O EMPREGO DOS ESQUEMAS FATORIAIS FRACIONADOS
E DO CONFUNDIMENTO NA EXPERIMENTAÇÃO

GILSON MEDEIROS E SILVA

(Bacharel em Estatística)

ORIENTADOR: PROF. DR. ROBERTO SIMIONATO MORAES

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia - Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
ESTADO DE SÃO PAULO - BRASIL
FEVEREIRO - 1987.

A minha esposa, Angela

Aos meus filhos, Giselle, Jean e Nataly

DEDICO

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, pela confiança e estímulo.
- Ao Professor Doutor Roberto Simionato Moraes, pela orientação e sugestão, como também pela amizade.
- Ao colega Henri Stuker, pela elaboração do programa.
- Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos.
- Ao Professor Doutor Humberto de Campos, pelo incentivo e consideração.
- Ao Professor José Amarino Maciel de Brito pelo Summary.
- Aos colegas do Curso de Estatística e Experimentação Agrônômica, pela amizade.
- A todos os funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos favores prestados.
- A todos aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho.
- Ao desenhista Antonio Flavio Filho, pelos gráficos.
- A Rosa Maria Alves, pelos favores prestados.

ÍNDICE

página

RESUMO	
SUMMARY	
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. MÉTODO E MATERIAL	20
3.1. Método	20
3.1.1. Experimentos Fatoriais	20
3.1.1.1. Experimentos Fatoriais da Série	
2^n	21
3.1.1.1.1. Modelo Matemático	21
3.1.1.1.2. Forma Geral de Apresentar os	
fatoriais 2^n	23
3.1.1.1.3. A Análise de Variância para os	
Fatoriais da Série 2^n	28
3.1.1.2. Experimentos Fatoriais da Série	
3^n	29
3.1.1.2.1. Modelo Matemático	29
3.1.1.2.2. A Forma Geral de Apresentar	
os Fatoriais 3^n	29

página

3.1.1.2.3. Análise de Variância para o Fatorial da Série 3 ⁿ	35
3.1.2. Confundimento nos Experimentos Fatoriais	36
3.1.2.1. Confundimento na Série 2 ⁿ ...	37
3.1.2.2. Confundimento na Série 3 ⁿ ...	50
3.1.3. Experimentos Fatoriais com uma única repetição	57
3.1.4. Eficiência	60
3.1.4.1. No Caso de uma Única Repetição	60
3.1.4.2. No Caso de mais de uma Repetição	61
3.1.5. Fatorial Fracionado	62
3.1.5.1. Fatorial Fracionado no sistema 2 ⁿ	64
3.1.5.1.1. Descrição do Bloco Principal, fração 2 ^{n-k} e Conjunto de Alias	71
3.1.5.1.2. Fatoriais Fracionados da Série 2 ⁿ em Blocos Ao Acaso..	85
3.1.5.2. Fatorial Fracionado no Sistema 3 ⁿ	90
3.1.5.2.1. Fatoriais Fracionados da Série 3 ⁿ em Blocos ao Acaso..	105

3.1.5.2.2. Observações	108
3.1.6. Método Prático de Yates	111
3.2. Material	113
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	117
4.1. Experimento 1	118
4.2. Experimento 2	135
4.3. Experimento 3	148
4.4. Experimento 4	161
5. CONCLUSÕES	176
6. BIBLIOGRAFIA	178
ANEXO 1	183
ANEXO 2	192

O EMPREGO DOS ESQUEMAS FATORIAIS FRACIONADOS
E DO CONFUNDIMENTO NA EXPERIMENTAÇÃO

Autor: GILSON MEDEIROS E SILVA

Orientador: Prof. Dr. Roberto Simionato Moraes

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é estudar a utilização dos esquemas fatoriais completo com e sem confundimento e do fatorial fracionado com e sem confundimento para as séries 2^n e 3^n .

Com este intuito apresentamos o desenvolvimento teórico desses esquemas, empregando a notação mais tradicional como também a geometria finita.

Os dados utilizados foram gerados por simulação através do modelo matemático inteiramente ao acaso do fatorial 2^6 , onde os efeitos principais e as interações foram fixados. Os erros foram tirados de uma tabela com distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Variamos o desvio padrão dos erros normais e assim estruturamos 4 experimentos.

Montamos para cada experimento, quadros de análise de variância sem confundimento, com uma e duas interações confundidas quando o fatorial é completo, e para $1/2$ da repetição foi montado quadros sem confundimento e com uma interação confundida. Também foram calculadas as eficiências.

Com base nestes resultados mostramos as melhores interações para ser confundidas como também as maiores eficiências, e vemos que o fatorial fracionado é mais eficiente do que o fatorial completo.

Também observamos que a eficiência nos casos estudados não mudam de um experimento para outro mesmo que a variância dos erros aumente.

THE USE OF FRACTIONAL FACTORIAL DESIGNS
AND CONFOUNDING IN EXPERIMENTATION

Author: GILSON MEDEIROS E SILVA

Adviser: Prof. Dr. Roberto Simionato Moraes

SUMMARY

The main objective of this work is to study the utilization of the complete factorial scheme with and without confounding and of the fractional factorial scheme with and without confounding for the series 2^n and 3^n .

With this purpose, we present the theoretical development of these schemes, employing the most traditional notation as well as the finite geometry.

The employed data were generated from simulation according to the unique mathematics model at random of the 2^6 factorial, where the main effects and the interactions were fixed. The errors had been taken from normal distribution table with $\mu = 0$ and $\sigma^2 = 1$. We vary the standard model deflection of the common errors and then we organize the experiments.

We built for each experiment tables of variance analyses without confounding, with one and two confused interactions when the factorial scheme is complete, and for a half of the repetition was built tables without confounding and with one confused interaction. It was also calculated the efficiency.

Based on these results we showed the best interactions to be confused as well as the best efficiencies, and then we noticed that the fractional factorial scheme is more efficient than the complete factorial scheme.

We also noticed that the efficiency, in the studied cases, didn't change from one experiment to the other, even if the errors variance raise.

1. INTRODUÇÃO

Em experimentação agrícola, quando vários fatores diferentes são objetos de estudo, um esquema experimental altamente eficiente para este estudo é o fatorial completo, pois além de examinar cada fator, ele estuda o relacionamento entre os efeitos dos vários fatores.

Mas uma das desvantagens destes esquemas é que o número de combinações cresce rapidamente na medida que o número de fatores aumenta, e com isto traz uma série de problemas para o pesquisador, dentre eles a perda de eficiência, pois a medida que aumenta o tamanho do bloco, aumenta a heterogeneidade dentro dele. Também deve ser levado em conta o custo da experimentação e a viabilidade de se instalar tais experimentos, pois as vezes somente uma repetição de um experimento pode tornar este ensaio praticamente impossível de ser realizado.

Em vista destes problemas busca-se alternativas viáveis para contorná-los. Quando o erro experimental é grande, ou quando se espera um efeito considerável das interações de ordem elevada, não existe nenhuma alternativa. Mas, frequentemente, o erro experimental e as interações de ordem elevada são de mesma grandeza. Em tais casos podemos ter as seguintes alternativas possíveis: **primeira**, usar o esquema de confundir interações de ordem elevada, que consiste em dividir cada repetição em vários blocos, perdendo toda informação sobre as interações confundidas; **segunda**, usar o esquema de fatorial fracionado, que consiste em considerar certas interações como insignificantes (entendendo-se por interações insignificantes aquelas de mesma ordem de grandeza dos efeitos atribuídos ao resíduo, e portanto não necessariamente nulas), e com isto somente uma parte das combinações é utilizada no experimento.

Com o exposto acima, este trabalho tem como objetivo fazer algumas comparações entre o fatorial completo, o fatorial confundido e o fatorial fracionado, pois estes delineamentos são de grande interesse prático na experimentação agrícola, e com isto tentar estabelecer qual será o mais indicado.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Como a literatura sobre ensaios fatoriais, confundimento e fatorial fracionado é extensa, nós procuramos selecionar as publicações que mais se aproximam da abordagem dada ao trabalho.

Assim YATES (1937), apresenta os princípios básicos do delineamento fatorial, tomando como exemplo o fatorial 2^3 .

Sobre o confundimento, ele apresenta o confundimento total e parcial do fatorial 2^3 em 2 blocos de 4 parcelas cada, e a partir desse fatorial, ele generaliza para a série 2^n .

Apresenta um exemplo de confundimento do fatorial 2^5 , com uma única repetição, mostrando como se acha a estimativa do erro por intermédio das interações de ordem e-

levada. Neste exemplo, ele enfoca o método prático para calcular os efeitos principais e as interações, como também o ganho em precisão devido ao confundimento.

Também mostra o confundimento do fatorial 2^3 em 2 quadrados latinos 4×4 , e o confundimento dos fatoriais 2^5 e 2^6 em quadrados latinos 8×8 .

Para os fatoriais da série 3^n , apresenta as modificações que são necessárias na análise estatística quando não existe confundimento, através dos fatoriais 3^2 e 3^3 . Para esta série, apresenta o confundimento dos seguintes fatoriais: 3^2 em blocos de 3 parcelas, 3^3 em blocos de 9 parcelas dando os 4 grupos de confundimento w, x, y e z, e 3^4 em blocos de 9 parcelas. A partir desses exemplos faz a extensão em blocos de 3^{n-1} ou 3^{n-2} parcelas.

Apresenta um método sistemático e um método alternativo para o delineamento 3^3 com uma única repetição.

Para as séries mistas, apresenta exemplos das séries 3×2^n e $3^n \times 2$.

Finalmente, expõe o método de confundimento de fatoriais com 4 e 8 níveis com base na série 2^n .

BOSE e KISHEN (1940), estudam o problema do confundimento em experimentos fatoriais simétricos S^m , onde S é um número primo inteiro positivo ou uma potência de um

primo, e $\underline{m}$ qualquer número inteiro positivo.

Enunciam o princípio da interação generalizada no arranjo fatorial S^m , e usam este importante princípio na demonstração de um método geral para formar arranjos confundidos. Com esses arranjos é possível dividir os $S^m - 1$ graus de liberdades, pertencentes aos efeitos principais e interações em $(S^m - 1)/(S - 1)$ conjuntos de $(S - 1)$ graus de liberdades.

Mostram que essa divisão é executada identificando as S^m combinações de tratamentos com os pontos da Geometria Euclidiana Finita $EG(m, p)$.

FISHER (1942), apresenta o desenvolvimento da relação entre os sistemas de confundimentos com grupos Abelianos, para provar uma proposição geral, ligando o tamanho mínimo do bloco requerido com o número de fatores envolvidos, e fornece um catálogo de sistemas de confundimento até 15 fatores. O desenvolvimento é sobre as séries 2^n e p^n , onde p é um número primo.

KISHEN (1942), apresenta um método geral de expressar qualquer grau de liberdade para efeitos principais e interações do fatorial S^m dado por BOSE e KISHEN (1940). Para este estudo, o autor obtém as expressões das componentes para as interações de ordem mais elevadas no caso dos arranjos 3^4 e 4^3 .

FINNEY (1945), introduz os princípios sobre os experimentos fatoriais fracionados, usando a teoria de grupos Abelianos, para os fatoriais das séries 2^n e 3^n , onde n é um inteiro positivo. Introduz a noção da relação de identidade, mostrando que, se na obtenção de determinada interação todos os elementos são tomados com o mesmo sinal, ela é igualada à identidade. Fala também em alias e exemplifica através dos esquemas 2^{n-k} , onde n é o número de fatores e k é o número de geradores de blocos, tomando $n = 4, 8$ e $k = 2, 4$ respectivamente. Introduz o conceito de ortogonalidade de dois elementos num mesmo grupo, ou em grupos distintos. Sobre os fatoriais da série 3^n , ele apresenta uma discussão análoga aquela feita para os fatoriais da série 2^n .

FINNEY (1945), apresenta as regras básicas para confundimento, como também o procedimento da formação dos blocos quando uma, duas, etc., interações são confundidas nos fatoriais da série 2^n . Conceitua contraste de definição como sendo as interações confundidas. Também ele discute as melhores frações dos esquemas fatoriais 2^6 , 2^7 e 2^8 , dando os grupos de aliases e suas respectivas análises de variância com seus graus de liberdades.

FISHER (1945), faz uma extensão para os sistemas de confundimento dos fatoriais da série 2^n , desenvolvido no trabalho anterior (1942) para os casos: (i) quando os fatores tem como níveis qualquer número primo, e (ii) para o

caso em que o número de níveis é qualquer potência de um primo.

No primeiro caso os fatores podem ser escolhidos para corresponder com subgrupos de ordem p de um grupo Abeliano de ordem p^n , igual ao número de parcelas em cada bloco. No segundo, cada fator corresponde com uma combinação de s valores, não todos zero, cada um tomando p^r valores do campo, e sendo este o número de níveis para cada fator.

PLACKETT e BURMAN (1946), apresentam um exemplo de delineamento avançado, mais especificamente para pesquisa física e industrial, que são de interesse para o fatorial fracionado, fazendo uma discussão teórica sobre os requisitos para delineamentos ótimos, e os métodos de solução, empregando corpo de Galois.

KEMPTHORNE (1947), apresenta um método geral para os esquemas fatoriais do tipo p^n a serem examinados, em relação ao confundimento e fatorial fracionados. O método é descrito a partir das regras para os fatoriais da série 2^n e 3^n , e corresponde aquelas dadas por FISHER (1942). A presente abordagem mostra o confundimento e fatorial fracionado como aspectos diferentes do mesmo processo.

Sobre confundimento, ele faz uma abordagem somente sobre os fatoriais da série 3^n , dando os seguintes exemplos:

- a. 3^3 em blocos de 9 e 3 tratamentos
- b. 3^4 em blocos de 9 tratamentos
- c. 3^5 em blocos de 9 tratamentos
- d. 3^6 em blocos de 27 tratamentos

Sobre fatorial fracionado, ele faz uma abordagem extensa sobre a série 2^n inteiramente ao acaso, dando as relações de identidade nos seguintes exemplos:

- a. $1/2$ da repetição do fatorial 2^n , para $n = 3, 4, 5$
- b. $1/4$ da repetição do fatorial 2^n , para $n = 4, 5, 6, 7, 8$
- c. $1/8$ da repetição do fatorial 2^n , para $n \geq 10$
- d. $1/16$ da repetição do fatorial 2^n , para $n \geq 12$

KEMPTHORNE (1947), apresenta os resultados da análise de uma série de experimento, onde há existência de interações entre tratamentos e blocos, pois está implícito em todos delineamentos modernos que envolvem confundimento e/ou fatorial fracionado que tais interações são insignificantes, comparado com os efeitos e interações que os experimentos são planejados para estimar.

FINNEY (1947), descreve um método sistemático de confundimento do fatorial da série 2^n , escolhe uma das interações a serem confundidas com blocos e, pela combinação das letras desta interação, determina os tratamentos do bloco contendo a testemunha (nível inferior de todos os fatores), denominado de "bloco principal", e constroi através deste os demais blocos. Por extensão deste processo apresenta

ta o confundimento da série 3^n .

BROWNLEE, KELLY e LORRAINE (1948), apresentam uma descrição das soluções de valor prático no caso dos experimentos 2^{n-m} , isto é, a $(n-m)$ -ésima repetição de n fatores todos em dois níveis, envolvendo o uso de 2^m parcelas. Tais arranjos confundido e confundimento duplo serão dados como foram construídos.

Duas soluções úteis são também incluídas onde um e dois fatores respectivamente estão em 4 níveis, estas sendo derivada das soluções com todos fatores em 2 níveis.

Os autores fazem uma discussão sobre os delineamentos baseados em 16, 32, 64 e com mais de 64 parcelas.

RAO (1948), apresenta a teoria geral de delineamentos em fatorial fracionado usando as propriedades de formas de potência d . Alguns princípios básicos desta teoria foi dado por KEMPTHORNE (1947) e KISHEN (1947).

DAVIES e HAY (1950), apresentam um método simples de construir delineamentos em fatorial fracionados da série 2^n e discutem o seu uso na pesquisa industrial.

BANERJEE (1950), discute $3/4$ de uma repetição do fatorial da série 2^n , mostrando que existe viabilidade para esta fração. Toma como exemplos $3/4$ do fatorial 2^5 inteiramente ao acaso e $3/4$ do fatorial 2^6 em 6 blocos, dando os

respectivos quadros da análise de variância.

CHINLOY, INNES e FINNEY (1952), apresentam um exemplo numérico com 1/3 da repetição do fatorial 3^5 sobre cana-de-açúcar, dando o plano do experimento, a estrutura da análise de variância, o cálculo das somas de quadrados através de dois métodos sistemático e a interpretação da análise de variância.

KEMPTHORNE e TISCHER (1953), apresentam um estudo em que é feita uma abordagem da determinação dos vários aspectos da desidratação do milho verde. Neste trabalho os autores utilizam os princípios dos fatoriais fracionados da série 2^n . Para este trabalho foi considerado 1/4 da repetição do fatorial 2^{11} em parcelas sub-sub-divididas.

COCHRAN e COX (1957), apresentam as vantagens e desvantagens da utilização dos experimentos fatoriais. Apresentam o método para calcular os efeitos principais e as interações, tomando como base os fatoriais 2^2 e 2^3 , e assim generalizam para a série 2^n . Apresentam o método prático de YATES para calcular o efeito total.

Sobre os fatoriais da série 3^n , apresentam um exemplo numérico para o fatorial 3^2 e generalizam o método de análise para a série.

Os autores apresentam o confundimento total e parcial do fatorial 2^3 em blocos com 4 tratamentos.

Com relação aos fatoriais da série 3^n , eles apresentam o fatorial 3^2 em blocos com 3 tratamentos, confundindo 2 graus de liberdade correspondentes a interação AB, e o fatorial 3^3 em blocos com 9 tratamentos, confundindo 2 graus de liberdade correspondentes a interação ABC.

Para os fatoriais com séries mistas, eles apresentam um exemplo numérico do fatorial $3^2 \times 2$ em blocos com 6 tratamentos, confundindo parcialmente AB e ABC.

Também eles enfocam o confundimento do fatorial 2^5 com uma única repetição, mostrando como se acha a estimativa do erro por intermédio das interações de ordem elevada. Comentam a estimação do ganho em precisão com confundimento completo e parcial.

No fim do capítulo, apresentam vários planos de confundimento para os fatoriais das séries 2^n , 3^n e mista.

Sobre os fatoriais fracionados, comentam o que acontece quando o experimento contém parte de uma repetição, exemplificando com 1/2 da repetição do fatorial 2^3 . Apresentam uma discussão sobre 1/2 do fatorial 2^5 e do 2^6 , 1/4 do fatorial 2^6 inteiramente ao acaso e 1/2 do fatorial 2^6 em blocos, dando os esquemas das respectivas análises de variâncias. Apresentam uma adaptação do método prático de YATES aos fatoriais fracionados da série 2^n .

Sobre os fatoriais fracionados da série 3^n , eles enfocam os problemas de construção desses experimentos através de $1/3$ da repetição do fatorial 3^3 . Apresentam vários planos no fim do capítulo, inclusive fazendo comentários sobre $1/3$ do fatorial 3^5 em blocos de 81, 27 e 9 tratamentos.

KURKJIAN e ZELEN (1962), introduzem um método de cálculo para analisar os experimentos fatoriais no sentido geral, simétrico ou assimétrico. O objetivo principal desse método é realizar operações complexas, que são necessárias a estes experimentos, com relativa facilidade. O cálculo possibilita muitas operações aritméticas extensas parcialmente realizadas por operações lógicas. Isto seria de importância na programação das análises dos fatoriais em computadores.

Os principais resultados desse trabalho são: (i) um desenvolvimento de uma nova teoria de confundimento para os fatoriais assimétricos, e (ii) uma nova maneira de ajuste para a regressão polinomial.

JOHN (1962), apresenta uma discussão sobre a construção e análise dos delineamentos das séries $3(2^{n-p})$.

ADELMAN (1963), apresenta uma revisão das técnicas que selecionam as combinações de tratamentos, que formam uma fração de um experimento fatorial. Apresenta vários

procedimentos para a construção dos planos em fatorial fracionado. As técnicas discutidas incluem os planos ortogonal e não ortogonal para os experimentos fatoriais simétrico e assimétrico. Os planos desenvolvidos vão desde aqueles que permitem somente a estimação dos efeitos principais, para aqueles que permitem a estimação dos efeitos principais e das interações de 2 fatores.

KURKJIAN e ZELEN (1963), aplicam o cálculo desenvolvido no trabalho anterior (KURKJIAN e ZELEN, 1962) para esquemas fatoriais em vários delineamentos experimentais. Os delineamentos considerados são aqueles que tem uma matriz de incidência N tal que NN' satisfaz uma certa relação estrutural. Quando esta relação estrutural é satisfeita, NN' é dita ter a propriedade (A). Delineamentos que possuem esta propriedade são os blocos ao acaso, blocos incompletos balanceados, grupo de delineamentos divisíveis e delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceado tipo quadrado latino com duas classes associadas. A razão por limitar o estudo a estas classes de delineamentos é que eles são particularmente usados em experimentos fatoriais assimétricos.

Nesta nota BANERJEE e FEDERER (1966), apresentam uma generalização dos resultados obtidos em trabalhos anteriores (BANERJEE e FEDERER, 1963 e 1964), onde mostram como ajustar a matriz de incidência (X), para obtermos as estimativas dos efeitos, como funções lineares ortogonais das ob

servações para qualquer fatorial fracionado irregular de N tratamentos. O fatorial fracionado considerado anteriormente foi tal que, a matriz de delineamento (X) era de dimensões $p \times p$, sendo p efeitos estimados de p observações. O método consiste em achar a matriz X tal que a matriz de delineamento (X) e o vetor de observações (Y) sejam aumentados, i.é., $X_1 = [X' ; X'\lambda]'$ de dimensão $(p + m) \times p$ e $Y_1 = [Y' ; Y'\lambda]'$ de dimensão $(p + m) \times 1$, com $p + m = N$ de tal maneira que $[X_1' X_1]$ seja uma matriz diagonal. Esta generalização é no sentido que a matriz de delineamento não necessite ser quadrada, mas de dimensão $(p + m_1) \times p$, $p + m_1 < N$, onde os p efeitos são estimados de $p + m_1$ observações.

Além dessa generalização, os autores apresentam os seguintes resultados adicionais: (i) a relação estrutural entre o efeito de parâmetros e as observações foram deduzidas, (ii) uma regra foi desenvolvida para compor o fatorial fracionado irregular com observações que são internamente consistentes tornando possível estimar os efeitos de parâmetro, e (iii) um procedimento desejável para planejar o fatorial fracionado, para obter uma máxima eficiência.

KSHIRSAGAR (1966), prova o oposto do resultado obtido por KURKJIAN e ZELEN (1963), que provaram que delineamentos fatoriais possuindo uma estrutura particular na matriz C (propriedade A) são fatorialmente balanceados.

MULLER (1966), apresenta uma discussão do uso de pseudo-fatores na construção de esquemas fatoriais balanceados. O método é desenvolvido para delineamentos $s \times q$ e depois generaliza para delineamentos $s \times q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n$, onde s é necessariamente uma potência de um primo. Usualmente blocos de s^t parcelas são exigidos. O procedimento é substituir cada fator após o primeiro, por um ou mais pseudo-fatores em s níveis, e formar um delineamento original que confunde s^t parcelas em blocos de s^t para um T adequado. Uma correspondência arbitrária é então estabelecida entre as combinações de níveis dos pseudo-fatores e os níveis q_u do fator Q_u . Isto fornece um conjunto de blocos inicial, para o delineamento requerido, e então uma série de permutações introduz o balanceamento. A ênfase principal é colocada sobre os delineamentos com 2 fatores. O caso especial dos delineamentos $s \times q$, com $s > q$ blocos de s parcelas, está relacionado ao uso dos delineamentos em blocos incompletos balanceados na construção dos delineamentos fatoriais assimétricos. A relação parcialmente balanceada como forma de potência dois é também discutida. Métodos para reduzir o número dos primeiros blocos são examinados, como também são examinados os efeitos de escolha de correspondência dos níveis de fator e escolha das permutações no número de repetições.

Para os experimentos fatoriais, KEMPTHORNE (1975), inicia falando nos experimentos que envolvem vários fatores, e em seguida dos delineamentos fatoriais 2^2 e 2^3 , e

generaliza para a série 2^n . Para os fatoriais da série 3^n , faz uma discussão análoga através dos fatoriais 3^2 e 3^3 .

Para confundimento, o autor apresenta o fatorial 2^3 em blocos com 4 tratamentos. Apresenta um resumo em uma tabela dos tipos possíveis de confundimento para a série 2^n .

No caso dos fatores da série 3^n , apresenta o fatorial 3^2 em blocos de 3 tratamentos utilizando 4 repetições, o fatorial 3^3 em blocos de 3 tratamentos, é também o fatorial 3^4 em blocos de 27, 9 e 3 tratamentos.

Sobre os fatoriais fracionados, o autor os introduz através de $1/2$ da repetição do fatorial 2^3 . Em segui da, apresenta $1/2$ do fatorial 2^6 em blocos de 16 e 8 parcelas, $1/4$ do fatorial 2^5 e 2^8 inteiramente ao acaso e $1/4$ do fatorial 2^8 em blocos de 16 e 8 parcelas. Também apresenta uma relação de identidade para $1/8$ do fatorial 2^{10} em blocos de 32 tratamentos.

Para os fatoriais da série 3^n , apresenta uma discussão tomando como base $1/3$ do fatorial 3^4 e $1/3$ do fatorial 3^5 em blocos com 9 e 27 tratamentos.

ZONTA (1980), estabelece um processo de confundimento para os fatoriais da série 2^n e, através de duas propriedades deste, torna possível o confundimento de fatoriais com qualquer número de níveis e de fatores.

Apresenta para cada experimento fatorial da série 2^n , conjuntos balanceados até o fatorial 2^5 , com a subdivisão das repetições em dois blocos, até a formação de blocos de dois tratamentos, sem o confundimento de efeitos principais.

Para os fatoriais da série 3^n , apresenta conjuntos balanceados dos seguintes fatoriais: 3^2 em blocos de 3 tratamentos, 3^3 em blocos de 9 e 3 tratamentos e 3^4 em blocos de 37, 9 e 3 tratamentos.

Para as séries mistas, apresenta um estudo dos fatoriais das seguintes séries: 3×2^n , $3^2 \times 2^n$ e $3^3 \times 2^n$.

Além do método de confundimento, ele apresenta o processo de obtenção da informação relativa através da teoria dos blocos incompletos e o método geral da análise de variância.

BIASI (1985), apresenta os elementos para se obter a análise de um experimento fatorial, em que é feita uma redução no número de parcelas experimentais. Também apresenta um desenvolvimento teórico sobre experimentos fatoriais, confundimento em experimentos fatoriais, frações de fatoriais e teoria de Galois. Essas noções são necessárias para a apresentação de uma sistematização de alguns delineamentos apropriados para estudar efeitos principais.

Ela mostra como confundir efeitos principais

e interações com blocos nos fatoriais, e depois como confundir interações de ordem maior ou igual a dois, de forma conveniente. Esse confundimento é garantido pela existência de um teorema de FISHER. Por esse teorema toda interação na relação de identidade tem no mínimo três letras.

São apresentados também os planos onde não é possível estabelecer uma relação de identidade, mas estimam efeitos principais.

Faz uma comparação entre os métodos destacando-se as vantagens e desvantagens, bem como a adequação de cada um. E também indica outras formas de delineamentos experimentais que poderiam ser usados como planos de efeitos principais.

LIMA (1986), apresenta um estudo sobre os experimentos de resolução V. Mostra também como obter geradores tais, que os efeitos principais e interações de 2 fatores não sejam confundidos.

Obtém esses geradores sem nenhum método específico, ou seja, através de tentativas, observando o porquê de alguns autores denominarem tais experimentos de planos de 5 letras. Obtido os geradores, apresenta os tipos possíveis de experimentos por eles gerados. Isto é feito através de exemplos para o fatorial da série 2^n , $n = 3, 4, \dots, 8$. Em seguida, apresenta um método do qual obtemos diretamente tais

geradores, sendo exemplificado através dos fatores 2^n , $n=8, 9, 10, 11$. Apresenta para cada caso, uma relação de identidade para cada uma das frações de fatoriais possíveis e o quadro da análise de variância correspondente. Mostra como obter experimentos de resolução V em blocos casualizados, e finalmente, apresenta um exemplo numérico utilizando a fração do fatorial 2^{6-1}_V .

Para os esquemas fatoriais da série 3^n , apresenta uma discussão análoga aos fatoriais da série 2^n , utilizando os fatoriais 3^5 e 3^6 .

Quanto aos fatoriais da série 4^n apresenta apenas como os corpos de Galois são tratados para a obtenção de experimentos de resolução V.

No final, faz observações sobre a utilização do fatorial fracionado, e alerta aos pesquisadores que devem tomar cuidados entre outros, na escolha dos geradores e conhecimento dos aliados dos efeitos fatoriais.

3. MÉTODO E MATERIAL

3.1. MÉTODO

3.1.1. EXPERIMENTOS FATORIAIS

Os ensaios fatoriais são aqueles em que os tratamentos resultam de todas as combinações possíveis dos níveis dos diversos fatores.

Uma grande vantagem dos ensaios fatoriais é que eles nos permitem tirar conclusões mais amplas a respeito dos fatores (qualitativos ou quantitativos) que estão sendo estudados, uma vez que são pesquisados simultaneamente diferentes combinações de seus níveis.

Estes esquemas não constituem um delineamento experimental e, sim, um delineamento de tratamentos, podendo

assim ser colocado nos mais diferentes delineamentos experimentais.

3.1.1.1. EXPERIMENTOS FATORIAIS DA SÉRIE 2^n

3.1.1.1.1. Modelo Matemático

Considerando n fatores, todos em 2 níveis (que podem ser considerados superior e inferior, ou ausência e presença), temos o modelo matemático no sentido geral;

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \delta_k + (\alpha\delta)_{ik} + (\beta\delta)_{jk} + \dots + e_{ijk} \dots$$

onde

μ é a média geral;

α_i , com $i = 0, 1$, é o efeito do 1º fator;

β_j , com $j = 0, 1$, é o efeito do 2º fator;

$(\alpha\beta)_{ij}$ é a interação entre os dois primeiros fatores;

δ_k , com $k = 0, 1$, é o efeito do 3º fator;

$(\alpha\delta)_{ik}$ é a interação entre o 1º e 3º fatores;

.

$e_{ijk} \dots$ é o erro experimental

Para enfocar a notação a ser usada, vamos tomar como exemplo o fatorial com 2 fatores em 2 níveis. Assim as combinações de tratamentos são: (1), a, b, ab, onde:

- (1): indica que os 2 fatores estão no nível inferior;
- a : indica que o fator A está no nível superior e o fator B está no nível inferior;
- b : indica que o fator A está no nível inferior e o fator B está no nível superior;
- ab : indica que os fatores A e B estão no nível superior.

A notação (1), a, b, ab também será usada para indicar a média das observações tomadas nas respectivas combinações de tratamentos.

Os efeitos principais e a interação são calculadas com base na Tabela 1.

TABELA 1. Os efeitos principais e interação.

Efeitos	Tratamentos			
	(1)	a	b	ab
2 A	-	+	-	+
2 B	-	-	+	+
2 AB	+	-	-	+

Assim, como vemos, os contrastes são:

$$A = ab + a - b - (1) = (a-1)(b+1)$$

$$B = ab + b - a - (1) = (a+1)(b-1)$$

$$AB = ab + (1) - a - b = (a-1)(b-1)$$

Notamos que os 3 contrastes acima são mutuamente ortogonais.

De uma forma geral, nós podemos representar os efeitos da seguinte maneira:

$$X = \frac{1}{r2^{n-1}} [(a \pm 1)(b \pm 1)(c \pm 1) \dots], \text{ onde}$$

r é o número de repetições de cada combinação de tratamento, e o sinal entre parenteses é positivo se a letra maiúscula correspondente não está contida em X e negativo se ela está contida em X .

Para exemplificar, vamos tomar o fatorial 2^6 , com os fatores A, B, C, D, E e F, todos em 2 níveis, e então a interação ABC pode ser assim representada:

$$ABC = \frac{1}{32r} [(a-1)(b-1)(c-1)(d+1)(e+1)(f+1)]$$

3.1.1.1.2. Forma geral de apresentar os fatoriais 2^n

Nesse sistema são testadas todas as combinações de n fatores cada um em dois níveis. A totalidade das combinações de tratamentos podem ser representadas geometricamente num sistema de coordenadas n -dimensional de comprimento unitário. Tomando os n fatores em n eixos mutuamente or-

togonais $X_1, X_2, \dots, X_n$, teremos o ponto $(0, 0, \dots, 0)$ como sendo o tratamento controle; $(1, 0, 0, \dots, 0)$ o primeiro fator no nível superior e todos os outros no nível mais baixo, e assim por diante.

Por exemplo, o fatorial 2^2 , com os fatores A e B representados respectivamente, nos eixos X_1 e X_2 .

Assim, as 4 combinações de tratamentos podem ser representadas pelos pontos $(0,0)$; $(1,0)$; $(0,1)$ e $(1,1)$.

Através da notação acima, vemos que o efeito de A é a diferença entre as médias dos pontos representados por $X_1=0$ e $X_1=1$. Da mesma forma, o efeito de B é a diferença entre as médias dos pontos representados por $X_2=0$ e $X_2=1$.

Como vemos, a interação AB é a diferença entre as médias dos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$, e as médias dos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$. Tomando a soma das variáveis X_1+X_2 para os pontos usados na interação temos:

Para o ponto $(0,0)$, $X_1 + X_2 = 0$

Para o ponto $(1,1)$, $X_1 + X_2 = 2$

Para o ponto $(1,0)$, $X_1 + X_2 = 1$

Para o ponto $(0,1)$, $X_1 + X_2 = 1$

Se nós estamos trabalhando através da geometria finita com números reduzidos a módulo 2 para essas somas, i.ê, nós substituímos qualquer número maior do que 1 (hum) pelo resto após ele ser dividido por 2, então a interação AB será a diferença média entre os pontos representados por:

$$X_1 + X_2 = 0 \pmod{2}$$

e
$$X_1 + X_2 = 1 \pmod{2}$$

Da mesma maneira podemos raciocinar em termos de geometria finita para os efeitos principais. Assim, o efeito de A seria obtido através da diferença dos $X_1 = 0 \pmod{2}$ com $X_1 = 1 \pmod{2}$, ou seja:

Para o ponto $(0,0)$, $X_1=0$, reduzindo o modulo 2 temos

$$X_1=0 \pmod{2}$$

Para o ponto $(0,1)$, $X_1=0$, reduzindo o modulo 2 temos

$$X_1=0 \pmod{2}$$

Para o ponto $(1,0)$, $X_1=1$, reduzindo o modulo 2 temos

$$X_1=1 \pmod{2}$$

Para o ponto $(1,1)$, $X_1=1$, reduzindo o modulo 2 temos

$$X_1=1 \pmod{2}$$

Para o efeito de B procede-se da mesma forma.

Agora vamos tomar como exemplo o fatorial 2^3 , com os fatores A, B e C representados respectivamente, nos eixos X_1 , X_2 e X_3 .

