ANÁLISE DE COVARIÂNCIA EM DELINEAMENTOS DE BLOCOS COMPLETOS AUMENTADOS (BLOCOS DE FEDERER)

EDMILSON DE ARAUJO SILVA

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO SIMIONATO MORAES

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Junho - 1987

À Deus.

Aos meus pais José Mariano e Neusa Maria,
aos meus irmãos, cunhados e sogros,
pelo carinho.

À minha querida esposa Maria Helena,
aos meus filhos Guilherme e Giovanni,
dedico.

AGRADECIMENTOS

- . Ao Dr. Roberto Simionato Moraes, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP pela orientação.
- . Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, na pessoa de seu Coordenador Prof. Dr. Décio Barbin, pela acolhida e ensinamentos prestados.
- . Aos colegas do Departamento de Estatística e Computação do Instituto de Ciências Exatas da Universidade do Amazonas pelo apoio recebido.
- . À Universidade do Amazonas, a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste curso.
- . Ao Prof. Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, pela revisão do Summary e auxílio na elaboração do exemplo.
- . Ao Prof. Dr. Lusbi Antonio Herreta Sandoval pelo incentivo e ajuda.
- . Ao colega Carlos Tadeu dos Santos Dias pela colaboração na análise do exemplo através do sistema computacional (Algebra) de sua autoria.

Aos funcionários do Centro de Informática na Agricultura - (CIAGRI), pela atenção e ajuda prestada.

. A Sra. Isabel Cristina S. Andreucetti pelo excelente trabalho datilográfico.

. Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP pela colaboração.

ÍNDICE

	Página
RESUMO	ix
SUMMARY	xi
1. INTRODUÇÃO	01
2. REVISÃO BIBLIOGRAFICA	03
2.1. Análise de Covariância	3
2.2. Ensaios em Blocos Completos Aumentados (Blocos de Federer)	13
2.3. Análise de Covariância em Delineamentos Quaisquer com p Variáveis Auxiliares	17
3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	27
3.1. Ensaios em Blocos Completos Aumentados (Blocos de Federer)	27
3.1.1. Definição dos parâmetros	27
3.1.2. Um modelo linear	27
3.1.3. Sistema de equações normais	29
3.1.4. Estimação dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos	32
3.1.4.1. Método clássico	33
3.1.5. Somas de quadrados	37
3.1.6. Esperanças matemáticas das somas de quadrados	38
3.1.6.1. Esperança matemática de $\underline{Y}'\underline{Y}$	38
3.1.6.2. Esperança matemática de $\underline{B}'\underline{k}^{-1}\underline{B}$	39
3.1.6.3. Esperança matemática de $\underline{T}_0^{0'}\underline{Q}$	40
3.1.6.4. Esperança matemática da $SQ R$	41
3.1.7. Quadro da análise de variância	42
3.2. Análise de Covariância em Blocos Completos Aumentados (Blocos de Federer)	43

	Página
3.2.1. Modelo matemático	43
3.2.2. Sistema de equações normais	46
3.2.3. Estimação dos efeitos de tratamen tos ajustados para blocos e regressão..	48
3.2.4. Somas de quadrados	53
3.2.4.1. Soma de quadrados de pa- râmetros	53
3.2.4.2. Soma de quadrados do re- síduo, ajustada para re- gressão	55
3.2.4.3. Soma de quadrados de tra- tamentos, ajustada para blocos e regressão	55
3.2.5. Esperanças matemáticas das somas de quadrados	60
3.2.5.1. Esperança matemática de $\tau_0^0 Q$	60
3.2.5.2. Esperança matemática da SQReg	63
3.2.5.3. Esperança matemática de $\tilde{\gamma}_{\lambda_2}$	65
3.2.5.4. Esperança matemática da SQT _{aj.} [*]	67
3.2.5.5. Esperança matemática de $\underline{Y}'\underline{Y}$	67

	Página
3.2.5.6. Esperança matemática de $\underline{B}'\underline{K}^{-1}\underline{B}$	69
3.2.5.7. Esperança matemática da SQR^*	71
3.2.6. Distribuição das formas quadráticas	72
3.2.6.1. Distribuição de $\underline{T}_0^{0'}\underline{Q}/\sigma^2$	73
3.2.6.2. Distribuição da SQReg/σ^2	75
3.2.6.3. Distribuição de $\tilde{\gamma}\lambda_2/\sigma^2$	77
3.2.6.4. Distribuição da $\text{SQT}_{\text{aj.}}^*/\sigma^2$	78
3.2.6.5. Distribuição de $\underline{Y}'\underline{Y}/\sigma^2$	82
3.2.6.6. Distribuição de $\underline{B}'\underline{K}^{-1}\underline{B}/\sigma^2$	82
3.2.6.7. Distribuição da SQR^*/σ^2	84
3.2.6.8. Distribuição do quociente $\frac{\text{SQReg.}/n_2}{\text{SQR}^*/n_7}$	87
3.2.6.9. Distribuição do quociente $\frac{\text{SQT}_{\text{aj.}}^*/n_4}{\text{SQR}^*/n_7}$	88

Página

3.2.7. Estimadores das médias de tratamentos ajustados para blocos e regressão	90
3.2.8. Quadro da análise de covariância	91
4. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO	92
5. CONCLUSÕES	101
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103

ANÁLISE DE COVARIÂNCIA DE DELINEAMENTOS EM BLOCOS
COMPLETOS AUMENTADOS (BLOCOS DE FEDERER)

Autor: Edmilson de Araujo Silva

Orientador: Prof. Dr. Roberto Simionato Moraes

RESUMO

No presente trabalho considera-se uma variável auxiliar num ensaio em blocos completos aumentados (blocos de Federer). O objetivo foi apresentar um método de análise para esse tipo de ensaio.

Os parâmetros que caracterizam os delineamentos em blocos completos aumentados foram definidos como:

c : número de tratamentos comuns,

b : número de blocos,

z : número de tratamentos regulares,

r_j : número de repetição do tratamento j ($j=1, 2, \dots, c, c+1, \dots, c+z$)

K_i : número de parcelas no bloco i ($i=1, 2, \dots, b$)

N : número total de parcelas ($N= bc + z$)

O modelo matemático adotado foi o seguinte:

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + t_j + \gamma x_{ij} + e_{ij},$$

onde,

y_{ij} é o valor observado da parcela do bloco i que recebeu o tratamento j ;

μ é a média geral;

β_i é o efeito do bloco i ;

t_j é o efeito do tratamento j ;

γ é o coeficiente da regressão linear de Y em relação a X

$x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}$, onde X_{ij} são os valores observados da variável auxiliar (covariável)

e_{ij} é o erro experimental associado à observação y_{ij} , onde se supõe que os e_{ij} 's são independentes e normalmente distribuídos, com média zero e variância σ^2 .

O efeito t_j envolve t_s ($s = 1, 2, \dots, c$) e $t_{r_{s'}}$ ($s' = c+1, c+2, \dots, c+z$), que são os efeitos dos tratamentos comuns e regulares, respectivamente.

Sob as condições anteriores são determinados: o sistema de equações normais, os estimadores dos efeitos dos parâmetros, as somas de quadrados e suas esperanças matemáticas; e ainda, as distribuições das formas quadráticas e um quadro da análise de covariância.

Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar o método proposto.

ANALYSIS OF COVARIANCE IN AUGMENTED RANDOMIZED
COMPLETE BLOCK DESIGN (BLOCK OF FEDERER)

Author: Edmilson de Araujo Silva

Adviser: Prof. Dr. Roberto Simionato Moraes

SUMMARY

A statistical investigation was conducted for the case in which experiments are designed in augmented randomized complete block with a concomitant variable.

The main objective was to develop a method of analysis for this specific kind of experiment.

The following parameters were considered as pertinent to the design:

c : number of standard treatments;

b : number of blocks;

z : number of new treatments;

r_j : number of replicate in the j^{th} treatment;

K_i : number of plots in the i^{th} block ($i=1, 2, \dots, b$);

N : total number of plots ($N= bc + z$).

The following mathematical model was considered:

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + t_j + \gamma x_{ij} + e_{ij} ,$$

where:

y_{ij} observed value due to j^{th} treatment and i^{th} block;

μ denotes the effect of the general mean;

β_i denotes the effect of the i^{th} block;

t_j denotes the effect of the j^{th} treatment;

γ is a regression coefficient for the relation between Y and X

$x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}$, where X_{ij} is the centered observed value of the concomitant variable;

e_{ij} is a random error component with expectation zero and variance σ^2 , the e_{ij} 's being independently distributed.

The effect t_j involves t_s ($s = 1, 2, \dots, c$) and $t_{r_{s'}}$ ($s' = c+1, c+2, \dots, c+z$), respectively the standard and new treatments.

Under the given conditions, the solution of the normal equations, the estimators of the parameters effects, the sum of squares, the expectations of sum of squares, the distributions of the quadratic forms and the analysis of covariance table are calculated.

A numerical example is used to illustrate the proposed method.

1. INTRODUÇÃO

O delineamento de blocos aumentados, introduzido por FEDERER (1956a) com o objetivo de permitir o uso da estatística, através da análise de variância, nas fases iniciais dos programas de melhoramento da cana-de-açúcar, foi de grande importância para os melhoristas.

Esse delineamento apresenta dois grupos de tratamentos:

- 1) Tratamentos comuns (c), repetidos b vezes;
- 2) Tratamentos regulares (z), aparecendo uma única vez em todo experimento.

A aplicação de delineamentos em blocos completos aumentados na experimentação agrícola, apresenta a vantagem de comparar novas variedades, tratamentos, ou novas metodologias,

quando a quantidade de material disponível é limitada. Por exemplo, em melhoramento de plantas há necessidade de testar um número muito grande de tratamentos (genótipos), porém a quantidade de material propagativo por genótipo frequentemente é pequena.

Entretanto, as análises de variância permitem o estudo da variável sem levar em conta prováveis influências de outras.

Esse fato e mais falta de repetição de alguns tratamentos pela exigüidade de material, razão da criação do delineamento, implicou em fazer um estudo da viabilidade do uso da análise de covariância para este tipo de delineamento, já que a covariância além de melhorar o controle local, bastante afetado pela falta de repetição, leva em consideração outras variáveis que podem influenciar naquela que estamos interessados.

No presente trabalho é apresentado um estudo sobre a análise de covariância para o delineamento em blocos completos aumentados quando a covariável é linear. A justificativa deve-se a escassez de informações na bibliografia e a importância desse delineamento no melhoramento da cana-de-açúcar.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Análise de Covariância

Segundo COX e McCULLAGH (1982) a análise de covariância foi introduzida por Fisher. Conforme estes autores Eden e Fisher (1927) apresentaram a decomposição de uma soma de produtos e os correspondentes coeficientes de correlação. Sanders (1930) por sugestão de Fisher foi o primeiro a usar a análise de covariância para aperfeiçoamento da precisão. Tal procedimento foi descrito por Fisher (1932) no livro "Statistical Methods for Research Workers", no qual aplicou-se o método da análise de variância usual a $y - \hat{\gamma}z$, onde y é a resposta, z é a covariável e $\hat{\gamma}$ é a estimativa do coeficiente de regressão calculado via análise de covariância. Esta foi admitida apenas como uma aproximação do teste F aplicado aos tratamentos. Dois trabalhos mostrando aplicações da análise de covariância foram apresentados na Royal Statistical Society (Wishart, 1934; Wilsdon, 1934). Fisher contribuiu na discussão de ambos e apre-

ciou os pontos nos quais foi admitida a aplicação de um teste F exato. Este fato foi muito discutido por Fisher (1935) no livro "Design of Experiments".

COCHRAN (1957) cita as principais finalidades do uso da análise de covariância, que são:

- i) aumentar a precisão nos experimentos casualizados;
- ii) remover efeitos de variáveis perturbadoras, em estudos estatísticos;
- iii) contribuir para esclarecer a natureza dos efeitos de tratamentos;
- iv) ajustar regressões em classificações múltiplas;
- v) analisar dados quando algumas observações são perdidas.

O autor pondera que as hipóteses requeridas para o uso válido da análise de covariância, são uma extensão natural daquelas requeridas para uma análise de variância, a saber:

- i) os efeitos de tratamentos, de blocos e da regressão devem ser aditivos;
- ii) os resíduos (e_{ij}) devem ser independentes e normalmente distribuídos, com média zero e mesma variância;

O autor recomenda que as precauções gerais que são tomadas para o uso da análise de variância devem ser igualmente observadas na análise de covariância. Observa que, na análise de covariância, se supõe que a forma correta da equação de regressão tenha sido ajustada.

Segundo o autor, os casos da análise de covariância com mais de uma variável auxiliar são denominados como covariância múltipla. No caso de duas variáveis auxiliares, x e z, as estimativas dos coeficientes de regressão podem ser obtidas do sistema de equações:

$$\begin{aligned} E_{xx} \hat{b}_{y.x} + E_{xz} \hat{b}_{y.z} &= E_{xy} \\ E_{xz} \hat{b}_{y.x} + E_{zz} \hat{b}_{y.z} &= E_{zy}, \end{aligned}$$

onde E_{xx} , E_{zz} , E_{xz} , E_{xy} e E_{zy} são as somas de quadrados do resíduo relativas às variáveis x, z, xz, xy e zy, respectivamente.

A estimativa da variância da diferença entre dois efeitos de tratamentos é dada, por:

$$s_e^2 \left[\begin{aligned} &\frac{2}{r} + (x_{i.} - x_{j.})^2 c_{xx} + \\ &2(x_{i.} - x_{j.})(z_{i.} - z_{j.}) c_{xz} + \\ &+ (z_{i.} - z_{j.})^2 c_{zz} \end{aligned} \right]$$

e, a estimativa da variância média, sobre todos os pares de tratamentos, por:

$$\frac{2}{r} s_e^2 (1 + t_{xx}c_{xx} + 2 t_{xz}c_{xz} + t_{zz}c_{zz}),$$

onde:

t_{xx} , t_{zz} e t_{xz} são os quadrados médios de tratamentos relativos às variáveis x , z e xz , respectivamente;
 c_{xx} , c_{zz} e c_{xz} são os elementos da inversa da matriz constituída pelas somas de quadrados E_{xx} , E_{zz} e E_{xz} ;
 $\bar{x}_i$ e $\bar{z}_i$ são as médias do i -ésimo tratamento relativas às variáveis x e z , respectivamente;
 s_e^2 é o quadrado médio do resíduo, ajustado para regressão;
 r é o número de repetições.

KIRK (1968) destaca as vantagens e desvantagens da análise de covariância. As maiores vantagens da análise de covariância apresentadas pelo autor são:

- i) Permite um experimentador remover uma ou mais fontes potenciais de viés que são difíceis de eliminar através de um controle experimental;
- ii) A análise de covariância dá aproximadamente a mesma redução no erro experimental que o uso de delineamentos em blocos casualizados. Ela pode ser usada depois que os dados tenham sido coletados. A estratificação dos

indivíduos em blocos homogêneos precisa ser feito no começo do experimento;

As maiores desvantagens da análise de covariância, segundo o autor, são:

- i) Requer cálculos mais laboriosos que o correspondente na análise de variância;
- ii) A análise de covariância requer um conjunto de restrições de suposições que podem tornar impraticável o seu uso num determinado ensaio;
- iii) Fórmulas computacionais para estimar observações perdidas e fazer comparações entre médias para algum delineamento da análise de covariância são relativamente complexos.

NETER e WASSERMAN (1974) ressaltam as idéias fundamentais para o uso de modelos de covariância em delineamentos inteiramente casualizados e blocos casualizados. Discutem os problemas dos modelos de covariância na determinação das regressões. Finalmente indicam como a análise de covariância pode ser considerada como uma modificação da análise de variância.

Asseguram os autores que nos delineamentos inteiramente casualizados os erros experimentais podem ser devi-

dos as heterogeneidades das unidades experimentais. Uma possibilidade para reduzir os erros experimentais sem utilizar os delineamentos em blocos é empregar a análise de covariância. Nos casos em que o delineamento em blocos não é viável então a análise de covariância pode ser usada para reduzir o erro experimental.

Segundo os autores, na terminologia da análise de covariância a variável quantitativa independente é chamada de variável concomitante onde a escolha dessa variável é muito importante. Se a variável concomitante não tem relação com a variável resposta nada se ganha com o uso da análise de covariância. Quanto a escolha da variável concomitante ela não pode ser influenciada pelas variáveis qualitativas (tratamentos). É mais usual, porém, não é regra geral, usar como variável concomitante, uma variável obtida antes da instalação do experimento, sorteando-se os tratamentos independentemente dos valores da variável concomitante.

Os autores discutem a comparação de tratamentos para os casos em que as retas de regressão estimadas para tratamentos são paralelas e para os casos em que não são.

Para os autores a linearidade da relação entre Y e X não é essencial na análise de covariância. Qualquer outra relação pode ser usada, como a quadrática, cujo modelo fica:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \gamma_1(X_{ij} - \bar{X}..) + \gamma_2(X_{ij} - \bar{X}..)^2 + e_{ij}$$

Entretanto, quase sempre o modelo linear é uma boa aproximação.

Os testes de adequacidade do modelo de covariância linear para os autores, exigem alguns fatos, ou seja:

- 1) Normalidade dos erros;
- 2) Homogeneidade de variâncias;
- 3) Igualdade dos coeficientes de regressão para as equações dos tratamentos;
- 4) Linearidade da regressão.

Os autores também apresentam o seguinte procedimento de formulação da regressão.

Para estimar os parâmetros do modelo de covariância $Y_{ij} = \mu + \tau_j + \gamma(X_{ij} - \bar{X}) + \epsilon_{ij}$ (I) e analisar questões de interesse utilizamos o procedimento por regressão.

Denotando por $Z_{ij} = (X_{ij} - \bar{X})$ no modelo de covariância (I) e usando $r-1$ variáveis indicadoras para os r 's tratamentos, tem-se:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{se a observação for do tratamento 1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$x_{r-1} = \begin{cases} 1 & \text{se a observação for do tratamento } r-1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, podemos expressar o modelo de covariância (I) como segue:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_{ij1} + \dots + \beta_{r-1} X_{ijr-1} + \beta_r Z_{ij} + \epsilon_{ij} \quad (\text{II})$$

As correspondências entre os parâmetros nos modelos de regressão (II) e os do modelo da análise de covariância (I) são os seguintes:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \mu. + \tau_r \\ (\text{III}) \quad \beta_j &= \tau_j - \tau_r \quad j = 1, \dots, r-1 \\ \beta_r &= \gamma \end{aligned}$$

Estas correspondências são estabelecidas na forma usual. Por exemplo, se uma unidade experimental recebeu r tratamentos, o modelo da análise de covariância (I) produz:

$$Y_{ir} = \mu. + \tau_r + \gamma Z_{ir} + \epsilon_{ir} \quad (\text{IV})$$

Com o modelo de regressão (II), as variáveis X tem os valores:

$X_1 = 0 \quad X_2 = 0 \quad \dots \quad X_{r-1} = 0$. Logo, obtemos o modelo de regressão:

$$Y_{ir} = \beta_0 + \beta_r Z_{ir} + \epsilon_{ir} \quad (V)$$

Igualando (IV) e (V), tem-se:

$$\beta_0 = \mu. + \tau_r$$

$\beta_r = \gamma.$ As outras correspondências são obtidas similarmente.

