AJUSTAMENTO DE ALGUNS MODELOS EXPONENCIAIS A DADOS DE CRESCIMENTO DA CANA-DE-AÇÚCAR

PAULO DE OLIVEIRA
Estatístico

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO SIMIONATO MORAES

Dissertação apresentada à Escola
Superior de Agricultura "Luiz de
Queiroz", da Universidade de São
Paulo, para obtenção do título
de Mestre em Agronomia, Área de
concentração: Estatística
Experimentação Agronômica.

P I R A C T I C A R A
Estado de São Paulo - Brasil
Junho - 1992

048a

Oliveira, Paulo de

Ajustamento de alguns modelos exponenciais a dados de crescimento da cana-de-açúcar. Piracicaba, 1992.

89p.

Diss. (Mestre) - ESALQ

Bibliografia

1. Cana-de-açúcar - Crescimento - Modelo matemático 2. Modelo matemático
I. Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba.

CDD 633.61

AJUSTAMENTO DE ALGUNS MODELOS EXPONENCIAIS A DADOS DE CRESCIMENTO DA CANA-DE-AÇÚCAR

PAULO DE OLIVEIRA

Aprovado em: 06/11/92

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Roberto Simionato Moraes

ESALQ/USP

Prof.^a Dr.^a Sheila Zambello de Pinho

IB/UNESP

Prof.^a Dr.^a Clarice Garcia Borges Demétrio

ESALQ/USP

Prof. Dr. ROBERTO SIMIONATO MORAES

Orientador

Aos meus pais, Luiz e Ana

À minha esposa, Euni

Aos meus filhos Rodrigo,

Paulo, Bruno e Tiago

Dedico.

AGRADECIMENTOS

A Empresa de Pesquisa Agropecuária de Minas Gerais (EPAMIG) e A Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo (ESALQ/USP), pela oportunidade concedida para a realização do curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica.

Ao Laboratório de Computação Científica (LCCC) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), que permitiu o uso de seu computador, para processar as análises.

Ao professor Dr. Roberto Simionato Moraes, pela valiosa orientação, atenção e amizade dedicadas.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos valiosos ensinamentos e convivência.

Aos colegas da Área de Computação da EPAMIG, pelo apoio e incentivo.

Aos colegas do curso, pelo convívio e amizade.

À minha esposa e filhos, pelo apoio, estímulo e dedicação.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE FIGURAS.....	vi
LISTA DE TABELAS.....	ix
RESUMO.....	x
SUMMARY.....	xii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	4
3. MATERIAL E MÉTODOS.....	9
3.1. Dados.....	9
3.2. Funções.....	14
3.3. Método de estimação.....	15
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	19
4.1. Ajuste das funções aos dados do Experimento 1.....	20
4.2. Ajuste das funções aos dados do Experimento 2.....	35
4.3. Ajuste das funções aos dados dos Experimentos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.....	36
5. CONCLUSÕES.....	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	83
7. APÊNDICE.....	87

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1 - Diversas formas de curvas de crescimento.....	12
Figura 2 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (a) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	38
Figura 3 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (a) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	39
Figura 4 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (b) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	40
Figura 5 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (b) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	41
Figura 6 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (c) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	44
Figura 7 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (c) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	45
Figura 8 - Gráficos das curvas estimadas através da função Gompertz (d) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	48
Figura 9 - Gráficos das curvas estimadas através da função Gompertz (d) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	49
Figura 10 - Gráficos das curvas estimadas através da função Gompertz (e) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	51

Figura 11 - Gráficos das curvas estimadas através da função Gompertz (e) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	52
Figura 12 - Gráficos das curvas estimadas através da função monomolecular sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	54
Figura 13 - Gráficos das curvas estimadas através da função monomolecular sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	55
Figura 14 - Gráficos das curvas estimadas através da função Brody sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	57
Figura 15 - Gráficos das curvas estimadas através da função Brody sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	58
Figura 16 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística modificada sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.	60
Figura 17 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística modificada sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.	61
Figura 18 - Gráficos das curvas estimadas através da função exponencial sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	63
Figura 19 - Gráficos das curvas estimadas através da função exponencial sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	64
Figura 20 - Gráficos das curvas estimadas através da função log-inversa-generalizada sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	66

Figura 21 - Gráficos das curvas estimadas através da função log-inversa-generalizada sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	67
Figura 22 - Gráficos das curvas estimadas através da função Richards sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	69
Figura 23 - Gráficos das curvas estimadas através da função Richards sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	70
Figura 24 - Gráficos das curvas estimadas através da função Reid sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.....	72
Figura 25 - Gráficos das curvas estimadas através da função Reid sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.....	73

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1 - Experimento 1 - Peso médio da cana-de-açúcar em kg/ha de massa verde, do Experimento 2, no apêndice.....	10
Tabela 2 - Peso da cana-de-açúcar em Kg/ha de massa verde dos Experimentos 3,4,5,6,7,8,9.....	11
Tabela 3 - Experimento 2 - Peso em kg/ha da massa verde da cana-de-açúcar (cana-soca). Experimento realizado em Piracicaba em 1981/82.....	88

AJUSTAMENTO DE ALGUNS MODELOS EXPONENCIAIS A DADOS DE CRESCIMENTO DA CANA-DE-AÇÚCAR

Autor: PAULO DE OLIVEIRA

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO SIMIONATO MORAES

Resumo

A possibilidade de se estimar a curva de crescimento da massa verde da cana-de-açúcar, como de outras culturas, pode esclarecer pontos importantes, como as épocas certas para se fazer a adubação em cobertura e o corte. O objetivo deste trabalho foi identificar modelos matemáticos, representativos do crescimento da cana-de-açúcar. Foram estudadas doze funções exponenciais, ajustadas a nove experimentos, cada um produzindo uma curva de crescimento com características próprias. Em cada função, foram observados os seguintes pontos: grau de ajuste da função para cada experimento; exigência da função, com relação à precisão dos valores iniciais atribuídos aos parâmetros, para se atingir a convergência; número de iterações até atingir a convergência. A conclusão obtida é que a função de Richards, dada pela

expressão $y = \beta_0 (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})^{-1/n}$, foi a que melhor se ajustou aos dados analisados, seguida pelas funções logística (formas a,b) e Gompertz (formas d,e). Diferentemente de Richards, neste trabalho n foi considerado como parâmetro. Uma das funções logísticas, (forma c) dada por $y = \beta_0 / (1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 x)})$ requer valores iniciais muito próximos das estimativas dos parâmetros, sob o risco de convergir para algum ponto de mínimo local.

FITTING OF SOME EXPONENTIAL MODELS TO DATA OF SUGAR-CANE GROWING

Author: PAULO DE OLIVEIRA

Adviser: PROF. DR. ROBERTO SIMIONATO MORAES

Summary

The curve representing the growth and massa production of sugar cane and other plants offer a good potential for the appraisal of the best time for side dressing fertilizations of the crop and for its harvest. The objective of this work was to identify mathematic models representing the growing of sugar-cane. Twelve exponential functions were studied, fitted to nine experiments, each one producing one growing curve with its own characteristics. In each function were observed the following points: degree of fitting of the function to each experiment; demand of the function in relation to the precision of the first values ascribed to the parameters, to reach the convergency; the number of interactions to reach the convergency. The conclusion obtained is that the Richards' function, given by the expression

$y = \beta_0 (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})^{-1/n}$, was the best fitted to the analysed data, followed by the logistic (forms a,b) and Gompertz (forms d,e) functions. Differently from Richards, in this work n was considered a parameter. One of the logistic function (form c) given by $y = \beta_0 / (1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 x)})$ needs starting values very near to the estimates of the parameters because if not it can tend to some points of local minimum.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos tempos, além da produção de açúcar e de álcool, a cana-de-açúcar vem apresentando novas utilizações para os produtos como o bagaço, o fermento, etc, até então, considerados como resíduos industriais inaproveitáveis, tornando-se alguns deles, produtos de exportação.

Com essa nova fonte de riqueza, acrescida do aumento da representatividade como fonte renovável de energia, que, segundo dados do ANUÁRIO ESTATÍSTICO DO BRASIL (AEB) - 1989, passou de 7,51% em 1970, para 18,89% em 1987, sendo o bagaço responsável por 35,99% do total da energia primária consumida em 1990 (AEB, 1991), a cana-de-açúcar volta a merecer maior interesse por parte dos produtores.

Esse interesse reflete na busca de um conhecimento mais abrangente da planta e de seu cultivo, sempre tendo em vista a maior produção com menor custo possível. Sem dúvida, o caminho para se atingir este objetivo passa pelo completo conhecimento da planta e seu cultivo.

Os métodos quantitativos constituem uma ferramenta útil, para ajudar no conhecimento, por exemplo, da forma de crescimento da planta. THORNLEY (1976) defende a idéia de que se podem usar os métodos quantitativos no estudo das plantas, em especial sua fisiologia. O

conhecimento da curva de crescimento da planta esclarece, dentre outros, dois pontos de suma importância que são o ponto de inflexão e a assíntota superior.

Ponto de inflexão - É o ponto em que se inicia o processo de desaceleração no ritmo de crescimento da planta.

Assíntota superior - É o ponto em que a planta atinge sua produção máxima e praticamente cessa o processo vegetativo. O conhecimento exato deste ponto é importante porque determina a época economicamente viável, para se efetuar o corte, aproveitando a capacidade de produção máxima da planta no menor tempo possível.

Para descrever curvas de crescimento, seja vegetal seja animal, um método quantitativo eficiente é o do uso de modelos de regressão. As curvas de crescimento têm a forma sigmóide, com uma assíntota inferior coincidente com o eixo das abscissas (produção zero) e uma superior (produção máxima). As funções mais indicadas para descrever curvas desse tipo são as exponenciais.

O objetivo deste trabalho é encontrar uma função que melhor descreva curvas de crescimento. Com isso, busca-se conseguir informações a respeito das estimativas dos parâmetros desta função.

Assim é possível, antes mesmo de iniciar o plantio, fazer inferências e ter informações importantes sobre a cultura daquele ano, como, por exemplo, a época de se fazer a adubação em cobertura para obter a melhor resposta da planta e o momento economicamente ótimo de se iniciar o corte.

A curva de crescimento da cana-de-açúcar depende de várias variáveis, muitas delas controláveis, até certo ponto, pelo agricultor, como por exemplo, a cultivar utilizada no plantio, a aplicação de

fertilizantes, o uso de defensivos, irrigação. O conjunto de todas essas variáveis pode determinar vários tipos de curvas dessa cultura, daí a necessidade de encontrar uma função que se ajuste bem não apenas a uma curva, mas também à grande maioria de todos os tipos possíveis, dentro das limitações da cultura.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O estudo de funções, que descrevem curvas de crescimento, não é recente. No século passado, VERHULST (1845), estudando o crescimento de populações humanas, ajustou a função logística $y = \beta_0 / (1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 x)})$.

As curvas de crescimento possuem características próprias. Em geral, as funções que melhor representam estas curvas são as não lineares, cujas estimativas dos parâmetros são alcançadas por processos iterativos muito trabalhosos. Por esta razão, houve sempre uma grande preocupação em desenvolver métodos eficientes de estimação dos parâmetros.

STEVENS (1951) apresentou um método de estimação dos parâmetros da equação $y = \alpha + \beta \rho^x$ e de outras fórmulas de regressão que derivam da equação acima, por simples transformações, como, por exemplo, as fórmulas de regressão de Gompertz e logística. O método simplifica os cálculos matemáticos, principalmente se os valores de x são igualmente espaçados, ou espaçados conforme alguma regularidade padrão. Outros autores desenvolveram métodos de estimação dos parâmetros de funções não lineares, alguns deles se tornaram bastante conhecidos, como os métodos "Steepest-Descent", Newton, Gauss-Newton, Fletcher e Powell.

MARQUARDT (1963) desenvolveu um algoritmo para estimar parâmetros de funções não lineares, pelos

mínimos quadrados. O autor conciliou o método "Steepest-Descent" com o de Gauss-Newton, aproveitando o que de melhor apresenta cada um deles. Dessa forma, quando se está longe da solução, o algoritmo faz uso do método de "Steepest-Descent", para indicar a direção que o vetor dos parâmetros deve tomar, para atingir a convergência. É sabido que este método é eficiente nestas circunstâncias. Ao se aproximar da solução, a direção do vetor é indicada pelo método de Gauss-Newton, que é o melhor nesta situação.

