ANÁLISE DE VARIÂNCIA PARA DADOS NÃO BALANCEADOS
EM EXPERIMENTOS CRUZADOS COM TRÊS FATORES

SERGIO MINORU OIKAWA
Estatístico

Orientadora: DRA. MARIA CRISTINA STOLF NOGUEIRA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil

Março - 1993

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Livros da
Divisão de Biblioteca e Documentação - PCLQ/USP

Oikawa, Sergio Minoru

039a Análise de variância para dados não balanceados
em experimentos cruzados com três fatores. Piracicaba, 1993.
66p.

Diss.(Mestre) ESALQ
Bibliografia.

1. Análise de variância 2. Dados não balanceados
3. Experimentação agrícola 4. Modelo matemático
I. Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz,
Piracicaba

CDD 519.535

ANÁLISE DE VARIÂNCIA PARA DADOS NÃO BALANCEADOS
EM EXPERIMENTOS CRUZADOS COM TRÊS FATORES

SERGIO MINORU OIKAWA

Aprovado em : 15-03-1993

Comissão Julgadora :

Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

ESALQ/USP

Prof. Dr. Carlos Roberto Padovani

Botucatu/UNESP

Prof^a Dra. Maria Cristina Stolf Nogueira

ESALQ/USP

Prof^a Dra. Maria Cristina Stolf Nogueira
Orientadora

AGRADECIMENTOS

A Dra. Maria Cristina Stolf Nogueira, Professora Associada do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela orientação, apoio e incentivo no decorrer

Ao Dr. Antonio Francisco Iemma, Professor Titular e Coordenador do CPG em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pelas valiosas sugestões.

Aos demais Professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pelo apoio e incentivo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico(CNPq) e CAPES/PICD, pelas bolsas de Estudos concedida para a realização do curso.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelas gentilezas e agradável convívio.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, em especial, ao Paulo de Oliveira, pela Amizade.

A Maria Helena Ferrete, secretária do Departamento de Matemática da FCT-UNESP, pelas sugestões na redação do trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

S U M Á R I O

	Página
RESUMO	viii
SUMMARY	x
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1. Introdução	4
2.2. Modelo Linear de Gauss-Markov	4
2.3. Modelo Superparametrizado	5
2.3.1. Notação RC()	6
2.3.2. Método de Ajuste de Constantes	7
2.3.3. Método das Médias Quadráticas Ponderadas ..	8
2.4. Modelo com Restrição - Σ	9
2.4.1. Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa ..	10
2.5. Modelo de Regressão	11
2.6. Modelo de Médias de Caselas	15
3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	16
3.1. Introdução	16
3.2. Modelos com Três Fatores	16
3.2.1. Modelo Superparametrizado	17
3.2.2. Modelo de Médias (Modelo μ_{ijk})	18
3.3. Modelo Linear.....	19
3.3.1. Método de Mínimos Quadrados	19
3.3.2. Modelo de Posto Completo.....	20
3.3.3. Partição do Modelo	20

3.3.4. Definição de Hipóteses Testáveis	21
3.3.5. Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa .	23
3.3.6. Modelo de Posto Incompleto	25
3.3.7. Partição do Modelo	26
3.3.8. Hipóteses Testáveis	27
3.3.9. Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa .	28
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	31
4.1. Introdução	31
4.2. Modelo Superparametrizado com Três Fatores	31
4.2.1. Sem Interações	31
4.2.2. Uso de Restrição - Σ Explicitamente	33
4.2.3. Hipóteses Testáveis	35
4.2.4. Quadro de Análise da Variância	41
4.2.5. Com Interações	42
4.2.6. Uso de Restrição - Σ Explicitamente	44
4.2.7. Hipóteses Testáveis	51
4.2.8. Quadro de Análise da Variância	57
4.3. Modelo de Médias	59
4.3.1. Modelo de Médias Para Três Fatores	59
4.3.2. Estimação de Parâmetros no Modelo de Mé- dias Irrestrito: $n_{ijk} > 0$	61
4.3.3. Estimação de parâmetros no Modelo de Mé- dias Restrito: $n_{ijk} > 0$	63
4.3.4. Estimação de parâmetros no Modelo de Mé- dias com Caselas Vazias: (Existe $n_{ijk} = 0$)	66
4.3.5. Formas Canônicas	74

4.3.6. Teste de Hipóteses Lineares no Modelo de Médias Com Interações: $n_{ijk} > 0$	78
4.3.7. Quadro de Análise da Variância	83
4.3.8. Teste de Hipóteses Lineares no Modelo de Médias Sem Interações: $n_{ijk} > 0$	84
4.3.9. Quadro de Análise da Variância	86
4.3.10. Caselas Vazias e Hipóteses Efetivas	86
4.4. Exemplo Numérico Para o Modelo Superparametrizado	94
4.4.1. Modelo sem Interações	95
4.4.2. Modelo Linear $y = X\theta + \varepsilon$	95
4.4.3. Restrição - Σ	96
4.4.4. Sistema de Equações Normais ($X^* X^* \theta^* = X^* y$)	97
4.4.5. Somas de Quadrados da Análise de Variância	97
4.4.6. Quadro de Análise da Variância	98
4.4.7. Modelo com Interações	98
4.4.8. Modelo Linear $y = X\theta + \varepsilon$	99
4.4.9. Restrição - Σ	103
4.4.10. Sistema de Equações Normais ($X^* X^* \theta^* = X^* y$)	106
4.4.11. Somas de Quadrados da Análise de Variância	107
4.4.12. Quadro de Análise da Variância	109
4.5. Exemplo Numérico Para Modelo de Médias de Caselas	110
4.5.1. Modelo de Médias	111
4.5.2. Estimação no Modelo Com Interações: $n_{ijk} > 0$	112
4.5.3. Teste de Hipóteses no Modelo Com Interações: $n_{ijk} > 0$	113

4.5.4. Quadro de Análise da Variância	115
4.5.5. Estimação no Modelo Sem Interações: $n_{ijk} > 0$	116
4.5.6. Teste de Hipóteses no Modelo Sem Interações: $n_{ijk} > 0$	119
4.5.7. Quadro de Análise da Variância	120
4.5.8. Caselas Vazias e Hipóteses Efetivas	121
4.5.9. Quadro de Análise da Variância	128
4.5.10. Quadro de Análise da Variância	136
5. CONCLUSÕES	137
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	140

ANÁLISE DE VARIÂNCIA PARA DADOS NÃO BALANCEADOS
EM EXPERIMENTOS CRUZADOS COM TRÊS FATORES

Autor: Sérgio Minoru Oikawa

Orientadora: Dra. Maria Cristina Stolf Nogueira

RESUMO

O objetivo do presente trabalho, foi estabelecer teorias apropriadas para o cálculo da análise de variância de dados não balanceados, considerando-se o modelo superparametrizado com três fatores cruzados com e sem interações. Foram apresentados alguns métodos para a obtenção de somas de quadrados e testes de hipóteses em casos de dados não balanceados, mas com todas as caselas ocupadas ($n_{ijk} > 0$). Também foi dada ênfase sobre modelo de médias de caselas que eliminam as dificuldades, principalmente, em termos de interpretação das hipóteses testadas pelos modelos superparametrizados quando ocorrem algumas caselas vazias ($n_{ijk} = 0$).

Verificou-se que o Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa em associação com a Notação RC.) e Restrição - Σ fornece resultados idênticos ao Método de Ajuste de Constantes no modelo sem interações e, quando as interações são consideradas no modelo e todas as caselas são ocupadas,

os resultados obtidos são idênticos ao Método das Médias Quadráticas Ponderadas. Entretanto, quando ocorrem caselas vazias, estes métodos fornecem resultados diferentes.

Uma alternativa viável e correta para se calcular as somas de quadrados quando ocorrem caselas vazias, é adotar o método conhecido como modelo de médias de caselas. Este método testa apenas as hipóteses baseadas em funções estimáveis, neste caso, possibilitando testar somente as hipóteses que são testáveis.

ANALYSIS OF VARIANCE FOR UNBALANCED DATA IN THREE-WAY CROSSED CLASSIFICATION

Author: Sergio Minoru Oikawa

Adviser: Dra. Maria Cristina Stolf Nogueira

SUMMARY

The aim of this work was to establish appropriate theory to calculate the analysis of variance for unbalanced data, taking into account the overparametrized model in three-way crossed with and without interaction. Some methods to obtain the sums of squares and testing hypothesis in unbalanced data, but with all cells filled ($n_{ijk} > 0$). It was also emphasized Cell Means Model that eliminate the difficulties, meanly, referred to the interpretation of the testing hypothesis by the over-parametrized models when empty cells ($n_{ijk} = 0$) occur.

Was verified that the Invert Part of the Inverse Algorithm in Conjunction with the R.C.D Notation and the Σ - Restriction provides identical results to the Method of fitting Constants in the lack of interactions and, when interactions are considered in the model and all the cells are filled, acquired results are identical to the Methods of Weighted Squares of Means. However, when empty cells occur, these methods test no hypotheses of interest.

A possible and correct alternative for calculating the sums of squares when empty cells occur, is to adopt the method known as Cell Means Model. This method tests only the testing hypotheses based on estimating functions, enabling thus, to test only the testable hypothesis.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, o uso de modelos lineares dentro das ciências aplicadas tornou-se uma prática comum entre os pesquisadores, principalmente, na experimentação agronômica. Isto se deve em parte a riqueza de sua estrutura, simplicidade de exposição e facilidade de acesso à vários pacotes estatísticos para microcomputadores que, sem dúvida, têm facilitado em muito à análise estatística dos dados.

Deste modo, o uso de modelos lineares é hoje uma ferramenta indispensável dentro da experimentação agronômica. Assim, muitos pesquisadores têm trabalhado com a teoria de modelos lineares, principalmente, com os modelos balanceados por ser simples e de fácil interpretação.