É evidente que através de (III) os testes concernentes aos efeitos de tratamentos τ_j podem ser feitos da mesma maneira que sobre os coeficientes de regressão β_j ($j=1, \dots, r-1$). Similarmente, estimativas dos efeitos de tratamentos podem ser obtidas, em termos de estimativas dos coeficientes de regressão.

Os autores através de um exemplo desenvolvem um modelo, estimam e testam os efeitos de tratamentos e fazem um teste de paralelismo. Em seguida, apresentam a análise de covariância como uma modificação da análise de variância e em experimentos fatoriais.

Os autores tecem considerações sobre o uso da análise de variância em casos de tomar-se diferenças de variáveis, também chamadas de índices de respostas para análise. Estas levam segundo os autores aos mesmos resultados das análises de covariância das duas variáveis, reduzindo consideravelmente o trabalho.

Mostram que, se a inclinação da reta de regres-

são é igual a 1, as análises de variância e covariância são absolutamente equivalentes, pois o modelo de covariância fica $Y_{ij} = \mu. + \tau_j + x_{ij} + \epsilon_{ij}$ que pode ser escrito como um modelo normal de análise de variância da seguinte maneira:

$$Y_{ij} - x_{ij} = \mu. + \tau_j + \epsilon_{ij}.$$

PIMENTEL GOMES (1985), para a análise de covariância nos delineamentos em blocos completos casualizados e com apenas uma variável auxiliar estabelece, para o cálculo da soma de quadrados de tratamentos, ajustada para regressão, o seguinte procedimento:

$$SQT^* = R'(y^2) - \frac{[R'(xy)]^2}{R'(x^2)} - SQ \text{ Res}^*$$

onde:

$$R'(y^2) = R(y^2) + SQT(Y);$$

$$R'(x^2) = R(x^2) + SQT(X);$$

$$R'(xy) = R(xy) + SPT$$

$R(y^2)$ e $SQT(Y)$ são as somas de quadrados do resíduo e de tratamentos, relativas à variável dependente Y , respectivamente;

$R(x^2)$ e $SRT(X)$ são as somas de quadrados do resíduo e de tratamentos, relativas à variável auxiliar X , respectivamente;

$R(xy)$ e SPT são as somas de produtos da variável dependente y com a variável auxiliar X , relativas ao resíduo e a tratamentos, respectivamente;

$SQ \text{ Res}^*$ é a soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão.

O autor testa o coeficiente de correlação linear, pelo teste t , através da estatística:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n_e}$$

com n_e graus de liberdade, onde:

$$r = \frac{R(xy)}{\sqrt{R(x^2)R(y^2)}} \quad \text{é a estimativa do coeficiente de correlação linear;}$$

n_e é o número de graus de liberdade do resíduo, depois de ajustado para regressão. Observa que a análise de covariância pode ser feita independentemente da significância do valor de r obtido.

Segundo o autor, o procedimento de utilizar-se uma estimativa média para a variância da diferença entre duas médias de tratamentos, ajustadas para regressão, só deve ser utilizado quando a variável auxiliar não interfere nos tratamentos.

2.2. Ensaio em Blocos Completos Aumentados (Blocos de Federer)

Devido a necessidade de um delineamento experimental mais eficiente na comparação de plântulas, ("seedlings") a variedade ("clones"), nas fases iniciais de um programa de melhoramento de cana-de-açúcar, abacaxi, etc. FEDERER (1956a, 1956b, 1961) desenvolveu uma metodologia que permite comparar estas novas variedades, chamadas de variedades regulares, com variedades já existentes, ou comerciáveis, chamadas de comuns; chamando este novo delineamento de "Delineamento aumentado", que é um tipo de delineamento experimental, formado a partir dos delineamentos inteiramente ao acaso, blocos casualizados e quadrado latino.

Estes delineamentos apresentam dois grupos de tratamentos, os comuns, repetidos b vezes, e um segundo grupo, os regulares, que aparecem uma única vez no experimento.

O delineamento em blocos completos aumentados proposto pelo autor permite uma estimativa do erro experimental, com a vantagem de permitir a inclusão de um grande número de tratamentos utilizando um número relativamente pequeno de parcelas. Este consiste em um delineamento clássico em blocos ao acaso sendo que em cada bloco pode-se agregar um certo número de novos tratamentos que aparecem uma única vez no delineamento. O número de tratamentos por bloco não precisa ser igual o que dá maior flexibilidade ao pesquisador.

MARTINEZ GARZA (1972), apresenta o seguinte procedimento

to de casualização para o delineamento em blocos completos aumentados.

A casualização é feita levando em conta que há b blocos com k_i parcelas ($i = 1, 2, \dots, b$). Inicialmente, sorteiam-se os c tratamentos comuns a c das k_i parcelas de cada bloco, em seguida, sorteiam-se os z tratamentos regulares entre as parcelas restantes de cada bloco.

NOGUEIRA (1976) estuda a análise conjunta de ensaios em blocos casualizados completos aumentados, cada ensaio apresenta os mesmos $t = c + z$ tratamentos, distribuídos em r blocos, onde os c tratamentos são considerados comuns pois aparecem nos r blocos, e os z tratamentos são considerados regulares, pois aparecem uma única vez em um dos r blocos. Os blocos são formados por K parcelas, sendo $K = c + p_j$, onde: p_j ($j = 1, 2, \dots, r$) é o número de tratamentos regulares por bloco.

Para desenvolvê-lo, considerou o conjunto dos ensaios como um delineamento comum em blocos incompletos, baseado nos trabalhos de Pimentel Gomes e Guimarães (1958), Pavete (1961) e Pimentel Gomes (1970), admitindo que os ensaios apresentassem variâncias semelhantes.

VIZONI (1984) faz um estudo do delineamento em blocos aumentados com parcelas subdivididas no tempo, tendo

por finalidade, principalmente a aplicação em experimentos agronômicos, aproveitando as produções de anos sucessivos.

O autor considerou, c variedades comuns dispostas em b blocos, e z variedades regulares as quais aparecem uma única vez em todo o experimento e v anos. E ainda que todos os blocos tenham o mesmo número de parcelas (k), nada impedindo entretanto que esses números sejam diferentes.

Adotou o seguinte modelo matemático:

$$y_{ljv} = m + t_l + b_j + (tb)_{lj} + a_v + ta_{lv} + ba_{jv} + e_{ljv}.$$

Quando se trabalha com parcelas subdivididas no tempo, não é raro encontrar correlações diferentes entre duas subparcelas de uma mesma parcela. Neste estudo, por ser um trabalho inicial, o autor considerou apenas o caso onde estas correlações são constantes e existe a independência entre subparcelas de parcelas distintas, resultando:

$$\text{cov}(y_{ljv}, y_{l'j'v'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } l = l'; j = j'; v = v' \\ \rho\sigma^2 & \text{se } l = l'; j = j'; v \neq v' \\ 0 & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Nestas condições, baseando-se na metodologia apresentada por Pimentel Gomes (1967), para blocos incompletos balanceados, e no trabalho desenvolvido por Iemma (1981), so-

bre parcelas subdivididas, o autor determinou: o sistema de equações normais, somas de quadrados dos parâmetros, as matrizes de dispersão, e as comparações múltiplas pelo critério de Tukey.

2.3. Análise de Covariância em Delineamentos Quaisquer com p Variáveis Auxiliares.

KATTI (1965) estudando análise de covariância em qualquer tipo de delineamento, com p variáveis auxiliares, utiliza o seguinte modelo matemático:

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + Z\underline{b} + \underline{e} \quad (2.3.a)$$

onde:

$\underline{Y}$ é o vetor das n observações da variável dependente;

X é a matriz dos coeficientes do delineamento de dim $n \times q$;

$\underline{\beta}$ é o vetor dos parâmetros;

Z é a matriz dos valores observados das p variáveis auxiliares;

$\underline{b}$ é o vetor dos coeficientes de regressão;

$\underline{e}$ é o vetor dos erros experimentais, onde $\underline{e} \sim N(\emptyset, \sigma^2 I)$.

Para obter as soluções, o autor reescreveu o modelo (2.3.a) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= X(\underline{\beta} + \Delta \underline{b}) + (Z - X\Delta) \underline{b} + \underline{e} \\ &= X\underline{\beta}^* + (Z - X\Delta) \underline{b} + \underline{e} \end{aligned}$$

onde Δ deve satisfazer o sistema $X'(Z - X\Delta) = \emptyset$.

Pondera o autor que, se $X'X$ é não singular, então $\hat{\Delta} = (X'X)^{-1} X'Z$. No caso geral, entretanto, $\hat{\Delta} = (X'X)^- X'Z$, é uma solução do sistema $X'(Z - X\hat{\Delta}) = 0$.

As estimativas obtidas através deste procedimento são:

$$\hat{\underline{\beta}} = \hat{\underline{\beta}}^* - \hat{\Delta}\hat{\underline{b}} = (X'X)^- X'\underline{y} - (X'X)^- X'Z\hat{\underline{b}}$$

$$\hat{\underline{b}} = R_1^{-1} R_2 = [(Z - X\hat{\Delta})'(Z - X\hat{\Delta})]^{-1} [(Z - X\hat{\Delta})'\underline{y}]$$

onde:

$\hat{\underline{\beta}}^*$ é o vetor das estimativas dos parâmetros, obtido do modelo

$$\underline{y} = X\underline{\beta}^* + e;$$

$(X'X)^-$ é uma inversa generalizada da matriz $X'X$;

R_1^{-1} é a inversa da matriz constituída pelas somas de quadrados e de produtos do resíduo, relativas às variáveis auxiliares;

R_2 é o vetor constituído pelas somas de produtos das variáveis auxiliares com a variável dependente, relativo ao resíduo.

Segundo esse autor, a matriz de variâncias e covariâncias de $\hat{\underline{b}}$ é dada por:

$$\text{Var}(\hat{\underline{b}}) = R_1^{-1} \sigma^2 \quad \text{e} \quad \text{de } \hat{\underline{\beta}} \text{ é:}$$

$$\text{Var}(\hat{\underline{\beta}}) = \text{Var}(\hat{\underline{\beta}}^*) + \hat{\Delta} \text{Var}(\hat{\underline{b}}) \hat{\Delta}',$$

onde:

$$\text{Var}(\hat{\underline{\beta}}^*) = (X'X)^- \sigma^2$$

PIMENTEL GOMES (1967), estudando experimentos em blocos incompletos, através de matrizes, eliminou inicialmente os efeitos de blocos, os quais considerou, para simplificar, como incluindo o efeito da média geral teórica. Assim procedendo, obteve o sistema $C\hat{T} = Q$, onde a matriz C é singular. As soluções desse sistema foram obtidas introduzindo restrições, resultando no sistema, $A\hat{T} = 0$. Observou que a matriz $M = (C - A)$ é, por hipótese, não singular, e que será sempre simétrica se for utilizado $A_1\hat{T} = 0$, onde $A_1 = A'A$.

SEARLE (1971) afirma que a análise de covariância pode ser feita utilizando-se o modelo $\underline{Y} = X\underline{b} + \underline{e}$, onde X é uma matriz composta de valores 0 e 1 e dos valores observados das covariáveis.

No entanto, para uma melhor distinção entre os dois tipos de parâmetros, o mesmo autor particionou adequadamente a matriz X e o vetor $\underline{b}$ em duas partes. O modelo, dessa forma, fica:

$$\underline{Y} = X\underline{a} + Z\underline{b} + \underline{e}, \text{ onde:}$$

$\underline{Y}$ é o vetor das n observações da variável dependente;

X representa a matriz de incidência dos níveis dos fatores e interações, de rank = k ;

Z representa a matriz das covariáveis, suposta de posto coluna completo, cujas colunas são linearmente independentes das colunas de X ;

$\underline{a}$ é o vetor de parâmetros correspondente a μ , aos níveis dos fatores e às interações;

$\underline{b}$ é o vetor dos coeficientes de regressão;

$\underline{e}$ é o vetor dos erros experimentais, $\underline{e} \sim N(\emptyset, I\sigma^2)$

As soluções de mínimos quadrados são:

$$\underline{a}^0 = \underline{a}^* - (X'X)^{-1} X'Z\underline{b}^0$$

e

$$\underline{b}^0 = \underline{b} = (Z'PZ)^{-1} Z'PY$$

onde;

$$\underline{a}^* = (X'X)^{-1} X'Y;$$

$$P = I - X(X'X)^{-1} X';$$

$(X'X)^{-1}$ é uma inversa generalizada, simétrica, de $X'X$;

$Z'PZ$ é a matriz constituída pelas somas de quadrados e de produtos do resíduo, relativas às variáveis auxiliares;

$Z'PY$ é o vetor constituído pelas somas de produtos das variáveis auxiliares com a variável dependente, relativas ao resíduo:

O autor mostra que $\underline{b}$ é o melhor estimador linear não tendencioso ("blue") de $\underline{b}$ nos modelos:

$$\underline{Y} = X\underline{a} + Z\underline{b} + \underline{e} \quad \text{e} \quad \underline{Y} = PZ\underline{b} + \underline{e}$$

Segundo o autor, no modelo $\underline{Y} = X\underline{a} + \underline{e}$, o vetor das estimativas dos valores esperados $\hat{Y}$ correspondente ao vetor dos

valores observados $\underline{Y}$ e $\hat{\underline{Y}} = X(X'X)^{-1}X'\underline{Y}$. Portanto, o vetor dos desvios dos valores observados e os valores estimados $\underline{Y} - \hat{\underline{Y}} = \underline{Y} - X(X'X)^{-1}X'\underline{Y} = [I - X(X'X)^{-1}X']\underline{Y} = P\underline{Y}$. Então $P\underline{Y}$ é o vetor de resíduos após ajustar $\underline{Y} = X\underline{a} + \underline{e}$.

Similarmente, se a j -ésima coluna de Z é $\underline{z}_j$, a j -ésima coluna de PZ em $\underline{Y} = PZ\underline{b} + \underline{e}$ é $P\underline{z}_j$ e é o vetor de resíduos após ajustar $\underline{z}_j = X\underline{a} + \underline{e}$. Então com $Z = \{\underline{z}_j\}$ com $j = 1, 2, \dots, q$ escreve-se R_Z por PZ e tem-se R_Z como a matriz de resíduos.

$$R_Z = PZ = \{P\underline{z}_j\} = \{\underline{z}_j - \hat{\underline{z}}_j\} = \{\underline{z}_j - X(X'X)^{-1}X'\underline{z}_j\}$$

Portanto; $\underline{Y} = PZ\underline{b} + \underline{e}$ é equivalente a $\underline{Y} = R_Z\underline{b} + \underline{e}$, ou seja:

$$\underline{b} = (R_Z'R_Z)^{-1}R_Z'\underline{Y} \quad \text{onde:}$$

R_Z é a matriz de mesma ordem que Z , com suas colunas expressando os resíduos;

$R_Z'R_Z$ é a matriz da soma de quadrados e produtos, dos resíduos $\underline{z}$;

$R_Z'\underline{Y}$ é um vetor da soma de produtos dos resíduos $\underline{z}$ pelas observações $\underline{Y}$.

Dessa forma, o vetor solução para o modelo de covariância, é, então:

$$\begin{bmatrix} \underline{a}^0 \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}^* - (X'X)^{-1}X'Z\underline{b} \\ (R_Z'R_Z)^{-1}R_Z'\underline{Y} \end{bmatrix}$$

As variâncias e a covariância entre os estimadores são dadas por:

$$\text{var}(\underline{a}^0) = \left[(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'Z(R_Z'R_Z)^{-1}Z'X(X'X)^{-1} \right] \sigma^2$$

$$\text{var}(\underline{b}) = (R_Z'R_Z)^{-1} \gamma^2$$

$$\text{cov}(\underline{a}^0, \underline{b}) = -(X'X)^{-1}X'Z(R_Z'R_Z)^{-1} \sigma^2$$

O autor apresenta os seguintes resultados para as expressões $R(\underline{a})$ e $R(\underline{b}/\underline{a})$:

$$R(\underline{a}) = \underline{a}'X'\underline{y} = \underline{y}'X(X'X)^{-1}X'\underline{y}$$

$$\underline{a}'X'\underline{y} / \sigma^2 \sim \chi^2 \left[r(X), \lambda_a \right], \text{ onde}$$

$$\lambda_a = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\underline{a}'X'X\underline{a} + 2\underline{a}'X'Z\underline{b} + \underline{b}'Z'X(X'X)^{-1}X'Z\underline{b} \right]$$

$$R(\underline{b}/\underline{a}) = R(\underline{a}, \underline{b}) - R(\underline{a}) = \underline{y}'R_Z(R_Z'R_Z)^{-1}R_Z'\underline{y}$$

$$= \underline{b}'R_Z'\underline{y}$$

$$\underline{b}'R_Z'\underline{y} / \sigma^2 \sim \chi^2 \left[r(Z), \lambda \right] \quad \text{onde}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \underline{b}'R_Z'R_Z\underline{b} / \sigma^2 \quad \text{e } r(Z) = p.$$

Além disso $R(\underline{a})$ e $R(\underline{b}/\underline{a})$ são distribuídas independentemente porque $X(X'X)^{-1}X'R_Z(R_Z'R_Z)^{-1}R_Z' = 0$, visto que $R_Z = PZ$ e $X'P = 0$, onde $P = I - X(X'X)^{-1}X'$ então $R(\underline{a})$ e $R(\underline{b}/\underline{a})$ são independentes de $SSE = (\underline{y}'\underline{y} - \underline{a}'X'\underline{y}) - \underline{b}'R_Z'\underline{y}$ que é a soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão e tem distribuição χ^2 :

$$\frac{SSE}{2} \sim \chi^2_N - r(X) - r(Z) \quad \text{onde}$$

N é o número de observações e $r(X) = k$.

A seguir, o autor, apresenta dois quadros da análise de variância, a saber: um para ajustar covariáveis (b) após fatores e interações (a) no modelo de covariância $\underline{y} = \underline{X}\underline{a} + \underline{Z}\underline{b} + \underline{e}$ e outro para ajustar fatores e interações (a) após covariáveis (b) nesse modelo.