NELDER (1961) & OLIVER (1966) estudando a estimação dos parâmetros da função logística, concluíram que são necessárias poucas observações para se estimarem os parâmetros desta função.

RICHARDS (1959) considerou a função de crescimento de Von Bertalanffy e atribuiu aplicações para a extensão desta função. O autor afirma que as três funções de crescimento mais conhecidas são:

$$\begin{array}{ll} \text{Monomolecular} & W = A(1 - be^{-kt}) \\ \text{Autocatalítica} & W = A/(1 + be^{-kt}) \\ \text{Gompertz} & W = Ae^{-be^{-kt}} \end{array}$$

CAUSTON (1969) desenvolveu um programa para o ajuste da função de Richards, dada pela expressão $y = \beta_0 (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})^{-1/n}$ e apresentou um procedimento para obtenção da estimativa de n , a partir dos dados observados.

HOFFMANN & THAME (1970) ajustaram as funções logística e de Gompertz a dados de crescimento de *Pinus caribaea*, variedade *caribaea*, e verificaram que a função de Gompertz se ajustou melhor aos dados, do que a função logística. Observaram, ainda, que a função logística apresentou estimativas para a assíntota

superior, muito inferior aos dados observados. MISCHAN (1972) constatou o mesmo problema, quando estudou o ajuste da função logística aos dados de crescimento ponderal de gado bovino. VIEIRA (1975) estudou as seguintes funções assintóticas sigmóides.

$$\text{Logística} \quad y = A / (1 + e^{-(B+Cx)})$$

$$\text{Gompertz} \quad v = e^{A-BC^x}$$

$$\text{Log-inv. generalizada} \quad y = A + BR^{1/x}$$

Essa autora observou também que os ajustes das funções logística e de Gompertz mostraram assintota superior abaixo de valores observados. Segundo a autora, o método de STEVENS (1951), usado para estimar os parâmetros das funções, deve ser responsabilizado, em parte, pelo resultado. Verificou também que, apesar desse problema, a função de Gompertz descreveu melhor a curva de crescimento.

Estudando as funções de Mitscherlich, logística e de Gompertz, no ajuste a dados de crescimento de gado bovino, MISCHAN (1972) concluiu que a função de Gompertz $y = AB^{C^x}$ ajustou-se melhor e apresentou as estimativas do parâmetro C muito constante para os 76 animais estudados.

ARRUDA et alii (1973) propuseram o uso da função $y = A + BR^{1/x}$, com $B > 0$ e $0 < R < 1$ nos estudos que visam descrever curvas de crescimento. Segundo esses autores, esta é uma função sigmóide, com assintota superior de ordenada $A + B$, sendo que a abscissa do ponto de inflexão da curva é dada por $-1/2 \ln R$. O ajuste desta função foi comparado ao de Gompertz $y = AB^{C^x}$, apresentando-se melhor que o da segunda, em um dos três experimentos estudados.

CORTARELLI (1973) ajustou, dentre outras, a função $y = \beta_0(1 + e^{-\beta_1 x})^{-\beta_2}$, a dados de crescimento ponderal de bovino da raça Nelore.

Os métodos quantitativos constituem instrumental eficiente para se estudarem vários fenômenos, inclusive o biológico. THORNLEY (1976) afirma que a planta, em especial na sua fisiologia, está apta cada vez mais, para a aplicação de métodos quantitativos.

SPARROW (1979) ajustou cinco modelos a dados de matéria seca de forrageira, adubada com seis níveis de nitrogênio. Um desses modelos estudados foi o de Reid. Além dos critérios de comparação dos modelos, R^2 e quadrado médio residual, foi usado o de total de postos. O autor afirma, ainda, que um bom modelo não deve ajustar-se bem apenas em alguns experimentos, mas razoavelmente bem na maioria deles.

SILVA (1980) estudou métodos de estimação de parâmetros de modelos não lineares. Afirma que o sucesso ou fracasso na determinação do ponto de mínimo da função do residuo depende da seleção dos valores iniciais dos parâmetros. Como não existem métodos eficientes para se determinarem os valores iniciais ideais, a autora fixou intervalos para cada parâmetro, pesquisando as combinações dos valores de cada um deles, optando pela combinação que apresentou menor soma de quadrados dos desvios.

OLIVEIRA (1986) comparou três modelos ajustando-os à produção de soja, que recebeu seis níveis diferentes de calcário. Como critério de comparação dos modelos, a autora usou a análise de variância, com o teste F; o coeficiente de determinação ajustado para os graus de liberdade; o quadrado médio do desvio da regressão, o critério de informação de AKAIKE e o total de postos.

DRAPER e SMITH (1981) citam três métodos de estimação dos parâmetros de modelos não lineares: Linearização, "Steepest-Descent" e Marquardt. Este último é considerado como sendo uma combinação dos dois primeiros. Esses autores dão também uma interpretação geométrica para a função dos resíduos, ressaltando a importância da escolha dos valores iniciais dos parâmetros e sugerem a utilização de todas as informações já existentes, para a escolha desses valores. Como exemplo de funções não lineares, usadas para descreverem curvas de crescimento, citam a monomolecular, logística e de Gompertz, dentre outras.

MAGNANI (1985) ajustou o modelo da segunda aproximação de Mitscherlich, a vinte e sete grupos de experimentos com a maturação da cana-de-açúcar, expressos em pol (%) da cana. Estimou os parâmetros da função, pelos métodos de Newton, Gauss-Newton e Marquardt. Usou o método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros da função quadrática. Concluiu que o método de Marquardt foi o mais eficiente

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. Dados

A maior preocupação deste trabalho foi não apenas ajustar as funções aos dados de crescimento da cana-de-açúcar, mas também verificar esse ajuste a diversas formas de crescimento, representadas por dados gerados a partir de um experimento real, denominado Experimento 2. Este experimento é o resultado observado em cana-soca de um trabalho realizado pelo professor Dr. Roberto Simionato Moraes, em colaboração com técnicos do Centro de Tecnologia da COPERSUCAR, em Piracicaba, no período de junho de 1981 a fevereiro de 1982. Durante o período do experimento foram tomadas nove medidas de peso, a intervalos de aproximadamente um mês, sendo que em cada data tomaram-se quarenta e cinco observações, de parcelas com trinta metros lineares, expressas em kg/ha de massa verde.

Neste estudo, observados os dados, pôde-se notar que, até a última data, ainda não se tinha atingido o ponto de máximo. Não se configurava uma situação de estabilidade no crescimento da planta. Por essa razão foram acrescentados, empiricamente, dados de mais sete datas, com quarenta e cinco observações cada no Experimento 2 buscando dotar a curva de uma linha assintótica na parte superior, o que geralmente acontece com as curvas de crescimento. Os dados aparecem na Tabela 3 no apêndice.

Como o processo de estimação dos parâmetros de funções não lineares é, em geral, trabalhoso e demorado, optou-se por trabalhar, inicialmente, com um conjunto de apenas 16 pontos pareados (x,y) , onde x representa a idade da rebrota da planta do Experimento 2 e y , o peso médio de cada idade. A esse conjunto de dados médios do Experimento 2 denominou-se Experimento 1, cujos dados aparecem na Tabela 1.

TABELA 1. Experimento 1 - Peso médio da cana-de-açúcar em kg/ha de massa verde, do Experimento 2, no apêndice.

Idade da planta (meses)	Peso da planta (kg/ha)
2,0	2313
3,0	5174
4,3	8991
5,4	9482
6,9	25758
7,8	42023
8,5	61990
9,6	80527
10,6	121482
11,6	143563
12,6	146057
13,6	148859
14,6	147370
15,6	146436
16,6	145312
17,6	143415

Com o objetivo de estudar a flexibilidade de cada função de ajustar-se às diferentes formas de crescimento foram simulados mais sete experimentos fictícios (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Cada um com dezessete observações (x,y) , onde $x = 2,3,4,\dots,18$ representando a idade, em meses, da rebrota da cana-de-açúcar, y o peso da planta, em kg/ha. Na Tabela 2 estão os dados da idade da planta e os respectivos pesos de massa verde em kg/ha de sete experimentos.

TABELA 2. Peso da cana-de-açúcar em kg/ha de massa verde dos Experimentos 3,4,5,6,7,8,9.

Idade (meses)	Experimentos						
	3	4	5	6	7	8	9
2	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
3	4000	4000	4000	5000	4000	6000	4000
4	6000	7000	6000	9000	7000	11000	6000
5	8000	9000	8000	15000	9000	18000	9000
6	10000	12000	10000	26000	12000	32000	13000
7	13000	18000	14000	40000	16000	54000	22000
8	16000	25000	18000	63000	22000	80000	35000
9	20000	41000	25000	90000	34000	104000	56000
10	30000	61000	55000	117000	66000	128000	85000
11	52000	93000	100000	137000	106000	146000	112000
12	101000	119000	138000	148000	139000	156000	127000
13	121000	127000	144000	150000	155000	162000	134000
14	126000	129000	145000	149000	162000	165000	137000
15	127000	130000	145000	149000	166000	166000	140000
16	128000	129000	143000	148000	166000	167000	142000
17	126000	128000	142000	147000	165000	166000	141000
18	125000	127000	140000	146000	164000	164000	139000

Inicialmente traçaram-se sete curvas diferentes, representadas na Figura 1 que de certa forma, pudessem representar algumas variações no crescimento da planta, devido a fatores, tais como diferença de cultivares, de fertilidade, de clima. Cada curva representando a resposta de um experimento, com as seguintes características:

Os Experimentos 3 e 4 são de baixa produção, em torno de 130000kg/ha.

Os Experimentos 5 e 6 são de produção média, de 145000 a 150000kg/ha.

Os Experimentos 7 e 8 são de alta produção, próximo a 167000kg/ha.

FIGURA 1 DIVERSAS FORMAS DE CURVAS DE CRESCIMENTO

As curvas dos experimentos ímpares (3, 5, 7) possuem o ponto de inflexão deslocado para a direita, em relação ao seu correspondente experimento par. Por exemplo, o ponto de inflexão do Experimento 3 tem abscissa próxima de 11,6, enquanto que o Experimento 4 tem abscissa próxima de 10,6. Isto quer dizer que os experimentos pares possuem um crescimento mais suave, diluído ao longo do tempo, enquanto que os ímpares concentram a aceleração do crescimento num curto intervalo de tempo. O Experimento 9 seria uma situação intermediária dos Experimentos 5 e 6, mas atingindo a produção máxima apenas no final da curva.

As estimativas dos parâmetros das funções, ajustadas com os dados do Experimento 1 serviram como valores iniciais para o ajuste dos demais experimentos.

Os valores iniciais dos parâmetros das funções, quando ajustadas aos dados do Experimento 1 foram tomados conforme cada função, seguindo indicação de trabalhos anteriores quando existissem, analisando a função ou ainda por tentativas.

3.2. Funções

Com base nos gráficos e no quadrado médio residual, selecionaram-se doze funções, dentre outras, que apresentaram algum nível de ajuste nos experimentos. Algumas delas foram identificadas aqui pelo nome do autor da referência onde foram citadas.

1. Logística a) $y = \beta_0 / (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})$ b) $y = \beta_0 / (1 + \beta_1 \beta_2^x)$

c) $y = \beta_0 / (1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 x)})$

2. Gompertz d) $y = e^{(\beta_0 - \beta_1 \beta_2^x)}$ e) $y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 x}}$

3. Monomolecular f) $y = \beta_0 (1 - \beta_1 e^{-\beta_2 x})$

4. Brody g) $y = \beta_0 - \beta_1 e^{-\beta_2 x}$

4. Logística Modificada h) $y = \beta_0 (1 + e^{-\beta_1 x})^{-\beta_2}$

5. Exponencial i) $y = e^{(\beta_0 - \beta_1/x)}$

6. Log-inversa-generalizada j) $y = \beta_0 + \beta_1 \beta_2^{1/x}$

7. Richards k) $y = \beta_0 (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})^{-1/\beta_3}$

8. Reid l) $y = \beta_0 + \beta_1 e^{-\beta_2 x^{\beta_3}}$

Essas funções foram comparadas entre si, em cada experimento, através do gráfico, do quadrado médio residual (QMR), do critério de informação de Akaike (AIC) e pelo coeficiente de determinação, ajustado pelo número de graus de liberdade ($\bar{R}^2$).

