}$;
- d) fazer todos os outros elementos iguais a zero;
- e) o resultado obtido é a inversa G2 para a matriz $(X'X)$.

Enquanto a inversa condicional não é única, a inversa G2 o é.

3.2. ALGUMAS IDÉIAS SOBRE MODELOS LINEARES

Para os objetivos deste trabalho serão adotados modelos do tipo

$$y = X\theta + e \quad (22)$$

onde:

y_1 é um vetor de realizações de variáveis aleatórias;

X é uma matriz conhecida (matriz do delineamento) de posto

$$K \leq \min\{n, p\};$$

θ é um vetor de parâmetros desconhecidos;

e_1 é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis, tal que $e \sim (0, I\sigma^2)$

que é definido como modelo linear de Gaus-Markov, (G.M.).

Serão apresentados aqui, algumas das formas assumidas pelo modelo linear G.M. para delineamentos experimentais mais usados no dia a dia dos pesquisadores,

tanto em situações teóricas como na obtenção dos resultados fornecidos pelos pacotes tradicionais. A escolha das três formas apresentadas a seguir está relacionada com os objetivos deste trabalho.

Se considerará, conforme IEMMA (1993), o Modelo Superparametrizado (Modelo S) que é excelente para a interpretação da notação RC), o Modelo de Médias de Caselas (Modelo M) que pode simplificar a interpretação das hipóteses e o Modelo Σ que é essencial para interpretação de certos tipos de somas de quadrados em modelos de posto completo.

3.2.1. Modelo Superparametrizado

Segundo Searle (1987) um modelo é dito superparametrizado se ele exhibe explicitamente um parâmetro para cada efeito dos fatores envolvidos. Será dito Modelo S e denotado por

$$y = X\theta + e \quad \text{como em (22)}$$

Segundo o interesse do pesquisador o Modelo S pode assumir diferentes caracterizações.

3.2.1.1. Equações Normais

O vetor e é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis. Sua estimação depende da caracterização

assumida e da solução do sistema de equações lineares $y = X\theta$, que é inconsistente. Uma solução para ele pode ser obtida através do sistema de equações normais $X'X\theta = X'y$, sempre consistente. Qualquer solução exata, θ^0 , do sistema de equações normais $X'X\theta = X'y$ é solução aproximada de mínimos quadrados para $y = X\theta$ inconsistente. Isto leva ao fato de que, qualquer que seja a solução θ^0 do sistema de equações normais, o vetor $\hat{y} = X\theta^0$ invariante, é a aproximação de mínimos quadrados para o vetor y das observações.

Sendo a matriz X de posto coluna incompleto, então $X'X$ é ~~não~~ singular e o sistema de equações normais é indeterminado. Suas soluções exatas podem ser obtidas, entre outras, por $\theta^0 = (X'X)^G X'y$ e são soluções aproximadas de mínimos quadrados para $y = X\theta$ inconsistente. Aqui $(X'X)^G$ é uma inversa generalizada qualquer de $X'X$.

Se X não tem posto coluna completo os componentes do vetor θ não são individualmente estimáveis.

Segundo RAO¹, citado por IEMMA (1993), "uma função linear paramétrica $\lambda'\theta$ é estimável no modelo linear de Gauss-Markov, se e somente se $\lambda \in C(X')$ ".

Em termos práticos isto significa que:

- a) $E(y) = X\theta$ e então $X\theta$ é estimável;
- b) combinações lineares de funções estimáveis são também

¹ RAO, C.R. On the linear combination of observations and the general theory of least squares. *Sankhyā*, 7(3): 237-56, 1945.

estimáveis.

Além disso, se $\lambda' \theta$ é estimável então seu BLUE $\hat{\lambda' \theta}$ é dado de modo único por $\hat{\lambda' \theta} = \lambda' \theta^0$, onde θ^0 é qualquer solução das equações normais. (Teorema de Gauss-Markov).

3.2.1.2. Análise de Variância

$\hat{y} = X \theta^0$ é a aproximação de mínimos quadrados para o vetor de observações y , invariante para qualquer θ^0 solução das equações normais.

$$\hat{y} = X (X'X)^{-1} X' y = Py \quad (23)$$

onde

$$P = X (X'X)^{-1} X' = X X^+ = X X^t \quad (24)$$

é o projetor ortogonal de y sobre o espaço gerado pelas colunas de X , $C(X)$, cuja representação gráfica é dada a seguir:

Figura 1. Projeção ortogonal de y sobre $C(X)$.

onde

$$y = \hat{y} + \hat{e} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\hat{y} \in C(X),$$

$$\hat{e} \in C^\perp(X)$$

$$e \mathbb{R}^n = C(X) \oplus C^\perp(X)$$

$I-P$ é o projetor ortogonal de y sobre o complemento ortogonal do espaço coluna de X , $C^\perp(X)$.

Dada a ortogonalidade pode-se utilizar o Teorema de Pitágoras e obter a decomposição ortogonal clássica da análise de variância:

$$\|y\|^2 = \|\hat{y}\|^2 + \|\hat{e}\|^2 \quad (25)$$

onde

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= y'y = \sum y^2 = \text{SQ Total} \\ \|\hat{y}\|^2 &= \hat{y}'\hat{y} = \sum \hat{y}^2 = y'Py = \theta^0'X'y = \text{SQ Parâmetros} \\ \|\hat{e}\|^2 &= \hat{e}'\hat{e} = \sum \hat{e}^2 = y'(I-P)y = y'y - \theta^0'X'y = \text{SQ Resíduo} \end{aligned}$$

Por meio de outras partições convenientes sobre X e θ , pode se obter outras regras para determinar hipóteses sobre funções lineares paramétricas de interesse.

Um procedimento alternativo, útil para estes propósitos é a obtenção das somas de quadrados das hipóteses. Assim, a soma de quadrados para a hipótese

$$H_0: B'\theta = 0$$

onde $B'\theta$ é estimável e B' tem posto coluna completo é dada, conforme IEMMA (1987), por:

$$SQH_0 = (B'\theta^0)'[B'(X'X)^{-1}B]^{-1}(B'\theta^0) \quad (26)$$

3.2.1.3. Notação $R(\theta)$

Tomando-se o modelo dado por (22), a notação $R(\theta)$ é definida por

$$R(\theta) = \theta^0'X'y \quad (27)$$

onde θ° é uma solução para $X'X\theta = X'y$.

Se X e θ são particionadas da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{respectivamente, e se considerarmos}$$

o modelo

$$y = X_2\theta_2 + e, \quad (28)$$

então

$$R(\theta_2) = \theta_2^{\circ\prime} X_2' y \quad (29)$$

onde θ_2° é uma solução para $X_2'X_2\theta_2 = X_2'y$.

Além disso, define-se

$$R(\theta_1 | \theta_2) = R(\theta) - R(\theta_2) \quad (30)$$

3.2.2. Modelo de Médias de Caselas

Os modelos superparametrizados, descritos no item anterior, são parte integrante da história dos modelos lineares e tem sido de grande valia para os pesquisadores das ciências aplicadas pois eles mostram explicitamente os parâmetros μ , α , β e γ , sobre os quais estão em geral, os reais anseios de tais pesquisadores. No entanto, eles apresentam alguns inconvenientes como, por exemplo, o de possuir mais parâmetros que médias de caselas para estimá-los. Este problema pode ser agravado no caso de caselas vazias como ocorre aqui.

Para os propósitos deste trabalho, o modelo de médias apresenta ainda a vantagem de descrever hipóteses

com grande simplicidade, em relação ao Modelo S.

Segundo SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978), define-se o Modelo de Médias de Caselas ou Modelo M como o modelo linear

$$y = W \mu + e \quad (31)$$

onde:

$W_{n \times k}$ é uma matriz conhecida,

$\mu_{k \times 1}$ é um vetor de médias das populações das quais são retiradas as amostras aleatórias que compõe as caselas e,

$y_{n \times 1}$ e $e_{n \times 1}$ são como no modelo linear de Gauss Markov.

3.2.2.1. Equações Normais

O sistema de equações normais $W'W\mu = W'y$ é em geral, muito mais simples que $X'X\theta = X'y$ do Modelo S. Se W tem posto coluna completo, $W'W$ é positiva definida e o sistema tem solução única. Neste contexto, a solução exata $\hat{\mu} = (W'W)^{-1}W'y$, que é solução aproximada para o sistema inconsistente $y = W\mu$, coincide com o estimador de mínimos quadrados para μ . Assim, o BLUE de μ_{ij} é dado por $\hat{\mu}_{ij} = \bar{y}_{ij}$, isto é, a média da casela (i,j) .

Naturalmente

$$\widehat{\lambda' \mu} = \lambda' \hat{\mu} \quad (\text{Teorema Gauss-Markov}) \quad (32)$$

3.2.2.2. Análise de Variância

A aproximação de mínimos quadrados para o vetor de observações y é dado por $\hat{y} = W\hat{\mu} = X\hat{\theta}^o$.

Os outros aspectos da análise de variância são como no Modelo S.

3.2.3. Modelo com Restrição Paramétrica do Tipo Σ

O Modelo Σ é um modelo linear superparametrizado, com restrições paramétricas do tipo "soma igual a zero". Será representado por:

$$y = Z\dot{\theta} + e \quad (33)$$

3.2.3.1. Equações Normais

De modo análogo aos modelos precedentes temos

$$Z'Z\dot{\theta} = Z'y \quad (34)$$

com solução única, pois Z tem posto coluna completo.

Assim,

$$\dot{\theta}^o = (Z'Z)^{-1}Z'y \quad (35)$$

3.2.3.2. Análise de Variância

Para os objetivos deste trabalho, a importância do Modelo Σ está na obtenção da soma de quadrados para um parâmetro ajustado para todos os outros,

por exemplo, considerando um modelo com dois fatores e interação, tem-se:

$$R(\alpha|\mu, \beta, \gamma), \quad R(\beta|\mu, \alpha, \gamma), \quad R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$$

em lugar do ajuste sequencial.

Para este caso, será aplicado aqui o processo da inversa de parte da inversa, de SEARLE (1971) que facilita a obtenção das somas de quadrados ajustadas.

3.3. ALGUMAS IDÉIAS SOBRE ESTIMAÇÃO

O pacote SAS, segundo o Manual do SAS, capítulo 9 (1990), se baseia em alguns conceitos de estimabilidade para construir os quatro tipos de funções estimáveis oferecidas pelo seu procedimento GLM.

Partindo-se de modelos lineares, tais como

$$y = X\theta + e, \text{ já apresentados em (22)}$$

que têm $E(y) = X\theta$, o objetivo inicial é estimar os elementos de θ ou alguma combinação linear de seus elementos.

Isto é feito calculando-se combinações lineares dos componentes do vetor de observações y . Para estimar-se uma combinação linear dos componentes do vetor θ , $L\theta$, deve-se ser capaz de encontrar uma combinação linear dos componentes do vetor y que tem como valor esperado $L\theta$. Tem-se portanto, a seguinte definição:

$L\theta$ é estimável se e somente se existe uma combinação linear dos componentes do vetor y cujo valor esperado é $L\theta$. *

Qualquer combinação linear das observações,

y, por exemplo, Ky , terá como valor esperado, $E(Ky) = KX\theta$. Assim, o valor esperado de qualquer combinação linear dos componentes do vetor y é igual a mesma combinação linear das linhas de X multiplicadas por θ .

Portanto:

$L\theta$ é estimável se e somente se uma combinação linear das linhas de X que é igual a L pode ser encontrada.

Assim, as linhas de X formam um conjunto gerador do qual um L pode ser construído. Como X pode ser construída das linhas de $X'X$, isto é, $X = [X(X'X)^{-1}(X'X)]$, as linhas de $X'X$ formam também um conjunto gerador do qual funções estimáveis L podem ser construídas. Similarmente as linhas de $(X'X)^{-1}X'X$ formam também um conjunto gerador para L.

Portanto, se L é gerado como uma combinação linear de X, $X'X$ ou $(X'X)^{-1}X'X$, $L\theta$ é estimável.

Uma vez que um L, de posto linha completo tenha sido formado de um conjunto gerador, $L\theta$ pode ser estimado por $L\theta^\circ$, onde $\theta^\circ = (X'X)^{-1}X'y$. Da teoria geral de modelos lineares, $L\theta^\circ$ é o melhor estimador imparcial de $L\theta$.

Com muitos conjuntos geradores disponíveis a questão é: qual o melhor para representar L? Naturalmente, um conjunto gerador contendo o mínimo de linhas (de posto linha completo) e um máximo de elementos nulos é desejável.

Por isso, a PROC GLM opta por calcular uma inversa generalizada ($G2$) de $X'X$ tal que $(X'X)^{G2}X'X$ contém numerosos zeros e que suas linhas não nulas são linearmente

independentes. O GLM usa as linhas não nulas de $(X'X)^{G2}X'X$ para representar L.

3.4. OS QUATRO TIPOS DE FUNÇÕES ESTIMÁVEIS

Será apresentado aqui um resumo das informações que o Manual do SAS, Capítulo 9 (1990), fornece sobre cada tipo de funções estimáveis de que a PROC GLM dispõe que servirá de base para o estudo presente.

3.4.1. Forma Geral de Funções Estimáveis

O PROC GLM constrói uma forma geral para as funções estimáveis através de $(X'X)^{G2}X'X$ usando suas linhas não nulas para representar L.

A forma geral de funções estimáveis envolve todos os parâmetros do modelo e a cada linha não nula, linearmente independente, de $(X'X)^{G2}X'X$ é associado um símbolo L. O número de símbolos L representa o posto máximo da hipótese associada.

3.4.2. Funções Estimáveis do Tipo I

As SQ tipo I são dependentes da ordem do modelo, cada efeito é ajustado somente para os efeitos precedentes no modelo.

As funções estimáveis do tipo I são obtidas fazendo-se a devida partição na matriz X , de acordo com os parâmetros envolvidos no modelo, e com a ordem em que são apresentados e calculando-se:

$$G_1 = (X_1'X_1 \mid X_1'X_2 \mid X_1'X_9) \quad (36)$$

$$G_2 = (\emptyset \mid X_2'M_1X_2 \mid X_2'M_1X_9) \quad (37)$$

$$G_9 = (\emptyset \mid \emptyset \mid X_9'M_2X_9) \quad (38)$$

$$M_1 = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \quad (39)$$

$$M_2 = M_1 - M_1X_2(X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1 \quad (40)$$

No procedimento GLM, as funções estimáveis tipo I, impressas quando a opção E_1 é requerida são:

$$G_1^* = (X_1'X_1)^{-1}G_1 \quad (41)$$

$$G_2^* = (X_2'M_1X_2)^{-1}G_2 \quad (42)$$

$$G_9^* = (X_9'M_2X_9)^{-1}G_9 \quad (43)$$

G_1^* , G_2^* e G_9^* geram funções estimáveis do tipo

I. Atribuindo-se valores arbitrários aos símbolos L que aparecem nas funções estimáveis, obtém-se hipóteses tipo I.

As hipóteses tipo I são consideradas adequadas para os seguintes modelos:

- modelos de análise de variância balanceados especificados em sequência própria (por exemplo, interação não precedendo efeitos principais);
- modelos hierárquicos (especificados em sequência apropriada);
- modelos de regressão polinomial.

3.4.3. Funções Estimáveis Tipo II

As SQ tipo II correspondem à notação $RC \mid$ em que cada efeito é ajustado para todos os outros possíveis.

Para efeitos principais, digamos, (A, B e C como variáveis de classificação), as SQ tipo II representadas pela notação $RC \mid$ estão apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 - Somas de Quadrados Tipo II em Termos da Notação $RC \mid$

Efeito	SQ Tipo II
A	$RC(A B,C)$
B	$RC(B A,C)$
C	$RC(C A,B)$

Para modelos que envolvam interações (que serão considerados neste trabalho), não é possível obter um teste de hipóteses para um efeito principal livre de parâmetros de efeito do nível superior com os quais o efeito está envolvido.

As funções estimáveis tipo II para um efeito F_1 tem um L da seguinte forma:

- a) todas as colunas de L associadas com efeitos não contendo F_1 , (exceto F_1), serão formadas por zeros;
- b) a submatriz de L associada com o efeito F_1 será:

$$(X_1' M X_1)^{-1} (X_1' M X_1);$$

onde

$$M = I - X_0(X_0'X_0)^{-1}X_0'$$

X_0 são as colunas de X cujos efeitos associados não contém F_1 ;

X_1 corresponde as colunas de X associadas com F_1 ;

c) cada uma das submatrizes restantes de L associadas com um efeito F_2 que contém F_1 será:

$$(X_1'M X_1)^{-1}(X_1'M X_2);$$

onde

X_2 corresponde as colunas de X associadas com um efeito F_2 que contém F_1 .

Da mesma forma, atribuindo-se valores arbitrários aos símbolos L correspondentes a cada linha linearmente independente da matriz geradora L , obtém-se as hipóteses tipo II.

Assim, as SQ tipo II são apropriadas para:

- qualquer modelo balanceado;
- qualquer modelo de efeitos principais;
- qualquer modelo de regressão simples;
- um efeito não contido em qualquer outro efeito (não importando o modelo).

3.4.4. Funções Estimáveis Tipo III

A filosofia que norteia as hipóteses tipos III e IV está baseada no fato de que os testes de hipóteses feitos para qualquer efeito seriam os mesmos para todos os delineamentos com a mesma forma geral de funções estimáveis.

O SAS usa o Modelo Σ , apresentado anteriormente, para obter as funções estimáveis tipo III, ajustando os parâmetros deste modelo para todos os demais.

As funções estimáveis tipo III são construídas trabalhando-se com a forma geral de funções estimáveis. Os seguintes passos são considerados na obtenção de uma função para um efeito F_1 :

- a) para cada efeito no modelo, exceto F_1 e aqueles efeitos que contém F_1 , igualar os coeficientes na forma geral de funções estimáveis a zero. Se F_1 não está contido em qualquer outro efeito, este passo define a hipótese tipo III. Se F_1 está contido em outro efeito, seguir para o segundo passo;
- b) se necessário, criar símbolos novos e igualá-los a expressão composta no bloco F_1 a fim de obter a forma mais simples para os coeficientes de F_1 ;
- c) igualar todos os coeficientes simbólicos fora do bloco F_1 a uma função linear dos símbolos no bloco F_1 a fim de fazer a hipótese de F_1 ortogonal as hipóteses associadas com os efeitos que contém F_1 .

3.4.5. Funções Estimáveis do Tipo IV

As funções estimáveis tipo IV são similares as do tipo III, quando não existem caselas vazias. Elas não são construídas com base na notação RC), simplesmente consideram um subconjunto dos dados onde não ocorrem caselas

vazias.

Se existem caselas vazias, as SQ tipo IV podem não ser únicas pois dependem da posição e do número de caselas vazias.

De um modo geral, pode-se interpretar as hipóteses tipo IV como hipóteses sobre contrastes entre médias de caselas que estão na mesma coluna (ou linha).

O conceito básico para se construir a hipótese tipo IV é que os coeficientes de qualquer efeito, F_1 por exemplo, são distribuídos equitativamente através dos efeitos de nível superior que contém F_1 . Quando ocorrem caselas vazias, esta mesma idéia deve ser seguida, tomando-se cuidado com a forma como o conceito distributivo é aplicado.