O autor mostra, ainda, que as hipóteses $H_1: \underline{b} = \underline{0}$, $H_2: k' \underline{a} = \underline{0}$ e $H_3: k' \underline{a} + (\underline{X}'\underline{X})^{-1} \underline{X}'\underline{Z}\underline{b} = \underline{0}$, são testadas, respectivamente, por:

$$F(H_1) = \frac{\underline{b}' \underline{R}' \underline{y} / r(Z)}{SSE / N - r(Z) - r(X)}$$

$$F(H_2) = \frac{Q / r(X)}{SSE / N - r(Z) - r(X)}$$

$$F(H_3) = \frac{Q^* / r(X)}{SSE / N - r(Z) - r(X)}$$

sendo,

$$Q = (k' \underline{a}^0)' \left[k' (\underline{X}'\underline{X})^{-1} k + k' (\underline{X}'\underline{X})^{-1} \underline{X}'\underline{Z} (\underline{Z}'\underline{PZ})^{-1} \underline{Z}'\underline{X} (\underline{X}'\underline{X})^{-1} k \right]^{-1} k' \underline{a}^0$$

$$\text{e } Q^* = (k' \underline{a}^*)' \left[k' (\underline{X}'\underline{X})^{-1} k \right]^{-1} k' \underline{a}^*$$

intrablocos, com p variáveis auxiliares, no delineamento em blocos incompletos, caso particular dos ensaios equilibrados, considera o modelo matemático

$$y_{ij} = \mu + t_i + b_j + \sum_{w=1}^p a_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij},$$

e admitindo que os efeitos de blocos (b_j) incluem a média geral teórica (μ), apresenta os seguintes resultados:

a) Estimativa dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão

$$\hat{t}_i = \bar{t}_{i.} - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w \bar{t}_{iw} \quad (i = 1, 2, \dots, v),$$

onde:

$\hat{t}_i$ é a estimativa do efeito do i -ésimo tratamento ajustado para blocos e regressão;

$\bar{t}_{i.}$ é a estimativa do efeito do i -ésimo tratamento ajustado para blocos relativo à variável y ;

$\bar{t}_{iw}$ semelhante a $\bar{t}_{i.}$, porém em relação à variável auxiliar $x^{(w)}$;

$\hat{a}_w$ é a estimativa do coeficiente da regressão linear múltipla, associado à variável auxiliar $x^{(w)}$.

b) Estimativa dos coeficientes de regressão

$$\underline{\hat{a}} = E_3^{-1} E_4 \quad \text{onde}$$

E_3 é uma matriz não singular, constituída pelas somas de quadrados e de produtos dos resíduos, relativas às variáveis auxiliares;

E_4 é o vetor constituído pelas somas de produtos das variáveis auxiliares com a variável dependente, relativas ao resíduo.

c) Soma de quadrados da regressão

$$SQ \text{ Reg.} = \underline{\hat{a}}' E_4 = \sum_{w=1}^p \hat{a}_w R(x_w y)$$

d) Soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão.

$$SQ \text{ Res}^* = R(y^2) - \sum_{w=1}^p \hat{a}_w R(x_w y)$$

onde $R(y^2)$ é a soma de quadrados do resíduo, sem serem consideradas as variáveis auxiliares.

e) Soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão.

$$SQ \text{ T}^*(aj) = R'(y^2) - SQ \text{ Res}^* - \sum_{w=1}^p \tilde{a}_w R'(x_w y),$$

onde $R'(y^2) = SQT(aj.) + R(y^2)$.

f) Esperança matemática da SQ Reg.

$E(SQ \text{ Reg.}) = \underline{a}' E_3 \underline{a} + p\sigma^2$, justificando-se, assim, a associação de p graus de liberdade à soma de quadrados da regressão.

g) Esperança matemática da SQ Res*.

$E(SQ \text{ Res}^*) = (bk - b - v - p + 1)\sigma^2$, justificando-se, assim, a associação de $(bk - b - v - p + 1)$ graus de liberdade à soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão.

Portanto, um estimador imparcial de σ^2 é:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQ \text{ Res}^*}{(bk - b - v - p+1)} = QM \text{ Res}^*$$

h) Esperança matemática da SQT* (aj.)

$E [SQT^*(aj.)] = \tau' (C - Q_X E_1^{-1} Q_X') \tau + (v-1)\sigma^2$, justificando-se, assim, a associação de $(v-1)$ graus de liberdade à soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão

O autor demonstra que a soma de quadrados do resíduo, dividida por σ^2 , ajustada para a regressão, tem distribuição χ^2 central e as demais, χ^2 não central, já que o modelo é suposto de efeitos fixos. Ademais, afirma que é correta a utilização do teste F para o teste das hipóteses de que os efeitos de tratamentos e os coeficientes de regressão são todos nulos.

Finalmente, determina a matriz de dispersão para as estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão. Determina, ainda, uma fórmula para o cálculo da variância média do contraste entre duas médias de tratamentos ajustadas para blocos e regressão.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1. Ensaio em Blocos Completos Aumentados (Blocos de Federer)

3.1.1. Definição dos parâmetros

Os parâmetros que caracterizam os delineamentos em blocos completos aumentados serão representados, neste trabalho, por:

c é o número de tratamentos comuns;

b é o número de blocos;

z é o número de tratamentos regulares;

r_j é o número de repetição do tratamento j ($j=1,2,\dots,c,c+1,\dots,c+z$)

k_i é o número de parcelas no bloco i ($i = 1, 2, \dots, b$)

N é o número total de parcelas ($N = bc + z$)

3.1.2. Um modelo linear

O modelo linear utilizado foi $y_{ij} = \mu + \beta_i + t_j + e_{ij}$,

que também pode ser representado matricialmente por $\underline{Y} = X\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$, onde $\underline{Y}$ é o vetor dos valores observados, de dim $(bc + z) \times 1$;

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} y_{11} y_{12} \cdots y_{1c} y_{1c+1} y_{1c+2} \cdots y_{1c+z} & y_{21} y_{22} \cdots y_{2c} y_{2c+1} y_{2c+2} \cdots \\ y_{2c+z} \cdots y_{b1} y_{b2} \cdots y_{bc} y_{bc+1} y_{bc+2} \cdots y_{bc+z} \end{bmatrix}$$

X é a matriz do delineamento, de

$$\dim (bc+z) \times (b+c+z) \quad \text{e} \quad \text{rank} (b+c+z-1)$$

Efetuando-se convenientemente a partição da matriz X obtêm-se

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & | & X_2 \end{bmatrix}$$

onde

X_1 é a matriz dos coeficientes dos efeitos de blocos, de dim $(bc + z) \times b$;

X_2 é a matriz dos coeficientes dos efeitos de tratamentos, de dim $(bc + z) \times (c + z)$;

$\underline{\theta}$ é o vetor dos parâmetros, de dim $(b + c + z) \times 1$;

A partição do vetor $\underline{\theta}$, correspondente à partição da matriz X é

$$\underline{\theta}' = \begin{bmatrix} \underline{\beta}' & | & \underline{\tau}' \end{bmatrix}$$

onde

$\underline{\beta}$ é o vetor dos efeitos de blocos que incluem a média geral, de dim $(b \times 1)$;

$\underline{\tau}$ é o vetor dos efeitos de tratamentos, de dim $(c + z) \times 1$;

$\underline{\varepsilon}$ é o vetor dos erros experimentais, sendo que

$\underline{\varepsilon} \sim N(\emptyset, I\sigma^2)$ e de

dim $(bc + z) \times 1$

3.1.3. Sistema de equações normais

O sistema de equações normais, obtido através do método dos quadrados mínimos, é:

$$\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta}^0 = \underline{X}'\underline{Y} \quad (3.1.3. a)$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} \underline{X}'_1\underline{X}_1 & \underline{X}'_1\underline{X}_2 \\ \underline{X}'_2\underline{X}_1 & \underline{X}'_2\underline{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta}^0 \\ \underline{T}^0_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}'_1\underline{Y} \\ \underline{X}'_2\underline{Y} \end{bmatrix} \quad (3.1.3. b)$$

As matrizes do sistema anterior são designadas por:

$\underline{X}'_1\underline{X}_1 = K = \text{Diag} \{K_i\}$ (matriz associada ao número de unidades experimentais por bloco);

$\underline{X}'_2\underline{X}_2 = R = \begin{bmatrix} R_1 & \emptyset \\ \emptyset & R_2 \end{bmatrix}$ (matriz das repetições dos tratamentos de dim $(c + z) \times (c + z)$, onde R_1 é a matriz das repetições dos tratamentos comuns, e R_2 é a matriz das repetições dos tratamentos regulares;

$\underline{X}'_1\underline{X}_2 = N' = (\delta_{ij})$ (matriz de incidência dos tratamentos em re

lação aos blocos de dim $b \times (c + z)$,

isto é:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o tratamento } j \text{ está no bloco } i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, o sistema de equações em (3.1.3.b) pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} K & N' \\ N & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta}^0 \\ \underline{T}_0^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' & Y \\ X_2' & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ T \end{bmatrix} \quad (3.1.3.c)$$

onde,

$$\underline{\beta}^0 = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ \dots \\ \beta_b^0 \end{bmatrix} \text{ é o vetor de soluções de mínimos quadrados para blocos, de dim } (b \times 1);$$

$$\underline{T}_0^0 = \begin{bmatrix} T_{01}^0 \\ T_{02}^0 \end{bmatrix} \text{ é o vetor de soluções de mínimos quadrados para os tratamentos, de dim } (c + z) \times 1;$$

$$\underline{T}_{01}^0 = \begin{bmatrix} t_{01}^0 \\ t_{02}^0 \\ \dots \\ t_{0c}^0 \end{bmatrix} \text{ é o vetor de soluções de mínimos quadrados para os tratamentos comuns, de dim } (c \times 1);$$

$$\bar{t}_{02}^0 = \begin{bmatrix} t_{0c+1}^0 \\ t_{0c+2}^0 \\ \dots \\ t_{0c+z}^0 \end{bmatrix} \text{ é o vetor de soluções de mínimos qua-} \\ \text{drados para os tratamentos regulares,} \\ \text{de dim } (z \times 1);$$

$$B = \begin{bmatrix} c+z \\ \sum_{j=1} y_{1j} \\ \\ c+z \\ \sum_{j=1} y_{2j} \\ \\ \dots \\ \\ c+z \\ \sum_{j=1} y_{bj} \end{bmatrix} \text{ é o vetor dos totais observados para} \\ \text{blocos, de dim } (b \times 1);$$

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \text{ é o vetor dos totais observados dos tra-} \\ \text{tamentos, de dim } (c + z) \times 1 ;$$

$$\bar{I}_1 = \begin{bmatrix} b \\ \sum_{i=1} y_{i1} \\ \\ b \\ \sum_{i=1} y_{i2} \\ \\ \dots \\ \\ b \\ \sum_{i=1} y_{ic} \end{bmatrix} \text{ é o vetor dos totais observados dos tra-} \\ \text{tamentos comuns, de dim } (c \times 1);$$

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} y_{ic+1} \\ y_{ic+2} \\ \dots \\ y_{ic+z} \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor dos totais observados dos tratamentos regulares, de dim } (z \times 1)$$

3.1.4. Estimação dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos.

O sistema (3.1.3.c) resulta nas seguintes equações:

$$K \underline{\beta}^0 + N' \underline{T}_0^0 = \underline{B} \quad (3.1.4.a)$$

$$N \underline{\beta}^0 + R \underline{T}_0^0 = \underline{T} \quad (3.1.4.b)$$

Para estimarem-se os efeitos de tratamentos, ajustados para blocos, os efeitos de blocos devem ser eliminados da equação (3.1.4.b). Com esse objetivo adiciona-se à equação (3.1.4.b) a equação (3.1.4.a), pré-multiplicada por $(-NK^{-1})$. Isso resulta em:

$$(R - NK^{-1}N') \underline{T}_0^0 = \underline{T} - NK^{-1}\underline{B} \quad (3.1.4.c)$$

que equivale a pré-multiplicar o sistema (3.1.3.c) pela matriz W , onde

$$W = \begin{bmatrix} -NK^{-1} & I_{c+z} \end{bmatrix} \quad (3.1.4.d)$$

3.1.4.1. Método clássico

O sistema de equações (3.1.4.c) pode ser escrito na forma

$$CT_0^0 = Q \quad (3.1.4.1.a)$$

onde C é uma matriz simétrica, de característica $(c+z) - 1$ e dimensões $(c+z) \times (c+z)$, T_0^0 é um vetor de dim $(c+z) \times 1$ e Q é um vetor de dim $(c+z) \times 1$, denominado de vetor de totais ajustados dos tratamentos. A matriz C é

$$C = \begin{bmatrix} r-\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_b} & \dots & -\frac{1}{k_b} \\ -\frac{1}{k_1} & r-\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_b} & \dots & -\frac{1}{k_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_1} & \dots & r-\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_b} & \dots & -\frac{1}{k_b} \\ \hline -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & \dots & -\frac{1}{k_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline -\frac{1}{k_2} & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_2} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1-\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{k_2} & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_2} & \dots & -\frac{1}{k_2} & 0 & \dots & 0 & \dots & -\frac{1}{k_2} & \dots & 1-\frac{1}{k_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline -\frac{1}{k_b} & -\frac{1}{k_b} & \dots & -\frac{1}{k_b} & \dots & -\frac{1}{k_b} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1-\frac{1}{k_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{k_b} & -\frac{1}{k_b} & \dots & -\frac{1}{k_b} & \dots & -\frac{1}{k_b} & 0 & \dots & 0 & \dots & -\frac{1}{k_b} & \dots & 1-\frac{1}{k_b} \end{bmatrix}$$

Como C é uma matriz singular, o sistema (3.1.4.c) pode ser resolvido, conforme PAVATE (1961) e PIMENTEL GOMES (1967) dentre outros, mediante a introdução de uma matriz A , com as mesmas dimensões de C , denominada "matriz de restrição", tal que a solução do sistema seja única. As restrições introduzidas resultam no sistema de equações, que pode ser escrito na forma:

$$A \bar{T}_0 = 0 \quad (3.1.4.1.b)$$

A matriz de restrição A , usando a restrição

$$\sum_i \sum_s \frac{1}{k_i} t_s = 0 \quad \text{onde}$$

t_s ($s = 1, 2, \dots, c$) são os efeitos dos tratamentos comuns

$$A = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{1}{k_i} & \sum_i \frac{1}{k_i} & \dots & \sum_i \frac{1}{k_i} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_i \frac{1}{k_i} & \sum_i \frac{1}{k_i} & \dots & \sum_i \frac{1}{k_i} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

De (3.1.4.1.a) e (3.1.4.1.b) obtêm-se:

$$(C + A) \underline{T}_0^0 = \underline{Q} \quad (3.1.4.1.c)$$

onde $C + A = M$ é uma matriz não singular. Logo, a solução do sistema é dada por:

$$\underline{T}_0^0 = M^{-1} \underline{Q} \quad (3.1.4.1.d)$$

onde, a matriz M de dim $(c + z) \times (c + z)$ é dada por

$$M = \begin{bmatrix} r & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{k_1} & \dots & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_b} & \dots & \frac{1}{k_b} \\ 0 & r & \dots & 0 & \frac{1}{k_1} & \dots & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_b} & \dots & \frac{1}{k_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & \frac{1}{k_1} & \dots & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_b} & \dots & \frac{1}{k_b} \\ \hline \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \dots & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \dots & \frac{1}{k_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \dots & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \dots & \frac{1}{k_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \frac{1}{k_b} & \frac{1}{k_b} & \dots & \frac{1}{k_b} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{k_b} & \dots & \frac{1}{k_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k_b} & \frac{1}{k_b} & \dots & \frac{1}{k_b} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{k_b} & \dots & \frac{1}{k_b} \end{bmatrix}$$

e a matriz M^{-1} tem a forma:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & h & \dots & h & | & & | & & | & & | \\ h & a & \dots & h & | & S & & S & & \dots & S \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & & & & & & \\ h & h & & a & | & & & & & & \\ \hline & S & & & | & t & u & & S & & S \\ & & & & | & u & t & & & \dots & \\ \hline & S & & & | & S & & t & u & & S \\ & & & & | & & & u & t & & \dots \\ \hline & \vdots & & & | & \vdots & & \vdots & & \dots & \vdots \\ \hline & S & & & | & S & & S & & \dots & t & u \\ & & & & | & & & & & & u & t \end{bmatrix}$$

cujos elementos da matriz M^{-1} são obtidos pelas fórmulas:

$$A = \frac{1}{c \left[b - \sum_{i=1}^b \frac{n_i}{k_i} \right]}$$

$$a = s + \frac{1}{b} - \frac{1}{c \cdot b}$$

$$h = s - \frac{1}{c \cdot b}$$

$$t = s + \frac{1}{c} + 1$$

$$u = s + \frac{1}{c}$$

onde S é a matriz de constantes s ;

n_i é o número de tratamentos regulares no bloco i ;

k_i é o número de tratamentos comuns e regulares no bloco i

($k_i = c + n_i$);

c é o número de tratamentos comuns.

3.1.5. Somas de quadrados

Do modelo $\underline{Y} = \underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$, obtêm-se

$$\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} = \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{Y}$$

e tomando-se a estimativa de $\underline{\theta}$, resulta a soma de quadrados do resíduo, ou seja:

$$SQR = \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\theta}^0'\underline{X}'\underline{Y}, \quad (3.1.5.a)$$

onde, $\underline{\theta}^0'\underline{X}'\underline{Y}$, definida como a soma de quadrados de parâmetros, é:

$$\begin{aligned} SQPar &= \begin{bmatrix} \underline{\beta}^{0'} & \underline{T}_0^{0'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \\ &= \underline{\beta}^{0'} \underline{B} + \underline{T}_0^{0'} \underline{I} \end{aligned}$$

De 3.1.4.a tem-se que $\underline{\beta}^0 = K^{-1} (\underline{B} - \underline{N}' \underline{T}_0^0)$,

logo

$$\begin{aligned} SQPar &= (\underline{B} - \underline{N}' \underline{T}_0^0)' K^{-1} \underline{B} + \underline{T}_0^{0'} \underline{I} \\ SQPar &= \underline{B}' K^{-1} \underline{B} - \underline{T}_0^{0'} \underline{N} K^{-1} \underline{B} + \underline{T}_0^{0'} \underline{I} \\ SQPar &= \underline{T}_0^{0'} (\underline{I} - \underline{N} K^{-1} \underline{B}) + \underline{B}' K^{-1} \underline{B} \\ SQPar &= \underline{T}_0^{0'} \underline{Q} + \underline{B}' K^{-1} \underline{B} \end{aligned} \quad (3.1.5.b)$$

Substituindo-se (3.1.5.b) em (3.1.5.a), tem-se

$$SQR = \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{T}^0' \underline{Q} - \underline{B}'\underline{K}^{-1}\underline{B} \quad 3.1.5.c$$

onde

$\underline{Y}'\underline{Y}$ é a soma de quadrados total (SQT)

$\underline{T}_0' \underline{Q}$ é a soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos (SQT_{aj.})

$\underline{B}'\underline{K}^{-1}\underline{B}$ é a soma de quadrados de blocos e média.