Com relação aos modelos, eles podem ser caracterizados como balanceados e não balanceados. Quando um delineamento experimental contém o mesmo número de observações dentro de cada casela, os modelos são descritos como sendo balanceados, e quando não contém o mesmo número de observações ou caso ocorram caselas vazias (não existe observações sobre certas combinações de níveis dos fatores envolvidos), os modelos são descritos como sendo não balanceados.

De acordo com SEARLE(1987), a análise de variância para os modelos balanceados é relativamente simples e, certamente já é conhecida na literatura como análise padrão.

Porém, sabe-se de antemão que, nem sempre é possível trabalhar com modelos para dados balanceados devido a problemas que podem ocorrer durante a condução do experimento. Como exemplos, podem ser citados: perdas de parcelas por destruição de plantas ou morte de animais; falha do experimentador levando-o a erros grosseiros na anotação; algumas parcelas não receberem todos os tratamentos de acordo com o planejamento, e assim por diante.

Segundo DODGE (1985), em tais situações o experimento planejado não é mais balanceado e perde a sua simetria, e em algumas situações, quando muitas observações são perdidas, nem todas as funções paramétricas usuais são estimáveis.

Uma alternativa comum entre os pesquisadores para o problema da existência de algumas parcelas perdidas é estimá-las e, em seguida, analisar os dados usando a teoria de modelos lineares para dados balanceados, diminuindo-se o número de graus de liberdade em tantos graus quantas forem as parcelas perdidas. Entretanto, deve-se ressaltar que este procedimento nem sempre é o mais correto, principalmente, quando se tem muitas parcelas perdidas.

Uma outra alternativa, talvez a mais correta para analisar dados desta natureza, seria utilizar teorias apropriadas para dados não balanceados dentro da teoria de modelos lineares. Dentre elas têm-se: método de ajuste de constantes, método das médias quadráticas ponderadas, etc.

O presente trabalho visa a uma revisão da teoria estatística apropriada aos modelos lineares com três fatores para dados não balanceados. Devido à amplitude da teoria proposta, bem como, devido à pouca difusão deste modelo dentro da literatura, será dada ênfase a experimentos com fatores cruzados de efeitos fixos, para os casos com e sem interações. Também será dada ênfase sobre modelo de médias de caselas que eliminam as dificuldades causadas pelos modelos superparametrizados em termos das hipóteses testadas quando existem caselas vazias e ainda testam hipóteses baseada em funções estimáveis, facilitando a interpretação dos resultados.

Serão apresentados para estes modelos os principais conceitos de estimabilidade, soma de quadrados e teste de hipóteses.

E como aplicação, serão considerados os modelos superparametrizados e os modelos de médias, sendo os cálculos realizados através de pacotes estatísticos (SAS e MINITAB).

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Introdução

Atualmente, existem vários métodos para o cálculo das somas de quadrados e teste de hipóteses na análise de variância de dados não balanceados (dados com números de repetições diferentes). Estes métodos, já desenvolvidos e amplamente divulgados dentro da literatura, discutem-se em geral, aos casos de experimentos cruzados com dois fatores, com e sem interação.

Embora torne-se um pouco mais complexo, devido ao acréscimo de mais uma estrutura de tratamento, pode-se estender estes métodos para o caso de experimentos cruzados com três fatores, com e sem interações.

2.2. Modelo Linear de Gauss-Markov

Segundo IEMMA(1987), o modelo linear

$$y = X\theta + \varepsilon \quad [2.2.1]$$

onde:

y é um vetor de realizações de variáveis aleatórias,

X é uma matriz conhecida (matriz do delineamento), de

posto $k \leq \min\{n, p\}$,

θ_p é um vetor de parâmetros desconhecidos,

ε_n é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis,
tal que, $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$,

é definido como modelo linear de Gauss-Markov.

$$i) E[y] = X\theta$$

$$ii) \text{Var}[y] = I\sigma^2$$

$$iii) y \sim N(X\theta, I\sigma^2)$$

O modelo linear de Gauss-Markov, de acordo com IEMMA(1991), assume quatro formas distintas: modelo superparametrizado, modelo de médias, modelo com restrição paramétrica Σ (modelo com restrição- Σ) e modelo de regressão. Segundo o autor, o modelo superparametrizado é excelente para a interpretação da notação $R(\cdot)$, o modelo de médias simplifica a interpretação das hipóteses que estão sendo testadas e os modelos com restrição- Σ e de regressão, facilitam a interpretação de certos tipos de somas de quadrados baseadas em modelos de posto completo.

2.3. Modelo Superparametrizado

O modelo linear definido em [2.2.1], segundo SEARLE(1987) e IEMMA(1991), é superparametrizado caso apresente um parâmetro para cada efeito dos fatores envolvidos. O modelo superparametrizado assume diferentes

caracterizações conforme o interesse do pesquisador. Por exemplo, no modelo com dois fatores e interação, fazendo a parametrização sucessiva do modelo mais simples até o modelo completo, tem-se:

$$(i) - y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$$

$$(ii) - y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$$

$$(iii) - y_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

$$(iv) - y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

$$(v) - y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Esta idéia de parametrização sucessiva e ordenada, obtida em (i) à (v), será importante para a interpretação da notação $RC(.)$ e certas somas de quadrados a ela associados. Veja dentre outros OVERALL & SPIEGEL(1969) e APPELBAUM & CRAMER(1979).

2.3.1. Notação $RC(.)$

A Notação $RC(.)$, segundo HENDERSON(1953) e muito utilizada por SEARLE(1971), é um procedimento para obtenção de somas de quadrados, através da redução da soma de quadrados total ao ajustar-se um modelo particular de interesse. O termo $RC(.)$ é a medida de variação em y explicada pelo modelo ajustado. A Notação $RC(.)$ fornece uma medida conveniente para descrever os procedimentos computacionais que são usados na obtenção das somas de quadrados. Entretanto,

segundo SPEED & HOCKING(1976) e IEMMA(1991), a notação $RC(.)$ apresenta algumas restrições, dentre elas não especificar a hipótese que está sendo testada.

2.3.2. Método de Ajuste de Constantes

De acordo com YATES (1934), BANCROFT (1968) e mais recentemente, SEARLE (1971) e IEMMA(1991), o Método de Ajuste de Constantes consiste em testar os efeitos principais na suposição de não existência das interações no modelo, proporcionando um teste exato. As somas de quadrados obtida pelo Método de Ajuste de Constantes não requer que todas as caselas sejam ocupadas, mas apenas que o delineamento seja conectado.

Tabela 1 - Esquema de Análise da Variância associado ao Método de Ajuste de Constantes.

Causas de Variações	Somas de Quadrados	Hipóteses Testadas
Linhas (não ajustadas)	$RC(\alpha \mu)$	$\sum_j n_{i,j} \mu_{i,j} / n_{i.} = \sum_j n_{i.,j} \mu_{i.,j} / n_{i.}$
Linhas (ajustadas)	$RC(\alpha \mu, \beta)$	$\sum_j n_{i,j} \mu_{i,j} = \sum_{i,j} n_{i,j} n_{i.,j} \mu_{i.,j} / n_{.j}$
Colunas (não ajustadas)	$RC(\beta \mu)$	$\sum_i n_{i,j} \mu_{i,j} / n_{.j} = \sum_i n_{i.,j} \mu_{i.,j} / n_{.j}$
Colunas (ajustadas)	$RC(\beta \mu, \alpha)$	$\sum_i n_{i,j} \mu_{i,j} = \sum_{i,j} n_{i,j} n_{i.,j} \mu_{i.,j} / n_{.j}$
Interação	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$	$\mu_{i,j} - \mu_{i.,j} - \mu_{i.,j} + \mu_{i.,j} = 0$
Resíduo	$y'y - RC(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$	

2.3.3. Método das Médias Quadráticas Ponderadas

Segundo YATES (1934), BANCROFT (1968) e SEARLE (1971), este método fornece estimadores não-viciados para os efeitos principais quando as interações estão presentes no modelo. Contudo, as hipóteses associadas ao Método das Médias Quadráticas Ponderadas requer que todas as caselas sejam ocupadas ($n_{ijk} \geq 1$).

Tabela 2 - Esquema de Análise da Variância Associado ao Método de Médias Quadráticas Ponderadas.

Causas de Variações	Somas de Quadrados	Hipóteses Testadas
Linhas (A)	$SSAw = \sum w_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{[1]})^2$	$\bar{\mu}_{i.} = \bar{\mu}_{i..}$
Colunas (B)	$SSBw = \sum v_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{[2]})^2$	$\bar{\mu}_{.j} = \bar{\mu}_{.j.}$
Interação	$R(\gamma/\mu, \alpha, \beta)$	$\mu_{ij} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} + \mu_{...} = 0$
Resíduo	$y'y - R(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$	

$$\bar{x}_{[1]} = \sum_i w_i \bar{x}_{i.} / \sum_i w_i, \quad \bar{x}_{[2]} = \sum_j v_j \bar{x}_{.j} / \sum_j v_j$$

$$w_i = b^2 \left(\sum_j 1/n_{ij} \right)^{-2}, \quad v_j = a^2 \left(\sum_i 1/n_{ij} \right)^{-2}$$

2.4. Modelo com Restrição - Σ

Segundo IEMMA(1991), o uso de modelos superparametrizados são parte integrante da história de modelos lineares, onde tem-se facilitado em muito os pesquisadores das ciências aplicadas em mostrar explicitamente os efeitos de parâmetros μ , α , β e γ considerados no modelo. Entretanto, o uso de modelos superparametrizados apresentam alguns inconvenientes. Por exemplo, no modelo superparametrizado com dois fatores cruzados $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$; para $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, b$ e $k = 1, 2, \dots, n_{ij}$; existem mais parâmetros a serem estimados do que médias das caselas existentes, ou seja, continua com $1 + a + b + ab$ parâmetros, mas somente ab médias de caselas.

Sendo assim, reparametriza-se o modelo superparametrizado através de condições não estimáveis, ou seja, através das restrições $\sum_i \alpha_i = 0$; $\sum_j \beta_j = 0$; $\sum_i \gamma_{ij} = 0$ e $\sum_j \gamma_{ij} = 0$. Com a reparametrização, denominado modelo com restrição - Σ , segundo HARVEY (1979) e SEARLE (1987), soluciona o problema relativos aos posto incompleto, tornando-o todos os parâmetros estimáveis, e portanto, testáveis.