3.3. Método de estimação

Para a estimação dos parâmetros foi utilizado o procedimento NLIM do SAS "Statistical Analysis System", versão 6.06, no qual o usuário deve informar:

- o método a ser usado na estimação dos parâmetros.
- a função a ser ajustada.
- as estimativas iniciais dos parâmetros.
- as derivadas parciais de 1ª ordem da função, em relação a cada parâmetro.

Não foi alterado nenhum "default" do programa. Para verificar se os valores iniciais eram bons para se atingir o ponto de convergência, introduziram-se no programa comandos para construção do gráfico dos valores estimados ($\hat{x}; \hat{y}$), sobreposto ao dos valores observados ($x; y$). Todas as estimativas foram calculadas pelo método de MARQUARDT, sintetizado aqui da seguinte maneira:

sejam Y variáveis aleatória conhecidas e x variável fixa e sejam $Y_1, x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots, x_{m1}$ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ onde n = número de observações e m = número de variáveis independentes. (Neste caso $m = 1$)

$$E(Y) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p) + e \quad (1)$$

$$E(Y) = f(x; \beta) + e$$

onde $x_{n \times m}$ é a matriz de variáveis independentes.

$\beta_{p \times 1}$ é o vetor dos parâmetros.

$e_{n \times 1}$ é o vetor dos erros.

O problema consiste em calcular as estimativas dos parâmetros, minimizando a função $\phi = e'e = \sum [y_i - \hat{y}_i]^2 = \|y - \hat{y}\|^2$ onde $\hat{y}_i$ é o valor estimado de y_i , através da expressão 1.

A função expandida através da série de Taylor, fica:

$$f(x_i; \beta) = f(x_i; \beta^0) + \frac{\partial f(x_i; \beta)}{\partial \beta_1} \bigg|_{\beta_1 = \beta_1^0} (\beta_1 - \beta_1^0) + \dots +$$

$$f(x_i; \beta) \bigg|_{\beta_p = \beta_p^0} (\beta_p - \beta_p^0) + \text{termos de grau } > 1.$$

Fazendo $\frac{\partial f(x_i; \beta)}{\partial \beta_1} = Z_{i1}^0, \dots, \frac{\partial f(x_i; \beta)}{\partial \beta_p} = Z_{ip}^0$;

$$\beta_1 - \beta_1^0 = b_0, \dots, \beta_p - \beta_p^0 = b_p;$$

$f(x_i; \beta) = f_i^0$, e desprezando os termos com expoentes superiores a 1, podemos escrever

$$f(x_i; \beta) = f_i^0 + Z_{i1}^0 b_1 + \dots + Z_{ip}^0 b_p + e$$

$$f(x_i; \beta) = f_i^0 + \sum_{j=1}^p b_j^0 Z_{ij}^0 + e$$

$$f(x_i; \beta) - f_i^0 = \sum_{j=1}^p b_j^0 Z_{ij}^0 + e.$$

matricialmente, $Y - f^0 = Z^0 b^0 + e.$

onde b^0 aparece como função linear.

Pelo método padrão dos mínimos quadrados, obtém-se o sistema de equações normais (SEN) $Z^{0'} Z^0 b^0 = Z^{0'} (Y - f^0)$, onde b^0 é solução de mínimos quadrados do sistema e é também a primeira estimativa de β . ($b^0 = \hat{\beta}^1$).

Geralmente, a soma de quadrados residual relativa a b^0 ($SQR(b^0)$) não é mínima. Daí a necessidade de novas iterações. Para uma próxima iteração há que se fazer uma pequena correção (Δ) no vetor b , na tentativa de diminuir a SQR. Busca-se portanto,

$$SQR(\hat{\beta}^{u+1}) < SQR(\hat{\beta}^u) \quad u = 1, 2, 3, \dots \text{ (número de iterações)}.$$

O problema então é determinar a dimensão e a direção da correção Δ .

MARQUARDT (1963) sugere o valor de Δ como $\Delta = (X'X + \lambda \text{diag}(X'X))^{-1} X'e$. Na verdade, essa expressão é uma integração entre o método de Gauss-Newton, que considera $\Delta = (X'X)^{-1} X'e$ e "Steepest-Descent", onde $\Delta = X'e$.

Inicialmente, esse autor atribui a λ o valor 10^{-3} .

Quando $SQR(\hat{\beta}^{u+1}) < SQR(\hat{\beta}^u)$, $\lambda \rightarrow 0$, então λ é dividido por 10 e a direção do vetor é determinada pelo procedimento de Gauss-Newton.

Se $SQR(\hat{\beta}^{u+1}) > SQR(\hat{\beta}^u)$, $\lambda \rightarrow \infty$, então λ é multiplicado por 10, e o vetor toma a direção determinada por "Steepest-Descent". O ângulo entre os dois métodos está, quase sempre, entre 80° e 90° .

Dessa forma, procura-se aproximar do ponto de mínimo da função $\phi = e'e$. Naturalmente, não se conhece o mínimo da função ϕ . Em alguns casos, mesmo com as estimativas dos parâmetros próximas do mínimo, o gradiente não se anula, nem por aproximação, ocasionando a divergência do processo iterativo, que se torna interminável. Daí a necessidade de um critério prático para a finalização do processo, dado pela expressão

$|\hat{\beta}_j^{u+1} - \hat{\beta}_j^u| \leq \delta_j$, onde $\hat{\beta}_j^u$ é a estimativa do j -ésimo componente do vetor β^u . O autor sugere que os valores de δ_j sejam dados por $\delta_j = 10^{-4}(\hat{\beta}_j^u + 10^{-3})$, onde 10^{-3} é colocado para evitar os casos em que $\hat{\beta}_j^u$ são próximos de zero.

Um ponto importante na estimação de funções não lineares é a escolha dos valores iniciais dos parâmetros. DRAPER e SMITH (1981) sugerem a atribuição de valores estimados em trabalhos anteriores, o que nem sempre está disponível. GALLANT (1987) também recomenda o uso de informações anteriores, a inspeção dos dados, a análise dos erros e cita um método geral para estimar os valores iniciais. Dependendo da expressão da função, pode-se ter uma idéia do valor aproximado que cada parâmetro possa assumir, analisando a expressão de acordo com os dados aos quais a função deve se ajustar. Tentou-se também neste trabalho, adotar 0,1 como valor inicial para todos os parâmetros, o que não foi uma boa opção na grande maioria dos casos.

O critério de informação definido por AKAIKE (1974) como $AIC = N \ln(SQR) + 2P$ onde SQR = Soma de quadrados de resíduos, N = número de pontos observados e P = número de parâmetros estimados do modelo, permite a comparação de modelos com diferentes números de parâmetros. Quando as SQR s de dois modelos, com diferente número de parâmetros, ajustados ao mesmo conjunto de dados são idênticas, o critério de informação, apresenta como modelo de melhor ajuste, aquele com menor número de parâmetros, vale dizer o menor valor para AIC .

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

São apresentados neste trabalho, os seguintes resultados:

- Estimativas dos parâmetros
- Análise de variância com o seguinte esquema.

C. V.	GL
Regressão	P-1
Residuo	N-P
Total	N-1

- Coeficiente de determinação R^2
- Coeficiente de determinação corrigido para os gl. dado pela expressão.

$$\bar{R}^2 = R^2 - (P - 1)(1 - R^2)/(N - P)$$

- O critério de informação de Akaike (AIC)

$$AIC = N \ln(SQR) + 2P$$

onde, para todas as expressões,

N = número de pontos estimados

P = número de parâmetros do modelo.

SQR = Soma de quadrados de resíduos.

4.1. Ajuste das funções aos dados do Experimento 1

Função logística

A expressão a) $y = \beta_0 / (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})$, também conhecida como autocatalítica (RICHARDS, 1959; OLIVER, 1966 e DRAPER e SMITH, 1981), a expressão b) $y = \beta_0 / (1 + \beta_1 \beta_2^x)$ MISCHAN (1972) e a expressão c) $y = \beta_0 / (1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 x)})$ (VERHULST, 1845; WILSON e DOUGLAS, 1969; VIEIRA, 1975; SILVEIRA, 1976), ajustaram-se muito bem aos dados, apresentando valores muito próximos para as somas de quadrados da regressão.

Essas funções, nas formas (a) e (b), têm a vantagem de não exigir muito dos valores iniciais para que a convergência seja alcançada. RICHARDS (1959), estudando a função logística na forma (a) (autocatalítica) concluiu que β_0 é o valor da assíntota superior, β_1 é o valor de y no tempo $x = 0$, e β_2 é o deslocamento da curva. Com base nestas informações, atribuíram-se aos parâmetros os seguintes valores iniciais: $\beta_0 = 150000$, $\beta_1 = 1500$, $\beta_2 = 0,5$. Ainda foram experimentados valores bastante dispersos para β_0 (valores altos) e, mesmo assim, a convergência foi atingida.

Outra vantagem da função (a) é que, mesmo partindo de valores diferentes para as estimativas iniciais, a convergência quase sempre acontece e, nestes casos, atingiu sempre o mesmo ponto.

Aplicando o logaritmo às expressões (a), (b) e (c), observamos que as estimativas do parâmetro β_0 são iguais nos três casos. Para o parâmetro β_1 , apenas difere na expressão (c), onde $\beta_{1c} = -\ln(\beta_{1a})$. Enquanto que β_2 difere da estimativa obtida em (a), apenas na

expressão (b), onde $\beta_{2b} = e^{-\beta_{2a}}$. Usaram-se estes valores corrigidos, como valores iniciais para ajustar as expressões (b) e (c) aos dados do Experimento 1. Tentaram-se outros valores iniciais, e o que se pôde observar foi que em (a) e (b) a convergência ocorreu com maior frequência e sempre para o mesmo ponto, embora em (a) ela tenha ocorrido com maior rapidez do que em (b).

A expressão c) $y = \beta_0 / (1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 x)})$ (VERHULST, 1845; WILSON e DOUGLAS, 1969; VIEIRA, 1975 e SILVEIRA, 1976) também apresenta uma convergência bastante rápida, porém exige valores iniciais muito próximos do ponto de mínimo da função $\hat{y}$. Por exemplo, admitindo como valores iniciais, os mesmos usados para o ajuste da função autocatalítica, corrigindo $\beta_{1c} = -\ln(\hat{\beta}_{1a})$, ou seja, $\beta_{1c} = -7,361$, a convergência é rápida e atinge o mesmo ponto de mínimo, que a primeira função. Quando se atribuem outros valores iniciais para os parâmetros, por exemplo $\beta_0 = 150000$; $\beta_1 = 5$; $\beta_2 = 0,1$, converge rapidamente, mas as estimativas dos parâmetros obtidas aqui não foram as mesmas que as anteriores ($\hat{\beta}_0 = 139137$; $\hat{\beta}_1 = -18,423$; $\hat{\beta}_2 = 2,09$ SQResíduo = $3,2 \times 10^9$).

Realimentando o processo, usando estas estimativas como valores iniciais na tentativa de diminuir a SQResíduo, não se conseguiu nenhuma melhora. O processo converge para um ponto próximo do mínimo e por este método de estimação, não se consegue aproximá-lo ainda mais do mínimo absoluto. VIEIRA (1975) usou o método de NELDER (1961), para estimar os parâmetros desta função, obtendo bons resultados. Os resultados obtidos com o ajuste da função logística nas formas a, b, e c estão nos quadros de número 1 a 5.