3.1.6. Esperança matemática das somas de quadrados

3.1.6.1. Esperança matemática de $\underline{Y}'\underline{Y}$

A soma de quadrados devida ao total é:

$$\begin{aligned} SQT &= \underline{Y}'\underline{Y} \\ &= (\underline{\theta}'\underline{X}' + \underline{\varepsilon}')(\underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) \\ &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}'\underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} \end{aligned}$$

têm-se, então, que:

$$E(SQT) = \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}) \quad (3.1.6.1.a)$$

$$\underline{X}'\underline{X} = \begin{bmatrix} K & N' \\ N & R \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} &= \begin{bmatrix} \underline{\beta}' & \underline{T}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & N' \\ N & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{T} \end{bmatrix} \\ &= \underline{\beta}'\underline{k}\underline{\beta} + \underline{T}'\underline{N}\underline{\beta} + \underline{\beta}'\underline{N}'\underline{T} + \underline{T}'\underline{R}\underline{T} \\ &= \underline{T}'\underline{R}\underline{T} + 2\underline{\beta}'\underline{N}'\underline{T} + \underline{\beta}'\underline{k}\underline{\beta} \quad (3.1.6.1.b) \end{aligned}$$

Substituindo-se (3.1.6.1.b) em (3.1.6.1.a), tem-se:

$$\begin{aligned} E(SQT) &= \underline{T}'\underline{R}\underline{T} + 2\underline{\beta}'\underline{N}'\underline{T} + \underline{\beta}'\underline{k}\underline{\beta} + TR \left[E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') \right] \\ &= \underline{T}'\underline{R}\underline{T} + 2\underline{\beta}'\underline{N}'\underline{T} + \underline{\beta}'\underline{k}\underline{\beta} + (b.c + z)\sigma^2 \quad (3.1.6.1.c) \end{aligned}$$

3.1.6.2. Esperança matemática de $\underline{B}'\underline{k}^{-1}\underline{B}$

A soma de quadrados de blocos é dada por:

$$\underline{SQB} = \underline{B}'\underline{k}^{-1}\underline{B} = \underline{Y}'\underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1'\underline{Y}$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned} E(\underline{SQB}) &= E(\underline{Y}'\underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1'\underline{Y}) \\ &= E(\underline{\theta}'\underline{X}' + \underline{\varepsilon}') \underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1'(\underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) \\ &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1'\underline{X}\underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}'\underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1'\underline{\varepsilon}) \quad (3.1.6.2a) \end{aligned}$$

$$\underline{X}'\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} \underline{X}'_1 \\ -\underline{1} \\ \underline{X}'_2 \end{bmatrix} \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} \underline{K} \\ \underline{N} \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}'_1\underline{X} = \underline{X}'_1 \begin{bmatrix} \underline{X}_1 & \vdots & \underline{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K} & \vdots & \underline{N}' \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}'\underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1'\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{K} \\ \underline{N} \end{bmatrix} \underline{k}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{K} & \vdots & \underline{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{N}'\underline{N}\underline{k}^{-1} & \underline{N}' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1'\underline{X}\underline{\theta} &= \begin{bmatrix} \underline{\beta}' & \underline{T}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{N}'\underline{N}\underline{k}^{-1} & \underline{N}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{1} \\ \underline{T} \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\beta}'\underline{K}\underline{\beta} + \underline{T}'\underline{N}\underline{\beta} + \underline{\beta}'\underline{N}'\underline{T} + \underline{T}'\underline{N}\underline{k}^{-1}\underline{N}'\underline{T} \\ &= \underline{\beta}'\underline{K}\underline{\beta} + 2\underline{\beta}'\underline{N}\underline{T} + \underline{T}'\underline{N}\underline{k}^{-1}\underline{N}'\underline{T} \quad (3.1.6.2.b) \end{aligned}$$

Substituindo-se (3.1.6.2.b) em (3.1.6.2.a), segue-se que:

$$\begin{aligned} E(\underline{SQB}) &= \underline{\beta}'\underline{K}\underline{\beta} + 2\underline{\beta}'\underline{N}\underline{T} + \underline{T}'\underline{N}\underline{k}^{-1}\underline{N}'\underline{T} + \\ &\text{TR} \left[\underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1' E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') \right] \end{aligned}$$

$$\text{Mas, } E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 \underline{I}, \text{ e } \text{TR}(\underline{X}_1\underline{k}^{-1}\underline{X}_1') = \text{TR}(\underline{I}_b) = b$$

logo,

$$E(SQB) = \underline{T}'NK^{-1}N'\underline{T} + \underline{\beta}'K\underline{\beta} + 2\underline{\beta}'N'\underline{T} + b\sigma^2 \quad (3.1.6.1.c)$$

3.1.6.3. Esperança matemática de $\underline{T}_0^{0'} \underline{Q}$

Sabe-se que:

$$\underline{T}_0^{0'} \underline{Q} = \underline{Q}'\underline{M}^{-1'} \underline{Q} = \underline{Q}'\underline{M}^{-1} \underline{Q}$$

Pode-se comprovar a seguinte relação $\underline{Q} = \underline{W}\underline{X}'\underline{Y}$ e, então, considerando-se o modelo como em 3.1.2., segue-se que:

$$\begin{aligned} E(\underline{T}_0^{0'} \underline{Q}) &= E(\underline{Y}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{Y}) \\ &= E(\underline{\theta}'\underline{X}' + \underline{\varepsilon}')\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'(\underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) \\ E(\underline{T}_0^{0'} \underline{Q}) &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (3.1.6.3.a)$$

Como

$$\begin{aligned} \underline{W}\underline{X}'\underline{X} &= \begin{bmatrix} -NK^{-1} & I_{(c+z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & N' \\ N & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & R & -NK^{-1}N' \\ \emptyset & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \emptyset & C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} &= \begin{bmatrix} \underline{\beta}' & \underline{T}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset \\ C \end{bmatrix} \underline{M}^{-1} \begin{bmatrix} \emptyset & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{T} \end{bmatrix} \\ &= \underline{T}' \underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{C}\underline{T} \end{aligned}$$

OGAWA (1974) e IEMMA (1985) mostram que a matriz $\underline{M}^{-1}$ é uma inversa condicional de $\underline{C}$, logo $\underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{C} = \underline{C}$.

e, portanto $\underline{T}'\underline{C}\underline{M}^{-1}\underline{C}\underline{T} = \underline{T}'\underline{C}\underline{T}$

$$E(\underline{T}_0^{0'}\underline{Q}) = \underline{T}'\underline{C}\underline{T} + E(\underline{\varepsilon}\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{\varepsilon}) = \underline{T}'\underline{C}\underline{T} +$$

$$+ E\left[\text{TR}(\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}) \right]$$

$$E(\underline{T}_0^{0'}\underline{Q}) = \underline{T}'\underline{C}\underline{T} + \text{TR}\left[\underline{X}\underline{W}'\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'E(\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}) \right]$$

$$= \underline{T}'\underline{C}\underline{T} + \text{TR}(\underline{M}^{-1}\underline{W}\underline{X}'\underline{X}\underline{W}')\sigma^2$$

$$= \underline{T}'\underline{C}\underline{T} + \text{TR}(\underline{M}^{-1}\underline{C})\sigma^2$$

Como $\underline{M}^{-1}\underline{C}$ é uma matriz idempotente então
 $\text{TR}(\underline{M}^{-1}\underline{C}) = \text{rank}(\underline{M}^{-1}\underline{C}) = \text{rank}(\underline{C}) = c+z-1$, pois $\underline{M}$ é não singular.

$$\text{Logo, } E(\underline{T}_0^{0'}\underline{Q}) = E(\text{SQT}_{aj.}) = \underline{T}'\underline{C}\underline{T} + (c+z-1)\sigma^2$$

(3.1.6.3.b)

3.1.6.4. Esperança matemática da SQR

De 3.1.5.c, tem-se:

$$E(\text{SQR}) = E(\underline{Y}'\underline{Y}) - E(\underline{T}_0^{0'}\underline{Q}) - E(\underline{B}\underline{K}^{-1}\underline{B}) \quad (3.1.6.4.a)$$

Substituindo (3.1.6.1.c), (3.1.6.3.b) e
 (3.1.6.2.c) em (3.1.6.4.a), vem:

$$E(\text{SQR}) = \underline{T}'\underline{R}\underline{T} + 2\underline{\beta}'\underline{N}'\underline{T} + \underline{\beta}'\underline{K}\underline{\beta} + (b.c+z)\sigma^2 - \underline{T}'\underline{C}\underline{T} -$$

$$(c+z-1)\sigma^2 - \underline{T}'\underline{N}\underline{K}^{-1}\underline{N}'\underline{T} - \underline{\beta}'\underline{K}\underline{\beta} - 2\underline{\beta}'\underline{N}'\underline{T} - b\sigma^2$$

(3.1.6.4.b)

Simplificando-se (3.1.6.4.b), tem-se:

$$E(SQR) = (b-1)(c-1)\sigma^2 \quad (3.1.6.4.c)$$

3.1.7. Quadro da análise de variância

O quadro da análise de variância, com as esperanças dos quadrados médios, pode ser apresentado na seguinte forma:

Esquema da análise de variância

Causas da Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Blocos	b-1	SQB/(b-1)	
Tratamentos (ajustados para blocos)	c+z-1	$SQT_{aj.}/(c+z-1)$	$\sigma^2 + \frac{TCT}{(c+z-1)}$
Resíduo	(b-1)(c-1)	SQR/(b-1)(c-1)	σ^2
TOTAL	bc+z-1		

3.2. Análise de Covariância em Blocos Completos Aumentados (Blocos de Federer)

3.2.1. Modelo matemático

Para o delineamento em questão supõe-se o modelo linear de covariância de efeito fixo:

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + t_j + \gamma x_{ij} + e_{ij} \quad , \quad (3.2.1.a)$$

com: $i = 1, 2, \dots, b$

$j = 1, 2, \dots, c+z$

onde,

y_{ij} é o valor observado da parcela do bloco i que recebeu o tratamento j ;

μ é a média geral;

β_i é o efeito do bloco i ;

t_j é o efeito do tratamento j ;

γ é o coeficiente da regressão linear de Y em relação a X ;

$x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}$, onde X_{ij} são os valores observados da variável auxiliar (covariável);

e_{ij} é o erro experimental associado à observação y_{ij} , onde se supõe que os e_{ij} 's são normalmente distribuídos, com média zero e variância σ^2

O efeito t_j envolve t_s ($s = 1, 2, \dots, c$) e $t_{r_{s'}}$ ($s' = c+1, c+2, \dots, c+z$), que são os efeitos dos tratamentos comuns e regulares, respectivamente.

Usando-se a forma matricial, o modelo (3.2.1.a)

fica:

$$\underline{Y} = X\underline{\theta} + \underline{\varepsilon} \quad , \quad (3.2.1.b)$$

onde,

$\underline{Y}$ é o vetor dos valores observados, de dim $(b.c+z) \times 1$;

X é a matriz dos coeficientes dos parâmetros, de dim $(bc + z) \times (c + z + b + 1)$ e rank $(c + z + b)$

$$X = \left[\begin{array}{cccc|cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{11} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{1c} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_{1c+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & x_{1c+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_{1c+z_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{21} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{2c} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_{2c+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & x_{2c+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_{2c+z_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{b1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{b2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \cdot & x_{bc} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_{bc+1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & x_{bc+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_{bc+z_b} \end{array} \right]$$

Observe que a matriz X , a menos da coluna da covariável é igual a matriz X do item 3.1.2.

Efetuando-se convenientemente a partição da matriz X obtêm-se:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & | & X_2 & | & X_3 \end{bmatrix}$$

onde,

X_1 é a matriz dos coeficientes dos efeitos de blocos, de dim $(bc + z) \times b$;

X_2 é a matriz dos coeficientes dos efeitos de tratamentos, de dim $(bc + z) \times (c + z)$;

X_3 é a matriz dos valores observados da variável auxiliar, de dim $(bc + z) \times 1$

$\underline{\theta}$ é o vetor dos parâmetros, de dim $(1 + b + c + z) \times 1$.

A partição do vetor $\underline{\theta}$, correspondente à partição da matriz X é:

$$\underline{\theta}' = \begin{bmatrix} \underline{\beta}' & | & \underline{\tau}' & | & \gamma \end{bmatrix}$$

onde,

$\underline{\beta}$, $\underline{\tau}$ e $\underline{\varepsilon}$ têm o mesmo significado já descrito no item 3.1.2 e com aquelas dimensões, respectivamente;

γ é o coeficiente da regressão linear de Y em relação a X .

3.2.2. Sistema de equações normais

O sistema de equações normais, obtido através do método dos quadrados mínimos, é dado por

$$X'X\theta^0 = X'Y \quad 3.2.2.a$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} X_1' X_1 & X_1' X_2 & X_1' X_3 \\ X_2' X_1 & X_2' X_2 & X_2' X_3 \\ X_3' X_1 & X_3' X_2 & X_3' X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \tau_1^0 \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' Y \\ X_2' Y \\ X_3' Y \end{bmatrix} \quad (3.2.2.b)$$

onde,

$X_1' X_1$, $X_2' X_2$ e $X_1' X_2$ têm o mesmo significado já descrito no item 3.1.3 página 29 ;

$X_1' X_3 = B_x$ é a matriz associada ao número de covariáveis por bloco, de dim $(b \times 1)$

$$B_x = \begin{bmatrix} c+z \\ \sum_{j=1}^{c+z} x_{1j} \\ c+z \\ \sum_{j=1}^{c+z} x_{2j} \\ \dots\dots\dots \\ c+z \\ \sum_{j=1}^{c+z} x_{bj} \end{bmatrix} ;$$

$X_2' X_3 = T_x$ é a matriz de totais de tratamentos (comuns e regulares) para a covariável, de dim $(c + z) \times 1$

$$T_x = \begin{bmatrix} b \\ \sum_{i=1}^b x_{i1} \\ b \\ \sum_{i=1}^b x_{i2} \\ \dots \\ b \\ \sum_{i=1}^b x_{ic} \\ x_{ic+1} \\ x_{ic+2} \\ \dots \\ x_{ic+z} \end{bmatrix}$$

$X_3' X_3 = L = \sum_{i,j}^{b,c+z} x_{ij}^2$ é a soma dos quadrados dos valores da covariável;

Assim, o sistema de equações em (3.2.2.b) pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} K & N' & B_x \\ N & R & T_x \\ B_x' & T_x' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^0 \\ T_1^0 \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' & Y \\ X_2' & Y \\ X_3' & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ T \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.2.2.c)$$

onde,

$$\tilde{\beta}^0 = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ \dots \\ \beta_b^0 \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor solução de mínimos para blocos, de dim } (b \times 1) ;$$

$\tau_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ 0 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$ é o vetor solução de mínimos quadrados para os tratamentos, de dim $(c + z) \times 1$;

$\tau_{11}^0 = \begin{bmatrix} t_1^0 \\ t_2^0 \\ \dots \\ t_c^0 \end{bmatrix}$ é o vetor solução de mínimos quadrados para os tratamentos comuns, de dim $(c \times 1)$;

$\tau_{12}^0 = \begin{bmatrix} t_{c+1}^0 \\ t_{c+2}^0 \\ \dots \\ t_{c+z}^0 \end{bmatrix}$ é o vetor solução de mínimos quadrados para os tratamentos regulares, de dim $(z \times 1)$;

$\hat{\gamma}$ é a estimativa do coeficiente da regressão linear de Y em relação a X;

$Z = \sum_i^b \sum_j^{c+z} x_{ij} y_{ij}$ é a soma dos produtos da variável de observação pela covariável;

$\underline{B}$ e $\underline{T}$ têm o mesmo significado descrito no item 3.1.3 e com aquelas dimensões, respectivamente.

3.2.3. Estimação dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão

O sistema 3.2.2.c. resulta nas seguintes

equações:

$$K \underline{\beta}^0 + N' \underline{T}_1^0 + B_x \hat{\gamma} = \underline{B} \quad (3.2.3.a)$$

$$N \underline{\beta}^0 + R \underline{T}_1^0 + T_x \hat{\gamma} = \underline{T} \quad (3.2.3.b)$$

$$B_x' \underline{\beta}^0 + T_x' \underline{T}_1^0 + L \hat{\gamma} = \underline{Z} \quad (3.2.3.c)$$

Para estimarem-se os efeitos de tratamentos, ajustados para blocos e regressão, os efeitos de blocos devem ser eliminados do sistema 3.2.2.a. Com esse objetivo, pré-multiplicou-se 3.2.3.a por $(-NK^{-1})$ e por $(-B_x'K^{-1})$ e adiciona-se às equações 3.2.3.b e 3.2.3.c respectivamente. Isso resulta em:

$$(R - NK^{-1}N') \underline{T}_1^0 + (T_x - NK^{-1}B_x) \hat{\gamma} = \underline{T} - NK^{-1}\underline{B}$$

$$(T_x' - B_x'K^{-1}N') \underline{T}_1^0 + (L - B_x'K^{-1}B_x) \hat{\gamma} = \underline{Z} - B_x'K^{-1}\underline{B}$$

Fazendo-se

$$(R - NK^{-1}N') = C, \text{ de dim } (c + z) \times (c + z)$$

$$(T_x - NK^{-1}B_x) = Q_x, \text{ de dim } (c + z) \times 1$$

$$(\underline{T} - NK^{-1}\underline{B}) = \underline{Q}, \text{ de dim } (c + z) \times 1$$

(3.2.3.d)

$$(L - B_x'K^{-1}B_x) = \lambda_1$$

$$(\underline{Z} - B_x'K^{-1}\underline{B}) = \lambda_2, \text{ onde } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ são escalares;}$$

obtêm-se:

$$C \underline{T}_1^0 + Q_x \hat{\gamma} = \underline{Q} \quad (3.2.3.e)$$

$$Q'_x \underline{\tau}_1^0 + \lambda_1 \hat{\gamma} = \lambda_2 \quad (3.2.3.f)$$

que é o sistema de equações normais livre dos efeitos de blocos.

Os escalares $B'_x K^{-1} B_x$ e $B'_x K^{-1} \underline{B}$ são constituídos pela soma de quadrados e de produtos de blocos relativa a variável auxiliar e pela soma de produtos das variáveis auxiliar e dependente relativas a blocos, respectivamente.

Como vimos anteriormente, o vetor $\underline{Q}$ é constituído pelos totais de tratamentos, ajustados para blocos, relativos à variável dependente, os quais serão representados por Q_j . ($j = 1, 2, \dots, c + z$).

Os elementos da matriz Q_x são semelhantes aos do vetor $\underline{Q}$, porém em relação à variável auxiliar, sendo que serão representados por Q_{j1} ($j = 1, 2, \dots, c + z$).

Uma outra maneira de chegar-se a (3.2.3.e) e (3.2.3.f) é pré-multiplicando o sistema (3.2.2.a) pela matriz

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -NK^{-1} & I_{(c+z)} & \emptyset \\ -B'_x K^{-1} & \emptyset & I_{(1)} \end{bmatrix}$$

obtendo-se o sistema

$$WX'X\underline{\theta}^0 = WX'\underline{Y}$$

Podem-se comprovar, entre outras, as seguintes relações:

$$W_1 X' X W_1' = C$$

$$W_1 X' X W_2' = Q_X$$

$$W_2 X' X W_2' = \lambda_1$$

$$W_1 X' X \theta^0 = C \underline{T}_1^0 + Q_X \hat{\gamma}$$

(3.2.3.g)

$$W_2 X' X \theta^0 = Q_X' \underline{T}_1^0 + \lambda_1 \hat{\gamma}$$

$$W_1 X' \underline{Y} = \underline{Q}$$

$$W_2 X' \underline{Y} = \lambda_2$$

Aqui, a matriz C é a mesma apresentada no item 3.1.4. De (3.2.3.e) e utilizando-se a mesma matriz de restrição A usada em (3.1.4.1.b), obtêm-se:

$$(C + A) \underline{T}_1^0 + Q_X \hat{\gamma} = \underline{Q} \quad (3.2.3.h)$$

onde $C + A = M$ é uma matriz não singular. Logo, a solução do sistema é dada por

$$\underline{T}_1^0 = M^{-1} \underline{Q} - M^{-1} Q_X \hat{\gamma}$$

ou

$$\underline{T}_1^0 = \underline{T}_0^0 - T_X^0 \hat{\gamma} \quad (3.2.3.i)$$

Portanto:

$$t_j^0 = t_{j0}^0 - t_{j1}^0 \hat{\gamma} \quad (j= 1, 2, \dots, c+z) \quad (3.2.3.j)$$

onde:

t_j^0 : estimativa do efeito do j -ésimo tratamento ajustado para blocos e regressão;

t_{j0}^0 : estimativa do efeito do j -ésimo tratamento ajustado para blocos relativo à variável Y ;

t_{j1}^0 : semelhante a t_{j0}^0 , porém em relação à variável auxiliar x_{ij}

$\hat{\gamma}$: estimativa do coeficiente da regressão linear, associada à variável auxiliar x_{ij}

Substituindo-se o valor de $\underline{T}_1^0$, (3.2.3.i) em (3.2.3.f), segue-se que:

$$Q'_X (\underline{T}_0^0 - T_X^0 \hat{\gamma}) + \lambda_1 \hat{\gamma} = \lambda_2 ,$$

ou ainda:

$$(\lambda_1 - Q'_X T_X^0) \hat{\gamma} = (\lambda_2 - Q'_X \underline{T}_0^0) \quad (3.2.3.k)$$

Os escalares $Q'_X T_X^0$ e $Q'_X \underline{T}_0^0$ são constituídos pela soma de quadrados e de produtos de tratamentos ajustada para blocos referente à variável auxiliar, portanto, $Q'_X T_X^0 = T_X^{0'} Q_X$ e pela soma de produto da variável auxiliar com a variável dependente ajustada para bloco, relativa a tratamento, respectivamente.