O modelo com Restrição- Σ de posto completo tem sido muito usado em modelos com dados balanceados por ser

simples e fácil. Mas, em modelos com dados não balanceados, principalmente, quando ocorrem caselas vazias, este procedimento não é apropriado.

2.4.1. Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa

Este procedimento descrito por HENDERSON (1959-1969), HARVEY(1979) e (SEARLE (1987)), é um método que envolve a inversão de submatrizes da inversa de uma matriz $X'X$ na obtenção de somas de quadrados.

De acordo com IEMMA(1991), para modelo com restrição - Σ , é mais interessante obter as somas de quadrados ajustando-se um parâmetro em relação a todos os outros, em lugar de ajuste sequencial do tipo $R(\mu)$, $R(\alpha|\mu)$, $R(\beta|\mu, \alpha)$ e $R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$.

O Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa facilita em muito a obtenção de tais somas de quadrados ajustadas. Assim, no modelo com dois fatores e interação, considerando-se todas as caselas ocupadas, este método fornece somas de quadrados idênticos ao Método das Médias Quadráticas Ponderadas. E para o modelo sem interação, o método fornece somas de quadrados equivalente ao Método de Ajuste de Constantes quando os dados são balanceados.

a) - Modelo com Interação

Tabela 3 - Esquema de Análise da Variância Associado ao Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa.

Causas de Variações	Somas de Quadrados	Hipóteses Testadas
Linhas (A)	$R^*(\alpha^* \mu^*, \beta^*, \gamma^*)$	$\bar{\mu}_{i.} = \bar{\mu}_{i'.$
Colunas (B)	$R^*(\beta^* \mu^*, \alpha^*, \gamma^*)$	$\bar{\mu}_{.j} = \bar{\mu}_{.j'}$
Interação	$R^*(\gamma^* \mu^*, \alpha^*, \beta^*)$	$\mu_{ij} - \mu_{i.j} - \mu_{i.j'} + \mu_{i'.j'} = 0$
Resíduo	$y'y - R^*(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$	

b) - Modelo sem Interação

Tabela 4 - Esquema de Análise da Variância associado ao Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa

Causas de Variações	Somas de Quadrados	Hipóteses Testadas
Linhas (ajustadas)	$R^*(\alpha^* \mu^*, \beta^*)$	$\bar{\mu}_{i.} = \bar{\mu}_{i'.$
Colunas (ajustadas)	$R^*(\beta^* \mu^*, \alpha^*)$	$\bar{\mu}_{.j} = \bar{\mu}_{.j'}$
Resíduo	$y'y - R^*(\mu^*, \alpha^*, \beta^*)$	

2.5. Modelo de Regressão

Segundo NETER & WASSERMAN(1974), num modelo de regressão $y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon_i$, as variáveis x 's podem ser quantitativas e/ou qualitativas. No caso de variáveis quantitativas, pode-se recorrer do uso de variável

indicadora $(-1,0,1)$. Assim, no modelo com dois fatores e interação, as variáveis quantitativas referentes as linhas, colunas e interação podem ser representadas num modelo de regressão por $(a-1)$, $(b-1)$ e $(a-1)(b-1)$ variáveis indicadoras. Este processo é na verdade um artifício para impor uma restrição de modo que a matriz X correspondente ao modelo de regressão tenha posto coluna completo, e portanto, o sistema de equações normais $X'X\theta = X'y$ tenha solução única. Mais detalhes sobre o assunto pode ser obtida em SEARLE(1971).

De acordo com IEMMA(1991), o modelo de regressão tem a forma:

$$y = \theta_0 + \underbrace{\theta_1 X_{ijk1}}_{a-1} + \underbrace{\theta_2 X_{ijk2} + \theta_3 X_{ijk3}}_{b-1} + \underbrace{\theta_4 X_{ijk1} X_{ijk2} + \theta_5 X_{ijk1} X_{ijk3}}_{(a-1)(b-1)} + \varepsilon_{ijk}$$

onde,

$X_{ijk1} = 1$, para observações do nível 1 do fator A
 -1 , para observações do nível 2 do fator A
 0 , em outros casos.

$X_{ijk2} = 1$, para observações do nível 1 do fator B
 -1 , para observações do nível 3 do fator B
 0 , em outros casos.

$X_{ijk3} = 1$, para observações do nível 2 do fator B
 -1 , para observações do nível 3 do fator B
 0 , em outros casos.

Segundo o mesmo autor, a menos dos "nomes" dos parâmetros, o modelo de regressão é idêntico ao modelo com restrição - Σ descrito no item 2.4.

Entretanto, deve-se ressaltar que, embora estes métodos citados nos levem aos mesmos resultados quando os dados são balanceados (mesmo número de observações), podem fornecer, e geralmente fornecem, resultados diferentes quando os dados não são balanceados, principalmente, quando ocorrem caselas vazias.

Segundo SEARLE, SPEED & HENDERSON (1981), as dificuldades que geralmente surgem com a ocorrência de algumas caselas vazias é que, tanto no modelo superparametrizado quanto no modelo com restrição- Σ de posto completo, não são possíveis de testar hipóteses úteis sobre os efeitos principais quando a interação é considerada no modelo.

Três casos diferentes podem ser observados:

- a) no modelo sem interação, caso ocorram ou não caselas vazias, as somas de quadrados obtidas por qualquer um dos métodos citados, testam hipóteses úteis sobre os efeitos principais;
- b) para modelos com interação e com todas as caselas ocupadas ($n_{ijk} \geq 1$), apenas as somas de quadrados obtidas pelos "Métodos das Médias Quadráticas Ponderadas" e "Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa" testam hipóteses úteis sobre os efeitos principais;

c) para modelos com interação e algumas caselas vazias (existe $n_{ijk} = 0$, ou seja, não existe observações sobre certas combinações de níveis dos fatores envolvidos), as somas de quadrados obtidas tanto pelos "Métodos das Médias Quadráticas Ponderadas" quanto pelo "Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa", testam hipóteses que são uma confusão, isto é, de difícil interpretação. Para maiores detalhes, veja IEMMA(1991).

Assim, as dificuldades que surgem na interpretação das hipóteses quando ocorrem caselas vazias, podem ser evitadas, usando-se um modelo diferente dos modelos superparametrizados, modelos com restrição - Σ e de regressão.

De acordo com SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978), a escolha de um método para analisar modelos de delineamentos experimentais com dados não balanceados, deveria ser baseada na adequacidade das hipóteses à natureza dos dados, em lugar das conveniências computacionais e ou ortogonalidade das formas quadráticas.

Para URQUHART & WEEKS(1978), as estruturas dos dados não balanceados produzem definições que se alteram conforme a distribuição das observações sobre as caselas ocupadas e conforme a posição das caselas vazias. Sendo assim, uma maneira correta para se testar as hipóteses seria definir estas hipóteses em termos de funções estimáveis.

SEARLE, SPEED & HENDERSON (1981), enfatizam

que uma alternativa viável e correta para se calcular as somas de quadrados em casos de caselas vazias é usar o método conhecido como modelo de médias de caselas (modelo μ_{ijk}). Este método testa apenas as hipóteses baseadas em funções estimáveis.

2.6. Modelo de Médias de Caselas

A fim de eliminar dificuldades, principalmente, na interpretação das hipóteses a serem testadas, muitos autores dentre eles YATES(1934), URQUHART ; WEEKS & HENDERSON(1973), HOCKING & SPEED(1975), HOCKING ; SPEED & COLEMAN(1980), MURRAY & SMITH(1985), SEARLE(1987) e IEMMA(1991), tem sugerido o uso de modelo mais simples, que consiste em descrever em termos de médias das populações observadas.

O modelo geral é dado por:

$$y = W\mu + \varepsilon \quad [2.6.1]$$

$$\text{sujeito à restrição} \quad G\mu = g \quad [2.6.2]$$

onde,

y e ε são definidos como em [2.2.1];

W é uma matriz conhecida (matriz de planejamento);

μ é um vetor de médias das populações;

G é uma matriz e g é um vetor (ambos conhecidos), definem as relações lineares sob o vetor μ de médias.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1. Introdução

Neste capítulo, dar-se-á o desenvolvimento teórico para a obtenção das somas de quadrados e teste de hipóteses da análise de variância. O método a ser desenvolvido será o Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa em conjunção com a notação $R(.)$ e Restrição - Σ , sendo adequado tanto para estruturas balanceada quanto não balanceada (número diferentes de observações nas caselas, mas com todas elas ocupadas ($n_{ijk} \geq 1$)). Para o caso de caselas vazias (existem alguns $n_{ijk} = 0$), o desenvolvimento teórico para o cálculo das somas de quadrados será feita em termos de modelo de médias de caselas (modelo μ_{ijk}).

3.2. Modelos com Três Fatores

Os modelos matemáticos considerados na literatura são os modelos, superparametrizado, de médias, com restrição - Σ e de regressão. No presente trabalho, será dado um enfoque geral sobre os modelos com restrição - Σ

e de médias na obtenção das somas de quadrados e teste de hipóteses.

3.2.1. Modelo Superparametrizado

Considere o modelo superparametrizado

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

[3.2.1.1]

$$i = 1, 2, \dots, a ; j = 1, 2, \dots, b ;$$

$$k = 1, 2, \dots, c \text{ e } l = 1, 2, \dots, n_{ijk}$$

onde,

μ é uma constante comum a todas as observações;

α_i é o efeito devido ao i -ésimo nível do fator A;

β_j é o efeito devido ao j -ésimo nível do fator B;

γ_k é o efeito devido ao k -ésimo nível do fator C;

$(\alpha\beta)_{ij}$ é o efeito devido à (i,j) -ésima interação dos fatores A e B;

$(\alpha\gamma)_{ik}$ é o efeito devido à (i,k) -ésima interação dos fatores A e C;

$(\beta\gamma)_{jk}$ é o efeito devido à (j,k) -ésima interação dos fatores B e C;

$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ é o efeito devido à (i,j,k) -ésima interação dos fatores A, B e C;

ε_{ijkl} é o termo erro residual.