A construção de funções estimáveis tipo IV começa com a construção das hipóteses tipo III. Isto é, para um efeito F_1 , igualar a zero todos os coeficientes na forma geral que não pertencem à F_1 ou à qualquer outro efeito contendo F_1 . Se F_1 não está contido em qualquer outro efeito, então as funções tipo IV (e tipos II e III) terá sido encontrada. Se F_1 está contido em outros efeitos então distribuir os coeficientes associados a F_1 entre os coeficientes fora do bloco F_1 .

Neste contexto, conforme será visto adiante, as somas de quadrados resultantes têm as seguintes características:

a) se os dados são balanceados:

$$SQ \text{ Tipo I} = SQ \text{ Tipo II} = SQ \text{ Tipo III} = SQ \text{ Tipo IV}$$

b) se todas as caselsa são ocupadas:

$$SQ \text{ Tipo III} = SQ \text{ Tipo IV}$$

c) se o modelo não tem interação:

$$SQ \text{ Tipo II} = SQ \text{ Tipo III} = SQ \text{ Tipo IV}$$

3.5. HIPÓTESES MAIS COMUNS SOBRE LINHAS, COLUNAS E INTERAÇÃO

Aqui, serão apresentadas as hipóteses sobre linhas, colunas e interação decorrentes das funções estimáveis fornecidas pelo SAS. Será tratado aqui um modelo com interação e caselas vazias pois a sua presença complica a estruturação das hipóteses.

Estas hipóteses serão apresentadas em termos do Modelo M para efeito de simplificação e baseadas na estrutura de dados apresentados na Tabela 3, com duas linhas, três colunas e a casela correspondente à μ_{23} vazia.

Tabela 3 - Número de Observações Referentes a Cada Média de Casela

$\mu_{11}(2)$	$\mu_{12}(1)$	$\mu_{13}(2)$
$\mu_{21}(2)$	$\mu_{22}(3)$	-

3.5.1. Hipóteses Sobre a Interação

Como é apresentado por IEMMA (1993), se não temos caselas vazias, então, para "a" níveis do fator A (linhas) e "b" níveis do fator B (colunas), tem-se $1/4 ab(a-1)(b-1)$ interações possíveis, entre as quais $(a-1)(b-1)$ são linearmente independentes. Agora, quando existem caselas vazias, existem menos que $1/4 ab(a-1)(b-1)$ interações que podem ser estimadas e, pode ocorrer que menos de $(a-1)(b-1)$ sejam linearmente independentes, modificando o número de graus de liberdade da interação.

Considerando-se o modelo $y_{ij} = \mu_{ij} + e_{ijk}$, cada componente da interação é dado por

$$\Delta_{ij,i'j'} = \mu_{ij} - \mu_{i'j} - \mu_{ij'} + \mu_{i'j'} \quad (44)$$

Assim, se não há caselas vazias, com $a=2$ e $b=3$, existem 3 interações estimáveis (Δ) entre as quais duas são linearmente independentes. Para o caso do exemplo estas regras não se aplicam, pois há uma casela vazia. A média μ_{23} não é estimável no modelo com interação e a única interação estimável tem seu BLUE dado por

$$\overbrace{\mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22}} = \bar{y}_{11.} - \bar{y}_{12.} - \bar{y}_{21.} + \bar{y}_{22.} \quad (45)$$

levando ao fato de que, nesse caso, existe só um grau de liberdade para interação. Observa-se aqui uma diferença fundamental entre o caso com todas as caselas ocupadas e o caso com caselas vazias: no primeiro a hipótese sobre interação testa se todas as interações são nulas, no segundo

testa se algumas determinadas interações são nulas.

Segundo IEMMA (1993), se existem caselas vazias, o teste para interação não deve ser um critério para escolha do modelo com ou sem interação. Esta escolha poderá ser baseada, digamos, apenas na experiência do pesquisador.

Neste caso, tem-se

$$H_0^{(7)} : \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22} = 0$$

que é diferente da hipótese de que todas as interações sejam nulas. Será visto adiante que

$$SQ H_0^{(7)} = R(\gamma | \mu, \alpha, \beta) = R(\gamma | \mu, \alpha, \beta)$$

3.5.2. Hipóteses Mais Comuns Sobre Efeitos de Linhas

Serão descritos agora, quatro tipos de hipóteses sobre efeitos de linhas para a estrutura de dados apresentada.

3.5.2.1. Hipóteses Sobre Médias Ponderadas de Linhas

Considerando o modelo de médias de caselas e o exemplo apresentado, uma hipótese sobre médias ponderadas de linhas é dada por:

$$H_0^{(1)} : \frac{2 \mu_{11} + \mu_{12} + 2 \mu_{13}}{5} = \frac{2 \mu_{21} + 3 \mu_{22}}{5}$$

A hipótese sobre médias ponderadas de linhas equivale a hipótese tipo I apresentada no item 3.4.2 e em termos da Notação RC) sua soma de quadrados equivale à

$$SQ H_o^{(4)} = R(\alpha | \mu)$$

3.5.2.2. Hipóteses Sobre Médias Ponderadas de Linhas Ajustadas para Colunas

A forma geral da hipótese é do tipo:

$$H_o^{(2)}: \sum_i n_{ij} \mu_{ij} = \sum_i \sum_j \frac{n_{ij} n_{i..} \mu_{ij}}{n_{.j}} \quad (46)$$

que é de difícil interpretação.

Um modo prático para descrevê-la pode ser obtido usando $H_o^{(4)}$, da seguinte forma:

- tomar os "lados esquerdos" de $H_o^{(4)}$ como os "lados esquerdos" da nova hipótese;
- os "lados direitos" da expressão podem ser obtidos substituindo-se na expressão do lado esquerdo as médias das caselas μ_{ij} pelas respectivas médias ponderadas de colunas. Assim, as duas hipóteses equivalentes para o modelo em questão são:

$$H_o^{(2)}: \frac{2 \mu_{11} + \mu_{12} + 2 \mu_{13}}{5} = \frac{2 \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + 2 \bar{c}_3}{5}$$

ou de forma equivalente

$$H_o^{(2)}: \frac{2 \mu_{11} + 3 \mu_{22}}{5} = \frac{2 \bar{c}_1 + 3 \bar{c}_2}{5}$$

onde

$$\bar{c}_1 = \frac{2 \mu_{11} + 2 \mu_{21}}{4} ; \quad \bar{c}_2 = \frac{\mu_{12} + 3 \mu_{22}}{4} ; \quad \bar{c}_3 = \mu_{13}$$

são as médias ponderadas das colunas.

A hipótese sobre médias ponderadas de linhas ajustadas para colunas equivale à hipótese tipo II, apresentada no item 3.4.3 e em termos da notação $R()$, tem-se

$$SQ H_o^{(2)} = R(\alpha | \mu, \beta)$$

3.5.2.3. Hipóteses Sobre Médias Não Ponderadas de Linhas

Neste caso, a ocorrência de caselas vazias irá interferir na interpretação das hipóteses que estão sendo testadas com base em $R(\alpha | \mu, \beta, \gamma)$, pois esta hipótese é equivalente a tipo III apresentada no item 3.4.4.

A hipótese sobre médias não ponderadas de linhas, para o exemplo em questão, é a seguinte:

$$H_o^{(3)}: \frac{\mu_{11} + \mu_{12}}{2} = \frac{\mu_{21} + \mu_{22}}{2}$$

☞

Observa-se que quando ocorrem caselas vazias

a soma de quadrados dada por $R(\alpha|\mu,\beta,\gamma)$ se refere a uma hipótese sobre médias ponderadas de linhas "nas colunas completas".

3.5.2.4. Hipóteses Sobre Médias Não Ponderadas de Linhas, Segundo as Caselas Vazias

São hipóteses sobre contrastes entre médias de caselas que estão na mesma coluna, começando pela última linha. Correspondem às hipóteses tipo IV fornecidas pelo SAS.

Para o exemplo em questão, uma hipótese deste tipo é dada por

$$H_0^{(B)}: \mu_{21} + \mu_{22} = \mu_{11} + \mu_{12}$$

Se alterarmos a posição das linhas em que estão dispostos os dados, se irá obter outra hipótese.

Além disso, a soma de quadrados devido a $H_0^{(B)}$ não tem relação com a notação RC) como as demais.

3.5.3. Hipóteses Mais Comuns Sobre Efeitos de Colunas

Tendo em vista ainda a estrutura de dados do exemplo e o Modelo M, serão apresentadas as hipóteses mais comuns sobre efeitos de colunas.

3.5.3.1. Hipóteses Sobre Médias Ponderadas de Colunas

Para colunas, a hipótese será composta por duas linhas, pois tem-se três colunas à comparar e portanto, dois graus de liberdade. Para construção desta hipótese, se irá escolher duas médias ponderadas de colunas entre as três possíveis do exemplo. Desse modo, ela poderá ter aparentemente várias formas, que são, no entanto, equivalentes.

Para o exemplo em questão, busca-se testar

$$H_0^{(4)}: \frac{2 \mu_{11} + 2 \mu_{21}}{4} = \frac{\mu_{12} + 3 \mu_{22}}{4} = \mu_{13}$$

Uma hipótese sobre médias ponderadas de colunas pode ser obtida comparando-se a primeira coluna com as outras duas, da seguinte forma

$$H_0^{(4)}: \left\{ \begin{array}{l} \frac{2 \mu_{11} + 2 \mu_{21}}{4} = \frac{\mu_{12} + 3 \mu_{22}}{4} \\ \frac{2 \mu_{11} + 2 \mu_{21}}{4} = \mu_{13} \end{array} \right.$$

Em termos da notação $R(\cdot)$, sua soma de quadrados é dada por

$$SQ H_0^{(4)} = R(\beta | \mu)$$

3.5.3.2. Hipótese Sobre Médias Ponderadas de Colunas Ajustadas para Linhas

Seja, entre outras equivalentes:

$$H_0^{(5)}: \left\{ \begin{array}{l} \frac{2 \mu_{11} + 2 \mu_{21}}{4} = \frac{2 \bar{\ell}_1 + 2 \bar{\ell}_2}{4} \\ \frac{\mu_{12} + 3 \mu_{22}}{4} = \frac{\bar{\ell}_1 + 3 \bar{\ell}_2}{4} \end{array} \right.$$

onde:

$$\bar{\ell}_1 = \frac{2 \mu_{11} + \mu_{12} + 2 \mu_{13}}{5} \quad \text{e} \quad \bar{\ell}_2 = \frac{2 \mu_{21} + 3 \mu_{22}}{5}$$

Esta hipótese se equivale a hipótese tipo II fornecida pelo SAS e sua soma de quadrados corresponde, em termos da Notação RC) a:

$$SQ H_0^{(5)} = R(\beta | \mu, \alpha)$$

3.5.3.3. Hipótese Sobre Médias Não Ponderadas de Colunas

Aqui, como no caso das linhas, há problemas quando existem caselas vazias.

Para o exemplo em questão, uma hipótese com dois graus de liberdade é:

$$H_o^{(6)}: \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_{11} + \mu_{21}}{2} = \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{2} \\ \frac{\mu_{11} + \mu_{12}}{2} = \mu_{13} \end{array} \right.$$

Esta hipótese corresponde à hipótese tipo III para colunas e portanto, conforme o item 3.4.4:

$$SQ H_o^{(6)} = R(\beta | \mu, \alpha, \gamma)$$

3.5.3.4. Hipóteses Sobre Médias Não Ponderadas de Colunas, Segundo as Caselas Vazias

São hipóteses sobre contrastes entre médias de caselas que estão na mesma linha, começando pela última coluna.

Para o exemplo em questão, uma hipótese deste tipo é dada por

$$H_o^{(7)}: \left\{ \begin{array}{l} \mu_{13} = \mu_{12} \\ \mu_{13} = \mu_{11} \end{array} \right.$$

Da mesma forma que para $H_o^{(8)}$, a soma de quadrados devido a $H_o^{(7)}$ não tem relação com a notação $R(\cdot)$.

3.6. COMENTÁRIOS ADICIONAIS SOBRE AS FUNÇÕES ESTIMÁVEIS E HIPÓTESES TIPO III

Considera-se que o objetivo deste trabalho é

mostrar como o SAS constrói os quatro tipos de funções estimáveis fornecidas pelo PROC GLM.

Dentre todas, a obtenção das funções estimáveis tipo III parece ser a mais confusa. Assim se justifica a apresentação aqui de formas mais práticas e compreensíveis de obtê-las e interpretá-las que aquela apresentada pelo SAS.

3.6.1. Outra Forma de Obtenção das Funções Estimáveis Tipo III

SEARLE (1980) apresenta uma forma prática para obtenção das funções estimáveis tipo III para um modelo com interação e algumas caselas vazias, através de um exemplo com dois níveis do fator A, três níveis do fator B e o número de observações por casela é apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 - Número de Observações por Casela

i	j			$n_{i.}$
	1	2	3	
1	3	2	1	6
2	2	2	0	4
$n_{.j}$	5	4	1	10

As funções estimáveis (f) a serem construídas para colunas são combinações lineares dos parâmetros e

- a) são contrastes baseados em β ;
- b) não envolvem os α e
- c) são ortogonais aos contrastes dos γ que explicam $R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$.

Um exemplo de contrastes convenientes satisfazendo (a) e (b) é:

$$\beta_1 - \beta_2 + 1/2 (\gamma_{11} + \gamma_{21}) - 1/2 (\gamma_{12} + \gamma_{22})$$

$$\beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \gamma_{13}$$

$$\beta_2 - \beta_3 + \gamma_{12} - \gamma_{13}$$

Tomando-se combinações lineares deles, vem:

$$\begin{aligned} f = & m_1 [\beta_1 - \beta_2 + 1/2(\gamma_{11} + \gamma_{21}) - 1/2(\gamma_{12} + \gamma_{22})] + \\ & + m_2 [\beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \gamma_{13}] + m_3 [\beta_2 - \beta_3 + \gamma_{12} - \gamma_{13}] \end{aligned}$$

Agora, usando (c) o único contraste disponível para compor $R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$ é $\gamma_{11} - \gamma_{12} - \gamma_{21} + \gamma_{22}$. Os coeficientes dos parâmetros neste e em f são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Coeficientes m para a Combinação Linear f e Para a Interação

	β			γ	
	β_1	β_2	β_3	γ_{11}	γ_{12}
	$m_1 + m_2$	$-m_1 + m_3$	$-m_2 - m_3$	$1/2 m_1 + m_2$	$-1/2 m_1 + m_3$
f					
contraste γ	0	0	0	1	-1

	γ		
	γ_{13}	γ_{21}	γ_{22}
	$-m_2 - m_3$	$1/2 m_1$	$-1/2 m_1$
f			
contraste γ	0	-1	1

A ortogonalidade entre os dois implica:

$$1/2 m_1 + m_2 + 1/2 m_1 - m_3 - 1/2 m_1 - 1/2 m_1 = 0, \text{ isto é,}$$

$$m_2 = m_3$$

Os graus de liberdade para o fator B são dois, portanto, existem dois valores arbitrários para os coeficientes m. Considera-se que a parte de f para β_1 e β_2 é $L_4\beta_1 + L_5\beta_2$, isto é:

$$m_1 + m_2 = L_4 \quad \text{e} \quad -m_1 + m_3 = L_5$$

Portanto,

$$m_1 = 1/2 (L_4 - L_5) \quad \text{e} \quad m_2 = m_3 = 1/2 (L_4 + L_5)$$

obtendo-se:

$$\begin{aligned}
f = & L_4 \beta_1 + L_5 \beta_2 - [L_4 + L_5] \beta_3 + 1/4 [3 L_4 + L_5] \gamma_{11} + \\
& + 1/4 [L_4 + 3 L_5] \gamma_{12} - [L_4 + L_5] \gamma_{13} + 1/4 [L_4 - L_5] \gamma_{21} - \\
& - [L_4 - L_5] \gamma_{22}
\end{aligned}$$

que equivale as funções estimáveis do tipo III obtidas através da metodologia indicada pelo Manual do SAS, porém construídas de forma mais simples.

3.6.2. Um Algoritmo para Transformar as Hipóteses em Termos do Modelo Σ em Hipóteses do Modelo S Quando Ocorrem Caselas Vazias

As hipóteses tipo III são obtidas com base no Modelo Σ . Assim, as hipóteses sobre linhas e colunas são da seguinte forma:

$$H: \alpha_i = 0 \quad \forall i \quad \text{e} \quad H: \beta_j = 0 \quad \forall j$$

onde α_i e β_j são os parâmetros do modelo restrito, como em 3.2.3.

Por isso, as hipóteses que são aparentemente simples em termos dos parâmetros do modelo restrito são complexas quando colocadas em termos dos parâmetros do modelo irrestrito. Para converter a hipótese em termos dos parâmetros do modelo irrestrito, quando ocorrem caselas vazias, SEARLE (1987) apresenta o seguinte algoritmo.

Seja "s" o número de caselas completas, β o vetor de parâmetros no modelo irrestrito e β_0 (de ordem s) o vetor de parâmetros do modelo restrito, de posto completo.

Se X e X_0 são definidas por

$$E(y) = X\beta \text{ e } E(y) = X_0\beta_0,$$

então define-se W e W_0 como as matrizes formadas pelas s linhas distintas de X e X_0 respectivamente. Se β e β_0 são relacionadas através da equação

$$W_0\beta_0 = W\beta$$

e W_0 é de posto completo, então

$$\beta_0 = W_0^{-1}W\beta \quad (47)$$

e os parâmetros do modelo restrito (Modelo Σ) estão dados em termos do modelo irrestrito (Modelo S).

3.7. PROCEDIMENTO

As regras e conceitos apresentados até aqui, serão aplicados a dois exemplos. Os exemplos se constituem de experimentos com dois fatores, interação, número diferente de observações por caselas e caselas vazias.

O primeiro exemplo apresenta uma estrutura mais simples com uma única casela vazia. O objetivo deste exemplo é introduzir, de forma mais compreensível, o que está por trás de cada tipo de soma de quadrados, fatos que o usuário muitas vezes desconhece.

O segundo exemplo, com maior número de níveis e caselas vazias, tem o objetivo de demonstrar a complexidade que as hipóteses assumem neste caso.

Os dados apresentados são fictícios e o número de observações por casela é sempre pequeno, com

vistas a facilitar a compreensão dos procedimentos, uma vez que o tamanho do experimento não interfere nos objetivos deste trabalho.

Os dois casos apresentados aqui poderão ser adaptados a situação do usuário e com isto ele terá condições de interpretá-la. Este fato se tornaria extremamente complexo caso ele só dispusesse do Manual do SAS, pois este contém apenas considerações gerais sobre os tipos de funções com poucos exemplos.

3.8. O SISTEMA SAS

As funções estimáveis construídas aqui passo a passo, são apresentadas pelo PROC GLM do SAS quando as opções SS e E do comando MODEL são requeridas após a especificação do modelo, na seguinte forma:

```
model y = A B A*B / SS1 SS2 SS3 SS4 E E1 E2 E3 E4 XPX I;
```

As opções SS1, SS2, SS3 e SS4 provêem as somas de quadrados tipos I, II, III e IV respectivamente.

A opção E provê a forma geral de funções estimáveis e E1, E2, E3 e E4 as funções estimáveis tipos I, II, III e IV.

As opções XPX e I fornecem a matriz $X'X$ e a inversa $G2$ para a matriz $X'X$.