Sendo a matriz M simétrica, segue-se que:

$$Q'_x T^0_o = T^{0'}_x Q$$

Considerando-se

$$(\lambda_1 - Q'_x T^0_o) = (\lambda_1 - T^{0'}_x Q_x) = \lambda_3 \quad (3.2.3.1)$$

$$(\lambda_2 - Q'_x T^0_o) = (\lambda_2 - T^{0'}_x Q) = \lambda_4$$

logo, de (3.2.3.k) , tem-se:

$$\lambda_3 \hat{\gamma} = \lambda_4$$

Os escalares λ_3 e λ_4 são constituídos pela soma de quadrado e de produtos do resíduo, relativa à variável auxiliar e pela soma de produto da variável auxiliar com a variável dependente, relativa ao resíduo, respectivamente.

Então:

$$\hat{\gamma} = \lambda_3^{-1} \lambda_4 \quad (3.2.3.m)$$

3.2.4. Somas de quadrados

3.2.4.1. Soma de quadrados de parâmetros

A soma de quadrados de parâmetros, relativa ao modelo (3.2.2.a) , SQ Par (1), é obtida por:

$$SQ \text{ Par } (1) = \theta^{0'} X' Y$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\beta}^{0'} & \underline{T}_1^{0'} & \hat{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{T} \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\beta}^{0'} \underline{B} + \underline{T}_1^{0'} \underline{T} + \hat{\gamma} Z$$

De (3.2.3.a), tem-se:

$$\underline{\beta}^0 = K^{-1} \underline{B} - K^{-1} N' \underline{T}_1^0 - K^{-1} B_x \hat{\gamma}$$

logo:

$$\begin{aligned} \text{SQ Par (1)} &= \underline{T}_1^{0'} \underline{T} + (\underline{B}' K^{-1} - \underline{T}_1^{0'} N K^{-1} - \hat{\gamma} B_x' K^{-1}) \underline{B} + \hat{\gamma} Z \\ &= \underline{T}_1^{0'} (\underline{T} - N K^{-1} \underline{B}) + \underline{B}' K^{-1} \underline{B} + \hat{\gamma} (Z - B_x' K^{-1} \underline{B}) \\ &= \underline{T}_1^{0'} \underline{Q} + \underline{B}' K^{-1} \underline{B} + \hat{\gamma} \lambda_2 \end{aligned}$$

Substituindo-se (3.2.3.i) no primeiro termo da igualdade, vem:

$$\begin{aligned} \text{SQ Par (1)} &= (\underline{T}_0^{0'} - \hat{\gamma} \tau_x^{0'}) \underline{Q} + \underline{B}' K^{-1} \underline{B} + \hat{\gamma} \lambda_2 \\ &= \underline{T}_0^{0'} \underline{Q} + \underline{B}' K^{-1} \underline{B} + \hat{\gamma} (\lambda_2 - \tau_x^{0'} \underline{Q}) \\ &= \underline{T}_0^{0'} \underline{Q} + \underline{B}' K^{-1} \underline{B} + \hat{\gamma} \lambda_4, \end{aligned}$$

onde:

$\underline{T}_0^{0'} \underline{Q} = SQT_{aj}.$	soma de quadrados de tratamentos, ajustado para blocos, referente à variável dependente;
$\underline{B}' \underline{K}^{-1} \underline{B} = SQB$	soma de quadrados de blocos, relativa à variável dependente;
$\hat{\gamma}\lambda_4 = SQReg$	soma de quadrados da regressão

3.2.4.2. Soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão.

A soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão, SQR^* é obtida por:

$$SQR^* = \underline{Y}'\underline{Y} - SQPar (1)$$

$$SQR^* = (\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{T}_0^{0'} \underline{Q} - \underline{B}' \underline{K}^{-1} \underline{B}) - \hat{\gamma}\lambda_4 \quad (3.2.4.2.a)$$

$$SQR^* = R(Y^2) - \hat{\gamma}\lambda_4 \quad (3.2.4.2.b)$$

onde

$R(Y^2)$ é a soma de quadrados do resíduo, sem serem consideradas as variáveis auxiliares.

3.2.4.3. Soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos e regressão.

Seja o modelo matemático ao qual omitimos o

efeito do tratamento

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \gamma x_{ij} + e_{ij} , \quad (3.2.4.3.a)$$

com $i = 1, 2, \dots, b$ e $j = 1, 2, \dots, c+z$,

onde: Y_{ij} , μ , β_i , γ , $x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}$ e e_{ij} têm significados semelhantes ao do modelo (3.2.1.a) .

Usando-se a forma matricial, o modelo (3.2.4.3.a) fica:

$$\underline{Y} = X\underline{\theta} + \underline{\varepsilon} , \quad (3.2.4.3.b)$$

onde,

$\underline{Y}$ é o vetor dos valores observados de dim $(bc + z) \times 1$;

X é a matriz dos coeficientes dos parâmetros, de rank b ;

$\underline{\theta}$ é o vetor dos parâmetros;

$\underline{\varepsilon}$ é o vetor dos erros experimentais, sendo que $\underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$.

Efetuando-se convenientemente a partição da matriz X obtêm-se

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_3 \end{array} \right] , \quad (3.2.4.3.c)$$

onde,

X_1 é a matriz dos coeficientes dos efeitos de blocos, de dim $(bc+z) \times b$;

X_3 é o vetor dos valores observados da variável auxiliar.

A partição do vetor $\underline{\theta}$, correspondente a partição da matriz X é

$$\underline{\theta}' = \left[\underline{\beta}' \mid \gamma \right]$$

onde

$\underline{\beta}'$ e γ tem significados semelhantes ao do modelo (3.2.1.b) e com aquelas dimensões, respectivamente.

O sistema equações normais, obtido através do método dos quadrados mínimos, é dado por:

$$X'X\underline{\theta}^0 = X'Y \quad (3.2.4.3.d)$$

ou seja,

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1' X_1 & X_1' X_3 \\ \hline X_3' X_1 & X_3' X_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{\beta}^0 \\ \gamma \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} X_1' Y \\ X_3' Y \end{array} \right] \quad (3.2.4.3.e)$$

onde $X_1' X_1$, $X_1' X_3$, $X_3' X_1$ e $X_3' X_3$ tem significados semelhantes ao do modelo (3.2.2.b)

Assim, o sistema de equações acima pode ser

escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} K & B_x \\ B'_x & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta}^0 \\ \tilde{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.2.4.3.f)$$

onde $\underline{\beta}^0$, $\tilde{\gamma}$, $\underline{B}$ e Z tem significados semelhantes ao do sistema (3.2.2.c)

O sistema (3.2.4.3.f) resulta nas seguintes equações

$$K \underline{\beta}^0 + B_x \tilde{\gamma} = \underline{B} \quad (3.2.4.3.g)$$

$$B'_x \underline{\beta}^0 + L \tilde{\gamma} = Z \quad (3.2.4.3.h)$$

Pré-multiplicando-se (3.2.4.3.g) por $(-B'_x K^{-1})$ e somando-se em (3.2.4.3.h), tem-se:

$$(L - B'_x K^{-1} B_x) \tilde{\gamma} = (Z - B'_x K^{-1} \underline{B}), \text{ ou por (3.2.3.d) :}$$

$$\lambda_1 \tilde{\gamma} = \lambda_2$$

$$\tilde{\gamma} = \lambda_1^{-1} \lambda_2 \quad (3.2.4.3.i)$$

A soma de quadrados de parâmetros, relativa ao modelo (3.2.4.3.a), SQ Par (2) é obtida por:

$$SQ \text{ Par } (2) = \theta^{0'} X' Y$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\beta}^{0'} & \tilde{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{Z} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\beta}^{0'} \underline{B} + \tilde{\gamma} \underline{Z}$$

De (3.2.4.3.g)

$$\underline{\beta}^{0'} = K^{-1} \underline{B} - K^{-1} B_X' \tilde{\gamma}$$

logo:

$$\begin{aligned} \text{SQ Par (2)} &= (\underline{B}' K^{-1} - \tilde{\gamma} B_X' K^{-1}) \underline{B} + \tilde{\gamma} \underline{Z} \\ &= \underline{B}' K^{-1} \underline{B} - \tilde{\gamma} B_X' K^{-1} \underline{B} + \tilde{\gamma} \underline{Z} \\ &= \underline{B}' K^{-1} \underline{B} + (\underline{Z} - B_X' K^{-1} \underline{B}) \tilde{\gamma} \\ &= \underline{B}' K^{-1} \underline{B} + \lambda_2 \tilde{\gamma} \end{aligned}$$

(3.2.4.3.j)

Finalmente, a soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos e regressão, SQ $T_{aj.}^*$ é

$$\begin{aligned} \text{SQ } T_{aj.}^* &= \text{SQ Par (1)} - \text{SQ Par (2)} \\ &= \underline{T}_0^{0'} \underline{Q} + \underline{B}' K^{-1} \underline{B} + \tilde{\gamma} \lambda_4 - \underline{B}' K^{-1} \underline{B} - \tilde{\gamma} \lambda_2 \\ &= \underline{T}_0^{0'} \underline{Q} + \tilde{\gamma} \lambda_4 - \tilde{\gamma} \lambda_2 \end{aligned}$$

(3.2.4.3.k)

$$= \text{SQ } T_{aj.} + \tilde{\gamma} \lambda_4 - \tilde{\gamma} \lambda_2$$

(3.2.4.3.l)

Somando-se e subtraindo-se $R(Y^2)$ ao segundo membro de (3.2.4.3.l), tem-se:

$$\begin{aligned} SQ \ T_{aj.}^* &= \left[SQ \ T_{aj.} + R(Y^2) \right] - \left[R(Y^2) - \tilde{\gamma} \lambda_4 \right] - \tilde{\gamma} \lambda_2 \\ &= R'(Y^2) - SQR^* - \tilde{\gamma} \lambda_2 \quad (3.2.4.3.m) \end{aligned}$$

onde

$$R'(Y^2) = SQ \ T_{aj.} + R(Y^2)$$

3.2.5. Esperanças matemáticas das somas de quadrados

3.2.5.1. Esperança matemática de $\underline{T}_0^{0'} \underline{Q}$.

Sabe-se que:

$$\underline{T}_0^{0'} \underline{Q} = \underline{Q}' \underline{M}^{-1'} \underline{Q} = \underline{Q}' \underline{M}^{-1} \underline{Q}$$

Mas, de (3.2.3.g), $\underline{Q} = \underline{W}_1 \underline{X}' \underline{Y}$, então, considerando-se o modelo (3.2.1.a) sem o efeito da média, como PIMENTEL GOMES (1967), segue-se que:

$$\begin{aligned} E(\underline{T}_0^{0'} \underline{Q}) &= E \left[\underline{Y}' \underline{X} \underline{W}_1' \underline{M}^{-1} \underline{W}_1 \underline{X}' \underline{Y} \right] \\ &= E \left[(\underline{\theta}' \underline{X}' + \underline{\varepsilon}') \underline{X} \underline{W}_1' \underline{M}^{-1} \underline{W}_1 \underline{X}' (\underline{X} \underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) \right] \\ &= \underline{\theta}' \underline{X}' \underline{X} \underline{W}_1' \underline{M}^{-1} \underline{W}_1 \underline{X}' \underline{X} \underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}' \underline{X} \underline{W}_1' \underline{M}^{-1} \underline{W}_1 \underline{X}' \underline{\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$\underline{W}_1 \underline{X}' \underline{X} \underline{\theta} = \begin{bmatrix} -N \underline{K}^{-1} & \underline{I}_{(c+z)} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{N}' & \underline{B}_x \\ \underline{N} & \underline{R} & \underline{T}_x \\ \underline{B}_x' & \underline{T}_x' & \underline{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{T} \\ \underline{\gamma} \end{bmatrix} = \underline{C} \underline{T} + \underline{Q}_x \underline{\gamma}$$

então

$$\begin{aligned}
E(\underline{T}_0' \underline{Q}) &= (\underline{T}'C + \gamma Q_X')M^{-1}(C\underline{T} + Q_X \gamma) + E \left[\text{TR}(XW_1'M^{-1}W_1X' \varepsilon \varepsilon') \right] \\
&= (\underline{T}'C + \gamma Q_X')M^{-1}(C\underline{T} + Q_X \gamma) + \text{TR} \left[XW_1'M^{-1}W_1X'E(\varepsilon \varepsilon') \right] \\
&= (\underline{T}'C + \gamma Q_X')M^{-1}(C\underline{T} + Q_X \gamma) + \text{TR}(M^{-1}W_1X'XW_1') \sigma^2
\end{aligned}$$

Por (3.2.3.g), $W_1X'XW_1' = C$, tem-se:

$$\begin{aligned}
E(\underline{T}_0' \underline{Q}) &= \underline{T}'CM^{-1}C\underline{T} + \underline{T}'CM^{-1}Q_X\gamma + \gamma Q_X'M^{-1}C\underline{T} + \gamma Q_X'M^{-1}Q_X\gamma + \\
&\quad \text{TR}(M^{-1}C) \sigma^2
\end{aligned}$$

Por outro lado, IEMMA (1985) mostra que a matriz M^{-1} é uma inversa condicional de C . Logo $CM^{-1}C = C$. Então $M^{-1}C$ é idempotente, pois $M^{-1}CM^{-1}C = M^{-1}C$. e, portanto:

$$\begin{aligned}
\text{TR}(M^{-1}C) &= \text{rank}(M^{-1}C) \\
&= \text{rank}(C), \text{ pois } M \text{ é não-singular} \\
&= c+z-1
\end{aligned}$$

Como $T_X = M^{-1}Q_X$ e γ é um escalar, logo,

$$\begin{aligned}
E(\underline{T}_0' \underline{Q}) &= \underline{T}'CM^{-1}C\underline{T} + 2\underline{T}'CT_X\gamma + \gamma^2 Q_X' T_X + (c+z-1)\sigma^2 \\
&\quad (3.2.5.1.a)
\end{aligned}$$

Aqui, é conveniente mostrar que

$$AM^{-1}W_1X' = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\text{Então } AM^{-1}W_1X' &= (C-M)M^{-1}W_1X' \\
&= CM^{-1}W_1X' - W_1X' \quad (3.2.5.1.b)
\end{aligned}$$

Pós- multiplicando-se a expressão anterior por $XW_1' M^{-1} A'$

$$AM^{-1} W_1 X' XW_1' M^{-1} A' = CM^{-1} W_1 X' XW_1' M^{-1} A' - W_1 X' XW_1' M^{-1} A'$$

Por 3.2.3.g, $W_1 X' XW_1' = C$, então:

$$\begin{aligned} AM^{-1} W_1 X' XW_1' M^{-1} A' &= CM^{-1} CM^{-1} A' - CM^{-1} A' \\ &= CM^{-1} A' - CM^{-1} A' \\ &= \emptyset, \text{ ou seja,} \end{aligned}$$

$$AM^{-1} W_1 X' = \emptyset \quad (3.2.5.1.c)$$

Sendo $C = M - A$, logo:

$$CM^{-1} C = C - AM^{-1} C \quad (3.2.5.1.d)$$

e

$$CT_x = CM^{-1} Q_x = Q_x = Q_x - AM^{-1} Q_x \quad (3.2.5.1.e)$$

Pós- multiplicando-se 3.2.5.1.b, primeiramente por XW_1' e posteriormente por XW_2' , obtêm-se:

$$AM^{-1} W_1 X' XW_1' = AM^{-1} C = \emptyset \quad (3.2.5.1.f)$$

$$AM^{-1} W_1 X' XW_2' = AM^{-1} Q_x = \emptyset \quad (3.2.5.1.g)$$

respectivamente

Assim, por 3.2.5.1.c e 3.2.5.1.d

$$CM^{-1} C = c \quad (3.2.5.1.h)$$

$$CT_x = CM^{-1} Q_x = Q_x \quad (3.2.5.1.i)$$

Finalmente

$$E(T_0^{0'} Q) = \underline{T}' C \underline{T} + 2 \underline{T}' Q_X \gamma + \gamma^2 Q_X' T_X + (c+z-1)\sigma^2$$

(3.2.5.1.j)

3.2.5.2. Esperança matemática da SQ Reg

De (3.2.3.m) e (3.2.3.1), tem-se:

$$\hat{\gamma} = \lambda_3^{-1} \lambda_4 \quad e$$

$$\lambda_4 = \lambda_2 - T_X' Q \quad \text{respectivamente.}$$

Logo:

$$\hat{\gamma} = \lambda_3^{-1} (\lambda_2 - T_X' Q) \quad , \quad \text{que por (3.2.3.g), fica,}$$

$$\hat{\gamma} = \lambda_3^{-1} (W_2 X' - T_X' W_1 X') Y \quad (3.2.5.2.a)$$

$$\hat{\gamma} \lambda_4 = Y' (XW_2' - XW_1' T_X) \lambda_3^{-1} (W_2 X' - T_X' W_1 X') Y$$

(3.2.5.2.b)

Assim:

$$E(\hat{\gamma} \lambda_4) = E \left[Y' (XW_2' - XW_1' T_X) \lambda_3^{-1} (W_2 X' - T_X' W_1 X') Y \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[(\underline{\theta}'X' + \underline{\varepsilon}') (XW_2' - XW_1' T_X) \lambda_3^{-1} (W_2X' - T_X' W_1X') (X\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) \right] \\
&= \underline{\theta}'X' (XW_2' - XW_1' T_X) \lambda_3^{-1} (W_2X' - T_X' W_1X') X\underline{\theta} + \\
&E \left[\underline{\varepsilon}' (XW_2' - XW_1' T_X) \lambda_3^{-1} (W_2X' - T_X' W_1X') \underline{\varepsilon} \right]
\end{aligned}$$

Como

$$W_2X'X\underline{\theta} = \begin{bmatrix} -B_X'K^{-1} & 0 & I(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & N' & B_X \\ N & R & T_X \\ B_X' & T_X' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{T} \\ \gamma \end{bmatrix} = Q_X' \underline{T} + \lambda_1 \gamma$$

e

$$W_1X'X\underline{\theta} = C\underline{T} + Q_X\gamma \quad \text{tem-se}$$

$$(W_2X' - T_X' W_1X')X\underline{\theta} = Q_X'\underline{T} + \lambda_1\gamma - T_X' C\underline{T} - T_X' Q_X\gamma$$

$$\text{Como } (\lambda_1 - T_X' Q_X) = \lambda_3 \quad \text{por } (3.2.3.k) \quad e$$

$$C T_X = Q_X \quad \text{por } (3.2.5.1.i), \text{ fica:}$$

$$(W_2X' - T_X' W_1X')X\underline{\theta} = \lambda_3\gamma \quad (3.2.5.2.c)$$

Então

$$E(\widehat{\gamma}\lambda_4) = \gamma^2\lambda_3 + \text{TR} \left[(XW_2' - XW_1' T_X) \lambda_3^{-1} (W_2X' - T_X' W_1X') E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') \right]$$

$$E(\widehat{\gamma}\lambda_4) = \gamma^2\lambda_3 + \text{TR} \left[\lambda_3^{-1} (W_2X' - T_X' W_1X') (XW_2' - XW_1' T_X) \right] \sigma^2$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
&(W_2X' - T_X' W_1X') (XW_2' - XW_1' T_X') = W_2X'XW_2' - W_2X'XW_1' T_X' \\
&- T_X' W_1X'XW_2' + T_X' W_1X'XW_1' T_X'
\end{aligned}$$