Suposições do modelo:

ε_{ijkl} 's são não-correlacionados e são distribuídos normalmente com média zero e variância comum σ_ε^2 ($\varepsilon_{ijkl} \sim \text{NIID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$).

3.2.2. Modelo de Médias de Caselas (Modelo μ_{ijk})

O modelo de médias é definido por

$$y_{ijkl} = \mu_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \quad [3.2.2.1]$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, a & ; & & j &= 1, \dots, b & ; \\ k &= 1, \dots, c & \text{ e } & & l &= 1, \dots, n_{ijk} \end{aligned}$$

onde,

μ_{ijk} representa a média observada, quando as combinações de tratamentos (A_i, B_j, C_k) são designadas de modo aleatório às unidades experimentais.

Suposições aqui assumidas do modelo:

- i) $\varepsilon_{ijkl} \sim \text{NIID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- ii) $n_{ijk} \geq 0, \forall i, j, k$

3.3. Modelo Linear

Apresentam-se aqui, alguns conceitos da teoria de modelos lineares, a fim de dar suporte teórico na obtenção das somas de quadrados e teste de hipóteses na análise de variância para dados não balanceados, em experimentos cruzados com três fatores. O modelo adotado é aquele definido em [2.2.1], como modelo linear de GAUSS-MARKOV.

3.3.1. Método de Mínimos Quadrados

O método de mínimos quadrados, segundo SCHEFFÉ (1959), foi desenvolvido e publicado independentemente por Legendre (1806) e Gauss (1809), onde teve sua aplicação em problemas astronômicos. Posteriormente, foi utilizado por Galton em problemas biológicos em 1886 onde surgiu o termo "Regressão" e, por Fisher que generalizou o seu uso a muitas áreas de aplicação como economia, agronomia, indústria, engenharia, etc.

Dado o modelo $y = X\theta + \varepsilon$, o método de mínimos quadrados consiste em obter a solução do vetor θ que minimiza a soma de quadrados dos elementos do vetor ε de erros. Portanto, para obter a solução de θ , diferencia-se $\varepsilon'\varepsilon = (y - X\theta)'(y - X\theta)$ em relação ao parâmetro θ e iguala-se ao vetor nulo.

$$\frac{d(\varepsilon'\varepsilon)}{d\theta} = -2X'y + 2X'X\theta = 0$$

obtendo-se $X'Xe = X'y$, denominado sistema de equações normais, sempre consistente. Veja SEARLE(1971) e IEMMA(1987).

3.3.2. Modelo de Posto Completo

Considerando-se o modelo $y = Xe + \varepsilon$, se X tem posto coluna completo, a solução do sistema de equações normais $X'Xe = X'y$ é dada de modo único por $\hat{e} = (X'X)^{-1}X'y$. Logo, a redução da soma de quadrados, devida ao ajuste do modelo completo, sugerida por SEARLE (1971) como Notação $R(\cdot)$, é dada por:

$$\begin{aligned} R(\theta) &= y'X(X'X)^{-1}X'y = \hat{e}'X'y \\ &= y'Py = \text{S. Q. Parâmetros} \end{aligned} \quad [3.3.2.1]$$

O termo $\hat{e}'X'y$ é a base do algoritmo R para calcular $R(\theta)$, que consiste no produto interno das soluções de $\hat{e}$ com o vetor do lado direito das equações normais.

E a soma de quadrados do resíduo é dada por:

$$SQ_{res} = y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y = y'(I-P)y \quad [3.3.2.2]$$

3.3.3. Partição do Modelo

Particionando a matriz X e o vetor e como

$$X = [X_1 \mid X_2]$$

e

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix},$$

respectivamente, obtemos a redução da soma de quadrados como:

$$R(\theta) = R(\theta_1, \theta_2) = y' [X_1 | X_2] \begin{bmatrix} X_1' X_1 & X_1' X_2 \\ \dots & \dots \\ X_2' X_1 & X_2' X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1' y \\ \dots \\ X_2' y \end{bmatrix} \quad [3.3.3.1]$$

Do mesmo modo, para ajustar somente parte do modelo $y = X_2 \theta_2 + \varepsilon$, a redução da soma de quadrados é dada por

$$R(\theta_2) = y' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' y = \hat{\theta}_2' X_2' y$$

onde, a solução de

$$X_2' X_2 \theta_2 = X_2' y$$

é obtida por:

$$\hat{\theta}_2 = (X_2' X_2)^{-1} X_2' y$$

Entretanto, deve-se ressaltar que esse é um dos critérios de ajuste, existem outros, por exemplo, Equações Normais Reduzidas. Veja dentre outros IEMMA(1987).

Assim, a redução da soma de quadrados devida a θ_1 ajustado por θ_2 , isto é, a contribuição da variável X_1 na explicação da variável dependente y , é obtida a partir da expressão:

$$\begin{aligned} R(\theta_1 | \theta_2) &= R(\theta_1, \theta_2) - R(\theta_2) \\ &= y' X (X' X)^{-1} X' y - y' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' y \quad [3.3.3.2] \\ &= y' P y - y' P_1 y = y' (P - P_1) y \end{aligned}$$

3.3.4. Definição de Hipóteses Testáveis

Uma hipótese linear geral associada ao conjunto de parâmetros é definida, segundo SEARLE(1971), da

seguinte forma:

$$H_0: k'_1 \theta_1 = m \quad [3.3.4.1]$$

onde:

k'_1 é uma matriz conhecida e m um vetor também conhecido.

Quando os elementos de $k'_1 \theta_1$ são todos ou, conjuntamente estimáveis, então, a hipótese $H_0: k'_1 \theta_1 = m$ é dita hipótese testável.

Um procedimento alternativo muito útil, conforme IEMMA(1991), consiste na obtenção das somas de quadrados das hipóteses de interesse. Assim, para a hipótese $H_0: k'_1 \theta_1 = m$, se $k'_1 \theta_1$ é estimável com k'_1 de posto linha completo, tem-se:

$$SQH_0 = (k'_1 \hat{\theta}_1 - m)' [k'_1 (X'X)^{-1} k_1]^{-1} (k'_1 \hat{\theta}_1 - m) \quad [3.3.4.2]$$

a qual, constata-se que,

$$\frac{SQH_0}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(r(k'_1); \delta)}$$

onde,

$$\delta = \frac{1}{2\sigma^2} \theta' X' (P - P_1) X \theta \text{ (parâmetro de não centralidade)}$$

$$r(k'_1) = \text{posto de } k'_1$$

Logo,

$$\frac{y' (P - P_1) y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(r(P - P_1); \delta)}$$

$$\text{e } r(P - P_1) = \text{posto de } (P - P_1)$$

Sendo assim, a estatística F que testa a

hipótese $H_0: k'_1 \theta_1 = m$ é dada por:

$$\begin{aligned} F(H_0) &= (SQH_0 / r(k_1)) / \hat{\sigma}^2 \\ &= R(\theta_1 | \theta_2) / r(k_1) / \hat{\sigma}^2 \\ &= (y'(P-P_1)y) / r(P-P_1) / \hat{\sigma}^2 \end{aligned} \quad [3.3.4.3]$$

onde,

$$\hat{\sigma}^2 = SQRes / r(I-P)$$

$$r(I-P) = \text{posto de } (I-P)$$

3.3.5. Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa

Suponha que $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ sejam as soluções das equações normais $X'X\theta = X'y$. Logo,

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'y = \begin{bmatrix} X'_1X_1 & X'_1X_2 \\ \dots & \dots \\ X'_2X_1 & X'_2X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'_1y \\ \dots \\ X'_2y \end{bmatrix} \quad [3.3.5.1]$$

SEARLE (1966) mostra que, se X_1 e X_2 têm posto coluna completo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X'_1X_1 & X'_1X_2 \\ \dots & \dots \\ X'_2X_1 & X'_2X_2 \end{bmatrix}^{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dots & (X'_2X_2)^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & \\ - (X'_2X_2)^{-1} X'_2X_1 \end{bmatrix} \times \right. \\ &\quad \left. \times [X'_1M_1X_1]^{-1} [I \mid -X'_1X_2 (X'_2X_2)^{-1}] \right\} \end{aligned} \quad [3.3.5.2]$$

onde, $M_1 = I - X_2(X'_2X_2)^{-1}X'_2$.

Substituindo [3.3.5.2] em [3.3.5.1], obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & (X_2' X_2)^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -(X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 \end{bmatrix} (X_1' M_1 X_1)^{-1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times [I \mid -X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1}] \right\} \begin{bmatrix} X_1' y \\ \vdots \\ X_2' y \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (X_1' M_1 X_1)^{-1} X_1' M_1 y \\ \vdots \\ (X_2' X_2)^{-1} X_2' y - (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 \hat{\theta}_1 \end{bmatrix}. \quad [3.3.5.3]
 \end{aligned}$$

E conforme SEARLE(1987), substituindo-se as soluções de [3.3.5.3] na equação [3.3.3.2], tem-se que:

$$\begin{aligned}
 R(\theta_1 | \theta_2) &= R(\theta_1, \theta_2) - R(\theta_2) = \\
 &= y' M_1 X_1 (X_1' M_1 X_1)^{-1} X_1' M_1 y \quad [3.3.5.4]
 \end{aligned}$$

Considerando a inversa da matriz particionada de $(X'X)$ como:

$$\begin{bmatrix} X_1' X_1 & X_1' X_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_2' X_1 & X_2' X_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \vdots & \vdots \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

onde, T_{11} é definida como parte de $(X'X)^{-1}$ que corresponde a $X_1' X_1$. Logo, a inversa dessa parte da inversa de $X'X$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 T_{11}^{-1} &= X_1' X_1 - X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 \\
 &= X_1' [I - X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2'] X_1 \quad [3.3.5.5] \\
 &= X_1' M_1 X_1
 \end{aligned}$$

Como $(X_1' M_1 X_1)^{-1}$ é uma inversa única, logo, satisfaz a condição

$$(X_1' M_1 X_1)^{-1} (X_1' M_1 X_1) (X_1' M_1 X_1)^{-1} = (X_1' M_1 X_1)^{-1}.$$

Assim, a equação [3.3.5.4] pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} R(\theta_1 | \theta_2) &= y' M_1 X_1 (X_1' M_1 X_1)^{-1} (X_1' M_1 X_1) (X_1' M_1 X_1)^{-1} X_1' M_1 y \\ &= \hat{\theta}_1' T_{11}^{-1} \hat{\theta}_1 \end{aligned} \quad [3.3.5.6]$$

O procedimento descrito para a obtenção de $\hat{\theta}_1' T_{11}^{-1} \hat{\theta}_1$ é usada por HENDERSON (1959, 1969) e, é definida como Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa. Isto porque envolve a inversão de T_{11} que é parte da inversa de $X'X$.