QUADRO 1 - Ajuste da Função Logística (a)

$y = \beta_0 / (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})$ aos Dados
do experimento 1

	β_0	β_1	β_2	QMR	u^1
Valores iniciais	150000	1500,000	0,500		
Estimativas	149293	1573,307	0,820	$3,208 \times 10^7$	12

1 Para todos os quadros, u = número de iterações

QUADRO 2 - Ajuste da Função Logística

(b) $y = \beta_0 / (1 + \beta_1 \beta_2^x)$ aos Dados
do Experimento 1

	β_0	β_1	β_2	QMR	u
Valores iniciais	150000	1500,000	0,606		
Estimativas	149294	1572,753	0,441	$3,208 \times 10^7$	74

QUADRO 3 - Análise de Variância das Funções Logísticas

(a) e (b) Ajustadas aos Dados do
Experimento 1

C V	G L	S Q	Q M
Regressão	2	$5,743 \times 10^{10}$	$2,872 \times 10^{10}$
Resíduo	13	$4,170 \times 10^8$	$3,208 \times 10^7$
Total	15	$5,785 \times 10^{10}$	
$R^2 = 0,9928$			

QUADRO 4 - Ajuste da Função Logística (c)

$y = \beta_0 / (1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 x)})$ aos Dados
do Experimento 1

	β_0	β_1	β_2	QMR	u
Valores iniciais	150000	-7,361	0,838		
Estimativas	149216	-7,400	0,833	$3,209 \times 10^{-7}$	10^{-10}

QUADRO 5 - Análise de Variância da Função Logística (c)
Ajustada aos Dados do Experimento 1

C V	G L	S Q	Q M
Regressão	2	$5,743 \times 10^{10}$	$2,871 \times 10^{10}$
Resíduo	13	$4,172 \times 10^8$	$3,259 \times 10^7$
Total	15	$5,785 \times 10^{10}$	
$R^2 = 0,9927$			

Função de Gompertz

A função de Gompertz, também conhecida como complemento log-log, é mais usada para representar curvas de crescimento animal do que vegetal. Uma característica interessante desta função é a assimetria da curva em relação ao ponto de inflexão. VIEIRA (1975) estudou a função (d) $y = e^{(\beta_0 - \beta_1 \beta_2^x)}$ para representar o crescimento de ratos, usando o método de STEVENS (1951) para estimar os parâmetros. A curva de forma sigmóide apresenta duas assintotas, $y = 0$ (inferior) e $y = e^{\beta_0}$ (superior). O ponto de inflexão é dado por $x = -\ln \beta_1 / \ln \beta_2$ e $y = e^{(\beta_0 - 1)}$. Da assintota superior pode-se deduzir o

valor inicial para β_0 . Seja $y(\text{máximo})$ o maior valor observado do peso da planta. Considerando $y(\text{máximo})$ como assintota superior, tem-se que $\ln(y(\text{máximo})) = \beta_0$, logo o valor inicial para β_0 é $\ln(148859) = 11,911$. A afirmação da autora é que $\beta_1 > 0$ e $0 < \beta_2 < 1$. Neste trabalho consideraram-se os valores iniciais $\beta_0 = 11,911$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0,5$, para estimar os parâmetros da função (d), ajustada aos dados do Experimento 1.

Outra função de Gompertz foi estudada por RICHARDS (1959) (e) $y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 x}}$, cujo ponto de inflexão é dado por $y = \beta_0 / e$. Os valores iniciais dos parâmetros para o ajuste desta função podem ser deduzidos da função anterior. Aplicando o logaritmo duas vezes em ambas as funções tem-se.

$$\begin{aligned} - \text{Em (d), } \ln(y) &= \beta_0 - \beta_1 \beta_2^x \\ \ln(\beta_0 - \ln(y)) &= \ln(\beta_1) + x \ln(\beta_2) \\ - \text{Em (e) } \ln(y) &= \ln(\beta_0) - \beta_1 e^{-\beta_2 x} \\ \ln(\ln(\beta_0) - \ln(y)) &= \ln(\beta_1) - x \beta_2 \end{aligned}$$

Logo, os valores iniciais para a expressão (e) são:

$$\beta_0 = e^{11,911} = 148895, \beta_1 = 10, \beta_2 = -\ln(0,5) = 0,693.$$

Ambas as funções estudadas aqui apresentaram um bom ajuste na maioria dos experimentos, atingindo sempre o mesmo ponto de mínimo de $\hat{\xi}$, em poucas iterações.

Mostraram também não ser muito exigentes quanto aos valores iniciais dos parâmetros, o que é uma característica desejável, pois nem sempre o usuário tem informações sobre os valores iniciais dos parâmetros. Os resultados obtidos com o ajuste da função de Gompertz, nas formas (d) e (e) estão nos quadros 6, 7 e 8.

QUADRO 6 - Ajuste da Função de Gompertz (d)

$$y = e^{\beta_0} - \beta_1 \beta_2^x \quad \text{aos Dados do Experimento 1}$$

	β_0	β_1	β_2	QMR	u
Valores iniciais	11,911	10	0,500		
Estimativas	11,928	110,196	0,565	6,275x10 ⁷	16

QUADRO 7 - Ajuste da Função de Gompertz (e)

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1} e^{-\beta_2^x} \quad \text{aos Dados do Experimento 1}$$

	β_0	β_1	β_2	QMR	u
Valores iniciais	148895	10	0,693		
Estimativas	151412	110,196	0,571	6,275x10 ⁷	16

QUADRO 8 - Análise de Variância das Funções de Gompertz (d), (e) Ajustadas aos Dados do Experimento 1

CV	GL	SQ	QM
Regressão	2	5,703x10 ¹⁰	2,852x10 ¹⁰
Resíduo	13	8,158x10 ⁸	6,275x10 ⁷
Total	15	5,785x10 ¹⁰	
$R^2 = 0,9858$			

Função monomolecular

A expressão (f) $y = \beta_0(1 - \beta_1 e^{-\beta_2 x})$ é também conhecida como função monomolecular. RICHARDS (1959) cita-a como uma das três funções mais usadas para o ajuste de curvas de crescimento ao lado das funções autocatalítica (a) e de Gompertz (d).

Neste trabalho, estudou-se também a função Brody (g) $y = \beta_0 - \beta_1 e^{-\beta_2 x}$, onde $\beta_{1g} = \beta_{0f} \beta_{1f}$ da função anterior, GALLANT (1987) e SILVEIRA (1976). Ambas as funções naturalmente apresentaram o mesmo ajuste. Mostraram não ser muito exigentes quanto à precisão dos valores iniciais. Convergiu com relativa rapidez, quando ajustadas aos dados do Experimento 1.

Embora a função (f) tenha sido citada por RICHARDS (1959) como uma das três mais usadas no ajuste de dados de crescimento, neste trabalho, não demonstrou ser uma das melhores, quando comparada às demais.

Como valores iniciais foram usados $\beta_0 = y(\text{máximo})$, $\beta_1 = 5 (>0)$ e $\beta_2 = 0,010 (0 < \beta_2 < 1)$. Foram testadas várias opções como valores iniciais, para verificar se as estimativas encontradas eram de algum mínimo local, dado que a função não se ajustou bem a esse conjunto de dados. No entanto, todas as vezes em que a convergência foi encontrada, ela se deu sempre no mesmo ponto, fazendo crer que este seja o ponto de mínimo global, da função $\S$. Os resultados do ajuste das funções monomolecular e de Brody estão nos quadros 9, 10, e 11.

QUADRO 9 - Ajuste da Função Monomolecular
 $(f) y = \beta_0 (1 - \beta_1 e^{-\beta_2 x})$ aos Dados do
 Experimento 1

	β_0	β_1	β_2	QMR	u
Valores iniciais	148859	5	0,010		
Estimativas	362593	1,151	0,043	$4,651 \times 10^8$	26

QUADRO 10 - Ajuste da função Brody (g) $y = \beta_0 - \beta_1 e^{-\beta_2 x}$
 aos Dados do Experimento 1

Valores iniciais	365986	420500	0,042		
Estimativas	362650	417354	0,043	$4,651 \times 10^8$	6

QUADRO 11 - Análise de Variância das Funções (f) e
 (g) Ajustadas aos Dados do Experimento 1

CV	GL	SQ	QM
Regressão	2	$5,180 \times 10^{10}$	$2,590 \times 10^{10}$
Resíduo	13	$6,046 \times 10^9$	$4,651 \times 10^8$
Total	15	$5,785 \times 10^{10}$	
$R^2 = 0,8954$			

Função logística modificada

A função (h) $y = \beta_0 (1 + e^{-\beta_1 x})^{-\beta_2}$ foi usada por CORTARELLI (1973), para ajustar a dados de crescimento de gado bovino. No presente trabalho, o modelo apresentou um bom ajuste na maioria dos experimentos.

Não se tinha informação mais precisa sobre os valores iniciais dos parâmetros. Por esta razão, optou-se por atribuir a β_0 um valor próximo do y (máximo) a β_1 e β_2 , valores baixos, por apresentarem-se na expressão, como expoentes.

Não é uma função muito exigente quanto à precisão dos valores iniciais. Pode-se notar no Quadro 12 que a escolha do valor inicial para β_2 não foi muito adequada. No entanto a convergência foi atingida. Experimentando outros valores iniciais para os parâmetros, toda vez que a convergência foi encontrada, ela se deu atingindo-se o mesmo ponto de mínimo, apesar de às vezes ser extremamente lento, o processo de convergência.

QUADRO 12 - Ajuste da Função Logística Modificada

(h) $y = \beta_0 (1 + e^{-\beta_1 x})^{-\beta_2}$ aos Dados
do Experimento 1

	β_0	β_1	β_2	QMR	u
Valores iniciais	148850	0,100	0,010		
Estimativas	151970	0,555	96,493	$6,266 \times 10^7$	67

QUADRO 13 - Análise da Variância da Função Logística Modificada Ajustada aos Dados do Experimento 1

CV	GL	SQ	QM
Regressão	2	$5,704 \times 10^{10}$	$2,852 \times 10^{10}$
Resíduo	13	$8,146 \times 10^8$	$6,266 \times 10^7$
Total	15	$5,785 \times 10^{10}$	
$R^2 = 0,9860$			

Função exponencial

A função exponencial (1) $y = e^{\beta_0 - \beta_1/x}$ foi citada por ARRUDA *et alii* (1973), a partir da qual os autores sugeriram a função log-inversa-generalizada, que também foi assunto deste trabalho, para ajustar a dados de crescimento.

A função exponencial não apresentou um dos melhores ajustes. Uma vantagem desta função é a convergência muito rápida do processo a partir de valores iniciais não muito precisos. Foi uma das poucas funções que atingiram a convergência a partir do valor 0,1 atribuído aos parâmetros, em apenas 14 iterações.

A indicação para os valores iniciais dos parâmetros é de $\ln(y \text{ máximo})$ para β_0 e $\beta_1 > 0$. Para o ajuste aos dados do Experimento 1, atribuiu-se a β_0 o valor 11,911 e a β_1 o valor 10. Os resultados encontram-se nos quadros 14 e 15.

QUADRO 14 - Ajuste da Função Exponencial (i)

$$y = e^{\beta_0 - \beta_1/x} \text{ aos Dados do Experimento 1}$$

	β_0	β_1	QMR	u
Valores iniciais	11,911	10		
Estimativas	12,867	14,529	$3,298 \times 10^8$	7

QUADRO 15 - Análise de Variância da Função Exponencial
Ajustada aos Dados do Experimento 1

CV	GL	SQ	QM
Regressão	1	$5,323 \times 10^{10}$	$5,323 \times 10^{10}$
Resíduo	14	$4,617 \times 10^9$	$3,298 \times 10^8$
Total	15	$5,785 \times 10^{10}$	
$R^2 = 0,9202$			

Função log-inversa-generalizada

Esta função foi usada por ARRUDA *et alii* (1973) para descrever curvas de crescimento da altura de *Pinus caribea* e crescimento ponderal de gado bovino. Os autores sugeriram o uso desta função em estudos de ajuste a dados de crescimento, além das mais conhecidas, como logística e de Gompertz. Esta função também foi usada por VIEIRA (1975) para descrever o crescimento de ratos.

A função log-inversa-generalizada (j)
 $y = \beta_0 + \beta_1 \beta_2^{1/x}$ para $\beta_1 > 0$ e $0 < \beta_2 < 1$, apresenta ponto de inflexão $x = -\ln \beta_2 / 2$ e $y = \beta_0 + \beta_1 / e^2$, tendo como assintota superior $y = \beta_0 + \beta_1$. O valor de β_0 é dado como

sendo o valor de y para $x = 0$. Mostra também não ser muito exigente quanto à escolha dos valores iniciais, embora dependendo dos valores iniciais adotados a convergência se torna muito lenta. Os resultados estão nos quadros 16 e 17.