Na nossa notação, podemos representar as combinações de tratamentos por um ponto em 3 dimensões, ou seja:

$1 = (0,0,0)$; $a = (1,0,0)$; $b = (0,1,0)$; $ab = (1,1,0)$; $c = (0,0,1)$
 $c = (1,0,1)$; $bc = (0,1,1)$; $abc = (1,1,1)$

A representação gráfica será:

O efeito do fator A, é a diferença das médias dos pontos que contêm X_1 com os que não contêm ou seja, é a diferença entre a média dos pontos que estão no plano $X_1 = 1$

e a média daqueles que estão no plano $X_1=0$. O mesmo raciocínio vale para os efeitos dos fatores B e C. A interação de A e B é a diferença entre as médias dos pontos representados por $X_1=1, X_2=1$ e $X_1=0, X_2=0$, e aqueles representados por $X_1=0, X_2=1$ e $X_1=1, X_2=0$.

Também podemos escrever os efeitos principais e as interações como equações algébricas, cujas operações obedecem a aritmética modular, então temos:

FATOR A : $X_1=0 \pmod{2}$ contra $X_1=1 \pmod{2}$

FATOR B : $X_2=0 \pmod{2}$ contra $X_2=1 \pmod{2}$

FATOR C : $X_3=0 \pmod{2}$ contra $X_3=1 \pmod{2}$

INTERAÇÃO A x B : $X_1+X_2=0 \pmod{2}$ contra $X_1+X_2=1 \pmod{2}$

INTERAÇÃO A x C : $X_1+X_3=0 \pmod{2}$ contra $X_1+X_3=1 \pmod{2}$

INTERAÇÃO B x C : $X_2+X_3=0 \pmod{2}$ contra $X_2+X_3=1 \pmod{2}$

INTERAÇÃO A x B x C : $X_1+X_2+X_3=0 \pmod{2}$ contra
 $X_1+X_2+X_3=1 \pmod{2}$

Assim, podemos generalizar para o fatorial 2^n , onde temos a diferença entre as médias dos pontos representados por:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0 \pmod{2}$$

e

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1 \pmod{2}$$

3.1.1.1.3. A análise de variância para os fatoriais da série 2^n

Tomando o experimento fatorial 2^n inteiramente ao acaso com r repetições, a análise de variância será:

C. variação	G.L.
Tratamentos	$2^n - 1$
Efeitos principais	$\binom{n}{1}$ linhas com 1 g.l.
Interações de 2 fatores	$\binom{n}{2}$ linhas com 1 g.l.
·	·
·	·
·	·
Interações de n fatores	$\binom{n}{n}$ linhas com 1 g.l.
Resíduo	$2^n(r-1)$
Total	$r2^n - 1$

Para calcular os estimadores dos efeitos principais e interações, e suas somas de quadrados correspondentes, usaremos o procedimento sistemático de YATES, que será descrito mais tarde no exemplo numérico.

3.1.1.2. EXPERIMENTOS FATORIAIS DA SÉRIE 3^n

3.1.1.2.1. Modelo Matemático

Considerando n fatores, todos em 3 níveis, i. é., 3^n . Vamos representar os 3 níveis de cada fator por 0, 1 e 2. O modelo matemático no sentido geral será:

$$Y_{ijk} \dots = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \delta_k + (\alpha\delta)_{ik} + (\beta\delta)_{jk} + \dots + e_{ijk} \dots$$

onde:

μ é a média geral;

α_i , com $i = 0, 1, 2$ é o efeito do 1º fator;

β_j , com $j = 0, 1, 2$ é o efeito do 2º fator;

$(\alpha\beta)_{ij}$ é a interação entre os dois primeiros fatores;

δ_k , com $k = 0, 1, 2$ é o efeito do 3º fator;

$(\alpha\delta)_{ik}$ é a interação entre o 1º e 3º fatores;

·
·
·

e_{ijk} é o erro experimental.

3.1.1.2.2. A forma geral de apresentar os fatoriais 3^n

Nesse esquema são testadas todas as combinações de n fatores, cada um em 3 níveis. As combinações de tratamentos podem ser representadas geometricamente num sis-

tema de coordenadas n -dimensionais contendo em cada eixo três pontos. Tomando os n eixos $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ mutuamente ortogonais, teremos o ponto $(0,0,\dots,0)$ como sendo o tratamento controle; $(1,0,\dots,0)$ como sendo o primeiro fator no segundo nível e os outros fatores ao nível mais baixo; $(2,0,\dots,0)$ como sendo o primeiro fator no nível mais alto e os outros no nível mais baixo, e assim por diante.

Tomando por exemplo, o fatorial 3^2 , com os fatores A e B representados respectivamente, nos eixos X_1 e X_2 , temos:

Assim, as 9 combinações de tratamentos podem ser representadas pelos pontos:

$(0,0); (1,0); (2,0)$
 $(0,1); (1,1); (2,1)$
 $(0,2); (1,2); (2,2).$

Os fatores principais e as interações para o fatorial 3^2 através da geometria finita tomando-se modulo 3

(substituir qualquer número maior do que 2 (dois) pelo resto após ele ser dividido por 3) podem ser representados em modulo 3 como segue:

FATOR A:	A_0	A_1	A_2
	$X_1=0$	$X_1=1$	$X_1=2$
	<u>00</u>	<u>10</u>	<u>20</u>
	01	11	21
	<u>02</u>	<u>12</u>	<u>22</u>

FATOR B:	B_0	B_1	B_2
	$X_2=0$	$X_2=1$	$X_2=2$
	<u>00</u>	<u>01</u>	<u>02</u>
	10	11	12
	<u>20</u>	<u>21</u>	<u>22</u>

INTERAÇÃO AB ou A^2B^2 :	AB_0	AB_1	AB_2
	$X_1+X_2=0$	$X_1+X_2=1$	$X_1+X_2=2$
	<u>00</u>	<u>01</u>	<u>20</u>
	12	10	02
	<u>21</u>	<u>22</u>	<u>11</u>

INTERAÇÃO AB^2 ou A^2B :	AB_0^2	AB_1^2	AB_2^2
	$X_1+2X_2=0$	$X_1+2X_2=1$	$X_1+2X_2=2$
	<u>00</u>	<u>02</u>	<u>01</u>
	11	10	12
	<u>22</u>	<u>21</u>	<u>20</u>

Pelo exposto acima, vemos que os fatores A e B tem 2 graus de liberdade cada um, pois os mesmos são dados pelos contrastes entre os 3 grupos de combinações de tratamentos.

A interação entre os fatores A e B é a interação de uma tabela 3 x 3, e assim temos $(3-1)(3-1) = 4$ graus de liberdade.

Assim, os 2 graus de liberdade correspondente a AB são dados pelos contrastes entre os 3 grupos de combinações de tratamentos seguintes:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 = 1 \\ X_1 + X_2 = 2 \end{array} \right\} \text{ (mod. 3)}$$

e estas equações são idênticas com aquelas que especificam os 3 grupos de combinações de tratamentos denotado por A^2B^2 , ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} 2(X_1 + X_2) = 2 \times 0 \Rightarrow 2X_1 + 2X_2 = 0 \\ 2(X_1 + X_2) = 2 \times 1 \Rightarrow 2X_1 + 2X_2 = 2 \\ 2(X_1 + X_2) = 2 \times 2 \Rightarrow 2X_1 + 2X_2 = 1 \end{array} \right\} \text{ (mod. 3)}$$

Similarmente, os 2 graus de liberdade correspondente a AB^2 são os mesmos graus de liberdade que correspondem a A^2B , ou seja:

$$AB^2: \left. \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 = 0 \\ X_1 + 2X_2 = 1 \\ X_1 + 2X_2 = 2 \end{array} \right\} \pmod{3}$$

Então:

$$2(X_1 + 2X_2) = 2 \times 0 \Rightarrow 2X_1 + 4X_2 = 0, \text{ tomando-se modulo } 3, \text{ temos}$$

$$2X_1 + X_2 = 0$$

$$2(X_1 + 2X_2) = 2 \times 1 \Rightarrow 2X_1 + 4X_2 = 2, \text{ tomando-se modulo } 3, \text{ temos}$$

$$2X_1 + X_2 = 2$$

$$2(X_1 + 2X_2) = 2 \times 2 \Rightarrow 2X_1 + 4X_2 = 4, \text{ tomando-se modulo } 3, \text{ temos}$$

$$2X_1 + X_2 = 1$$

Vemos que os grupos dados pelos símbolos AB e A^2B^2 , e AB^2 e A^2B são os mesmos. Portanto, convencionamos que para obter uma enumeração completa e única dos graus de liberdade, adotamos a regra que a potência da primeira letra de uma interação seja sempre igual a 1 (um).

Agora, tomando como exemplo, o fatorial 3^3 , com os fatores A , B , e C , temos os resultados mostrado abaixo:

Fatores principais e interações

Equação

	A	X_1	} = 0, 1, 2 (mod.3)	
	B	X_2		
	AB	$X_1 + X_2$		
	AB^2	$X_1 + 2X_2$		
	C	X_3		
	AC	$X_1 + X_3$		
	AC^2	$X_1 + 2X_3$		
	BC	$X_2 + X_3$		
	BC^2	$X_2 + 2X_3$		
8 g.1.	{	ABC		$X_1 + X_2 + X_3$
		ABC^2		$X_1 + X_2 + 2X_3$
		AB^2C		$X_1 + 2X_2 + X_3$
		AB^2C^2	$X_1 + 2X_2 + 2X_3$	

Deve ser observado que os 8 graus de liberdade para a interação entre os 3 fatores são subdivididas em 4 grupos de 2 graus de liberdade cada um.

Para o fatorial com 4 fatores, todos em 3 níveis, serão apresentadas apenas as equações que correspondem as interações de 4 fatores. Temos 8 grupos com 2 graus de liberdade cada, que são mostrados abaixo:

Interações de 4 fatores

Equação

ABCD	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4$	} = 0, 1, 2 (mod. 3)
$ABCD^2$	$X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4$	
ABC^2D	$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4$	
ABC^2D^2	$X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4$	
AB^2CD	$X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4$	
AB^2CD^2	$X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4$	
AB^2C^2D	$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + X_4$	
$AB^2C^2D^2$	$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4$	

3.1.1.2.3. Análise de variância para o fatorial da série 3^n

Tomando o experimento fatorial 3^n inteiramente ao acaso com r repetições, a análise de variância será:

C. Variação	G.L.
Tratamentos	$3^n - 1$
Efeitos principais	$\binom{n}{1}$ linhas com 2 g.l.
Interações de 2 fatores	$\binom{n}{2}$ linhas com 4 g.l.
·	·
·	·
·	·
Interação de n fatores	1 linhas com 2^n g.l.
Resíduo	$3^n(r-1)$
Total	$r3^n - 1$

Para calcular os estimadores dos efeitos principais e interações, e suas respectivas somas de quadrados, utilizaremos a geometria finita, que será apresentada mais tarde no exemplo numérico.

3.1.2. CONFUNDIMENTO NOS EXPERIMENTOS FATORIAIS

Como vimos no item 2, uma das desvantagens dos esquemas fatoriais, é que o número de tratamentos cresce rapidamente na medida que o número de fatores aumenta, e com isto traz uma série de problemas para o pesquisador, dentre eles a perda de eficiência, pois a medida que aumenta o tamanho do bloco, aumenta a heterogeneidade dentro dele.

Uma das maneiras de contornar este problema é o uso da técnica do confundimento, que consiste em confundir interações de ordem elevada com efeito de blocos, dividindo, cada repetição em um número maior de blocos, perdendo toda ou parte da informação sobre as interações confundidas.

O confundimento é empregado quando não há condições de instalar todas as combinações de tratamento numa determinada repetição e também não há muito interesse em um determinado efeito, que vai ser confundido.

3.1.2.1. CONFUNDIMENTO NA SÉRIE 2^n

Nos experimentos fatoriais 2^n , confundir uma interação consiste em dividir as combinações de tratamento de uma repetição em dois conjuntos ou blocos, tal que a diferença entre os conjuntos ou blocos represente a interação confundida. Quando mais de uma interação é confundida, as combinações de tratamentos de uma repetição serão divididas em 4, 8, 16, ... conjuntos ou blocos, de acordo com o número de interações confundidas.

FINNEY (1945), apresenta as seguintes regras para o confundimento na série 2^n .

- i) Todas as combinações de tratamentos no bloco principal (aquele que contém o tratamento controle, que é representado por (1)), contém um número par de letras em comum com a interação confundida.

Por exemplo, se num experimento fatorial 2^4 , a interação ABC é confundida, o bloco principal consiste de 8 combinações de tratamentos que contém um número par de letras em comum com a interação ABC, considerando zero como um número par, então o bloco principal será:

(1), d, ab, abd, ac, acd, bc, bcd.

- ii) O produto de duas combinações de tratamentos pertencente ao bloco principal, continua pertencendo a este bloco.
O produto de dois símbolos (quaisquer combinações de tra

tamentos ou efeitos) é o mesmo como aquele dado na álgebra comum, exceto que qualquer letra que ocorre duas vezes é cancelada. Por exemplo,

$$ab \times d = abd$$

$$ABC \times ACD = A^2BC^2D = BD$$

iii) O produto de dois contrastes confundido, também será confundido, e será chamado de interação generalizada.

No exemplo acima, se o pesquisador escolheu para confundir ABC e ACD, então ele também está confundindo BD, i.é.,

$$ABC \times ACD = A^2BC^2D = BD$$

iv) Se todas as combinações de tratamentos do bloco principal são multiplicadas por uma combinação de tratamento não pertencente a este bloco, as combinações de tratamentos obtidas formam um outro bloco do mesmo esquema de confundimento.

EXEMPLO 1.

Vamos tomar o experimento fatorial 2^3 com uma repetição, confundindo a interação ABC. As oito combinações de tratamentos são: (1), a, b, ab, c, ac, bc e abc.

Pela regra (i), temos que o bloco principal contém 4 combinações de tratamentos com um número par de letras em comum com a interação confundida ABC, i.é., (1); ab,

ac e bc. Assim temos os seguintes blocos:

<u>BLOCO I</u>	<u>BLOCO II</u>
(1) = 000	a = 100
ab = 110	b = 010
ac = 101	c = 001
<u>bc = 011</u>	<u>abc = 111</u>

Sabemos também que o contraste ABC é definido por:

$$ABC = a + b + c + abc - (1) - ab - ac - bc$$

Assim, vemos que confundindo o contraste ABC, o bloco I ou bloco principal, é constituído pelas combinações de tratamentos que levam o sinal -, então será definido por $I = -ABC$.

E o bloco II é constituído pelas combinações de tratamentos que levam o sinal +, então será definido por $I = +ABC$.

Em geral, para um efeito qualquer X, o conjunto de pontos que tem sinais positivos (ou negativos) no contraste X é chamado de fração dos pontos 2^n , definidos por: $I = +X$, ou $I = -X$.

O contraste escolhido para ser confundido é chamado de **contraste de definição da forma de confundimento**.

Uma forma alternativa de apresentar as combinações de tratamentos para os fatoriais 2^n , é associar os n fatores a n coordenadas, i.é.,

X_i : tem o valor -1 quando os fatores estão todos no nível inferior;

X_i : tem o valor +1 quando os fatores estão todos no nível superior.

No nosso exemplo acima, associamos os fatores A, B e C a três coordenadas X_1 , X_2 e X_3 . Assim temos:

X_1 : tem o valor -1 quando A está no nível inferior, e

X_1 : tem o valor +1 quando A está no nível superior.

Similarmente, temos que:

$X_2 = -1$, se B está no nível inferior

$X_2 = +1$, se B está no nível superior

e

$X_3 = -1$, se C está no nível inferior

$X_3 = +1$, se C está no nível superior

Assim, as 8 combinações de tratamentos podem ser representadas como segue:

$(1) = (-1, -1, -1)$; $a = (1, -1, -1)$; $b = (-1, 1, -1)$; $ab = (1, 1, -1)$;
 $c = (-1, -1, 1)$; $ac = (1, -1, 1)$; $bc = (-1, 1, 1)$; $abc = (1, 1, 1)$

Com base nessa notação, os blocos do nosso

exemplo 1 também podem ser representados da seguinte maneira:

O bloco I, será representado pelo conjunto de pontos para o qual $X_1X_2X_3=-1$, se fizermos $X_i=\pm 1$, ou em termo de geometria finita pelo conjunto de pontos para o qual $X_1+X_2+X_3 = 0 \pmod{2}$, se fizermos $X_i=0, 1$.

O bloco II, será representado pelo conjunto de pontos para o qual $X_1X_2X_3=+1$, se fizermos $X_i=\pm 1$, ou em termo de geometria finita pelo conjunto de pontos para o qual $X_1+X_2+X_3 = 1 \pmod{2}$, se fizermos $X_i=0, 1$.

A estrutura da análise de variância para o experimento 2^3 em dois blocos com 4 tratamentos, repetido r vezes, confundindo a interação ABC é:

C. Variação	G.L.
(Blocos)	$(2r - 1)$
Repetições	$r - 1$
ABC	1
Repetições x ABC	$r - 1$
(Tratamentos)	(6)
A	1
B	1
AB	1
C	1
AC	1
BC	1
Resíduo	$6(r - 1)$
Total	$8r - 1$

EXEMPLO 2.

Agora vamos tomar o experimento fatorial 2^4 com uma repetição, confundindo as interações ABC e ACD. As 16 combinações de tratamentos são: (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd e abcd.

Pela regra (i), temos que o bloco principal contém as 4 combinações de tratamentos com um número par de letras em comum com as 2 interações confundidas ABC e ACD,

i.é., (1), ac, abd e bcd, então temos:

<u>BLOCO I</u>	<u>BLOCO II</u>	<u>BLOCO III</u>	<u>BLOCO IV</u>
(1)	a	b	d
ac	c	abc	acd
abd	bd	ad	ab
<u>bcd</u>	<u>abcd</u>	<u>cd</u>	<u>bc</u>

onde,

BLOCO II: é obtido por multiplicar as combinações de tratamentos de bloco I por a

BLOCO III: é obtido por multiplicar as combinações de tratamentos do bloco I por b

BLOCO IV: é obtido por multiplicar as combinações de tratamentos do bloco I por d

Sabemos pela regra (iii) que o produto das interações confundidas também está confundido, i.é., $ABC \times ACD = A^2BC^2D = BD$.

Sendo que os contrastes são:

$$ABC = a + b + c + abc + ad + bd + cd + abcd - (1) - ab - ac - bc - d - abd - acd - bcd$$

ou

$$ABC = \text{BLOCO II} + \text{BLOCO III} - \text{BLOCO I} - \text{BLOCO IV},$$

$$ACD = a + ab + c + bc + d + bd + acd + abcd - (1) - b - ac - abc - ad - abd - cd - bcd$$

ou

$$ACD = \text{BLOCO II} + \text{BLOCO IV} - \text{BLOCO I} - \text{BLOCO III},$$

e,

$$BD = (1) + a + c + ac + bd + abd + bcd + abcd - b - ab - abc - d - ad - cd - acd$$

ou

$$BD = \text{BLOCO I} + \text{BLOCO II} - \text{BLOCO III} - \text{BLOCO IV}.$$

Utilizando a geometria finita, e representando os fatores A, B, C e D respectivamente por X_1 , X_2 , X_3 e X_4 , também podemos estruturar os quatro blocos acima.

Sabemos que a interação ABC é a diferença entre as médias dos pontos representados por:

$$\begin{aligned} e \quad X_1 + X_2 + X_3 &= 0 \pmod{2} \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

a interação ACD é a diferença entre as médias dos pontos representados por:

$$\begin{aligned} e \quad X_1 + X_3 + X_4 &= 0 \pmod{2} \\ X_1 + X_3 + X_4 &= 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

e a interação generalizada BD é a diferença entre as médias dos pontos representados por:

$$\begin{aligned} e \quad X_2 + X_4 &= 0 \pmod{2} \\ X_2 + X_4 &= 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

Aplicando esta técnica, a estruturação do bloco sera:

BLOCO I	BLOCO II	BLOCO III	BLOCO IV
$X_1+X_2+X_3=0 \pmod{2}$	$X_1+X_2+X_3=0 \pmod{2}$	$X_1+X_2+X_3=1 \pmod{2}$	$X_1+X_2+X_3=1 \pmod{2}$
$X_1+X_3+X_4=0 \pmod{2}$	$X_1+X_3+X_4=1 \pmod{2}$	$X_1+X_3+X_4=0 \pmod{2}$	$X_1+X_3+X_4=1 \pmod{2}$
(1) = 0000	d = 0001	b = 0100	bd = 0101
ac = 1010	acd = 1011	abc = 1110	abcd = 1111
abd = 1101	ab = 1100	ad = 1001	a = 1000
<u>bcd = 0111</u>	<u>bc = 0110</u>	<u>cd = 0011</u>	<u>c = 0010</u>

Podemos observar que o 2º bloco é igual ao 1º, somando-se 1 a todos os elementos da coluna correspondente a D, o 3º bloco é igual ao 1º, somando-se 1 a coluna B, o 4º bloco é igual ao 1º, somando-se 1 a ambas colunas B e D.

O produto dos efeitos ABC e ACD é: $ABC \times ACD = A^2BC^2D = BD$.

Como já vimos esse produto BD é chamado de interação generalizada, então podemos escreve-la da seguinte maneira:

$$(X_1X_2X_3)(X_1X_3X_4) = X_1^2X_2X_3^2X_4 = X_2X_4, \text{ desde que } X_1^2 = X_3^2 = 1,$$

em cada unidade experimental.

A estrutura da análise de variância para o experimento 2^4 em 4 blocos com 4 tratamentos, repetido r vezes, com o confundimento das interações ABC, ACD e BD, é:

C. variação	G.L.
(Blocos)	$(4r - 1)$
Repetições	$r - 1$
ABC, ACD e BD	3
Repetições x interações	$3(r - 1)$
(Tratamentos)	(12)
A	1
B	1
C	1
D	1
AB	1
AC	1
AD	1
BC	1
CD	1
ABD	1
BCD	1
ABCD	1
Resíduo	$12(r - 1)$
Total	$16 r - 1$

Para calcular as somas de quadrados, iremos utilizar o procedimento sistemático de YATES.

De uma maneira geral, podemos apresentar o confundimento nos experimentos fatoriais da série 2^n da seguinte maneira:

Nos experimentos fatoriais da série 2^n , o conjunto de todos efeitos, mais o elemento unidade I é dado por:

I, A, B, C, ..., AB, AC, ..., ABC, ...

Juntando a esses elementos a condição de que $A^2 = B^2 = C^2 \dots = I$, temos um **grupo multiplicativo Abelian** de ordem 2^n .

Um outro grupo análogo é formado pelas combinações de tratamentos com a condição que:

$$a^2 = b^2 = c^2 = \dots = (1)$$

A divisão de um experimento fatorial da série 2^n em blocos, pode ser efetuada da seguinte maneira:

2^1 blocos com 2^{n-1} parcelas

2^2 blocos com 2^{n-2} parcelas

2^3 blocos com 2^{n-3} parcelas

.....
.....

2^m blocos com 2^{n-m} parcelas, com $n \geq m$.

Suponha que estamos querendo dividir um expe-

rimento 2^n em 4 blocos, confundindo as interações ABC e ABD.

Assim, temos:

No 1º bloco são colocados todos os pontos com

$$X_1 X_2 X_3 = -1 \text{ e } X_1 X_2 X_4 = -1$$

ou

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \pmod{2} \text{ e } X_1 + X_2 + X_4 = 0 \pmod{2}$$

No 2º bloco são colocados todos os pontos

com

$$X_1 X_2 X_3 = -1 \text{ e } X_1 X_2 X_4 = +1$$

ou

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \pmod{2} \text{ e } X_1 + X_2 + X_4 = 1 \pmod{2}$$

No 3º bloco são colocados todos os pontos com

$$X_1 X_2 X_3 = +1 \text{ e } X_1 X_2 X_4 = -1$$

ou

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 \pmod{2} \text{ e } X_1 + X_2 + X_4 = 0 \pmod{2}$$

No 4º bloco são colocados todos os pontos com

$$X_1 X_2 X_3 = +1 \text{ e } X_1 X_2 X_4 = +1$$

ou

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 \pmod{2} \text{ e } X_1 + X_2 + X_4 = 1 \pmod{2}$$

Sendo que $X_1 X_2 X_3 = X_1 X_2 X_4 = \pm 1$, então temos:

$$(X_1 X_2 X_3)(X_1 X_2 X_4) = X_1^2 X_2^2 X_3 X_4 = X_3 X_4 = \pm 1$$

Portanto temos:

Efeitos	Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV
$X_1 X_2 X_3$	-1	-1	+1	+1
$X_1 X_2 X_4$	-1	+1	-1	+1
$X_3 X_4$	+1	-1	-1	+1

onde cada bloco contém 2^{n-2} pontos.

Observando a tabela acima, vemos que os contrastes dos totais de blocos são:

BL.III + BL.IV - BL.I - BL.II dá o contraste ABC

BL.II + BL.IV - BL.I - BL.III dá o contraste ABD

BL.I + BL.IV - BL.II - BL.III dá o contraste CD

Portanto, com este plano vemos que não podemos estimar essas 3 interações, mas os outros efeitos serão estimados, pois nenhum outro efeito está confundido com efeito de blocos.

As interações ABC e ABD são chamadas de **geradoras** deste experimento.. Em geral se existem 2^m blocos no arranjo de confundimento, são necessárias m geradoras.

Generalizando, sejam X e Y dois efeitos que vão ser confundidos, então podemos dividir o experimento fatorial 2^n em 2^2 blocos, cada um de tamanho 2^{n-2} . Associamos

ao bloco I todos os pontos que tem sinais negativos nos contrastes X e Y, ao bloco II todos os pontos que tem sinais negativos no contraste X e sinal positivo no contraste Y, e assim por diante. A interação generalizada XY também estará confundida com blocos.

Para dividirmos o experimento 2^n em $2^3 = 8$ blocos de tamanho 2^{n-3} , tomamos um 3º efeito W, diferente de XY. O bloco principal será constituído dos 2^{n-3} pontos que tenham sinais negativos nos contrastes X, Y e W. Os sete efeitos confundidos serão: X, Y, XY, W, XW, YW e XYW.

3.1.2.2. CONFUNDIMENTO NA SÉRIE 3^n

Para este item nós vamos utilizar a notação da interação generalizada para os experimentos fatoriais da série 2^n , i.é., se os efeitos X e Y são confundidos, então XY também estará confundido, o qual será obtido pela multiplicação de X e Y, eliminando as letras em comum, i.é., igualando a unidade, qualquer letra ao quadrado. Como foi visto esta notação possibilita uma fácil enumeração do sistema de confundimento da série 2^n .

Para o sistema 3^n , nós vimos que os $3^n - 1$ graus de liberdade podem ser divididos em $(3^n - 1)/2$ efeitos, cada um com dois graus de liberdade. A interação entre A e B é representada por AB e AB^2 .

A regra da interação generalizada para o sistema 3^n é a seguinte: se os pares de graus de liberdade correspondentes a X e Y estão completamente confundidos, então os pares de graus de liberdade correspondentes a XY e XY^2 também estão confundidos, onde a regra da multiplicação é a usual, com a condição que o cubo de qualquer letra é igual a unidade, ou seja,

$$A^3 = B^3 = C^3 = \dots = I.$$

Com esta notação, a ambiguidade que poderia aparecer se fosse tomada uma ordem diferente não existe, porque o efeito dado pela comparação $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \dots = 0, 1, 2 \pmod{3}$ é a mesma comparação dada por $2(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \dots) = 0, 2, 1 \pmod{3}$, ou seja, a interação ABC ... é a mesma interação dada por $A^2 B^2 C^2 \dots$. Devemos lembrar que nós estamos adotando a regra que, em qualquer interação, o expoente da primeira letra será a unidade, i.é., se depois de uma multiplicação, nós tivéssemos a interação $A^2 BCD$, nós a substituímos pela seguinte interação: $(A^2 BCD)^2 = A^4 B^2 C^2 D^2 = AB^2 C^2 D^2$, pois nós estamos trabalhando com números reduzidos a módulo 3. Desta maneira, nós obtemos uma enumeração completa e única de todos efeitos.

KEMPTHORNE (1975), dá um exemplo de todas as maneiras de confundimento no fatorial 3^3 em 9 blocos, cada um com 3 parcelas. A lista dos 13 sistemas de confundimento cada um numa linha é dada na tabela a seguir.

A	B	AB	AB ²	C	AC	AC ²	BC	BC ²	ABC	ABC ²	AB ² C	AB ² C ²
X	X	X	X									
X				X	X	X						
X							X		X			X
X								X		X	X	
	X			X			X	X				
	X				X				X		X	
	X					X				X		X
		X		X					X	X		
		X			X			X				X
		X				X	X				X	
			X	X							X	X
			X		X		X			X		
			X			X		X	X			

Por exemplo, se tomarmos o primeiro sistema, nós vamos confundir A e B, e suas interações generalizadas, que são AB e AB².

Se tomarmos o último sistema, nós temos:

AB² e AC², dando as seguintes interações generalizadas,

$$AB^2 \times AC^2 = A^2 B^2 C^2 = (A^2 B^2 C^2)^2 = A^4 B^4 C^4 = ABC, \quad e$$

$$AB^2 \times (AC^2)^2 = AB^2 \times A^2 C^4 = A^3 B^2 C = B^2 C = (B^2 C)^2 = BC^2.$$

EXEMPLO 1.

Vamos tomar o experimento fatorial 3^2 com uma repetição, confundindo AB. Assim, temos 3 blocos cada um com 3 combinações de tratamentos. As 9 combinações de tratamentos são: (1), a, a^2 , b, ab, a^2b , b^2 , ab^2 , a^2b^2 , ou (00), (10), (20), (01), (11), (21), (02), (12), (22).

Sabemos que os dois graus de liberdade correspondente a AB, pode ser representados pelos contrastes entre os três grupos de combinações de tratamentos seguinte:

$$X_1 + X_2 = 0 \pmod{3},$$

$$X_1 + X_2 = 1 \pmod{3},$$

e

$$X_1 + X_2 = 2 \pmod{3}.$$

Os 3 blocos são constituídos das seguintes combinações de tratamentos:

BLOCO I

$X_1 + X_2 = 0$

00

21

12BLOCO II

$X_1 + X_2 = 1$

10

01

22BLOCO III

$X_1 + X_2 = 2$

20

11

02

Se este experimento fosse repetido r vezes, a estrutura da análise de variância, com 2 graus de liberdade da interação AB confundida é:

C. variação	G.L.
Blocos	$3r - 1$
Repetições	$r - 1$
AB	2
Repetições x AB	$2(r - 1)$
Tratamentos	6
A	2
B	2
AB (não conf.)	2
Erro	$6(r - 1)$
Total	$9r - 1$

EXEMPLO 2.

Vamos tomar o experimento fatorial 3^3 com uma repetição, e vamos confundir AB e AC^2 . Assim, temos 9 blocos, cada um com 3 combinações de tratamentos. As 27 combinações de tratamentos são:

(1) = 000	c = 001	$c^2 = 002$
a = 100	ac = 101	$ac^2 = 102$
$a^2 = 200$	$a^2c = 201$	$a^2c^2 = 202$
b = 010	bc = 011	$bc^2 = 012$
ab = 110	abc = 111	$abc^2 = 112$
$a^2b = 210$	$a^2bc = 211$	$a^2bc^2 = 212$

$$\begin{array}{lll}
 b^2 = 020 & b^2c = 021 & b^2c^2 = 022 \\
 ab^2 = 120 & ab^2c = 121 & ab^2c^2 = 122 \\
 a^2b^2 = 220 & a^2b^2c = 221 & a^2b^2c^2 = 222
 \end{array}$$

Como estamos confundindo AB e AC^2 , então também estarão confundidas as seguintes interações generalizadas:

$$AB \times AC^2 = A^2BC^2 = (A^2BC^2)^2 = A^4B^2C^4 = AB^2C, \quad e$$

$$AB \times (AC^2)^2 = AB \times A^2C^4 = A^3BC = BC$$

Os 9 blocos são dados pelas soluções das equações $X_1 + X_2 = i \pmod{3}$ e $X_1 + 2X_3 = j \pmod{3}$, onde i e j assumem os valores 0, 1 e 2. O bloco principal ou o subgrupo intra-bloco é aquele constituído pelas combinações de tratamentos que satisfazem as equações, $X_1 + X_2 = 0 \pmod{3}$ e $X_1 + 2X_3 = 0 \pmod{3}$. Assim temos:

<u>BLOCO I</u>	<u>BLOCO II</u>	<u>BLOCO III</u>	<u>BLOCO IV</u>	<u>BLOCO V</u>	<u>BLOCO VI</u>	<u>BLOCO VII</u>	<u>BLOCO VIII</u>	<u>BLOCO IX</u>
$X_1 + X_2 = 0$	$X_1 + X_2 = 0$	$X_1 + X_2 = 0$	$X_1 + X_2 = 1$	$X_1 + X_2 = 1$	$X_1 + X_2 = 1$	$X_1 + X_2 = 2$	$X_1 + X_2 = 2$	$X_1 + X_2 = 0$
$X_1 + 2X_3 = 0$	$X_1 + 2X_3 = 1$	$X_1 + 2X_3 = 2$	$X_1 + 2X_3 = 0$	$X_1 + 2X_3 = 1$	$X_1 + 2X_3 = 2$	$X_1 + 2X_3 = 0$	$X_1 + 2X_3 = 1$	$X_1 + 2X_3 = 2$
000	002	001	010	012	011	020	022	021
121	120	122	101	100	102	111	110	112
212	211	210	222	221	220	202	201	200

Podemos observar que:

BLOCO II: É obtido somando-se 2 a todos os elementos da 3ª coluna do bloco I.

BLOCO III: É obtido somando-se 1 a todos os elementos da 3ª coluna do bloco I.

BLOCO IV: É obtido somando-se 1 a todos os elementos da 2ª coluna do bloco I.

BLOCO V: É obtido somando-se 1 e 2 às colunas B e C, respectivamente do bloco I.

BLOCO VI: É obtido somando-se 1 e 1 as colunas B e C, respectivamente do bloco I.

BLOCO VII: É obtido somando-se 2 a todos os elementos da 2ª coluna do bloco I.

BLOCO VIII: É obtido somando-se 2 e 2 as colunas B e C respectivamente do bloco I.

BLOCO IX: É obtido somando-se 2 e 1 as colunas B e C, respectivamente ao bloco I.

A estrutura da análise de variância para este experimento fatorial 3^3 , no qual estão confundidos os 2 graus liberdade correspondente às seguintes interações AB, AC^2 , AB^2C e BC, sendo repetido r vezes, é:

C. Variação	G.L.
Blocos	$9r - 1$
Repetições	$r - 1$
AB, AC^2 , AB^2C e BC	8
Repetições x Interações	$8(r - 1)$
Tratamentos	18
A	2
B	2
C	2
AB^2	2
AC	2
BC^2	2
ABC	2
ABC^2	2
AB^2C^2	2
Erro	$18(r - 1)$
Total	$27r - 1$

3.1.3. EXPERIMENTOS FATORIAIS COM UMA ÚNICA REPETIÇÃO

Em muitas pesquisas exploratórias, empregando experimentos fatoriais, o número de combinações de tratamentos é às vezes muito grande, e como sabemos, uma desvantagem

dos experimentos fatoriais é que o número de combinações de tratamentos crescem rapidamente a medida que aumenta o número de fatores.

Este fato limita o número de repetições a ser empregado, devido a dificuldade operacional de ensaios muito grande, bem como a escasses de recursos, que na maioria das vezes são suficientes somente para uma única repetição.

Se somente uma única repetição é usada, o experimento não será capaz de fornecer uma estimativa do erro, pelo procedimento comum de comparar repetições. Mas, em experimentos grandes existirá muitas interações entre 3 ou mais fatores (interações de ordem elevada), que podem em muitos casos serem considerados como sendo não significativos. Portanto, se certas interações de ordem elevada são insignificantes, seu quadrado médio na análise de variância se comportará exatamente como componentes do quadrado médio do erro, e portanto, podem ser usadas para fornecer uma estimativa do erro.