As macros completas para os dois exemplos serão apresentadas no Apêndice.

4. DISCUSSÃO DE EXEMPLOS NUMÉRICOS

A partir da metodologia descrita no capítulo anterior, serão construídos, bem como interpretados, os quatro tipos de funções estimáveis fornecidas pelo pacote SAS, em seu PROC GLM, para o caso de dados desbalanceados.

Serão relacionados exemplos, de experimentos fatoriais duplos, com dados desbalanceados e alguns padrões de caselas vazias a fim de observar-se quais hipóteses podem ser mais adequadas a cada situação.

4.1. 1^o CASO: FATORIAL 2x3 COM UMA CASELA VAZIA

A Tabela 6 apresenta os dados relativos a um experimento fictício envolvendo duas variedades de maçã e três espaçamentos entre plantas.

Tabela 6 - Dados em kg de Frutos/Planta

	esp 1 j=1	esp 2 j=2	esp 3 j=3
i = 1	52,00	78,00	63,00
Cultivar 1	-	-	47,00
Total	52,00 (1)	78,00 (1)	110,00 (2)
Média	52,00	78,00	55,00
i = 2	-	102,00	58,00
Cultivar 2	-	87,00	-
Total	-	189,00 (2)	58,00 (1)
Média	-	94,50	58,00
Total	52,00 (1)	267,00 (3)	168,00 (3)
Média	52,00	89,00	56,00

A Tabela 7 apresenta o número de observações por casela.

Tabela 7 - Número de Observações por Casela Conforme Descrito na Tabela 6

	j			
i	1	2	3	$n_{i.}$
1	1 n_{11}	1 n_{12}	2 n_{13}	4
2	0 n_{21}	2 n_{22}	1 n_{23}	3
$n_{.j}$	1	3	3	7

4.1.1. Modelos Lineares

Os dados da Tabela 6 podem ser descritos através dos seguintes modelos matemáticos:

- Modelo superparametrizado (Modelo S): o modelo dado em (22) assume a caracterização

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$$

onde:

y_{ijk} é a observação referente a variedade i , espaçamento j e k -ésima repetição;

μ é uma constante inerente aos dados;

α_i é o efeito da variedade i (fator A);

β_j é o efeito do espaçamento j (fator B);

γ_{ij} é o efeito da interação entre variedade i e espaçamento j (AxB);

e_{ijk} é o erro aleatório associado a y_{ijk} , tal que, $e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$.

$i = 1, 2$

$j = 1, 2, 3$

$k = 0, \dots, n_{ij}$ é o número de observações por casela

- Modelo de médias de caselas (Modelo MD): o modelo dado em (31) assume a caracterização

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$$

onde:

y_{ijk} e e_{ijk} têm a mesma descrição do modelo anterior;

μ_{ij} é a média populacional da casela referente à variedade

i e espaçamento j.

O vetor solução para o Modelo de Médias de Caselas pode ser obtido a partir de:

$$\mu^{\circ} = (W'W)^{-1}W'y$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{11}^{\circ} \\ \mu_{12}^{\circ} \\ \mu_{13}^{\circ} \\ \mu_{22}^{\circ} \\ \mu_{23}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{11} \\ \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{13} \\ \bar{y}_{22} \\ \bar{y}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52,00 \\ 78,00 \\ 55,00 \\ 94,50 \\ 58,00 \end{bmatrix}$$

μ° será utilizado na obtenção das somas de quadrados de hipóteses.

4.1.2. Obtenção da Forma Geral de Funções Estimáveis

Considerando-se o modelo superparametrizado

$Y = X\theta + e$, onde:

$$X = \begin{matrix} & \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtenção da matriz inversa generalizada $(X'X)^{G2}$, tomam-se as colunas linearmente independentes sequencialmente da matriz X como sendo a matriz X_1 . Obtém-se $(X_1'X_1)^{-1}$. A matriz $(X'X)^{G2}$ é obtida, colocando as colunas da matriz $(X_1'X_1)^{-1}$ em lugar das colunas linearmente independentes e intercalando-se com zeros as demais colunas.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(X_1'X_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3/2 & -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 & -3/2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{g2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & -3/2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = (X'X)^{g2} (X'X)$$

$$L = \begin{bmatrix} \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \end{matrix}$$

Obtendo-se a forma geral das funções estimáveis através de $L\theta$ que será apresentada na Tabela 8.

Tabela 8 - Forma Geral de Funções Estimáveis para o Modelo Fatorial com Interação Aplicado aos Dados da Tabela 6.

Parâmetros	Coefficientes
μ	L_1
α_1	L_2
α_2	$L_1 - L_2$
β_1	L_4
β_2	L_5
β_3	$L_1 - L_4 - L_5$
γ_{11}	L_4
γ_{12}	L_8
γ_{13}	$L_2 - L_4 - L_8$
γ_{22}	$L_5 - L_8$
γ_{23}	$L_1 - L_2 - L_5 + L_8$

Como cinco símbolos (L_1, L_2, L_4, L_5, L_8) são envolvidos, o posto máximo da hipótese tem cinco graus de liberdade.

4.1.3. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo I

Para a construção das funções estimáveis tipo I o primeiro passo consiste em fazer a partição da matriz X em X_1 , X_2 e X_3 , obedecendo a mesma sequência em que os fatores são especificados no modelo, com efeitos principais precedendo interações, de forma a obter o ajuste sequencial. Desta forma:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que é formada pelas colunas da matriz X correspondentes a μ e ao fator A (variedades).

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que é formada pelas colunas de X correspondentes ao fator B (espaçamentos).

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é formada pelas colunas de X correspondentes à interação entre variedades e espaçamentos.

Para obtenção das funções estimáveis tipo I para o fator A (variedades) se construirá a seguinte matriz:

$$G_1 = (X_1'X_1 \mid X_1'X_2 \mid X_1'X_3) =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccccc} 7 & 4 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

e então $G_1^* = (X_1' X_1)^{-1} G_1 =$

$$= \begin{bmatrix} \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -5/12 & 1/6 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_2 \end{matrix}$$

Em termos da notação $R(\cdot)$, a soma de quadrados tipo I, correspondente a função estimável tipo I, para o fator A é, como já visto, dada por $R(\alpha|\mu)$. Em função disto a primeira linha de G_1^* que corresponde ao parâmetro μ será tomada como zero.

$G_1^* \theta$ fornece as funções estimáveis tipo I para A apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 - Funções Estimáveis Tipo I para A.

Parâmetros	Coefficientes
μ	0
α_1	L_2
α_2	$-L_2$
β_1	$1/4 \quad L_2$
β_2	$-5/12 \quad L_2$
β_3	$1/6 \quad L_2$
γ_{11}	$1/4 \quad L_2$
γ_{12}	$1/4 \quad L_2$
γ_{13}	$1/2 \quad L_2$
γ_{22}	$-2/3 \quad L_2$
γ_{23}	$-1/3 \quad L_2$

Atribuindo-se valores arbitrários a L_2 se

obterá a hipótese testada através da soma de quadrados tipo I que o PROC GLM do SAS fornece.

Fazendo-se L_2 igual a 1, por exemplo, obtém-se:

$$H_0^{(4)}: \alpha_1 - \alpha_2 + 1/4 \beta_1 - 5/12 \beta_2 + 1/6 \beta_3 + 1/4 \gamma_{11} + 1/4 \gamma_{12} + \\ + 1/2 \gamma_{13} - 2/3 \gamma_{22} - 1/3 \gamma_{23} = 0$$

e, para qualquer outro valor de L_2 serão obtidas hipóteses equivalentes.

A hipótese tipo I para A envolve além dos parâmetros α , os parâmetros β e γ , pois a soma de quadrados tipo I equivale a $R(\alpha|\mu)$, não sendo ajustada para o fator B e interação.

É uma hipótese sobre médias ponderadas de linhas.

Esta hipótese tem a-1 = 1 grau de liberdade e por isto um único símbolo L está associado a ela.

A hipótese $H_0^{(4)}$ pode ser escrita em termos do Modelo de Médias de Caselas ficando:

$$H_0^{(4)}: \frac{1}{4} \mu_{11} + \frac{1}{4} \mu_{12} + \frac{1}{2} \mu_{13} - \frac{2}{3} \mu_{22} - \frac{1}{3} \mu_{23} = 0$$

Nota-se que a hipótese escrita em termos do Modelo M é mais fácil de interpretar.

Observa-se que estão sendo comparadas as médias da linha um com as médias da linha dois. Porém, envolvendo coeficientes um pouco confusos, por tratar-se de uma hipótese sobre médias ponderadas em presença de frequências diferentes (diferentes repetições e caselas vazias).

A Soma de Quadrados tipo I para A pode ser obtida da seguinte forma

$$R(\alpha|\mu) = SQ H_0^{(4)} = [B'_{(4)} \mu^0]' [B'_{(4)} (W'W)^{-1} B_{(4)}]^{-1} [B'_{(4)} \mu^0]$$

onde $B_{(4)}$ é a matriz dos coeficiente dos parâmetros na hipótese, dada por

$$B'_{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

W é a matriz de delineamento no Modelo M

μ^0 é o vetor solução de $\mu^0 = (W'W)^{-1}W'Y$, estimativas das médias de caselas.

$$R(\alpha|\mu) = SQ H_0^{(4)} = 855,048$$

As funções estimáveis tipo I para o fator B (espaçamento) são obtidas através de

$$G_2 = (0 \mid X_2' M_1 X_2 \mid X_2' M_1 X_3)$$

$$M_1 = I - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1'$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/2 & 3/4 & -1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 17/12 & -7/6 & -1/4 & 3/4 & -1/2 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & -7/6 & 5/3 & -1/2 & -1/2 & 1 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$G_2^* = (X_2' M_1 X_2)^{-1} G_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/6 & -5/6 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_4 \\ L_5 \\ L_5 \end{matrix}$$

G_2^* fornece as funções estimáveis tipo I para B apresentadas na Tabela 10.

Tabela 10 - Funções Estimáveis Tipo I para B.

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
β_1	L_4
β_2	L_5
β_3	$-L_4 - L_5$
γ_{11}	L_4
γ_{12}	$-1/6 L_4 + 1/2 L_5$
γ_{13}	$-5/6 L_4 - 1/2 L_5$
γ_{22}	$1/6 L_4 + 1/2 L_5$
γ_{23}	$-1/6 L_4 - 1/2 L_5$

Atribuindo-se valores arbitrários a L_4 e L_5 , se obterá uma hipótese testada através da soma de quadrados tipo I que o SAS fornece. Fazendo-se, por exemplo, $L_4 = 1$ e $L_5 = 0$, depois $L_4 = 0$ e $L_5 = 1$, obtém-se:

$$H_0^{(5)}: \begin{cases} \beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \frac{1}{6} \gamma_{12} - \frac{5}{6} \gamma_{13} + \frac{1}{6} \gamma_{22} - \frac{1}{6} \gamma_{23} = 0 \\ \beta_2 - \beta_3 + \frac{1}{2} \gamma_{12} - \frac{1}{2} \gamma_{13} + \frac{1}{2} \gamma_{22} - \frac{1}{2} \gamma_{23} = 0 \end{cases}$$

A hipótese tipo I para o fator B não envolve os parâmetros α , pois para as somas de quadrados tipo I o

ajuste é sequencial. Equivalendo assim a $R(\beta|\mu, \alpha)$, quando o modelo é especificado na ordem A, B, A*B.

É uma hipótese sobre médias ponderadas de colunas ajustadas para linhas.

Esta hipótese tem $b - 1 = 2$ graus de liberdade e por isso dois símbolos L associados a ela.

A hipótese $H_0^{(5)}$ também pode ser escrita em termos do Modelo de Médias de Caselas, ficando:

$$H_0^{(5)}: \begin{cases} \mu_{11} - \frac{1}{6} \mu_{12} - \frac{5}{6} \mu_{13} + \frac{1}{6} \mu_{22} - \frac{1}{6} \mu_{23} = 0 \\ \frac{1}{2} \mu_{12} - \frac{1}{2} \mu_{13} + \frac{1}{2} \mu_{22} - \frac{1}{2} \mu_{23} = 0 \end{cases}$$

A primeira linha da hipótese é um contraste entre coluna um, contra dois e três, dentro da linha um e coluna dois contra três dentro da linha dois. É de interpretação confusa.

A segunda linha é mais simples e envolve comparação entre colunas dois e três em ambas as linhas.

A Soma de Quadrados tipo I para B pode ser obtida de:

$$R(\beta|\mu, \alpha) = SQ H_0^{(5)} = [B'_{(5)} \mu^0]' [B'_{(5)} (W'W)^{-1} B_{(5)}]^{-1} [B'_{(5)} \mu^0]$$

onde:

$$B'_{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/6 & -5/6 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$R(\beta|\mu, \alpha) = SQ H_0^{(5)} = 1265,417$$

As funções estimáveis tipo I para a interação

entre variedades e espaçamentos são obtidas através de:

$$G_3 = (0 \mid 0 \mid X_3' M_2 X_3)$$

$$M_2 = M_1 - M_1 X_2 (X_2' M_1 X_2)^{-1} X_2' M_1$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & -1/6 & 7/12 & -5/12 & 1/12 & 1/12 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & -5/12 & 7/12 & 1/12 & 1/12 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/12 & 1/12 & 7/12 & -5/12 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & -5/12 & 1/12 \\ 0 & 1/3 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/6 & -1/6 \end{array} \right]$$

$$G_3^* = (X_3' M_2 X_3)^{-1} G_3$$

$$G_3^* = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccccc} & & & & & & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] L_B$$

$G_3^* \theta$ fornece as funções estimáveis tipo I para interação AxB apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11 - Funções Estimáveis Tipo I para AxB.

Parâmetros	Coefficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
β_1	0
β_2	0
β_3	0
γ_{11}	0
γ_{12}	L_8
γ_{13}	$-L_8$
γ_{22}	$-L_8$
γ_{23}	L_8

Como um símbolo L (L_8) aparece nas funções estimáveis para AxB, a hipótese associada a esta tem apenas um grau de liberdade.

Além disso, segundo IEMMA (1993), quando ocorrem caselas vazias, o número de graus de liberdade da interação é dado por

$$s - (a+b-1) = 5 - 4 = 1$$

onde s é o número de caselas completas, a é o número de níveis do fator A e b é o número de níveis do fator B.

Hipóteses tipo I para a interação AxB podem ser obtidas atribuindo-se valores arbitrários a L_8 . Assim, se L_8 igual a 1

$$H_0^{(7)}: \gamma_{12} - \gamma_{13} - \gamma_{22} + \gamma_{23} = 0$$

Observa-se que a hipótese sobre a interação é

livre dos outros parâmetros. Isto reitera o fato de que o modelo com interação é adequado para testar a interação. Porém, quando ocorrem caselas vazias nem todas as interações possíveis são testadas. Neste caso, a hipótese não envolve γ_{11} e γ_{21} , e nada se pode afirmar sobre eles.

Em termos do Modelo M a hipótese fica:

$$H_0^{(7)}: \mu_{12} - \mu_{13} - \mu_{22} + \mu_{23} = 0$$

Para obter-se a Soma de Quadrados tipo I para a interação AxB, calcula-se

$$R(\gamma|\mu, \alpha, \beta) = SQH_0^{(7)} = [B'_{(7)}\mu^0]' [B'_{(7)}(W'W)^{-1} B'_{(7)}]^{-1} [B'_{(7)}\mu^0]$$

onde

$$B'_{(7)} = [0 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]$$

$$R(\gamma|\mu, \alpha, \beta) = SQH_0^{(7)} = 60,750$$

4.1.4. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo II

Para obtenção das funções estimáveis tipo II para o fator A deverão ser feitas as seguintes considerações:

- o efeito do fator A está contido no efeito da interação AxB;
- o efeito do fator A não está contido no efeito do fator B.

Assim, as funções estimáveis tipo II para A são construídas da seguinte forma:

- as colunas de L associadas ao fator B serão preenchidas por zeros;

- a submatriz associada com o fator A será

$$(X_1' M X_1)^{-1} (X_1' M Y);$$

- a submatriz associada com o fator AxB será

$$(X_1' M X_1)^{-1} (X_1' M X_2)$$

onde:

X_0 equivale as colunas de X correspondentes à μ e ao fator B (efeitos que não contém A).

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X_1 equivale as colunas de X associadas ao fator A

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X_2 equivale as colunas de X associadas a interação AxB que contém A

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = I - X_0 (X_0' X_0)^{-1} X_0'$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$L = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccccc} \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right] L_2$$

Através de $L\theta$ obtém-se as funções estimáveis tipo II para o fator A (variedades), apresentadas na Tabela 12.

Tabela 12 - Funções Estimáveis Tipo II para A.

Parâmetros	Coefficientes
μ	0
α_1	L_2
α_2	$-L_2$
β_1	0
β_2	0
β_3	0
γ_{11}	0
γ_{12}	$1/2 L_2$
γ_{13}	$1/2 L_2$
γ_{22}	$-1/2 L_2$
γ_{23}	$-1/2 L_2$

Atribuindo-se valores arbitrários a L_2 , obtém-se as hipóteses tipo II para A. Fazendo-se L_2 igual

a 1

$$H_0^{(2)}: \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{2} \gamma_{12} + \frac{1}{2} \gamma_{13} - \frac{1}{2} \gamma_{22} - \frac{1}{2} \gamma_{23} = 0$$

A hipótese tipo II para A não envolve os parâmetros β , pois a soma de quadrados tipo II para A se equivale a $R(\alpha|\mu, \beta)$.

Trata-se de uma hipótese sobre médias ponderadas de linhas ajustadas para colunas.

A hipótese $H_0^{(2)}$ em termos do modelo de médias de caselas fica

$$H_0^{(2)}: \frac{1}{2} \mu_{12} + \frac{1}{2} \mu_{13} - \frac{1}{2} \mu_{22} - \frac{1}{2} \mu_{23} = 0$$

$H_0^{(2)}$ compara linhas um e dois considerando somente colunas dois e três.

Para obtenção da Soma de quadrados tipo II para A, calcula-se

$$R(\alpha|\mu, \beta) = SQH_0^{(2)} = [B'_{(2)} \mu^0]' [B'_{(2)} (W'W)^{-1} B_{(2)}]^{-1} [B'_{(2)} \mu^0]$$

onde $B'_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$R(\alpha|\mu, \beta) = SQH_0^{(2)} = 126,750$$

Da mesma forma, para obtenção das funções estimáveis tipo II para B, considera-se que o efeito do fator B está contido no efeito da interação $A \times B$ e não está contido no efeito do fator A.

Portanto

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = I - X_0(X_0'X_0)^{-1}X_0' =$$

$$= \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/6 & -5/6 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_4 \\ L_5 \end{matrix}$$

Através de $L\theta$ obtém-se as funções estimáveis tipo II para o fator B (espaçamentos), apresentadas na Tabela 13.

Tabela 13 - Funções Estimáveis Tipo II para B.

Parâmetros	Coefficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
β_1	L_4
β_2	L_5
β_3	$-L_4 - L_5$
γ_{11}	L_4
γ_{12}	$-1/6 L_4 + 1/2 L_5$
γ_{13}	$-5/6 L_4 - 1/2 L_5$
γ_{22}	$1/6 L_4 + 1/2 L_5$
γ_{23}	$-1/6 L_4 - 1/2 L_5$

Atribuindo-se valores a L_4 e L_5 obtém-se as hipóteses tipo II para o fator B.