Por (3.2.3.g), fica:

$$(W_2 X' - T_X' W_1 X') (X W_2' - X W_1' T_X') = \lambda_1 - Q_X' T_X - T_X' Q_X + T_X' C T_X$$

$$= (\lambda_1 - T_X' Q_X) + (T_X' C - Q_X') T_X \quad \text{que por (3.2.3.k) e}$$

(3.2.5.1.i) , fica:

$$(W_2 X' - T_X' W_1 X') (X W_2' - X W_1' T_X') = \lambda_3 \quad (3.2.5.2.d)$$

Finalmente:

$$E(\tilde{\gamma} \lambda_4) = \gamma^2 \lambda_3 + \sigma^2 \text{TR} \left[\lambda_3^{-1} \lambda_3 \right]$$

$$E(\tilde{\gamma} \lambda_4) = \gamma^2 \lambda_3 + \sigma^2 \quad (3.2.5.2.e)$$

3.2.5.3. Esperança matemática de $\tilde{\gamma} \lambda_2$

De (3.2.4.3.i) e (3.2.3.g), têm-se:

$$\tilde{\gamma} = \lambda_1^{-1} \lambda_2$$

$$\lambda_2 = W_2 X' \underline{Y}, \text{ respectivamente.}$$

Logo:

$$\tilde{\gamma} = \lambda_1^{-1} W_2 X' \underline{Y} \quad (3.2.5.3.a)$$

$$\tilde{\gamma} \lambda_2 = \underline{Y}' X W_2' \lambda_1^{-1} W_2 X' \underline{Y} \quad (3.2.5.3.b)$$

Assim:

$$E(\tilde{\gamma} \lambda_2) = E(\underline{Y}' X W_2' \lambda_1^{-1} W_2 X' \underline{Y})$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[(\underline{\theta}'X' + \underline{\varepsilon}')XW_2'\lambda_1^{-1}W_2X'(X\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) \right] \\
&= \underline{\theta}'X'XW_2'\lambda_1^{-1}W_2X'X\underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}'XW_2'\lambda_1^{-1}W_2X'\underline{\varepsilon})
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
W_2X'X &= \begin{bmatrix} -B_X'K^{-1} & \emptyset & I_{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & N' & B_X \\ N & R & T_X \\ B_X' & T_X' & L \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \emptyset & T_X' - B_X'K^{-1}N' & L - B_X'K^{-1}B_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & Q_X' & \lambda_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
&\underline{\theta}'X'XW_2'\lambda_1^{-1}W_2X'X\underline{\theta} = \\
&\begin{bmatrix} \underline{\beta}' & \vdots & \underline{T}' & \vdots & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset \\ Q_X \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \lambda_1^{-1} \begin{bmatrix} \emptyset & Q_X' & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \text{---} \\ \underline{T} \\ \text{---} \\ \gamma \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\underline{T}'Q_X + \gamma\lambda_1)\lambda_1^{-1}(Q_X'\underline{T} + \lambda_1\gamma) = \underline{T}'Q_X\lambda_1^{-1}Q_X'\underline{T} + \underline{T}'Q_X\lambda_1^{-1}\lambda_1\gamma \\
&+ \gamma\lambda_1\lambda_1^{-1}Q_X'\underline{T} + \gamma\lambda_1\lambda_1^{-1}\lambda_1\gamma
\end{aligned}$$

Portanto

$$E(\tilde{\gamma}|\lambda_2) = \underline{T}'Q_X\lambda_1^{-1}Q_X'\underline{T} + \underline{T}'Q_X\gamma + \gamma Q_X'\underline{T} + \gamma^2\lambda_1 + E\left[TR(XW_2'\lambda_1^{-1}W_2X'\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}')\right]$$

$$E(\tilde{\gamma}|\lambda_2) = \underline{T}'Q_X\lambda_1^{-1}Q_X'\underline{T} + 2\underline{T}'Q_X\gamma + \gamma^2\lambda_1 + TR\left[XW_2'\lambda_1^{-1}W_2X'E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}')\right]$$

$$E(\tilde{\gamma}\lambda_2) = \underline{T}'Q_X\lambda_1^{-1}Q_X'\underline{T} + 2\underline{T}'Q_X\gamma + \gamma^2\lambda_1 + \text{TR}(\lambda_1^{-1}W_2X'XW_2')\sigma^2$$

$$E(\tilde{\gamma}\lambda_2) = \underline{T}'Q_X\lambda_1^{-1}Q_X'\underline{T} + 2\underline{T}'Q_X\gamma + \gamma^2\lambda_1 + \text{TR}(\lambda_1^{-1}\lambda_1)\sigma^2$$

$$E(\tilde{\gamma}\lambda_2) = \underline{T}'Q_X\lambda_1^{-1}Q_X'\underline{T} + 2\underline{T}'Q_X\gamma + \gamma^2\lambda_1 + \sigma^2, \quad (3.2.5.3.c)$$

3.2.5.4. Esperança matemática da SQT_{aj}^* .

De (3.2.4.3.k) ,

$$SQT_{aj}^* = \underline{T}_0^{0'}Q + \tilde{\gamma}\lambda_4 - \tilde{\gamma}\lambda_2$$

$$E(SQT_{aj}^*) = E(\underline{T}_0^{0'}Q) + E(\tilde{\gamma}\lambda_4) - E(\tilde{\gamma}\lambda_2)$$

Usando-se os resultados obtidos em (3.2.5.1.j) (3.2.5.2.e) e (3.2.5.3.c), tem-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} E(SQT_{aj}^*) &= \underline{T}'C\underline{T} + 2\underline{T}'Q_X\gamma + \gamma^2Q_X'T_X + (c+z-1)\sigma^2 + \gamma^2\lambda_3 + \\ &+ \sigma^2 - \underline{T}'Q_X\lambda_1^{-1}Q_X'\underline{T} - 2\underline{T}'Q_X\gamma - \gamma^2\lambda_1 - \sigma^2 \end{aligned}$$

Como $(\lambda_1 - Q_X'T_X) = \lambda_3$, por (3.2.3.k) , então

$$E(SQT_{aj}^*) = \underline{T}'(C - Q_X\lambda_1^{-1}Q_X')\underline{T} + (c+z-1)\sigma^2 \quad (3.2.5.4.a)$$

3.2.5.5. Esperança matemática de $\underline{Y}'\underline{Y}$

A soma de quadrados devida ao total é:

$$\begin{aligned} SQT &= \underline{Y}'\underline{Y} \\ &= (\underline{\theta}'\underline{X}' + \underline{\varepsilon}') (\underline{X}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) \end{aligned}$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned} E(SQT) &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}) \\ &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + \text{TR} \left[E(\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}) \right] \\ &= \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} + (bc + z) \sigma^2 \quad (3.2.5.5.a) \end{aligned}$$

onde,

$$\underline{\theta}' = \begin{bmatrix} \underline{\beta}' & \underline{T}' & \gamma \end{bmatrix}, \quad \underline{X}'\underline{X} = \begin{bmatrix} K & N' & B_X \\ N & R & T_X \\ B_X' & T_X' & L \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \underline{\theta}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\theta} &= \begin{bmatrix} \underline{\beta}' & \underline{T}' & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & N' & B_X \\ N & R & T_X \\ B_X' & T_X' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{T} \\ \gamma \end{bmatrix} = \\ &= (\underline{\beta}'K + \underline{T}'N + \gamma B_X')\underline{\beta} + (\underline{\beta}'N' + \underline{T}'R + \gamma T_X')\underline{T} + \\ &\quad + (\underline{\beta}'B_X + \underline{T}'T_X + \gamma L)\gamma \\ &= \underline{\beta}'K\underline{\beta} + \underline{T}'N\underline{\beta} + \gamma B_X'\underline{\beta} + \underline{\beta}'N'\underline{T} + \underline{T}'R\underline{T} + \\ &\quad + \gamma T_X'\underline{T} + \underline{\beta}'B_X\gamma + \underline{T}'T_X\gamma + \gamma^2 L \end{aligned}$$

$$= \underline{T}' \underline{R} \underline{T} + \underline{\beta}' \underline{K} \underline{\beta} + \gamma^2 \underline{L} + 2 \underline{\beta}' \underline{N}' \underline{T} + 2 \gamma \underline{T}' \underline{X} \underline{T} + 2 \gamma \underline{B}' \underline{X} \underline{\beta} \quad (3.2.5.5.b)$$

Substituindo-se 3.2.5.5.b em (3.2.5.5.a), segue-se que:

$$E(\underline{Y}' \underline{Y}) = \underline{T}' \underline{R} \underline{T} + \underline{\beta}' \underline{K} \underline{\beta} + \gamma^2 \underline{L} + 2 \underline{\beta}' \underline{N}' \underline{T} + 2 \gamma \underline{T}' \underline{X} \underline{T} + 2 \gamma \underline{B}' \underline{X} \underline{\beta} + (bc+z)\sigma^2 \quad (3.2.5.5.c)$$

3.2.5.6. Esperança matemática de $\underline{B}' \underline{K}^{-1} \underline{B}$

A soma de quadrados de blocos é dada por:

$$SQB = \underline{B}' \underline{K}^{-1} \underline{B} = \underline{Y}' \underline{X}_1 \underline{K}^{-1} \underline{X}_1' \underline{Y}$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned} E(SQB) &= E(\underline{Y}' \underline{X}_1 \underline{K}^{-1} \underline{X}_1' \underline{Y}) = E \left[(\underline{\theta}' \underline{X}' + \underline{\varepsilon}') \underline{X}_1 \underline{K}^{-1} \underline{X}_1' (\underline{X} \underline{\theta} + \underline{\varepsilon}) \right] \\ &= \underline{\theta}' \underline{X}' \underline{X}_1 \underline{K}^{-1} \underline{X}_1' \underline{X} \underline{\theta} + E(\underline{\varepsilon}' \underline{X}_1 \underline{K}^{-1} \underline{X}_1' \underline{\varepsilon}) \quad (3.2.5.6.a) \end{aligned}$$

$$\underline{X}' \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} \underline{X}_1' \\ \underline{X}_2' \\ \underline{X}_3' \end{bmatrix} \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} \underline{K} \\ \underline{N} \\ \underline{B}' \underline{X} \end{bmatrix}$$

$$X'X_1K^{-1}X_1'X = \begin{bmatrix} K \\ N \\ B'_X \end{bmatrix} K^{-1} \begin{bmatrix} K & N' & B_X \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K & N' & B_X \\ N & NK^{-1}N' & NK^{-1}B_X \\ B'_X & B'_XK^{-1}N' & B'_XK^{-1}B_X \end{bmatrix}$$

$$\underline{\theta}'X'X_1K^{-1}X_1'X\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}' & \underline{T}' & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & N' & B_X \\ N & NK^{-1}N' & NK^{-1}B_X \\ B'_X & B'_XK^{-1}N' & B'_XK^{-1}B_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{T} \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \underline{\beta}'K\underline{\beta} + \underline{T}'N\underline{\beta} + \gamma B'_X\underline{\beta} + \underline{\beta}'N'\underline{T} + \underline{T}'NK^{-1}N'\underline{T} + \\ &+ \gamma B'_XK^{-1}N'\underline{T} + \underline{\beta}'B_X\gamma + \underline{T}'NK^{-1}B_X\gamma + \gamma^2 B'_XK^{-1}B_X \\ &= \underline{T}'NK^{-1}N'\underline{T} + \underline{\beta}'K\underline{\beta} + \gamma^2 B'_XK^{-1}B_X + 2\underline{\beta}'N'\underline{T} \\ &+ 2\gamma B'_XK^{-1}N'\underline{T} + 2\gamma B'_X\underline{\beta} \end{aligned} \quad (3.2.5.6.b)$$

Substituindo-se (3.2.5.6.b) em (3.2.5.6.a), segue-se que:

$$\begin{aligned} E(SQB) &= \underline{T}'NK^{-1}N'\underline{T} + \underline{\beta}'K\underline{\beta} + \gamma^2 B'_XK^{-1}B_X + \\ &+ 2\underline{\beta}'N'\underline{T} + 2\gamma B'_XK^{-1}N'\underline{T} + 2\gamma B'_X\underline{\beta} + \\ &+ TR \left[X_1K^{-1}X_1' E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') \right] \end{aligned}$$

$$\text{Mas, } E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 I, \text{ e } \text{TR}(\underline{X}_1 \underline{K}^{-1} \underline{X}_1') = \text{TR}(\underline{I}_b) = b$$

logo,

$$\begin{aligned} E(\text{SQB}) = & \underline{T}' \underline{N} \underline{K}^{-1} \underline{N}' \underline{T} + \underline{\beta}' \underline{K} \underline{\beta} + \gamma^2 \underline{B}_x' \underline{K}^{-1} \underline{B}_x + 2 \underline{\beta}' \underline{N}' \underline{T} + \\ & + 2 \gamma \underline{B}_x' \underline{K}^{-1} \underline{N}' \underline{T} + 2 \gamma \underline{B}_x' \underline{\beta} + b \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.2.5.6.c)$$

3.2.5.7. Esperança matemática da SQR*

De (3.2.4.2.a) , tem-se:

$$E(\text{SQR}^*) = E(\underline{Y}'\underline{Y}) - E(\underline{T}_0' \underline{Q}) - E(\underline{B}' \underline{K}^{-1} \underline{B}) - E(\tilde{\gamma} \lambda_4)$$

Substituindo-se os resultados obtidos em (3.2.5.5.c) , (3.2.5.1.j) , (3.2.5.6.c) e (3.2.5.2.e) respectivamente, tem-se, simplificando:

$$\begin{aligned} E(\text{SQR}^*) = & \underline{T}' \underline{R} \underline{T} + \gamma^2 \underline{L} + 2 \gamma \underline{T}_x' \underline{T} - \underline{T}' \underline{C} \underline{T} - \\ & - 2 \underline{T}' \underline{Q}_x \gamma - \gamma^2 \underline{Q}_x' \underline{T}_x - \underline{T}' \underline{N} \underline{K}^{-1} \underline{N}' \underline{T} - \\ & - \gamma \underline{B}_x' \underline{K}^{-1} \underline{B}_x \gamma - 2 \gamma \underline{B}_x' \underline{K}^{-1} \underline{N}' \underline{T} - \gamma^2 \lambda_3 + (bc - b - c) \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\text{SQR}^*) = & \underline{T}' (\underline{R} - \underline{N} \underline{K}^{-1} \underline{N}') \underline{T} + \gamma^2 (\underline{L} - \underline{B}_x' \underline{K}^{-1} \underline{B}_x) \\ & + 2 \gamma (\underline{T}_x' - \underline{B}_x' \underline{K}^{-1} \underline{N}') \underline{T} - \underline{T}' \underline{C} \underline{T} - 2 \underline{T}' \underline{Q}_x \gamma \\ & - \gamma \underline{Q}_x' \underline{T}_x \gamma - \gamma^2 \lambda_3 + (bc - b - c) \sigma^2 \end{aligned}$$

Usando-se (3.2.3.d), tem-se:

$$\begin{aligned} E(SQR^*) &= \underline{T}'C\underline{T} + \gamma^2\lambda_1 + 2\gamma Q_X'\underline{T} - \underline{T}'C\underline{T} \\ &- 2\underline{T}'Q_X\gamma - \gamma^2 Q_X' T_X - \gamma^2\lambda_3 + (bc - b - c)\sigma^2 \\ &= \gamma^2(\lambda_1 - Q_X' T_X) - \gamma^2\lambda_3 + (bc - b - c)\sigma^2 \end{aligned}$$

Como $(\lambda_1 - Q_X' T_X) = \lambda_3$, (3.2.3.k), logo:

$$E(SQR^*) = (bc - b - c)\sigma^2 \quad (3.2.5.7.a)$$

3.2.6. Distribuição das Formas Quadráticas

Para determinar-se a distribuição das somas de quadrados apresentadas em (3.2), os seguintes teoremas foram utilizados

TEOREMA 1 (GRAYBILL, 1961)

Se $\underline{Y} \sim N(\underline{\mu}, \sigma^2 I)$, então $\underline{Y}'A\underline{Y}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n,\delta)}$, ou

ou seja, $\underline{Y}'A\underline{Y}/\sigma^2$ tem distribuição de qui-quadrado com n graus liberdade e parâmetro de não centralidade

$$\delta = \underline{\mu}'A\underline{\mu}/2\sigma^2,$$

se e somente se A for uma matriz idempotente de característica n .