Portanto, adotando-se as suposições usuais de normalidade, verifica-se que $\hat{\theta}_1' T_{11}^{-1} \hat{\theta}_1$ definida em [3.3.5.6], é idêntica à soma de quadrados do numerador da estatística F para testar $H_0: k_1' \theta_1 = 0$, isto é, testam-se as hipóteses associadas às funções estimáveis $k_1' \theta_1$.

$$F(H_0) = R(\theta_1 | \theta_2) / r(k_1) \hat{\sigma}^2 = (\hat{\theta}_1' T_{11}^{-1} \hat{\theta}_1) / r(k_1) \hat{\sigma}^2 \quad [3.3.5.7]$$

3.3.6. Modelo de Posto Incompleto

Considerando-se o modelo $y = X\theta + \varepsilon$, se X tem posto coluna incompleto, neste caso, usam-se as inversas generalizadas de $X'X$ para resolver o sistema de equações normais $X'X\theta = X'y$. Logo, uma solução do sistema é dada por $\hat{\theta}^c = (X'X)^- X'y$, onde $(X'X)^-$ é uma inversa generalizada

qualquer de $(X'X)$. Veja RAO & MITRA(1971), IEMMA(1987,1989) e IEMMA & PALM(1991).

Portanto, a redução da soma de quadrados devida ao ajuste do modelo completo é dada por:

$$\begin{aligned} R(\theta) &= y'X(X'X)^{-1}X'y = e^0'X'y \\ &= y'Py = \text{S.Q. Parâmetros} \end{aligned} \quad [3.3.6.1]$$

E novamente, a soma de quadrados do resíduo é dada por:

$$\text{SQRes} = y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y = y'(I-P)y \quad [3.3.6.2]$$

3.3.7. Partição do Modelo

Particionando X e θ como

$$X = [X_1 \mid X_2]$$

e

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

respectivamente, obtém-se a redução da soma de quadrados dada por:

$$R(\theta) = R(\theta_1, \theta_2) = y'[X_1 \mid X_2] \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ \dots & \dots \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1' \\ \dots \\ X_2' \end{bmatrix} y \quad [3.3.7.1]$$

Novamente, ajustando-se parte do modelo

$$y = X_2\theta_2 + \varepsilon,$$

a redução da soma de quadrados é obtida por:

$$R(\theta_2) = y'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y = e_2^0'X_2'y$$

onde,

$e_2^0 = (X_2' X_2)^{-1} X_2' y$ é uma solução do sistema $X_2' X_2 e_2 = X_2' y$.

Logo, a diferença entre $R(e_1, e_2)$ e $R(e_2)$, isto é, a redução da soma de quadrados devido a e_1 ajustada por e_2 , é obtida a partir da expressão:

$$\begin{aligned} R(e_1 | e_2) &= R(e_1, e_2) - R(e_2) \\ &= y' X (X' X)^{-1} X' y - y' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' y \quad [3.3.7.2] \\ &= y' P y - y' P_1 y = y' (P - P_1) y \end{aligned}$$

3.3.8. Hipóteses Testáveis

Para testar as hipóteses associadas ao conjunto de parâmetros, considera-se a hipótese linear geral $H_0: k_1' e_1 = m$ (geralmente $m = 0$), onde o procedimento é idêntico ao caso do modelo de posto completo. Considerando que todos os elementos de $k_1' e_1$ são estimáveis, ou que as funções paramétricas que estão em $k_1' e_1$ são conjuntamente estimáveis, a estatística F para testar $H_0: k_1' e_1 = m$ é dada por:

$$\begin{aligned} F(H_0) &= (SQH_0 / r(k_1)) / \hat{\sigma}^2 \\ &= R(e_1 | e_2) / r(k_1) / \hat{\sigma}^2 \quad [3.3.8.1] \\ &= (y' (P - P_1) y) / r(P - P_1) / \hat{\sigma}^2 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} SQH_0 &= (k_1' e_1^0 - m)' [k_1' (X' X)^{-1} k_1]^{-1} (k_1' e_1^0 - m) \\ r[k_1] &= \text{posto de } k_1' \\ \hat{\sigma}^2 &= SQRes / r(I - P) \end{aligned}$$

3.3.9. Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa

Se θ_1^0 e θ_2^0 são as soluções das equações normais, então:

$$\begin{bmatrix} \theta_1^0 \\ \vdots \\ \theta_2^0 \end{bmatrix} = (X'X)^{-} X'y = \begin{bmatrix} X'_1X_1 & \vdots & X'_1X_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X'_2X_1 & \vdots & X'_2X_2 \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} X'_1y \\ \vdots \\ X'_2y \end{bmatrix} \quad [3.3.9.1]$$

A redução da soma de quadrados devida a θ_1 , ajustado por θ_2 [$R(\theta_1|\theta_2)$], ainda é definida como em [3.3.3.2], mas a simplificação para algo semelhante a [3.3.5.6], depende agora sobre qual das muitas inversas generalizadas disponíveis é usada em [3.3.9.1].

Embora, nem todas as inversas generalizadas de $X'X$ sejam simétricas, é sempre possível construir uma que satisfaz:

- i) $(X'X)^{-} (X'X)(X'X)^{-} = (X'X)^{-}$
- ii) $(X'X)(X'X)^{-} (X'X) = (X'X)$

Assim, a inversa generalizada $(X'X)^{-}$ que satisfaz (i) e (ii) é chamada inversa generalizada simétrica reflexiva.

MARSAGLIA & STYAN (1974), mostram que a expressão:

$$\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (X'_2X_2)^{-} & \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -(X'_2X_2)^{-}X'_2X_1 & \vdots & \vdots \end{bmatrix} W^{-} [I \mid -X'_1X_2(X'_2X_2)^{-}] \quad [3.3.9.2]$$

para $W = X'_1 X_1 - X'_1 X_2 (X'_2 X_2)^{-1} X'_2 X_1 = X'_1 [I - X_2 (X'_2 X_2)^{-1} X'_2] X_1$
 é sempre uma inversa generalizada de

$$\begin{bmatrix} X'_1 X_1 & X'_1 X_2 \\ \dots & \dots \\ X'_2 X_1 & X'_2 X_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, as soluções das equações normais podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} e^o &= \begin{bmatrix} e_1^o \\ \vdots \\ e_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_1 X_1 & X'_1 X_2 \\ \dots & \dots \\ X'_2 X_1 & X'_2 X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'_1 y \\ \vdots \\ X'_2 y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} W^{-1} X'_1 [I - X_2 (X'_2 X_2)^{-1} X'_2] y \\ (X'_2 X_2)^{-1} X'_2 (y - X_1 e_1^o) \end{bmatrix} \quad [3.3.9.3] \end{aligned}$$

Substituindo-se as soluções de [3.3.9.3] em [3.3.7.2], obtém-se:

$$\begin{aligned} R(e_1 | e_2) &= y' [I - X_2 (X'_2 X_2)^{-1} X'_2] \times \\ &\times X_1 W^{-1} X'_1 [I - X_2 (X'_2 X_2)^{-1} X'_2] y \quad [3.3.9.4] \end{aligned}$$

Além disso, restringindo-se a uma inversa generalizada simétrica reflexiva W^{-} de W , então, usando e_1^o de [3.3.9.3] tem-se [3.3.9.4] como:

$$\begin{aligned} R(e_1 | e_2) &= y' [I - X_2 (X'_2 X_2)^{-1} X'_2] X_1 W^{-} W [W^{-1} X'_1 (I - X_2 (X'_2 X_2)^{-1} X'_2) y] \\ &= e_1^{o'} W e_1^o \quad [3.3.9.5] \end{aligned}$$

O resultado [3.3.9.5] é uma generalização de $(\hat{e}'_1 T_{11}^{-1} \hat{e}_1)$ no caso de posto completo. Entretanto, segundo,

SEARLE; SPEED & HENDERSON(1981), a forma $(\theta_1^0, W \theta_1^0)$, deve ser usada com muito mais cuidado do que em $(\hat{\theta}_1', T_{11}^{-1} \hat{\theta}_1)$. Isto porque os termos $\hat{\theta}_1$ e T_{11}^{-1} são únicos, mas θ_1^0 e W não são, existem muitas soluções possíveis. Segundo os mesmos autores, a expressão $(\theta_1^0, W \theta_1^0)$ é denominada Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa Generalizada, somente quando se usa o mesmo W usado em [3.3.9.3] para θ_1^0 e como especificado em [3.3.9.2] ; e ainda, W^{-1} em [4.1.9.3] deve ser simétrica e reflexiva.

Uma alternativa bastante interessante para evitar o uso de inversas generalizadas, seria utilizar o modelo superparametrizado com restrição - Σ . Assim, com a reparametrização, tem-se um modelo de posto completo e, portanto, pode-se adotar a expressão definida em [3.3.5.6] para a obtenção de somas de quadrados de interesse, por exemplo, sobre os efeitos principais e interações.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. Introdução

Viu-se anteriormente que os modelos mais simples e diretos para solucionar, são aqueles de posto completo, onde é possível estimar cada um dos parâmetros. Mas, às vezes, as superparametrizações parecem inevitáveis e, com isso, os modelos de posto incompleto também. Assim, o uso de inversas generalizadas nos modelos superparametrizados, podem ser evitadas através de reparametrizações, que são, na verdade novos conjuntos de parâmetros e que, de fato, são também funções estimáveis dos parâmetros no modelo superparametrizado.