Existem críticas na inclusão das interações de ordem elevada na estimativa do erro, pois se algumas destas interações não forem insignificantes, i.é., tenham alguma grandeza apreciável, o quadrado médio do erro que será usado superestimarão a verdadeira variância do erro. Devemos notar que até mesmo, sendo algumas destas interações de or-

dem elevada de grandeza apreciável, o pesquisador ainda está em uma posição muito melhor do que se tivesse omitido inteiramente o fator, pois qualquer uma destas interações (exceto aquelas que estão confundidas), podem mais tarde ser isoladas e examinadas.

Este esquema de usar somente uma única repetição é particularmente útil em experimentos no campo agrícola. Vejamos no caso do fatorial 2^6 como ficaria o esquema da análise de variância se desejássemos confundir as interações ABCD, CDEF e ABEF com 4 blocos, cada um com 16 combinações de tratamentos.

C. variação	G.L.
Blocos	3
Efeitos principais	6
Interações de 2 fatores	15
Interações de 3 fatores	20
Erro (interações de ordem elevadas)	19
Total	63

Em pesquisa científica com maior precisão, uma única repetição só pode ser considerada adequada se o número de fatores for igual ou maior do que 6, segundo KEMPTHORNE (1975).

3.1.4. EFICIÊNCIA

A técnica da eficiência é essencialmente a mesma para todos tipos de delineamentos.

Para os experimentos com confundimento temos que: sejam σ_b^2 a variância do erro experimental para o experimento com confundimento e σ_r^2 a variância do erro experimental para o experimento em blocos completos ao acaso. Assim, a eficiência será:

$$E = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_b^2}$$

Nós conhecemos que o quadrado médio do erro para o experimento com confundimento é um estimador não viado de σ_b^2 . A questão agora é estimar σ_r^2 para o experimento em blocos completos ao acaso. Dos resultados da análise de variância de um experimento com confundimento, a estimativa de σ_r^2 é feita da seguinte maneira:

3.1.4.1. NO CASO DE UMA ÚNICA REPETIÇÃO

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{n_b^{QM} \text{Blocos} + n_e^{QM} \text{Erro}}{n_b + n_e}, \quad \text{onde}$$

n_b é o número de graus de liberdade para blocos;

n_e é o número de graus de liberdade total menos n_b .

Portanto, estimamos E como:

$$\hat{E} = \frac{\hat{\sigma}_r^2}{\hat{\sigma}_b^2} = \frac{\hat{\sigma}_r^2}{QM_{\text{Erro}}} \Rightarrow \hat{E} = \frac{n_b QM_{\text{Blocos}} + n_e QM_{\text{Erro}}}{(n_b + n_e) QM_{\text{Erro}}}$$

3.1.4.2. NO CASO DE MAIS DE UMA REPETIÇÃO

Se o confundimento é completo, a formula acima é mantida, com pequenas modificações, isto é:

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{n_b QM_{\text{Blocos d. repetição}} + n_e QM_{\text{Erro}}}{n_b + n_e},$$

onde

n_b é o número de graus de liberdade para blocos dentro de repetições

n_e é o número total de graus de liberdade, menos o número de graus de liberdade para repetições e menos n_b .

A estimativa $\hat{\sigma}_r^2$ está sujeita a suposição que as interações que são confundidas com blocos são insignificantes. Desde que o confundimento seja completo, nenhum método de estimação evita esta suposição. Se estas interações não são insignificantes, o cálculo superestima o ganho em precisão do confundimento.

JOHN NETER e WILLIAM WASSERNAN (1974), apresenta uma modificação que frequentemente é usada, e é aplica

da para avaliar qualquer experimento em relação a outro, isto é:

$$\hat{E}' = \frac{(df_2 + 1)(df_1 + 3)}{(df_2 + 3)(df_1 + 1)} \hat{E}, \quad \text{onde}$$

df_1 representa os graus de liberdade para o erro experimental do delineamento base;

df_2 representa os graus de liberdade para o erro experimental cuja eficiência esta sendo avaliada.

Segundo os dois autores acima citados, esta modificação tem pouco efeito, a não ser que os graus de liberdade para o erro experimental em ambos experimentos sejam muito pequeno.

3.1.5. FATORIAL FRACIONADO

Como temos visto, até agora discutimos experimentos fatoriais completos, e sabemos que esses experimentos são muito apropriados para pesquisas exploratórias, e que em tais pesquisas o número de fatores a serem testados é razoavelmente grande. As vezes até uma única repetição de um experimento fatorial está além dos recursos do pesquisador. Assim em situações como esta, um experimento que consiste somente de uma parte da repetição completa é de considerável valor.

A técnica usada para selecionar uma fração das combinações de tratamentos de um experimento fatorial foi introduzido por FINNEY (1945). Essa técnica é conhecida como fatorial fracionado e faz parte da teoria de confundimento.

Os fatoriais fracionados são empregados nos casos em que alguns efeitos podem ser considerados como insignificantes, e serem confundido como outros efeitos de interesse no experimento, reduzindo o número de combinações de tratamentos.

Este esquema é limitado em sua utilização, pois todos efeitos estão associados a outro efeito. Por isso um planejamento cuidadoso deve ser feito para garantir o valor do experimento. Apesar disso, o fatorial fracionado foi usado com vantagens em experimentos em que alguns ou todos fatores estão em dois níveis somente.

Os fatoriais fracionados tem grande utilidade em pesquisas agrícolas, físicas, biológicas, químicas, industriais, etc.

BOX e HUNTER (1961), classificaram os experimentos fatoriais fracionados em 3 tipos, que são:

a. Experimentos de resolução III: são aqueles constituídos de frações, nas quais alguns dos efeitos principais tem como alias (ou estão confundidos) interações de dois fatores, sendo portanto estimáveis apenas quando estas

são omitidas.

b. Experimentos de resolução IV: são aqueles constituídos de frações nas quais todos os efeitos principais são estimáveis, independente das interações de dois fatores serem ou não omitidas, mas algumas dessas interações constituem pares de alias.

c. Experimentos de resolução V: são aqueles constituídos de frações nas quais todos os efeitos principais e interações de dois fatores são estimáveis.

3.1.5.1. FATORIAL FRACIONADO NO SISTEMA 2^n

Vamos iniciar o estudo do fatorial fracionado no sistema 2^n , com um exemplo simples, para ver o que acontece quando o experimento contém parte de uma repetição. Será considerado o fatorial 2^3 , com os fatores A, B e C por sua simplicidade.

Sabemos que o fatorial 2^3 tem oito combinações de tratamentos numa repetição completa, i.é., (1), a, b, ab, c, ac, bc e abc.

Vamos supor que são testados somente as 4 combinações de tratamentos a, b, c e abc, ou seja, exatamente a

metade do fatorial completo. Assim, os efeitos principais e as interações são estimadas de acordo com a tabela abaixo:

Efeitos Fatoriais	Combinações de tratamentos			
	a	b	c	abc
A	+	-	-	+
B	-	+	-	+
AB	-	-	+	+
C	-	-	+	+
AC	-	+	-	+
BC	+	-	-	+
ABC	+	+	+	+

Para o efeito principal de A, nós somamos as produções das combinações de tratamentos que contêm a e subtraímos aquelas que não o contêm, ou seja,

$$A = a + abc - b - c$$

e, similarmente para B e C, ou seja:

$$B = b + abc - a - c, \quad e$$

$$C = c + abc - a - b.$$

Pela tabela acima vemos que as comparações A, B e C são mutuamente ortogonais, assim as estimativas dos 3

efeitos principais são independentes.

Para calcularmos a interação AB somamos as produções das combinações de tratamentos que contém um número par das letras a e b, e subtraímos aquelas com um número ímpar, ou seja,

$$AB = abc + c - a - b,$$

similarmente para AC e BC, ou seja,

$$AC = abc + b - a - c, \quad e$$

$$BC = abc + a - b - c.$$

Observamos que a mesma quantidade que estima A, também estima BC, então dizemos que A e BC são alias. Análogamente isto também acontece com B e AC, e C e AB. Então podemos escrever que $A = BC$, $B = AC$ e $AC = AB$. Este conjunto é o que FINNEY (1945) chama de conjunto de aliases.

A interação ABC não pode ser estimada. Se todas as oito combinações de tratamentos estivessem disponíveis, então ABC seria dada por:

$$ABC = abc + a + b + c - ab - ac - bc - (1)$$

Assim, vemos que escolhemos as 4 combinações de tratamentos que levam o sinal + nesta expressão, para ser a metade da repetição. Neste caso, ABC é chamado de contraste de definição ou relação de identidade, pois foi o con

traste usado para dividir o fatorial em duas partes, e será denotado por:

$$I = +ABC$$

Resumindo, o uso da fração 2^{-1} acarreta na perda total da interação ABC, e confunde totalmente cada efeito principal com uma interação de 2 fatores.

Sempre que utilizamos experimento fatorial fracionado esta confusão está presente. No nosso caso, temos um efeito aparente de $(A=BC)$, i.é., não temos como descobrir se esse efeito é devido a A, BC, ou a ambos. O motivo da confusão é devido ao fato de que todo efeito fatorial sempre tem uma ou mais aliases.

Devemos observar que o problema de decidir para qual alias o efeito é atribuído, é dificuldade que o pesquisador sempre enfrentará na hora de interpretar os resultados.

Em alguns tipos de pesquisa, a experiência anterior com os mesmos fatores, ou um conhecimento da natureza de seus efeitos, pode levar o pesquisador a decidir quais as interações que podem ser consideradas como insignificantes. Então a confusão desaparecerá, e nós concluímos que um efeito aparente de A é de fato devido a A, e igualmente para B e C. Com estas suposições, a metade da repetição fornece estimativas independentes dos 3 efeitos principais.

No caso de concluirmos o experimento num tempo relativamente pequeno, podemos realizar um novo experimento utilizando as outras combinações de tratamentos omitidas no primeiro.

Juntando os resultados dos dois experimentos obtemos uma repetição completa, que dá estimativas independentes de todos efeitos. É claro que este esquema é menos praticavel em experimentos que tomam um tempo longo para produzir seus resultados.

A fim de reduzir os riscos de conclusões erradas, devemos conhecer os efeitos fatoriais nos quais estamos interessados. Para isso apresentamos a seguinte regra:

REGRA 1. (COCHRAN e COX, 1957): "No sistema 2^n , a alias de qualquer efeito fatorial é a interação generalizada desse efeito com a relação de identidade".

No exemplo acima, temos que a alias de A será:

$$A \times I = A \times ABC \Rightarrow A = A^2BC \Rightarrow A = BC$$

Agora, se nós tivéssemos instalado o experimento com as combinações de tratamentos (1), ab, ac e bc, referente a outra parte, teríamos a seguinte tabela:

Efeitos Fatoriais	Combinações de tratamentos			
	(1)	ab	ac	bc
A	-	+	+	-
B	-	+	-	+
AB	+	+	-	-
C	-	-	+	+
AC	+	-	+	-
BC	+	-	-	+
ABC	-	-	-	-

Observamos que o conjunto de aliases é:

$$A = -BC; B = -AC \quad e \quad C = -AB$$

Isto pode ser comprovado pela tabela acima, ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} A = ab + ac - (1) - bc, \\ BC = (1) + bc - ab - ac \end{array} \right\} \Rightarrow A = -BC$$

O único efeito que não pode ser estimado é a interação ABC, e será chamada de contraste de definição ou relação de identidade, e será denotado por: $I = -ABC$.

Em resumo, quando dividimos o fatorial 2^3 em duas partes, tomando ABC como o contraste de dedinição, temos:

$$I = \pm ABC$$

Fração 1	Fração 2
+ABC	-ABC
a	(1)
b	ab
c	ac
abc	bc

A fração 2 será o subgrupo intrabloco, e será sempre a fração que contém o tratamento controle, denotado por (1), i.é., todas as combinações de tratamentos com o número par de letras em comum com o contraste de definição.

A partir do subgrupo intrabloco podemos determinar as combinações de tratamentos da outra fração, i.é., escolhemos qualquer combinação de tratamento que não está neste subgrupo e multiplicamos cada combinação de tratamento des se subgrupo por esta, lembrando que qualquer letra ao quadrado é igual a 1.

Para determinar o sinal da relação de identidade, notamos que na fração contendo a combinação de tratamento em que aparecem todas as letras da relação de identidade leva o sinal +, e portanto a outra fração leva o sinal -.

Observamos que os autores consideram que os fatoriais fracionados para ter valor prático é preciso que

os efeitos principais e as interações de 2 fatores sejam estimados, isto quer dizer que os efeitos principais e as interações de 2 fatores tenham como aliases interações de 3 ou mais fatores.

Agora, vamos utilizar a notação de geometria finita para os fatoriais fracionados.

3.1.5.1.1. Descrição do bloco principal, fração 2^{n-k} e conjunto de alias

Para descrever o bloco principal e o conjunto de alias nós vamos tomar alguns exemplos:

EXEMPLO 1. Dividindo-se o delineamento 2^6 em 2 blocos com 2^5 combinações de tratamentos, cada bloco constituirá uma fração, chamada de fração 2^{6-1} .

Sejam A, B, C, D, E e F os seis fatores representados por X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 e X_6 , respectivamente, e vamos confundir a interação ABCDEF.

O bloco principal ou o subgrupo intrabloco consiste de todas as combinações de tratamento satisfazendo a equação:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0$$

Então temos:

FRAÇÃO I		FRAÇÃO II	
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0 \pmod{2}$		$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 1 \pmod{2}$	
000000 (1)	111100 abcd	100000 a	011100 bcd
110000 ab	111010 abce	010000 b	011010 bce
101000 ac	111001 abcf	001000 c	011001 bcf
100100 ad	110110 abde	000100 d	010110 bde
100010 ae	110101 abdf	000010 e	010101 bdf
100001 af	110011 abef	000001 f	010011 bef
011000 bc	101110 acde	111000 abc	001110 cde
010100 bd	101101 acdf	110100 abd	001101 cdf
010010 be	101011 acef	110010 abe	001011 cef
010001 bf	100111 adef	110001 abf	000111 def
001100 cd	011110 bcde	101100 acd	111110 abcde
001010 ce	011101 bcdf	101010 ace	111101 abcdf
001001 cf	011011 bcef	101001 acf	111011 abcef
000110 de	010111 bdef	100110 ade	110111 abdef
000101 df	001111 cdef	100101 adf	101111 acdef
000011 ef	111111 abcdef	100011 aef	011111 bcdef

A fração II é formada a partir da fração I, multiplicando-se as combinações de tratamentos da fração I por qualquer combinação que não pertence a ela, por exemplo, a combinação a, ou de outro modo, adicionando-se 1 à coluna correspondente ao fator A.

Também poderíamos escrever o bloco principal da seguinte maneira: ele consiste dos pontos $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 = +1$. Multiplicando esta equação por X_6 , e notando que $X_6^2 = 1$, temos que:

$$X_6 = +X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$$

Podemos também escrever o bloco principal com o delineamento básico 2^5 nos fatores A, B, C, D e E, e depois adicionamos o outro fator F, colocando $X_6 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ (mod. 2), ou $X_6 = +X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$. Analogamente, o segundo bloco (fração II) será obtido fazendo $X_6 = -X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$, ou seja $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 1$ (mod. 2).

A	B	C	D	E	F	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \pmod{2}$	
0	0	0	0	0	0	(1)
1	0	0	0	0	1	af
0	1	0	0	0	1	bf
1	1	0	0	0	0	ab
0	0	1	0	0	1	cf
1	0	1	0	0	0	ac
0	1	1	0	0	0	bc
1	1	1	0	0	1	abcf
0	0	0	1	0	1	df
1	0	0	1	0	0	ad
0	1	0	1	0	0	bd
1	1	0	1	0	1	abdf
0	0	1	1	0	0	cd
1	0	1	1	0	1	acdf
0	1	1	1	0	1	bcdf
1	1	1	1	0	0	abcd
0	0	0	0	1	1	ef
1	0	0	0	1	0	ae
0	1	0	0	1	0	be
1	1	0	0	1	1	abef
0	0	1	0	1	0	ce
1	0	1	0	1	1	acef
0	1	1	0	1	1	bcef
1	1	1	0	1	0	abce
0	0	0	1	1	0	de
1	0	0	1	1	1	adef
0	1	0	1	1	1	bdef
1	1	0	1	1	0	abde
0	0	1	1	1	1	cdef
1	0	1	1	1	0	acde
0	1	1	1	1	0	bcde
1	1	1	1	1	1	abcdef

No delineamento 2^6 descrito acima, o bloco principal é a fração definida por: $I = +ABCDEF$

A outra fração é $I = -ABCDEF$

O termo principal é usado, algumas vezes, para indicar a fração que contém (1), por analogia ao bloco principal.

No exemplo acima, temos os seguintes conjuntos de aliases, tomando a fração $I = +ABCDEF$.

Efeitos Principais	Alias	Interações de 2 fatores	Alias	Interações de 3 fatores	Alias
A	BCDEF	AB	CDEF	ABC	DEF
B	ACDEF	AC	BDEF	ABD	CEF
C	ABDEF	AD	BCEF	ABE	CDF
D	ABCEF	AE	BCDF	ABF	CDE
E	ABCDF	AF	BCDE	ACD	BEF
F	ABCDE	BC	ADEF	ACE	BDF
		BD	ACEF	ACF	BDE
		BE	ACDE	ADE	BCF
		BF	ACDE	ADF	BCE
		CD	ABEF	AEF	BCD
		CE	ABDF		
		CF	ABDE		
		DE	ABCF		
		DF	ABCE		
		EF	ABCD		

Pela tabela acima, vemos que os efeitos princi

cipais tem como alias, interações de 5 fatores e as interações de 2 fatores tem como alias interações de 4 fatores.

Se pudermos considerar as interações de 3 ou mais fatores como insignificantes, os efeitos principais e as interações de 2 fatores são estimáveis, e para a estimativa do erro temos 10 graus de liberdade, relativo as 20 interações de 3 fatores. Assim, o esquema do quadro da análise de variância será:

C. variação	G.L.
Efeitos principais	6
Interações de 2 fatores	15
Resíduo	10
Total	31

EXEMPLO 2. Dividindo-se o delineamento 2^8 em 2^2 blocos com 2^6 unidades, cada bloco constituirá uma fração, chamada de fração 2^{8-2} .

Sejam A, B, C, D, E, F, G e H, os oito fatores representados por X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , X_6 , X_7 e X_8 respectivamente. Confundindo por exemplo ABCDG e ABEFH, também está confundido CDEFGH (3 g.l.).

O bloco principal ou o subgrupo intrabloco consiste de todas as combinações de tratamentos satisfazendo

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_7 = 0 \pmod{2}$$

e

$$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 + X_8 = 0 \pmod{2}.$$

Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_7 = 0$ (mod. 2)	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_7 = 0$ (mod. 2)	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_7 = 1$ (mod. 2)	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_7 = 1$ (mod. 2)
$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 + X_8 = 0$ (mod. 2)	$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 + X_8 = 1$ (mod. 2)	$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 + X_8 = 0$ (mod. 2)	$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 + X_8 = 1$ (mod. 2)
ABCDEFGH	ABCDEFGH	ABCDEFGH	ABCDEFGH
00000000 (1)	00000001 h	00000010 g	00000011 gh
11000000 ab	11000001 abh	11000010 abg	11000011 abgh
00110000 cd	00110001 cdh	00110010 cdg	00110011 cdgh
11110000 abcd	11110001 abcdh	11110010 abcdg	11110011 abcdgh
10101000 ace	10101001 aceh	10101010 aceg	10101011 acegh
01101000 bce	01101001 bceh	01101010 bceg	01101011 bcegh
10011000 ade	10011001 adeh	10011010 adeg	10011011 adegh
01011000 bde	01011001 bdeh	01011010 bdeg	01011011 bdegh
10100100 acf	10100101 acfh	10100110 acfg	10100111 acfgh
01100100 bcf	01100101 bcfh	01100110 bcfg	01100111 bcfgh
10010100 adf	10010101 adfh	10010110 adfg	10010111 adfgh
01010100 bdf	01010101 bdfh	01010110 bdfg	01010111 bdfgh
00001100 ef	00001101 efh	00001110 efg	00001111 efgh
11001100 abef	11001101 abefh	11001110 abefg	11001111 abefgh
00111100 cdef	00111101 cdefh	00111110 cdefg	00111111 cdefgh
11111100 abcdef	11111101 abcdefh	11111110 abcdefg	11111111 abcdefgh
00100010 cg	00100011 cgh	00100000 c	00100001 ch
11100010 abcg	11100011 abcg h	11100000 abc	11100001 abch
00010010 dg	00010011 dgh	00010000 d	00010001 dh

Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV
ABCDEFGH	ABCDEFGH	ABCDEFGH	ABCDEFGH
11010010 abd _g	11010011 abd _{gh}	11010000 abd	11010001 abd _h
10001010 aeg	10001011 aeg _h	10001000 ae	10001001 ae _h
01001010 beg	01001011 beg _h	01001000 be	01001001 be _h
10111010 acdeg	10111011 acdeg _h	10111000 acde	10111001 acde _h
01111010 bcdeg	01111011 bcdeg _h	01111000 bcde	01111001 bcde _h
10000110 afg	10000111 afg _h	10000100 af	10000101 af _h
01000110 bfg	01000111 bfg _h	01000100 bf	01000101 bf _h
10110110 acdfg	10110111 acdfg _h	10110100 acdf	10110101 acdf _h
01110110 bcd _{fg}	01110111 bcd _{fg} _h	01110100 bcd _f	01110101 bcd _f _h
00101110 cefg	00101111 cefg _h	00101100 cef	00101101 cef _h
11101110 abcefg	11101111 abcefg _h	11101100 abce _f	11101101 abce _f _h
00011110 defg	00011111 defg _h	00011100 def	00011101 def _h
11011011 abdeg _h	11011010 abdeg	11011101 abde _h	11011000 abde
10100001 ach	10100000 ac	10100011 acg _h	10100010 acg
01100001 bch	01100000 bc	01100011 bcg _h	01100010 bcg
10010001 adh	10010000 ad	10010011 adg _h	10010010 adg
01010001 bdh	01010000 bd	01010011 bdg _h	01010010 bdg
00001001 eh	00001000 e	00001011 egh	00001010 eg
11001001 abeh	11001000 abe	11001011 abeg _h	11001010 abeg
00111001 cde _h	00111000 cde	00111011 cdeg _h	00111010 cdeg
11111001 abcde _h	11111000 abcde	11111011 abcdeg _h	11111010 abcdeg
00000101 fh	00000100 f	00000111 fgh	00000110 fg
11000101 abf _h	11000100 abf	11000111 abfgh	11000110 abf _g
00110101 cdf _h	00110100 cdf	00110111 cdfgh	00110110 cdf _g
11110101 abcd _{fh}	11110100 abcd _f	11110111 abcd _{fh} _g	11110110 abcd _{fh} _g
10101101 acef _h	10101100 acef	10101111 acefgh	10101110 acef _g
01101101 bce _{fh}	01101100 bce _f	01101111 bcefgh	01101110 bce _{fh} _g
10011101 ade _{fh}	10011100 ade _f	10011111 ade _{fh} _g	10011110 ade _{fh} _g
01011101 bde _{fh}	01011100 bde _f	01011111 bde _{fh} _g	01011110 bde _{fh} _g
10000011 agh	10000010 ag	10000001 ah	10000000 a
01000011 bgh	01000010 bg	01000001 bh	01000000 b
10110011 acd _{gh}	10110010 acd _g	10110001 acd _h	10110000 acd

Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV
ABCDEFGH	ABCDEFGH	ABCDEFGH	ABCDEFGH
01110011 bedgh	01110010 bedg	01110001 bcdh	01110000 bcd
00101011 cegh	00101010 ceg	00101001 ceh	00101000 ce
11101011 abcegh	11101010 abceg	11101001 abceh	11101000 abce
00011011 degh	00011010 deg	00011001 deh	00011000 de
11011110 abdefg	11011111 abdefgh	11011100 abdef	11011101 abdefh
00100111 cfgh	00100110 cfg	00100101 cfh	00100100 cf
11100111 abcfgh	11100110 abcfg	11100101 abcfh	11100100 abcf
00010111 afgh	00010110 dfgh	00010101 dfh	00010100 df
11010111 abdfgh	11010110 abdfg	11010101 abdfh	11010100 abdf
10001111 aefgh	10001110 aefg	10001101 aefh	10001100 aef
01001111 befgh	01001110 befg	01001101 befh	01001100 bef
10111111 acdefgh	10111110 acdefg	10111101 acdefh	10111100 acdef
01111111 bcdefgh	01111110 bcdefg	01111101 bcdefh	01111100 bcdef

O bloco II é formado a partir do bloco I, adicionando-se 1 a coluna correspondente ao fator H, ou multiplicando-se as combinações de tratamento por h. Da mesma forma são construídos os outros dois blocos, adicionando-se 1 da forma conveniente.

Também poderíamos escrever o bloco I ou o bloco principal desta maneira: o bloco principal consiste dos pontos em que $X_1 X_2 X_3 X_4 X_7 = -1$ e $X_1 X_2 X_5 X_6 X_8 = -1$. Multiplicando estas equações por X_7 e X_8 , respectivamente, e notando que $X_7^2 = X_8^2 = 1$, temos que:

$$X_7 = -X_1 X_2 X_3 X_4 \quad \text{e} \quad X_8 = -X_1 X_2 X_5 X_6$$

Então podemos escrever o bloco principal com base no delineamento 2^6 completo com os fatores A, B, C, D, E e F, e então adicionamos os outros dois fatores G e H, colocando $X_7 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \pmod{2}$ e $X_8 = X_1 + X_2 + X_5 + X_6 \pmod{2}$, ou $X_7 = -X_1 X_2 X_3 X_4$ e $X_8 = -X_1 X_2 X_5 X_6$. Analogamente, o segundo bloco seria obtido fazendo $X_7 = -X_1 X_2 X_3 X_4$ e $X_8 = +X_1 X_2 X_5 X_6$; o terceiro bloco fazendo $X_7 = +X_1 X_2 X_3 X_4$ e $X_8 = -X_1 X_2 X_5 X_6$; e o quarto bloco fazendo $X_7 = +X_1 X_2 X_3 X_4$ e $X_8 = +X_1 X_2 X_5 X_6$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$X_7 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$	$X_8 = X_1 + X_2 + X_5 + X_6$	
(1)	0	0	0	0	0	0	0	0	(1)
a	1	0	0	0	0	0	1	1	agh
b	0	1	0	0	0	0	1	1	bgh
ab	1	1	0	0	0	0	0	0	ab
c	0	0	1	0	0	0	1	0	cg
ac	1	0	1	0	0	0	0	1	ach
bc	0	1	1	0	0	0	0	1	bch
abc	1	1	1	0	0	0	1	0	abcg
d	0	0	0	1	0	0	1	0	dg
ad	1	0	0	1	0	0	0	1	adh
bd	0	1	0	1	0	0	0	1	bdh
abd	1	1	0	1	0	0	1	0	abdg
cd	0	0	1	1	0	0	0	0	cd
acd	1	0	1	1	0	0	1	1	acdgh
bcd	0	1	1	1	0	0	1	1	bcdgh
abcd	1	1	1	1	0	0	0	0	abcd
e	0	0	0	0	1	0	0	1	eh
ae	1	0	0	0	1	0	1	0	aeg
be	0	1	0	0	1	0	1	0	beg

	A	B	C	D	E	F	G	H	
abe	1	1	0	0	1	0	0	1	abeh
ce	0	0	1	0	1	0	1	1	cegh
ace	1	0	1	0	1	0	0	0	ace
bce	0	1	1	0	1	0	0	0	bce
abce	1	1	1	0	1	0	1	1	abcegh
de	0	0	0	1	1	0	1	1	degh
ade	1	0	0	1	1	0	0	0	ade
bde	0	1	0	1	1	0	0	0	bde
abde	1	1	0	1	1	0	1	1	abdegh
cde	0	0	1	1	1	0	0	1	cdeh
acde	1	0	1	1	1	0	1	0	acdeg
bcde	0	1	1	1	1	0	1	0	bcdeg
abcde	1	1	1	1	1	0	0	1	abcdeh
f	0	0	0	0	0	1	0	1	fh
af	1	0	0	0	0	1	1	0	afg
bf	0	1	0	0	0	1	1	0	bfg
abf	1	1	0	0	0	1	0	1	abfh
cf	0	0	1	0	0	1	1	1	cfgh
acf	1	0	1	0	0	1	0	0	acf
bcf	0	1	1	0	0	1	0	0	bcf
abcf	1	1	1	0	0	1	1	1	abcfgh
df	0	0	0	1	0	1	1	1	dfgh
adf	1	0	0	1	0	1	0	0	adf
bdf	0	1	0	1	0	1	0	0	bdf
abdf	1	1	0	1	0	1	1	1	abdfgh
cdf	0	0	1	1	0	1	0	1	cdfh
acdf	1	0	1	1	0	1	1	0	acdfg
bcd	0	1	1	1	0	1	1	0	bcdg
abcd	1	1	1	1	0	1	0	1	abcdh
ef	0	0	0	0	1	1	0	0	ef
aef	1	0	0	0	1	1	1	1	aefgh
bef	0	1	0	0	1	1	1	1	befgh

	A	B	C	D	E	F	G	H	
abef	1	1	0	0	1	1	0	0	abef
cef	0	0	1	0	1	1	1	0	cefg
acef	1	0	1	0	1	1	0	1	acefh
bcef	0	1	1	0	1	1	0	1	bcefh
abcef	1	1	1	0	1	1	1	0	abcefg
def	0	0	0	1	1	1	1	0	defg
adef	1	0	0	1	1	1	0	1	adefh
bdef	0	1	0	1	1	1	0	1	bdefh
abdef	1	1	0	1	1	1	1	0	abdefg
cdef	0	0	1	1	1	1	0	0	cdef
acdef	1	0	1	1	1	1	1	1	acdefgh
bcdef	0	1	1	1	1	1	1	1	bcdefgh
abcdef	1	1	1	1	1	1	0	0	abcdef

O termo **fração regular** 2^{n-k} , é usado para descrever somente aqueles conjuntos com 2^{n-k} combinações de tratamentos, que poderiam ocorrer no mesmo bloco, quando o fatorial completo é dividido em 2^k blocos, confundindo exatamente $2^k - 1$ efeitos. Portanto, podemos definir uma **fração** 2^{n-k} , como um conjunto com 2^{n-k} pontos, que constituem um subgrupo de combinações de tratamentos.

No delineamento 2^8 descrito acima, o bloco principal é a fração definida por:

$$I = -ABCDG = -ABEFH = +CDEFGH$$

As outras frações são definidas por

$$I = -ABCDG = +ABEFH = -CDEFGH$$

$$I = +ABCDG = -ABEFH = -CDEFGH$$

$$I = +ABCDG = +ABEFH = +CDEFGH$$

O termo **fração principal** é usado para indicar a fração que contém o tratamento controle (1), por analogia com o bloco principal.

No exemplo acima, para enfocar o conjunto de aliases, vamos tomar a fração referente a seguinte relação de identidade:

$$I = +ABCDG = +ABEFH = +CDEFGH$$

Efeitos Principais	Alias	Interações de 2 fatores	Alias	Interações de 3 fatores	Alias
A	BCDG,BEFH,ACDEFGH	AB	CDG,EFH,ABCDEFHG	ACE	BDEG,BCFH,ADFGH
B	ACDG,AEFH,BCDEFGH	AC	BDG,BCEFH,ADEFGH	ACF	BDFG,BCEH,ADEGH
C	ABDG,ABCFEH,DEFGH	AD	BCG,BDEFH,ACEFGH	ACH	BDGH,BCEF,ADEFG
D	ABCG,ABDEFH,CEFGH	AG	BCDEG,BFH,ACDFGH	ADE	BCEG,BDFH,ACFGH
E	ABCDEG,ABFH,CDFGH	AF	BCDFG,BEH,ACDEGH	ADF	BCFG,BDEH,ACEGH
F	ABCDG,ABEH,CDEGH	AG	BCD,BEFGH,ACDEFH	ADH	BCGH,BDEF,ACEFG
G	ABCD,ABEFGH,CDEFH	AH	BCDGH,BEF,ACDEFG	AEG	BCDE,BFGH,ACDFH
H	ABCDGH,ABEF,CDEFG	BC	ADG,ACEFH,BDEFHG	AFG	BCDF,BEGH,ACDEH
		BD	ACG,ADEFH,BCEFGH	AGH	BCDH,BEFG,ACDEF
		BE	ACDEG,AFH,BCDFGH	BCE	ADEG,ACFH,BDFGH
		BF	ACDFG,AGH,BCDEGH	BCF	ADFG,ACEH,BDEGH
		BG	ACD,AEFGH,BCDEFH	BCH	ADGH,ACEF,BDEFG
		BH	ACDGH,AEF,BCDEFG	BDE	ACEG,ADFH,BCFGH
		CD	ABG,ABCDEFH,EFGH	BDF	ACFG,ADEH,BCEGH
		CE	ABDEG,ABCFH,DFGH	BDH	ACGH,ADEF,BCEFG
		CF	ABDFG,ABCEH,DEGH	BEG	ACDE,AFGH,BCDFH
		CG	ABD,ABCFEH,DEFH	BFG	ACDF,AEGH,BCDEH
		CH	ABDGH,ABCEF,DEFG	BGH	ACDH,AEFG,BCDEF
		DE	ABCEG,ABDFH,CFGH	CDE	ABEG,ABCDGF,FGH

Interações de 2 fatores	Alias	Interações de 3 fatores	Alias
DF	ABCFG, ABDEH, CEGH	CDF	ABFG, ABCDEH, EGH
DG	ABC, ABDEFGH, CEFH	CDH	ABGH, ABCDEF, EFG
DH	ABCGH, ABDEF, CEFH	CEF	ABDEFG, ABCH, DGH
EF	ABCDEF, ABH, CDEH	CEG	ABDE, ABCFGH, DFH
EG	ABCDE, ABFGH, CDFH	CEH	ABDEGH, ABCE, DFG
EH	ABCDEGH, ABF, CDFG	CFG	ABDF, ABCEGH, DEH
FG	ABCDF, ABEGH, CDEH	CFH	ABDFGH, ABCE, DEG
FH	ABCDFGH, ABE, CDEG	CGH	ABDH, ABCEFG, DEF
GH	ABCDH, ABCEFG, CDEF		

Se pudermos considerar as interações de 3 ou mais fatores como insignificante, os efeitos principais e as interações de 2 fatores são estimáveis. E para a estimativa do erro temos 27 graus de liberdade. Assim o esquema do quadro da análise de variância será:

C. variação	G.L.
Efeitos principais	8
Interações de 2 fatores	28
Resíduo	27
Total	63

Como vimos nos dois exemplos, a metade do fatorial 2^6 e 1/4 do fatorial 2^8 estavam em delineamento inteiramente ao acaso. No próximo item vamos colocar estes dois exemplos em blocos ao acaso.

**3.1.5.1.2. Fatoriais fracionados da série 2^n
em blocos ao acaso**

EXEMPLO 1.

Vamos tomar a metade do fatorial 2^6 . Se o pesquisador estivesse interessado em colocar essa metade em dois blocos de 16 combinações de tratamentos, ele teria que dispor de uma interação com sua respectiva alias para confundir com blocos. Vamos tomar a metade referente a relação de identidade $I = +ABCDEF$.

Para escolher a interação para ser confundida, o pesquisador deve ter em mente que a interação generalizada desta, com a relação de identidade, também será confundida.