TEOREMA 2 (SEARLE, 1971)

Quando $\underline{Y} \sim N(\underline{\mu}, V)$, as formas quadráticas $\underline{Y}'A\underline{Y}$ e $\underline{Y}'B\underline{Y}$ são distribuídas independentemente, se e somente se $AVB = \emptyset$, ou, de forma equivalente, $BVA = \emptyset$

TEOREMA 3 (GRAYBILL, 1961)

Sejam W e Z variáveis aleatórias independentes tais que $W \sim \chi^2_{(n_1, \delta)}$ e $Z \sim \chi^2_{n_2}$. Então,

$$U = \frac{W/n_1}{Z/n_2} \quad \text{tem distribuição } F, \text{ não central com } n_1 \text{ e } n_2 \text{ graus de liberdade, e parâmetros de não centralidade } \delta.$$

3.2.6.1. Distribuição de $\underline{T}_0^{0'} \underline{Q} / \sigma^2$

Sabe-se que $SQT_{aj.}$ é:

$$\underline{T}_0^{0'} \underline{Q} = \underline{Q}' \underline{M}^{-1'} \underline{Q} = \underline{Q}' \underline{M}^{-1} \underline{Q} = \underline{Y}' A_1 \underline{Y} \quad (3.2.6.1.a)$$

onde $A_1 = XW_1' M^{-1} W_1 X'$

Então

$$A_1^2 = XW_1' M^{-1} W_1 X' XW_1' M^{-1} W_1 X'$$

Mas, por (3.2.3.g) , chega-se a $W_1 X' X W_1' = C$;

logo,

$$\begin{aligned} A_1^2 &= X W_1' M^{-1} C M^{-1} W_1 X' \\ &= X W_1' M^{-1} (-A+M) M^{-1} W_1 X' \\ &= -X W_1' M^{-1} A M^{-1} W_1 X' + X W_1' M^{-1} W_1 X' \end{aligned}$$

que, por (3.2.5.1.c) , fica:

$$A_1^2 = X W_1' M^{-1} W_1 X' = A_1 \quad (3.2.6.1.b)$$

ou seja, A_1 é uma matriz idempotente, e ainda,

$$\begin{aligned} \text{Caract. } (A_1) &= \text{TR}(X W_1' M^{-1} W_1 X') \\ &= \text{TR}(M^{-1} W_1 X' X W_1') \\ &= \text{TR}(M^{-1} C) \\ &= \text{TR}(C) = c + z - 1 \end{aligned} \quad (3.2.6.1.c)$$

Tem-se ainda:

$$\underline{\mu}' A_1 \underline{\mu} = \underline{\theta}' X' X W_1' M^{-1} W_1 X' X \underline{\theta}$$

que por $W_1 X' X \underline{\theta} = C \underline{T} + Q_X \gamma$, (3.2.5.1.h) e (3.2.5.1.i) fica:

$$\underline{\mu}' A_1 \underline{\mu} = \underline{T}' C \underline{T} + 2 \underline{T}' Q_X \gamma + \gamma^2 Q_X' T_X \quad (3.2.6.1.d)$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$\frac{\underline{T}'_0 \underline{Q}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_1, \delta_1)} \quad (3.2.6.1.e)$$

onde

$$n_1 = c + z - 1 ;$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{T}' C \underline{T} + 2 \underline{T}' Q_X \gamma + \gamma' Q'_X T_X)$$

3.2.6.2. Distribuição da SQ Reg/ σ^2

De (3.2.5.2.b) , tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\lambda_4} &= \underline{Y}' (\underline{XW}'_2 - \underline{XW}'_1 T_X) \lambda_3^{-1} (\underline{W}_2 X' - T'_X W_1 X') \underline{Y} \\ &= \underline{Y}' A_2 \underline{Y} \end{aligned} \quad (3.2.6.2.a)$$

$$\text{onde } A_2 = (\underline{XW}'_2 - \underline{XW}'_1 T_X) \lambda_3^{-1} (\underline{W}_2 X' - T'_X W_1 X')$$

Pode-se verificar que

$$\begin{aligned} A_2^2 &= (\underline{XW}'_2 - \underline{XW}'_1 T_X) \lambda_3^{-1} (\underline{W}_2 X' - T'_X W_1 X') (\underline{XW}'_2 - \underline{XW}'_1 T_X) \lambda_3^{-1} \\ &\quad (\underline{W}_2 X' - T'_X W_1 X') \end{aligned}$$

Mas, por (3.2.5.2.d) , tem-se:

$$A_2^2 = (XW_2' - XW_1'T_X)\lambda_3^{-1}(W_2X' - T_X'W_1X') = A_2 \quad (3.2.6.2.b)$$

ou seja, A_2 é uma matriz idempotente, e ainda,

$$\begin{aligned} \text{Caract. } (A_2) &= \text{TR} \left[(XW_2' - XW_1'T_X)\lambda_3^{-1}(W_2X' - T_X'W_1X') \right] \\ &= \text{TR} \left[\lambda_3^{-1}(W_2X' - T_X'W_1X')(XW_2' - XW_1'T_X) \right] \\ &= \text{TR} (\lambda_3^{-1} \lambda_3) \\ &= \text{TR} (1) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.2.6.2.c)$$

Tem-se, ainda:

$$\underline{\mu}' A_2 \underline{\mu} = \theta' X' (XW_2' - XW_1'T_X)\lambda_3^{-1}(W_2X' - T_X'W_1X') X\theta,$$

que, por (3.2.5.2.c), fica:

$$\underline{\mu}' A_2 \underline{\mu} = \gamma^2 \lambda_3 \quad (3.2.6.2.d)$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$\hat{\gamma} \lambda_4 / \sigma^2 = \text{SQ Reg} / \sigma^2 \sim \chi^2_{(n_2, \delta_2)} \quad (3.2.6.2.e)$$

onde

$$n_2 = 1;$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \gamma^2 \lambda_3$$

3.2.6.3. Distribuição de $\tilde{\gamma}\lambda_2/\sigma^2$

De (3.2.5.3.b)

$$\tilde{\gamma}\lambda_2 = \underline{Y}' \underline{XW}_2' \lambda_1^{-1} \underline{W}_2 \underline{X}' \underline{Y} = \underline{Y}' A_3 \underline{Y} \quad (3.2.6.3.a)$$

onde $A_3 = \underline{XW}_2' \lambda_1^{-1} \underline{W}_2 \underline{X}'$.

Verifica-se que:

$$A_3^2 = (\underline{XW}_2' \lambda_1^{-1} \underline{W}_2 \underline{X}') (\underline{XW}_2' \lambda_1^{-1} \underline{W}_2 \underline{X}') \quad , \quad \text{mas}$$

 $\underline{W}_2 \underline{X}' \underline{XW}_2' = \lambda_1$ por (3.2.3.g) , logo:

$$A_3^2 = \underline{XW}_2' \lambda_1^{-1} \underline{W}_2 \underline{X}' = A_3 \quad (3.2.6.3.b)$$

isto é, A_3 é uma matriz idempotente. Então:

$$\text{Caract. } (A_3) = \text{TR}(\underline{XW}_2' \lambda_1^{-1} \underline{W}_2 \underline{X}')$$

$$= \text{TR}(\lambda_1^{-1} \underline{W}_2 \underline{X}' \underline{XW}_2')$$

$$= \text{TR}(\lambda_1^{-1} \lambda_1)$$

$$= \text{TR} (1)$$

$$= 1 \quad (3.2.6.3.c)$$

Tem-se ainda:

$$\underline{\mu}' A_3 \underline{\mu} = \underline{\theta}' X' X W_2' \lambda_1^{-1} W_2 X' X \underline{\theta}$$

que por $W_2 X' X \underline{\theta} = Q_X' \underline{T} + \lambda_1 \gamma$, fica:

$$\underline{\mu}' A_3 \underline{\mu} = \underline{T}' Q_X \lambda_1^{-1} Q_X' \underline{T} + 2 \underline{T}' Q_X \gamma + \gamma^2 \lambda_1 \quad (3.2.6.3.d)$$

Assim, pelo teorema 1, tem-se:

$$\bar{\gamma} \lambda_2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{(n_3, \delta_3)} \quad (3.2.6.3.e)$$

onde:

$$n_3 = 1$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{T}' Q_X \lambda_1^{-1} Q_X' \underline{T} + 2 \underline{T}' Q_X \gamma + \gamma^2 \lambda_1)$$

3.2.6.4. Distribuição da $SQT_{aj.}^* / \sigma^2$

Sabe-se que $SQT_{aj.}^*$ é:

$$SQT_{aj.}^* = \underline{T}_0^{0'} \underline{Q} + \bar{\gamma} \lambda_4 - \bar{\gamma} \lambda_2 \quad \text{que, por} \\ (3.2.6.1.a), (3.2.6.2.a) \text{ e } (3.2.6.3.a), \text{ fica:}$$

$$SQT_{aj.}^* = \underline{Y}' (A_1 + A_2 - A_3) \underline{Y} = \underline{Y}' A_4 \underline{Y} \quad (3.2.6.4.a)$$

$$\text{onde } A_4 = A_1 + A_2 - A_3$$

Tem-se:

$$A_4^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_1 - A_2 A_3 - A_3 A_1 - A_3 A_2$$

Mas:

$$A_1 A_2 = XW_1' M^{-1} W_1 X' (XW_2' - XW_1' T_X) \lambda_3^{-1} (W_2 X' - T_X' W_1 X')$$

Por (3.2.3.g)

$$W_1 X' (XW_2' - XW_1' T_X) = Q_X - C T_X \quad \text{que, por}$$

(3.2.5.1.i) , tem-se:

$$W_1 X' (XW_2' - XW_1' T_X) = \emptyset \quad (3.2.6.4.b)$$

Assim, por (3.2.6.4.b) , tem-se:

$$A_1 A_2 = \emptyset \quad (3.2.6.4.c)$$

Sendo $A_2 A_1 = (A_1 A_2)'$, logo:

$$A_2 A_1 = \emptyset \quad (3.2.6.4.d)$$

Agora:

$$A_1 A_3 = XW_1' M^{-1} W_1 X' XW_2' \lambda_1^{-1} W_2 X' \quad \text{que, por}$$

(3.2.3.g) , fica:

$$A_1 A_3 = XW_1' M^{-1} Q_X \lambda_1^{-1} W_2 X'$$

Sendo $M^{-1} Q_X = T_X$, logo:

$$A_1 A_3 = XW_1' T_X \lambda_1^{-1} W_2 X' \quad (3.2.6.4.e)$$

Como $A_3 A_1 = (A_1 A_3)'$, logo:

$$A_3 A_1 = X W_2' \lambda_1^{-1} T_X' W_1 X' \quad (3.2.6.4.f)$$

Por outro lado, tem-se:

$$A_2 A_3 = (X W_2' - X W_1' T_X) \lambda_3^{-1} (W_2 X' - T_X' W_1 X') (X W_2' \lambda_1^{-1} W_2 X')$$

Por (3.2.3.g), vem:

$$(W_2 X' - T_X' W_1 X') X W_2' = (\lambda_1 - T_X' Q_X), \quad \text{que}$$

por (3.2.3.1), fica:

$$(W_2 X' - T_X' W_1 X') X W_2' = \lambda_3 \quad (3.2.6.4.g)$$

Portanto:

$$A_2 A_3 = (X W_2' - X W_1' T_X) \lambda_1^{-1} W_2 X', \quad \text{que por} \\ (3.2.6.3.a) \text{ e } (3.2.6.4.e), \text{ fica:}$$

$$A_2 A_3 = A_3 - A_1 A_3 \quad (3.2.6.4.h)$$

Como $A_3 A_2 = (A_2 A_3)'$, logo:

$$A_3 A_2 = A_3' - (A_1 A_3)' = A_3 - A_3 A_1 \quad (3.2.6.4.i)$$

Finalmente, tem-se:

$$A_4^2 = A_1 + A_2 + A_3 + \emptyset - A_2 A_3 + \emptyset - (A_3 - A_1 A_3) - \\ - A_3 A_1 - (A_3 - A_3 A_1)$$

Após as simplificações, obtêm-se:

$$A_4^2 = (A_1 + A_2 - A_3) = A_4 \quad , \quad (3.2.6.4.j)$$

isto é, A_4 é uma matriz idempotente. Assim sendo, segue-se que:

$$\begin{aligned} \text{Caract. } (A_4) &= \text{TR}(A_4) = \text{TR}(A_1 + A_2 - A_3) \\ &= \text{TR}(A_1) + \text{TR}(A_2) - \text{TR}(A_3) \quad , \quad \text{que} \end{aligned}$$

por (3.2.6.1.c) , (3.2.6.2.c) e (3.2.6.3.c) , fica:

$$\text{Caract. } (A_4) = (c + z - 1) \quad (3.2.6.4.k)$$

Por (3.2.6.1.d) , (3.2.6.2.d) e (3.2.6.3.d), após as simplificações, tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{\mu}' A_4 \underline{\mu} &= \underline{\mu}' (A_1 + A_2 - A_3) \underline{\mu} = \underline{\tau}' (C - Q_X \lambda_1^{-1} Q_X') \underline{\tau} \\ & \quad (3.2.6.4.l) \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$SQT_{aj.}^* / \sigma^2 \sim \chi_{(n_4, \delta_4)}^2 \quad (3.2.6.4.m)$$

onde

$$n_4 = (c + z - 1) \quad ;$$

$$\delta_4 = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{\tau}' (C - Q_X \lambda_1^{-1} Q_X') \underline{\tau}$$

3.2.6.5. Distribuição de $\underline{Y}'\underline{Y}/\sigma^2$

Tem-se:

$$\underline{Y}'\underline{Y} = \underline{Y}'\underline{I}\underline{Y} = \underline{Y}'\underline{A}_5\underline{Y} \quad (3.2.6.5.a)$$

onde $\underline{A}_5 = \underline{I}_{(b.c+z)}$

Como $\underline{A}_5$ é uma matriz idempotente, de característica $(b.c+z)$, então, pelo Teorema 1 e por (3.2.5.5.b), tem-se:

$$\underline{Y}'\underline{Y}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n_5, \delta_5)} \quad , \quad (3.2.6.5.b)$$

onde:

$$n_5 = b.c+z \quad ;$$

$$\delta_5 = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{T}'\underline{R}\underline{T} + \underline{\beta}'\underline{K}\underline{\beta} + \gamma^2\underline{L} + 2\underline{\beta}'\underline{N}'\underline{T} + 2\gamma\underline{T}'\underline{X}\underline{T} + 2\gamma\underline{B}'\underline{X}\underline{\beta})$$

3.2.6.6. Distribuição de $\underline{B}'\underline{K}^{-1}\underline{B}/\sigma^2$

Sabe-se que:

$$SQB = \underline{B}'\underline{K}^{-1}\underline{B} = \underline{Y}'\underline{X}_1\underline{K}^{-1}\underline{X}_1'\underline{Y} = \underline{Y}'\underline{A}_6\underline{Y} \quad , \quad (3.2.6.6.a) \quad \text{onde}$$

$$\underline{A}_6 = \underline{X}_1\underline{K}^{-1}\underline{X}_1'$$

Verifica-se que:

$$A_6^2 = X_1 K^{-1} X_1' X_1 K^{-1} X_1' = X_1 K^{-1} K K^{-1} X_1' = X_1 K^{-1} X_1' = A_6 \quad ,$$

(3.2.6.6.b) , ou seja, A_6 é uma matriz idempotente; e ainda:

$$\begin{aligned} \text{Caract. } (A_6) &= \text{TR}(X_1 K^{-1} X_1') \\ &= \text{TR}(I_b) \\ &= b \quad , \quad (3.2.6.6.c) \end{aligned}$$

Tem-se ainda:

$$\underline{\mu}' A_6 \underline{\mu} = \underline{\theta}' X' X_1 K^{-1} X_1' X \underline{\theta} \quad , \quad \text{que, por}$$

(3.2.5.6.b) , fica:

$$\begin{aligned} \underline{\mu}' A_6 \underline{\mu} &= \underline{T}' N K^{-1} N' \underline{T} + \underline{\beta}' K \underline{\beta} + \gamma^2 \underline{B}_X' K^{-1} \underline{B}_X + 2 \underline{\beta}' N' \underline{T} + \\ &+ 2 \gamma \underline{B}_X' K^{-1} N' \underline{T} + 2 \gamma \underline{B}_X' \underline{\beta} \quad (3.2.6.6.d) \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$SQB/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n_6, \delta_6)} \quad , \quad (3.2.6.6.e)$$

onde,

$$n_6 = b$$

$$\delta_6 = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{T}' \underline{N} \underline{K}^{-1} \underline{N}' \underline{T} + \underline{\beta}' \underline{K} \underline{\beta} + \gamma^2 \underline{B}_X' \underline{K}^{-1} \underline{B}_X + 2 \underline{\beta}' \underline{N}' \underline{T} + 2 \gamma \underline{B}_X' \underline{K}^{-1} \underline{N}' \underline{T} + 2 \gamma \underline{B}_X' \underline{\beta})$$

3.2.6.7. Distribuição de SQR^*/σ^2

A SQR^* é dada por:

$$SQR^* = \underline{Y}' \underline{Y} - \underline{T}_0' \underline{Q} - \hat{\gamma} \lambda_4 - \underline{B}' \underline{K}^{-1} \underline{B} \quad \text{que, por}$$

(3.2.6.5.a) , (3.2.6.1.a)(3.2.6.2.a) e (3.2.6.6.a) , fica:

$$\begin{aligned} SQR^* &= \underline{Y}' (I - A_1 - A_2 - A_6) \underline{Y} \\ &= \underline{Y}' A_7 \underline{Y} \end{aligned} \quad (3.2.6.7.a)$$

onde $A_7 = I - A_1 - A_2 - A_6$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} A_7^2 &= I^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_6^2 - A_1 - A_2 - A_6 - A_1 + A_1 A_2 + A_1 A_6 - \\ &\quad - A_2 + A_2 A_1 + A_2 A_6 - A_6 + A_6 A_1 + A_6 A_2 \end{aligned}$$

Vimos que A_1 , A_2 e A_6 são matrizes idempotentes. De (3.2.6.4.c) e (3.2.6.4.d) , têm-se $A_1 A_2 = \emptyset$ e $A_2 A_1 = \emptyset$, respectivamente.

Sendo:

$$A_1 A_6 = X W_1' M^{-1} W_1 X' X_1 K^{-1} X_1'$$

$$\text{onde } X' X_1 = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{bmatrix} X_1 = \begin{bmatrix} X_1' X_1 \\ X_2' X_1 \\ X_3' X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ N \\ B_x' \end{bmatrix} \quad e$$

$$W_1 X' X_1 = \begin{bmatrix} -NK^{-1} & I_{(c+z)} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ N \\ B_x' \end{bmatrix} = \underline{\emptyset}, \quad (3.2.6.7.b)$$

Então, em (3.2.6.7.a), tem-se:

$$A_1 A_6 = \emptyset, \quad (3.2.6.7.c)$$

Como $A_6 A_1 = (A_1 A_6)'$, logo:

$$A_6 A_1 = \emptyset, \quad (3.2.6.7.d)$$

Mas,

$$W_2 X' X_1 = \begin{bmatrix} -B_x' K^{-1} & \emptyset & I_{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ N \\ B_x' \end{bmatrix} = \emptyset, \quad (3.2.6.7.e)$$

Então,

$$A_2 A_6 = (X W_2' - X W_1' T_x) \lambda_3^{-1} (W_2 X' - T_x' W_1 X') X_1 K^{-1} X_1'$$

que por 3.2.6.7.e e 3.2.6.7.b , fica:

$$A_2 A_6 = \emptyset \quad (3.2.6.7.f)$$

Como $A_6 A_2 = (A_2 A_6)'$, logo:

$$A_6 A_2 = \emptyset \quad , \quad (3.2.6.7.g)$$

Finalmente, tem-se:

$$\begin{aligned} A_7^2 &= I + A_1 + A_2 + A_6 - A_1 - A_2 - A_6 - A_1 + 0 \\ &\quad + 0 - A_2 + 0 + 0 - A_6 + 0 + 0. \end{aligned}$$

Após as simplificações, obtêm-se:

$$A_7^2 = (I - A_1 - A_2 - A_6) = A_7 \quad , \quad (3.2.6.7.h)$$

isto é, A_7 é uma matriz idempotente.

Assim sendo, segue-se que:

$$\begin{aligned} \text{Caract. } (A_7) &= \text{TR}(I_{(bc+z)} - A_1 - A_2 - A_6) \\ &= \text{TR}(I_{(bc+z)}) - \text{TR}(A_1) - \text{TR}(A_2) - \text{TR}(A_6) \end{aligned}$$

Como $\text{TR}(I_{(bc+z)}) = bc + z$ e usando-se (3.2.6.1.c),

(3.2.6.2.c) e (3.2.6.6.c) , tem-se:

$$\text{Caract. } (A_7) = (b.c + z - c - z + \lambda - \lambda - b) ,$$

$$\text{Caract. } (A_7) = (bc - c - b) , \quad (3.2.6.7.i)$$

Por (3.2.6.5.a) , (3.2.6.1.d) , (3.2.6.2.d) e (3.2.6.6.d) , após todas as simplificações, obtêm-se:

$$\mu' A_7 \mu = \mu' (I - A_1 - A_2 - A_6) \mu = 0 , \quad (3.2.6.7.j)$$

Assim, pelo Teorema 1, tem-se:

$$SQR^*/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n_7, 0)} , \quad (3.2.6.7.k)$$

ou seja, SQR^*/σ^2 tem distribuição de qui-quadrado central, com n_7 graus de liberdade, onde,

$$n_7 = (bc - b - c)$$

3.2.6.8. Distribuição do quociente $\frac{SQ \text{ Reg}/n_2}{SQR^*/n_7}$

De (3.2.6.2.a) e (3.2.6.7.a) , têm-se:

$$SQ \text{ Reg.} = \hat{\gamma} \lambda_4 = \underline{Y}' A_2 \underline{Y} ,$$

$$SQ \text{ Res}^* = \underline{Y}' (I - A_1 - A_2 - A_6) \underline{Y} = \underline{Y}' A_7 \underline{Y} ,$$

respectivamente.