QUADRO 16 - Ajuste da Função Log-inversa-generalizada (j)

$$y = \beta_0 + \beta_1 \beta_2^{1/x} \text{ aos Dados do Experimento 1}$$

	β_0	β_1	β_2	QMR	u
Valores iniciais	1500	10	0,500		
Estimativas	-7314	378452	$1,438 \times 10^{-6}$	$3,454 \times 10^8$	49

QUADRO 17 - Análise de Variância da Função Log-inversa-generalizada Ajustada aos Dados do Experimento 1

CV	GL	SQ	QM
Regressão	2	$5,336 \times 10^{10}$	$2,668 \times 10^{10}$
Resíduo	13	$4,490 \times 10^9$	$3,454 \times 10^8$
Total	15	$5,785 \times 10^{10}$	
$R^2 = 0,9224$			

Função de Richards

A função foi estudada por RICHARDS (1959) e CAUSTON (1969), usando a expressão (k)
 $y = \beta_0 (1 \pm \beta_1 e^{-\beta_2 x})^{-1/n}$ onde o sinal dentro do parênteses segue o sinal de n . O valor de n de acordo com CAUSTON (1969) deve variar de $(-1 \leq n < 0)$ e $(0 < n)$ não sendo definida para $n < -1$ e para $n = 0$. Quando $n = -1$ tem-se a

função monomolecular. Neste trabalho, n foi considerado como o quarto parâmetro.

O ajuste desta função foi melhor que o de todas as demais. Como valores iniciais dos parâmetros foram usados $\beta_0 = 150000$, $\beta_1 = 1000000$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 1$.

Uma característica muito desejável em funções não lineares é a capacidade de atingir o ponto de convergência, a partir de valores iniciais não muito precisos. Como se pode observar, no Quadro 18, a estimativa de β_1 foi muito diferente do valor inicial. Foram experimentados vários outros valores iniciais para os parâmetros, entre eles, $\beta_0 = 15000$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ atingindo-se a convergência sempre no mesmo ponto.

Sem querer generalizar, pode-se dizer, com base neste trabalho, que na falta de informações mais precisas sobre os valores iniciais dos parâmetros, pode-se atribuir a β_0 o valor de $y(\text{máximo})$, para β_1 , um valor alto, ($\beta_1 = 1,0 \times 10^6$) tanto mais alto quanto maior for a inclinação da curva. Para β_2 e β_3 , pode-se atribuir o valor 1 a ambos os parâmetros.

Para a função ajustada desta forma, com quatro parâmetros, quando se atribui valor negativo para β_3 , o ajuste apresenta os mesmos valores absolutos estimados para $\beta_3 > 0$, apenas com os sinais trocados para as estimativas de β_1 e β_2 . Isto contraria a definição do intervalo atribuído aos valores de β_3 . ($-1 \leq \beta_3 < 0$). Os resultados se encontram nos quadros 18 e 19.

QUADRO 18 - Ajuste da Função de Richards (k)

$$y = \beta_0 (1 + \beta_1 e^{-\beta_2})^{-1/\beta_3} \text{ aos Dados}$$

do Experimento 1

	β_0	β_1	β_2	β_3	QMR	u
Valores iniciais	150000	1000000	1	1		
Estimativas	146408	$7,469 \times 10^{11}$	2,510	6,026	$1,153 \times 10^7$	604

QUADRO 19 - Análise de Variância da Função de Richards
Ajustada aos Dados do Experimento 1

CV	GL	SQ	QM
Regressão	3	$5,771 \times 10^{10}$	$1,924 \times 10^{10}$
Resíduo	12	$1,383 \times 10^8$	$1,153 \times 10^7$
Total	15	$5,785 \times 10^{10}$	
$R^2 = 0,9976$			

Função de Reid

A função de Reid, dado pela expressão (1)

$$y = \beta_0 + \beta_1 e^{-\beta_2 x^{\beta_3}},$$

foi usada por SPARROW (1979), para se ajustar a dados de produção de matéria seca de forragem, em função de nitrogênio. No presente trabalho, o ajuste da função de Reid não foi bom.

A função exige que os valores iniciais dos parâmetros sejam próximos das estimativas, que representam o ponto de mínimo da função $\hat{\xi}$. Conforme os valores iniciais, a convergência se dá em diferentes pontos.

A escolha dos valores iniciais dos parâmetros para ajustar a função aos dados do Experimento 1 foi feita por

tentativas. Optou-se pelas estimativas que apresentaram menor SQR. Naturalmente que, até atingir as estimativas que foram usadas como valores iniciais, processaram-se muitas iterações. Os resultados são apresentados nos quadros 20 e 21.

QUADRO 20 - Ajuste da Função de Reid (1)

$$y = \beta_0 + \beta_1 e^{-\beta_2 x^{\beta_3}} \text{ aos Dados do Experimento 1}$$

	β_0	β_1	β_2	β_3	QMR	u
Valores iniciais	-14896	$3,65 \times 10^{-13}$	-39	0,042		
Estimativas	-61922	$2,41 \times 10^{-13}$	-39	0,019	$5,388 \times 10^8$	39

QUADRO 21 - Análise de Variância da Função de Reid
Ajustada aos Dados do Experimento 1

CV	GL	SQ	QM
Regressão	3	$5,138 \times 10^{10}$	$1,713 \times 10^{10}$
Resíduo	12	$6,466 \times 10^9$	$5,388 \times 10^8$
Total	15	$5,785 \times 10^{10}$	
$R^2 = 0,8882$			

4.2. Ajuste das funções aos dados do Experimento 2

As estimativas dos parâmetros das funções ajustadas aos dados do Experimento 2, Quadro 22, foram obtidas tendo como valores iniciais as estimativas obtidas com o ajuste das funções aos dados do Experimento 1.

QUADRO 22 - Ajuste das Funções aos Dados do Experimento 2

Funç.	Estimativas dos Parâmetros				QMR	R ²	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$			
a	149270	1604	0,822		$7,234 \times 10^7$	0,9804	15
b	149269	1605	0,440		$7,234 \times 10^7$	0,9804	103
c	148040	-6,90	0,785		$7,862 \times 10^7$	0,9787	5
d	11,930	111	0,564		$9,689 \times 10^7$	0,9737	6
e	151393	111	0,572		$9,689 \times 10^7$	0,9737	5
f	363215	1,151	0,043		$4,275 \times 10^8$	0,8839	5
g	363215	418008	0,043		$4,275 \times 10^8$	0,8839	3
h	151927	0,557	97		$9,681 \times 10^7$	0,9737	59
i	12,868	14,548			$3,369 \times 10^8$	0,9084	4
j	-7385	378865	$1,43 \times 10^{-6}$		$3,292 \times 10^8$	0,9106	5
k	146425	$4,419 \times 10^{11}$	2,465	5,884	$5,544 \times 10^7$	0,9981	653
l	-61882	$1,580 \times 10^{-13}$	-39,671	0,018	$4,545 \times 10^8$	0,8768	15

4.3. Ajuste das funções aos dados dos Experimentos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Para ajustar as funções aos dados dos demais experimentos 3,4,...,9, cujos resultados estão nos Quadros 23 a 34, foram usadas, como valores iniciais dos parâmetros, as estimativas obtidas com o ajuste aos dados do Experimento 1. O Quadro 23 mostra os resultados dos ajustes da logística, na forma (a), aos experimentos.

QUADRO 23 - Função Logística Autocatalítica

$$(a) y = \beta_0 / (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})$$

Exp.	Estimativas dos parâmetros			QMR	R^2	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	129386	91067	1,034	$5,233 \times 10^7$	0,9850	24
4	131902	2562	0,794	$2,603 \times 10^7$	0,9926	10
5	145279	224014	1,198	$4,201 \times 10^7$	0,9911	44
6	150683	514	0,749	$1,273 \times 10^7$	0,9971	10
7	167715	8526	0,872	$2,410 \times 10^7$	0,9959	14
8	167333	218	0,660	$1,806 \times 10^6$	0,9996	13
9	142174	1169	0,750	$7,151 \times 10^6$	0,9982	6

Pode-se observar que os valores de $\hat{\beta}_0$ são ligeiramente superiores às produções máximas observadas nos respectivos experimentos. $\hat{\beta}_1$ é a projeção da produção no tempo zero. Observa-se que nos Experimentos 3, 5 e 7, cujo crescimento é mais acelerado, $\hat{\beta}_1$ não corresponde ao ponto de interseção da curva ao eixo das ordenadas. Por sua vez $\hat{\beta}_2$ determina a inclinação da curva, conforme observou RICHARDS (1959) $\hat{\beta}_2$ é maior, onde o crescimento é mais acelerado, veja os valores de $\hat{\beta}_2$ nos Experimento 3,

5, e 7, comparados a 4, 6, e 8, respectivamente.

Os Experimentos pares, nos quais o crescimento foi mais lento, apresentaram melhor ajuste, principalmente onde a produção foi maior (Experimento 8), que apresentou menor QMR e maior R^2 .

A assíntota superior é dada por $\hat{\beta}_0$ muito próxima das produções máximas em cada experimento.

O ponto de inflexão é dado pela coordenadas $x = \ln \hat{\beta}_1 / \hat{\beta}_2$, $y = \hat{\beta}_0 / 2$.

No Quadro 24 encontram-se os resultados dos ajustes da função logística, na forma (b), aos dados dos experimentos.

QUADRO 24 - Função Logística (b) $y = \beta_0 / (1 + \beta_1 \beta_2^x)$

Exp.	Estimativas dos parâmetros QMR				R^2	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	129382	91449	0,355	$5,232 \times 10^7$	0,9850	612
4	131903	2560	0,453	$2,603 \times 10^7$	0,9926	403
5	145277	224707	0,302	$4,201 \times 10^7$	0,9911	1408
6	150682	514	0,473	$1,273 \times 10^7$	0,9971	103
7	167716	8522	0,418	$2,410 \times 10^7$	0,9959	519
8	167333	218	0,517	$1,806 \times 10^6$	0,9996	101
9	142174	1169	0,472	$7,151 \times 10^6$	0,9982	192

A única diferença com relação à função autocatalítica está em $\hat{\beta}_2$, que é menor onde o crescimento é mais acelerado. A assíntota superior é dada por $\hat{\beta}_0$, também ligeiramente superior às produções máximas de cada experimento. O ponto de inflexão, é dado pelas coordenadas $x = -\ln \hat{\beta}_1 / \ln \hat{\beta}_2$; $y = \hat{\beta}_0 / 2$. As Figuras 2, 3, 4 e 5 mostram o ajuste das funções logísticas nas formas (a) e (b).

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 2 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (a) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 3 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (a) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 4 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (b) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 5 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (b) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.

No Quadro 25, estão os resultados da função logística, na forma (c).

QUADRO 25 - Função Logística (c) $y = \beta_0 / (1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 x)})$

Exp.	Estimativas dos parâmetros			QMR	R ²	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	135165	-7,036	0,636	$8,806 \times 10^7$	0,9747	3
4	131835	-7,662	0,800	$1,455 \times 10^8$	0,9584	38
5	150117	-7,329	0,716	$1,121 \times 10^8$	0,9763	4
6	150933	-7,603	0,845	$1,142 \times 10^8$	0,9738	16
7	170730	-6,860	0,673	$4,701 \times 10^7$	0,9920	3
8	163844	-8,206	0,900	$3,145 \times 10^8$	0,9385	14
9	143729	-7,927	0,792	$9,533 \times 10^7$	0,9765	25

Como foram utilizadas as mesmas estimativas dos parâmetros ajustados aos dados do Experimento 1, como valores iniciais para o ajuste aos dados de todos os outros experimentos, isto ocasionou um bom ajuste da função (c) em alguns experimentos, enquanto que em outros, não foi tão bom. Deu-se a idéia de que a função não se ajusta muito bem às diversas formas de crescimento. O que não é verdade. O ajuste ineficiente da função (c) a determinados experimentos, deve-se à imprecisão dos valores iniciais. Portanto, deve-se tomar cuidado na escolha dos valores iniciais ao ajustar a função (c) a dados de crescimento.

Sabemos que, se os valores iniciais do parâmetro β_1 fossem escolhidos adequadamente em cada experimento ($\beta_{1c} = -\ln(\hat{\beta}_{1a})$), as estimativas seriam muito próximas às das funções anteriores. Como os valores iniciais adotados para ajustar a função a todos os

experimentos foram as estimativas encontradas no ajuste aos dados do Experimento 1, as estimativas encontradas aqui, seguramente não são as do ponto de mínimo absoluto. Daí, a grande desvantagem desta função, que exige do usuário, um certo conhecimento dos valores iniciais, a serem atribuídos aos parâmetros, para se conseguirem boas estimativas.