Como estamos supondo que as interações de 3 ou mais fatores são insignificantes, então vamos escolher a interação $AEF = BCD$. Assim, temos os seguintes blocos:

BLOCO I				BLOCO II			
B	C	D		B	C	D	
$X_2 + X_3 + X_4 = 0$				$X_2 + X_3 + X_4 = 1$			
000000 (1)			111001 abcf	110000 ab			000101 df
100010 ae			110110 abde	101000 ac			111100 abcd
100001 af			110101 abdf	100100 ad			110011 abef
011001 bc			101110 acde	010010 be			101011 acef
010101 bd			101101 acdf	010001 bf			100111 adef
001100 cd			011011 bcef	001010 ce			011110 bcde
000011 ef			010111 bdef	001001 cf			011101 bcdf
111010 abce			001111 cdef	000110 de			111111 abcdef

Neste caso o esquema do quadro da análise de variância será:

C. Variação	G.L.
Blocos	1
Efeitos principais	6
Interações de 2 fatores	15
Resíduo	9
Total	31

EXEMPLO 2.

Vamos tomar $1/4$ do fatorial 2^8 . Se o pesquisador estivesse interessado em colocar este $1/4$ em quatro blocos com 16 combinações de tratamentos, ele teria que dispor de duas interações com suas respectivas alias para confundir com blocos. Essas interações devem ser escolhidas de tal maneira que, o produto delas com as interações presentes na relação de identidade não sejam efeitos principais e nem interações de 2 fatores. Também devemos observar que o produto entre a interação generalizada das duas interações escolhidas com aquelas presentes na relação de identidade não resulta em efeitos principais ou interações de dois fatores.

Vamos tomar a quarta fração referente a relação de identidade $I = +ABCDG = +ABEFH = +CDEFGH$.

Se escolhermos para confundir com blocos as interações ACEGH, BDEFG, então a sua interação generalizada é ABCDFH. Assim, com esta escolha também serão confundidas as seguintes interações:

$$ACEGH = BDEH = BCFG = ADF$$

$$BDEFG = ACEF = ADGH = BCH$$

$$ABCDFH = FGH = CDE = ABEG$$

Logo, vemos que nesse caso não confundimos efeitos principais nem interações de 2 fatores, e os 4 blocos são dados como segue:

BLOCO I	BLOCO II	BLOCO III	BLOCO IV
ACEGH ₀ , BDEFG ₀	ACEGH ₀ , BDEFG ₁	ACEGH ₁ , BDEFG ₀	ACEGH ₁ , BDEFG ₁
(ABCDHF) ₀	(ABCDHF) ₁	(ABCDHF) ₁	(ABCDHF) ₀
ABCDEFGH	ABCDEFGH	ABCDEFGH	ABCDEFGH
11100100	01000000	10000000	00100100
00010100	10110000	01110000	11010100
10001100	00101000	11101000	01001100
01111100	11011000	00011000	10111100
01100010	11000110	00000110	10100010
10010010	00110110	11110110	01010010
00001010	10101110	01101110	11001010
11111010	01011110	10011110	00111010
00100001	10000101	01000101	11100001
11010001	01110101	10110101	00010001
01001001	11101101	00101101	10001001
10111001	00011101	11011101	01111001
10100111	00000011	11000011	01100111
01010111	11110011	00110011	10010111
11001111	01101011	10101011	00001111
00111111	10011011	01011011	11111111

Como o experimento escolhido não contém o tratamento controle (1) entre as combinações de tratamentos, nenhum dos quatro blocos é o subgrupo intrabloco. Mesmo as-

sim, podemos obter os outros a partir do primeiro já reconstruído.

Construimos o primeiro bloco procurando no experimento selecionado, as combinações de tratamentos que satisfazem as equações, $X_1 + X_3 + X_5 + X_7 + X_8 = 0 \pmod{2}$ e $X_2 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = 0 \pmod{2}$, e depois colocamos estas combinações de tratamentos na "ordem padrão".

Para construirmos o segundo bloco escolhemos uma das combinações de tratamentos que satisfazem as equações, $X_1 + X_3 + X_5 + X_7 + X_8 = 0 \pmod{2}$ e $X_2 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = 1 \pmod{2}$, por exemplo, b = 01000000, em seguida verificamos qual é o número modular que somado à primeira combinação de tratamento do bloco I, nos dá essa combinação de tratamento. Nesse caso, o número modular é 10100100. Feito isso, somamos este número a todas combinações de tratamentos do bloco I obtendo-se o bloco II.

Para obtermos os outros blocos o procedimento é análogo. Assim, para obtermos o bloco III, inicialmente escolhemos a = 10000000 para ser sua primeira combinação de tratamento, e o número modular é 01100100. A primeira combinação de tratamento escolhida para o bloco IV foi cf = 00100100, e o número modular que devemos somar as combinações de tratamentos do bloco I é: 11000000.

Neste caso, o esquema do quadro da análise de

variância será:

C. variação	G.L.
Blocos	3
Efeitos principais	8
Interações de 2 fatores	28
Resíduo	24
Total	63

3.1.5.2. FATORIAL FRACIONADO NO SISTEMA 3^n

O fatorial fracionado tem sido utilizado com bastante sucesso nos experimentos fatoriais da série 2^n , sendo também útil em experimentos fatoriais da série 3^n , em menor escala devido a dificuldade de construção.

Com essa idéia, vamos examinar as circunstâncias em que poderíamos considerar o fatorial fracionado na série 3^n como um delineamento de considerável valor prático. Se o material experimental é constituído de tal maneira, que as interações envolvendo 3 ou mais fatores sejam insignificantes, nós podemos usar o fatorial fracionado 3^n , achando uma relação de identidade, tal que os efeitos principais e interações de 2 fatores sejam estimáveis, ou seja, as suas aliases sejam interações de 3 ou mais fatores.

Vamos iniciar o estudo do fatorial fracionado na série 3^n , com um exemplo simples para enfocar os problemas de construção desse experimento, ou seja, $1/3$ da repetição do fatorial 3^3 . Antes de iniciar este estudo, devemos lembrar que em um fatorial 3^3 , os 26 graus de liberdade para tratamentos podem ser divididos em 13 pares de graus de liberdade como segue:

- Efeitos Principais: A, B, C
- Interações de 2 fatores: AB, AB^2 , AC, AC^2 , BC e BC^2
- Interações de 3 fatores: ABC, ABC^2 , AB^2C e AB^2C^2

Para obtermos $1/3$ da repetição do fatorial 3^3 é natural escolhermos uma interação de 3 fatores, ou seja, ABC como a relação de identidade, i.é., $I = ABC$. Assim com base nessa relação de identidade nós podemos gerar os conjuntos de aliases, ou seja,

$$A = AB^2C^2 = BC$$

$$B = AB^2C = AC$$

$$AB = ABC^2 = C$$

$$AB^2 = AC^2 = BC^2$$

da seguinte maneira:

$$A = A \times ABC = A^2BC = (A^2BC)^2 = AB^2C^2$$

e

$$A = A \times (ABC)^2 = A \times A^2B^2C^2 = A^3B^2C^2 = (B^2C^2)^2 = BC$$

$$A = AB^2C^2 = BC$$

e assim por diante.

Como vemos, os efeitos principais A, B e C es tão completamente confundidos com interações de 2 fatores, isto significa que estes efeitos principais só serão estima- dos se as interações de 2 fatores forem consideradas como in- significantes.

Sabemos que o fatorial 3^3 tem 27 combinações de tratamentos, ou seja:

(1) = 000	c = 001	$c^2 = 002$
a = 100	ac = 101	$ac^2 = 102$
$a^2 = 200$	$a^2c = 201$	$a^2c^2 = 202$
b = 010	bc = 011	$bc^2 = 012$
ab = 110	abc = 111	$abc^2 = 112$
$a^2b = 210$	$a^2bc = 211$	$a^2bc^2 = 212$
$b^2 = 020$	$b^2c = 021$	$b^2c^2 = 022$
$ab^2 = 120$	$ab^2c = 121$	$ab^2c^2 = 122$
$a^2b^2 = 220$	$a^2b^2c = 221$	$a^2b^2c^2 = 222$

Com a relação de identidade $I = ABC$, temos as 3 frações seguintes:

Fração 1	Fração 2	Fração 3
ABC_0	ABC_1	ABC_2
$X_1+X_2+X_3=0 \pmod{3}$	$X_1+X_2+X_3=1 \pmod{3}$	$X_1+X_2+X_3=2 \pmod{3}$
(1) = 000	a = 100	$a^2 = 200$
$a^2b = 210$	b = 010	ab = 110
$ab^2 = 120$	$a^2b^2 = 220$	$b^2 = 020$
$a^2c = 201$	c = 001	ac = 101
abc = 111	$a^2bc = 211$	bc = 011
$b^2c = 021$	$ab^2c = 121$	$a^2b^2c = 221$
$ac^2 = 102$	$a^2c^2 = 202$	$c^2 = 002$
$bc^2 = 012$	$abc^2 = 112$	$a^2bc^2 = 212$
$a^2b^2c^2 = 222$	$b^2c^2 = 022$	$ab^2c^2 = 122$

A fração 1 é o bloco principal ou o subgrupo intrabloco.

Agora daremos dois exemplos de fatoriais fracionados da série 3^n , onde os efeitos principais e as interações de 2 fatores são estimáveis. Nestes exemplos descreveremos os blocos principais e os conjuntos de aliases dos 2 experimentos.

EXEMPLO 1.

Vamos tomar $1/3$ do fatorial 3^5 . Assim, temos a fração 3^{5-1} . Sejam A, B, C, D e F os cinco fatores representados por X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 respectivamente, e vamos es

colher a seguinte relação de identidade $I = AB^2CDE^2$. Assim, temos as 3 frações seguintes:

FRAÇÃO I		FRAÇÃO II		FRAÇÃO III	
$AB^2CDE_0^2$		$AB^2CDE_1^2$		$AB^2CDE_2^2$	
$X_1+2X_2+X_3+X_4+2X_5=0 \pmod{3}$		$X_1+2X_2+X_3+X_4+2X_5=1 \pmod{3}$		$X_1+2X_2+X_3+X_4+2X_5=2 \pmod{3}$	
(1) - 00000	$ab^2cde - 12111$	a - 10000	$a^2b^2cde - 22111$	$a^2 - 20000$	$b^2cde - 02111$
ab - 11000	$ac^2de - 10211$	$a^2b - 21000$	$a^2c^2de - 20211$	b - 01000	$c^2de - 00211$
$a^2b^2 - 22000$	$a^2bc^2de - 21211$	$b^2 - 02000$	$bc^2de - 01211$	$ab^2 - 12000$	$abc^2de - 11211$
$a^2c - 20100$	$b^2c^2de - 02211$	c - 00100	$ab^2c^2de - 12211$	ac - 10100	$a^2b^2c^2de - 22211$
bc - 01100	$a^2d^2e - 20021$	abc - 11100	$d^2e - 00021$	$a^2bc - 21100$	$ad^2e - 10021$
$ab^2c - 12100$	$bd^2e - 01021$	$a^2b^2c - 22100$	$abd^2e - 11021$	$b^2c - 02100$	$a^2bd^2e - 21021$
$ac^2 - 10200$	$ab^2d^2e - 12021$	$a^2c^2 - 20200$	$a^2b^2d^2e - 22021$	$c^2 - 00200$	$b^2d^2e - 02021$
$a^2bc^2 - 21200$	$acd^2e - 10121$	$bc^2 - 01200$	$a^2cd^2e - 20121$	$abc^2 - 11200$	$cd^2e - 00121$
$b^2c^2 - 02200$	$a^2bcd^2e - 21121$	$ab^2c^2 - 12200$	$bcd^2e - 01121$	$a^2b^2c^2 - 22200$	$abcd^2e - 11121$
$a^2d - 20010$	$b^2cd^2e - 02121$	d - 00010	$ab^2cd^2e - 12121$	ad - 10010	$a^2b^2cd^2e - 22121$
bd - 01010	$c^2d^2e - 00221$	abd - 11010	$ac^2d^2e - 10221$	$a^2bd - 21010$	$a^2c^2d^2e - 20221$
$ab^2d - 12010$	$abc^2d^2e - 11221$	$a^2b^2d - 22010$	$a^2bc^2d^2e - 21221$	$b^2d - 02010$	$bc^2d^2e - 01221$
acd - 10110	$a^2b^2c^2d^2e - 22221$	$a^2cd - 20110$	$b^2c^2d^2e - 02221$	cd - 00110	$ab^2c^2d^2e - 12221$
$a^2bcd - 21110$	$a^2e^2 - 20002$	bcd - 01110	$e^2 - 00002$	abcd - 11110	$ae^2 - 10002$
$b^2cd - 02110$	$be^2 - 01002$	$ab^2cd - 12110$	$abe^2 - 11002$	$a^2b^2cd - 22110$	$a^2be^2 - 21002$
$c^2d - 00210$	$ab^2e^2 - 12002$	$ac^2d - 10210$	$a^2b^2e^2 - 22002$	$a^2c^2d - 20210$	$b^2e^2 - 02002$
$abc^2d - 11210$	$ace^2 - 10102$	$a^2bc^2d - 21210$	$a^2ce^2 - 20102$	$bc^2d - 01210$	$ce^2 - 00102$
$a^2b^2c^2d - 22210$	$a^2bce^2 - 21102$	$b^2c^2d - 02210$	$bce^2 - 01102$	$ab^2c^2d - 12210$	$abce^2 - 11102$
$ad^2 - 10020$	$b^2ce^2 - 02102$	$a^2d^2 - 20020$	$ab^2ce^2 - 12102$	$d^2 - 00020$	$a^2b^2ce^2 - 22102$
$a^2bd^2 - 21020$	$c^2e^2 - 00202$	$bd^2 - 01020$	$ac^2e^2 - 10202$	$abd^2 - 11020$	$a^2c^2e^2 - 20202$
$b^2d^2 - 02020$	$abc^2e^2 - 11202$	$ab^2d^2 - 12020$	$a^2bc^2e^2 - 21202$	$a^2b^2d^2 - 22020$	$bc^2e^2 - 01202$
$cd^2 - 00120$	$a^2b^2c^2e^2 - 22202$	$acd^2 - 10120$	$b^2c^2e^2 - 02202$	$a^2cd^2 - 20120$	$ab^2c^2e^2 - 12202$
$abcd^2 - 11120$	$ade^2 - 10012$	$a^2bcd^2 - 21120$	$a^2de^2 - 20012$	$bcd^2 - 01120$	$de^2 - 00012$
$a^2b^2cd^2 - 22120$	$a^2bde^2 - 21012$	$b^2cd^2 - 02120$	$bde^2 - 01012$	$ab^2cd^2 - 12120$	$abde^2 - 11012$
$a^2c^2d^2 - 20220$	$b^2de^2 - 02012$	$c^2d^2 - 00220$	$ab^2de^2 - 12012$	$ac^2d^2 - 10220$	$a^2b^2de^2 - 22012$
$bc^2d^2 - 01220$	$cde^2 - 00112$	$abc^2d^2 - 11220$	$acde^2 - 10112$	$a^2bc^2d^2 - 21220$	$a^2cde^2 - 20112$
$ab^2c^2d^2 - 12220$	$abcde^2 - 11112$	$a^2b^2c^2d^2 - 22220$	$a^2bcde^2 - 21112$	$b^2c^2d^2 - 02220$	$bcde^2 - 01112$
ae - 10001	$a^2b^2cde^2 - 22112$	$a^2e - 20001$	$b^2cde^2 - 02112$	e - 00001	$ab^2cde^2 - 12112$

FRAÇÃO I $AB^2CDE^2_0$		FRAÇÃO II $AB^2CDE^2_1$		FRAÇÃO III $AB^2CDE^2_2$	
$a^2be - 21001$	$a^2c^2de^2 - 21212$	$be - 01001$	$c^2de^2 - 00212$	$abe - 11001$	$ac^2de^2 - 10212$
$b^2c - 02001$	$bc^2de^2 - 01212$	$ab^2e - 12001$	$abc^2de^2 - 11212$	$a^2b^2e - 22001$	$a^2bc^2de^2 - 21212$
$ce - 00101$	$ab^2c^2de^2 - 12212$	$ace - 10101$	$a^2b^2c^2de^2 - 22212$	$a^2ce - 20101$	$b^2c^2de^2 - 02212$
$abce - 11101$	$d^2e^2 - 00022$	$a^2bce - 21101$	$ad^2e^2 - 10022$	$bce - 01101$	$a^2d^2e^2 - 20022$
$a^2b^2ce - 22101$	$abd^2e^2 - 11022$	$b^2ce - 02101$	$a^2bd^2e^2 - 21022$	$ab^2ce - 12101$	$bd^2e^2 - 01022$
$a^2c^2e - 20201$	$a^2b^2d^2e^2 - 22022$	$c^2e - 00201$	$b^2d^2e^2 - 02022$	$ac^2e - 10201$	$ab^2d^2e^2 - 12022$
$bc^2e - 01201$	$a^2cd^2e^2 - 20122$	$abc^2e - 11201$	$cd^2e^2 - 00122$	$a^2bc^2e - 21201$	$acd^2e^2 - 10122$
$ab^2c^2e - 12201$	$bcd^2e^2 - 01122$	$a^2b^2c^2e - 22201$	$abcd^2e^2 - 11122$	$b^2c^2e - 02201$	$a^2bcd^2e^2 - 21122$
$de - 00011$	$ab^2cd^2e^2 - 12122$	$ade - 10101$	$a^2b^2cd^2e^2 - 22122$	$a^2de - 20011$	$c^2d^2e^2 - 00222$
$abde - 11011$	$ac^2d^2e^2 - 10222$	$a^2bde - 21011$	$a^2c^2d^2e^2 - 20222$	$bde - 01011$	$b^2cd^2e^2 - 02122$
$a^2b^2de - 22011$	$a^2bc^2d^2e^2 - 21222$	$b^2de - 02011$	$bc^2d^2e^2 - 01222$	$ab^2de - 12011$	$abc^2d^2e^2 - 11222$
$a^2cde - 20111$	$b^2c^2d^2e^2 - 02222$	$cde - 00111$	$ab^2c^2d^2e^2 - 12222$	$acde - 10111$	$a^2b^2c^2d^2e^2 - 22222$
$bgde - 01111$		$abcde - 11111$		$a^2bcde - 21111$	

Neste caso, os conjuntos de aliases são como

segue:

- Relação de Identidade : $I = AB^2CDE^2$

Efeitos principais	Alias	Interações de 2 fatores	Alias	Interações de 3 fatores	Alias
A	ABC^2D^2E ; BC^2D^2E	AB	AC^2D^2E ; $BCDE^2$	ABC	ACD^2E ; BDE^2
B	$ACDE^2$; $ABCDE^2$	AB^2	$AB^2C^2D^2E$; CDE^2	ABC^2	AD^2E ; BC^2DE^2
C	$AB^2C^2DE^2$; AB^2DE^2	AC	$ABCD^2E$; BD^2E	AB^2C^2	AB^2D^2E ; CD^2E
D	$AB^2C^2D^2E$; AB^2CE	AC^2	ABD^2E ; BCD^2E	ABD	AC^2DE ; BCE^2
E	AB^2CD ; AB^2CDE	AD	ABC^2DE ; BC^2E	BCD	$AC^2D^2E^2$; ABE^2
		AD^2	ABC^2E ; BC^2DE	AC^2D	ABDE ; BCE
		AE	ABC^2D^2 ; $BC^2D^2E^2$	BC^2D	AD^2E^2 ; ABC^2E^2
		AE^2	$ABC^2D^2E^2$; BC^2D^2	ABD^2	AC^2E ; BCD^2E^2
		BC	AC^2DE^2 ; $ABDE^2$	AB^2D^2	AB^2C^2E ; CD^2E^2
		BC^2	ADE^2 ; ABC^2DE^2	ACD^2	ABCE ; BDE
		BD	ACD^2E^2 ; $ABCE^2$	BCD^2	AC^2E^2 ; ABD^2E^2
		BD^2	ACE^2 ; $ABCD^2E^2$	AC^2D^2	ABE ; BCDE
		BE	ACD ; ABCDE	AB^2E	$AB^2C^2D^2$; CDE
		BE^2	ACDE ; ABCD	ACE	$ABCD^2$; BD^2E^2
		CD	$AB^2C^2D^2E^2$; AB^2E^2	ADE	ABC^2D ; BC^2E^2
		CD^2	$AB^2C^2E^2$; $AB^2D^2E^2$		
		CE	AB^2C^2D ; AB^2DE		
		CE^2	AB^2C^2DE ; AB^2D		
		DE	AB^2CD^2 ; AB^2CE		
		DE^2	AB^2CD^2E ; AB^2C		

Vemos pela tabela acima que os efeitos principais e as interações de 2 fatores podem ser estimadas, se as interações de 3 ou mais fatores foram consideradas insignificantes. Assim o esboço do quadro da análise de variância será:

C. Variação	G.L.
Efeitos principais	10
Interações de 2 fatores	40
Resíduo	30
Total	80

EXEMPLO 2.

Vamos tomar $1/9$ do fatorial 3^6 . Assim temos a fração 3^{6-2} .

Sejam A, B, C, D, E e F os seis fatores representados por X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 e X_6 respectivamente, e a relação de identidade escolhida foi $I = ABCDE^2 = BCD^2F^2 = AB^2C^2E^2F^2 = AD^2E^2F$, onde as duas primeiras interações são escolhidas, e as outras duas são obtidas da seguinte maneira:

$$ABCDE^2 \times BCD^2F^2 = AB^2C^2D^3E^2F^2 = AB^2C^2E^2F^2$$

e

$$ABCDE^2 \times (BCD^2F^2)^2 = ABCDE^2 \times B^2C^2DF = AB^3C^3D^2E^2F = AD^2E^2F.$$

Com base nesta relação de identidade acima, temos os seguintes conjuntos de aliases:

Efeitos principais	Alias	Interações de 2 fatores	Alias	Interações de 3 fatores	Alias
A	$AB^2C^2D^2E; ABCD^2F^2;$ $ABCEF; ADEF^2; BCDE^2;$ $AB^2C^2DF; BCEF; DEF^2$	AB	$ABC^2D^2E; AB^2CD^2F^2;$ $ACEF; AB^2DEF^2; CDE^2;$ $AC^2DF; BC^2E^2F^2; BDEF$	ABC^2	$ABD^2E; AB^2D^2F^2; AC^2EF;$ $AB^2CDEF^2; CD^2E;$ $ACDF; BE^2F^2; BC^2DEF^2$
B	$AB^2CDE^2; BC^2DF; AC^2E^2F^2;$ $ABD^2E^2F; ACDE^2; CD^2F^2;$ $ABC^2E^2F^2; AB^2D^2E^2F$	AB^2	$AC^2D^2E; ACD^2F^2; AB^2CEF;$ $ABDEF^2; BC^2D^2E;$ $ABC^2DF; CEF; BDEF^2$	AB^2C	$ACD^2E^2; AC^2D^2F^2; AB^2EF;$ $ABC^2DEF^2; BD^2E; ABDF;$ $CE^2F^2; BC^2D^2E^2F$
C	$ABC^2DE^2; BC^2D^2F^2;$ $AB^2E^2F^2; ACD^2E^2F; ABDE^2;$ $BD^2F^2; AB^2CE^2F^2; AC^2D^2E^2F$	AC	$AB^2CD^2E; ABC^2D^2F^2;$ $ABEF; AC^2DEF^2; BDE^2;$ $AB^2DF; BC^2EF; CDEF$	ABD^2	$ABC^2E; AB^2CDF^2; ACDEF;$ $AB^2D^2EF^2; CD^2E^2; AC^2F;$ $BC^2DE^2F^2; BEF^2$
D	$ABCD^2E^2; BCF^2; AB^2C^2DE^2F^2;$ $AE^2F; ABCE^2; BCD^2F^2;$ $AB^2C^2D^2E^2F^2; ADE^2F$	AC^2	$AB^2D^2E; ABD^2F^2; ABC^2EF;$ $ACEF^2; BC^2DE^2; AB^2CDF;$ $BEF; CD^2E^2F$	AB^2D	$AC^2DE; ACF^2; AB^2CD^2EF;$ $ABEF^2; BC^2E; ABC^2D^2F;$ $BCDEF; BDE^2F$
E	$ABCD; BCD^2EF^2; AB^2C^2F^2;$ $AD^2F; ABCDE; BCD^2E^2F^2;$ $AB^2C^2EF^2; AD^2GF$	AD	$AB^2C^2DE; ABCF^2$ $ABCD^2EF; AEF^2; BCE^2;$ $AB^2C^2D^2F; BCD^2EF; DE^2F;$	AB^2D^2	$AC^2E; ACD^2F^2; AB^2CDEF;$ $ABD^2EF^2; BC^2DE; ABC^2F;$ $CD^2EF; BE^2F$
F	$ABCDE^2F; BCD^2; AB^2C^2E^2;$ $AD^2E^2F^2; ABCDE^2F^2;$ $BCD^2F; AB^2C^2E^2F; AD^2E^2$	AD^2	$AB^2C^2E; ABCDF^2;$ $ABCDEF; AD^2EF^2; BCD^2E^2;$ $AB^2C^2F; BCD^2EF; EF^2$	ABE	$ABC^2D^2; AB^2CD^2EF^2;$ $ACF; AB^2DF^2; CDE; AC^2DEF;$ $BC^2EF^2; BDE^2F^2$
		AE	$AB^2C^2D^2; ABCD^2EF^2;$ $ABCF; ADF^2; BCDE;$ $AB^2C^2DEF; BCE^2F; DE^2F^2$	AB^2E	$AC^2D^2; ACD^2EF^2; AB^2CF;$ $ABDF^2; BC^2D^2E^2;$ $ABC^2DEF; CE^2F; BD^2EF$
		AE^2	$AB^2C^2D^2E^2; ABCD^2E^2F^2;$ $ABCE^2F; ADE^2F; BCD;$ $AB^2C^2DE^2F; BCF; DF^2$	ABF	$ABC^2D^2EF^2; AB^2CD^2; ACE;$ $AB^2DEF; CDE^2F^2; AC^2DF;$ $BC^2E^2F; BDE$
		AF	$AB^2C^2D^2EF^2; ABCD^2;$ $ABCE; ADEF; BCDE^2F^2;$ $AC^2DF; BCEF^2; DE$	ABF^2	$ABC^2D^2EF; AB^2CD^2F;$ $ACEF^2; AB^2DE; CDE^2F; AC^2D;$ $BC^2E^2; BDEF$
		AF^2	$AB^2C^2D^2EF; ABCD^2F;$ $ABCE^2F; ADE; BCDE^2F;$ $AB^2C^2D; BCE; DEF$	AB^2F	$AC^2D^2EF^2; ACD^2; AB^2CE;$ $ABDEF; BC^2D^2EF;$ $ABC^2DF^2; CEF^2; BD^2E^2$
		BC	$AB^2C^2DE^2; BCD^2F; AE^2F^2$ $ABCD^2E^2F; ADE^2; DF;$ $ABCD^2F^2; AB^2C^2D^2E^2F$		

continua

Interações de 2 fatores	Alias
BC ²	AB ² DE ² ; BDF; ACE ² F ² ; ABC ² D ² E ² F; AC ² DE ² ; CDF; ABE ² F ² ; AB ² CD ² E ² F
BD	AB ² CD ² E ² ; BC ² F; AC ² DE ² F ² ; ABE ² F; ACE ² ; CDF ² ; ABC ² D ² E ² F ² ; AB ² DE ² F
BD ²	AB ² CE ² ; BC ² D ² F; AC ² D ² E ² F ² ; ACD ² E ² ; CF ² ; ABC ² DE ² F ² ; AB ² E ² F
BE	AB ² CD; BC ² DE ² F; AC ² F ² ; ABD ² F; ACDE; CD ² E ² F ² ; ABC ² E ² F ² ; AB ² D ² EF
BE ²	AB ² CDE; BC ² DEF; AC ² EF ² ; ABD ² EF; ACD; CD ² EF ² ; ABC ² F ² ; AB ² D ² F
BF	AB ² CDE ² F; BC ² D; AC ² E ² ; ABD ² E ² F ² ; ACDE ² F ² ; CD ² F; ABC ² E ² F; AB ² D ² E ²
BF ²	AB ² CDE ² F; BC ² D; AC ² E ² ; AC ² E ² F; ABD ² E ² ; ACDE ² F; CD ² ; ABC ² E ² ; AB ² D ² E ² F ²
CD	ABC ² D ² E ² ; BC ² F ² AB ² DE ² F ² ; ACE ² F; ABE ² ; BDF ² ; AB ² E ² F ² ; AC ² DE ² F
CE	ABC ² D; BC ² D ² EF ² ; AB ² F ² ; ACD ² F; ABDE; BD ² E ² F ² ; AB ² CEF ² ; AC ² D ² EF
CE ²	ABC ² DE; BC ² D ² E ² F ² ; AB ² EF ² ; ACD ² EF; ABD; BD ² EF ² ; AB ² CF ² ; AC ² D ² F
CF	ABC ² DE ² F; BC ² D ² ; AB ² E ² ; ACD ² E ² F ² ; ABDE ² F ² ; BD ² F; AB ² CE ² F; AC ² D ² E ²

Interações de 2 fatores	Alias
DE ²	ABCDE; BCE ² F ² ; AB ² C ² DEF ² ; AEF; ABC; BCDEF ² ; AB ² C ² D ² F ² ; ADF
EF	ABCDF; BCD ² E; AB ² C ² ; AD ² F ² ; ABCDEF ² ; BCD ² E ² F; AB ² C ² EF; AD ² E

Como vemos pelos conjuntos de aliases acima, o experimento contendo $1/9$ do fatorial 3^6 , confunde algumas interações de fatores com outras, também de 2 fatores, como por exemplo, AD^2 com EF^2 , AE^2 com DF^2 , AF com DE , BC com DF , BD^2 com CF^2 e BF^2 com CD^2 .

Segundo LIMA (1985), para $n = 6$, o fatorial 3^5 é o número mínimo de unidades que suporta a resolução V, i.é, aqueles experimentos constituídos de frações nas quais todos os efeitos principais e interações de 2 fatores são estimáveis. Para os fatoriais 3^n , com $n \geq 7$, temos conjuntos de efeitos e interações com números muito grande de elementos. Para obtenção da fração 3^{7-1} , o conjunto de efeitos e interações constitui-se de 364 elementos. A isso se deve o pouco uso dos fatoriais fracionados dessa série.

No nosso exemplo, a relação de identidade escolhida foi $I = ABCDE^2 = BCD^2F^2 = AB^2C^2E^2F^2 = AD^2E^2F$. Tomando como base esta relação, as nove frações são constituídas da seguinte maneira:

FRAÇÃO I: Será constituída das combinações de tratamentos que satisfazem as seguintes equações:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \pmod{3} \text{ ou } ABCDE_0^2$$

$$X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 = 0 \pmod{3}, \text{ ou } BCD^2F_0^2$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 = 0 \pmod{3}, \text{ ou } (AB^2C^2E^2F^2)_0$$

$$X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 = 0 \pmod{3}, \text{ ou } (AD^2E^2F)_0$$

onde, as duas últimas equações são obtidas através de operações sobre as duas primeiras da seguinte maneira:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \pmod{3}$$

$$\underline{X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 = 0 \pmod{3}}$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 2X_5 + 2X_6 = 0 \pmod{3} \Rightarrow X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 = 0 \pmod{3}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \pmod{3}$$

$$\underline{2(X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6) = 2 \times 0 \pmod{3}}$$

$$X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 5X_4 + 2X_5 + 4X_6 = 0 \pmod{3} \Rightarrow X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 = 0 \pmod{3}$$

FRAÇÃO II: Será constituída das combinações de tratamentos que satisfazem as equações:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \pmod{3}, \text{ ou } ABCDE_0^2$$

$$X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 = 1 \pmod{3}, \text{ ou } BCD^2F_1^2$$

e as outras duas equações são:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \pmod{3}$$

$$X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 = 1 \pmod{3}$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 2X_5 + 2X_6 = 1 \Rightarrow X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 = 1 \pmod{3}, \text{ ou}$$

$$AB^2C^2E^2F_1^2$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \pmod{3}$$

$$2(X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6) = 2 \pmod{3}$$

$$X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 5X_4 + 2X_5 + 4X_6 = 2 \Rightarrow X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 = 2 \pmod{3}, \text{ ou}$$

$$AD^2E^2F_2$$

FRAÇÃO III: Satisfaz as equações obtidas como nas frações anteriores:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \pmod{3}, \text{ ou } ABCDE_0^2$$

$$X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 = 2 \pmod{3}, \text{ ou } BCD^2F_2^2$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 = 2 \pmod{3}, \text{ ou } AB^2C^2E^2F_2^2$$

$$X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 = 1 \pmod{3}, \text{ ou } AD^2E^2F_1$$

FRAÇÃO IV:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 1 \pmod{3}, \text{ ou } ABCDE_1^2$$

$$X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 = 0 \pmod{3}, \text{ ou } BCD^2F_0^2$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 = 1 \pmod{3}, \text{ ou } AB^2C^2E^2F_1^2$$

$$X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 = 1 \pmod{3}, \text{ ou } AD^2E^2F_1$$

FRAÇÃO V:

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 &= 1 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad ABCDE_1^2 \\
X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 &= 1 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad BCD^2F_1^2 \\
X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 &= 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AB^2C^2E^2F_2^2 \\
X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 &= 0 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AD^2E^2F_0
\end{aligned}$$

FRAÇÃO VI:

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 &= 1 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad ABCDE_1^2 \\
X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 &= 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad BCD^2F_2^2 \\
X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 &= 0 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AB^2C^2E^2F_0^2 \\
X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 &= 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AD^2E^2F_2
\end{aligned}$$

FRAÇÃO VII

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 &= 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad ABCDE_2^2 \\
X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 &= 0 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad BCD^2F_0^2 \\
X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 &= 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AB^2C^2E^2F_2^2 \\
X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 &= 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AD^2E^2F_2
\end{aligned}$$

FRAÇÃO VIII

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad ABCDE_2^2$$

$$X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 = 1 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad BCD^2F_1^2$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 = 0 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AB^2C^2E^2F_0^2$$

$$X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 = 1 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AD^2E^2F_{11}$$

FRAÇÃO IX:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad ABCDE_2^2$$

$$X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_6 = 2 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad BCD^2F_2^2$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 + 2X_6 = 1 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AB^2C^2E^2F_1^2$$

$$X_1 + 2X_4 + 2X_5 + X_6 = 0 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AD^2E^2F_0$$

Como vimos do quadro das aliases temos 6 pares de interações de 2 fatores confundind s. Se fosse considerada uma das duas interações como insignificantes, teríamos o seguinte esboço da análise de variância.

C. Variação	G.L.
Efeitos principais	12
Interações de 2 fatores	48 (6 interações confundidas)
Resíduo	20
Total	80

3.1.5.2.1. Fatoriais fracionados da série 3^n em blocos ao acaso

No caso dos fatoriais fracionados da série 3^n , como vamos trabalhar necessariamente com $n \geq 5$, os experimentos são compostos por um número bastante elevado de combinações de tratamentos, o que nos leva a lançar mão de delineamentos em blocos ao acaso com confundimento.

Para exemplificar vamos tomar $1/3$ do fatorial 3^5 .

EXEMPLO: Seja a fração 3^{5-1} , sendo colocada em 3 blocos de 3^3 combinações de tratamentos. Para isto, precisamos confundir apenas uma interação com blocos, e vamos escolher o experimento dado pela relação de Identidade I = $AB^2CDE^2_0$, ou seja, aquele em que a soma dos números modulares das combinações de tratamentos é igual a 0 (mod. 3).