Fazendo-se $L_4 = 1$ e $L_5 = 0$, depois $L_4 = 0$ e $L_5 = 1$, obtém-se

$$H_0^{(5)} : \begin{cases} \beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \frac{1}{6} \gamma_{12} - \frac{5}{6} \gamma_{13} + \frac{1}{6} \gamma_{22} - \frac{1}{6} \gamma_{23} = 0 \\ \beta_2 - \beta_3 + \frac{1}{2} \gamma_{12} - \frac{1}{2} \gamma_{13} + \frac{1}{2} \gamma_{22} - \frac{1}{2} \gamma_{23} = 0 \end{cases}$$

Observa-se que esta hipótese é a mesma hipótese tipo I para B.

Ambas são testadas por $R(\beta|\mu, \alpha)$.

As funções estimáveis tipos I e II para o fator B são iguais devido ao ajuste sequencial das funções estimáveis tipo I.

Para a obtenção das funções estimáveis tipo

II para a interação $A \times B$, basta tomar a forma geral de funções estimáveis, apresentada na Tabela 8, igualar L_1 , L_2 , L_4 e L_5 a zero.

Obtendo-se o seguinte:

Tabela 14 - Funções Estimáveis Tipo II para $A \times B$.

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
β_1	0
β_2	0
β_3	0
γ_{11}	0
γ_{12}	L_8
γ_{13}	$-L_8$
γ_{22}	$-L_8$
γ_{23}	L_8

Observa-se que as funções estimáveis tipo II para a interação $A \times B$ são iguais as tipo I. Isto ocorre também para as tipos III e IV. Todos os quatro tipos de somas de quadrados para a interação se equivalem e são iguais a $R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$. Isto é, a hipótese sobre a interação é sempre ajustada para os demais fatores.

4.1.5. Obtenção das funções estimáveis tipo III

Para obtenção das funções estimáveis tipo

III, trabalhar-se-á também com a forma geral de funções estimáveis, já apresentada na Tabela 8.

As funções estimáveis tipo III para o fator A (variedades) são construídas, segundo o Manual do SAS, Capítulo 9 (1990), de acordo com os seguintes passos:

- para cada efeito no modelo, exceto o fator A e AxB, que contém A, igualar os coeficientes na forma geral de funções estimáveis a zero. Assim, L_1 , L_4 e L_5 são considerados iguais a zero;
- igualar os coeficientes fora do bloco do fator A a uma função linear dos coeficientes do bloco do fator A, a fim de fazer a hipótese de A ortogonal a hipótese associada à AxB.

Fazendo-se $L_8 = K L_2$ e encontrando-se o valor de K que torne a hipótese de A ortogonal a hipótese de AxB. Neste caso, $k = 1/2$, pois o coeficiente L_2 de α_1 será distribuído entre dois níveis de AxB e o coeficiente $-L_2$ de α_2 , também.

As funções estimáveis tipo III para o fator A resultantes deste processo são apresentadas na Tabela 15.

Tabela 15 - Funções Estimáveis Tipo III para A.

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
α_1	L_2
α_2	$-L_2$
β_1	0
β_2	0
β_3	0
γ_{11}	0
γ_{12}	$L_9 = 1/2 L_2$
γ_{13}	$L_2 - L_9 = 1/2 L_2$
γ_{22}	$-L_9 = -1/2 L_2$
γ_{23}	$-L_2 + L_9 = -1/2 L_2$

Somando-se os coeficientes de γ_{11} , γ_{12} e γ_{13} , obtém-se L_2 que é o coeficiente de α_1 . Somando-se os coeficientes de γ_{22} e γ_{23} , obtém-se $-L_2$ que é o coeficiente de α_2 . Da mesma forma, a soma dos coeficientes de γ_{12} e γ_{22} deve ser zero (coeficiente de β_2), γ_{13} mais γ_{23} deve ser igual a zero e γ_{11} também.

Atribuindo-se valores a L_2 serão obtidas hipóteses tipo III para o fator A.

Assim, fazendo-se L_2 igual a 1

$$H_0^{(A)}: \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{2} \gamma_{12} + \frac{1}{2} \gamma_{13} - \frac{1}{2} \gamma_{22} - \frac{1}{2} \gamma_{23} = 0$$

que é uma hipótese sobre médias não ponderadas de linhas.

As funções estimáveis tipo III são obtidas com base no Modelo Σ ou Modelo com Restrição nos Parâmetros. Por isso, se equivalem em termos da notação RC), a $RC(\alpha | \mu, \beta, \gamma)$.

A hipótese tipo III para A em termos dos parâmetros do modelo restrito é dada por

$$H_0^{(3)}: \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

e escrevendo-se esta hipótese em termos dos parâmetros do modelo irrestrito obtém-se a hipótese $H_0^{(3)}$ anterior. Justifica-se, desta forma, o aparecimento dos parâmetros γ nessa hipótese.

Neste caso $H_0^{(3)}$ é igual a $H_0^{(2)}$, e a soma de quadrados tipo III para o fator A é obtida da mesma forma.

Para obter-se as funções estimáveis tipo III para o fator B (espaçamentos), procede-se da seguinte forma:

- tomar a forma geral de funções estimáveis da Tabela 4 e igualar L_1 e L_2 a zero;
- obter L_8 em função de L_4 e L_5 , a fim de tornar a hipótese de A ortogonal a hipótese de AxB, da seguinte forma:

	μ	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{22}	γ_{23}
B -	0	0	0	L_4	L_5	$-L_4 - L_5$	L_4	L_8	$-L_4 - L_8$	$L_5 - L_8$	$-L_5 + L_8$
AxB -	0	0	0	0	0	0	0	L_8	$-L_8$	$-L_8$	L_8

Multiplicando-se os coeficientes de cada parâmetro nas duas linhas, somando-se e igualando-se a zero, obtém-se

$$L_8 = -1/4 L_4 + 1/2 L_5$$

As funções estimáveis resultantes desse processo são apresentados na Tabela 16.

Tabela 16 - Funções Estimáveis Tipo III para B.

Parâmetro	Coeficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
β_1	L_4
β_2	L_5
β_3	$-L_4 - L_5$
γ_{11}	L_4
γ_{12}	$L_9 = -1/4 L_4 + 1/2 L_5$
γ_{13}	$-L_4 - L_9 = -3/4 L_4 - 1/2 L_5$
γ_{22}	$L_5 - L_9 = 1/4 L_4 + 1/2 L_5$
γ_{23}	$-L_5 + L_9 = -1/4 L_4 - 1/2 L_5$

Observa-se que o coeficiente de γ_{11} é igual ao coeficiente de β_1 . A soma dos coeficientes de γ_{12} e γ_{22} é igual ao coeficiente de β_2 e a soma dos coeficientes de γ_{13} e γ_{23} é igual ao coeficiente de β_3 . Também, as somas de γ_{11} , γ_{12} com γ_{13} e γ_{22} com γ_{23} são iguais a zero (coeficientes de α_1 e α_2).

Para obter-se as hipóteses tipo III para o fator B, atribui-se valores a L_4 e L_5 . Assim fazendo-se $L_4 = 1$, $L_5 = 0$ e depois $L_4 = 0$ e $L_5 = 1$, será obtida a hipótese

$$H_0^{(B)}: \begin{cases} \beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \frac{1}{4} \gamma_{12} - \frac{3}{4} \gamma_{13} + \frac{1}{4} \gamma_{22} - \frac{1}{4} \gamma_{23} = 0 \\ \beta_2 - \beta_3 + \frac{1}{2} \gamma_{12} - \frac{1}{2} \gamma_{13} + \frac{1}{2} \gamma_{22} - \frac{1}{2} \gamma_{23} = 0 \end{cases}$$

que é uma hipótese sobre médias não ponderadas de colunas.

A hipótese tipo III para B equivale, em termos da notação RC, a $RC(\beta | \mu, \alpha, \gamma)$.

Em termos dos parâmetros do modelo restrito $H_0^{(6)}$ é dada por

$$H_0^{(6)}: \dot{\beta}_j = 0 \quad \forall j$$

As funções estimáveis tipo III para B podem ser obtidas de uma forma mais compreensível através do algoritmo de SEARLE (1980), descrito no item 3.6.2, da seguinte forma:

- tomar contrastes baseados nos parâmetros β que não envolvam os parâmetros α , como estes

$$\beta_1 - \beta_2 + \gamma_{11} - \gamma_{12}$$

$$\beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \gamma_{13}$$

$$\beta_2 - \beta_3 + 1/2 (\gamma_{12} + \gamma_{22}) - 1/2 (\gamma_{13} + \gamma_{23})$$

- usando coeficientes m_1 , m_2 e m_3 , formar uma combinação linear destes contrastes

$$f = m_1 [\beta_1 - \beta_2 + \gamma_{11} - \gamma_{12}] + m_2 [\beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \gamma_{13}] + \\ + m_3 [\beta_2 - \beta_3 + 1/2 (\gamma_{12} + \gamma_{22}) - 1/2 (\gamma_{13} + \gamma_{23})]$$

- torná-los ortogonais ao contraste dos γ dados por $\gamma_{12} - \gamma_{13} - \gamma_{22} + \gamma_{23}$ e fazer o contraste para β ortogonal a este.

Tabela 17 - Coeficientes m para a Combinação Linear f e para a Interação

		β		
		β_1	β_2	β_3
f		$m_1 + m_2$	$-m_1 + m_3$	$-m_2 - m_3$
contraste γ		0	0	0

		γ				
		γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{22}	γ_{23}
f		$m_1 + m_2$	$-m_1 + 1/2 m_3$	$-m_2 - 1/2 m_3$	$1/2 m_3$	$-1/2 m_3$
contraste γ		0	1	-1	-1	1

A ortogonalidade entre os dois implica

$$-m_1 + 1/2 m_3 + m_2 + 1/2 m_3 - 1/2 m_3 - 1/2 m_3 = 0$$

portanto $m_1 = m_2$.

- o fator B tem dois graus de liberdade, então existem dois valores arbitrários para os m , L_4 e L_5 , sendo a função para β_1 e β_2 igual a $L_4 \beta_1 + L_5 \beta_2$, então

$$m_1 + m_2 = L_4 \quad \text{e} \quad -m_1 + m_3 = L_5$$

assim,

$$m_1 = 1/2 L_4 \quad ; \quad m_2 = 1/2 L_4 \quad \text{e} \quad m_3 = L_5 + 1/2 L_4$$

e substituindo em f

$$f = 1/2 L_4 [\beta_1 - \beta_2 + \gamma_{11} - \gamma_{12}] + 1/2 L_4 [\beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \gamma_{13}] + \\ + L_5 + 1/2 L_4 [\beta_2 - \beta_3 + 1/2 [\gamma_{12} + \gamma_{22}] - 1/2 [\gamma_{13} + \gamma_{23}]]$$

$$f = L_4 \beta_1 + L_5 \beta_2 + [-L_4 - L_5] \beta_3 + L_4 \gamma_{11} + [-1/4 L_4 + 1/2 L_5] \gamma_{12} + \\ + [-3/4 L_4 - 1/2 L_5] \gamma_{13} + [1/4 L_4 + 1/2 L_5] \gamma_{22} + [-1/4 L_4 - 1/2 L_5] \gamma_{23}$$

que são as funções estimáveis tipo III para B apresentadas na Tabela 16.

A hipótese $H_0^{(6)}$ em termos do Modelo de Médias de Caselas fica:

$$H_0^{(6)}: \begin{cases} \mu_{11} - \frac{1}{4} \mu_{12} - \frac{3}{4} \mu_{13} + \frac{1}{4} \mu_{22} - \frac{1}{4} \mu_{23} = 0 \\ \frac{1}{2} \mu_{12} - \frac{1}{2} \mu_{13} + \frac{1}{2} \mu_{22} - \frac{1}{2} \mu_{23} = 0 \end{cases}$$

A primeira linha da hipótese compara a coluna um com as outras duas, na linha um e as colunas dois e três na linha dois, envolvendo coeficientes difíceis de entender.

A segunda linha compara colunas ^{dois} um e três envolvendo linhas um e dois.

Para obtenção da Soma de Quadrados tipo III para o fator B, se irá calcular

$$R(\beta | \mu, \alpha, \gamma) = SQ H_0^{(6)} = [B'_{(6)} \mu^0]' [B'_{(6)} (W'W)^{-1} B_{(6)}]^{-1} [B'_{(6)} \mu^0]$$

$$\text{onde } B'_{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$R(\beta | \mu, \alpha, \gamma) = SQ H_0^{(6)} = 1247,315$$

Aplicando o algoritmo de SEARLE(1980), para converter as hipóteses em termos dos parâmetros do modelo

restrito para o modelo irrestrito obtém-se:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad W_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde:

Z é a matriz do delineamento para o Modelo Σ

W_s é formada pelas linhas distintas de Z

W é formada pelas linhas distintas da matriz X (matriz do delineamento do Modelo S , já apresentada)

$$\beta_s = W_s^{-1} W \beta$$

onde:

β_s é o vetor de parâmetros do modelo restrito

β é o vetor de parâmetros no modelo irrestrito

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/12 & 1/12 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 5/12 & -1/12 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1}{4} \gamma_{12} + \frac{1}{4} \gamma_{13} - \frac{1}{4} \gamma_{22} - \frac{1}{4} \gamma_{23}$$

$$\beta_1 = \frac{2}{3} \beta_1 - \frac{1}{3} \beta_2 - \frac{1}{3} \beta_3 + \frac{2}{3} \gamma_{11} - \frac{1}{3} \gamma_{12} - \frac{1}{3} \gamma_{13}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{3} \beta_1 + \frac{2}{3} \beta_2 - \frac{1}{3} \beta_3 - \frac{1}{3} \gamma_{11} + \frac{5}{12} \gamma_{12} - \frac{1}{12} \gamma_{13} + \frac{1}{4} \gamma_{22} - \frac{1}{4} \gamma_{23}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{4} \gamma_{12} - \frac{1}{4} \gamma_{13} - \frac{1}{4} \gamma_{22} + \frac{1}{4} \gamma_{23}$$

A primeira hipótese, $H_0^{(a)}$: $\alpha_1 = 0$ é a mesma obtida tomando-se as funções estimáveis tipo III para o fator A (Tabela 15) e substituindo-se L_2 por $1/2$.

A segunda hipótese $H_0^{(b)}$: $\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$ seria

obtida tomando-se as funções estimáveis tipo III para B (Tabela 16) e substituindo-se primeiro L_4 por $2/3$ e L_5 por

$-1/3$ e em seguida L_4 por $-1/3$ e L_5 por $2/3$.

4.1.6. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo IV

Da mesma forma, para obter as funções estimáveis tipo IV para o fator A (variedades), deve-se tomar a forma geral de funções estimáveis apresentada na Tabela 4 e igualar L_1 , L_4 e L_5 a zero. Em seguida:

- verifica-se que o coeficiente de γ_{11} é zero enquanto que o coeficiente de α_1 não o é. Com isto, a função estimável tipo IV para o fator A não é única;
- para os efeitos de γ que não tem coeficiente zero conta-se quantas vezes cada nível de α ocorre em γ e observa-se que α_1 ocorre duas vezes e α_2 também. Então iguala-se L_8 a $1/K L_2$ onde K é o número de vezes que α_1 aparece em γ desconsiderando-se γ_{11} que tem coeficiente zero. Portanto $L_8 = 1/2 L_2$.

As funções estimáveis tipo IV para o fator A (variedades) obtidas por este processo se encontram na Tabela 18.

Tabela 18 - Funções Estimáveis Tipo IV para A.

Parâmetros	Coficientes
μ	0
α_1	L_2
α_2	$-L_2$
β_1	0
β_2	0
β_3	0
γ_{11}	0
γ_{12}	$L_8 = 1/2 L_2$
γ_{13}	$L_2 - L_8 = 1/2 L_2$
γ_{22}	$-L_8 = -1/2 L_2$
γ_{23}	$-L_2 + L_8 = -1/2$

Para obter-se as hipóteses tipo IV para o fator A, atribui-se valores à L_2 . Se L_2 igual a 1, obtém-se a hipótese

$$H_0^{(B)}: \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{2} \gamma_{12} + \frac{1}{2} \gamma_{13} - \frac{1}{2} \gamma_{22} - \frac{1}{2} \gamma_{23} = 0$$

Observa-se que para este padrão de caselas vazias, as hipóteses tipos II, III e IV para A são idênticas. Sua forma no Modelo M e sua Soma de Quadrados já foram apresentadas anteriormente.

Para obtenção das funções estimáveis tipo IV para o fator B (espaçamentos), deve-se considerar a forma geral de funções estimáveis e igualar L_1 e L_2 a zero.

O nível um do fator B ocorre uma vez na interação AxB, o nível dois ocorre duas vezes e o nível três

também.

Portanto:

- como β_1 só aparece em γ_{11} , iguala-se o coeficiente de γ_{11} ao de β_1 ;
- β_2 aparece duas vezes nos parâmetros γ e por isso o coeficiente de β_2 (L_5) será distribuído entre γ_{12} e γ_{22} . Tomando-se o coeficiente de γ_{12} (L_8) igual a metade do coeficiente de β_2 (L_5), obtém-se as funções estimáveis tipo IV para o fator B apresentadas na Tabela 19.

Tabela 19 - Funções Estimáveis Tipo IV para B.

Parâmetro	Coeficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
β_1	L_4
β_2	L_5
β_3	$-L_4 - L_5$
γ_{11}	L_4
γ_{12}	$L_8 = 1/2 L_5$
γ_{13}	$-L_4 - L_8 = -L_4 - 1/2 L_5$
γ_{22}	$L_5 - L_8 = 1/2 L_5$
γ_{23}	$-L_5 + L_8 = -1/2 L_5$

Tomando-se L_4 igual a 1, L_5 igual a 0 e depois L_4 igual a 0 e L_5 igual a 1, obtém-se a hipótese:

$$H_0^{(9)}: \begin{cases} \beta_1 - \beta_3 + \gamma_{11} - \gamma_{13} = 0 \\ \beta_2 - \beta_3 + \frac{1}{2} \gamma_{12} - \frac{1}{2} \gamma_{13} + \frac{1}{2} \gamma_{22} - \frac{1}{2} \gamma_{23} = 0 \end{cases}$$

$H_0^{(9)}$ constitui-se de contrastes entre médias de caselas da mesma linha, começando pela última coluna.

As hipóteses tipo IV não são construídas com base na notação RC). Consideram um subconjunto dos dados onde não aparecem caselas vazias.

Podem ser melhor interpretadas em termos do Modelo M, tomando a forma

$$H_0^{(9)}: \begin{cases} \mu_{11} - \mu_{13} = 0 \\ \frac{1}{2} \mu_{12} - \frac{1}{2} \mu_{13} + \frac{1}{2} \mu_{22} - \frac{1}{2} \mu_{23} = 0 \end{cases}$$

Observando-se o padrão dos dados pode-se verificar que na primeira linha da hipótese, quando se compara níveis 1 e 3 do fator B, só aparece nível 1 do fator A, pois a primeira casela do nível 2 é vazia. Já a segunda linha da hipótese considera, na comparação entre os níveis 2 e 3 do fator B, os dois níveis do fator A pois nestes, todas as caselas são completas.