Vejamos o uso do Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa em associação com a Notação $R(.)$ e Restrição - Σ no modelo com três fatores cruzados de efeitos fixos.

4.2. Modelo Superparametrizado com Três Fatores

4.2.1 Modelo sem Interações

Considere o modelo superparametrizado dado em [3.2.1.1] sem os termos das interações.

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijkl} \quad [4.2.1.1]$$

onde,

μ é uma constante inerente à todas as observações,

α_i é o efeito devido ao i -ésimo nível do fator A,

β_j é o efeito devido ao j -ésimo nível do fator B,

γ_k é o efeito devido ao k -ésimo nível do fator C,

ε_{ijkl} é o erro residual ($\varepsilon_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2)$).

$$i = 1, 2, \dots, a;$$

$$j = 1, 2, \dots, b;$$

$$k = 1, 2, \dots, c;$$

$$l = 1, 2, \dots, n_{ijk}.$$

Suponha que o modelo [4.2.1.1] seja reparametrizado para um modelo que envolva novos parâmetros, denominados agora por μ^* , α_i^* , β_j^* e γ_k^* , isto é,

$$y_{ijkl} = \mu^* + \alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_k^* + \varepsilon_{ijkl} \quad [4.2.1.2]$$

onde,

$$\begin{aligned} \mu^* &= \mu + \bar{\alpha}_\cdot + \bar{\beta}_\cdot + \bar{\gamma}_\cdot = \mu + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \alpha_i + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \beta_j + \\ &+ \frac{1}{c} \sum_{k=1}^c \gamma_k \end{aligned}$$

$$\alpha_i^* = \alpha_i - \bar{\alpha}_\cdot = \alpha_i - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \alpha_i \quad [4.2.1.3]$$

$$\beta_j^* = \beta_j - \bar{\beta}_\cdot = \beta_j - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \beta_j$$

$$\gamma_k^* = \gamma_k - \bar{\gamma}_\cdot = \gamma_k - \frac{1}{c} \sum_{k=1}^c \gamma_k$$

Então, no novo modelo tem-se:

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i^* = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j^* = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^c \gamma_k^* = 0 \quad [4.2.1.4]$$

Assim, as expressões de [4.2.1.4] são conhecidas como restrição - Σ e, naturalmente, vão fornecer a solução única aos modelos que incluem esse tipo de restrições, denominado modelo com restrição - Σ ou modelo reparametrizado.

O modelo com restrição - Σ é um modelo de posto completo e pode ser escrito em termos de μ^* , pelos elementos de $\theta_{\alpha}^* = \{\alpha_i\}$ para $i = 1, \dots, (a-1)$, de $\theta_{\beta}^* = \{\beta_j\}$ para $j = 1, 2, \dots, (b-1)$ e pelos elementos de $\theta_{\gamma}^* = \{\gamma_k\}$ para $k = 1, 2, \dots, (c-1)$.

4.2.2. Uso de Restrição - Σ Explicitamente

Um modo mais simples de usar as restrições

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i^* = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j^* = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^c \gamma_k^* = 0$$

no modelo [4.2.1.2] é escrever as restrições como:

$$\begin{aligned} \alpha_a^* &= -\alpha_1^* - \alpha_2^* - \dots - \alpha_{a-1}^* \\ \beta_b^* &= -\beta_1^* - \beta_2^* - \dots - \beta_{b-1}^* \\ \gamma_c^* &= -\gamma_1^* - \gamma_2^* - \dots - \gamma_{c-1}^* \end{aligned} \quad [4.2.2.1]$$

A seguir, aplica-se estas restrições diretamente nas equações do modelo $y = X\theta + \varepsilon$. Este procedimento é, muitas vezes, chamado de regressão por variável Dummy.

Considere o modelo [4.2.1.2] e as restrições

[4.2.1.4]. Assim, pode-se obter a seguinte configuração:

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix}
 y_{1111} \\
 \vdots \\
 y_{111n_{111}} \\
 y_{11c1} \\
 y_{11cn_{11c}} \\
 \dots \\
 y_{1bc1} \\
 y_{1bcn_{1bc}} \\
 \dots \\
 y_{abc1} \\
 \vdots \\
 y_{abcn_{abc}}
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 \mu^* & \alpha_1^* \dots \alpha_{a-1}^* & \beta_1^* \dots \beta_{b-1}^* & \gamma_1^* \dots \gamma_{c-1}^* \\
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 1 & 1 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 1 & 1 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \mu^* \\
 \alpha_1^* \\
 \vdots \\
 \alpha_{a-1}^* \\
 \beta_1^* \\
 \vdots \\
 \beta_{b-1}^* \\
 \gamma_1^* \\
 \vdots \\
 \gamma_{c-1}^*
 \end{matrix}
 + \varepsilon
 \end{matrix}
 \end{array}$$

$y \qquad \qquad \qquad \mathbb{X}^* \qquad \qquad \qquad e^*$

Portanto, com a reparametrização, a matriz $\mathbb{X}^*$ é agora de posto completo. Logo, o sistema de equações normais $\mathbb{X}^{*'} \mathbb{X}^* e^* = \mathbb{X}^{*'} y$, tem solução única dada por:

$$\hat{e}^* = (\mathbb{X}^{*'} \mathbb{X}^*)^{-1} \mathbb{X}^{*'} y, \quad [4.2.2.2]$$

onde,

$$\hat{\theta}^* = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{\mu}^* \\ \hat{\theta}_{\alpha}^* \\ \hat{\theta}_{\beta}^* \\ \hat{\theta}_{\gamma}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}^* \\ \hat{\alpha}_1^* \\ \hat{\alpha}_2^* \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{a-1}^* \\ \vdots \\ \hat{\beta}_1^* \\ \hat{\beta}_2^* \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{b-1}^* \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_1^* \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_{c-1}^* \end{bmatrix} \quad [4.2.2.3]$$

A redução da soma de quadrados devida ao ajuste do modelo completo é obtida por:

$$\begin{aligned} R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) &= y'X^*(X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}y = \hat{\theta}^{*'}X^{*'}y = \\ &= R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) \quad [4.2.2.4] \\ &= \text{S.Q. Parâmetros} \end{aligned}$$

Portanto, a soma de quadrados do resíduo é dada por $SQ_{\text{Res}} = y'y - \hat{\theta}^{*'}X^{*'}y$.

4.2.3. Hipóteses Testáveis

Para considerar as hipóteses associadas aos conjuntos de parâmetros, isto é, testar os efeitos principais de α_j 's, β_j 's e γ_k 's no modelo sem interações, considera-se a hipótese geral dada em [3.3.4.1].

Quando os dados são não balanceados, segundo SEARLE(1971), um dos métodos adequados para testar os efeitos principais na ausência das interações, pode ser obtida pelo método de ajuste de constantes que fornece um teste exato.

Segundo IEMMA(1991), é mais interessante obter as somas de quadrados ajustando-se um parâmetro em relação a todos os outros, em lugar do ajuste sequencial.

Portanto, considerando-se o modelo sem interações e calculando as somas de quadrados através do ajuste de um parâmetro de interesse em relação a todos os outros, obtém-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} (i) - R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) &= R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - R(\mu, \beta, \gamma) \\ &= e_{\alpha}^{\circ'} W_{\alpha} e_{\alpha}^{\circ} \end{aligned} \quad [4.2.3.1]$$

onde,

$e^{\circ'} = [e_{\mu}^{\circ'} | e_{\alpha}^{\circ'} | e_{\beta}^{\circ'} | e_{\gamma}^{\circ'}]' = (X'X)^{-1}X'y$, uma solução do sistema de equações normais ($X'Xe = X'y$),

$$W_{\alpha} = X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1,$$

$$X_1 = [X_{\alpha_1} | \dots | X_{\alpha_a}] ,$$

$$X_2 = [X_{\mu} | X_{\beta_1} | \dots | X_{\beta_b} | X_{\gamma_1} | \dots | X_{\gamma_c}]$$

$$\begin{aligned} (ii) - R(\beta|\mu, \alpha, \gamma) &= R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \gamma) \\ &= e_{\beta}^{\circ'} W_{\beta} e_{\beta}^{\circ} \end{aligned} \quad [4.2.3.2]$$

onde,

$$W_{\beta} = X_1' X_1 - X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1,$$

$$X_1 = [X_{\beta_1} \mid \dots \mid X_{\beta_b}],$$

$$X_2 = [X_{\mu} \mid X_{\alpha_1} \mid \dots \mid X_{\alpha_a} \mid X_{\gamma_1} \mid \dots \mid X_{\gamma_c}]$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} - R(\gamma|\mu, \alpha, \beta) &= R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \beta) \\ &= e_{\gamma}^{\circ} W_{\gamma} e_{\gamma}^{\circ} \end{aligned} \quad [4.2.3.3]$$

onde,

$$W_{\gamma} = X_1' X_1 - X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1,$$

$$X_1 = [X_{\gamma_1} \mid \dots \mid X_{\gamma_c}],$$

$$X_2 = [X_{\mu} \mid X_{\alpha_1} \mid \dots \mid X_{\alpha_a} \mid X_{\beta_1} \mid \dots \mid X_{\beta_b}]$$

Segundo o mesmo autor, tais somas de quadrados ajustadas $R(\alpha|\mu, \beta, \gamma)$, $R(\beta|\mu, \alpha, \gamma)$ e $R(\gamma|\mu, \alpha, \gamma)$ testam as seguintes hipóteses quando os dados são balanceados.

$$\begin{aligned} \text{(i)} - H_0: \alpha_i \text{ s todos iguais} \\ \text{(ii)} - H_0: \beta_j \text{ s todos iguais} \\ \text{(iii)} - H_0: \gamma_k \text{ s todos iguais} \end{aligned} \quad [4.2.3.4]$$

Entretanto, deve-se ressaltar que as expressões $e_{\alpha}^{\circ} W_{\alpha} e_{\alpha}^{\circ}$, $e_{\beta}^{\circ} W_{\beta} e_{\beta}^{\circ}$ e $e_{\gamma}^{\circ} W_{\gamma} e_{\gamma}^{\circ}$ só se mantém verdadeira para testar as hipóteses [4.2.3.4], se as inversas generalizadas são simétricas e reflexivas.