A interação escolhida para confundir com blocos é BC^2D , pois as suas generalizadas com aquelas interações da relação de identidade, são interações de 3 ou mais fatores, conforme pode ser visto no

quadro de aliases, isto é,

$$BC^2D = AD^2E^2 = ABC^2E^2.$$

Os 3 blocos são os seguintes:

Bloco I					Bloco II					Bloco III				
BC^2D_0					BC^2D_1					BC^2D_2				
$(AD^2E_0^2 ; ABC^2E_0^2)$					$(AD^2E_1^2 ; ABC^2E_2^2)$					$(AD^2E_2^2 ; ABC^2E_1^2)$				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2	2	0	0	0
0	1	1	0	0	1	2	1	0	0	2	0	1	0	0
0	2	2	0	0	1	0	2	0	0	2	1	2	0	0
1	2	0	1	0	2	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	2	1	1	1	0	0	2	1	1	0
1	1	2	1	0	2	2	2	1	0	0	0	2	1	0
2	1	0	2	0	0	2	0	2	0	1	0	0	2	0
2	2	1	2	0	0	0	1	2	0	1	1	1	2	0
2	0	2	2	0	0	1	2	2	0	1	2	2	2	0
1	0	0	0	1	2	1	0	0	1	0	2	0	0	1
1	1	1	0	1	2	2	1	0	1	0	0	1	0	1
1	2	2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2	0	1
2	2	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
2	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1	1	1
2	1	2	1	1	0	2	2	1	1	1	0	2	1	1
0	1	0	2	1	1	2	0	2	1	2	0	0	2	1
0	2	1	2	1	1	0	1	2	1	2	1	1	2	1
0	0	2	2	1	1	1	2	2	1	2	2	2	2	1
2	0	0	0	2	0	1	0	0	2	1	2	0	0	2
2	1	1	0	2	0	2	1	0	2	1	0	1	0	2
2	2	2	0	2	0	0	2	0	2	1	1	2	0	2
0	2	0	1	2	1	0	0	1	2	2	1	0	1	2
0	0	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	1	1	2
0	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2	0	2	1	2
1	1	0	2	2	2	2	0	2	2	0	0	0	2	2
1	2	1	2	2	2	0	1	2	2	0	1	1	2	2
1	0	2	2	2	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2

3.1.5.2.2. Observações

a. A construção dos blocos na série 3^n pode ser analoga aquela vista para a série 2^n , ou seja, nos blocos I, II e III estão respectivamente, as combinações de tratamentos com 0, 1, 2 (mod. 3) letras em comum com BC^2D_0 , BC^2D_1 e BC^2D_2 , respectivamente. Ou ainda, podemos construir o primeiro bloco procurando no experimento escolhido as combinações de tratamentos que satisfazem a BC^2D_0 , e colocando-as na "ordem padrão". Para construirmos o bloco II, selecionamos uma combinação de tratamento que satisfaz a BC^2D_1 , e verificamos qual é o número modular que somado a primeira combinação de tratamento do bloco I dá a combinação de tratamento do bloco II. Por exemplo ab, nos dá o número modular 11000. Para construirmos o bloco III, selecionamos uma combinação de tratamento que satisfaz a BC^2D_2 , i.é., a^2b^2 , e verificamos qual é o número modular que somado a primeira combinação de tratamento do bloco I, dá a combinação de tratamento do bloco III, no caso, o número modular é 22000.

b. O índice da interação a ser confundida com blocos, como também o índice da relação de identidade é pré-determinado, enquanto que os índices das interações generalizadas são determinados da seguinte maneira:

Seja a interação $Y = BC^2D$ para ser confundida com blocos, e a relação de identidade escolhida foi $I = AB^2CDE_0^2$, então temos:

b.1) Para o bloco I

$$Y \times I = BC^2D_0 \times AB^2CDE_0^2, \quad \text{ou}$$

$$X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \quad (\text{mod. } 3)$$

$$\underline{X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \quad (\text{mod. } 3)}$$

$$X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4 + 2X_5 = 0 \Rightarrow X_1 + 2X_4 + 2X_5 = 0 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou}$$

seja: $AD^2E_0^2$

e
$$Y \times I^2 = BC^2D_0 \times (AB^2CDE_0^2)^2, \quad \text{ou}$$

$$X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \quad (\text{mod. } 3) \Rightarrow X_2 + 2X_3 + X_4 = 0$$

$$\Rightarrow 2(X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5) = 2 \times 0 \quad (\text{mod. } 3) \Rightarrow \underline{2X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 4X_5 = 0}$$

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 + 0X_4 + X_5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_5) = 2 \times 0 \Rightarrow X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_5 = 0 \quad (\text{mod. } 3),$$

ou seja: $ABC^2E_0^2$

b.2) Para o bloco II:

$$Y \times I = BC^2D_1 \times AB^2CDE_0^2, \quad \text{ou}$$

$$X_2 + 2X_3 + X_4 = 1 \quad (\text{mod. } 3)$$

$$\underline{X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \quad (\text{mod. } 3)}$$

$$X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 2X_4 + 2X_5 = 1 \Rightarrow X_1 + 2X_4 + 2X_5 = 1 \quad (\text{mod. } 3), \quad \text{ou} \quad AD^2E_1^2$$

$$Y \times I^2 = BC^2D_1 \times (AB^2CDE_0^2)^2, \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} X_2+2X_3+X_4 &= 1 \pmod{3} \Rightarrow X_2+2X_3+X_4 = 1 \\ 2(X_1+2X_2+X_3+X_4+2X_5) &= 0 \pmod{3} \Rightarrow \underline{2X_1+X_2+2X_3+2X_4+X_5 = 0} \\ 2X_1+2X_2+X_3+0X_4+X_5 &= 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2(2X_1+2X_2+X_3+X_5) = 2 \times 1 \Rightarrow X_1+X_2+2X_3+2X_5 = 2 \pmod{3}, \text{ ou } ABC^2E_2^2.$$

b.3) Para o bloco III:

$$Y \times I = BC^2D_2 \times AB^2CDE_0^2, \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} X_2+2X_3+X_4 &= 2 \pmod{3} \\ \underline{X_1+2X_2+X_3+X_4+2X_5} &= 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

$$X_1+0X_2+0X_3+2X_4+2X_5 = 2 \Rightarrow X_1+2X_4+2X_5 = 2 \pmod{3}, \text{ ou } AD^2E_2^2.$$

$$Y \times I^2 = BC^2D_2 + (AB^2CDE_0^2)^2, \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} X_2+2X_3+X_4 &= 2 \pmod{3} \Rightarrow X_2+2X_3+X_4 = 2 \pmod{3} \\ 2(X_1+2X_2+X_3+X_4+2X_5) &= 2 \times 0 \pmod{3} \Rightarrow \underline{X_1+X_2+2X_3+2X_4+X_5 = 0 \pmod{3}} \\ 2X_1+2X_2+X_3+0X_4+X_5 &= 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2(2X_1+2X_2+X_3+X_5) = 2 \times 2 \Rightarrow X_1+X_2+2X_3+2X_5 = 1 \pmod{3}, \quad \text{ou}$$

$$ABC^2E_1^2.$$

O esboço do quadro da análise de variância para este experimento (3^{5-1}) em 3 blocos é:

C. Variação	G.L.
Blocos	2
Efeitos principais	10
Interações de 2 fatores	40
Resíduo	28
Total	80

3.1.6. Método prático de Yates

YATES (1937) desenvolveu um método geral para calcular os estimadores dos efeitos principais e das interações, e suas correspondentes somas de quadrados, para um ensaio fatorial 2^n , sem escrever especificamente suas expressões algébricas. Este método também pode ser generalizado para fatoriais com mais de 2 níveis por fator.

Para aplicar este método devemos proceder da seguinte maneira:

a. As combinações de tratamentos são colocadas em uma "ordem padrão", ou seja, cada fator é introduzido por vez e seguido por todas combinações desse fator com os outros. A seguir substituímos essas combinações de tratamentos pelas suas respectivas produções.

b. Os quadros consistem de colunas numeradas de 1 até o total de fatores.

c. A primeira parte da coluna (1) é formada pela soma dos 2^{n-1} pares de números da coluna produção, enquanto a segunda parte é formada pela subtração dos mesmos 2^{n-1} pares, em cada caso o número superior é subtraído do inferior.

d. A coluna (2) é formada da mesma maneira, tomando como base a coluna (1). Este processo é repetido até a coluna n.

e. Na coluna (n) temos o total, e os totais dos efeitos principais e das interações, os quais estão identificados na coluna (n+1).

f. Na coluna (n+2) temos a correção, e as SQ'^S de todos efeitos principais e interações. Para chegarmos a estas SQ'^S , basta elevarmos ao quadrado os números da coluna (n) e dividirmos por $r2^n$.

Exemplo: Vamos tomar como exemplo o fatorial 2^3 , para enfocar o método prático de YATES. Então temos:

TRATAMENTOS	(1)	(2)	(3)	IDENTIFICAÇÃO (4)
(1)	(1)+a	(1)+a+b+ab	(1)+a+b+ab+c+ac+bc+abc	G
a	b+ab	c+ac+bc+abc	a-(1)+ab-b+ac-c+abc-bc	A
b	c+ac	a-(1)+ab-b	b+ab-(1)-a+bc+abc-c-ac	B
ab	bc+abc	ac-c+abc-bc	ab-b-a+(1)+abc-bc-ac+c	AB
c	a-(1)	b+ab-(1)-a	c+ac+bc+abc-(1)-a-b-ab	C
ac	ab-b	bc+abc-c-ac	ac-c+abc-bc-a+1-ab+b	AC
bc	ac-c	ab-b-a+(1)	bc+abc-c-ac-b-ab+(1)+a	BC
abc	abc-bc	abc-bc-ac+c	abc-bc-ac+c-ab+b+a-(1)	ABC

3.2. Material

Os dados foram gerados através do processo de simulação, tomando como exemplo o fatorial 2^6 , obedecendo a seguinte metodologia:

a. O modelo matemático usado foi o seguinte:

$$\begin{aligned}
 Y_{ijklmn} = & \mu + A_i + B_j + AB_{ij} + C_k + AC_{ik} + BC_{jk} + ABC_{ijk} + D_\ell + AD_{i\ell} + BD_{j\ell} + ABD_{ij\ell} + CD_{k\ell} + \\
 & + ACD_{ik\ell} + BCD_{j\ell} + ABCD_{ijkl} + E_m + AE_{im} + BE_{jm} + ABE_{ijm} + CE_{km} + ACE_{ikm} + \\
 & + BCE_{jkm} + ABCE_{ijkm} + DE_{\ell m} + ADE_{i\ell m} + BDE_{j\ell m} + ABDE_{ij\ell m} + CED_{k\ell m} + \\
 & + ACDE_{ik\ell m} + BCDE_{jk\ell m} + ABCDE_{ijklm} + AF_{in} + BF_{jn} + ABF_{ijn} + CF_{kn} + ACF_{ikn} + \\
 & + BCF_{jkn} + ABCF_{ijkn} + DF_{\ell n} + ADF_{i\ell n} + BDF_{j\ell n} + CDF_{k\ell n} + ACDF_{ik\ell n} + \\
 & + BCDF_{jk\ell n} + ABCDF_{ijk\ell n} + EF_{mn} + AEF_{imn} + BEF_{jmn} + ABEF_{ijmn} + CEF_{kmn} + \\
 & + ACEF_{ikmn} + BCEF_{jkmn} + ABCEF_{ijk\ell mn} + DEF_{\ell mn} + ADEF_{i\ell mn} + BDEF_{j\ell mn} + \\
 & + ABDEF_{ij\ell mn} + CDEF_{k\ell mn} + ACDEF_{ik\ell mn} + BCDEF_{jk\ell mn} + \\
 & + ABCDEF_{ijklmn} + e_{ijklmn}.
 \end{aligned}$$

As restrições do modelo foram:

$$a.1) \sum_i AB_{ij} = \sum_j AB_{ij} = \sum_i AC_{ik} = \dots = \sum_n EF_{mn} = 0$$

$$a.2) \sum_{ij} ABC_{ijk} = \sum_{ij} ABC_{ijk} = \dots = \sum_{mn} DEF_{\ell mn} = 0$$

$$a.3) \sum_{ijk} ABCD_{ijk\ell} = \sum_{ik\ell} ABCD_{ijk\ell} = \dots = 0$$

$$a.4) \sum_{ijk\ell} ABCDE_{ijk\ell m} = \sum_{ik\ell m} ABCDE_{ijk\ell m} = \dots = 0$$

$$a.5) \sum_{ijklmn} ABCDEF_{ijklmn} = \sum_{iklmn} ABCDE_{ijklmn} = \dots = 0$$

onde, $i = j = k = l = m = n = 1, 2$

b. A média geral, os efeitos principais e as interações foram fixadas, tendo os seguintes valores:

$$\mu = 100$$

$$A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = E_1 = F_1 = 0$$

$$A_2 = 90; B_2 = 80; C_2 = 75; D_2 = 70; E_2 = 65; F_2 = 60$$

$$A_1 B_1 = A_1 C_1 = A_1 D_1 = A_1 E_1 = A_1 F_1 = B_1 C_1 = B_1 D_1 = B_1 E_1 = B_1 F_1 = C_1 D_1 = C_1 E_1 = C_1 F_1 = D_1 E_1 = D_1 F_1 = E_1 F_1 = 6$$

$$A_1 B_2 = A_1 C_2 = A_1 D_2 = A_1 E_2 = A_1 F_2 = B_1 C_2 = B_1 D_2 = B_1 E_2 = B_1 F_2 = C_1 D_2 = C_1 E_2 = C_1 F_2 = D_1 E_2 = D_1 F_2 = E_1 F_2 = -6$$

$$A_2 B_1 = A_2 C_1 = A_2 D_1 = A_2 E_1 = A_2 F_1 = B_2 C_1 = B_2 D_1 = B_2 E_1 = B_2 F_1 = C_2 D_1 = C_2 E_1 = C_2 F_1 = D_2 E_1 = D_2 F_1 = E_2 F_1 = -4$$

$$A_2 B_2 = A_2 C_2 = A_2 D_2 = A_2 E_2 = A_2 F_2 = B_2 C_2 = B_2 D_2 = B_2 E_2 = B_2 F_2 = C_2 D_2 = C_2 E_2 = C_2 F_2 = D_2 E_2 = D_2 F_2 = E_2 F_2 = 4$$

$$A_1 B_1 C_k = A_1 B_1 D_\ell = A_1 B_1 E_m = A_1 B_1 F_n = A_1 C_1 D_\ell = A_1 C_1 E_m = A_1 C_1 F_n = A_1 D_1 E_m = A_1 D_1 F_n = A_1 E_1 F_n = \\ = B_1 C_1 D_\ell = B_1 C_1 E_m = B_1 C_1 F_n = B_1 D_1 E_m = B_1 D_1 F_n = B_1 E_1 F_n = C_1 D_1 E_m = C_1 D_1 F_n = C_1 E_1 F_n = D_1 E_1 F_n = 1,0$$

$$A_1 B_2 C_k = A_1 B_2 D_\ell = A_1 B_2 E_m = A_1 B_2 F_n = A_1 C_2 D_\ell = A_1 C_2 E_m = A_1 C_2 F_n = A_1 D_2 E_m = A_1 D_2 F_n = A_1 E_2 F_n = \\ = B_1 C_2 D_\ell = B_1 C_2 E_m = B_1 C_2 F_n = B_1 D_2 E_m = B_1 D_2 F_n = B_1 E_2 F_n = C_2 D_2 E_m = C_2 D_2 F_n = C_2 E_2 F_n = D_2 E_2 F_n = -1,0$$

$$A_2 B_1 C_k = A_2 B_1 D_\ell = A_2 B_1 E_m = A_2 B_1 F_n = A_2 C_1 D_\ell = A_2 C_1 E_m = A_2 C_1 F_n = A_2 D_1 E_m = A_2 D_1 F_n = A_2 E_1 F_n = \\ = B_2 C_1 D_\ell = B_2 C_1 E_m = B_2 C_1 F_n = B_2 D_1 E_m = B_2 D_1 F_n = B_2 E_1 F_n = C_2 D_1 E_m = C_2 D_1 F_n = C_2 E_1 F_n = D_2 E_1 F_n = -0,5$$

$$A_2 B_2 C_k = A_2 B_2 D_\ell = A_2 B_2 E_m = A_2 B_2 F_n = A_2 C_2 D_\ell = A_2 C_2 E_m = A_2 C_2 F_n = A_2 D_2 E_m = A_2 D_2 F_n = A_2 E_2 F_n = \\ = B_2 C_2 D_\ell = B_2 C_2 E_m = B_2 C_2 F_n = B_2 D_2 E_m = B_2 D_2 F_n = B_2 E_2 F_n = C_2 D_2 E_m = C_2 D_2 F_n = C_2 E_2 F_n = D_2 E_2 F_n = 0,5$$

$$A_1 B_1 C_k D_\ell = A_1 B_1 C_k E_m = A_1 B_1 C_k F_n = A_1 B_1 D_\ell E_m = A_1 B_1 D_\ell F_n = A_1 B_1 E_m F_n = A_1 C_1 D_\ell E_m = A_1 C_1 D_\ell F_n = \\ = A_1 C_1 E_m F_n = A_1 D_1 E_m F_n = B_1 C_1 D_\ell E_m = B_1 C_1 D_\ell F_n = B_1 C_1 E_m F_n = B_1 D_1 E_m F_n = C_1 D_1 E_m F_n = 0,5$$

$$A_1 B_2 C_k D_\ell = A_1 B_2 C_k E_m = A_1 B_2 C_k F_n = A_1 B_2 D_\ell E_m = A_1 B_2 D_\ell F_n = A_1 B_2 E_m F_n = A_1 C_2 D_\ell E_m = A_1 C_2 D_\ell F_n = \\ = A_1 C_2 E_m F_n = A_1 D_2 E_m F_n = B_1 C_2 D_\ell E_m = B_1 C_2 D_\ell F_n = B_1 C_2 E_m F_n = B_1 D_2 E_m F_n = C_1 D_2 E_m F_n = -0,5$$

$$A_2 B_1 C_k D_\ell = A_2 B_1 C_k E_m = A_2 B_1 C_k F_n = A_2 B_1 D_\ell E_m = A_2 B_1 D_\ell F_n = A_2 B_1 E_m F_n = A_2 C_1 D_\ell E_m = A_2 C_1 D_\ell F_n = \\ = A_2 C_1 E_m F_n = A_2 D_1 E_m F_n = B_2 C_1 D_\ell E_m = B_2 C_1 D_\ell F_n = B_2 C_1 E_m F_n = B_2 D_1 E_m F_n = C_2 D_1 E_m F_n = -0,5$$

$$A_2 B_2 C_k D_\ell = A_2 B_2 C_k E_m = A_2 B_2 C_k F_n = A_2 B_2 D_\ell E_m = A_2 B_2 D_\ell F_n = A_2 B_2 E_m F_n = A_2 C_2 D_\ell E_m = A_2 C_2 D_\ell F_n = \\ = A_2 C_2 E_m F_n = A_2 D_2 E_m F_n = B_2 C_2 D_\ell E_m = B_2 C_2 D_\ell F_n = B_2 C_2 E_m F_n = B_2 D_2 E_m F_n = C_2 D_2 E_m F_n = 0,5$$

$$A_1 B_1 C_k D_\ell E_m = A_1 B_1 C_k D_\ell F_n = A_1 B_1 C_k E_m F_n = A_1 B_1 D_\ell E_m F_n = A_1 C_1 D_\ell E_m F_n = B_1 C_1 D_\ell E_m F_n = 0,2$$

$$A_1 B_2 C_k D_\ell E_m = A_1 B_2 C_k D_\ell F_n = A_1 B_2 C_k E_m F_n = A_1 B_2 D_\ell E_m F_n = A_1 C_2 D_\ell E_m F_n = B_1 C_2 D_\ell E_m F_n = -0,2$$

$$A_2 B_1 C_k D_\ell E_m = A_2 B_1 C_k D_\ell F_n = A_2 B_1 C_k E_m F_n = A_2 B_1 D_\ell E_m F_n = A_2 C_1 D_\ell E_m F_n = B_2 C_1 D_\ell E_m F_n = -0,2$$

$$A_2 B_2 C_k D_\ell E_m = A_2 B_2 C_k D_\ell F_n = A_2 B_2 C_k E_m F_n = A_2 B_2 D_\ell E_m F_n = A_2 C_2 D_\ell E_m F_n = B_2 C_2 D_\ell E_m F_n = 0,2$$

$$A_1 B_1 C_k D_\ell E_m F_n = 0,2; A_1 B_2 C_k D_\ell E_m F_n = -0,2; A_2 B_1 C_k D_\ell E_m F_n = -0,2; A_2 B_2 C_k D_\ell E_m F_n = 0,2$$

c) Os erros foram tirados de uma tabela com distribuição

normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, então temos:

$e_{111111} = -0,288$	$e_{111121} = 1,620$	$e_{111112} = 1,045$	$e_{111122} = -0,538$
$e_{211111} = 1,090$	$e_{211121} = -1,041$	$e_{211112} = -0,528$	$e_{211122} = -1,094$
$e_{121111} = 0,785$	$e_{121121} = -1,698$	$e_{121112} = -1,433$	$e_{121122} = 1,298$

$e_{221111} = 0,194$	$e_{221121} = 1,047$	$e_{221112} = 2,923$	$e_{221122} = -1,190$
$e_{112111} = 1,579$	$e_{112121} = 0,032$	$e_{112112} = -1,190$	$e_{112122} = -0,963$
$e_{212111} = -0,258$	$e_{212121} = 0,151$	$e_{212112} = 0,192$	$e_{212122} = 1,192$
$e_{122111} = 0,187$	$e_{122121} = 0,290$	$e_{122112} = 0,942$	$e_{122122} = 0,412$
$e_{222111} = -0,457$	$e_{222121} = 0,873$	$e_{222112} = 1,216$	$e_{222122} = 0,161$
$e_{111211} = 0,448$	$e_{111221} = -0,289$	$e_{111212} = 1,705$	$e_{111222} = -0,631$
$e_{211211} = 0,960$	$e_{211221} = 1,119$	$e_{211212} = -0,145$	$e_{211222} = 0,748$
$e_{121211} = -0,491$	$e_{121221} = -0,792$	$e_{121212} = -0,066$	$e_{121222} = -0,218$
$e_{221211} = 0,219$	$e_{221221} = 0,063$	$e_{221212} = 1,810$	$e_{221222} = -1,530$
$e_{112211} = -0,169$	$e_{112221} = 0,484$	$e_{112212} = -0,124$	$e_{112222} = -1,983$
$e_{212211} = 1,090$	$e_{212221} = 0,427$	$e_{212212} = 0,484$	$e_{212222} = 0,779$
$e_{122211} = 1,239$	$e_{122221} = 0,084$	$e_{122212} = 1,458$	$e_{122222} = 0,313$
$e_{222211} = -0,146$	$e_{222221} = -0,086$	$e_{222212} = 0,022$	$e_{222222} = 0,481$

d) Variamos o desvio padrão dos erros e assim estruturamos 4 experimentos, isto é:

Experimento 1: Com erros normais com $\mu = 0$ e $\sigma = 5$

Experimento 2: Com erros normais com $\mu = 0$ e $\sigma = 10$

Experimento 3: Com erros normais com $\mu = 0$ e $\sigma = 15$

Experimento 4: Com erros normais com $\mu = 0$ e $\sigma = 20$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram realizadas análises de variância para o fatorial completo com e sem confundimento como também para o fatorial fracionado para os 4 casos estudados.

Para isso foi utilizado o método prático de Yates, para calcularmos as SQ's referentes a esses experimentos.

Passaremos a análise e comentar os resultados desses 4 experimentos. Para estes experimentos vamos considerar que as interações de 3 ou mais fatores são insignificantes, e assim as mesmas compõem o resíduo.

4.1. EXPERIMENTO 1

A partir do Quadro 1 (ver anexo 1), obteve-se o seguinte quadro de análise de variância para o fatorial completo:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	21	491.328,9	-	-
A	1	133.099,11	133.099,11	5.016,54**
B	1	93.177,563	93.177,563	3.511,89**
C	1	75.218,548	75.218,548	2.835,01**
D	1	59.755,191	59.755,191	2.252,19**
E	1	44.421,358	44.421,358	1.674,25**
F	1	39.321,898	39.321,898	1.482,05**
AB	1	9.079,2312	9.079,2312	342,20**
AC	1	5.068,3721	5.068,3721	191,03**
AD	1	3.345,321	3.345,321	126,09**
AE	1	2.210,9979	2.210,9979	83,33**
AF	1	1.767,3616	1.767,3616	66,61**
BC	1	5.917,4556	5.917,4556	223,03**
BD	1	2.658,8203	2.658,8203	100,21**
BE	1	1.946,4641	1.946,4641	73,36**
BF	1	2.334,0977	2.334,0977	87,97**
CD	1	3.085,9414	3.085,9414	116,31**
CE	1	2.596,5394	2.596,5394	97,86**
CF	1	1.543,3112	1.543,3112	58,17**
DE	1	1.898,5628	1.898,5628	71,56**
DF	1	1.630,0397	1.630,0397	61,44**
EF	1	1.252,7175	1.252,7175	47,22**
Resíduo	42	1.114,3453	26,532031	-
Total	63	492.443,25		

Os valores de F por interpolação harmônica são:

$$F_{5\%}(1,42) = 4,07$$

$$F_{1\%}(1,42) = 7,28$$

Como vemos tanto os efeitos principais como as interações de 2 fatores foram altamente significativos tanto ao nível de 5% como ao nível de 1%.

Agora vamos confundir com efeitos de blocos a interação de ordem mais elevada, ou seja ABCDEF, assim temos os seguintes blocos.

Bloco I		Bloco II	
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 0 \pmod{2}$		$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 1 \pmod{2}$	
(1) = 227,46	af = 258,86	a = 246,95	f = 234,125
ab = 289,07	bf = 240,335	b = 231,425	abf = 342,715
ac = 272,71	cf = 239,65	c = 233,495	acf = 314,96
bc = 260,935	abcf = 422,48	abc = 354,115	bcf = 304,71
ad = 271,8	df = 254,925	d = 228,64	adf = 306,275
bd = 250,545	abdf = 410,65	abd = 342,695	bdf = 292,67
cd = 250,255	acdf = 389,92	acd = 332,98	cdf = 290,48
abcd = 437,17	bcdf = 380,79	bcd = 319,695	abcdf = 518,01
ae = 258,295	ef = 245,21	e = 236,000	aef = 298,03
be = 241,01	abef = 387,15	abe = 338,335	bef = 295,99
ce = 247,76	acef = 384,96	ace = 319,755	cef = 282,785
abce = 428,765	bcef = 367,06	bce = 306,45	abcef = 505,205
de = 246,955	adef = 375,74	ade = 317,595	def = 285,245
abde = 409,915	bdef = 356,91	bde = 294,04	abdef = 481,95
acde = 397,635	cdef = 346,185	cde = 298,52	acdef = 479,395
bcde = 381,92	abcdef = 631,305	abcde = 528,47	bcdef = 463,065
10.564,33		10.624,77	

Como a interação ABCDEF está confundida, então a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABCDEF}} = 57,078025$, e a $SQ_{\text{Res c/conf}} = SQ_{\text{Res s/conf}} - SQ_{\text{ABCDEF}}$, como também se perde 1 g.l. no resíduo. O quadro da análise de variância será:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	1	57,078025	-	-
Tratamentos	21	491.328,9	-	-
A	1	133.099,11	133.099,11	5.161,48**
B	1	93.177,563	93.177,563	3.613,35**
C	1	75.218,548	75.218,548	2.916,92**
D	1	59.755,191	59.755,191	2.317,26**
E	1	44.421,358	44.421,358	1.722,62**
F	1	39.321,898	39.321,898	1.524,87**
AB	1	9.079,2312	9.079,2312	352,08**
AC	1	5.068,3721	5.068,3721	196,55**
AD	1	3.345,321	3.345,321	129,73**
AE	1	2.210,9979	2.210,9979	85,74**
AF	1	1.767,3616	1.767,3616	68,54**
BC	1	5.917,4556	5.917,4556	229,47**
BD	1	2.658,8203	2.658,8203	103,11**
BE	1	1.946,4641	1.946,4641	75,48**
BF	1	2.334,0977	2.334,0977	90,51**
CD	1	3.085,9414	3.085,9414	119,67**
CE	1	2.596,5394	2.596,5394	100,69**
CF	1	1.543,3112	1.543,3112	59,85**
DE	1	1.898,5628	1.898,5628	73,62**
DF	1	1.630,0397	1.630,0397	63,21**
EF	1	1.252,7175	1.252,7175	48,58**
Resíduo	41	1.057,2673	25,787007	-
Total	63	492.443,25	-	-

Os valores de F por interpolação harmônica se
rão:

$$F_{5\%} (1,41) = 4,074$$

$$F_{1\%} (1,41) = 7,29$$

Podemos observar que:

a. Os efeitos principais e as interações de 2 fatores continuam sendo altamente significativos.

b. O QM do resíduo com confundimento fica menor do que o QM do resíduo sem confundimento, esta diferença é de 0,739779.

c. Esta diferença entre os QM's será maior ou menor devido a escolha da interação a ser confundida, por exemplo, se escolhessemos a interação ABEF, o Q.M. do resíduo seria 21,433199. Mas, se fosse escolhida a interação ACDF, o QM do resíduo seria 27,175372, como vemos o mesmo aumentou em relação ao QM do resíduo do fatorial completo.

d. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{n_b QM_{\text{Blocos}} + n_e QM_{\text{erro}}}{(n_b + n_e) QM_{\text{erro}}}, \text{ onde}$$

$$n_b = 1$$

$$n_e = 63 - 1 = 62, \text{ então:}$$

$$\hat{E} = \frac{1 \times 57,078025 + 62 \times 25,787007}{63 \times 25,787007} = \frac{1.655,8725}{1.624,5814} \rightarrow \hat{E} = 1,019$$

e. Se a interação escolhida fosse ABEF, a eficiência seria:

$$QM_{\text{Blocos}} = 235,58413$$

$$QM_{\text{erro}} = \frac{878,76117}{41} = 21,433199$$

$$\hat{E} = \frac{1 \times 235,58413 + 62 \times 21,433199}{63 \times 21,433199} = \frac{1.564,4425}{1.350,2915} = \hat{E} = 1,159$$

Comparando as duas eficiências acima, vemos que a interação ABEF quando confundida, nos dá uma eficiência maior do que a interação ABCDEF.

Agora vamos confundir as interações ABDE e ACDF, como sabemos a interação generalizada BCEF também estará confundida, então temos os seguintes blocos:

BLOCO I

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \pmod{2}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 0 \pmod{2}$$

(1) = 227,46	abf = 342,715
abc = 354,115	cf = 239,65
ad = 271,8	bdf = 292,67
bcd = 319,695	acdf = 389,92
be = 241,01	aef = 298,03
ace = 319,755	bcef = 367,06
abde = 409,915	def = 285,245
cde = 298,52	abcdef = 631,305

5.288,865

BLOCO II

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \pmod{2}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 1 \pmod{2}$$

ab = 289,07	f = 234,125
c = 233,495	abcf = 422,48
bd = 250,545	adf = 306,275
acd = 332,98	bcdf = 380,79
ae = 258,295	bef = 295,99
bce = 306,45	acef = 384,96
de = 246,955	abdef = 481,95
abcde = 528,47	cdef = 346,185

5.299,015

BLOCO III

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \pmod{2}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 0 \pmod{2}$$

b = 231,425	af = 258,86
ac = 272,71	bcf = 304,71
abd = 342,695	df = 254,925
cd = 250,255	abcdf = 518,01
e = 236,000	abef = 387,15
abce = 428,765	cef = 282,785
ade = 317,595	bdef = 356,91
bcde = 381,92	acdef = 479,395

5.304,11

BLOCO IV

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \pmod{2}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 1 \pmod{2}$$

a = 246,95	bf = 240,335
bc = 260,935	acf = 314,96
d = 228,64	abdf = 410,65
abcd = 437,17	cdf = 290,48
abe = 338,335	ef = 245,21
ce = 247,76	abcef = 505,205
bde = 294,04	adef = 375,74
acde = 397,635	bcdef = 463,065

5.297,11

Como as interações ABDE, ACDF e BCEF estão confundidas então a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{ABDE} + SQ_{ACDF} + SQ_{BCEF} = 2,7805563 + 0,155039 + 4,5956641 \rightarrow SQ_{\text{Blocos}} = 7,5312594$, então

$$SQ_{\text{Res c/conf}} = SQ_{\text{Res s/conf}} - SQ_{\text{Blocos}} = 1.114,3453 - 7,5312594 \rightarrow SQ_{\text{Res c/conf}} = 1.106,984$$

Assim, temos o quadro da análise de variância.

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	3	7,5312594	2,5104198	-
Tratamentos	21	491.328,9	-	-
A	1	133.099,11	133.099,11	4.689,92**
B	1	93.177,563	93.177,563	3.282,23**
C	1	75.218,548	75.218,548	2.650,42**
D	1	59.755,191	59.755,191	2.105,55**
E	1	44.421,358	44.421,358	1.565,24**
F	1	39.321,898	39.321,898	1.385,56**
AB	1	9.079,2312	9.079,2312	319,92**
AC	1	5.068,3721	5.068,3721	178,59**
AD	1	3.345,321	3.345,321	117,88**
AE	1	2.210,9979	2.210,9979	77,91**
AF	1	1.767,3616	1.767,3616	62,27**
BC	1	5.917,4556	5.917,4556	208,51**
BD	1	2.658,8203	2.658,8203	93,69**
BE	1	1.946,4641	1.946,4641	68,59**
BF	1	2.334,0977	2.334,0977	82,24**
CD	1	3.085,9414	3.085,9414	108,74**
CE	1	2.596,5394	2.596,5394	91,49**
CF	1	1.543,3112	1.543,3112	54,38**
DE	1	1.898,5628	1.898,5628	66,90**
DF	1	1.630,0397	1.630,0397	57,44**
EF	1	1.252,7175	1.252,7175	44,14**
Resíduo	39	1.106,8141	28,379849	-
Total	63	492.443,25	-	-

Os valores de F por interpolação harmônica se
rão:

$$F_{5\%}(1,39) = 4,09$$

$$F_{1\%}(1,39) = 7,33$$

Devemos notar que:

a. Os efeitos principais e as interações de 2 fatores continuam sendo altamente significativos.

b. O QM do resíduo confundindo essas 2 interações fica maior do que o QM do resíduo sem confundimento, isto se deve a escolha das interações, pois as suas QM's são pequenas. Se fossem escolhidas as interações ABEF e ABC para serem confundidas, o QM do resíduo diminuiria.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{n_b^{QM} \text{Blocos} + n_e^{QM} \text{erro}}{(n_b + n_e) QM_{\text{erro}}}, \text{ onde } n_b = 3 \text{ e } n_e = 63 - 3 = 60$$

$$\hat{E} = \frac{3 \times 2,5104198 + 60 \times 28,379849}{63 \times 28,379849} = \frac{1.710,3222}{1.787,9305} \Rightarrow \hat{E} = 0,957$$

Caso fossem escolhidas as interações ABEF e ABC para serem confundidas com efeito de blocos, teríamos:

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABEF}} + SQ_{\text{ABC}} + SQ_{\text{CEF}} \rightarrow SQ_{\text{Blocos}} =$$

$$= 356,36983, \text{ e}$$

$$SQ_{\text{Res}} = 757,97548$$

ou

$$QM_{\text{Blocos}} = 118,78994, \text{ e}$$

$$QM_{\text{Res}} = 19,435269$$

A eficiência seria

$$\hat{E} = \frac{3 \times 118,78994 + 60 \times 19,435269}{63 \times 19,435269} = \frac{1.522,486}{1.224,4219} \Rightarrow \hat{E} = 1,243$$

Comparando estas eficiências, vemos que seria melhor escolhermos as interações ABEF e ABC para serem confundidas, pois as mesmas dão uma eficiência maior do que 1.