Para obtenção da Soma de Quadrados tipo IV para o fator B, calcula-se

$$SQH_0^{(9)} = [B'_{(9)} \mu^0]' [B'_{(9)} (W'W)^{-1} B_{(9)}]^{-1} [B'_{(9)} \mu^0]$$

onde

$$B'_{(9)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$SQH_0^{(9)} = 1297,853$$

4.1.7. Consequências da Alteração da Ordem de Especificação do Modelo

Caso as variáveis de classificação sejam especificadas no modelo, ao PROC GLM, na ordem B, A, A*B, as funções estimáveis do tipo I serão alteradas. A hipótese tipo I para o fator B será uma hipótese sobre médias não ajustadas, representada por $R(\beta|\mu)$, a qual não aparecia em nenhum tipo na ordenação A, B, A*B. Já a hipótese tipo I para o fator A será ajustada e expressa por $R(\alpha|\mu, \beta)$ e é a mesma hipótese tipo II dada pela ordenação A, B, A*B. A hipótese tipo I para a interação e demais hipóteses permanecem inalteradas.

Para obtenção da hipótese tipo I para o fator B, basta seguir os mesmos passos já apresentados.

Neste caso, a partição da matriz X é feita da seguinte forma

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde:

X_1 é formada pelas colunas de X correspondentes a μ e ao fator B;

X_2 é formada pelas colunas de X correspondentes ao fator A;

X_3 é formada pelas colunas de X correspondentes à interação.

$$G_1 = (X_1'X_1 \mid X_1'X_2 \mid X_1'X_3) =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cc|cccccc} 7 & 1 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

e então $G_1^* = (X_1'X_1)^{-1}G_1 =$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cc|cccccc} \mu & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/3 & -1/3 & 1 & 0 & -2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \end{array}$$

$G_1^* \theta$ produz as funções estimáveis tipo I para o fator B apresentadas na Tabela 20.

Tabela 20 - Funções Estimáveis Tipo I para B.
(Ordem B, A, A*B)

Parâmetro	Coeficiente
μ	0
β_1	L_2
β_2	L_3
β_3	$-L_2 - L_3$
α_1	$1/3 L_2 - 1/3 L_3$
α_2	$-1/3 L_2 + 1/3 L_3$
γ_{11}	L_2
γ_{12}	$1/3 L_3$
γ_{13}	$-2/3 L_2 - 2/3 L_3$
γ_{22}	$2/3 L_3$
γ_{23}	$-1/3 L_2 - 1/3 L_3$

Fazendo-se $L_2 = 1$ e $L_3 = 0$, depois, $L_2 = 0$ e $L_3 = 1$, obtém-se

$$H_0^{(4)}: \begin{cases} \beta_1 - \beta_3 + \frac{1}{3} \alpha_1 - \frac{1}{3} \alpha_2 + \gamma_{11} - \frac{2}{3} \gamma_{13} - \frac{1}{3} \gamma_{23} = 0 \\ \beta_2 - \beta_3 - \frac{1}{3} \alpha_1 + \frac{1}{3} \alpha_2 + \frac{1}{3} \gamma_{12} - \frac{2}{3} \gamma_{13} + \frac{2}{3} \gamma_{22} - \frac{1}{3} \gamma_{23} = 0 \end{cases}$$

É uma hipótese para médias ponderadas de colunas não ajustadas para linhas e equivale a $R(\beta|\mu)$.

Pode ser escrita em termos do Modelo M:

$$H_0^{(4)}: \begin{cases} \mu_{11} = \frac{2 \mu_{13} + \mu_{23}}{3} \\ \frac{\mu_{12} + 2 \mu_{22}}{3} = \frac{2 \mu_{13} + \mu_{23}}{3} \end{cases}$$

A Soma de Quadrados tipo I para o fator B é obtida através de

$$R(\beta|\mu) = SQH_0^{(4)} = [B'_{(4)}\mu^0]' [B'_{(4)}(W'W)^{-1}B_{(4)}]^{-1} [B'_{(4)}\mu^0]$$

onde

$$B'_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$R(\beta|\mu) = SQH_0^{(4)} = 1993,714$$

A função estimável tipo I para o fator A, quando o modelo é especificado na ordem B, A, AxB é dada por

$$G_2 = (0 \mid X_2' M_1 X_2 \mid X_2' M_1 X_3)$$

$$M_1 = I - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1'$$

$$G_2^* = (X_2' M_1 X_2)^{-1} G_2$$

o que resulta nas mesmas funções estimáveis apresentadas na Tabela 12, pois equivalem às funções estimáveis tipo II para A.

Tabela 21 - Análise de Variância dos Dados da Tabela 6
Através do Modelo com Dois Fatores e Interação,
para Ordenação A, B, Ax B.

TIPO I				
Variações Consideradas	Graus de Liberdade	Hipóteses Testadas	RC ()	Soma de Quadrados
A (não ajust)	1	$H_0^{(1)}$	$RC(\alpha \mu)$	855,048
B (ajustado)	2	$H_0^{(5)}$	$RC(\beta \mu, \alpha)$	1265,417
AxB	1	$H_0^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	60,750
TIPO II				
A (ajustado)	1	$H_0^{(2)}$	$RC(\alpha \mu, \beta)$	126,750
B (ajustado)	2	$H_0^{(5)}$	$RC(\beta \mu, \alpha)$	1265,417
AxB	1	$H_0^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	60,750
TIPO III				
A	1	$H_0^{(3)}$	$RC(\alpha \mu, \beta, \gamma)$	126,750
B	2	$H_0^{(6)}$	$RC(\beta \mu, \alpha, \gamma)$	1247,315
AxB	1	$H_0^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	60,750
TIPO IV				
A	1 *	$H_0^{(8)}$	—	126,750
B	2 *	$H_0^{(9)}$	—	1297,853
AxB	1	$H_0^{(7)}$	—	60,750

* NOTA: Existem outras hipóteses testáveis tipo IV que produzem diferentes somas de quadrados.

Tabela 22 - Análise de Variância dos Dados da Tabela 6
Através do Modelo com Dois Fatores e Interação,
para Ordenação B, A, AxB.

TIPO I				
Variações Consideradas	Graus de Liberdade	Hipóteses Testadas	RC ()	Soma de Quadrados
B (não ajust)	2	$H_o^{(4)}$	$RC(\beta \mu)$	1993,714
A (ajustado)	1	$H_o^{(2)}$	$RC(\alpha \mu, \beta)$	126,750
AxB	1	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	60,750
TIPO II				
B (ajustado)	2	$H_o^{(5)}$	$RC(\beta \mu, \alpha)$	1265,417
A (ajustado)	1	$H_o^{(2)}$	$RC(\alpha \mu, \beta)$	126,750
AxB	1	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	60,750
TIPO III				
B	2	$H_o^{(6)}$	$RC(\beta \mu, \alpha, \gamma)$	1247,315
A	1	$H_o^{(3)}$	$RC(\alpha \mu, \beta, \gamma)$	126,750
AxB	1	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	60,750
TIPO IV				
B	2 *	$H_o^{(9)}$	—	1297,853
A	1 *	$H_o^{(8)}$	—	126,750
AxB	1	$H_o^{(7)}$	—	60,750

* NOTA: Existem outras hipóteses testáveis tipo IV que produzem diferentes somas de quadrados.

4.2. 2º CASO: FATORIAL 3x4 COM QUATRO CASELAS VAZIAS

A Tabela 23 apresenta os dados fictícios referentes a um experimento fatorial envolvendo três espaçamentos entre plantas e quatro doses de fitohormônios para a cultivar Golden Delicious.

Tabela 23 - Número de Frutos/Planta

	dose 1 j=1	dose 2 j=2	dose 3 j=3	dose 4 j=4
i = 1	52,00	-	63,00	78,00
esp 1	-	-	47,00	-
Total	52,00 (1)	-	110,00 (2)	78,00 (1)
Média	52,00	-	55,00	78,00
i = 2	67,00	58,00	-	102,00
esp 2	-	-	-	87,00
Total	67,00 (1)	58,00 (1)	-	189,00 (2)
Média	67,00	58,00	-	94,50
i = 3	-	86,00	104,00	-
esp 3	-	77,00	-	-
Total	-	163,00 (2)	104,00 (1)	-
Média	-	81,50	104,00	-
Total	119,00 (2)	221,00 (3)	214,00 (3)	267,00 (3)
Média	59,50	73,67	71,33	89,00

A Tabela 24 apresenta o número de observações por casela.

Tabela 24 - Número de Observações por Casela

i	j				$n_{i.}$
	1	2	3	4	
1	1	0	2	1	4
2	1	1	0	2	4
3	0	2	1	0	3
$n_{.j}$	2	3	3	3	11

4.2.1. Modelo Linear

- Modelo superparametrizado dado em (22) assume a caracterização

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$$

onde:

y_{ijk} é a observação referente ao nível i do fator A (espaçamentos), nível j do fator B (doses) e k -ésima repetição;

μ é uma constante inerente aos dados;

α_i é o efeito do nível i do fator A (espaçamentos);

β_j é o efeito do nível j do fator B (doses);

γ_{ij} é o efeito da interação entre o nível i do fator A e nível j do fator B;

e_{ijk} é o erro aleatório associado à observação y_{ijk} , tal que, $e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$.

$i = 1, 2, 3$

$j = 1, 2, 3, 4$

$k = 0, \dots, n_{ij}$ é o número de observações por casela

$a = 3$ (total de níveis do fator A)

$b = 4$ (total de níveis do fator B)

- Modelo de médias de caselas dado por (31) que assume a caracterização

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$$

onde:

y_{ijk} e e_{ijk} tem a mesma descrição acima;

μ_{ij} é a média da população da qual foi retirada a amostra referente ao espaçamento i e dose j .

$$\mu^o = (W'W)^{-1}W'y$$

$$\mu^o = \begin{bmatrix} \mu_{11}^o \\ \mu_{13}^o \\ \mu_{14}^o \\ \mu_{21}^o \\ \mu_{22}^o \\ \mu_{24}^o \\ \mu_{32}^o \\ \mu_{33}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{11} \\ \bar{y}_{13} \\ \bar{y}_{14} \\ \bar{y}_{21} \\ \bar{y}_{22} \\ \bar{y}_{24} \\ \bar{y}_{32} \\ \bar{y}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52,00 \\ 55,00 \\ 78,00 \\ 67,00 \\ 58,00 \\ 94,50 \\ 81,50 \\ 104,00 \end{bmatrix}$$

4.2.2. Obtenção da Forma Geral de Funções Estimáveis

Considerando-se o modelo superparametrizado

$Y = X\theta + e$, onde:

E a matriz $(X'X)^{G2}$ é construída colocando-se as colunas da matriz $(X_1'X_1)^{-1}$ em lugar das colunas linearmente independentes e completando com zeros em lugar das demais colunas.

$$(X'X)^{G2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & -2 & 0 & 1/2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 2 & 0 & -3/2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & -3/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 3/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 3 & 0 & -1/2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 7/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3/2 & 0 & -1/2 & -3/2 & -3 & 0 & 3/2 & 9/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = (X'X)^{G2}(X'X)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \end{matrix}$$

Através de L_0 obtém-se a forma geral de funções estimáveis para o exemplo apresentado na Tabela 25.

Tabela 25 - Forma Geral de Funções Estimáveis para os Dados do Exemplo da Tabela 23.

Parâmetros	Coeficientes
μ	L_1
α_1	L_2
α_2	L_3
α_3	$L_1 - L_2 - L_3$
β_1	L_5
β_2	L_6
β_3	L_7
β_4	$L_1 - L_5 - L_6 - L_7$
γ_{11}	L_9
γ_{13}	L_{10}
γ_{14}	$L_2 - L_9 - L_{10}$
γ_{21}	$L_5 - L_9$
γ_{22}	$-L_1 + L_2 + L_3 + L_6 + L_7 - L_{10}$
γ_{24}	$L_1 - L_2 - L_5 - L_6 - L_7 + L_9 + L_{10}$
γ_{32}	$L_1 - L_2 - L_3 - L_7 + L_{10}$
γ_{33}	$L_7 - L_{10}$

Como oito símbolos L ($L_1, L_2, L_3, L_5, L_6, L_7, L_9$ e L_{10}) são envolvidos, o posto máximo da hipótese tem oito graus de liberdade.

A partir desta forma geral poderão ser obtidas alguns dos tipos de funções estimáveis fornecidas pelo SAS.

4.2.3. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo I

Inicia-se a construção das funções estimáveis

tipo I com a seguinte partição na matriz X:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde:

X_1 é formada pelas colunas da matriz X correspondentes a μ e ao fator A;

X_2 é formada pelas colunas de X correspondentes ao fator B;

X_3 é formada pela colunas de X correspondentes à interação AxB.

Para se obter as funções estimáveis tipo I para o fator A (espaçamentos), se irá partir da seguinte matriz:

$$G_1 = [X_1'X_1 \mid X_1'X_2 \mid X_1'X_3] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccccccc} 11 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$G_1^* = (X_1'X_1)^{-1}G_1 =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/4 & -2/3 & 1/6 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/4 & -5/12 & -1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

A soma de quadrados tipo I para o fator A corresponde a $R(\alpha|\mu)$. Em vista disto, para obter-se a função estimável tipo I para A deve-se tomar a primeira linha de G_1^* como zero (L_1 corresponde a μ).

Através de G_1^* obtém-se as funções estimáveis apresentadas na Tabela 26.

Tabela 26 - Funções Estimáveis Tipo I para A.

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
α_1	L_2
α_2	L_3
α_3	$-L_2 - L_3$
β_1	$1/4 L_2 + 1/4 L_3$
β_2	$-2/3 L_2 - 5/12 L_3$
β_3	$1/6 L_2 - 1/3 L_3$
β_4	$1/4 L_2 + 1/2 L_3$
γ_{11}	$1/4 L_2$
γ_{13}	$1/2 L_2$
γ_{14}	$1/4 L_2$
γ_{21}	$1/4 L_3$
γ_{22}	$1/4 L_3$
γ_{24}	$1/2 L_3$
γ_{32}	$-2/3 L_2 - 2/3 L_3$
γ_{33}	$-1/3 L_2 - 1/3 L_3$

Atribuindo-se valores a L_2 e L_3 obtém-se as hipóteses tipo I para o fator A.

Fazendo-se $L_2 = 1$, $L_3 = 0$, depois $L_2 = 0$ e $L_3 = 1$, obtém-se:

$$H_0^{(A)}: \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + 1/4 \beta_1 - 2/3 \beta_2 + 1/6 \beta_3 + 1/4 \beta_4 + 1/4 \gamma_{11} + \\ \quad + 1/2 \gamma_{13} + 1/4 \gamma_{14} - 2/3 \gamma_{32} - 1/3 \gamma_{33} = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + 1/4 \beta_1 - 5/12 \beta_2 - 1/3 \beta_3 + 1/2 \beta_4 + 1/4 \gamma_{21} + \\ \quad + 1/4 \gamma_{22} + 1/2 \gamma_{24} - 2/3 \gamma_{32} - 1/3 \gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

Que é uma hipótese sobre médias ponderadas de linhas não ajustadas para colunas. Equivalente a $R(\alpha|\mu)$ e é

de difícil interpretação, pois além dos parâmetros γ aparecem os parâmetros β , tornando-se praticamente impossível visualizar o que está sendo testado.

Esta hipótese tem dois graus de liberdade ($a-1 = 3-1 = 2$) e por isso dois símbolos L (L_2 e L_3) a ela associados.

Em termos dos parâmetros do Modelo M a hipótese fica

$$H_0^{(1)}: \begin{cases} \frac{1}{4} \mu_{11} + \frac{1}{2} \mu_{13} + \frac{1}{4} \mu_{14} = \frac{2}{3} \mu_{32} + \frac{1}{3} \mu_{33} \\ \frac{1}{4} \mu_{21} + \frac{1}{4} \mu_{22} + \frac{1}{2} \mu_{24} = \frac{2}{3} \mu_{32} + \frac{1}{3} \mu_{33} \end{cases}$$

que continua de difícil interpretação devido à presença dos coeficientes multiplicando os parâmetros μ .

Para obter-se a Soma de Quadrados tipo I para o fator A (espaçamentos), calcula-se:

$$R(\alpha|\mu) = SQ H_0^{(1)} = [B'_{(1)} \mu^0]' [B'_{(1)} (W'W)^{-1} B_{(1)}]^{-1} [B'_{(1)} \mu^0]$$

onde

$$B'_{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$R(\alpha|\mu) = SQ H_0^{(1)} = 1535,545$$

Prosseguindo com a obtenção das funções estimáveis tipo I para o fator B (doses), adota-se o seguinte gerador:

$$G_2 = (0 \mid X_2' M_1 X_2 \mid X_2' M_1 X_3)$$

$$M_1 = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1/4 & -1/2 & -3/4 & 3/4 & -1/2 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 17/12 & -2/3 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 3/2 & -1/2 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -2/3 & 5/3 & -1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 & -1/2 & 7/4 & -1/4 & -1/2 & 3/4 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2^* = (X_2'M_1X_2)^{-1}G_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4/9 & -1/27 & -11/27 & 5/9 & 1/27 & -16/27 & -1/27 & 1/27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1/6 & 13/18 & -5/9 & 1/6 & 5/18 & -4/9 & -5/18 & 5/18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ \end{matrix}$$

Através de $G_2^*\theta$ obtém-se as funções estimáveis tipo I para o fator B (doses) apresentadas na Tabela 27.

Tabela 27 - Funções Estimáveis Tipo I para B.

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
α_3	0
β_1	L_5
β_2	L_6
β_3	L_7
β_4	$-L_5 - L_6 - L_7$
γ_{11}	$4/9 L_5 - 1/6 L_7$
γ_{13}	$-1/27 L_5 + 1/3 L_6 + 13/18 L_7$
γ_{14}	$-11/27 L_5 - 1/3 L_6 - 5/9 L_7$
γ_{21}	$5/9 L_5 + 1/6 L_7$
γ_{22}	$1/27 L_5 + 2/3 L_6 + 5/18 L_7$
γ_{24}	$-16/27 L_5 - 2/3 L_6 - 4/9 L_7$
γ_{32}	$-1/27 L_5 + 1/3 L_6 - 5/18 L_7$
γ_{33}	$1/27 L_5 - 1/3 L_6 + 5/18 L_7$

Para obter-se a hipótese tipo I para B, faz-se $L_5 = 1$, $L_6 = 0$ e $L_7 = 0$; $L_5 = 0$, $L_6 = 1$ e $L_7 = 0$; $L_5 = 0$, $L_6 = 0$ e $L_7 = 1$.

$$H_0^{(5)}: \begin{cases} \beta_1 - \beta_4 + \frac{4}{9} \gamma_{11} - \frac{1}{27} \gamma_{13} - \frac{11}{27} \gamma_{14} + \frac{5}{9} \gamma_{21} + \frac{1}{27} \gamma_{22} - \frac{16}{27} \gamma_{24} - \\ \quad - \frac{1}{27} \gamma_{32} + \frac{1}{27} \gamma_{33} = 0 \\ \beta_2 - \beta_4 + \frac{1}{3} \gamma_{13} - \frac{1}{3} \gamma_{14} + \frac{2}{3} \gamma_{22} - \frac{2}{3} \gamma_{24} + \frac{1}{3} \gamma_{32} - \frac{1}{3} \gamma_{33} = 0 \\ \beta_3 - \beta_4 - \frac{1}{6} \gamma_{11} + \frac{13}{18} \gamma_{13} - \frac{5}{9} \gamma_{14} + \frac{1}{6} \gamma_{21} + \frac{5}{18} \gamma_{22} - \frac{4}{9} \gamma_{24} - \\ \quad - \frac{5}{18} \gamma_{32} + \frac{5}{18} \gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

que é uma hipótese sobre médias ponderadas de colunas ajustadas para linhas.