Sendo assim, a fim de contornar o problema relativo ao uso de inversas generalizadas, utiliza-se o Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa no modelo obtido

em [4.2.1.2] sujeito às restrições [4.2.1.4].

Então, como o modelo [4.2.1.2] é de posto completo, define-se as expressões das somas de quadrados do numerador da estatística F como:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad R(\alpha^* | \mu^*, \beta^*, \gamma^*) &= \hat{\theta}_{\alpha}^{*'} T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha}^* \\ \text{(ii)} \quad R(\beta^* | \mu^*, \alpha^*, \gamma^*) &= \hat{\theta}_{\beta}^{*'} T_{\beta\beta}^{-1} \hat{\theta}_{\beta}^* \\ \text{(iii)} \quad R(\gamma^* | \mu^*, \alpha^*, \beta^*) &= \hat{\theta}_{\gamma}^{*'} T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\gamma}^* \end{aligned} \quad [4.2.3.5]$$

que é análogo a expressão dada em [3.3.5.6] e que testam as hipóteses:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad H_o: \theta_{\alpha}^* &= 0 \iff H_o: \mu_{i..} = \mu_{i'..} \\ \text{(ii)} \quad H_o: \theta_{\beta}^* &= 0 \iff H_o: \mu_{.j.} = \mu_{.j'.} \\ \text{(iii)} \quad H_o: \theta_{\gamma}^* &= 0 \iff H_o: \mu_{..k} = \mu_{..k'} \end{aligned} \quad [4.2.3.6]$$

Note que as hipóteses em [4.2.3.6] são testáveis, não só porque os elementos $\theta_{\alpha}^* = \langle \alpha_i^* \rangle$, para $i=1,2,\dots,a-1$, $\theta_{\beta}^* = \langle \beta_j^* \rangle$, para $j=1,2,\dots,b-1$ e $\theta_{\gamma}^* = \langle \gamma_k^* \rangle$ para $k=1,2,\dots,c-1$, são estimáveis (porque são parâmetros do modelo de posto completo), mas também porque em [4.2.1.3] são funções estimáveis dos parâmetros no modelo de posto incompleto.

Portanto, se os dados são balanceados, as hipóteses de [4.2.3.4] e [4.2.3.6] são equivalentes. Isto porque os elementos de $\theta_{\alpha}^* = 0$, $\theta_{\beta}^* = 0$ e $\theta_{\gamma}^* = 0$, junto com α_a^* , β_b^* e γ_c^* de [4.2.2.1] implicam que $\alpha_i = \bar{\alpha}$, $\beta_j = \bar{\beta}$ e

$\gamma_k = \bar{\gamma}$, em [4.2.1.3], significando que os elementos de α_i 's, β_j 's e γ_k 's são todos iguais e que são as hipóteses de [4.2.3.4].

Assim, como o modelo é de posto completo, pode-se usar a expressão [3.3.5.7]. Logo, as estatísticas F para testar as hipóteses H_0 são dadas por:

$$(i) \quad FCH_0: \theta_\alpha^* = 0 = (\hat{\theta}_\alpha^*, T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_\alpha^*) / [(a-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.3.7]$$

onde,

$$\hat{\theta}_\alpha^* = [\hat{\alpha}_1^*, \hat{\alpha}_2^*, \dots, \hat{\alpha}_{a-1}^*]$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQRes}{(N-a-b-c+2)} = \frac{(y'y - \hat{\theta}_\alpha^* X^* y)}{(N-a-b-c+2)}$$

e

$$N = \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^c n_{ijk}$$

O termo $T_{\alpha\alpha}^{-1}$ é indicado como a inversa de parte da inversa de $X^* X^*$.

$$(X^* X^*)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} X_1^* & X_2^* \\ \hline X_2^* & X_2^* \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hline T_{21} & T_{22} \end{array} \right]$$

onde,

$$X_1^* = [X_{\alpha_1}^* \mid X_{\alpha_2}^* \mid \dots \mid X_{\alpha_{a-1}}^*]$$

$$X_2^* = [X_{\mu}^* \mid X_{\beta_1}^* \mid \dots \mid X_{\beta_{b-1}}^* \mid X_{\gamma_1}^* \mid \dots \mid X_{\gamma_{c-1}}^*]$$

$$T_{\alpha\alpha}^{-1} = T_{11}^{-1}$$

A expressão $\hat{\theta}_\alpha^*, T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_\alpha^* = R(\alpha^* | \mu^*, \beta^*, \gamma^*)$, definida como a redução da soma de quadrados devida ao ajuste de α^* , após o ajuste de μ^* , β^* e γ^* é equivalente à expres-

são $R(\alpha/\mu, \beta, \gamma)$ do Método de Ajuste de Constantes quando os dados são balanceados.

$$(ii) \quad FCH_o: e_{\beta}^* = 0 = (\hat{e}_{\beta}^{*'} T_{\beta\beta}^{-1} \hat{e}_{\beta}^*) / [(b-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.3.8]$$

onde,

$$e_{\beta}^{*'} = [\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{b-1}^*]$$

$$(X^*, X^*)^{-1} = \begin{bmatrix} X_1^{*'} & X_1^* & X_2^{*'} & X_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_2^{*'} & X_2^* & X_1^{*'} & X_1^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \vdots & \vdots \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} X_1^* &= [X_{\beta_1}^{*'} \mid X_{\beta_2}^{*'} \mid \dots \mid X_{\beta_{b-1}}^{*'}] \\ X_2^* &= [X_{\mu}^{*'} \mid X_{\alpha_1}^{*'} \mid \dots \mid X_{\alpha_{a-1}}^{*'} \mid X_{\beta_1}^{*'} \mid \dots \mid X_{\beta_{b-1}}^{*'}] \end{aligned}$$

Portanto, a inversa da parte inversa de T_{11} é indicado por $T_{\beta\beta}^{-1}$.

A expressão $\hat{e}_{\beta}^{*'} T_{\beta\beta}^{-1} \hat{e}_{\beta}^* = R(\beta^* | \mu^*, \alpha^*, \gamma^*)$ é a redução da soma de quadrados devida ao ajuste de β^* , após o ajuste de μ^* , α^* e γ^* , equivalente à $R(\beta | \mu, \alpha, \gamma)$ quando os dados são balanceados.

$$(iii) \quad FCH_o: e_{\gamma}^* = 0 = (\hat{e}_{\gamma}^{*'} T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{e}_{\gamma}^*) / [(c-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.3.9]$$

onde,

$$e_{\gamma}^{*'} = [\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_{c-1}^*]$$

$$(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_2^* \\ \hline \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_2^* \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hline T_{21} & T_{22} \end{array} \right]$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1^* &= [\mathcal{X}_{\gamma}^* \mid \mathcal{X}_{\gamma}^* \mid \dots \mid \mathcal{X}_{\gamma}^*] \\ \mathcal{X}_2^* &= [\mathcal{X}_{\mu}^* \mid \mathcal{X}_{\alpha_1}^* \mid \dots \mid \mathcal{X}_{\alpha_{a-1}}^* \mid \mathcal{X}_{\beta_1}^* \mid \dots \mid \mathcal{X}_{\beta_{b-1}}^*] \end{aligned}$$

Portanto, a inversa de parte da inversa de T_{11} é dada por $T_{\gamma\gamma}^{-1}$. A expressão $\hat{\theta}_{\gamma}^*, T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\gamma}^* = R(\gamma^* \mid \mu^*, \alpha^*, \beta^*)$ é indicada como a redução da soma de quadrados devida ao ajuste de γ^* , após o ajuste de μ^* , α^* e β^* . E quando os dados são balanceados, a expressão $R(\gamma^* \mid \mu^*, \alpha^*, \beta^*)$ é equivalente à $R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ do Método de Ajuste de Constantes.

4.2.4. Quadro de Análise da Variância

Para verificar as contribuições de α_i 's, β_j 's e γ_k 's ou de todos no modelo adotado, ou seja, para verificar a adequação do modelo na explicação da variável y , obtém-se o seguinte quadro de análise da variância.