Agora vamos trabalhar com 1/2 da repetição do experimento 1.

Para isto vamos tomar a relação de identidade $I = +ABCDEF$, e assim temos as seguintes combinações de tratamentos, ver exemplo 1 no item 3.1.5.1.1.

(1) = 227,46	ae = 258,295	af = 258,86	ef = 245,21
ab = 289,07	be = 241,01	bf = 240,335	abef = 387,15
ac = 272,71	ce = 247,76	cf = 239,65	acef = 384,96
bc = 260,935	abce = 428,765	abcf = 422,48	bcef = 367,06
ad = 271,8	de = 246,955	df = 254,925	adef = 375,74
bd = 250,545	abde = 409,915	abdf = 410,65	bdef = 356,91
cd = 250,255	acde = 397,635	acdf = 389,92	cdef = 346,185
abcd = 437,17	bcde = 381,92	bcdf = 380,79	abcdef = 631,305

COCHRAN e COX (1957), fazem uma adaptação do método de Yates para o cálculo das SQ's dos efeitos principais e das interações para experimentos fatoriais fracionados. Assim esta adaptação consiste em retirar um fator no caso de 1/2 da repetição, retirar 2 fatores no caso de 1/4 da repetição, e assim por diante, sendo ignorado temporariamente. Com a retirada dos fatores, o fatorial se torna completo, e assim pode-se aplicar o método de Yates. Feito isso, são reintroduzidos os fatores e assim podemos escrever os conjuntos de aliases com as devidas identificações.

No nosso caso, o experimento tem 32 tratamentos, e se ignorarmos o fator F, vamos ter uma repetição completa dos 5 fatores A, B, C, D e E. Arranjamos esses 5 fatores na "ordem padrão", necessária para a aplicação do método de Yates, e procedemos como se o experimento fosse um fatorial 2^5 completo.

Com o fator F ausente, vamos ter na coluna (5) do nosso quadro de cálculos, os totais dos efeitos principais e suas interações desses 5 fatores.

Feito isto, reintroduzimos o fator F, com isso, cada efeito passa a ter uma alias envolvendo F, isto é, $A = BCDEF$, $B = ACDEF$, $C = ABDEF$, e assim por diante. Os efeitos envolvendo F que vão ser estimados são: o efeito principal F, e as interações AF, BF, CF, DF e EF, cujas alias são ABCDE, BCDE, ACDE, ABDE, ABCE e ABCD, respectivamente.

Na coluna (6) do quadro está feita a identificação atribuída a cada um dos 32 efeitos fatoriais totais. Aqueles efeitos que aparecem com o sinal (+) são atribuídos ao resíduo. Os totais nos rodapés do Quadro 2 (anexo 1) são usados para conferir os cálculos.

Assim, o quadro da análise de variância é:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	21	254.556,45		
A	1	69.240,368	69.240,368	3.443,88**
B	1	47.100,71	47.100,71	2.342,70**
C	1	38.827,788	38.827,788	1.931,22**
D	1	32.570,538	32.570,538	1.619,99**
E	1	22.536,707	22.536,707	1.120,93**
F	1	21.008,913	21.008,913	1.044,94**
AB	1	4.643,5884	4.643,5884	230,96**
AC	1	2.669,2471	2.669,2471	132,76**
AD	1	1.550,9665	1.550,9665	77,14**
AE	1	1.163,9106	1.163,9106	57,89**
AF	1	918,91845	918,91845	45,70**
BC	1	3.507,2406	3.507,2406	174,44**
BD	1	1.566,4604	1.566,4604	77,91**
BE	1	955,93781	955,93781	47,55**
BF	1	954,51728	954,51728	47,47**
CD	1	808,1205	808,1205	40,19**
CE	1	1.432,9981	1.432,9981	71,27**
CF	1	707,53815	707,53815	35,19**
DE	1	720,10125	720,10125	35,82**
DF	1	1.018,4713	1.018,4713	50,66**
EF	1	653,41125	653,41125	32,50**
Resíduo	10	201,05329	20,105329	-
Total	31	254.757,5	-	

$$F_{5\%}(1,10) = 4,96$$

$$F_{1\%}(1,10) = 10,04$$

Com 1/2 da repetição, notamos que:

a. Os efeitos principais e as interações de 2 fatores continuam sendo significativos aos níveis de 5% e 1%.

b. O seu QM do resíduo diminuiu em relação ao QM do resíduo do fatorial completo com e sem confundimento.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{QM_{\text{Res. Compl.}}}{QM_{\text{Res. Frac.}}} = \frac{26,532031}{20,105329} \rightarrow \hat{E} = 1,320$$

Vemos que a eficiência do fatorial fracionado em relação ao fatorial completo é maior do que 1.

Vamos agora colocar 1/2 do fatorial 2^6 em 2 blocos, para isto precisamos confundir uma interação de 3 fatores, e assim perdemos 1 g.l. do resíduo.

A interação escolhida com sua respectiva alias sera $BCD = AEF$, então temos os seguintes blocos:

BLOCO I

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \pmod{2}$$

(1) = 227,46	af = 258,86
bc = 260,935	abcf = 422,48
bd = 250,545	abdf = 410,65
cd = 250,255	acdf = 389,92
ae = 258,295	ef = 245,21
abce = 428,765	bcef = 367,06
abde = 409,915	bdef = 356,91
acde = 397,635	cdef = 346,185

5.281,08

BLOCO II

$$x_2 + x_3 + x_4 = 1 \pmod{2}$$

ab = 289,07	bf = 240,335
ac = 272,71	cf = 239,65
ad = 271,8	df = 254,925
abcd = 437,17	bcdf = 380,79
be = 241,01	abef = 387,15
ce = 247,76	acef = 384,96
de = 246,955	adef = 375,74
bcde = 381,92	abcdef = 631,305

5.283,25

Sabemos que a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{BCD}} = 0,1471531$ pois a interação BCD está confundida com blocos, e a SQ_{Res} c/frac. e conf. = $SQ_{\text{Res. c/frac. e s/conf.}} - SQ_{\text{BCD}}$, como também se perde 1 g.l. do resíduo. O quadro da análise de variância será:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	1	0,1471531	-	-
Tratamentos	21	254.556,45	-	-
A	1	69.240,368	69.240,368	3.022,84**
B	1	47.100,71	47.100,71	2.056,28**
C	1	38.827,788	38.827,788	1.695,11**
D	1	32.570,538	32.570,538	1.421,94**
E	1	22.536,707	22.536,707	983,89**
AB	1	21.008,913	21.008,913	917,19**
AC	1	4.643,5884	4.643,5884	202,72**
AD	1	2.669,2471	2.669,2471	116,53**
AE	1	1.550,9665	1.550,9665	67,71**
AF	1	1.163,9106	1.163,9106	50,81**
BC	1	918,91845	918,91845	40,12**
BD	1	3.507,2406	3.507,2406	153,12**
BE	1	1.566,4604	1.566,4604	68,39**
BF	1	955,51728	955,51728	41,72**
CD	1	808,1205	808,1205	35,28**
CE	1	1.432,9981	1.432,9981	62,56**
CF	1	707,53815	707,53815	30,89**
DE	1	720,10125	720,10125	31,44**
DF	1	1.018,4713	1.018,4713	44,46**
EF	1	653,41125	653,41125	28,53**
Resíduo	9	200,90576	22,90576	-
Total	31	254.757,5	-	

$$F_{5\%}(1,9) = 5,12$$

$$F_{1\%}(1,9) = 10,56$$

Notamos que:

a. Os efeitos principais e as interações de dois fatores continuam sendo altamente significativos.

b. O QM do resíduo do fatorial fracionado com confundimento em relação ao fatorial fracionado sem confundimento aumentou, isto se deve a interação escolhida.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{QM_{\text{Res. frac. s/conf.}}}{QM_{\text{Res. frac. c/conf.}}} = \frac{20,105329}{22,90576} \Rightarrow \hat{E} = 0,878$$

d. Caso fosse escolhida a interação ABC (ver anexo 1 - Quadro 2) para ser confundida, o QM do resíduo diminuiria, ou seja:

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABC}} = 78,75125, \text{ e}$$

$$SQ_{\text{Res. frac. c/conf.}} = 122,30204, \text{ então:}$$

$$QM_{\text{Res. frac. c/conf.}} = \frac{122,30204}{9} = 13,589116$$

Assim, a eficiência neste caso será:

$$\hat{E} = \frac{QM_{\text{Res. frac. s/conf.}}}{QM_{\text{Res. frac. c/conf.}}} = \frac{20,105329}{13,589116} \Rightarrow \hat{E} = 1,479$$

Comparando estas eficiências, vemos que seria melhor escolher a interação ABC para ser confundida, pois ela nos dá uma eficiência maior do que 1.

Agora vamos resumir o experimento 1, montando o quadro abaixo, onde aparece os QM's residuais e as eficiências de todos casos vistos:

Experimento 1	Q.M.	EF
1. Fatorial completo s/conf.	26,532031	-
2. Fatorial completo conf. a int. ABCDEF	25,787007	1,019
3. Fatorial completo conf. a int. ABEF	21,433199	1,159
4. Fatorial completo conf. as int's. ABDE e ACDF	28,379849	0,957
5. Fatorial completo conf. as int's. ABEF e ABC	19,435269	1,243
6. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. s/conf.	20,105329	1,320
7. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. int. BCD	22,90576	0,878*
8. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. int. ABC	13,589116	1,479*

(*) - Estas eficiências são calculadas sobre 1/2 da repetição.

4.2. EXPERIMENTO 2

A partir do Quadro 3 (ver anexo 1), obteve-se o seguinte quadro da análise de variância para o fatorial completo:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	21	493.982,22	-	-
A	1	136.639,27	136.639,27	1.287,56**
B	1	93.946,848	93.946,848	885,26**
C	1	76.459,163	76.459,163	720,48**
D	1	59.971,112	59.971,112	565,11**
E	1	40.616,354	40.616,354	382,73**
F	1	38.652,543	38.652,543	364,22**
AB	1	8.944,9035	8.944,9035	84,29**
AC	1	5.009,4545	5.009,4545	47,20**
AD	1	3.560,5089	3.560,5089	33,55**
AE	1	2.308,8025	2.308,8025	21,76**
AF	1	1.943,7077	1.943,7077	18,32**
BC	1	6.766,2963	6.766,2963	63,76**
BD	1	2.221,7082	2.221,7082	20,94**
BE	1	1.783,3729	1.783,3729	16,80**
BF	1	3.205,5413	3.205,5413	30,21**
CD	1	3.035,459	3.035,459	28,60**
CE	1	3.127,0464	3.127,0464	29,47**
CF	1	1.488,2235	1.488,2235	14,02**
DE	1	1.693,5283	1.693,5283	15,96**
DF	1	1.660,97	1.660,97	15,65**
EF	1	947,4084	947,4084	8,93**
Resíduo	42	4.457,1672	106,12303	-
Total	63	498.439,39	-	

Os valores de F são os mesmos do experimento 1.

Assim, vemos que os efeitos principais e as interações de 2 fatores continuam sendo significantes aos níveis de 5% e 1%.

Agora vamos confundir a interação de ordem mais elevada, ou seja, ABCDEF. Para formar os 2 blocos procedemos da mesma maneira como no experimento 1.

Como a interação ABCDEF está confundida, então a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABCDEF}} = 228,08551$, e a $SQ_{\text{Res. c/conf.}} = SQ_{\text{Res. s/conf.}} - SQ_{\text{ABCDEF}}$, como também se perde 1 g.l. do resíduo. O quadro da análise de variância será:

C. variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	1	228,08551	-	-
Tratamentos	21	493.982,22	-	-
A	1	136.639,27	136.639,27	1.324,69**
B	1	93.946,848	93.946,848	910,79**
C	1	76.459,163	76.459,163	741,25**
D	1	59.971,112	59.971,112	581,41**
E	1	40.616,356	40.616,356	393,77**
F	1	38.652,543	38.652,543	374,73**
AB	1	8.944,9035	8.944,9035	86,72**
AC	1	5.009,4545	5.009,4545	48,56**
AD	1	3.560,5089	3.560,5089	34,52**
AE	1	2.308,8025	2.308,8025	22,38**
AF	1	1.943,7077	1.943,7077	18,84**
BC	1	6.766,2963	6.766,2963	65,60**
BD	1	2.221,7082	2.221,7082	21,54**
BE	1	1.783,3729	1.783,3729	17,29**
BF	1	3.205,5413	3.205,5413	31,08**
CD	1	3.035,459	3.035,459	29,43**
CE	1	3.127,0464	3.127,0464	30,32**
CF	1	1.488,2235	1.488,2235	14,43**
DE	1	1.693,5283	1.693,5283	16,42**
DF	1	1.660,97	1.660,97	16,10**
EF	1	947,4084	947,4084	9,18**
Resíduo	41	4.229,0817	103,14833	-
Total	63	498.439,37	-	-

Os valores de F são os mesmos do experimento 1

Podemos observar que:

a. Os efeitos principais e as interações de 2 fatores continuam sendo significativos.

b. O QM do resíduo com confundimento fica menor do que o QM do resíduo sem confundimento e esta diferença é de 2,9747.

c. Esta diferença entre os QM's será maior ou menor devido a escolha da interação a ser confundida, por exemplo, se escolhessemos a interação ABEF, o QM do resíduo seria 85,738807. Mas, se fosse escolhida a interação ACDF, o QM do resíduo seria 108,69656, como vemos o mesmo aumentou em relação ao QM do resíduo do fatorial completo.

d. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{n_b QM_{\text{Blocos}} + n_e QM_{\text{Erro}}}{(n_b + n_e) QM_{\text{Erro}}}, \text{ onde:}$$

$$n_b = 1$$

$$n_e = 63 - 1 = 62, \text{ então:}$$

$$\hat{E} = \frac{1 \times 228,08551 + 62 \times 103,14833}{63 \times 103,14833} = \frac{6.623,282}{6.498,3448} \rightarrow \hat{E} = 1,019$$

e. Se a interação escolhida fosse ABEF, a eficiência seria:

$$QM_{\text{Blocos}} = 941,8761$$

$$QM_{\text{Erro}} = \frac{3.515,2911}{41} = 85,738807$$

$$\hat{E} = \frac{1 \times 941,8761 + 62 \times 85,738807}{63 \times 85,738807} = \frac{6257,6821}{5401,5448} \rightarrow \hat{E} = 1,158$$

Como foi visto para o experimento 1, a eficiência da interação ABEF quando confundida, continua sendo maior do que a interação ABCDEF.

Agora vamos confundir as interações ABDE e ACDF, como sabemos a interação generalizada BCEF também estará confundida.

Para formar os 4 blocos procedemos da mesma maneira como no experimento 1.

Como as interações ABDE, ACDF e BCEF estão confundidas, então a

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABDE}} + SQ_{\text{ACDF}} + SQ_{\text{BCEF}} = 11,172306 + 0,6084 + 18,3184 \rightarrow$$

$$SQ_{\text{Blocos}} = 30,09106, \text{ então:}$$

$$SQ_{\text{Res. c/conf.}} = SQ_{\text{Res. s/conf.}} - SQ_{\text{Blocos}} = 4.457,1672 - 30,09106 \rightarrow$$

$$SQ_{\text{Res. c/conf.}} = 4.427,0681$$

Assim, temos o quadro da análise de variância:

C. Variância	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	3	30,099106	10,033035	
Tratamentos	21	493.982,22	-	
A	1	136.639,27	136.639,27	1.206,90**
B	1	93.946,848	93.946,848	827,62**
C	1	76.459,163	76.459,163	673,56**
D	1	59.971,112	59.971,112	528,31**
E	1	40.616,356	40.616,356	357,81**
F	1	38.652,543	38.652,543	340,51**
AB	1	8.944,9035	8.944,9035	78,80**
AC	1	5.009,4545	5.009,4545	44,13**
AD	1	3.560,5089	3.560,5089	31,37**
AE	1	2.308,8025	2.308,8025	20,34**
AF	1	1.943,7077	1.943,7077	17,12**
BC	1	6.766,2963	6.766,2963	59,61**
BD	1	2.221,7082	2.221,7082	19,57**
BE	1	1.783,3729	1.783,3729	15,71**
BF	1	3.205,5413	3.205,5413	28,24**
CD	1	3.035,459	3.035,459	26,74**
CE	1	3.127,0464	3.127,0464	27,55**
CF	1	1.488,2235	1.488,2235	13,11**
DE	1	1.693,5283	1.693,5283	14,92**
DF	1	1.660,97	1.660,97	14,63**
EF	1	947,4084	947,4084	8,35**
Resíduo	39	4.427,0681	113,51457	-
Total	63	498.439,37	-	-

Os valores de F são os mesmos do experimento 1

Devemos notar que:

a. Os efeitos principais e as interações de 2 fatores continuam sendo significativos.

b. O QM do resíduo confundindo essas 2 interações fica maior do que o QM do resíduo sem confundimento, isto se deve a escolha das interações pois as suas SQ's. são pequenas. Se fossem escolhidas as interações ABEF e ABC para serem confundidas, o QM do resíduo diminuiria.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{n_b QM_{\text{Bloco}} + n_e QM_{\text{Erro}}}{(n_b + n_e) QM_{\text{Erro}}}, \text{ onde } n_b = 3 \text{ e } n_e = 63 - 3 = 60$$

$$\hat{E} = \frac{3 \times 10,033035 + 60 \times 113,51457}{63 \times 113,51457} = \frac{6.840,9733}{7.151,4179} \rightarrow \hat{E} = 0,957$$

Caso fossem escolhidas as interações ABEF e ABC para serem confundidas com efeitos de blocos, teríamos:

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABEF}} + SQ_{\text{ABC}} + SQ_{\text{CEF}} \rightarrow SQ_{\text{Blocos}} = 1.435,4173$$

$$SQ_{\text{Res.}} = 3.021,7499$$

ou

$$QM_{\text{Blocos}} = 478,47243$$

$$QM_{Res.} = 77,480767$$

A eficiência seria:

$$\bar{E} = \frac{3 \times 478,47243 + 60 \times 77,480767}{63 \times 77,480767} = \frac{6.084,2633}{4.881,2883} \rightarrow \bar{E} = 1,246$$

Comparando estas eficiências, vemos que seria melhor escolhermos as interações ABEF e ABC para serem confundidas, pois as mesmas dão uma eficiência maior do que 1.

Agora vamos trabalhar com 1/2 da repetição do experimento 2.

Para isto vamos tomar a relação de identidade $I = + ABCDEF$, e assim temos as seguintes combinações de tratamentos, ver exemplo 1, do item 3.1.5.1.1.

(1) = 226,02	ae = 253,09	af = 256,22	ef = 242,52
ab = 290,04	be = 232,52	bf = 233,17	abef = 381,20
ac = 271,42	ce = 247,92	cf = 233,70	acef = 390,92
bc = 261,87	abce = 433,13	abcf = 428,56	bcef = 369,12
ad = 276,60	de = 245,51	df = 263,45	adef = 379,48
bd = 248,09	abde = 410,23	abdf = 419,70	bdef = 355,82
cd = 249,41	acde = 399,77	acdf = 392,34	cdef = 336,27
abcd = 436,44	bcde = 382,34	bcdf = 388,08	abedef = 633,71

Aquí vamos utilizar o mesmo procedimento em-

pregado para o experimento 1, assim todas as observações da-
da anteriormente são válidas.

No Quadro 4 (anexo 1), temos o quadro com a
adaptação do procedimento de Yates. Assim o quadro da análi-
se de variância é:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	21	265.478,64	-	-
A	1	73.827,874	73.827,874	920,12**
B	1	48.001,962	48.001,962	598,25**
C	1	40.708,031	40.708,031	507,35**
D	1	35.499,133	35.499,133	442,43**
E	1	20.932,626	20.932,626	260,88**
F	1	22.042,651	22.042,651	274,72**
AB	1	4.679,3138	4.679,3138	58,32**
AC	1	2.777,3605	2.777,3605	34,61**
AD	1	1.534,0261	1.534,0261	19,12**
AE	1	1.274,8725	1.274,8725	15,89**
AF	1	1.046,0738	1.046,0738	13,04**
BC	1	4.598,8845	4.598,8845	57,32**
BD	1	1.564,9215	1.564,9215	19,50**
BE	1	859,05125	859,05125	10,71**
BF	1	1.122,6691	1.122,6691	13,99**
CD	1	291,73201	291,73201	3,64
CE	1	1.864,7725	1.864,7725	23,24**
CF	1	620,75261	620,75261	7,74*
DE	1	447,005	447,005	5,57*
DF	1	1.263,2851	1.263,2851	15,74**
EF	1	521,645	521,645	6,56*
Resíduo	10	802,37015	80,237015	-
Total	31	266.281,01	-	-

$$F_{5\%}(1,10) = 4,96$$

$$F_{1\%}(1,10) = 10,04$$

Com 1/2 da repetição, notamos que:

a. Os efeitos principais e a maioria das interações de 2 fatores continuam sendo significativas aos níveis de 5% e 1%, enquanto que as interações CF, DE e EF são somente ao nível de 5% e a interação CD é não significativa.

b. O seu QM do resíduo diminuiu em relação ao QM do resíduo do fatorial completo com e sem confundimento.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{QM_{\text{Res. compl.}}}{QM_{\text{Res. frac.}}} = \frac{106,12303}{80,237015} \rightarrow \hat{E} = 1,323$$

Vemos que a eficiência do fatorial fracionado em relação ao fatorial completo é maior do que 1.

Vamos agora colocar 1/2 do fatorial 2^6 em 2 blocos, para isto precisamos confundir uma interação de 3 fatores, e assim perdemos 1 g.l. do resíduo.

A interação escolhida com sua respectiva aliás sera BCD = AEF.

Para formar os 2 blocos procedemos da mesma maneira como no experimento 1.

Sabemos que a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{BCD}} = 0,5886125$,
e a $SQ_{\text{Res. c/frac. e conf.}} = SQ_{\text{Res. c/frac. s/conf.}} - SQ_{\text{BCD}}$,
como também perdemos 1 g.l. do resíduo. O quadro da análise de variância será:

C, Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	1	0,5886125	-	-
Tratamentos	21	265.478,64	-	-
A	1	73.827,874	73.827,874	828,72**
B	1	48.001,962	48.001,962	538,82**
C	1	40.708,031	40.708,031	456,95**
D	1	35.499,133	35.499,133	398,48**
E	1	20.932,626	20.932,626	234,97**
F	1	22.042,651	22.042,651	247,43**
AB	1	4.679,3138	4.679,3138	52,52**
AC	1	2.777,3605	2.777,3605	31,18**
AD	1	1.534,0261	1.534,0261	17,22**
AE	1	1.274,8725	1.274,8725	14,31**
AF	1	1.046,0738	1.046,0738	11,74**
BC	1	4.598,8845	4.598,8845	51,62**
BD	1	1.564,9215	1.564,9215	17,57**
BE	1	859,05125	859,05125	9,64**
BF	1	1.122,6691	1.122,6691	12,60**
CD	1	291,73201	291,73201	3,27
CE	1	1.864,7725	1.864,7725	20,93**
CF	1	620,75261	620,75261	6,97*
DE	1	447,005	447,005	5,02
DF	1	1.263,2851	1.263,2851	14,18**
EF	1	521,645	521,645	5,86*
Resíduo	9	801,78154	89,086838	-
Total	31	266.281,01	-	-

$$F_{5\%} (1,9) = 5,12$$

$$F_{1\%} (1,9) = 10,56$$

Notamos que:

a. Os efeitos principais continuam sendo altamente significativos, e as interações BE, CF e EF são significativas somente a nível de 5%, enquanto as interações CD e DE são não significativas.

b. A interação DE que sem confundimento era significativa ao nível de 5%, aqui ela não é significativa, isto se deve ao aumento do QM do resíduo.

c. Como já sabemos pelo item b, o QM do resíduo do fatorial fracionado com confundimento aumentou em relação ao mesmo seu confundimento, isto se deve a interação escolhida.

d. A eficiência será:

$$\bar{E} = \frac{QM_{\text{Res. frac. s/conf.}}}{QM_{\text{Res. frac. c/conf.}}} = \frac{80,237015}{89,086838} = \bar{E} = 0,901$$

e. Caso fosse escolhida a interação ABC (ver anexo 1 - quadro 4) para ser confundida, o QM do resíduo diminuiria, ou seja:

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABC}} = 315,005, \text{ e}$$

$SQ_{\text{Res. frac. c/conf.}} = 487,36515$, então,

$$QM_{\text{Res. frac. c/conf.}} = \frac{487,36515}{9} = 54,151683$$

Assim, a eficiência neste caso será:

$$\bar{E} = \frac{QM_{\text{Res. frac. s/conf.}}}{QM_{\text{Res. frac. c/conf.}}} = \frac{80,237015}{54,151683} \rightarrow \bar{E} = 1,482$$

Comparando estas eficiências, vemos que seria melhor escolher a interação ABC para ser confundida, pois ela nos dá uma eficiência maior do que 1.

Agora vamos resumir o experimento 2, montando o quadro abaixo, onde aparecem os QM's residuais e as eficiências de todos casos vistos:

Experimento 2	Q.M.	$\bar{E}$
1. Fatorial completo s/conf.	106,12303	
2. Fatorial completo conf. a int. ABCDEF	103,14833	1,019
3. Fatorial completo conf. a int. ABEF	85,738807	1,158
4. Fatorial completo conf. as int's ABDE e ACDF	113,51457	0,957
5. Fatorial completo conf. as int's ABEF e ABC	77,480767	1,246
6. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. s/conf.	80,237015	1,323
7. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. a int. BCD	89,086838	0,901(*)
8. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. a int. ABC	54,151683	1,482(*)

(*) Estas eficiências foram calculadas sobre 1/2 da repetição

4.3. EXPERIMENTO 3

A partir do Quadro 5 (ver anexo 1), obteve-se o seguinte quadro da análise de variância para o fatorial completo:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	21	497.150,72	-	-
A	1	140.140,26	140.140,26	586,98**
B	1	94.789,71	94.789,71	397,03**
C	1	77.646,171	77.646,171	325,22**
D	1	60.247,237	60.247,237	252,35**
E	1	37.025,697	37.025,697	155,08**
F	1	37.941,44	37.941,44	158,92**
AB	1	8.788,7109	8.788,7109	36,81**
AC	1	4.968,0471	4.968,0471	20,81**
AD	1	3.768,3484	3.768,3484	15,78**
AE	1	2.396,7756	2.396,7756	10,04**
AF	1	2.139,0047	2.139,0047	8,96**
BC	1	7.650,6729	7.650,6729	32,04**
BD	1	1.833,6059	1.833,6059	7,68**
BE	1	1.637,2645	1.637,2645	6,86*
BF	1	4.200,0931	4.200,0931	15,59**
CD	1	2.972,9075	2.972,9075	12,45**
CE	1	3.692,0055	3.692,0055	15,46**
CF	1	1.442,8127	1.442,8127	6,04*
DE	1	1.509,0797	1.509,0797	6,32*
DF	1	1.682,179	1.682,179	7,05*
EF	1	678,70019	678,70019	2,84
Resíduo	42	10.027,374	238,747	-
Total	63	504.118,68	-	-

Os valores de F são os mesmos do experimento

1.

Vemos que os efeitos principais e a maioria das interações de 2 fatores continuam sendo significantes aos níveis de 5% e 1%, enquanto que a interação EF é não significativa.

Agora vamos confundir a interação de ordem mais elevada, ou seja, ABCDEF. Para formar os 2 blocos procedemos da mesma maneira como no experimento 1.

Como a interação ABCDEF está confundida, então a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABCDEF}} = 518,55829$, e a $SQ_{\text{Res. c/conf.}} = SQ_{\text{Res s/conf.}} - SQ_{\text{ABCDEF}}$, como também se perde 1 g.l. do resíduo. O quadro da análise de variância será:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	1	518,55829	-	-
Tratamentos	21	497.150,72	-	-
A	1	140.140,26	140.140,26	604,26**
B	1	94.789,71	94.789,71	408,71**
C	1	77.646,171	77.646,171	334,79**
D	1	60.247,237	60.247,237	259,77**
E	1	37.025,697	37.025,697	159,65**
F	1	37.941,44	37.941,44	163,60**
AB	1	8.788,7109	8.788,7109	37,90**
AC	1	4.968,0471	4.968,0471	21,21**
AD	1	3.768,3484	3.768,3484	16,25**
AE	1	2.396,7756	2.396,7756	10,33**
AF	1	2.139,0047	2.139,0047	9,22**
BC	1	7.650,6729	7.650,6729	32,99**
BD	1	1.833,6059	1.833,6059	7,91**
BE	1	1.637,2645	1.637,2645	7,06*
BF	1	4.200,0931	4.200,0931	18,11**
CD	1	2.972,9075	2.972,9075	12,82**
CE	1	3.692,0055	3.692,0055	15,92**
CF	1	1.442,8127	1.442,8127	6,22**
DE	1	1.509,0797	1.509,0797	6,51*
DF	1	1.682,179	1.682,179	7,25*
EF	1	678,70019	678,70019	2,93
Resíduo	41	9.508,8158	231,92234	-
Total	63	504.118,68	-	-

Os valores de F são os mesmos do experimento 1.

Podemos observar, que:

a. Confundindo a interação ABCDEF, em termos de significância continua a mesma coisa.

b. O QM do resíduo com confundimento fica menor do que o QM do resíduo sem confundimento, e esta diferença é de 6,82466.

c. Esta diferença entre o QM's será maior ou menor devido a escolha da interação a ser confundida, por exemplo, se escolhessemos a interação ABEF, o QM do resíduo seria 193,1467. Mas, se fosse escolhida a interação ACDF, o QM do resíduo seria 244,52963, como vemos o mesmo aumentou em relação ao QM do resíduo do fatorial completo.

d. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{n_b QM_{\text{Blocos}} + n_e QM_{\text{Erro}}}{(n_b + n_e) QM_{\text{Erro}}}, \text{ onde:}$$

$$n_b = 1$$

$$n_e = 63 - 1 = 62, \text{ então}$$

$$\hat{E} = \frac{1 \times 518,55829 + 62 \times 231,92234}{63 \times 231,92236} = \frac{14.897,743}{14.611,107} \rightarrow \hat{E} = 1,019$$

e. Se a interação escolhida para ser confundida fosse ABEF, a eficiência seria:

$$QM_{\text{Blocos}} = 2.108,3594$$

$$QM_{\text{Erro}} = \frac{7.919,0146}{41} = 193,1467$$

$$E = \frac{1 \times 2.108,3594 + 62 \times 193,1467}{63 \times 193,1467} = \frac{14.083,455}{12.168,242} \rightarrow \bar{E} = 1,157$$

Como foi visto para os experimentos 1 e 2, a eficiência da interação ABEF quando confundida, continua sendo maior do que a interação ABCDEF.

Agora vamos confundir as interações ABDE e ACDF, como sabemos a interação generalizada BCEF também estará confundida.

Para formar os 4 blocos procedemos da mesma maneira como no experimento 1.

Como as interações ABDE, ACDF e BCEF estão confundidas, então a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABDE}} + SQ_{\text{ACDF}} + SQ_{\text{BCEF}} = 26,336141 + 1,659266 + 39,713628 \rightarrow SQ_{\text{Blocos}} = 67,709035$, então:

$$SQ_{\text{Res. c/conf.}} = SQ_{\text{Res. s/conf.}} - SQ_{\text{Blocos}} = 10.027,374 - 67,709035 \rightarrow$$

$$SQ_{\text{Res. c/conf.}} = 9.959,665$$

Assim, temos o quadro da análise de variância:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	3	67,709035	22,569678	-
Tratamentos	21	497.150,72	-	-
A	1	140.140,26	140.140,26	548,76**
B	1	94.789,71	94.789,71	371,18**
C	1	77.646,171	77.646,171	304,05**
D	1	60.247,237	60.247,237	235,92**
E	1	37.025,697	37.025,697	144,98**
F	1	37.941,44	37.941,44	148,57**
AB	1	8.788,7109	8.788,7109	34,41**
AC	1	4.968,0471	4.968,0471	19,45**
AD	1	3.768,3484	3.768,3484	14,76**
AE	1	2.396,7756	2.396,7756	9,38**
AF	1	2.139,0047	2.139,0047	8,38**
BC	1	7.650,6729	7.650,6729	29,96**
BD	1	1.833,6059	1.833,6059	7,18*
BE	1	1.637,2645	1.637,2645	6,41*
BF	1	4.200,0931	4.200,0931	16,45**
CD	1	2.972,9075	2.972,9075	11,64**
CE	1	3.692,0055	3.692,0055	14,46**
CF	1	1.442,8127	1.442,8127	5,65*
DE	1	1.509,0797	1.509,0797	5,91*
DF	1	1.682,179	1.682,179	6,59*
EF	1	678,70019	678,70019	2,66
Resíduo	39	9.959,665	255,37603	-
Total	63	504.118,68	-	-

Os valores de F são os mesmos do experimento 1.

Devemos notar que:

a. Em termos de significância dos efeitos principais, e das interações nada se alterou.

b. O QM do resíduo confundindo essas 2 interações fica maior do que o QM do resíduo sem confundimento, isto se deve a escolha das interações pois as suas SQ's são pequenas. Se fossem escolhidas as interações ABEF e ABC para serem confundidas, o QM do resíduo diminuiria.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{n_b QM_{\text{Blocos}} + n_e QM_{\text{Erro}}}{(n_b + n_e) QM_{\text{Erro}}}, \text{ onde } n_b = 3 \text{ e } n_e = 63 - 3 = 60$$

$$\hat{E} = \frac{3 \times 22,569678 + 60 \times 255,37603}{63 \times 255,37603} = \frac{15.390,271}{16.088,69} \rightarrow \hat{E} = 0,957$$

Caso fossem escolhidas as interações ABEF e ABC para serem confundidas com efeito de blocos, teríamos:

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABEF}} + SQ_{\text{ABC}} + SQ_{\text{CEF}} \rightarrow SQ_{\text{Blocos}} = 3.212,8368$$

$$SQ_{\text{Res.}} = 6.814,5372$$

ou

$$QM_{\text{Blocos}} = 1.070,9456$$

$$QM_{\text{Res.}} = 174,73172$$

A eficiência seria:

$$\hat{E} = \frac{3 \times 1.070,9456 + 60 \times 174,73172}{63 \times 174,73172} = \frac{13.696,74}{11.008,099} \rightarrow \hat{E} = 1,244$$

Comparando estas eficiências, vemos que seria melhor escolhermos as interações ABEF e ABC para serem confundidas, pois as mesmas dão uma eficiência maior do que 1.

Agora vamos trabalhar com 1/2 da repetição do experimento 3.

Para isto vamos tomar a relação de identidade $I = +ABCDEF$, e assim temos as seguintes combinações de tratamento, ver exemplo 1, do item 3.1.5.1.1.

(1) = 224,58	ae = 247,885	af = 253,58	ef = 239,83
ab = 291,01	be = 224,03	bf = 226,005	abef = 375,25
ac = 270,13	ce = 248,08	cf = 227,75	acef = 396,88
bc = 262,805	abce = 437,495	abcf = 434,64	bcef = 371,18
ad = 281,4	de = 244,065	df = 271,975	adef = 383,22
bd = 245,635	abde = 410,545	abdf = 428,75	bdef = 354,73
cd = 248,565	acde = 401,905	acdf = 394,76	cdef = 326,355
abcd = 435,71	bcde = 382,76	bcdf = 395,37	abcdef = 636,115

Aquí vamos utilizar o mesmo procedimento empregado para o experimento 1, assim todas as observações dadas anteriormente são válidas.