As Figuras 6 e 7 mostram os gráficos dos ajustes da função na forma (c). Pode-se observar que o gráfico do Experimento 9, mostra uma curva estimada pela função, passando abaixo de 12 dos 17 pontos observados, certamente não é o melhor ajuste da função a esse conjunto de dados. A mesma situação pode ser observada na Figura 7 no gráfico do Experimento 6. Já no Experimento 8, todos os pontos observados estão acima da curva estimada pela função. Isso evidencia que a escolha dos valores iniciais para estimar os parâmetros desta função é de suma importância.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 6 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística (c) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1, 9, 3, 4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 7 -- Gráficos das curvas estimadas através da função logística (c) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.

Os resultados dos ajustes da função de Gompertz na forma (d), aos dados dos experimentos estão no Quadro 26.

QUADRO 26 - Função de Gompertz (d) $y = e^{(\beta_0 - \beta_1 \beta_2^x)}$

Exp.	Estimativas dos parâmetros			QMR	R ²	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	11,780	2795	0,469	$8,617 \times 10^7$	0,9753	33
4	11,810	133	0,585	$6,027 \times 10^7$	0,9828	15
5	11,890	6615	0,407	$7,466 \times 10^7$	0,9842	46
6	11,940	42	0,606	$4,594 \times 10^7$	0,9895	10
7	12,050	356	0,545	$6,181 \times 10^7$	0,9895	13
8	12,050	23	0,649	$2,031 \times 10^7$	0,9960	15
9	11,890	70	0,610	$3,162 \times 10^7$	0,9922	16

Embora a função de Gompertz seja mais apropriada para descrever curvas de crescimento animal, ela ajustou-se bem em todos os experimentos sendo ligeiramente melhor nos experimentos cujo crescimento foi mais lento.

A assíntota superior é dada por $e^{\hat{\beta}_0}$, cujos valores superam as produções máximas observadas em cada experimento. Por exemplo, no Experimento 3, a produção máxima observada foi 128000kg, enquanto que a assíntota superior foi 130600kg. O ponto de inflexão, é dado pelas coordenadas: $x = -\ln \hat{\beta}_1 / \ln \hat{\beta}_2$; $y = e^{(\hat{\beta}_0 - 1)}$.

A curva dessa função é assimétrica em relação ao ponto de inflexão. Aqui, o ponto de inflexão acontece antes, quando comparado aos das funções

simétricas. As Figuras 8 e 9 mostram os gráficos dos ajustes da função Gompertz na forma (d) aos dados dos experimentos.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 8 -- Gráficos das curvas estimadas através da função Gompertz (d) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 9 - Gráficos das curvas estimadas através da função Gompertz (cd) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.

O Quadro 27 mostra os resultados dos ajustes da função Gompertz na forma (e) aos dados dos experimentos.

QUADRO 27 - Função de Gompertz (e) $y = \beta_0 e^{-\beta_1} e^{-\beta_2 x}$

Exp.	Estimativas dos parâmetros			QMR	R^2	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	130790	2794	0,755	$8,617 \times 10^7$	0,9753	32
4	134627	133	0,535	$6,027 \times 10^7$	0,9828	14
5	146076	6615	0,897	$7,466 \times 10^7$	0,9842	43
6	153482	42	0,500	$4,594 \times 10^7$	0,9895	10
7	170752	356	0,605	$6,181 \times 10^7$	0,9895	20
8	171745	23	0,431	$2,031 \times 10^7$	0,9960	14
9	145791	70	0,494	$3,162 \times 10^7$	0,9922	10

Apresenta as mesmas características da função na forma (d), com relação ao ajuste. Praticamente os mesmos valores para $\hat{\beta}_1$.

A assíntota superior é dada por $\hat{\beta}_0$ e o ponto de inflexão por $x = \ln \hat{\beta}_1 / \hat{\beta}_2$; $y = \hat{\beta}_0 / e$, cujos valores aproximam aos da função na forma (d). Os gráficos do ajuste da função Gompertz na forma (e) estão nas Figuras 10 e 11.

Figura 10 - Gráficos das curvas estimadas através da função Gompertz (e) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 11. - Gráficos das curvas estimadas através da função Gompertz (e) sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.

No Quadro 28 estão os resultados dos ajustes da função monomolecular aos dados dos experimentos.

QUADRO 28 - Função Monomolecular (f) $y = \beta_0 (1 - \beta_1 e^{-\beta_2 x})$

Exp.	Estimativas dos parâmetros			QMR	R ²	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	$7,450 \times 10^8$	1,000	$1,367 \times 10^{-5}$	$4,619 \times 10^8$	0,8674	1500
4	1230531	1,032	0,009	$3,503 \times 10^8$	0,8999	155
5	55956536	1,001	$2,100 \times 10^{-4}$	$6,531 \times 10^8$	0,8617	1440
6	241300	1,277	0,079	$3,598 \times 10^8$	0,9175	16
7	$2,509 \times 10^8$	1,000	$5,360 \times 10^{-5}$	$5,997 \times 10^8$	0,8978	1300
8	263203	1,275	0,081	$2,989 \times 10^8$	0,9415	14
9	524819	1,091	0,025	$3,347 \times 10^8$	0,9174	47

A função monomolecular não apresenta ponto de inflexão e não se ajustou bem em quase todos os experimentos. O ajuste foi melhor nos experimentos cujo crescimento foi mais lento. (Experimentos 6 e 8). Foram usadas também as estimativas obtidas no Experimento 8, como valores iniciais para ajustar aos dados dos demais experimentos, na tentativa de melhorar o ajuste, no entanto as estimativas encontradas aqui foram as mesmas do quadro 28, ou seja, não houve melhora. A assintota superior dada pela estimativa de β_0 ($\hat{\beta}_0$) é muito superior aos valores das produções máximas observadas em cada experimento. Nas Figuras 12 e 13 estão os gráficos referentes aos ajustes da função monomolecular aos dados dos experimentos.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 12 - Gráficos das curvas estimadas através da função monomolecular sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1,9,3,4.

Figura 13 - Gráficos das curvas estimadas através da função monomolecular sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.

Os resultados do ajuste da função Brody estão no Quadro 29.

QUADRO 29 - Função Brody (g) $y = \beta_0 - \beta_1 e^{-\beta_2 x}$

Exp.	Estimativas dos parâmetros			QMR	R^2	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	4408979	4451885	0,002	$4,658 \times 10^8$	0,8663	603
4	1230323	1269571	0,009	$3,503 \times 10^8$	0,8999	161
5	4408979	4455481	0,003	$6,540 \times 10^8$	0,8615	603
6	241297	308255	0,079	$3,598 \times 10^8$	0,9175	25
7	4409010	4462882	0,003	$6,033 \times 10^8$	0,8972	852
8	263200	335614	0,081	$2,989 \times 10^8$	0,9415	21
9	524776	572343	0,025	$3,347 \times 10^8$	0,9174	155

As estimativas de β_0 , na função Brody, aproximam-se daquelas encontradas na função monomolecular, nos experimentos cujo crescimento é mais lento, e as estimativas são menores. Usando as estimativas do Experimento 8 como valores iniciais para o ajuste dos demais experimentos, obtêm-se as mesmas estimativas do Quadro 29. Os gráficos da função Brody ajustada aos dados dos experimentos estão nas Figuras 14 e 15.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 14 - Gráficos das curvas estimadas através da função Brody sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1, 9, 3, 4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 15 - Gráficos das curvas estimadas através da função Brody sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.

O Quadro 30 apresenta os resultados dos ajustes da função logística modificada.

QUADRO 30 - Função Logística Modificada

$$(h) y = \beta_0 (1 + e^{-\beta_1 x})^{-\beta_2}$$

Exp.	Estimativas dos parâmetros			QMR	R ²	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	151469	0,329	30,650	$1,592 \times 10^8$	0,9543	48
4	142571	0,379	30,840	$8,061 \times 10^7$	0,9770	49
5	155521	0,481	97,756	$1,405 \times 10^8$	0,9703	24
6	155157	0,459	30,840	$4,734 \times 10^7$	0,9892	103
7	188119	0,354	30,830	$1,325 \times 10^8$	0,9774	29
8	171640	0,437	24,043	$1,872 \times 10^7$	0,9963	1124
9	151112	0,399	30,850	$4,202 \times 10^7$	0,9896	38

A função logística modificada ajustou-se bem em todos os experimentos. O ajuste foi ligeiramente melhor nos experimentos de crescimento mais lento, Experimentos (4; 6; 8). As estimativas de β_0 são superiores aos valores observados de produção máxima em cada experimento. Os gráficos da função logística modificada são apresentados pelas Figuras 16 e 17.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 16 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística modificada sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1, 9, 3, 4.

Figura 17 - Gráficos das curvas estimadas através da função logística modificada sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5, 6, 7, 8.

No Quadro 31, estão os resultados dos ajustes da função exponencial.

QUADRO 31 - Função Exponencial (i) $y = e^{(\beta_0 - \beta_1/x)}$

Exp.	Estimativas dos parâmetros		QMR	R^2	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$			
3	13,224	23,605	$2,841 \times 10^8$	0,9126	7
4	12,902	17,713	$2,302 \times 10^8$	0,9295	6
5	13,142	19,843	$4,574 \times 10^8$	0,8963	6
6	12,718	12,093	$2,751 \times 10^8$	0,9324	7
7	13,316	20,589	$3,717 \times 10^8$	0,9321	6
8	12,793	11,674	$2,170 \times 10^8$	0,9545	7
9	13,142	19,843	$4,574 \times 10^8$	0,8790	6

A função exponencial atingiu a convergência em poucas iterações. Embora esta seja uma função sigmóide, ela não se apresentou eficiente no ajuste aos dados dos experimentos. A mudança dos valores iniciais não altera as estimativas dos parâmetros. Por exemplo, as estimativas do Experimento 8, que apresentou um melhor ajuste, são as mesmas do Quadro 31 quando se atribuem outros valores iniciais aos parâmetros. Pelas Figuras 18 e 19 pode-se observar a falta de ajuste da função exponencial aos dados.

Figura 18 - Gráficos das curvas estimadas através da função exponencial sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1, 9, 3, 4.

Figura 19 -- Gráficos das curvas estimadas através da função exponencial sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5, 6, 7, 8.

Os resultados dos ajustes da função log-inversa-generalizada são apresentados no Quadro 32.

QUADRO 32 - Função Log-inversa-generalizada

$$(j) y = \beta_0 + \beta_1 \beta_2^{1/x}$$

Exp.	Estimativas dos parâmetros			QMR	R^2	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$			
3	-1581	543546	$9,240 \times 10^{-12}$	$3,036 \times 10^8$	0,9129	28
4	-3904	390856	$4,870 \times 10^{-8}$	$2,431 \times 10^8$	0,9305	12
5	-5514	491399	$7,890 \times 10^{-9}$	$4,822 \times 10^8$	0,8979	30
6	-10323	328104	$1,970 \times 10^{-5}$	$2,797 \times 10^8$	0,9359	13
7	-4971	586761	$3,150 \times 10^{-9}$	$3,916 \times 10^8$	0,9332	37
8	-10843	354411	$2,760 \times 10^{-5}$	$2,169 \times 10^8$	0,9576	8
9	-6060	386418	$2,940 \times 10^{-7}$	$2,217 \times 10^8$	0,9453	11

Com características semelhantes à função exponencial, a função log-inversa-generalizada não se ajustou bem aos dados dos experimentos. A mudança dos valores iniciais não melhora o ajuste. A assíntota superior, dada por $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1$, resulta num valor muito alto em todos os experimentos. O ponto de inflexão é dado pelas coordenadas $x = -\ln \hat{\beta}_2 / 2$; $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 / e^2$. Nos experimentos com crescimento mais lento (4; 6; 8 e 9), o ponto de inflexão acontece para valores baixos de x ($x = 5,4$ no Exp. 6). Os gráficos da função log-inversa-generalizada estão nas Figuras 20 e 21.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 20 - Gráficos das curvas estimadas através da função log-inversa-generalizada sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1, 9, 3, 4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 21 - Gráficos das curvas estimadas através da função log-inversa-generalizada sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5, 6, 7, 8.

No Quadro 33, estão os resultados dos ajustes da função de Richards.