A hipótese tipo I para o fator B não envolve o parâmetro α . A soma de quadrados tipo I tem ajuste sequencial e por isso a SQ para o fator B equivale a $R(\beta|\mu, \alpha)$ quando o modelo é especificado para a PROC GLM na ordem A, B, A*B.

Esta hipótese tem três graus de liberdade e por isso, três símbolos L (L_5 , L_6 e L_7) estão associados a ela.

Nota-se que $H_0^{(5)}$ apesar de não conter os parâmetros α ainda é de difícil interpretação, pois envolve funções pouco comuns dos parâmetros γ .

Em termos do Modelo M, $H_0^{(5)}$ fica:

$$H_0^{(5)}: \begin{cases} \frac{4}{9} \mu_{11} - \frac{1}{27} \mu_{13} - \frac{11}{27} \mu_{14} + \frac{5}{9} \mu_{21} + \frac{1}{27} \mu_{22} - \frac{16}{27} \mu_{24} - \\ \quad - \frac{1}{27} \mu_{32} + \frac{1}{27} \mu_{33} = 0 \\ \frac{1}{3} \mu_{13} - \frac{1}{3} \mu_{14} + \frac{2}{3} \mu_{22} - \frac{2}{3} \mu_{24} + \frac{1}{3} \mu_{32} - \frac{1}{3} \mu_{33} = 0 \\ -\frac{1}{6} \mu_{11} + \frac{13}{18} \mu_{13} - \frac{5}{9} \mu_{14} + \frac{1}{6} \mu_{21} + \frac{5}{18} \mu_{22} - \frac{4}{9} \mu_{24} - \\ \quad - \frac{5}{18} \mu_{32} + \frac{5}{18} \mu_{33} = 0 \end{cases}$$

Para obter-se sua soma de quadrados, calcula-se

$$R(\beta|\mu, \alpha) = SQ H_0^{(5)} = [B'_{(5)} \mu^0]' [B'_{(5)} (W'W)^{-1} B_{(5)}]^{-1} [B'_{(5)} \mu^0]$$

onde:

$$B'_{(5)} = \begin{bmatrix} 4/9 & -1/27 & -11/27 & 5/9 & 1/27 & -16/27 & -1/27 & 1/27 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/6 & 13/18 & -5/9 & 1/6 & 5/18 & -4/9 & -5/18 & 5/18 \end{bmatrix}$$

$$R(\beta|\mu, \alpha) = SQ H_0^{(5)} = 1815,250$$

Para a interação entre espaçamentos e doses, as funções estimáveis tipo I são obtidas através de:

$$G_3 = (0 \mid 0 \mid X'_3 M_2 X_3)$$

onde $M_2 = M_1 - M_1 X_2 (X'_2 M_1 X_2)^{-1} X'_2 M_1 =$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & -1/18 & -1/18 & -2/9 & -1/3 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & -1/18 & -1/18 & 1/9 \\ 1/18 & 61/108 & -47/108 & -2/27 & 1/18 & -7/54 & 1/27 & 1/27 & 7/108 & 7/108 & -7/54 \\ -1/18 & -47/108 & 61/108 & 2/27 & 1/18 & -7/54 & 1/27 & 1/27 & 7/108 & 7/108 & -7/54 \\ -2/9 & -2/27 & -2/27 & 10/27 & 2/9 & 4/27 & -5/27 & -5/27 & -2/27 & -2/27 & 4/27 \\ -1/3 & 1/18 & 1/18 & 2/9 & 1/3 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & 1/18 & 1/18 & -1/9 \\ 1/9 & -7/54 & -7/54 & 4/27 & -1/9 & 7/27 & -2/27 & -2/27 & -7/54 & -7/54 & 7/27 \\ 1/9 & 1/27 & 1/27 & -5/27 & -1/9 & -2/27 & 16/27 & -11/27 & 1/27 & 1/27 & -2/27 \\ 1/9 & 1/27 & 1/27 & -5/27 & -1/9 & -2/27 & -11/27 & 16/27 & 1/27 & 1/27 & -2/27 \\ -1/18 & 7/108 & 7/108 & -2/27 & 1/18 & -7/54 & 1/27 & 1/27 & 61/108 & -47/108 & -7/54 \\ -1/18 & 7/108 & 7/108 & -2/27 & 1/18 & -7/54 & 1/27 & 1/27 & -47/108 & 61/108 & -7/54 \\ 1/9 & -7/54 & -7/54 & 4/27 & -1/9 & 7/27 & -2/27 & -2/27 & -7/54 & -7/54 & 7/27 \end{bmatrix}$$

$$G_3^* = (X'_3 M_2 X_3)^{-1} G_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \\ L \end{matrix}$$

$G_3^* \theta$ fornece as funções estimáveis tipo I para a interação AxB apresentadas na Tabela 28.

Tabela 28 - Funções Estimáveis Tipo I para AxB.

Parâmetros	Coefficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
α_3	0
β_1	0
β_2	0
β_3	0
β_4	0
γ_{11}	L_9
γ_{13}	L_{10}
γ_{14}	$-L_9 - L_{10}$
γ_{21}	$-L_9$
γ_{22}	$-L_{10}$
γ_{24}	$L_9 + L_{10}$
γ_{32}	L_{10}
γ_{33}	$-L_{10}$

Como dois símbolos L (L_9 e L_{10}) estão envolvidos, a hipótese associada tem dois graus de liberdade.

Fazendo-se, digamos, L_9 igual a 1, L_{10} igual a zero; depois L_9 igual a zero e L_{10} igual a 1, obtém-se:

$$H_0^{(7)}: \begin{cases} \gamma_{11} - \gamma_{14} - \gamma_{21} + \gamma_{24} = 0 \\ \gamma_{13} - \gamma_{14} - \gamma_{22} + \gamma_{24} + \gamma_{32} - \gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

A hipótese sobre a interação é livre dos outros parâmetros.

Caso não houvessem caselas vazias neste

exemplo, haveriam $(a-1)(b-1) = 6$ graus de liberdade para a interação que seria composta por seis funções lineares deltas(Δ) linearmente independentes.

Neste caso, a interação tem somente $S - (a+b-1) = 8 - 6 = 2$ graus de liberdade e portanto só duas funções linearmente independentes poderão ser testadas.

Observando-se o padrão dos dados, verifica-se que $\Delta_{11,24}$ é estimável, pois todos os seus componentes correspondem a casela completas.

$$\Delta_{11,24} = \mu_{11} - \mu_{14} - \mu_{21} + \mu_{24}$$

Além deste, não se dispõe de outro Δ cujos elementos sejam todos estimáveis.

Mas uma soma ou diferença entre deltas (Δ) pode ser estimável, pois existe outro grau de liberdade para interação.

Assim

$$\begin{aligned}\Delta_{13,34} + \Delta_{24,32} &= (\mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{33} + \mu_{34}) + (\mu_{24} - \mu_{22} - \mu_{34} + \mu_{32}) \\ &= \mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{33} + \mu_{24} - \mu_{22} + \mu_{32}\end{aligned}$$

e então

$$H_0^{(7)}: \begin{cases} \Delta_{11,24} = 0 \\ \Delta_{13,34} + \Delta_{24,32} = 0 \end{cases}$$

Em termos do Modelo M, a hipótese $H_0^{(7)}$, fica:

$$H_0^{(7)}: \begin{cases} \mu_{11} - \mu_{14} - \mu_{21} + \mu_{24} = 0 \\ \mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{22} + \mu_{24} + \mu_{32} - \mu_{33} = 0 \end{cases}$$

A soma de quadrados tipo I para interação AxB é obtida, calculando-se

$$R(\gamma | \mu, \alpha, \beta) = SQH_0^{(7)} = \left[B'_{(7)} \mu^0 \right]' \left[B'_{(7)} (W'W)^{-1} B_{(7)} \right]^{-1} \left[B'_{(7)} \mu^0 \right]$$

onde

$$B'_{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R(\gamma | \mu, \alpha, \beta) = SQH_0^{(7)} = 24,750$$

4.2.4. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo II

Para obtenção das funções estimáveis tipo II para o fator A (espaçamentos) considera-se que o efeito do fator A está contido no efeito da interação AxB.

A construção se dá da seguinte forma:

- as colunas de L associadas ao fator B serão preenchidas por zeros;
- a submatriz associada com o fator A será $(X'_1 M X_1)^{-1} (X'_1 M X_1)$;
- a submatriz associada com o fator AxB será

$$(X'_1 M X_1)^{-1} (X'_1 M X_2)$$

onde:

X_0 é formada pelas colunas da matriz X correspondentes a μ e ao fator B.

X_1 é formada pelas colunas de X correspondentes ao fator A.

X_2 é formada pelas colunas de X correspondentes à interação AxB.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = I - X_0(X_0'X_0)^{-1}X_0' =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$L = \left[(X_1'M X_1)^{-1} (X_1'M X_1) \mid \phi \mid (X_1'M X_1)^{-1} (X_1'M X_2) \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 11/18 & 2/9 & -1/6 & 7/18 & -2/9 & -7/18 & -11/18 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 7/18 & -2/9 & 1/6 & 11/18 & 2/9 & -11/18 & -7/18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \\ L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

Através de $L\theta$ obtém-se as funções estimáveis tipo II para o fator A (espaçamentos), apresentadas na Tabela 29.

Tabela 29 - Funções Estimáveis Tipo II para A.

Parâmetros	Coefficientes
μ	0
α_1	L_2
α_2	L_3
α_3	$-L_2 - L_3$
β_1	0
β_2	0
β_3	0
β_4	0
γ_{11}	$1/6 L_2 - 1/6 L_3$
γ_{13}	$11/18 L_2 + 7/18 L_3$
γ_{14}	$2/9 L_2 - 2/9 L_3$
γ_{21}	$-1/6 L_2 + 1/6 L_3$
γ_{22}	$7/18 L_2 + 11/18 L_3$
γ_{24}	$-2/9 L_2 + 2/9 L_3$
γ_{32}	$-7/18 L_2 - 11/18 L_3$
γ_{33}	$-11/18 L_2 - 7/18 L_3$

Para obter-se uma hipótese tipo II para o fator A, faz-se primeiro, $L_2 = 1$ e $L_3 = 0$; depois, $L_2 = 0$ e $L_3 = 1$.

$$H_o^{(2)}: \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + \frac{1}{6} \gamma_{11} + \frac{11}{18} \gamma_{13} + \frac{2}{9} \gamma_{14} - \frac{1}{6} \gamma_{21} + \frac{7}{18} \gamma_{22} \\ \quad - \frac{2}{9} \gamma_{24} - \frac{7}{18} \gamma_{32} - \frac{11}{18} \gamma_{33} = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 - \frac{1}{6} \gamma_{11} + \frac{7}{18} \gamma_{13} - \frac{2}{9} \gamma_{14} + \frac{1}{6} \gamma_{21} + \frac{11}{18} \gamma_{22} \\ \quad + \frac{2}{9} \gamma_{24} - \frac{11}{18} \gamma_{32} - \frac{7}{18} \gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

$H_o^{(2)}$ é a hipótese sobre médias ponderadas de linhas ajustadas para colunas. Em termos da notação RC), a hipótese $H_o^{(2)}$ é dada por $RC(\alpha | \mu, \beta)$. Apesar de não envolver os parâmetros β , a hipótese é difícil de interpretar pois envolve combinações lineares dos parâmetros γ , bastante complexas.

No Modelo M, $H_o^{(2)}$ fica

$$H_o^{(2)}: \begin{cases} \frac{1}{6} \mu_{11} + \frac{11}{18} \mu_{13} + \frac{2}{9} \mu_{14} - \frac{1}{6} \mu_{21} + \frac{7}{18} \mu_{22} \\ \quad - \frac{2}{9} \mu_{24} - \frac{7}{18} \mu_{32} - \frac{11}{18} \mu_{33} = 0 \\ -\frac{1}{6} \mu_{11} + \frac{7}{18} \mu_{13} - \frac{2}{9} \mu_{14} + \frac{1}{6} \mu_{21} + \frac{11}{18} \mu_{22} \\ \quad + \frac{2}{9} \mu_{24} - \frac{11}{18} \mu_{32} - \frac{7}{18} \mu_{33} = 0 \end{cases}$$

A soma de quadrados tipo II para o fator A é dada por

$$RC(\alpha | \mu, \beta) = SQH_o^{(2)} = [B'_{(2)} \mu^0]' [B'_{(2)} (W'W)^{-1} B_{(2)}]^{-1} [B'_{(2)} \mu^0]$$

$$\text{onde } B'_{(2)} = \begin{bmatrix} 1/6 & 11/18 & 2/9 & -1/6 & 7/18 & -2/9 & -7/18 & -11/18 \\ -1/6 & 7/18 & -2/9 & 1/6 & 11/18 & 2/9 & -11/18 & -7/18 \end{bmatrix}$$

$$RC(\alpha | \mu, \beta) = SQH_o^{(2)} = 2238,083$$

Para obtenção das funções estimáveis tipo II

para o fator B, considera-se que o efeito do fator B está contido no efeito da interação AxB e não está contido no efeito do fator A.

Então

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

X_0 é formada pelas colunas de X correspondentes à μ e ao fator A;

X_1 é formada pelas colunas de X correspondentes ao fator B;

X_2 é formada pelas colunas de X correspondentes à interação AxB.

Observa-se que para a construção das funções estimáveis tipo II, procede-se de forma independente para cada fator. Isto não ocorre com as funções estimáveis tipo I pois seu ajuste é sequencial e sua obtenção para um

determinado fator depende do fator que o antecede.

O gerador das funções estimáveis tipo II para o fator B é dado por

$$L = \left[\phi \mid (X_1' M X_1)^{-1} X_1' M X_1 \mid (X_1' M X_1)^{-1} X_1' M X_2 \right]$$

$$M_1 = I - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' =$$

$$= \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$L = \left[\begin{array}{cccc|ccc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4/9 & -1/27 & -11/27 & 5/9 & 1/27 & -16/27 & -1/27 & 1/27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1/6 & 13/18 & -5/9 & 1/6 & 5/18 & -4/9 & -5/18 & 5/18 \end{array} \right] \begin{matrix} L_9 \\ L_6 \\ L_7 \end{matrix}$$

L₀ dá as funções estimáveis tipo II para o fator B (doses), apresentadas na Tabela 30.

Tabela 30 - Funções Estimáveis Tipo II para B.

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
α_3	0
β_1	L_5
β_2	L_6
β_3	L_7
β_4	$-L_5 - L_6 - L_7$
γ_{11}	$4/9 L_5 - 1/6 L_7$
γ_{13}	$-1/27 L_5 + 1/3 L_6 + 13/18 L_7$
γ_{14}	$-11/27 L_5 - 1/3 L_6 - 5/9 L_7$
γ_{21}	$5/9 L_5 + 1/6 L_7$
γ_{22}	$1/27 L_5 + 2/3 L_6 + 5/18 L_7$
γ_{24}	$-16/27 L_5 - 2/3 L_6 - 4/9 L_7$
γ_{32}	$-1/27 L_5 + 1/3 L_6 - 5/18 L_7$
γ_{33}	$1/27 L_5 - 1/3 L_6 + 5/18 L_7$

Observa-se que a Tabela 30 é igual a Tabela 27 e como era esperado, as funções estimáveis tipos I e II para o fator B são iguais, devido ao ajuste sequencial das funções estimáveis tipo I, ambas equivalem a $R(\beta|\mu, \alpha)$.

Para obtenção das funções estimáveis tipo II para a interação AxB, basta tomar-se a forma geral de funções estimáveis apresentada na Tabela 25 e fazer-se L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 e L_6 iguais a zero.

Tabela 31 - Funções Estimáveis Tipo II para AxB

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
α_3	0
β_1	0
β_2	0
β_3	0
β_4	0
γ_{11}	L_9
γ_{13}	L_{10}
γ_{14}	$-L_9 - L_{10}$
γ_{21}	$-L_9$
γ_{22}	$-L_{10}$
γ_{24}	$L_9 + L_{10}$
γ_{32}	L_{10}
γ_{33}	$-L_{10}$

Que embora obtida de forma bem mais simples, é a mesma obtida através de $G_3^* \theta$ para a função estimável tipo I.

Os quatro tipos de funções estimáveis para a interação são iguais, pois as hipóteses para a interação aparecem sempre ajustadas para os demais efeitos.

4.2.5. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo III

Para obter-se as funções estimáveis tipo III para o fator A:

- tomar a forma geral de funções estimáveis e igualar L_5 , L_6 e L_7 a zero;
- obter L_9 e L_{10} em função de L_2 e L_3 , a fim de fazer a hipótese de A ortogonal à hipótese de $A \times B$, da mesma forma apresentada para o fator B no exemplo anterior .

Obtém-se $L_9 = 1/5 L_2 - 1/5 L_3$

$$L_{10} = 3/5 L_2 + 2/5 L_3$$

que dão origem as funções estimáveis tipo III para o fator A (espaçamentos), apresentadas na Tabela 32.

Tabela 32 - Funções Estimáveis Tipo III para A.

Parâmetros	Coeficientes	
μ	0	
α_1	L_2	
α_2	L_3	
α_3	$-L_2 - L_3$	
β_1	0	
β_2	0	
β_3	0	
β_4	0	
γ_{11}	L_9	$= 1/5 L_2 - 1/5 L_3$
γ_{13}	L_{10}	$= 3/5 L_2 + 2/5 L_3$
γ_{14}	$L_2 - L_9 - L_{10}$	$= 1/5 L_2 - 1/5 L_3$
γ_{21}	$-L_9$	$= -1/5 L_2 + 1/5 L_3$
γ_{22}	$L_2 + L_3 - L_{10}$	$= 2/5 L_2 + 3/5 L_3$
γ_{24}	$L_2 + L_9 + L_{10}$	$= -1/5 L_2 + 1/5 L_3$
γ_{32}	$-L_2 + L_3 + L_{10}$	$= -2/5 L_2 - 3/5 L_3$
γ_{33}	$-L_{10}$	$= -3/5 L_2 - 2/5 L_3$

Somando-se os coeficientes de γ_{11} , γ_{13} e γ_{14} , obtém-se L_2 que é o coeficiente de α_1 . Somando-se os coeficientes de γ_{21} , γ_{22} e γ_{24} , obtém-se L_3 que é o coeficiente de α_2 . Somando-se os coeficientes de γ_{32} e γ_{33} obtém-se $-L_2 - L_3$ que é o coeficiente de α_3 . A soma dos coeficientes de γ_{11} e γ_{21} deve ser zero (coeficiente de β_1), assim também para γ_{13} mais γ_{33} (β_3) e γ_{22} mais γ_{32} (β_2).

Concluindo-se que as hipóteses são ortogonais.