No Quadro 6.(anexo 1), temos o quadro com a adaptação do procedimento de Yates. Assim o quadro da análise de variância é:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	21	277.423,34	-	-
A	1	78.562,516	78.562,516	433,87**
B	1	48.911,754	48.911,754	270,12**
C	1	42.632,73	42.632,73	235,44**
D	1	38.553,785	38.553,785	212,92**
E	1	19.387,759	19.387,759	107,07**
F	1	23.101,214	23.101,214	127,58**
AB	1	4.715,176	4.715,176	26,04**
AC	1	2.887,62	2.887,62	15,95**
AD	1	1.517,1786	1.517,1786	8,38*
AE	1	1.390,8857	1.390,8857	7,68*
AF	1	1.181,4661	1.181,4661	6,52*
BC	1	5.838,2116	5.838,2116	32,24**
BD	1	1.563,3834	1.563,3834	8,63*
BE	1	767,34031	767,34031	4,24
BF	1	1.304,4555	1.304,4555	7,20*
CD	1	37,044528	37,044528	0,20
CE	1	2.353,323	2.353,323	13,00**
CF	1	539,64338	539,64338	2,98
DE	1	238,71125	238,71125	1,32
DF	1	1.534,4415	1.534,4415	8,47*
EF	1	404,70125	404,70125	2,23
Resíduo	10	1.810,7525	181,07525	-
Total	31	279.234,09	-	-

$$F_{5\%}(1,10) = 4,96$$

$$F_{1\%}(1,10) = 10,04$$

Com 1/2 da repetição, notamos que:

a. Os efeitos principais e as interações AB, AC, BC e CE continuam sendo significativas aos níveis de 5% e 1%, as interações AD, AE, AF, BD, BF e DF são significativas somente ao nível de 5%, enquanto as interações BE, CD, CF, DE e EF são não significativas.

b. O seu QM do resíduo diminuiu em relação ao QM do resíduo do fatorial completo com e sem confundimento.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{QM_{\text{Res. compl.}}}{QM_{\text{Res. frac.}}} = \frac{238,747}{181,07525} \rightarrow \hat{E} = 1,318$$

Vemos que a eficiência do fatorial fracionado em relação ao fatorial completo é maior do que 1.

Vamos agora colocar 1/2 do fatorial 2^6 em 2 blocos; para isto precisamos confundir uma interação de 3 fatores, e assim perdemos 1 g.l. do resíduo.

A interação escolhida com sua respectiva alias

será $BCD = AEF$.

Para formar os 2 blocos procedemos da mesma maneira como no experimento 1.

Sabemos que a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{BCD} = 1,3243781$, e a $SQ_{\text{Res. c/frac. e conf.}} = SQ_{\text{Res. c/frac. s/conf.}} - SQ_{BCD}$, como também perdemos 1 g.l. do resíduo. O quadro da análise, será:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	1	1,3243781	-	-
Tratamentos	21	277.423,34	-	-
A	1	78.562,516	78.562,516	390,76**
B	1	48.911,754	48.911,754	243,28**
C	1	42.632,73	42.632,73	212,05**
D	1	38.553,785	38.553,785	191,76**
E	1	19.387,759	19.387,759	96,45**
F	1	23.101,214	23.101,214	114,90**
AB	1	4.715,176	4.715,176	23,45**
AC	1	2.887,62	2.887,62	14,36**
AD	1	1.517,1786	1.517,1786	7,55*
AE	1	1.390,8857	1.390,8857	6,92*
AF	1	1.181,4661	1.181,4661	5,88*
BC	1	5.838,2116	5.838,2116	29.04**
BD	1	1.563,3834	1.563,3834	7,78*
BE	1	767,34031	767,34031	3,82
BF	1	1.304,4555	1.304,4555	6,49*
CD	1	37,044528	37,044528	0,18
CE	1	2.353,323	2.353,323	11,71**
CF	1	539,64338	539,64338	2,68
DE	1	238,71125	238,71125	1,19
DF	1	1.534,4415	1.534,4415	7,63*
EF	1	404,70125	404,70125	2,01
Resíduo	9	1.809,4281	201,04757	
Total	31	279.234,09	-	-

$$F_{5\%}(1,9) = 5,12$$

$$F_{1\%}(1,9) = 10,56$$

Notamos que:

a. Os efeitos principais continuam sendo altamente significativos, e as interações AD, AE, AF, BD, BF e DF são significativas somente a nível de 5%, enquanto as interações BE, CD, CF, DE e EF são não significativas.

b. O QM do resíduo do fatorial fracionado com confundimento aumentou em relação ao mesmo sem confundimen-
to, isto se deve a interação escolhida.

c. A eficiência será:

$$\bar{E} = \frac{QM_{\text{Res. frac. s/conf.}}}{QM_{\text{Res. Frac. c/conf.}}} = \frac{181,07525}{201,04757} \rightarrow \bar{E} = 0,901$$

d. Caso fosse escolhida a interação ABC (ver anexo 1 - Quadro 4), para ser confundida, o QM do resíduo diminuiria, ou seja.

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABC}} = 708,76125, \text{ e}$$

$$SQ_{\text{Res. frac. c/conf.}} = 1.101,9913, \text{ então:}$$

$$QM_{\text{Res. frac. c/conf.}} = \frac{1.101,9913}{9} = 122,44348$$

Assim, a eficiência neste caso será:

$$\bar{E} = \frac{QM_{\text{Res. frac. s/conf.}}}{QM_{\text{Res. frac. c/conf.}}} = \frac{181,07525}{122,44348} \rightarrow \bar{E} = 1,479$$

Comparando estas eficiências, vemos que seria melhor escolher a interação ABC para ser confundida, pois ela nos dá uma eficiência maior do que 1.

Agora vamos resumir o experimento 3, montando o quadro abaixo, onde aparece os QM's residuais e as eficiências de todos casos vistos:

Experimento 3	Q.M.	$\bar{E}$
1. Fatorial completo s/conf.	238,747	-
2. Fatorial completo conf. a int. ABCDEF	231,92234	1,019
3. Fatorial completo conf. a int. ABEF	193,1467	1,157
4. Fatorial completo conf. as int's. ABDE e ACDF	255,37603	0,957
5. Fatorial completo conf. as int's. ABEF e ABC	174,73172	1,244
6. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. s/conf.	181,07525	1,318
7. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. a int. BCD	201,04757	0,901(*)
8. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. a int. ABC	122,44348	1,479(*)

(*) Estas eficiências foram calculadas sobre 1/2 da repetição.

4.4. EXPERIMENTO 4

A partir do Quadro 7 (ver anexo 1), obteve-se o seguinte quadro da análise de variância para o fatorial completo:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	21	499.528,94	-	-
A	1	142.798,96	142.798,96	333,78**
B	1	96.362,128	96.362,128	225,24**
C	1	78.185,946	78.185,946	182,75**
D	1	59.871,973	59.871,973	139,94**
E	1	33.115,811	33.115,811	77,40**
F	1	37.751,518	37.751,518	88,24**
AB	1	8.882,5913	8.882,5913	20,76**
AC	1	4.742,0439	4.742,0439	11,08**
AD	1	3.835,6346	3.835,6346	8,96**
AE	1	2.370,9596	2.370,9596	5,54*
AF	1	2.458,4243	2.458,4243	5,73*
BC	1	8.837,4101	8.837,4101	20,66**
BD	1	1.574,304	1.574,304	3,68
BE	1	1.589,4176	1.589,4176	3,72
BF	1	5.159,1898	5.159,1898	12,06**
CD	1	2.785,9923	2.785,9923	6,51*
CE	1	4.151,5471	4.151,5471	9,70**
CF	1	1.487,0664	1.487,0664	3,48
DE	1	1.239,9202	1.239,9202	2,90
DF	1	1.814,973	1.814,973	4,24*
EF	1	513,13576	513,13576	1,20
Resíduo	42	17.968,605	427,82393	-
Total	63	517.497,54	-	-

Os valores de F são os mesmos do experimento 1.

Vemos que os efeitos principais e as interações AB, AC, AD, BC, BF e CE são significativas aos níveis de 5% e 1%, as interações AE, AF, CD e DF são significativas somente ao nível de 5%, enquanto que as interações BD, BE, CF, DE e EF são não significativas.

Agora vamos confundir a interação de ordem mais elevada ou seja, ABCDEF. Para formar os 2 blocos procedemos da mesma maneira como no experimento 1.

Como a interação ABCDEF está confundida, então a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABCDEF}} = 999,35016$, e a $SQ_{\text{Res. c/conf.}} = SQ_{\text{Res. s/conf.}} - SQ_{\text{ABCDEF}}$, como também se perde 1 g.l. do resíduo. O quadro da análise de variância será:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	1	999,35016	-	-
Tratamentos	21	499.528,94	-	-
A	1	142.798,96	142.798,96	345,02**
B	1	96.362,128	96.362,128	232,82**
C	1	78.185,946	78.185,946	188,91**
D	1	59.871,973	59.871,973	144,66**
E	1	33.115,811	33.115,811	80,01**
F	1	37.751,518	37.751,518	91,21**
AB	1	8.882,5913	8.882,5913	21,46**
AC	1	4.742,0439	4.742,0439	11,46**
AD	1	3.835,6346	3.835,6346	9,27**
AE	1	2.370,9596	2.370,9596	5,73*
AF	1	2.458,4243	2.458,4243	5,94*
BC	1	8.837,4104	8.837,4104	21,35**
BD	1	1.574,304	1.574,304	3,80
BE	1	1.589,4176	1.589,4176	3,84
BF	1	5.159,1898	5.159,1898	12,46**
CD	1	2.785,9923	2.785,9923	6,73*
CE	1	4.151,5471	4.151,5471	10,03**
CF	1	1.487,0664	1.487,0664	3,59
DE	1	1.239,9202	1.239,9202	3,00
DF	1	1.814,973	1.814,973	4,38*
EF	1	513,13576	513,13576	1,24
Resíduo	41	16.969,255	413,88427	-
Total	63	517.497,54	-	-

Os valores de F são os mesmos do experimento 1.

Podemos observar que:

a. Com o confundimento da interação ABCDEF, em termos de significância não mudou nada.

b. O QM do resíduo com confundimento fica menor do que o QM do resíduo sem confundimento, e esta diferença é de 13,93966.

c. Esta diferença entre os QM's. será maior ou menor pela escolha da interação a ser confundida, por exemplo, se escolhessemos a interação ABEF, o QM do resíduo seria 343,06809. Mas, se fosse escolhida a interação ACDF, o QM do resíduo seria 438,25333, como vemos o mesmo aumentou em relação ao QM do resíduo do fatorial completo.

d. A eficiência será:

$$\bar{E} = \frac{n_b QM_{\text{Blocos}} + n_e QM_{\text{Erro}}}{(n_b + n_e) QM_{\text{Erro}}}, \text{ onde}$$

$$n_b = 1$$

$$n_e = 63 - 1 = 62, \text{ então}$$

$$\bar{E} = \frac{1 \times 999,35016 + 62 \times 413,88427}{63 \times 413,88427} = \frac{26.660,175}{26.074,709} \rightarrow \bar{E} = 1,022$$

e. Se a interação escolhida fosse ABEF, a eficiência seria:

$$QM_{\text{Blocos}} = 3.902,8133$$

$$QM_{\text{Erro}} = \frac{14.065,792}{41} = 343,06809$$

$$\hat{E} = \frac{1 \times 3.902,8133 + 62 \times 343,06809}{63 \times 343,06809} = \frac{25.173,035}{21.613,29} \rightarrow \hat{E} = 1,165$$

Como foi visto para os experimentos 1, 2 e 3, a eficiência da interação ABEF quando confundida, continua sendo maior do que a interação ABCDEF.

Agora vamos confundir as interações ABDE e ACDF, como sabemos a interação generalizada BCEF também estará confundida.

Para formar os 4 blocos procedemos da mesma maneira como no experimento 1.

Como as interações ABDE, ACDF e BCEF estão confundidas, então a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABDE}} + SQ_{\text{ACDF}} + SQ_{\text{BCEF}} = 31,276056 + 0,2185562 + 93,170756 \rightarrow SQ_{\text{Blocos}} = 124,66537$, então:

$$SQ_{\text{Res. c/conf.}} = SQ_{\text{Res. s/conf.}} - SQ_{\text{Blocos}} = 17.968,605 - 124,66537 \rightarrow$$

$$SQ_{\text{Res. c/conf.}} = 17.843,94$$

Assim, temos o quadro da análise de variância.

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	3	124,66537	41,555123	-
Tratamentos	21	499.528,94	-	-
A	1	142.798,96	142.798,96	312,10**
B	1	96.362,128	96.362,128	210,61**
C	1	78.185,946	78.185,946	170,88**
D	1	59.871,973	59.871,973	130,86**
E	1	33.115,811	33.115,811	72,38**
F	1	37.751,518	37.751,518	82,51**
AB	1	8.882,5913	8.882,5913	19,41**
AC	1	4.742,0439	4.742,0439	10,36**
AD	1	3.835,6346	3.835,6346	8,38**
AE	1	2.370,9596	2.370,9596	5,18*
AF	1	2.458,4243	2.458,4243	5,37*
BC	1	8.837,4101	8.837,4101	19,32**
BD	1	1.574,304	1.574,304	3,44
BE	1	1.589,4176	1.589,4176	3,47
BF	1	5.159,1898	5.159,1898	11,28**
CD	1	2.785,9923	2.785,9923	6,09*
CE	1	4.151,5471	4.151,5471	9,07**
CF	1	1.487,0664	1.487,0664	3,25
DE	1	1.239,9202	1.239,9202	2,71
DF	1	1.814,973	1.814,973	3,97
EF	1	513,13576	513,13576	1,12
Resíduo	39	17.843,94	457,53692	-
Total	63	517.497,54	-	-

Os valores de F são os mesmos do experimento 1.

Devemos notar que:

a. Os efeitos principais e as interações AB, AC, AD, BC, BF e CE continuam sendo significativas aos níveis de 5% e 1%.

b. O QM do resíduo confundindo essas 2 interações fica maior do que o QM do resíduo sem confundimento, isto se deve a escolha das interações, pois as suas SQ's são pequenas. Se fossem escolhidas as interações ABEF e ABC para serem confundidas, o QM do erro diminuiria.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{n_b QM_{\text{Blocos}} + n_e QM_{\text{Erro}}}{(n_b + n_e) QM_{\text{Erro}}}, \text{ onde } n_b = 3 \text{ e } n_e = 63 - 3 = 60$$

$$\hat{E} = \frac{3 \times 41,555123 + 60 \times 457,53692}{63 \times 457,53692} = \frac{27.576,881}{28.824,826} \rightarrow \hat{E} = 0,957$$

Caso fosse escolhidas as interações ABEF e ABC para serem confundidas com efeitos de blocos teríamos:

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABEF}} + SQ_{\text{ABC}} + SQ_{\text{CEF}} \rightarrow SQ_{\text{Blocos}} = 5.785,3287$$

$$SQ_{\text{Res.}} = 12.183,276$$

ou

$$QM_{\text{Blocos}} = 1.928,4429$$

$$QM_{\text{Res.}} = 312,3917$$

A eficiência seria:

$$\hat{E} = \frac{3 \times 1.928,4429 + 60 \times 312,3917}{63 \times 312,3917} = \frac{24.528,831}{19.680,677} \rightarrow \hat{E} = 1,246$$

Comparando estas eficiências, vemos que seria melhor escolhermos as interações ABEF e ABC para serem confundidas, pois as mesmas dão uma eficiência maior do que 1.

Agora vamos trabalhar com 1/2 da repetição do experimento 4.

Para isto vamos tomar a relação de identidade I = +ABCDEF, e assim temos as seguintes combinações de tratamentos, ver exemplo 1, do item 3.1.5.1.1.

(1) = 223,14	ae = 242,68	af = 250,94	ef = 237,14
ab = 291,98	be = 215,54	bf = 218,84	abef = 369,30
ac = 268,84	ce = 248,24	cf = 221,80	acef = 402,84
bc = 263,74	abce = 441,86	abcf = 440,72	bcef = 373,24
ad = 286,20	de = 242,62	df = 280,50	adef = 386,96
bd = 243,18	abde = 410,86	abdf = 437,80	bdef = 353,64
cd = 247,72	acde = 394,04	acdf = 397,18	cdef = 316,44
abcd = 434,98	bcde = 383,18	bcdf = 402,66	abcdef = 638,52

Aquí vamos utilizar o mesmo procedimento em-

pregado para o experimento 1, assim todas as observações da-
da anteriormente são válidas.

No Quadro 8 (anexo 1) temos o quadro com a
adaptação do procedimento de Yates. Assim o quadro da análi-
se de variância é:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	21	289.195,73		
A	1	82.426,12	82.426,12	272,70**
B	1	50.622,438	50.622,438	167,48**
C	1	43.858,334	43.858,334	145,10**
D	1	41.015,344	41.015,344	135,69**
E	1	17.432,179	17.432,179	57,67**
F	1	24.737,552	24.737,552	81,84**
AB	1	4.998,0002	4.998,0002	16,54**
AC	1	2.809,5008	2.809,5008	9,29*
AD	1	1.366,5992	1.366,5992	4,52
AE	1	1.377,6001	1.377,6001	4,56
AF	1	1.456,9202	1.456,9202	4,82
BC	1	7.528,872	7.528,872	24,91**
BD	1	1.704,6961	1.704,6961	5,64*
BE	1	776,18	776,18	2,57
BF	1	1.366,0765	1.366,0765	4,52
CD	1	46,94805	46,94805	0,16
CE	1	2.711,4248	2.711,4248	8,97*
CF	1	543,51045	543,51045	1,80
DE	1	63,845	63,845	0,21
DF	1	1.986,3905	1.986,3905	6,57*
EF	1	367,205	367,205	1,21
Resíduo	10	3.022,6156	302,26156	-
Total	31	292.218,35	-	

$$F_{5\%} (1, 10) = 4,96$$

$$F_{1\%} (1, 10) = 10,04$$

Com 1/2 da repetição, notamos que:

a. Os efeitos principais e as interações AB e BC continuam sendo significativas aos níveis de 5% e 1%, as interações AC, BD, CE e DF são significativas somente ao nível de 5%, enquanto que as interações AD, AE, AF, BE, BF, CD, CF, DE e EF são não significativas.

b. O seu QM de resíduo diminuiu em relação ao QM de resíduo do fatorial completo com e sem confundimento.

c. A eficiência será:

$$\hat{E} = \frac{QM_{\text{Res. compl.}}}{QM_{\text{Res. frac.}}} = \frac{427,82393}{302,26156} \rightarrow \hat{E} = 1,415$$

Vemos que a eficiência do fatorial fracionado em relação ao fatorial completo é maior do que 1.

Vamos agora colocar 1/2 do fatorial 2^6 em 2 blocos, para isto precisamos confundir uma interação de 3 fatores, e assim perdemos 1 g.l. do resíduo.

A interação escolhida com sua respectiva alias será $BCD = AEF$.

Para formar os dois blocos procedemos da mes-

ma maneira como no experimento 1.

Sabemos que a $SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{BCD}} = 10,90445$, e $SQ_{\text{Res. c/frac. e conf.}} = SQ_{\text{Res. c/frac. s/conf.}} - SQ_{\text{BCD}}$, como também perdemos 1 g.l. do resíduo. O quadro da análise de variância ser:

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	1	10,90445	-	-
Tratamentos	21	289.195,73	-	-
A	1	82.426,12	82.426,12	246,32**
B	1	50.622,438	50.622,438	151,28**
C	1	43.858,334	43.858,334	131,06**
D	1	41.015,344	41.015,344	122,57**
E	1	17.432,179	17.432,179	52,09**
F	1	24.737,552	24.737,552	73,92**
AB	1	4.998,0002	4.998,0002	14,94**
AC	1	2.809,5008	2.809,5008	8,40*
AD	1	1.366,5992	1.366,5992	4,08
AE	1	1.377,6001	1.377,6001	4,12
AF	1	1.456,9202	1.456,9202	4,35
BC	1	7.528,872	7.528,872	22,50**
BD	1	1.704,6961	1.704,6961	5,09
BE	1	776,18	776,18	2,32
BF	1	1.366,0765	1.366,0765	4,08
CD	1	46,94805	46,94805	0,14
CE	1	2.711,4248	2.711,4248	8,10*
CF	1	543,51045	543,51045	1,62
DE	1	63,845	63,845	0,19
DF	1	1.986,3905	1.986,3905	5,94*
EF	1	367,205	367,205	1,10
Resíduo	9	3.011,7112	334,63458	-
Total	31	292.218,35	-	-

$$F_{5\%}(1,9) = 5,12$$

$$F_{1\%}(1,9) = 10,56$$

Notamos que:

a. Os efeitos principais e as interações AB e BC continuam sendo significativas aos níveis de 5% e 1%.

b. A interação BD que seu confundimento era significativa ao nível de 5%, aqui ela não é mais, isto se deve ao aumento do QM do resíduo.

c. Como já sabemos pelo item b, o QM do resíduo do fatorial fracionado com confundimento aumentou em relação ao mesmo sem confundimento, isto se deve a interação escolhida.

d. A eficiência será:

$$\bar{E} = \frac{QM_{\text{Res. frac. s/conf.}}}{QM_{\text{Res. frac. c/conf.}}} = \frac{302,26156}{334,63458} \rightarrow \bar{E} = 0,903$$

e. Caso fosse escolhida a interação ABC (ver anexo 1 - Quadro 8), para ser confundida, o QM do resíduo diminuiria, ou seja:

$$SQ_{\text{Blocos}} = SQ_{\text{ABC}} = 1.137,645, \text{ e}$$

$$SQ_{\text{Res. frac. c/conf.}} = 1.884,9706, \text{ então:}$$

$$QM_{\text{Res. frac. c/conf.}} = \frac{1.884,9706}{9} = 209,44118$$

Assim, a eficiência neste caso será:

$$\bar{E} = \frac{Q^M_{\text{Res. frac. s/conf.}}}{Q^M_{\text{Res. frac. c/conf.}}} = \frac{302,26156}{209,44118} \rightarrow \bar{E} = 1,443$$

Comparando estas eficiências, vemos que seria melhor escolher a interação ABC para ser confundida, pois ela nos dá uma eficiência maior do que 1.

Agora vamos resumir o experimento 4, montando o quadro abaixo, onde aparece os QM's residuais e as eficiências de todos os casos vistos:

Experimento 4	QM	$\bar{E}$
1. Fatorial completo s/conf.	427,82393	-
2. Fatorial completo conf. a int. ABCDEF	413,88427	1,022
3. Fatorial completo conf. a int. ABEF	343,06809	1,165
4. Fatorial completo conf. as int's. ABDE e ACDF	457,53692	0,957
5. Fatorial completo conf. as int's. ABEF e ABC	312,3917	1,246
6. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. s/conf.	302,26156	1,415
7. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. a int. BCD	334,63458	0,903(*)
8. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. a int. ABC	209,44118	1,443(*)

(*) Estas eficiências foram calculadas sobre 1/2 da repetição.

No quadro abaixo, temos os resultados dos 4 experimentos, dando para cada um os QM'S e as eficiências dos casos estudados.

Casos estudados	Experimento 1		Experimento 2		Experimento 3		Experimento 4	
	QM	E	QM	E	QM	E	QM	E
1. Fatorial completo s/conf.	26,532031	-	106,12303	-	238,747	-	427,82393	-
2. Fatorial completo conf. a int. ABCDEF	25,787007	1,019	103,14833	1,019	231,92234	1,019	413,88427	1,022
3. Fatorial completo conf. a int. ABEP	21,433199	1,159	85,738807	1,158	193,1467	1,157	343,06809	1,165
4. Fatorial completo conf. as int's. ABDE e ACDF	28,379849	0,957	113,51457	0,957	255,37603	0,957	457,53692	0,957
5. Fatorial completo conf. as int's. ABEP e ABC	19,435269	1,243	77,480767	1,246	174,73172	1,244	312,3917	1,246
6. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. s/conf.	20,105329	1,320	80,237015	1,323	181,07525	1,318	302,26156	1,415
7. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. a int. BCD	22,90576	0,878	89,086838	0,901	201,04757	0,901	334,63458	0,903
8. Fatorial fracionado: 1/2 da rep. conf. a int. ABC	13,589116	1,479	54,151683	1,482	122,44348	1,479	209,44118	1,443

Tomando como base este quadro, podemos notar que aumentando os desvios padrões dos erros observamos que:

a. Os QM's aumentam ou diminuem na mesma proporção nos 8 casos estudados em cada experimento.

b. As eficiências não mudam de um experimento para outro.

c. O fatorial fracionado em cada experimento tem o seu QM do resíduo menor do que o QM do resíduo fatorial completo sem confundimento, e com isto a eficiência é maior do que 1.

d. Dependendo da interação escolhida para ser confundida, o QM do resíduo tanto para fatorial completo como para o fatorial fracionado pode aumentar ou diminuir.

e. O menor QM do resíduo e consequentemente a maior eficiência do fatorial completo foi quando se confundiu as interações ABEF e ABC, e para o fatorial fracionado foi quando a interação ABC foi confundida, isto não muda para os 4 experimentos.

5. CONCLUSÕES

Pelos resultados e comentários obtidos anteriormente, podemos chegar a algumas conclusões importantes sobre os 4 experimentos discutidos.

5.1. Quando os desvios padrões dos erros aumentam, temos:

a. Para o fatorial completo com e sem confundimento, algumas interações de 2 fatores passam a ser significativas somente ao nível de 5%, e outras passam a ser não significativas.

b. Para 1/2 da repetição com e sem confundimento, somente no primeiro experimento é que todos os efeitos principais e interações de 2 fatores são significativos aos níveis de 5% e 1%.

5.2. A eficiência do fatorial fracionado sem confundimento em relação ao fatorial completo sem confundimento é maior do que 1, nos 4 experimentos estudados.

5.3. Diminuição do QM do resíduo tanto para o fatorial completo como para o fatorial fracionado depende da interação escolhida para ser confundida.

5.4. Para os fatoriais da série 3^n , o procedimento é o mesmo, ou seja, será uma extensão do que ocorre com os fatoriais da série 2^n .

6. BIBLIOGRAFIA

- ADDELMAN, S., 1963. Techniques for constructing fractional replicate plans. *Journal American Statistical Association*, 58: 45-71.
- BANERJEE, K.S., 1950. A note on fractional replication of factorial arrangements. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 10: 87-94.
- BANERJEE, K.S. e W.T. FEDERER, 1966. On estimation and constructio in fractional replication. *Annals Mathematical Statistics*, 37: 1033-1039.
- BIAZI, E., 1985. Construção de frações de fatoriais de resolução III. Piracicaba, ESALQ, 196 p. (Dissertação de Mestrado).

- BOSE, R.C. e K. KISHEN, 1940. On the Problem of confounding in the general symmetric factorial design. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 5: 21-36.
- BROWNLEE, K.A., B.K. KELLEY e P.K. LORRAINE, 1948. Fractional replication arrangements for factorial experiments with factors at two levels. *Biometrika*, XXXV, III e IV: 268-276.
- CHINLOY, T., R.F. INNES e D.J. FINNEY, 1952. An example of fractional replication in an experiment on sugar cane manuring. *Journal of Agricultural Science*, 43: 1-11.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. *Experimental Designs*. John Wiley and Sons, 2.^a Edição, Nova York . 611 p.
- DAVIES, O.L. e W.A. HAY, 1950. The construction and uses of fractional factorial designs in industrial research. *Biometrics*, 6: 233-249.
- FINNEY, D.J., 1945. The fractional replication of factorial arrangements. *Annals of eugenics, Lond.*, 12,4: 291-301.
- FINNEY, D.J., 1945. Recent developments in the design of field experiments. III. Fractional replication. *Journal of Agricultural Science*, 36,3: 184-191.
- FINNEY, D.J., 1947. The construction of confounding arrangements. *Empire Journal Experimental Agricultural*, 15: 107-112.

FISHER, R.A., 1942. The Theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of groups. *Annals of Eugenics, Lond.*, 11: 341-353.

FISHER, R.A., 1945. A system of confounding for factors with more than two alternatives, giving completely orthogonal cubes and higher powers. *Annals of Eugenics, Lond.*, 12: 283-290.

FISHER, R.A., 1951. *The Design of Experiments*. Oliver and Boyd, London, 6.^a Edição. 244 p.

JOHN, P.W.M., 1962. Three quarter replicates of 2^n designs. *Biometrics*, 18: 172-184.

KEMPTHORNE, O., 1947. A note on differential responses in blocks. *Journal of Agricultural Science*, 37: 245-248.

KEMPTHORNE, O., 1947. A simple approach to confounding and fractional replication in factorial experiments. *Biometrika*, XXXIV, III and IV: 255-272.

KEMPTHORNE, O. e R.G. TISCHER, 1953. An example of the use of fractional replication. *Biometrics*, 9: 295-303.

KEMPTHORNE, O., 1975. *The Design and Analysis of Experiments*. 6.^a Edição. John Wiley, Nova York, 631 p.

- KISHEN, K., 1942. On expressing any single degree of freedom for treatment in S^m factorial arrangement in terms of its sets for main effects and interactions. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 6: 133-140.
- KSHIRSAGAR, A.M., 1966. Balanced factorial designs. *Journal of the Royal Statistical Society*, 28B-3: 559-567.
- KURKJIAN, B. e M. ZELEN, 1962. A calculus of factorial arrangements. *Annals Mathematical Statistics*, 33: 600-619.
- KURKJIAN, B. e M. ZELEN, 1963. Applications of the calculus of factorial arrangements. I. Block and direct product designs. *Biometrika*, 50: 63-73.
- LIMA, I.V., 1985. Obtenção de frações de fatoriais de resolução V. Piracicaba, ESALQ, 142 p. (Dissertação de Mestrado).
- MULLER, E.R., 1966. Balanced confounding of factorial experiments. *Biometrika*, 53,3 e 4: 507-524.
- NETER, J. e WASSERMAN, W., 1974. *Applied Linear Statistical Models*. 1.^a Edição. Richard D. Irwin, Inc. 842 p.
- PLACKETT, R.L. e J.P. BURMAN, 1946. The design of optimum multifractional experiments. *Biometrika*, XXXIII, IV: 305-325.

- RAGHAVARAD, D., 1971. *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*. John Wiley and Sons, Nova York, 386 p.
- RAO, C.R., 1948. The Theory of fractional replication in factorial experiments. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 10: 81-86.
- YATES, F., 1937. The Design and analysis of factorial experiments. *Technical Communication*, nº 35. Imperial Bureau of Soil Science.
- ZONTA, E.P., 1980. Um método de confundimento nos experimentos fatoriais. Piracicaba, ESALQ, 176 p. (Dissertação de Mestrado).

A N E X O 1

Montos	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	Identifi- cação	Soma de Quadrados
a	227,46	474,41	2,116,16	4,549,94	9,801,36	21,189,1	G	7,015,280,6
b	246,95	1,121,255	2,433,78	5,251,42	11,387,74	2,918,62	A	133,099,11
ab	231,425	506,205	2,376,37	5,201,55	1,291,15	2,442,00	B	93,177,563
c	289,07	615,05	2,875,05	6,186,185	1,627,47	1,628,28	AB	9,079,2312
ac	233,495	508,44	2,357,835	543,04	1,027,75	2,194,08	C	75,218,548
bc	272,71	1,302,73	2,843,72	746,11	1,414,25	569,54	AC	5,068,3721
abc	350,935	1,268,505	2,766,39	726,185	393,88	615,4	BC	5,917,4556
abd	354,115	1,606,545	3,419,795	901,285	368,4	-85,86	ABC	1,115,18656 (*)
ad	228,64	496,295	2,09,53	421,36	939,9	1,955,59	D	59,755,191
bd	271,8	567,345	335,51	606,39	1,254,18	462,71	AD	3,345,321
abd	250,545	1,264,52	323,93	623,165	253,99	412,51	BD	2,658,8203
cd	342,695	735,215	432,18	791,085	315,55	-61,49	ABD	59,078439 (*)
acd	250,255	564,55	1,226,38	175,86	301,07	444,41	CD	3,085,9414
bcd	332,98	703,955	405,99	218,02	314,33	-14,97	ACD	3,5015766 (*)
abcd	319,695	696,155	384,3	224,515	-20,94	30,31	BCD	14,354627 (*)
abcde	437,17	910,39	1,919,95	143,885	-64,92	6,05	ABCD	0,571914 (*)
e	236,00	492,985	154,93	372,77	816,3	1,686,11	E	44,421,358
ae	258,295	532,395	266,43	567,13	1,139,29	376,17	AE	2,210,9979
be	241,01	554,61	135,31	520,445	244,23	352,95	BE	1,946,4641
abe	338,335	727,19	353,64	733,735	218,48	-38,47	ABE	23,124077 (*)
ce	247,76	561,2	-262,645	120,15	212,39	407,65	CE	2,596,5394
ace	319,755	703,32	194,31	360,52	200,12	62,65	ACE	61,328877 (*)
bce	306,45	680,4	186,515	344,42	133,295	10,63	BCE	1,7655766 (*)
abce	428,765	898,8	243,665	446,665	-41,06	10,63	BCE	23,851014 (*)
de	246,955	543,24	127,115	143,59	229,02	348,58	DE	1,898,5628
ade	317,595	683,14	83,74	157,48	215,39	39,16	ADE	23,961025 (*)
bde	294,04	667,745	169,33	158,795	-5,91	-6,24	BDE	0,6084 (*)
abde	409,915	872,265	236,66	155,535	-9,06	-13,34	ABDE	2,7805563 (*)
cde	298,52	660,985	143,98	1,57	10,25	-13,56	CDE	2,873025 (*)
acde	397,635	838,86	104,41	-22,51	20,06	-36,96	ACDE	21,3444 (*)
bcde	381,92	825,58	74,31	-64,035	-3,14	6,64	BCDE	0,6889 (*)
abcde	528,47	1,094,37	69,575	-0,885	9,19	53,48	ABCDE	44,689225 (*)
	21,189,100	24,107,72	27,312,000	30,605,16	33,840,28	37,114,8		
f	234,125	19,49	46,085	317,62	701,48	1,586,38	F	39,321,898
af	258,86	57,645	126,35	498,68	984,63	336,32	AF	1,767,3616
bf	240,335	39,215	229,09	485,885	201,07	386,5	BF	2,334,0977
abf	342,715	93,18	338,04	653,405	175,1	-25,48	ABF	10,144225 (*)
cf	239,65	43,16	205,765	125,98	185,03	314,28	CF	1,543,3112
acf	314,96	92,15	314,68	118,25	167,92	61,56	ACF	59,213025 (*)
bcf	304,71	82,725	313,63	85,795	42,16	13,26	BCF	2,7473063 (*)
abcf	422,48	117,475	420,105	132,685	-80,63	-43,98	ABCF	30,222506 (*)
df	254,925	22,295	55,26	111,5	194,36	322,99	DF	1,630,0397
adf	306,275	97,325	172,58	100,89	213,29	-25,75	ADF	10,360352 (*)
bdf	292,67	71,995	74,69	97,875	13,69	-12,27	BDF	2,3523891 (*)
abdf	410,65	123,315	59,15	102,245	43,96	20,63	ABDF	6,6499516 (*)
cdf	290,48	139,9	65,965	-8,38	13,89	-13,63	CDF	2,9027641 (*)
acdf	389,92	115,875	67,33	-32,68	3,26	3,15	ACDF	0,155039 (*)
bcdf	380,79	99,115	96,34	-15,695	-24,08	9,81	BCDF	1,5036891 (*)
abcdf	518,01	146,55	85,915	-4,735	63,15	12,33	ABCDF	2,3754516 (*)
ef	245,21	24,735	62,76	120,07	181,06	283,15	EF	1,252,7175
aef	298,03	102,38	80,83	108,95	167,52	18,93	AEF	10,538139 (*)
bef	350,99	75,31	48,99	108,915	-7,73	-17,11	BEF	4,5742516 (*)
abef	387,15	117,77	34,83	106,475	46,89	122,79	ABEF	235,58413 (*)
cef	282,785	51,35	82,515	9,63	-10,61	18,93	CEF	4,5742516 (*)
acef	384,96	117,98	76,28	-15,54	4,37	35,27	ACEF	19,437077 (*)
bcef	367,06	99,44	45,235	1,365	-24,30	-17,15	BCEF	4,5956641 (*)
abcef	505,205	137,22	47,435	-10,425	10,96	87,23	ABCEF	118,89176 (*)
def	285,245	52,82	77,645	18,07	-11,12	-13,54	DEF	2,8645563 (*)
ade	375,76	91,16	42,46	-7,82	-2,44	54,62	ADEF	46,614756 (*)
bdef	356,91	102,175	66,63	-14,24	-25,17	14,98	BDEF	3,5062563 (*)
abdef	481,95	138,145	37,78	-24,71	-11,79	35,26	ABDEF	19,426036 (*)
cdef	346,185	99,495	38,34	-30,05	-25,89	8,68	CDEF	1,177225 (*)
acdef	479,395	125,04	35,97	-28,85	32,53	13,38	ACDEF	2,7972563 (*)
bcdef	463,065	131,21	34,545	6,335	56,96	-58,42	BCDEF	53,326506 (*)
abcdef	631,305	168,24	35,03	2,855	-3,48	-60,44	ABCDEF	57,078025 (*)
	21,189,100	24,107,71	27,312,000	30,605,16	33,840,28	37,114,8		40,407,52

QUADRO 2.