QUADRO 33 - Função de Richards (k) $y = \beta_0 (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})^{-1/\beta_3}$

Exp.	Estimativas dos parâmetros				QMR	R ²	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$			
3	125834	$4,077 \times 10^{25}$	4,711	9,237	$1,820 \times 10^7$	0,9951	785
4	128500	$2,479 \times 10^{12}$	2,431	5,819	$1,372 \times 10^6$	0,9996	376
5	143093	$3,513 \times 10^{20}$	4,060	7,145	$1,177 \times 10^7$	0,9977	800
6	148763	127432	1,201	2,554	$3,091 \times 10^6$	0,9993	98
7	164697	61473080	1,531	2,947	$8,806 \times 10^6$	0,9986	208
8	166995	320	0,689	1,119	$1,800 \times 10^6$	0,9984	206
9	140027	126632	1,104	2,180	$1,509 \times 10^6$	0,9997	109

A função de Richards apresentou um excelente ajuste em todos os experimentos, sendo ainda melhor naqueles, cuja curva de crescimento é mais suavizada. As estimativas de β_0 são ligeiramente inferiores às produções máximas observadas em cada experimento. As estimativas de β_1 variam sensivelmente de acordo com a inclinação da curva, sendo maiores nos experimentos que possuem a característica de um crescimento mais acentuado (3, 5, 7) e menores naqueles de crescimento mais suavizado (4, 6, 8, 9). Nas Figuras 22 e 23 observa-se através dos gráficos da função de Richards, a eficiência desta função em ajustar-se aos dados.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 22 - Gráficos das curvas estimadas através da função Richards sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1, 9, 3, 4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 23 - Gráficos das curvas estimadas através da função Richards sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5,6,7,8.

No Quadro 34, estão os resultados dos ajustes da função de Reid.

QUADRO 34 - Função de Reid (1) $y = \beta_0 + \beta_1 e^{-\beta_2 x^{\beta_3}}$

Exp.	Estimativas dos parâmetros				QMR	R^2	u
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$			
3	-16783	$4,070 \times 10^{-14}$	-39	0,035	$4,349 \times 10^8$	0,8841	33
4	-33300	$8,945 \times 10^{-14}$	-39	0,025	$3,801 \times 10^8$	0,8991	31
5	-32582	$7,650 \times 10^{-14}$	-39	0,028	$6,929 \times 10^8$	0,8638	31
6	-115201	$2,608 \times 10^{-13}$	-40	0,012	$4,547 \times 10^8$	0,9032	51
7	-32092	$6,883 \times 10^{-14}$	-39	0,030	$6,156 \times 10^8$	0,9026	37
8	-132914	$2,100 \times 10^{-13}$	-40	0,012	$3,957 \times 10^8$	0,9281	57
9	-46392	$1,180 \times 10^{-13}$	-39	0,022	$3,764 \times 10^8$	0,9137	27

A função de Reid não apresentou um bom ajuste em todos os experimentos, sendo ainda pior naqueles cujo crescimento é mais rápido (experimentos 3, 5, 7). A mudança dos valores iniciais não melhora o ajuste.

As Figuras 24 e 25 mostram os gráficos das curvas estimadas pela função de Reid sobrepostas aos dados observados dos experimentos.

No Quadro 35 estão os quadrados médios residuais de todas as funções ajustadas aos dados de todos os experimentos.

No Quadro 36 se encontram os valores dos coeficientes de determinação corrigidos para os graus de liberdade de todas as funções ajustadas aos dados de todos os experimentos.

EXPERIMENTO 1

EXPERIMENTO 9

EXPERIMENTO 3

EXPERIMENTO 4

Figura 24 - Gráficos das curvas estimadas através da função Reid sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 1, 9, 3, 4.

EXPERIMENTO 5

EXPERIMENTO 6

EXPERIMENTO 7

EXPERIMENTO 8

Figura 25 - Gráficos das curvas estimadas através da função Reid sobrepostos aos pontos observados nos Experimentos 5, 6, 7, 8.

QUADRO 35 - Quadrado Médio Residual das Funções Ajustadas aos Dados de Todos os Experimentos.

Funções	Exp. 1	Exp. 2	Exp. 3	Exp. 4	Exp. 5	Exp. 6	Exp. 7	Exp. 8	Exp. 9
a, b	3.208×10^7	7.234×10^7	5.233×10^7	2.603×10^7	4.201×10^7	1.273×10^7	2.410×10^7	1.806×10^8	7.151×10^8
c	3.259×10^7	7.862×10^7	8.806×10^7	1.455×10^8	1.121×10^8	1.142×10^8	4.701×10^7	3.145×10^8	9.533×10^7
d, e	6.275×10^7	9.689×10^7	8.617×10^7	6.027×10^7	7.466×10^7	4.594×10^7	6.181×10^7	2.031×10^7	3.162×10^7
f	4.651×10^8	4.275×10^8	4.619×10^8	3.503×10^8	6.531×10^8	3.598×10^8	5.997×10^8	2.989×10^8	3.347×10^8
g	4.651×10^8	4.275×10^8	4.658×10^8	3.503×10^8	6.540×10^8	3.598×10^8	6.033×10^8	2.989×10^8	3.347×10^8
h	6.266×10^7	9.681×10^7	1.592×10^8	8.061×10^7	1.405×10^8	4.734×10^7	1.325×10^8	1.747×10^7	4.202×10^7
i	3.298×10^8	3.369×10^8	2.841×10^8	2.302×10^8	4.574×10^8	2.751×10^8	3.717×10^8	2.170×10^8	4.574×10^8
j	3.454×10^8	3.292×10^8	3.036×10^8	2.431×10^8	4.822×10^8	2.797×10^8	3.916×10^8	2.169×10^8	2.217×10^8
k	1.153×10^7	5.544×10^7	1.820×10^7	1.372×10^6	1.117×10^7	3.091×10^6	8.806×10^6	1.800×10^6	1.509×10^6
l	5.368×10^8	4.645×10^8	4.349×10^8	3.801×10^8	6.929×10^8	4.547×10^8	6.156×10^8	3.957×10^8	3.764×10^8

QUADRO 36 - Coeficiente de Determinação Corrigido Para os Graus de Liberdade, $\bar{R}^2$. Dado pela Expressão: $\bar{R}^2 = R^2 - ((p - 1)/(n - p))(1 - R^2)$.

onde n = número de pares de x, y

p = número de parâmetros.

Funções	Experimentos								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	0,9916	0,9803	0,9829	0,9915	0,9898	0,9967	0,9953	0,9995	0,9979
b	0,9916	0,9803	0,9829	0,9915	0,9898	0,9967	0,9953	0,9995	0,9979
c	0,9916	0,9786	0,9711	0,9525	0,9729	0,9701	0,9909	0,9297	0,9731
d	0,9834	0,9736	0,9718	0,9803	0,9819	0,9880	0,9880	0,9954	0,9911
e	0,9834	0,9736	0,9718	0,9803	0,9819	0,9880	0,9880	0,9954	0,9911
f	0,8793	0,8836	0,8485	0,8856	0,8419	0,9057	0,8832	0,9331	0,9056
g	0,8793	0,8836	0,8472	0,8856	0,8417	0,9057	0,8325	0,9331	0,9056
h	0,9838	0,9736	0,9478	0,9737	0,9661	0,9877	0,9742	0,9958	0,9881
i	0,9145	0,9023	0,9068	0,9248	0,8894	0,9279	0,9276	0,9515	0,8709
j	0,9105	0,9104	0,9005	0,9206	0,8833	0,9267	0,9237	0,9515	0,9375
k	0,9970	0,9848	0,9940	0,9995	0,9972	0,9991	0,9983	0,9980	0,9996
l	0,8603	0,8763	0,8574	0,8758	0,8324	0,8894	0,8801	0,9115	0,8938

O Quadro 37 apresenta os valores do Critério de Informação de AKAIKE (AIC).

QUADRO 37 -- Critério de Informação de AKAIKE Dado Pela Expressão $AIC = n \ln(SQR) + 2p$

Funções	Experimentos								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a,b	324	17770	353	341	349	329	340	296	319
c	324	17830	362	370	366	366	351	383	363
d,e	334	17980	361	355	359	351	356	337	344
f	366	19049	390	385	396	386	394	383	385
g	366	19049	390	385	396	386	395	383	385
h	334	17980	372	360	370	351	369	354	349
i	360	18876	381	377	389	380	386	376	389
j	362	18861	383	379	391	381	387	377	378
k	308	17579	336	292	328	306	323	296	293
l	369	19094	390	387	398	391	396	388	387

Os valores de AIC para o Experimento 2 são maiores que os demais Experimentos. Isto porque neste Experimento, o valor de n é maior. Para o mesmo Experimento podemos comparar os ajustes das funções. O menor valor de AIC representa o melhor ajuste.

Com base nos quadrados médios residuais, (QMR) foi atribuído, a cada uma das doze funções estudadas, seu posto em relação às demais. Atribuiu posto 1 à função que apresentou menor (QMR). Os resultados aparecem no Quadro 38.

QUADRO 38 - Frequência dos Postos de cada Função, em Relação às Demais, de Acordo com o QMR

Funções	Postos												Total Σ fup
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
a, b		9											9 18
c				3		2	3				1		9 56
d, e				5	2	2							9 42
f									2	6	1		9 89
g									2	4	2	1	9 92
h				1	2	3	3						9 53
i								7	1			1	9 77
j							1	2	6				9 77
k		9											9 9
l										1	1	7	9 105

Observa-se que a função Richards (k) apresentou o menor (QMR) em todos os Experimentos, enquanto que a função Reid (l) apresentou o maior (QMR) em sete Experimentos.

Foram atribuídos postos às funções em cada experimento, em relação ao coeficiente de determinação corrigido ($\bar{R}^2$), posto 1 para a função que apresentou maior valor de $\bar{R}^2$. Os resultados estão no Quadro 39.

QUADRO 39 - Frequência dos Postos de cada Função em Relação às Demais, de Acordo com o Coeficiente de Determinação Corrigido $\bar{R}^2$

Funções	Postos												Total $\sum$ freq.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
a, b		9											9 18
c		1		2		2	3				1		9 54
d, e				5	4								9 40
f									2	6	1		9 89
g									2	4	2	1	9 92
h				1	1	3	4						9 55
i							1	6	1			1	9 76
j							1	2	6				9 77
k		9											9 9
l										1	1	7	9 105

O quadro 39 mostra, que também com relação ao $\bar{R}^2$, a função de Richards (k) foi a que melhor se ajustou aos dados de todos os Experimentos e o pior ajuste foi o da função Reid (l).

No Quadro 40 estão os resultados da atribuição de postos às funções, com relação ao critério de informação de Akaike (AIC), posto 1 para a função que apresentou menor valor de AIC em cada experimento.

QUADRO 40 - Frequência dos Postos de cada Função, em Relação às Demais, de Acordo com o Critério de Informação de AKAIKE (AIC)

Funções	Postos												Total $\sum f_{ipi}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
a, b	1	8											9 17
c		1		2		2	3		1				9 52
d, e				6	3								9 39
f,									2	7			9 88
g									2	6	1		9 89
h				1	2	3	3						9 53
i							1	6	1			1	9 76
j								3	6				9 78
k	9												9 9
l										1	1	7	9 105

Com base na estatística $\sum f_{ipi}$ dos Quadros 38, 39 e 40, pode-se observar que os resultados são muito parecidos. Por exemplo, a função de Richards (k) apresenta, nos três quadros, o menor valor de $\sum f_{ipi}$, enquanto que a de Reid (l) apresenta o maior valor. Isto mostra uma concordância de resultados dos critérios adotados.

5. CONCLUSÕES

Em situações como a deste trabalho em que se estudam várias funções ajustadas a diversas formas de crescimento, espera-se que uma boa função tenha as seguintes características:

- 1) Que apresente um bom ajuste a cada conjunto de dados;
- 2) Que tenha a flexibilidade de se ajustar bem na maioria dos experimentos;
- 3) Que consiga atingir a convergência a partir de valores iniciais não muito próximos das estimativas dos parâmetros;
- 4) Que encontre o ponto de convergência em poucas iterações.

Tendo em vistas estas características, podem-se tirar algumas conclusões a respeito das funções estudadas neste trabalho.

1) A função de Richards, dada pela expressão (k) $y = \beta_0 (1 + \beta_1 e^{-\beta_2 x})^{-1/\beta_3}$, ajustou-se melhor que todas as demais em todos os experimentos. Tal função não exige muito da precisão dos valores iniciais dos parâmetros; converge sempre para o mesmo ponto de mínimo

da função $\hat{g}$; é flexível ao ajustar-se bem às diferentes formas de crescimento. Esta função apenas necessita muitas iterações até atingir a convergência, o que não é, na verdade, um grande problema dada a facilidade de utilização e a eficiência da informática atual.