Fazendo-se L_2 igual a 1 e L_3 igual a zero, para a primeira linha; L_2 igual a zero e L_3 igual a 1 para a segunda linha, obtém-se a hipótese $Ho^{(a)}$.

$$Ho^{(a)}: \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + \frac{1}{5}\gamma_{11} + \frac{3}{5}\gamma_{13} + \frac{1}{5}\gamma_{14} - \frac{1}{5}\gamma_{21} + \frac{2}{5}\gamma_{22} - \\ \quad - \frac{1}{5}\gamma_{24} - \frac{2}{5}\gamma_{32} - \frac{3}{5}\gamma_{33} = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 - \frac{1}{5}\gamma_{11} + \frac{2}{5}\gamma_{13} - \frac{1}{5}\gamma_{14} + \frac{1}{5}\gamma_{21} + \frac{3}{5}\gamma_{22} + \\ \quad + \frac{1}{5}\gamma_{24} - \frac{3}{5}\gamma_{32} - \frac{2}{5}\gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

que é uma hipótese sobre médias não ponderadas de linhas.

As somas de quadrados tipo III se equivalem a $RC(\alpha|\mu, \beta, \gamma)$ em termos da notação $RC(\cdot)$.

A hipótese $Ho^{(a)}$ em termos dos parâmetros do Modelo Σ seria

$$Ho^{(a)}: \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

e a hipótese $Ho^{(a)}$ anterior é a hipótese tipo III para A escrita em termos dos parâmetros do Modelo S. Daí a justificativa do aparecimento dos parâmetros γ .

As funções estimáveis tipo III para o fator A também podem ser obtidas pelo Método de SEARLE (1980), da seguinte forma.

O primeiro passo é construir-se contrastes baseados nos parâmetros α , que não envolvam os β e que considerem somente as caselas que possuem dados.

Contrastes

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 1/2 (\gamma_{11} + \gamma_{14}) - 1/2 (\gamma_{21} + \gamma_{24})$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 + \gamma_{13} - \gamma_{33}$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 + \gamma_{22} - \gamma_{32}$$

Usando coeficientes m_1 , m_2 e m_3 (um para cada linha do contraste), constrói-se uma função linear

$$\begin{aligned} f = & m_1 [\alpha_1 - \alpha_2 + 1/2(\gamma_{11} + \gamma_{14}) - 1/2(\gamma_{21} + \gamma_{24})] + \\ & + m_2 [\alpha_1 - \alpha_3 + \gamma_{13} - \gamma_{33}] + m_3 [\alpha_2 - \alpha_3 + \gamma_{22} - \gamma_{32}] \end{aligned}$$

O contraste para compor $R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$ já foi visto ser:

$$H_0^{(7)}: \begin{cases} \gamma_{11} - \gamma_{14} - \gamma_{21} + \gamma_{24} = 0 \\ \gamma_{13} - \gamma_{14} - \gamma_{22} + \gamma_{24} + \gamma_{32} - \gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

Fazendo-se os contrastes de α ortogonais a estes, obtém-se:

Tabela 33 - Coeficientes para a Combinação Linear f e para a Interação

α	γ					
	α_1	α_2	α_3	γ_{11}	γ_{13}	γ_{14}
f	$m_1 + m_2$	$-m_1 + m_3$	$-m_2 - m_3$	$1/2 m_1$	m_2	$1/2 m_1$
contraste γ	0	0	0	1	1	-2

	γ				
	γ_{21}	γ_{22}	γ_{24}	γ_{32}	γ_{33}
f	$-1/2 m_1$	m_3	$-1/2 m_1$	$-m_3$	$-m_2$
contraste γ	-1	-1	2	1	-1

A ortogonalidade entre as duas hipóteses implica:

$$1/2 m_1 + m_2 - m_1 + 1/2 m_1 - m_3 - m_1 - m_3 + m_2 = 0$$

$$m_1 = 2m_2 - 2m_3$$

A hipótese para o fator A tem dois graus de liberdade, então existem dois valores arbitrários para os m , L_2 e L_3 .

$$\text{Sendo } L_2 \alpha_1 + L_3 \alpha_2,$$

$$\text{então } L_2 = m_1 + m_2 \quad \text{e} \quad L_3 = -m_1 + m_3$$

obtendo-se

$$m_1 = 2/5 L_2 - 2/5 L_3$$

$$m_2 = 3/5 L_2 + 2/5 L_3$$

$$m_3 = 2/5 L_2 + 3/5 L_3$$

Substituindo em f, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 f = & L_2 \alpha_1 + L_3 \alpha_2 + \left[-L_2 - L_3 \right] \alpha_3 + \left[1/\sqrt{5} L_2 - 1/\sqrt{5} L_3 \right] \gamma_{11} + \\
 & + \left[3/\sqrt{5} L_2 + 2/\sqrt{5} L_3 \right] \gamma_{13} + \left[1/\sqrt{5} L_2 - 1/\sqrt{5} L_3 \right] \gamma_{14} + \left[-1/\sqrt{5} L_2 + 1/\sqrt{5} L_3 \right] \gamma_{21} + \\
 & + \left[2/\sqrt{5} L_2 + 3/\sqrt{5} L_3 \right] \gamma_{22} + \left[-1/\sqrt{5} L_2 + 1/\sqrt{5} L_3 \right] \gamma_{24} + \left[-2/\sqrt{5} L_2 - 3/\sqrt{5} L_3 \right] \gamma_{32} + \\
 & + \left[-3/\sqrt{5} L_2 - 2/\sqrt{5} L_3 \right] \gamma_{33}
 \end{aligned}$$

que são as funções estimáveis apresentadas na Tabela 27.

A hipótese $H_0^{(3)}$ em termos dos parâmetros do Modelo M fica:

$$H_0^{(3)}: \begin{cases} \frac{\mu_{11} + 3\mu_{13} + \mu_{14} - \mu_{21} + 2\mu_{22} - \mu_{24} - 2\mu_{32} - 3\mu_{33}}{5} = 0 \\ -\frac{\mu_{11} + 2\mu_{13} - \mu_{14} + \mu_{21} + 3\mu_{22} + \mu_{24} - 3\mu_{32} - 2\mu_{33}}{5} = 0 \end{cases}$$

Observa-se que a primeira linha da hipótese faz a comparação entre linhas um e três (α_1 e α_3). Porém, ambas envolvem uma comparação das médias da linha excluída entre si e apresentam coeficientes, tornando-a de difícil interpretação.

A soma de quadrados tipo III para o fator A, é obtida calculando-se

$$R(\alpha | \mu, \beta, \gamma) = SQH_0^{(3)} = \left[B'_{(3)} \mu^0 \right]' \left[B'_{(3)} (W'W)^{-1} B_{(3)} \right]^{-1} \left[B'_{(3)} \mu^0 \right]$$

$$\text{onde } B'_{(3)} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$R(\alpha | \mu, \beta, \gamma) = SQH_0^{(3)} = 2212,804$$

Observe que neste caso, $H_0^{(3)}$ é bem diferente de $H_0^{(2)}$.

Para obter-se as funções estimáveis tipo III para o fator B:

- tomar a forma geral de funções estimáveis, apresentada na Tabela 25 e igualar L_1 , L_2 e L_3 a zero;
- obter L_9 e L_{10} em função de L_5 , L_6 e L_7 , de modo a tornar a hipótese de B ortogonal à hipótese de $A \times B$, da mesma forma apresentada no exemplo anterior para o fator B, obtém-se

$$L_9 = 1/2 L_5 + 1/10 L_6 - 1/10 L_7$$

$$L_{10} = 3/10 L_6 + 7/10 L_7 .$$

As funções estimáveis tipo II para o fator B obtidas por este processo estão apresentadas na Tabela 34.

Tabela 34 - Funções Estimáveis Tipo III para B.

Parâmetros	Coefficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
α_3	0
β_1	L_5
β_2	L_6
β_3	L_7
β_4	$-L_5 - L_6 - L_7$
γ_{11}	$L_9 = 1/2 L_5 + 1/10 L_6 - 1/10 L_7$
γ_{13}	$L_{10} = 3/10 L_6 + 7/10 L_7$
γ_{14}	$-L_9 - L_{10} = -1/2 L_5 - 2/5 L_6 - 3/5 L_7$
γ_{21}	$L_5 - L_9 = 1/2 L_5 - 1/10 L_6 + 1/10 L_7$
γ_{22}	$L_6 + L_7 - L_{10} = 7/10 L_6 + 3/10 L_7$
γ_{24}	$-L_5 - L_6 - L_7 + L_9 + L_{10} = -1/2 L_5 - 3/5 L_6 - 2/5 L_7$
γ_{32}	$-L_7 + L_{10} = 3/10 L_6 - 3/10 L_7$
γ_{33}	$L_7 - L_{10} = -3/10 L_6 + 3/10 L_7$

Somando-se os coeficientes de γ_{11} e γ_{21} ,
obtem-se L_5 que é o coeficiente de β_1 .

Somando-se os coeficientes de γ_{22} e γ_{32} ,
obtem-se L_6 que é o coeficiente de β_2 .

Somando-se os coeficientes de γ_{13} e γ_{33} ,
obtem-se L_7 (coeficiente de β_3).

Somando-se os coeficientes de γ_{14} e γ_{24} ,
obtem-se $-L_5 - L_6 - L_7$ (coeficiente de β_4).

Da mesma forma as somas dos coeficientes de
 γ_{11} , γ_{13} , γ_{14} ; γ_{21} , γ_{22} , γ_{24} e γ_{32} , γ_{33} devem ser zero
(coeficientes dos parâmetros α).

Uma hipótese tipo III para o fator B (doses), pode ser obtida, considerando-se : $L_5 = 1$, $L_6 = 0$ e $L_7 = 0$; $L_5 = 0$, $L_6 = 1$ e $L_7 = 0$; $L_5 = 0$, $L_6 = 0$ e $L_7 = 1$.

$$H_0^{(6)}: \begin{cases} \beta_1 - \beta_4 + \frac{1}{2} \gamma_{11} - \frac{1}{2} \gamma_{14} + \frac{1}{2} \gamma_{21} - \frac{1}{2} \gamma_{24} = 0 \\ \beta_2 - \beta_4 + \frac{1}{10} \gamma_{11} + \frac{3}{10} \gamma_{13} - \frac{2}{5} \gamma_{14} - \frac{1}{10} \gamma_{21} + \\ \quad + \frac{7}{10} \gamma_{22} - \frac{3}{5} \gamma_{24} + \frac{3}{10} \gamma_{32} - \frac{3}{10} \gamma_{33} = 0 \\ \beta_3 - \beta_4 - \frac{1}{10} \gamma_{11} + \frac{7}{10} \gamma_{13} - \frac{3}{5} \gamma_{14} + \frac{1}{10} \gamma_{21} + \\ \quad + \frac{3}{10} \gamma_{22} - \frac{2}{5} \gamma_{24} - \frac{3}{10} \gamma_{32} + \frac{3}{10} \gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

que é uma hipótese sobre médias não ponderadas de colunas.

Estes contrastes compõe $RC(\beta | \mu, \alpha, \gamma)$. $H_0^{(6)}$ em termos dos parâmetros do Modelo Σ se equivale a

$$H_0^{(6)}: \beta_j = 0 \quad \forall j$$

e assim se justifica a presença dos parâmetros γ quando a escrevemos em termos dos parâmetros do Modelo S.

A hipótese $H_0^{(6)}$ em termos dos parâmetros do Modelo M fica:

$$H_0^{(6)}: \begin{cases} \frac{\mu_{11} - \mu_{14} + \mu_{21} - \mu_{24}}{2} = 0 \\ \frac{\mu_{11} + 3\mu_{13} - 4\mu_{14} - \mu_{21} + 7\mu_{22} - 6\mu_{24} + 3\mu_{32} - 3\mu_{33}}{10} = 0 \\ \frac{-\mu_{11} + 7\mu_{13} - 6\mu_{14} + \mu_{21} + 3\mu_{22} - 4\mu_{24} - 3\mu_{32} + 3\mu_{33}}{10} = 0 \end{cases}$$

$$\beta_s = W_s^{-1} W \beta$$

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/8 & 1/12 & 1/8 & 1/8 & 1/12 & 1/8 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 4/15 & 1/8 & -1/8 & 1/15 & -1/8 & -1/15 & -4/15 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/8 & 1/15 & -1/8 & 1/8 & 4/15 & 1/8 & -4/15 & -1/15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/8 & -1/4 & -1/8 & 3/8 & -1/4 & -1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/40 & 1/20 & -1/40 & -9/40 & 9/20 & -9/40 & 3/10 & -3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & -9/40 & 9/20 & -9/40 & -1/40 & 1/20 & -1/40 & -3/10 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/10 & -1/10 & -2/10 & -3/10 & 1/10 & 1/5 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/10 & 2/10 & -1/10 & 1/10 & -2/10 & 1/10 & 1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$\beta' = [\mu \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{14} \gamma_{21} \gamma_{22} \gamma_{24} \gamma_{32} \gamma_{33}]$$

Assim

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \alpha_1 - \frac{1}{3} \alpha_2 - \frac{1}{3} \alpha_3 + \frac{1}{5} \gamma_{11} + \frac{4}{15} \gamma_{12} + \frac{1}{5} \gamma_{14} - \frac{1}{5} \gamma_{21} + \frac{1}{15} \gamma_{22} - \frac{1}{5} \gamma_{24} - \frac{1}{15} \gamma_{32} - \frac{4}{15} \gamma_{33}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} \alpha_1 + \frac{2}{3} \alpha_2 - \frac{1}{3} \alpha_3 - \frac{1}{5} \gamma_{11} + \frac{1}{15} \gamma_{12} - \frac{1}{5} \gamma_{14} + \frac{1}{5} \gamma_{21} + \frac{4}{15} \gamma_{22} + \frac{1}{5} \gamma_{24} - \frac{4}{15} \gamma_{32} - \frac{1}{15} \gamma_{33}$$

$$\beta_1 = \frac{3}{4} \beta_1 - \frac{1}{4} \beta_2 - \frac{1}{4} \beta_3 - \frac{1}{4} \beta_4 + \frac{3}{8} \gamma_{11} - \frac{1}{4} \gamma_{12} - \frac{1}{8} \gamma_{14} + \frac{3}{8} \gamma_{21} - \frac{1}{4} \gamma_{22} - \frac{1}{8} \gamma_{24}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{4} \beta_1 + \frac{3}{4} \beta_2 - \frac{1}{4} \beta_3 - \frac{1}{4} \beta_4 - \frac{1}{40} \gamma_{11} + \frac{1}{20} \gamma_{12} - \frac{1}{40} \gamma_{14} - \frac{9}{40} \gamma_{21} + \frac{9}{20} \gamma_{22} - \frac{9}{40} \gamma_{24} + \frac{3}{10} \gamma_{32} - \frac{3}{10} \gamma_{33}$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{4} \beta_1 - \frac{1}{4} \beta_2 + \frac{3}{4} \beta_3 - \frac{1}{4} \beta_4 - \frac{9}{40} \gamma_{11} + \frac{9}{20} \gamma_{12} - \frac{9}{40} \gamma_{14} - \frac{1}{40} \gamma_{21} + \frac{1}{20} \gamma_{22} - \frac{1}{40} \gamma_{24} - \frac{3}{10} \gamma_{32} + \frac{3}{10} \gamma_{33}$$

Convertendo-se as hipóteses $H_0^{(9)}$ e $H_0^{(6)}$ em

termos dos parâmetros do Modelo S.

Observa-se que se nas funções estimáveis tipo III para A, tomar-se primeiro $L_2 = 2/3$ e $L_3 = -1/3$ e depois

$L_2 = -1/3$ e $L_3 = 2/3$, obtém-se a hipótese $H_0^{(9)}$:
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

escrita em função dos parâmetros α e γ .

Se nas funções estimáveis tipo III para B, considerar-se

$$L_5 = 3/4, \quad L_6 = -1/4 \quad \text{e} \quad L_7 = -1/4;$$

$$L_5 = -1/4, \quad L_6 = 3/4 \quad \text{e} \quad L_7 = -1/4;$$

$$L_5 = -1/4, \quad L_6 = -1/4 \quad \text{e} \quad L_7 = 3/4.$$

serão obtidas as hipóteses $H_0^{(10)}$:
$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases} \quad \text{em termos dos}$$

parâmetros β e γ .

4.2.6. Obtenção das Funções Estimáveis Tipo IV

Para obter-se as funções estimáveis tipo IV para o fator A (espaçamentos), se irá tomar a forma geral de funções estimáveis apresentada na Tabela 25 e igualar L_1 , L_5 , L_6 e L_7 a zero.

Como a hipótese tipo IV para linhas só envolve as médias de colunas que possuem dados na última linha, μ_{11} , μ_{21} , μ_{14} e μ_{24} não aparecerão na hipótese tipo IV e por isso os coeficientes para γ_{11} , γ_{14} , γ_{21} e γ_{24} serão

zeros.

Para escrever L_9 e L_{10} em função de L_2 (coeficiente de α_1), observa-se que L_9 é o coeficiente de γ_{11} e por isso já foi dito que deverá ser igual a zero. L_{10} é o coeficiente de γ_{13} , o único componente da interação correspondente a α_1 que não difere de zero.

Assim, $L_{10} = 1/K L_2$ e $K = 1$.

As funções estimáveis resultantes deste processo são apresentadas na Tabela 35.

Tabela 35 - Funções Estimáveis Tipo IV para A.

Parâmetros	Coefficientes
μ	0
α_1	L_2
α_2	L_3
α_3	$-L_2 - L_3$
β_1	0
β_2	0
β_3	0
β_4	0
γ_{11}	$L_9 = 0$
γ_{13}	$L_{10} = L_2$
γ_{14}	$-L_9 - L_{10} = 0$
γ_{21}	$-L_9 = 0$
γ_{22}	$L_2 + L_3 - L_{10} = L_3$
γ_{24}	$-L_2 + L_9 + L_{10} = 0$
γ_{32}	$-L_2 - L_3 + L_{10} = -L_3$
γ_{33}	$-L_{10} = -L_2$

Pode-se observar que a soma dos coeficientes

de γ_{11} , γ_{13} e γ_{14} é igual a L_2 que é o coeficiente de α_1 . A soma dos coeficientes de γ_{21} , γ_{22} e γ_{24} é igual ao coeficiente de α_2 (L_3), bem como a soma dos coeficientes de γ_{32} e γ_{33} é igual a $-L_2 - L_3$ (coeficientes de α_3).

Da mesma forma, somando-se os coeficientes dos parâmetros γ correspondentes a β_1 , β_2 , β_3 e β_4 se obterá zero como resultado.

Fazendo-se $L_2 = 1$, $L_3 = 0$ e $L_2 = 0$, $L_3 = 1$, obtém-se uma hipótese tipo IV para o fator A.

$$H_0^{(B)}: \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + \gamma_{13} - \gamma_{33} = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \gamma_{22} - \gamma_{32} = 0 \end{cases}$$

$H_0^{(B)}$ envolve contrastes entre médias de caselas que estão na mesma coluna, começando pela última linha.

As hipótese do tipo IV não se baseiam na notação $R(\)$, elas envolvem um subconjunto dos dados onde não aparecem caselas vazias. Por isso, são menos complexas.

Em termos do Modelo M, $H_0^{(B)}$ é dada por:

$$H_0^{(B)}: \begin{cases} \mu_{13} = \mu_{33} \\ \mu_{22} = \mu_{32} \end{cases}$$

Esta hipótese compara linhas um com três e dois com três. Porém, não envolve colunas um e quatro na comparação, perdendo-se grande parte da informação experimental.