Tratamentos	Produções	(1)	(2)	(3)	(4)	(5) Efeito Total	Identi- ficação	Soma de Quadrados
(1)	227,46	486,32	1.015,725	2.211,5	4.837,355	10.564,33	G = ABCDEF	3.487.638,4
a(f)	258,86	529,405	1.195,775	2.646,055	5.706,775	1.488,52	A = BCDEF	69.240,368
b(f)	240,335	512,36	1.187,92	2.560,21	647,765	1.227,69	B = ACDEF	47.100,71
ab	289,07	683,415	1.458,135	3.146,565	840,755	385,48	AB = CDEF	4.643,5884
c(f)	239,65	526,725	1.131,665	2.74,74	526,395	1.114,67	C = ABDEF	38.827,788
ac	272,71	661,195	1.428,545	373,025	701,295	292,26	AC = BDEF	2.669,2471
bc	260,935	640,175	1.389,52	358,13	205,765	335,01	BC = ADEF	3.507,2406
abc(f)	422,48	817,96	1.757,045	482,625	179,715	-50,2	ABC = DEF	78,75125(+)
d(f)	254,925	503,505	80,135	214,14	450,265	1.020,91	D = ABCEFF	32.570,538
ad	271,8	628,16	194,605	312,255	664,405	222,78	AD = BCEFF	1.550,9665
bd	250,545	632,72	176,98	287,76	133,535	223,89	BD = ACEFF	1.566,4604
abd(f)	410,65	795,825	196,045	413,535	158,725	-21,28	ABD = CEF	14,1512 (+)
cd	250,255	622,695	159,225	145,82	171,285	160,81	CD = ABDEF	808,1205
acd(f)	389,92	766,825	198,905	59,945	163,725	-16,04	ACD = BEF	8,04005 (+)
bcd(f)	380,79	743,82	181,79	57,56	-115,365	2,17	BCD = AEF	0,1471531 (+)
abcd	437,17	1.013,225	300,835	122,155	65,165	144,6	ABCD = EF	653,41125
		10.564,33	12.052,85	13.666,02	15.357,76	17.095,6		
e(f)	245,21	31,4	43,085	180,05	434,555	849,22	E = ABCDF	22.536,707
ae	258,295	48,735	171,055	270,215	586,355	192,99	AE = BCDF	1.163,9106
be	241,01	33,06	134,47	296,88	98,285	174,9	BE = ACDF	955,93781
abe(f)	387,15	161,545	177,785	367,525	124,495	-26,05	ABE = CDF	21,206328 (+)
ce	247,76	16,875	124,655	114,47	98,115	214,14	CE = ABDF	1.432,9981
ace(f)	384,96	160,105	163,105	19,065	125,775	25,10	ACE = BDF	19,687813 (+)
bce(f)	367,06	139,865	144,13	39,68	-85,875	-7,56	BCE = ADF	1,78605
abce	428,765	56,38	269,405	119,045	64,595	180,53	ABCE = DF	1.018,4713
de	246,955	13,085	17,335	127,97	90,165	151,8	DE = ABCF	720,10125
ade(f)	375,74	146,14	128,485	43,315	70,645	26,21	ADE = BCF	21,667628 (+)
bde(f)	356,91	137,2	143,23	38,45	-95,405	27,66	BDE = ACF	23,908613 (+)
abde	409,915	61,705	-83,285	125,275	79,365	150,47	ABDE = CF	707,53815
cde(f)	346,185	128,785	133,055	111,15	-84,655	-19,52	CDE = ABF	11,9072 (+)
acde	397,635	53,005	-75,495	-226,515	86,825	174,77	ACDE = BF	954,51728
bcde	381,92	51,45	-75,78	-208,55	-337,665	171,48	BCDE = AF	918,91845
abcde(f)	631,305	249,385	197,935	273,715	482,265	819,93	ABCDE = F	21.008,913
		10.564,33	12.052,85	13.666,02	15.357,76	17.095,6		
						20.201,76		

NOTA:

- a) No quadro acima, o símbolo do tratamento f é colocado entre parênteses para lembrar que ele não desempenha nenhum papel na "ordem padrão".
- b) Na última coluna temos as SQ's, que foram calculadas elevando-se ao quadrado os efeitos totais, coluna (5), e divididos por 32, que é o número de unidades no experimento.
- c) As demais colunas são calculadas como no método de Yates.

QUADRO 4.

Tratamentos	Produções (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Identificação	Soma de Quadrados
(1)	226,02	1.005,45	2.201,00	4.375,11	10.568,66	G = ABCDEF	3.490.517,9
a(f)	252,22	1.195,55	2.674,11	5.693,55	1.537,04	A = BCDEF	73.827,874
b(f)	233,17	1.207,82	2.550,42	667,53	1.239,38	B = ACDEF	48.001,962
ab	290,04	1.466,27	3.143,13	869,51	386,96	AB = CDEF	4.679,3138
c(f)	233,70	1.109,33	291,48	536,79	1.141,34	C = ABDEF	40.708,031
ac	271,42	1.441,09	376,05	702,59	298,12	AC = BDEF	2.777,3605
bc	261,87	1.391,04	366,26	219,53	383,62	BC = ADEF	4.598,8845
abc(f)	428,56	1.752,09	503,25	167,43	-100,40	ABC = DEF	315,005 (+)
d(f)	263,45	87,07	226,28	448,53	1.065,82	D = ABCEF	35.499,133
ad	276,60	204,41	310,51	692,81	221,56	AD = BCEF	1.534,0261
bd	248,09	184,76	281,52	123,87	223,78	BD = ACEF	1.564,9215
abd(f)	419,70	191,29	421,07	174,25	-42,56	ABD = CEF	56.6048 (+)
cd	249,41	624,99	155,64	199,37	96,62	CD = ABEF	291,73201
acd(f)	392,34	766,05	63,89	184,25	-32,08	ACD = BEF	32,1602 (+)
bcd(f)	388,08	736,04	59,12	-150,73	4,34	BCD = AEF	0,5886125 (+)
abcd	436,44	314,87	108,31	50,33	129,20	ABCD = EF	521,845
	10.568,66	12.105,70	13.732,04	15.454,72	17.121,40		
e(f)	242,52	30,20	190,10	473,11	819,44	E = ABCDF	20.932,626
ae	253,09	56,87	258,43	592,71	201,98	AE = BCDF	1.274,8725
be	232,52	37,72	331,76	84,57	165,80	BE = ACDF	859,05125
abe(f)	381,20	166,69	361,05	136,99	-52,10	ABE = CDF	84,825313 (+)
ce	247,92	13,15	117,34	84,23	244,28	CE = ABDF	1.864,7725
ace(f)	390,92	171,61	6,53	139,55	50,38	ACE = BDF	79,317013 (+)
bce(f)	369,12	142,93	47,76	-91,75	-15,12	BCE = ADF	7,1442 (+)
de	433,13	48,36	126,49	49,19	201,06	DE = ABCF	1.263,2851
abce	245,51	10,57	144,34	67,33	119,60	ABCE = DF	447,005
ade(f)	379,48	148,68	55,03	29,29	52,42	ABE = BCF	85,870513 (+)
bde(f)	355,82	143,00	45,30	-110,81	55,32	BDE = ACF	95,63445 (+)
abde	410,23	64,01	138,95	78,73	140,94	ABDE = CF	620,75261
cde(f)	336,27	133,97	102,30	-89,31	-38,04	CDE = ABF	45,22005 (+)
acde	399,77	54,41	-253,03	93,65	189,54	ACDE = BF	1.122,6691
bcde	382,34	63,50	-217,10	-355,33	182,96	BCDE = AF	1.046,0738
abcde(f)	633,71	251,37	267,43	484,53	839,86	ABCDE = F	22.042,851
	10.568,66	12.105,70	13.732,04	15.454,72	17.121,40		20.278,72

QUADRO 6.

Tratamentos	Produções (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Identificação	Soma de Quadrados
(1)	224,58	478,16	995,175	2.190,5	10.572,99	G = ABCDEF	3.493,378,7
a(f)	253,58	517,015	1.195,325	5.680,325	1.365,56	A = ECDEF	78.562,516
b(f)	226,005	497,88	1.227,76	687,295	1.251,07	R = ACDEF	48.911,754
ab	291,01	697,445	1.474,405	838,265	388,44	AB = CDEF	4.715,176
c(f)	227,75	553,375	1.086,995	308,22	1.168,01	C = ABDEF	42.632,73
ac	270,13	674,385	1.453,635	379,075	303,98	AC = BDEF	2.887,62
bc	262,805	643,325	1.392,56	374,39	432,23	BC = ADEF	5.838,2116
abc(f)	434,64	831,08	1.747,135	523,875	-150,6	ABC = DEF	708,76125 (+)
d(f)	271,975	487,715	94,005	238,42	1.110,73	D = ABCEF	38.553,785
ad	281,4	599,28	214,215	308,765	220,34	AD = BCEF	1.517,1786
bd	245,635	644,96	192,54	275,28	223,67	BD = ACEF	1.563,3834
abd(f)	428,75	808,675	186,535	428,605	-63,84	ABD = CEF	127,3608 (+)
cd	248,565	627,285	159,275	165,46	34,43	CD = ABEF	37,044528
acd(f)	394,76	765,275	215,115	67,835	-48,12	ACD = BEF	72,36045 (+)
bcd(f)	395,37	728,26	194,97	60,68	6,51	BCD = AEF	1,3243781 (+)
abcd	435,71	1.018,875	328,905	94,465	113,8	ABCD = AEF	404,70125
	10.572,99	12.158,55	13.798,06	15.551,68	17.149,2		
e(f)	239,83	29,00	38,855	200,15	787,66	E = ABCDF	19.387,759
ae	247,885	65,005	199,565	511,665	210,97	AE = BCDF	1.390,8857
be	224,03	42,38	121,01	366,64	156,7	BE = ACDF	767,34031
abc(f)	375,25	171,835	187,755	354,575	-78,15	ABE = CDF	190,85695 (+)
ce	248,08	9,425	111,565	120,21	274,42	CE = ABDF	2.353,323
ace(f)	396,88	183,115	163,715	-6,005	75,57	ACE = BDF	178,4632 (+)
bce(f)	371,18	146,195	137,99	55,84	-22,68	BCE = ADF	16,07445 (+)
abce	437,495	40,34	290,615	133,935	221,59	ABCE = DF	1.534,4415
de	244,065	8,055	36,005	160,71	87,4	DE = ABCF	238,71125
ade(f)	383,22	151,22	129,455	66,745	78,63	ADE = BCF	193,20865 (+)
bde(f)	354,73	148,8	173,69	52,15	82,98	BDE = ACF	215,17751 (+)
abde	410,545	66,315	-105,855	152,625	131,41	ABDE = CF	539,64338
cde(f)	326,555	139,155	143,165	93,45	-58,36	CDE = ABF	107,1648 (+)
acde	401,905	55,815	-82,485	-279,545	204,31	ACDE = BF	1.304,4555
bcd(f)	382,76	75,55	-83,34	-225,65	194,44	BCDE = AF	1.181,4661
abcde(f)	636,115	253,355	177,805	281,145	859,79	ABCDE = F	23.101,214
	10.572,99	12.158,55	13.798,06	15.551,68	17.149,2		
					20.355,68		

mentos	produtores	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Efeito Total	Identifi- cação	Soma de Quadrados
(1)	223,14	486,44	1.021,62	2.158,64	4.639,64	9.916,58	21.387,54	G	7.147.294,8
a	263,30	535,18	1.137,02	1.481,00	5.276,94	11.470,96	3.023,10	A	142.798,96
b	243,20	526,02	1.110,72	2.395,48	5.326,22	1.313,22	2.883,38	B	96.362,128
ab	291,98	611,00	1.370,28	2.881,46	6.144,74	1.709,88	753,98	AB	8.882.5913
c	257,18	521,56	1.072,56	2.405,34	536,04	954,38	2.236,94	C	78.185,946
ac	268,84	589,16	1.322,92	2.920,88	777,18	1.529,00	550,90	AC	4.742,0439
bc	263,74	597,02	1.211,28	2.755,56	780,74	432,38	752,06	BC	8.837,4101
abc	347,26	773,26	1.610,18	3.389,18	929,14	321,60	336,06	ABC	1.764,6301(*)
d	235,36	502,98	1.106,14	184,12	376,56	964,22	1.957,50	D	59.871,973
ad	286,20	569,58	1.299,20	351,92	576,82	1.272,72	495,46	AD	3.835,6346
bd	243,18	570,26	1.314,08	325,72	704,66	147,90	317,42	BD	1.574,304
abd	345,98	752,66	1.606,80	451,46	824,34	403,00	422,26	ABD	878,38141(*)
cd	247,72	577,00	1.203,52	386,78	127,56	353,94	422,26	CD	2.785,9923
acd	349,30	694,28	1.552,04	393,96	304,82	398,12	-68,74	ACD	73.831056(*)
bcd	338,28	695,82	1.475,38	367,20	322,06	-72,38	130,10	BCD	264,48891(*)
abcd	434,98	913,36	1.913,80	561,94	-0,46	-263,68	35,58	ABCD	19,780256(*)
e	260,30	500,74	88,94	133,72	374,96	808,34	1.455,82	E	33.115,811
ae	242,68	605,40	95,18	243,84	589,26	1.149,16	389,54	AE	2.370,9596
be	215,54	539,64	153,64	249,00	485,78	293,54	318,94	BE	1.589,4176
abe	354,04	759,56	198,28	327,82	786,94	201,92	422,26	ABE	329,69481(*)
ce	248,24	584,60	120,88	324,58	50,88	188,94	515,46	CE	4.151,5471
ace	322,02	725,48	204,84	380,08	97,02	128,48	241,98	ACE	914,91126(*)
bce	310,80	685,80	219,20	375,68	103,58	-153,38	51,14	BCE	40,864056(*)
de	242,62	518,76	168,86	80,48	144,88	232,70	281,70	DE	1.239,9202
ade	334,38	684,76	217,92	47,08	209,06	189,56	145,50	ADE	330,78516(*)
bde	283,42	671,18	169,72	213,40	205,58	-32,50	-13,82	BDE	2,9842563(*)
abde	410,86	880,86	224,24	91,42	192,54	-36,24	-44,74	ABDE	31,276056(*)
cde	305,78	662,74	98,32	192,42	6,40	49,86	-65,38	CDE	66,789756(*)
acde	394,04	812,64	268,88	129,64	-78,78	80,24	-156,46	ACDE	382,49581(*)
bcde	383,18	807,52	216,54	9,24	-256,14	-1,18	35,18	BCDE	19,338006(*)
abcde	527,18	1.106,28	345,40	-9,70	-7,54	36,76	225,06	ABCDE	791,43756(*)
	21.387,54	24.410,64	27.648,00	30.851,84	33.904,32	37.302,40			
f	249,80	40,16	48,74	115,40	322,36	637,30	1.554,38	F	37.751,518
af	250,94	48,78	84,98	259,56	485,98	818,52	396,66	AF	2.458,4243
bf	218,84	11,66	67,60	250,36	515,54	241,14	-574,62	BF	5.159,1898
abf	386,56	83,52	176,24	338,90	633,62	148,40	-110,78	ABF	191,75326(*)
cf	317,84	102,80	50,84	193,06	167,80	199,26	308,50	CF	1.487,0664
acf	318,84	101,58	117,28	292,72	125,74	119,68	255,10	ACF	1.016,8127(*)
bcf	440,72	96,70	210,54	348,52	7,18	177,26	44,18	BCF	30,498006(*)
abcf	480,50	-17,62	104,66	438,42	194,74	-322,52	-191,30	ABCF	571,80766(*)
df	304,10	138,50	219,92	6,24	110,12	214,30	340,82	DF	1.814,973
bdf	291,68	73,78	144,88	44,64	78,82	301,16	-91,62	ADF	131,15976(*)
abdf	437,80	131,06	235,20	83,96	55,50	46,14	-60,46	BDF	57,115806(*)
cdf	288,62	91,76	166,00	13,06	72,98	195,84	73,66	ABDF	84,778056(*)
acdf	397,18	127,44	209,68	49,06	-33,40	64,18	-43,14	CDF	29,079056(*)
bcdf	402,66	88,26	149,90	170,56	-62,78	-85,18	30,38	BCDF	0,2185562(*)
abcdf	518,34	144,00	298,76	128,86	-18,94	248,60	37,94	ABCDF	14,421006(*)
ef	237,14	1,14	8,62	36,24	144,16	163,62	181,22	EF	22,491306(*)
aef	281,62	167,72	71,86	108,64	88,54	118,08	-92,74	AEF	134,38606(*)
bef	315,46	96,04	51,96	115,80	99,66	-42,06	-79,58	BEF	98,952756(*)
abef	369,30	121,88	-4,88	93,26	89,90	187,56	-699,78	ABEF	3.902,8133(*)
cef	268,34	23,60	156,12	115,26	38,40	-31,30	86,86	CEF	117,88531(*)
acef	402,84	146,12	57,28	90,32	-70,90	17,48	149,70	ACEF	350,15766(*)
bcef	373,24	108,56	35,68	43,68	5,46	-88,58	-77,22	BCEF	93,170756(*)
abcef	507,62	115,68	55,74	148,86	-41,70	43,84	333,78	ABCEF	1.740,767(*)
def	275,78	44,48	166,58	63,24	72,40	-55,62	-45,54	DEF	32,404556(*)
abdef	386,96	53,84	25,84	-56,84	-22,54	-9,76	229,62	ADEF	823,83351(*)
bdef	353,64	134,50	122,52	-98,84	-24,94	-109,30	48,78	BDEF	37,179506(*)
abdef	459,00	134,38	7,12	20,06	105,18	-47,16	132,42	ABDEF	273,98526(*)
cdef	316,44	111,18	9,36	-140,74	-120,08	-94,94	45,86	CDEF	32,861556(*)
acdef	491,08	105,36	-0,12	118,90	130,12	62,14	62,14	ACDEF	60,334056(*)
bdef	467,76	174,64	-5,82	-9,48	25,34	238,98	225,06	BCDEF	791,43756(*)
abdef	638,52	170,76	-3,88	1,94	11,42	-13,92	-252,90	ABCDEF	999,35016(*)
	21.387,54	24.410,64	27.648,00	30.851,84	33.904,32	37.302,40	40.865,28		

QUADRO 8.

Tratamentos	Produções	(1)	(2)	(3)	(4)	(5) Efeito Total	Identificação
(1)	223,14	474,08	984,90	2.180,00	4.910,22	10.567,32	G = ABCDEF 3.489.632,8
a(f)	250,94	510,82	1.195,10	2.730,22	5.657,10	1.624,08	A = BCDEF 82.426,12
b(f)	218,84	490,64	1.247,68	2.530,84	707,06	1.272,76	B = ACDEF 50.622,438
ab	291,98	704,46	1.482,54	3.126,26	917,02	399,92	AB = CDEF 4.998,0002
c(f)	221,80	566,70	1.064,66	324,96	557,58	1.184,68	C = ABDEF 43.858,334
ac	268,84	680,98	1.466,18	382,10	715,18	299,84	AC = BDEF 2.809,5008
bc	263,74	644,90	1.394,08	382,52	247,06	490,84	BC = ADEF 7.528,872
abc(f)	440,72	837,64	1.732,18	534,50	152,86	-190,80	ABC = DEF 1.137,645 (+)
d(f)	280,50	479,82	100,94	250,56	445,06	1.145,64	D = ABCEF 41.015,346
ad	286,20	584,84	224,02	307,02	739,62	209,12	AD = BCEF 1.366,5992
bd	243,18	651,08	200,32	269,04	104,54	233,56	BD = ACEF 1.704,6961
abd(f)	437,80	815,10	181,78	446,14	195,30	-75,12	ABD = CEF 176,3442 (+)
cd	247,72	629,58	159,30	175,28	255,54	-38,76	CD = ABEF 46,94805
acd(f)	397,18	764,50	223,22	71,78	235,30	-74,16	ACD = BEF 171,8658 (+)
bcd(f)	402,66	710,48	201,56	62,24	-221,46	18,68	BCD = AEF 10,90445 (+)
abcd	434,98	1.021,70	332,94	90,62	30,66	108,40	ABCD = EF 367,205
		10.567,32	12.191,40	13.864,08	15.648,64	17.176,00	
e(f)	237,14	27,80	36,74	210,20	550,22	746,88	E = ABCDF 17.432,179
ae	242,68	73,14	213,82	234,86	595,42	209,96	AE = BCDF 1.377,6001
be	215,54	47,04	114,28	401,52	57,14	157,60	BE = ACDF 776,18
abe(f)	369,30	176,98	192,74	338,10	151,98	-94,20	ABE = CDF 277,38125 (+)
ce	248,24	5,70	105,02	123,08	56,46	294,56	CE = ABDF 2.711,4248
ace(f)	402,84	194,62	164,02	-18,54	177,10	90,76	ACE = BDF 257,41805 (+)
bce(f)	373,24	149,46	134,92	63,92	-103,50	-28,24	BCE = ADF 12.8018 (+)
abce	441,86	32,32	311,22	131,38	28,38	252,12	ABCE = DF 1.986,3905
de	242,62	5,54	45,34	177,08	24,66	45,20	DE = ABCF 63,845
ade(f)	386,96	153,76	129,94	78,46	-63,42	94,84	ADE = BCF 281,08205 (+)
bde(f)	353,64	154,60	188,92	59,00	-141,62	120,64	BDE = ACF 454,8128 (+)
abde	410,86	68,62	-117,14	176,30	67,46	131,88	ABDE = CF 543,51045
cde(f)	316,44	144,34	148,22	84,60	-98,62	-88,08	CDE = ABF 242,4402 (+)
acde	394,04	57,22	-85,98	-306,06	117,30	209,08	ACDE = BF 1.366,0765
bcde	383,18	77,60	-87,12	-234,20	-390,66	215,92	BCDE = AF 1.456,9202
abcde(f)	638,52	255,34	177,74	264,86	499,06	889,72	ABCDE = F 24.737,552
		10.567,32	12.191,40	13.864,08	15.648,64	17.176,00	
						20.432,64	

A N E X O 2

```

3  CLS
5  PA= 44539
8  POKE 65495,0
10 N=2
20 DIM A(N),B(N),C(N),D(N),E(N),F(N),AB(N,N),AC(N,N),BC(N,N),
    AD(N,N),BD(N,N),CD(N,N),AE(N,N),BE(N,N),CE(N,N),DE(N,N),
    AF(N,N),BF(N,N),CF(N,N),DF(N,N),EF(N,N),
30 DIM A1(N,N,N),A2(N,N,N),A3(N,N,N),B1(N,N,N),A4(N,N,N),
    A5(N,N,N),B2(N,N,N),A6(N,N,N),B3(N,N,N),C1(N,N,N),
    A7(N,N,N),A8(N,N,N),B4(N,N,N),A9(N,N,N),B5(N,N,N),
    C2(N,N,N),C3(N,N,N),B6(N,N,N),C4(N,N,N),D1(N,N,N),
40 DIM B7(N,N,N,N),B8(N,N,N,N),B9(N,N,N,N),C5(N,N,N,N)
    C6(N,N,N,N),C7(N,N,N,N),C8(N,N,N,N),C9(N,N,N,N),
    D2(N,N,N,N),D3(N,N,N,N),D4(N,N,N,N),D5(N,N,N,N),
    D6(N,N,N,N),D7(N,N,N,N),D8(N,N,N,N)
50 DIM D9(N,N,N,N,N),E1(N,N,N,N,N),E2(N,N,N,N,N),
    E3(N,N,N,N,N),E4(N,N,N,N,N),E5(N,N,N,N,N),
60 DIM E6(N,N,N,N,N,N),E7(N,N,N,N,N,N),Y(N,N,N,N,N,N)
70 INPUT "MÉDIA"=""; M
80 FOR I=1 TO N
90 PRINT "A" I="";: INPUT A(I)
100 PRINT "B" I="";: INPUT B(I)
110 PRINT "C" I="";: INPUT C(I)
120 PRINT "D" I="";: INPUT D(I)
130 PRINT "E" I="";: INPUT E(I)
150 PRINT "F" I="";: INPUT F(I)
160 NEXT I
170 FOR I=1 TO N
180 FOR J=1 TO N
190 PRINT "AB" I"J"="";: INPUT AB(I,J)
200 PRINT "AC" I"J"="";: INPUT AC(I,J)
210 PRINT "AD" I"J"="";: INPUT AD(I,J)
220 PRINT "AE" I"J"="";: INPUT AE(I,J)
230 PRINT "AF" I"J"="";: INPUT AF(I,J)

```

```

240 PRINT "BC" I "J" = " ; : INPUT BC(I,J)
250 PRINT "BD" I "J" = " ; : INPUT BD(I,J)
260 PRINT "BE" I "J" = " ; : INPUT BE(I,J)
270 PRINT "BF" I "J" = " ; : INPUT BF(I,J)
280 PRINT "CD" I "J" = " ; : INPUT CD(I,J)
290 PRINT "CE" I "J" = " ; : INPUT CE(I,J)
300 PRINT "CF" I "J" = " ; : INPUT CF(I,J)
310 PRINT "DE" I "J" = " ; : INPUT DE(I,J)
320 PRINT "DF" I "J" = " ; : INPUT DF(I,J)
330 PRINT "EF" I "J" = " ; : INPUT EF(I,J)
340 NEXT J,I
350 FOR I=1 TO N
360 FOR J=1 TO N
370 FOR K=1 TO N
380 PRINT "ABC" I "J" "K" = " ; : INPUT A1(I,J,K)
390 PRINT "ABD" I "J" "K" = " ; : INPUT A2(I,J,K)
400 PRINT "ABE" I "J" "K" = " ; : INPUT A4(I,J,K)
410 PRINT "ABF" I "J" "K" = " ; : INPUT A7(I,J,K)
420 PRINT "ACD" I "J" "K" = " ; : INPUT A3(I,J,K)
430 PRINT "ACE" I "J" "K" = " ; : INPUT A5(I,J,K)
440 PRINT "ACF" I "J" "K" = " ; : INPUT A8(I,J,K)
450 PRINT "ADE" I "J" "K" = " ; : INPUT A6(I,J,K)
460 PRINT "ADF" I "J" "K" = " ; : INPUT A9(I,J,K)
470 PRINT "AEF" I "J" "K" = " ; : INPUT C3(I,J,K)
480 PRINT "BCD" I "J" "K" = " ; : INPUT B1(I,J,K)
490 PRINT "BCE" I "J" "K" = " ; : INPUT B2(I,J,K)
500 PRINT "BCF" I "J" "K" = " ; : INPUT B4(I,J,K)
510 PRINT "BDE" I "J" "K" = " ; : INPUT B3(I,J,K)
520 PRINT "BDF" I "J" "K" = " ; : INPUT B5(I,J,K)
530 PRINT "BEF" I "J" "K" = " ; : INPUT B6(I,J,K)
560 PRINT "CDE" I "J" "K" = " ; : INPUT C1(I,J,K)
570 PRINT "CDF" I "J" "K" = " ; : INPUT C2(I,J,K)
580 PRINT "CEF" I "J" "K" = " ; : INPUT C4(I,J,K)
590 PRINT "DEF" I "J" "K" = " ; : INPUT D1(I,J,K)
600 NEXT K,J,I

```



```

610 FOR I= 1 TO N
620 FOR J= 1 TO N
630 FOR K= 1 TO N
640 FOR L= 1 TO N
650 PRINT "ABCD""I""J""K""L"= ";: INPUT B7(I,J,K,L)
660 PRINT "ABCE""I""J""K""L"= ";: INPUT B8(I,J,K,L)
670 PRINT "ABCF""I""J""K""L"= ";: INPUT C7(I,J,K,L)
680 PRINT "ABDE""I""J""K""L"= ";: INPUT B9(I,J,K,L)
690 PRINT "ABDF""I""J""K""L"= ";: INPUT C8(I,J,K,L)
700 PRINT "ABEF""I""J""K""L"= ";: INPUT D3(I,J,K,L)
710 PRINT "ACDE""I""J""K""L"= ";: INPUT C5(I,J,K,L)
720 PRINT "ACDF""I""J""K""L"= ";: INPUT C9(I,J,K,L)
730 PRINT "ACEF""I""J""K""L"= ";: INPUT D4(I,J,K,L)
740 PRINT "ADEF""I""J""K""L"= ";: INPUT D6(I,J,K,L)
750 PRINT "BCDE""I""J""K""L"= ";: INPUT C6(I,J,K,L)
760 PRINT "BCDF""I""J""K""L"= ";: INPUT D2(I,J,K,L)
770 PRINT "BCEF""I""J""K""L"= ";: INPUT D5(I,J,K,L)
780 PRINT "BDEF""I""J""K""L"= ";: INPUT D7(I,J,K,L)
790 PRINT "CDEF""I""J""K""L"= ";: INPUT D8(I,J,K,L)
800 NEXT L,K,J,I
810 FOR I=1 TO N
820 FOR J=1 TO N
830 FOR K=1 TO N
840 FOR L=1 TO N
850 FOR D=1 TO N
860 PRINT "ABCDE""I""J""K""L""O"= ";: INPUT D9(I,J,K,L,O)
870 PRINT "ABCDF""I""J""K""L""O"= ";: INPUT E1(I,J,K,L,O)
880 PRINT "ABCEF""I""J""K""L""O"= ";: INPUT E2(I,J,K,L,O)
890 PRINT "ABDEF""I""J""K""L""O"= ";: INPUT E3(I,J,K,L,O)
900 PRINT "ACDEF""I""J""K""L""O"= ";: INPUT E4(I,J,K,L,O)
910 PRINT "BCDEF""I""J""K""L""O"= ";: INPUT E5(I,J,K,L,O)
920 NEXT O,L,K,J,I
930 FOR I=1 TO N
940 FOR J=1 TO N

```

```

950 FOR K=1 TO N
960 FOR J=1 TO N
970 FOR O=1 TO N
980 FOR P=1 TO N
990 PRINT "ABCDEF"I"J"K"L"O"P"=";: INPUT E6(I,J,K,L,O,P)
1000 PRINT "ERRO"I"J"K"L"O"P"=";: INPUT E7(I,J,K,L,O,P)
1010 NEXT P,O,L,K,J,I
1012 CLS: INPUT" DESEJA MULTIPLICAR O ERRO POR UMA CONSTANTE
      <S/N>;S$
1014 IF S$= "S" THEN PRINT "CONSTANTE=";: INPUT KK
1016 IF S$= "N" THEN KK=1
1018 CLS:Z=0
1030 FOR P=1 TO N
1040 FOR O=1 TO N
1050 FOR L=1 TO N
1060 FOR K=1 TO N
1070 FOR J=1 TO N
1080 FOR I=1 TO N
1090 Y(I,J,K,L,O,P)=M+A(I)+B(J)+C(K)+D(L)+E(O)+F(P)+AB(I,J)+
      AC(I,J)+BC(I,J)+AD(I,L)+BD(J,L)+CD(K,L)+AE(I,O)+BE(J,O)+
      CE(K,O)+DE(L,O)+AF(I,P)+BF(J,P)+CF(K,P)+DF(L,P)+EF(O,P)+
      A1(I,J,K)+A2(I,J,L)+A3(I,K,L)+B1(J,K,L)+A4(I,J,O)+
      A5(I,K,O)+B2(J,K,O)
1100 Y(I,J,K,L,O,P)=Y(I,J,K,L,O,P)+A6(I,L,O)+B3(J,L,O)+
      C1(K,L,O)+A7(I,J,P)+A8(I,K,P)+B4(J,K,P)+A9(I,L,P)+
      B5(J,L,P)+C2(K,L,P)+C3(I,O,P)+B6(J,O,P)+C4(K,O,P)+
      D1(L,O,P)+B7(I,J,K,L)+B8(I,J,K,O)+B9(I,J,L,O)+C5(I,K,L,O)+
      C6(J,K,L,O)+C7(I,J,K,P)+C8(I,J,L,P)
1110 Y(I,J,K,L,O,P)=Y(I,J,K,L,O,P)+C9(I,K,L,P)+D2(J,K,L,P)+
      D3(I,J,O,P)+D4(I,K,O,P)+D5(J,K,O,P)+D6(I,L,O,P)+
      D7(J,L,O,P)+D8(K,L,O,P)+D9(I,J,K,L,O)+E1(I,J,K,L,P)+
      E2(I,J,L,O,P)+E3(I,J,L,O,P)+E4(I,K,L,O,P)+E5(J,K,L,O,P)+
      E6(I,J,K,L,O,P)+E7(I,J,K,L,O,P)

```

```
1120 Z= Z+1
1130 IF Z=15 THEN EXEL PA
1140 IF Z=15 THEN Z=0
1150 PRINT "Y""I""J""K""L""O""P")=";Y(I,J,K,L,O,P)
1160 NEXT I,J,K,L,O,P
1170 INPUT DESEJA GRAVAR OS DADOS EM FITA <S/N>";:S$
1180 IF S$="N" THEN 1330
1190 CLS
1200 INPUT" COLOQUE A FITA, PRESSIONE PLAY/RECORD E <ENTER>";S$
1210 OPEN "O",#-1,""
1220 FOR P=1 TO N
1230 FOR O=1 TO N
1240 FOR L=1 TO N
1250 FOR K=1 TO N
1260 FOR J=1 TO N
1270 FOR I=1 TO N
1280 PRINT #-1, Y(I,J,K,L,O,P)
1290 NEXT I,J,K,L,O,P
1300 CLOSE #-1
1310 CLS
1320 PRINT"DADOS GRAVADOS" : EXEC PA
1330 POKE 65494,0
1340 CLS : PRINT @ 237,"FIM"
1350 END
```