Verifica-se que, sendo $V = \sigma^2 I$, então,

$$\begin{aligned}
 A_2 V A_7 &= A_2 A_7 \sigma^2 \\
 &= A_2 (I - A_1 - A_2 - A_6) \sigma^2 \\
 &= (A_2 - A_2 A_1 - A_2 - A_2 A_6) \sigma^2 \\
 &= (A_2 - \emptyset - A_2 - \emptyset) \sigma^2 \\
 &= \emptyset \quad (3.2.6.8.a)
 \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 2, SQ Reg e SQR* são independentes, e usando-se o Teorema 3, tem-se, por (3.2.6.2.e) e (3.2.6.7.k), que:

$$\frac{\text{SQ Reg.}/n_2}{\text{SQ R}^*/n_7} \sim F(n_2, n_7, \delta_2) \quad (3.2.6.8.b)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 n_2 &= 1 ; \\
 n_7 &= (bc - b - c); \\
 \delta_2 &= \frac{1}{2\sigma^2} \gamma^2 \lambda_3
 \end{aligned}$$

3.2.6.9. Distribuição do quociente $\frac{\text{SQT}_{aj}^*/n_4}{\text{SQR}^*/n_7}$

De 3.2.6.4.a e 3.2.6.7.a, tem-se:

$$SQT_{aj}^* = \underline{Y}'(A_1 + A_2 - A_3) \underline{Y} = \underline{Y}'A_4\underline{Y} ,$$

$$SQR^* = \underline{Y}'(I - A_1 - A_2 - A_6) \underline{Y} = \underline{Y}'A_7\underline{Y} ,$$

respectivamente.

Verifica-se que, sendo $V = \sigma^2 I$, então,

$$\begin{aligned} A_4 V A_7 &= A_4 A_7 \sigma^2 \\ &= (A_1 + A_2 - A_3)(I - A_1 - A_2 - A_6) \sigma^2 \\ &= \left[A_1 - A_1^2 - A_1 A_2 - A_1 A_6 + \right. \\ &\quad + A_2(I - A_1 - A_2 - A_6) - A_3 + A_3 A_1 + \\ &\quad \left. + A_3 A_2 + A_3 A_6 \right] \sigma^2 , \quad (3.2.6.9.a) \end{aligned}$$

Mas,

$$A_3 A_6 = X W_2' \lambda_1^{-1} W_2 X' X_1 K^{-1} X_1' , \text{ que por (3.2.6.7.e) ,}$$

$$\text{fica: } A_3 A_6 = \emptyset , \quad (3.2.6.9.b)$$

Substituindo-se os valores obtidos em (3.2.6.1.b) (3.2.6.4.c) , (3.2.6.7.c) , (3.2.6.8.a), (3.2.6.4.i) e (3.2.6.9.b) em (3.2.6.9.a) , e fazendo-se as simplificações, obtêm-se:

$$(A_1 + A_2 - A_3)(I - A_1 - A_2 - A_6) \sigma^2 = 0, \quad (3.2.6.9.c)$$

Assim, pelo Teorema 2, SQT_{aj}^* e SQR^* são independentes, e usando-se o Teorema 3, tem-se, por (3.2.6.4.m) e (3.2.6.7.k), que:

$$\frac{SQT_{aj}^*/n_4}{SQR^*/n_7} \sim F_{(n_4, n_7, \delta_4)} \quad (3.2.6.9.c)$$

onde:

$$n_4 = (c + z - 1) ;$$

$$n_7 = (bc - b - c) ;$$

$$\delta_4 = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{T}'(C - Q_X \lambda_1^{-1} Q_X') \underline{T}$$

3.2.7. Estimadores das médias de tratamentos ajustadas para blocos e regressão.

As estimativas das médias dos tratamentos, ajustadas para blocos e regressão, μ_j^0 , são obtidas por:

$$\mu_j^0 = \mu^0 + t_j^0 \quad (j = 1, 2, \dots, c + z) \quad (3.2.7.a)$$

onde $\mu^0 = \frac{y_{..}}{b.c+z}$

De (3.2.7.a) e (3.2.3.j), tem-se

$$\mu_j^0 = \mu_{j0}^0 - t_{j1} \bar{Y} \quad (j = 1, 2, \dots, c+z) \quad (3.2.7.b)$$

onde $\mu_{j0}^0 = t_{j0}^0 + \mu^0$ é a média de j-ésimo tratamento ajustado para blocos.

3.2.8. Quadro da análise de covariância

Seguindo a notação de PIMENTEL GOMES (1985) tem-se o seguinte quadro da análise de covariância.

Quadro da análise de covariância

Causa de Variação	G.L.	Somos de Quadrados e Produtos			G.L.	S.Q.	O.M.	F
		y^2	xy	x^2				
Blocos	b - 1	$B'K^{-1}B - \frac{(EY)^2}{N}$	$B'_x K^{-1}B$	$B'_x K^{-1}B_x$				
Trat. (aj. p/ Blocos)	c+z-1	$T_0^{0'}Q$	$Q'_x T_0^0 = T_x^0 Q$	$Q'_x T_x^0$				
Resíduo	(b-1)(c-1)	$R(Y^2)$	λ_4	λ_3	bc-b-c	SQR*	$\frac{SQR^*}{bc-b-c}$	
Total	bc+z-1	$\underline{Y}'Y - \frac{(EY)^2}{N}$	$\sum_{i,j} \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}$	$\sum_{i,j} \sum_{i,j} x_{ij}^2$				
Trat. (aj. p/ Blocos) + Resíduo	b(c-1)+z	$T_0^{0'}Q + R(Y^2)$	λ_2	λ_1				
Regressão					1	SQReg	$\frac{SQReg}{1}$	$\frac{SQReg/1}{SQR^*/bc-b-c}$
Trat. (aj. p/ Blocos e Regressão)					c+z-1	$SQT^*_{aj.}$	$\frac{SQT^*_{aj.}}{c+z-1}$	$\frac{SQT^*_{aj/c+z-1}}{SQR^*/bc-b-c}$

4. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Considerando os dados hipotéticos, com 4 variedades comuns e 7 variedades regulares, em 4 blocos

Blocos Tratamentos	B ₁			B ₂			B ₃			B ₄			Total
	X _{ij}	x _{ij}	Y _{ij}	X _{ij}	x _{ij}	Y _{ij}	X _{ij}	x _{ij}	Y _{ij}	X _{ij}	x _{ij}	Y _{ij}	
A	3,00	(-0,40)	1,61	2,50	(-0,90)	2,30	5,00	(1,60)	2,32	3,25	(-0,15)	2,65	8,88
B	4,00	(0,60)	3,73	3,75	(0,35)	4,31	2,00	(-1,40)	2,41	3,50	(0,10)	3,21	13,66
C	4,00	(0,60)	1,12	4,00	(0,60)	2,63	3,50	(0,10)	0,56	3,75	(0,35)	1,99	6,30
D	3,00	(-0,40)	1,55	4,00	(0,60)	3,51	3,25	(-0,15)	2,47	2,20	(-1,20)	2,70	10,23
e	3,00	(-0,40)	2,09										2,09
f	3,50	(0,10)	2,87										2,87
g				3,00	(-0,40)	1,47							1,47
h				3,75	(0,35)	1,99							1,99
i							4,50	(1,10)	2,25				2,25
j										2,75	(-0,65)	2,84	2,84
k										3,00	(-0,40)	3,88	3,88
Σ			12,97			16,21			10,01			17,27	56,46

Assim, no sistema de equações normais

$$X'X\theta^0 = X'Y, \text{ tem-se:}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 6,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,10 \\ 0,00 & 6,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,60 \\ 0,00 & 0,00 & 5,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 1,25 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 6,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & -1,95 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 4,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,15 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 4,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,35 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 4,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,65 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 4,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1,15 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,40 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,10 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,40 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,35 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,10 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & -0,65 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & -0,40 \\ 0,10 & 0,60 & 1,25 & -1,95 & 0,15 & -0,35 & 1,65 & -1,15 & -0,40 & 0,10 & -0,40 & 0,35 & 1,10 & -0,65 & -0,40 & 1,00 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K & N' & B_x \\ N & R & T_x \\ B_x' & T_x' & L \end{bmatrix} ;$$

$$X_1'Y = \underline{B} = \begin{bmatrix} 12,97 \\ 16,21 \\ 10,01 \\ 17,27 \end{bmatrix} ; X_2'Y = \underline{T} = \begin{bmatrix} 8,88 \\ 13,66 \\ 6,30 \\ 10,23 \\ 2,09 \\ 2,87 \\ 1,47 \\ 1,99 \\ 2,25 \\ 2,84 \\ 3,88 \end{bmatrix} ; X_3'Y = Z = 0,8085$$

Para obter-se as estimativas dos efeitos dos parâmetros, obtêm-se, inicialmente as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 3,300000 & -0,700000 & -0,700000 & -0,700000 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,200000 & -0,166667 & -0,166667 \\ -0,700000 & 3,300000 & -0,700000 & -0,700000 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,200000 & -0,166667 & -0,166667 \\ -0,700000 & -0,700000 & 3,300000 & -0,700000 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,200000 & -0,166667 & -0,166667 \\ -0,700000 & -0,700000 & -0,700000 & 3,300000 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,200000 & -0,166667 & -0,166667 \\ -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & 0,833333 & -0,166667 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 \\ -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & 0,833333 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 \\ -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & 0,000000 & 0,000000 & 0,833333 & -0,166667 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 \\ -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & 0,000000 & 0,000000 & -0,166667 & 0,833333 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 \\ -0,200000 & -0,200000 & -0,200000 & -0,200000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,800000 & 0,000000 & 0,000000 \\ -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,833333 & -0,166667 \\ -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & -0,166667 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & -0,166667 & 0,833333 \end{bmatrix}$$

$$Q_x = \begin{bmatrix} 0,108333 \\ -0,391667 \\ 1,608333 \\ -1,191667 \\ -0,416667 \\ 0,083333 \\ 0,500000 \\ 0,250000 \\ 0,850000 \\ -0,325000 \\ -0,075000 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -0,863667 \\ 3,916333 \\ -3,443667 \\ 0,486333 \\ -0,071667 \\ 0,708333 \\ -1,231667 \\ -0,711667 \\ 0,248000 \\ -0,038333 \\ 1,001667 \end{bmatrix} \quad \text{e os}$$

escalares $\lambda_1 = 10,077000$ e $\lambda_2 = 2,081583$.

Como C é uma matriz singular, uma forma de contornar essa situação é mediante a introdução da matriz de res-

Por (3.2.3.1) , obtêm-se

$$\lambda_3 = 7,444291 \quad \text{e} \quad \lambda_4 = 3,319062.$$

Assim a estimativa do coeficiente de regressão $\bar{e}$:

$$\hat{\gamma} = \lambda_3^{-1} \lambda_4 = 0,4459$$

Como $\underline{T}_1^0 = \underline{T}_0^0 - \underline{T}_X^0 \hat{\gamma}$ por (3.2.3.i) , então o vetor das estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão $\bar{e}$:

$$\underline{T}_1^0 = \begin{bmatrix} -0,230236 \\ 1,020502 \\ -1,042448 \\ 0,252182 \\ 0,310451 \\ 0,867500 \\ -1,466683 \\ -1,281108 \\ -0,163769 \\ 0,392009 \\ 1,320534 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,221875 \\ 0,973125 \\ -0,866875 \\ 0,115625 \\ 0,087500 \\ 0,867500 \\ -1,717502 \\ -1,197502 \\ 0,310000 \\ 0,202501 \\ 1,242501 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,018750 \\ -0,106250 \\ 0,393750 \\ -0,306250 \\ -0,500001 \\ \emptyset \\ -0,562500 \\ 0,187500 \\ 1,062500 \\ -0,425001 \\ -0,175001 \end{bmatrix} \cdot 0,4459$$

Por (3.2.4.2.b) , tem-se:

$$SQR^* = R(Y^2) - \hat{\gamma} \lambda_4 \quad \text{onde}$$

$$R(Y^2) = \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{T}_0^0' \underline{Q} - \underline{B}'\underline{K}^{-1} \underline{B} = 156,355200 - 11,933678 - 141,579670 = 2,841852$$

$$\hat{\gamma}\lambda_4 = (0,4459)(3,319062) = 1,479970$$

$$SQR^* = 2,841852 - 1,479970 = 1,361882$$

A estimativa do coeficiente de regressão no modelo (3.2.4.3.a) é $\tilde{\gamma} = \lambda^{-1}_1 \lambda_2 = (10,077)^{-1}(2,081583)$

$$\tilde{\gamma}\lambda_2 = (0,206568) \cdot (2,081583) = 0,429988$$

Usando-se (3.2.4.3.m), tem-se:

$$SQT^*_{aj.} = R'(Y^2) - SQR^* - \hat{\gamma}\lambda_2 \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} R'(Y^2) &= SQT_{aj.} + R(Y^2) = 11,933678 + 2,841852 \\ &= 14,775530 \end{aligned}$$

$$\text{Então a } SQT^*_{aj.} = 14,775530 - 1,361882 - 0,429988$$

$$SQT^*_{aj.} = 12,983660$$

Finalmente, o quadro da análise de covariância dos dados fica

Causa de Variação	GL	Somadas de Quadrados e Produtos			GL	SQ	QM	F
		y^2	xy	x^2				
Blocos	3	2,982644	-1,273083	1,007917				
Trat.(aj.p/Blocos)	10	11,933678	-1,237479	2,632709				
Resíduo	9	2,841852	3,319062	7,444291	8	1,361882	0,170235	
Total	22	17,758174	0,808500	11,084917				
Trat.(aj.p/Blocos) + Resíduo	19	14,775530	2,081583	10,077000				
Regressão					1	1,479970	1,479970	8,69*
Trat.(aj.p/Blocos e Reg.)					10	12,983660	1,298366	7,63**

Note-se que houve aumento de eficiência com o uso da covariância, pois o quadrado médio residual que era 0,315761, foi reduzido a 0,170235.

As estimativas das médias de tratamentos ajustados para blocos, e para blocos e regressão, obtidas através de (3.2.7.b), encontram-se na Tabela seguinte.

Tratamento	Estimativas das médias de tratamentos ajustados	
	$\mu_{jo}^0 = t_{jo}^0 + \mu^0$	$\mu_j^0 = t_j^0 + \mu^0$
A	2,23	2,22
B	3,42	3,47
C	1,58	1,41
D	2,57	2,70
e	2,54	2,76
f	3,32	3,32
g	0,73	0,98
h	1,25	1,17
i	2,76	2,29
j	2,65	2,84
l	3,69	3,77

$$\mu^0 = 2,45$$

5. CONCLUSÕES

Em geral, os resultados obtidos permitem as seguintes conclusões:

a) Quanto ao modelo matemático

O modelo matemático apresentou-se adequado aos objetivos propostos.

b) Quanto à estimação dos efeitos dos tratamentos

O método permitiu uma estimativa dos tratamentos condizentes com o objetivo.

c) Quanto à análise de covariância

O modelo e o método permitiram obter-se os efei-

tos de tratamentos ajustados para blocos e regressão levando o interessado a uma conclusão mais realista.

d) Quanto aos testes de significância

A esperança matemática das somas de quadrados mostraram a viabilidade do uso do teste F na análise de covariância.

e) Quanto ao exemplo numérico

O exemplo numérico mostrou a viabilidade da metodologia desenvolvida.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACCHI, O.O.S., 1985. Ecofisiologia da cana-de-açúcar. IAA/PLA NALSUCAR, Piracicaba. 20 p.

COCHRAN, W.G., 1957. Analysis of covariance: its nature and uses. Biometrics, Raleigh, 13: 261-281.

COX, D.R. e P. McCULLAGH, 1982. Some aspects of analysis of covariance (with discussion). Biometrics, Raleigh, 38: 541-561.

DIAS, C.T.S., 1985. Álgebra matricial: um programa didático aplicado à estatística. Seminários de Estatística e Experimentação Agronômica, Piracicaba, ESALQ/USP, 2º semestre, 15p.

DIAS, J.F.S., 1981. Análise de covariância intrablocos, com p variáveis auxiliares, para delineamentos em blocos incompletos equilibrados. Piracicaba, ESALQ/USP, 96 p. (Tese de Doutorado).

FEDERER, W.T., 1956 a. Augmented (or Hoonuiaku) Designs. The Hawaiian Planter's Record, 55: 177-190.

FEDERER, W.T., 1956 b. Augmented (or Hoonuiaku) Designs . The Hawaiian Planter's Record, 55: 191-208

FEDERER, W.T., 1961. Augmented designs with one-way elimination of heterogeneity . Biometrics, Raleigh, 17: 447-473.

FEDERER, W.T. e D. RAGHAVARAO, 1975. On augmented designs. Biometrics, Raleigh, 31: 29-35.

GRAYBILL , F.A., 1961. An Introduction to Linear Statistical Models. McGraw - Hill, Nova York. 463 p.

IEMMA, A.F., 1985. Modelos Lineares - Uma Introdução para Profissionais da Pesquisa Agropecuária. ESALQ/USP, Piracicaba, 142 p. (19 SEAGRO).

KATTI, S.K., 1965. Multiple covariate analysis. Biometrics, Raleigh, 21: 957-974.

KIRK, R.E., 1968. Experimental Designs: Procedures for Behavioral Sciences. Wadsworth, 577 p.

MARTINEZ GARZA, A., 1972. Diseño y Analisis de Experimentos

con Caña de Azucar. Colegio de Postgraduados, Escuela Nacional de Agricultura, Chapingo, Mexico. 204 p.

NETER, J. e W. WASSERMAN, 1974. Applied Linear Statistical Models. Regression, Analysis of Variance and Experimental Designs. Irwin, 842 p.

NOGUEIRA, M.C.S., 1976. Análise conjunta para experimentos em blocos casualizados completos aumentados. Piracicaba, ESALQ/USP, 49 p. (Dissertação de Mestrado).

OGAWA, J., 1974. Statistical Theory of Analysis of Experimental Designs. Marcel Dekker in., Nova York. 465 p.

PAVATE, M.V., 1961. Combined analysis of balanced incomplete block designs with some common treatments. Biometrics, Raleigh, 17: 111-119.

PIMENTEL GOMES, F., 1967. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. Ciência e Cultura, São Paulo, 20: 733-746.

PIMENTEL GOMES, F., 1985. Curso de Estatística Experimental. 11^a ed., Livraria Nobel, Piracicaba. 466 p.

SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. Willey, Nova York. 532 p.

VIZONI, E., 1984. Análise de experimentos em blocos casualizados completos aumentados (blocos de Federer), com parcelas subdivididas no tempo. Piraicaba, ESALQ/USP, 125 p. (Dissertação de Mestrado).

ZELEN, M., 1957. The analysis of covariance for incomplete block designs. Biometrics, Raleigh, 13: 309-332.