A soma de quadrados tipo IV para o fator A é obtida calculando-se:

$$SQH_0^{(B)} = [B'_{(B)} \mu^0]' [B'_{(B)} (W'W)^{-1} B_{(B)}]^{-1} [B'_{(B)} \mu^0]$$

$$\text{onde } B'_{(B)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SQH_0^{(B)} = 1968,833$$

Para se obter as funções estimáveis para o fator B, tomar a forma geral de funções estimáveis e igualar L_1 , L_2 e L_9 a zero.

Como a hipótese tipo IV sobre colunas só considera as médias pertencentes as linhas que possuem dados na última coluna, μ_{32} e μ_{99} não aparecerão na hipótese. Portanto os coeficientes de γ_{32} e γ_{99} serão zeros.

L_9 e L_{10} serão escritos em função de L_5 e L_7 (coeficientes de β_1 e β_9), respectivamente.

Como o nível um do fator B aparece nos componentes γ_{11} e γ_{21} da interação e $L_9 = 1/K_1 L_5$, K_1 deverá ser igual a dois e $L_9 = 1/2 L_5$.

Entretanto, o nível três do fator B só aparece em γ_{19} (o coeficiente de γ_{99} é igual a zero) e $L_{10} = L_7$.

A Tabela 36 exhibe as funções estimáveis obtidas.

Tabela 36 - Funções Estimáveis Tipo IV para B.

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
α_1	0
α_2	0
α_3	0
β_1	L_5
β_2	L_6
β_3	L_7
β_4	$-L_5 - L_6 - L_7$
γ_{11}	$L_9 = 1/2 L_5$
γ_{19}	$L_{10} = L_7$
γ_{14}	$-L_9 - L_{10} = -1/2 L_5 - L_7$
γ_{21}	$L_5 - L_9 = 1/2 L_5$
γ_{22}	$L_6 + L_7 - L_{10} = L_6$
γ_{24}	$-L_5 - L_6 - L_7 + L_9 + L_{10} = -1/2 L_5 - L_6$
γ_{32}	0
γ_{33}	0

Somando-se os coeficientes de γ_{11} e γ_{21} obtém-se L_5 (coeficiente de β_1).

O coeficiente de γ_{22} é L_6 (o mesmo de β_2), pois o coeficiente de γ_{32} é zero. Da mesma forma para γ_{19} .

Somando-se os coeficientes de γ_{14} e γ_{24} obtém-se $-L_5 - L_6 - L_7$ (coeficiente de β_4).

A soma dos coeficientes dos parâmetros γ correspondentes a α_1 , α_2 e α_3 deverá ser zero.

Tomando-se $L_5 = 1$, $L_6 = 0$, $L_7 = 0$; $L_5 = 0$, $L_6 = 1$, $L_7 = 0$; $L_5 = 0$, $L_6 = 0$ e $L_7 = 1$.

obtém-se uma hipótese tipo IV para o fator B (doses).

$$H_0^{(9)}: \begin{cases} \beta_1 - \beta_4 + 1/2 \gamma_{11} - 1/2 \gamma_{14} + 1/2 \gamma_{21} - 1/2 \gamma_{24} = 0 \\ \beta_2 - \beta_4 + \gamma_{22} - \gamma_{24} = 0 \\ \beta_3 - \beta_4 + \gamma_{13} - \gamma_{14} = 0 \end{cases}$$

Esta hipótese é constituída por contrastes entre médias de caselas da mesma linha, começando pela última coluna.

É de mais fácil interpretação pois envolve apenas um subconjunto dos dados onde não ocorrem caselas vazias.

Em termos dos parâmetros do Modelo M, a hipótese fica:

$$H_0^{(9)}: \begin{cases} \frac{\mu_{11} + \mu_{21}}{2} = \frac{\mu_{14} + \mu_{24}}{2} \\ \mu_{22} = \mu_{24} \\ \mu_{13} = \mu_{14} \end{cases}$$

A primeira linha da hipótese compara colunas um e quatro, desconsiderando linha três.

A segunda linha da hipótese compara colunas dois e quatro, considerando somente linha dois.

A terceira linha da hipótese compara colunas três e quatro, considerando somente os dados da linha um.

Observa-se que na hipótese tipo IV é mais lógico o que está sendo testado, porém com perda de informação.

A soma de quadrados tipo IV para o fator B (doses) é obtida calculando-se

$$SQHo^{(0)} = \left[B'_{(0)} \mu^0 \right]' \left[B'_{(0)} (W'W)^{-1} B_{(0)} \right]^{-1} \left[B'_{(0)} \mu^0 \right]$$

onde

$$B'_{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SQHo^{(0)} = 1494,333$$

4.2.7. Consequências da Alteração da Ordem de Especificação do Modelo ao PROC GLM

Serão apresentadas agora, as funções estimáveis tipo I que sofrem alteração com a ordem com que as variáveis de classificação são especificadas no modelo.

Se o modelo for especificado na ordenação B, A, AxB ao PROC GLM, a hipótese tipo I para o fator B será uma hipótese sobre médias ponderadas de colunas não ajustadas para linhas, representada por $R(\beta|\mu)$.

As funções estimáveis tipo I para o fator B são obtidas fazendo-se a seguinte partição na matriz X:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde:

X_1 é formada pelas colunas da matriz X correspondentes a μ e ao fator B.

X_2 é formada pelas colunas de X correspondentes ao fator A.

X_3 é formada pelas colunas de X correspondentes à interação.

$$G_1 = [X_1'X_1 \mid X_1'X_2 \mid X_1'X_3] =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1^* = (X_1'X_1)^{-1}G_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/6 & -1/6 & 0 & 1/2 & 0 & -1/3 & 1/2 & 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

Através de G_1^* obtém-se as funções estimáveis apresentadas na Tabela 37 (tomando-se a primeira linha de G_1^*

como zero).

Tabela 37 - Funções Estimáveis Tipo I para B.
(Ordem B, A, AxB)

Parâmetros	Coeficientes
μ	0
β_1	L_2
β_2	L_3
β_3	L_4
β_4	$-L_2 - L_3 - L_4$
α_1	$1/6 L_2 - 1/3 L_3 + 1/3 L_4$
α_2	$-1/6 L_2 - 1/3 L_3 - 2/3 L_4$
α_3	$2/3 L_3 + 1/3 L_4$
γ_{11}	$1/2 L_2$
γ_{13}	$2/3 L_4$
γ_{14}	$-1/3 L_2 - 1/3 L_3 - 1/3 L_4$
γ_{21}	$1/2 L_2$
γ_{22}	$1/3 L_3$
γ_{24}	$-2/3 L_2 - 2/3 L_3 - 2/3 L_4$
γ_{32}	$2/3 L_3$
γ_{33}	$1/3 L_4$

Fazendo-se $L_2 = 1, L_3 = 0, L_4 = 0; L_2 = 0,$
 $L_3 = 1, L_4 = 0; L_2 = 0, L_3 = 0, L_4 = 1.$

Obtém-se:

$$H_0^{(4)} \begin{cases} \beta_1 - \beta_4 + 1/6\alpha_1 - 1/6\alpha_2 + 1/2\gamma_{11} - 1/3\gamma_{14} + 1/2\gamma_{21} - 2/3\gamma_{24} = 0 \\ \beta_2 - \beta_4 - 1/3\alpha_1 - 1/3\alpha_2 + 2/3\alpha_3 - 1/3\gamma_{14} + 1/3\gamma_{22} - 2/3\gamma_{24} + 2/3\gamma_{32} = 0 \\ \beta_3 - \beta_4 + 1/3\alpha_1 - 2/3\alpha_2 + 1/3\alpha_3 + 2/3\gamma_{13} - 1/3\gamma_{14} - 2/3\gamma_{24} + 1/3\gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

ou, em termos do Modelo M:

$$H_0^{(4)}: \begin{cases} 1/2 \mu_{11} - 1/3 \mu_{14} + 1/2 \mu_{21} - 2/3 \mu_{24} = 0 \\ -1/3 \mu_{14} + 1/3 \mu_{22} - 2/3 \mu_{24} + 2/3 \mu_{32} = 0 \\ 2/3 \mu_{13} - 1/3 \mu_{14} - 2/3 \mu_{24} + 1/3 \mu_{33} = 0 \end{cases}$$

A hipótese tipo I para o fator A, quando este é especificado após o fator B no modelo, é uma hipótese sobre linhas ajustadas para colunas como a hipótese tipo II para A obtida pela ordenação A, B, AxB, apresentada na Tabela 29.

É representada por $R(\alpha | \mu, \beta)$.

Tabela 38 - Análise de Variância para os Dados da Tabela 23
Através do Modelo com Dois Fatores e Interação,
para Ordenação A, B, AxB.

TIPO I				
Variações Consideradas	Graus de Liberdade	Hipóteses Testadas	RC)	Soma de Quadrados
A	2	$H_o^{(4)}$	$RC(\alpha \mu)$	1535,545
B	3	$H_o^{(5)}$	$RC(\beta \mu, \alpha)$	1815,250
AxB	2	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	24,750
TIPO II				
A	2	$H_o^{(2)}$	$RC(\alpha \mu, \beta)$	2238,083
B	3	$H_o^{(5)}$	$RC(\beta \mu, \alpha)$	1815,250
AxB	2	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	24,750
TIPO III				
A	2	$H_o^{(8)}$	$RC(\alpha \mu, \beta, \gamma)$	2212,804
B	3	$H_o^{(6)}$	$RC(\beta \mu, \alpha, \gamma)$	1738,361
AxB	2	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	24,750
TIPO IV				
A	2	$H_o^{(8)}$	—	1968,833
B	3	$H_o^{(9)}$	—	1494,333
AxB	2	$H_o^{(7)}$	—	24,750

*Nota: Existem outras hipóteses testáveis tipo IV que produzem diferentes somas de quadrados.

Tabela 39 - Análise de Variância para os Dados da Tabela 23
Através do Modelo com dois Fatores e Interação,
para Ordenação B, A, AxB.

TIPO I				
Variações Consideradas	Graus de Liberdade	Hipóteses Testadas	RC ()	Soma de Quadrados
B	3	$H_o^{(4)}$	$RC(\beta \mu)$	1112,712
A	2	$H_o^{(2)}$	$RC(\alpha \mu, \beta)$	2238,083
AxB	2	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	24,750
TIPO II				
B	3	$H_o^{(5)}$	$RC(\beta \mu, \alpha)$	1815,250
A	2	$H_o^{(2)}$	$RC(\alpha \mu, \beta)$	2238,083
AxB	2	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	24,750
TIPO III				
B	3	$H_o^{(6)}$	$RC(\beta \mu, \alpha, \gamma)$	1738,361
A	2	$H_o^{(8)}$	$RC(\alpha \mu, \beta, \gamma)$	2212,804
AxB	2	$H_o^{(7)}$	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	24,750
TIPO IV				
B	3	$H_o^{(9)}$	—	1494,333
A	2	$H_o^{(8)}$	—	1968,833
AxB	2	$H_o^{(7)}$	—	24,750

*Nota: Existem outras hipóteses testáveis tipo IV que produzem diferentes somas de quadrados.

5. CONCLUSÕES

Com relação aos quatro tipos de somas de quadrados fornecidas pelo SAS quando se trata de dados desbalanceados com caselas vazias e considerando-se um modelo de classificação dupla cruzada, pode-se concluir que:

- Quando se escreve as hipóteses testadas pelos quatro tipos de somas de quadrados em termos do modelo superparametrizado, todos os tipos de hipóteses envolvem os parâmetros referentes à interação, não se podendo testar os efeitos principais isoladamente. Portanto, somente a hipótese sobre a interação é livre de parâmetros sem interesse. Porém aqui, como já comentado, não se pode testar se todas as interações são nulas e portanto, só se pode abandonar o modelo com interação baseado no conhecimento do pesquisador.

- A soma de quadrados tipo I para efeitos principais, além de envolver médias ponderadas, apresentando coeficientes confusos, envolve os parâmetros da interação e os parâmetros do segundo efeito principal. Não apresentam aparente interesse e mesmo em termos dos parâmetros do modelo M são

difíceis de interpretar.

- A soma de quadrados tipo II apesar de testar hipóteses de efeitos principais ajustados, sempre contém combinações lineares dos parâmetros relativos à interação e coeficientes pouco usuais.

- A soma de quadrados tipo III testa uma hipótese de interesse no exemplo com uma única casela vazia, para o fator A que só possui dois níveis. Porém, quando o número de caselas vazias e o número de níveis do fator aumenta, elas passam a ser complexas e fogem ao interesse do pesquisador. Apesar de serem hipóteses sobre médias não ponderadas, apresentam coeficientes difíceis de interpretar.

- A soma de quadrados tipo IV testa hipóteses bem mais simples e fáceis de interpretar. Porém com perda de informação, pois só é considerado uma parte dos dados com os quais elas podem trabalhar como se fossem dados balanceados.

- Em termos do modelo M algumas hipóteses se tornam mais compreensíveis e além disso, uma alternativa para o impasse da análise de dados desbalanceados citada por muitos autores é trabalhar-se com contrastes de interesse entre médias de caselas que contém dados.

Portanto, é importante salientar que as hipóteses, do tipo

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0 \quad \text{e} \quad H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0,$$

que são de interesse do pesquisador, não poderão ser testadas em experimentos que apresentam caselas vazias e

interação.

Conhecendo os mecanismos que o SAS utiliza para compor seus quatro tipos de somas de quadrados e construindo suas funções estimáveis o pesquisador terá condições de fazer sua opção e sem dúvida, realizar sua análise de forma mais adequada e conciente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BURDICK, D.S. & HERR, D.G. Counterexamples in unbalanced two way analysis of variance. **Commun. Statist. Theor. Meth., 9(2): 231-241, 1980.**
- FREUND, R.J. The case of missing cell. **The American Statistician, 34(2):94-98, 1980.**
- GOODNIGHT, J.H. Tests of Hypothesis in Fixed Effects Linear Models. **Commun. Statist. Theor. Meth., 9(2): 167-180, 1980.**
- HENDERSON, C.R. Estimation of variance and covariance components. **Biometrics, 9: 226-252, 1953.**
- HOCKING, R.R.; SPEED, F.M.; COLEMAN, A.T. Hypothesis to be tested with unbalanced data. **Commun. Statist. Theor. Meth., 9(2): 117-130, 1980.**
- IEMMA, A.F. **Testes de Hipóteses em Modelos Lineares com Amostras Desequilibradas.** Belgique, Fac. Sci. Agron. Gembloux, 1991. 101p.
- IEMMA, A.F. **Análisis de Varianza de Experimentos con Celdas Vacias.** Córdoba, Argentina, ϕ σ ρ publicações, 1993. 102p.
- IEMMA, A.F. **Modelos Lineares: Uma introdução para Profissionais da Pesquisa Agropecuária.** Imprensa Oficial Est. Paraná, Londrina, 1987. 236p.

- IEMMA, A.F.; PALM, R.; CLAUSTRIAUX, J.J. Sobre a Construção de Projetores Ortogonais. **Rev. Mat. Estat.**, São Paulo, **11**:133-142,1993.
- MILLIKEN, G.A. & JOHNSON, D.E. **Analysis od Messy Data**, New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1984, 437 p.
- OVERALL, J.E. & SPIEGEL, D.K. Concerning least squares analysis of experimental data. **Psych. Bull.**, **72**(5): 311-322, 1969.
- SAS User's Guide: Statistics version. 6 edition. Cary, SAS Institute, 1990. 846p.
- SEARLE, S.R. **Linear Models**. New York, Wiley, 1971. 532p.
- SEARLE, S.R. Arbitrary Hipotheses in Linear Models With Unbalanced Data. **Comun. Statist. Theor. Meth.**, **9**(2): 181-200, 1980.
- SEARLE, S.R. **Linear Models for Unbalanced Data**. New York, Wiley, 1987. 536p.
- SPEED, F.M. & HOCKING, R.R. The Use of the RC) Notation with Unbalanced Data. **The American Statistician**, **30**(1): 30-33, 1976.
- SPEED, F.M.; HOCKING, R.R. ; HACKNEY, O.P. Methods of Analysis of Linear Models With Unbalanced Data. **Jour. Amer. Statist. Assoc.**, **73**: 105-112, 1978.
- URQUHART, N.S. & WEEKS, D.L. Linear Models in Messy Data: Some Problems and Alternatives. **Biometrics**, **34**: 696-705, 1978.
- YATES, F. The analysis of multiple classifications with unequal number in the diferent classes. **Jour. Amer. Statist. Assoc.**, **29**: 51-66, 1934.

APÊNDICE

PROGRAMAS SAS UTILIZADOS PARA OS DOIS EXEMPLOS

	Página
1. Primeiro caso: fatorial 2x3 com uma casela vazia (ordem A, B, A*B)	158
2. Primeiro caso: fatorial 2x3 com uma casela vazia (ordem B, A, A*B)	159
3. Segundo caso: fatorial 3x4 com quatro caselas vazias (ordem A, B, A*B)	160
4. Segundo caso: fatorial 3x4 com quatro caselas vazias (ordem B, A, A*B)	161

**1. Primeiro caso: fatorial 2x3 com uma casela vazia (ordem
A, B, A*B)**

```
data CAS01;  
input A B REP PROD;  
cards;  
1 1 1 52  
1 2 1 78  
1 3 1 63  
1 3 2 47  
2 2 1 102  
2 2 2 87  
2 3 1 58  
;  
proc print;  
proc glm;  
class A B;  
model PROD = A B A*B / SS1 SS2 SS3 SS4 E E1 E2 E3 E4 XPX I;  
run;
```

**2. Primeiro caso: fatorial 2x3 com uma casela vazia (ordem
B, A, A*B)**

```
data CAS01;  
input A B REP PROD;  
cards;  
1 1 1 52  
1 2 1 78  
1 3 1 63  
1 3 2 47  
2 2 1 102  
2 2 2 87  
2 3 1 58  
;  
proc print;  
proc glm;  
class A B;  
model PROD = B A A*B / SS1 SS2 SS3 SS4 E E1 E2 E3 E4 XPX I;  
run;
```

3. Segundo caso: fatorial 3x4 com quatro caselas vazias
(ordem A, B, A*B)

```
data CAS02;
input A B REP PROD;
cards;
1 1 1 52
1 3 1 63
1 3 2 47
1 4 1 78
2 1 1 67
2 2 1 58
2 4 1 102
2 4 2 87
3 2 1 86
3 2 2 77
3 3 1 104
;
proc print;
proc glm;
class A B;
model PROD = A B A*B / SS1 SS2 SS3 SS4 E E1 E2 E3 E4 XPX I;
run;
```

4. Segundo caso: fatorial 3x4 com quatro caselas vazias
(ordem B, A, A*B)

```
data CAS02;
input A B REP PROD;
cards;
1 1 1 52
1 3 1 63
1 3 2 47
1 4 1 78
2 1 1 67
2 2 1 58
2 4 1 102
2 4 2 87
3 2 1 86
3 2 2 77
3 3 1 104
;
proc print;
proc glm;
class A B;
model PROD = B A A*B / SS1 SS2 SS3 SS4 E E1 E2 E3 E4 XPX I;
run;
```