2) A função logística (nas formas a, b) apresentou o segundo melhor ajuste em todos os experimentos. A função na forma (c) também mostrou ajuste como na (a) e na (b), desde que os valores iniciais tivessem sido convenientemente escolhidos, isto é, o valor inicial para β_{1c} fosse igual a $-\ln(\hat{\beta}_{1a})$. Esta função (c) mostrou ser muito exigente quanto à precisão dos valores iniciais, o que é indesejável. O fato de alcançar a convergência em pontos diferentes, conforme sejam diferentes os valores iniciais dos parâmetros, deixa o pesquisador sem saber se o ponto alcançado é o de mínimo absoluto ou local. Portanto, deve-se ter cautela ao usar esta função para representar curvas de crescimento.

3) A função de Gompertz (formas d, e) também apresentou bom ajuste ficando logo atrás da função logística. Este fato confirma o que já é bastante conhecido com relação à eficiência dessas funções para descrever curvas de crescimento.

4) A função Logística Modificada (h) ajustou-se razoavelmente bem na maioria dos experimentos. Esta função deve constar dentre aquelas usadas para ajustar a dados de crescimento, pois, além de não exigir muita precisão dos valores iniciais, ajusta-se muito bem a diversas formas de crescimento.

5) As funções (i) Exponencial e (j) log-inversa-generalizada não se ajustaram bem em quase todos os experimentos, apesar de serem funções assintóticas sigmóides, características de curvas de crescimento.

6) As funções (f) monomolecular e (g) Brody não se ajustaram bem na maioria dos experimentos. Isto contraria a afirmação de RICHARDS (1959), que cita a monomolecular como uma das três funções que melhor descrevem curvas de crescimento, juntamente com a logística e a de Gompertz.

7) Finalmente, a função de Reid (1) foi a que apresentou o pior ajuste em quase todos os experimentos. Esta função possui quatro parâmetros, o que dificulta a escolha dos valores iniciais. Para valores iniciais diferentes, quase sempre a convergência é alcançada em pontos diferentes. Isto obriga o pesquisador a testar vários valores iniciais, até atingir o mínimo absoluto. Das características desejáveis, a função de Reid apresentou apenas uma, ou seja, rapidez na convergência. Isto, na verdade, não significa muito, pois nem sempre o ponto atingido é o de mínimo absoluto, porque depende basicamente da escolha dos valores iniciais.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ANUARIO ESTATISTICO DO BRASIL, Rio de Janeiro, v. 49, 1989. 716 p.

ANUARIO ESTATISTICO DO BRASIL, Rio de Janeiro, v. 51, 1991. 1024 p.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions of Automatic Control, Tokyo, v. ac-19 n^o 6: 716-23, 1974.

ARRUDA, H. V.; VIEIRA, S.; HOFFMANN, R. Análise de uma função sigmóide. Arquivo do Instituto Biológico, São Paulo 40: 143-8, 1973.

CAUSTON, D. R. A computer program for fitting the Richards function. Biometrics, Alexandria, 25: 401-9, 1969.

CORTARELLI, A. Estudo da curva de crescimento de machos de raça Nelore, através de quatro modelos estocásticos. Jaboticabal, 1973. 179 p. (Doutorado - Faculdade de Medicina Veterinária e Agricultura de Jaboticabal/UNESP)

DRAPER, N. & SMITH, H. Applied regression analysis. 2^a ed. New York, John Wiley, 1981. 407 p.

GALLANT, R. A. Nonlinear statistical models. New York, John Wiley, 1987. 610 p.

- HOFFMANN, R. & THAME, A. C. M. Determinação da idade ótima para primeiro desbaste em povoamento de *Pinus Caribaea*. *Agro-econômica*, Brasília, 2: 9-37, 1970.
- MAGNANI, R. Alguns aspectos da aplicação da segunda lei de Mitscherlich e da equação de regressão quadrática à maturação da cana-de-açúcar. Piracicaba, 1985. 73 p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP)
- MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, 2: 431-41, 1963.
- MISCHAN, M. M. Análise econométrica do crescimento de gado bovino. Botucatu, 1972. (Doutorado - Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas de Botucatu/UNESP)
- NELDER, J. A. The fitting of a generalization of the logistics curve. *Biometrics*, Alexandria, 17: 89-110, 1961.
- OLIVER, F. R. Aspects of maximum likelihood estimation of the logistic growth function, *Journal of the American Statatistical Association*, Boston 61: 697-705, 1966.
- OLIVEIRA, M. C. N. de. Comparação de modelos matemáticos aplicados a ensaios de calagem com a cultura da soja. (*Glycine Max* (L.) *Merill.*). Piracicaba, 1986. 165 p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP)

- RICHARDS F. J. A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, Oxon, 10: 290-300, 1959.
- RICHARDS, F. S. G. A method of maximum-likelihood estimation. *Journal Royal of Statistical Society B*, London, 23: 469-75, 1961.
- SILVA, M. A. P. Métodos de estimação de parâmetros do modelo $y = a(1 - 10^{-cm})10^{-k^2m}$ aplicados a dados de maturação da cana-de-açúcar. Piracicaba, 1980. 85p (Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP)
- SILVEIRA J. P. Estudo de alguns modelos exponenciais de crescimento de bovinos da raça Ibagé. Piracicaba, 1976. 174 p. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP)
- SPARROW, P. E. The comparison of five response curves for representing the relationship between the annual dry-matter yield of grass herbage and fertilizer nitrogen. *Journal of Agricultural Science, Cambridge*, 93: 513-20, 1979.
- STEVENS, W. L. Asymptotic regression. *Biometrics*, Alexandria, 7: 247-67, 1951.
- THORNLEY, J. H. M. *Mathematical models in plant physiology*. London, Academic Press, 1976. 318 p.
- WILSON, A. L. & DOUGLAS, A. W. A note on nonlinear curve fitting. *American Statistician*, Washington, 23: 37-8, 1969.

VERHULST, P. E.. Recherches mathématiques sur loi d'accroissement de la population. Academie de Bruxelles, 18, 1845.

VIEIRA, S. Estudo das funções assintótico-sigmóides. Piracicaba, 1975. 105p (Livre Docência - Faculdade de Odontologia de Piracicaba/UNICAMP).

APENDICE

TABELA 3. Experimento 2 - Peso em kg/ha da massa verde da cana-de-açúcar (cana-soca). Experimento realizado em Piracicaba em 1981/82.

Idade (meses)	Peso da cana-de-açúcar em kg/ha.											
02,0	3000	2631	2380	2687	1440	2827	1920	2644	2133	3220	2860	2224
	2302	1656	2650	1244	2738	2044	2418	2980	2567	2542	1880	2133
	1596	2702	1600	2760	1920	2551	2173	2791	2436	1893	2640	1720
	3600	2311	2067	2267	1189	2722	1633	1976	2311			
03,0	5020	5820	5231	4107	4729	6502	4424	4840	4402	4533	5460	5622
	5769	5756	4782	4178	5244	5040	6307	5400	4013	6178	5356	4444
	4378	6620	4711	5489	5600	5756	5500	4018	5778	6013	4720	3680
	5158	5000	5980	5889	5111	5240	5378	5598	4036			
04,3	9547	9333	6204	14533	8200	8373	8053	10467	4604	10256		
	6740	8824	13400	13567	6720	9396	5533	8427	9240	6533		
	8898	9840	11844	11200	7164	7733	7600	7640	6889	8409		
	10187	12444	10800	8160	9244	6307	6978	8800	9302	10248		
	8622	14733	7089	8944	7583							
05,4	12978	7627	6722	13689	8320	7211	10631	7453	6560	7627		
	10276	8244	13111	8711	7896	5891	7067	10347	9600	7920		
	9000	8667	8929	9600	10233	7633	8956	10067	9778	7333		
	10027	9396	9013	8804	8711	6760	8522	8640	9084	8522		
	8333	10500	10956	9071	5011							
06,9	19849	25278	17111	27107	27711	31640	34204	31662	20144	18389		
	23813	17400	34580	24000	27042	32669	25200	20836	19333	22400		
	19000	27276	30987	26600	21600	32818	32933	19771	19740	21493		
	27067	34133	23138	29004	25800	32356	25589	16178	19600	28427		
	21927	34449	33600	32667	22596							
07,8	32231	52702	37989	59322	46822	41102	37778	42093	31551	35922		
	28920	51100	55200	49049	39511	38231	36180	31138	39420	38573		
	33707	54360	38880	47840	29762	43867	40640	36991	37973	45000		
	67133	47724	38640	33347	34840	41244	30922	47200	39867	58240		
	51520	54378	27751	42791	41600							
08,5	64978	65327	43867	64444	51706	68787	53600	87840	65800	48344		
	57967	61013	77280	47609	54451	72333	71700	56940	48444	75500		
	51387	52444	66107	60187	48462	96713	60133	70000	50444	45467		
	69709	65327	52540	61227	64427	74507	50000	65400	54756	52073		
	76122	59040	65800	73467	65891							
09,6	72333	102222	86000	77444	75324	88889	61544	66422				
	81496	91140	91260	84896	83967	74667	85500	57960				
	96749	75613	69584	72333	79200	88107	81467	95556				
	69051	74436	80462	88867	83253	70353	95044	104031				
	69667	69253	73333	66147	111111	74120	82222	82262				
	66711	105733	59529	76958	82489							

TABELA 3. Experimento 2 - Peso em kg/ha da massa verde da cana-de-açúcar (cana-soca). Experimento realizado em Piracicaba em 1981/82.

Idade (meses)	Peso da cana-de-açúcar em Kg/ha							
10,6	127344	126827	138267	122778	86133	137244	103333	137218
	100667	103756	137078	158278	126329	123067	91733	143889
	105667	93333	139222	106027	155200	117111	124667	114333
	128000	107120	102300	138700	126187	123578	121600	131556
	101333	148000	106333	85244	122807	131413	143078	127556
	131724	135333	124560	100080	112667			
11,6	143000	139786	144786	145387	144987	142078	139765	145987
	143012	141768	141012	146211	142021	145987	143000	144456
	139876	148345	146789	139876	147912	143356	144234	143234
	142190	143012	142987	146876	145567	141980	142234	144000
	141987	142987	145243	143524	147123	141846	145628	142897
	142615	143089	141987	143718	142560			
12,6	146000	144956	146243	143756	144867	145837	144921	143958
	142958	147934	145272	144958	144768	143948	145934	147987
	149768	148786	143989	147987	146123	145789	148789	146453
	146458	147123	144876	149879	145432	146879	144876	143987
	146788	143989	145321	146432	147987	146657	145879	147343
	146897	145987	147321	144987	145500			
13,6	147000	148957	145099	142456	148626	149132	148243	151957
	152957	148849	149874	148638	149748	151859	150467	148856
	149637	148736	152756	151958	150745	148756	149786	143057
	147658	153987	149876	148764	146345	153758	148356	149674
	142975	143978	151675	151987	146123	147978	147897	144786
	149876	143123	150243	151679	149786			
14,6	146000	148984	144467	144897	149895	148984	152859	145908
	151038	150264	143092	144849	143098	148849	152098	150152
	149876	148278	144988	151896	151985	141989	143989	142985
	142678	141876	150748	149879	143765	141098	144876	143897
	152499	152098	146869	147875	143859	147896	152957	144819
	151839	148827	143829	147426	150617			
15,6	146000	144867	147034	146786	145987	147123	147067	145786
	146132	145984	146345	147296	146365	145987	146569	146189
	145879	146784	145897	147234	146892	147198	146056	145871
	145981	146789	147123	146589	145897	145896	146789	147098
	147178	147268	145867	145872	146893	147840	145569	147349
	148256	146234	145689	145145	144956			
16,6	145000	145876	144875	145365	143764	147213	144785	143987
	147321	146489	145457	145897	143896	144786	146350	147320
	143267	144238	147423	143896	144768	145067	144363	144098
	145234	145765	146324	145138	147312	143987	144860	146534
	145234	144329	146547	147453	144765	143786	142987	147564
	143456	145789	144673	147124	144678			
17,6	143000	143456	142567	144698	141986	144658	142589	143345
	144569	141738	145724	143078	144237	142278	146523	144687
	142678	141789	145780	143456	142957	146230	141456	142678
	143567	143894	144724	142560	141456	145690	143457	143789
	145268	141348	142782	140467	146234	142346	142815	141568
	142678	144023	143089	144131	141534			