Quadro de Análise da Variância

CV	GL	SQ	QM	F
α^* (ajust.)	a-1	$R(\alpha^* \mid \mu^*, \beta^*, \gamma^*)$	QM_A	$QM_A / QMRes$
β^* (ajust.)	b-1	$R(\beta^* \mid \mu^*, \alpha^*, \gamma^*)$	QM_B	$QM_B / QMRes$
γ^* (ajust.)	c-1	$R(\gamma^* \mid \mu^*, \alpha^*, \beta^*)$	QM_{AB}	$QM_{AB} / QMRes$
Resíduo (N-a-b-c+2)		$y'y - R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$	QMRes	

4.2.5. Com Interações

Fazendo a reparametrização no modelo definido em [3.2.1.1] para um outro que envolva novos parâmetros μ^* , α_i^* , β_j^* , γ_k^* , $(\alpha\beta)_{ij}^*$, $(\alpha\gamma)_{ik}^*$, $(\beta\gamma)_{jk}^*$ e $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}^*$ obtém-se:

$$y_{ijkl} = \mu^* + \alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_k^* + (\alpha\beta)_{ij}^* + (\alpha\gamma)_{ik}^* + (\beta\gamma)_{jk}^* + (\alpha\beta\gamma)_{ijk}^* + \varepsilon_{ijkl}$$

[4.2.5.1]

onde:

$$\begin{aligned} \mu^* &= \mu + \bar{a}_{..} + \bar{\beta}_{..} + \bar{\gamma}_{..} + \bar{\alpha\beta}_{..} + \bar{\alpha\gamma}_{..} + \bar{\beta\gamma}_{..} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{...} \\ \alpha_i^* &= \alpha_i - \bar{a}_{.i} + \bar{\alpha\beta}_{i.} - \bar{\alpha\beta}_{..} + \bar{\alpha\gamma}_{i.} - \bar{\alpha\gamma}_{..} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{i..} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{...} \\ \beta_j^* &= \beta_j - \bar{\beta}_{.j} + \bar{\alpha\beta}_{.j} - \bar{\alpha\beta}_{..} + \bar{\beta\gamma}_{.j} - \bar{\beta\gamma}_{..} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{.j.} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{...} \\ \gamma_k^* &= \gamma_k - \bar{\gamma}_{.k} + \bar{\alpha\gamma}_{.k} - \bar{\alpha\gamma}_{..} + \bar{\beta\gamma}_{.k} - \bar{\beta\gamma}_{..} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{..k} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{...} \\ (\alpha\beta)_{ij}^* &= \alpha\beta_{ij} - \bar{\alpha\beta}_{i.} - \bar{\alpha\beta}_{.j} + \bar{\alpha\beta}_{..} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{ij.} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{i..} - \\ &\quad - \bar{\alpha\beta\gamma}_{.j.} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{...} \\ (\alpha\gamma)_{ik}^* &= \alpha\gamma_{ik} - \bar{\alpha\gamma}_{i.} - \bar{\alpha\gamma}_{.k} + \bar{\alpha\gamma}_{..} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{i.k} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{i..} - \\ &\quad - \bar{\alpha\beta\gamma}_{..k} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{...} \\ (\beta\gamma)_{jk}^* &= \beta\gamma_{jk} - \bar{\beta\gamma}_{.j} - \bar{\beta\gamma}_{.k} + \bar{\beta\gamma}_{..} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{.jk} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{.j.} - \\ &\quad - \bar{\alpha\beta\gamma}_{..k} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{...} \\ (\alpha\beta\gamma)_{ijk}^* &= \alpha\beta\gamma_{ijk} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{ij.} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{i.k} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{.jk} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{i..} + \\ &\quad + \bar{\alpha\beta\gamma}_{.j.} + \bar{\alpha\beta\gamma}_{..k} - \bar{\alpha\beta\gamma}_{...} \end{aligned}$$

[4.2.5.2]

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_i &= \frac{1}{a} \sum_i^a \alpha_i \\
\bar{\beta}_j &= \frac{1}{b} \sum_j^b \beta_j \\
\bar{\gamma}_k &= \frac{1}{c} \sum_k^c \gamma_k \\
\overline{\alpha\beta}_{ij} &= \frac{1}{ab} \sum_i^a \sum_j^b (\alpha\beta)_{ij} \\
\overline{\alpha\gamma}_{ik} &= \frac{1}{ac} \sum_i^a \sum_k^c (\alpha\gamma)_{ik} \\
\overline{\beta\gamma}_{jk} &= \frac{1}{bc} \sum_j^b \sum_k^c (\beta\gamma)_{jk} \\
\overline{\alpha\beta}_i &= \frac{1}{b} \sum_j^b (\alpha\beta)_{ij} \\
&\vdots \\
\overline{\alpha\beta\gamma}_{ijk} &= \frac{1}{abc} \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^c (\alpha\beta\gamma)_{ijk}
\end{aligned}
\tag{4.2.5.3}$$

Então, no novo modelo, tem-se:

$$\left. \begin{aligned}
&\sum_{i=1}^a \alpha_i^* \equiv 0 ; \quad \sum_{j=1}^b \beta_j^* \equiv 0 ; \quad \sum_{k=1}^c \gamma_k^* \equiv 0 \\
&\sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij}^* \equiv 0 \text{ p/ cada } j ; \quad \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij}^* \equiv 0 \text{ p/ cada } i \\
&\sum_{i=1}^a (\alpha\gamma)_{ik}^* \equiv 0 \text{ p/ cada } k ; \quad \sum_{k=1}^c (\alpha\gamma)_{ik}^* \equiv 0 \text{ p/ cada } i \\
&\sum_{j=1}^b (\beta\gamma)_{jk}^* \equiv 0 \text{ p/ cada } k ; \quad \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^* \equiv 0 \text{ p/ cada } j \\
&\sum_{i=1}^a (\alpha\beta\gamma)_{ijk}^* \equiv 0 \text{ p/ cada } j, k ; \quad \sum_{j=1}^b (\alpha\beta\gamma)_{ijk}^* \equiv 0 \text{ p/} \\
&\text{cada } i, k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^c (\alpha\beta\gamma)_{ijk}^* \equiv 0 \text{ p/ cada } i, j
\end{aligned} \right\}
\tag{4.2.5.4}$$

Assim, o modelo com Restrição - Σ é agora de posto

completo e pode ser escrito em termos de:

$$\begin{aligned} \mu^*, \theta_{\alpha}^* &= \{\alpha_i^*\}, \quad \theta_{\beta}^* = \{\beta_j^*\}, \quad \theta_{\gamma}^* = \{\gamma_k^*\}, \quad \theta_{\alpha\beta}^* = \{\alpha\beta_{ij}^*\}, \\ \theta_{\alpha\gamma}^* &= \{\alpha\gamma_{ik}^*\}, \quad \theta_{\beta\gamma}^* = \{\beta\gamma_{jk}^*\} \quad \text{e} \quad \theta_{\alpha\beta\gamma}^* = \{\alpha\beta\gamma_{ijk}^*\} \\ \text{para } i &= 1, 2, \dots, (a-1) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, (b-1) \quad \text{e} \\ k &= 1, 2, \dots, (c-1). \end{aligned}$$

4.2.6. Uso de Restrição - Σ Explicitamente

Escrevendo-se as restrições [4.2.5.4] na forma

$$\begin{aligned} \alpha_a^* &= \alpha_1^* - \alpha_2^* - \dots - \alpha_{a-1}^* \\ \beta_b^* &= \beta_1^* - \beta_2^* - \dots - \beta_{b-1}^* \\ \gamma_c^* &= \gamma_1^* - \gamma_2^* - \dots - \gamma_{c-1}^* \\ (\alpha\beta)_{aj}^* &= -(\alpha\beta)_{1j}^* - (\alpha\beta)_{2j}^* - \dots - (\alpha\beta)_{a-1j}^* \quad \text{p/ cada } j \\ (\alpha\beta)_{ib}^* &= -(\alpha\beta)_{i1}^* - (\alpha\beta)_{i2}^* - \dots - (\alpha\beta)_{ib-1}^* \quad \text{p/ cada } i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (\alpha\beta\gamma)_{ajk}^* &= -(\alpha\beta\gamma)_{1jk}^* - (\alpha\beta\gamma)_{2jk}^* - \dots - (\alpha\beta\gamma)_{a-1jk}^* \quad \text{p/ cada } j, k \\ (\alpha\beta\gamma)_{ibk}^* &= -(\alpha\beta\gamma)_{i1k}^* - (\alpha\beta\gamma)_{i2k}^* - \dots - (\alpha\beta\gamma)_{ib-1k}^* \quad \text{p/ cada } i, k \\ (\alpha\beta\gamma)_{ijc}^* &= -(\alpha\beta\gamma)_{ij1}^* - (\alpha\beta\gamma)_{ij2}^* - \dots - (\alpha\beta\gamma)_{ijc-1}^* \quad \text{p/ cada } i, j \end{aligned} \quad [4.2.6.1]$$

e aplicando-se estas restrições diretamente nas equações do modelo $y = X\theta + \varepsilon$, obtém-se um novo modelo com Restrição- Σ ,

$$y = X^* \theta^* + \varepsilon \quad [4.2.6.2]$$

Assim, particionando a matriz X^* e o vetor θ^* de acordo com os efeitos considerados, tem-se a forma:

$$y = X_{11}^* \theta_{11}^* + X_{22}^* \theta_{22}^* + X_{33}^* \theta_{33}^* + X_{44}^* \theta_{44}^* + X_{55}^* \theta_{55}^* + \varepsilon \quad [4.2.6.3]$$

onde,

$$\mathcal{X}_1^* = [\mathcal{X}_\mu^* | \mathcal{X}_\alpha^* | \mathcal{X}_\beta^* | \mathcal{X}_\gamma^*] ; \mathcal{X}_2^* = [\mathcal{X}_{\alpha\beta}^*] ; \mathcal{X}_3^* = [\mathcal{X}_{\alpha\gamma}^*] ; \mathcal{X}_4^* = [\mathcal{X}_{\beta\gamma}^*] \quad \text{e}$$

$$\mathcal{X}_5^* = [\mathcal{X}_{\alpha\beta\gamma}^*] .$$

$$\Theta_1^* = \begin{bmatrix} \mu^* \\ \langle \alpha_i^* \rangle \\ \langle \beta_j^* \rangle \\ \langle \gamma_k^* \rangle \end{bmatrix} ; \Theta_2^* = [\langle \alpha\beta_{ij}^* \rangle] ; \Theta_3^* = [\langle \alpha\beta\gamma_{ijk}^* \rangle]$$

$$; \Theta_4^* = [\langle \alpha\gamma_{ik}^* \rangle] ; i = 1, 2, \dots, (a-1)$$

$$; j = 1, 2, \dots, (b-1)$$

$$; k = 1, 2, \dots, (c-1)$$

$$; \Theta_5^* = [\langle \beta\gamma_{jk}^* \rangle] ; \quad [4.2.6.4]$$

Desse modo, obtém-se a seguinte configuração.

$$\begin{bmatrix} y_{1111} \\ \vdots \\ y_{111n_{111}} \\ \vdots \\ y_{11c1} \\ \vdots \\ y_{11cn_{11c}} \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ y_{1bc1} \\ \vdots \\ y_{1bcn_{1bc}} \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ y_{abc1} \\ \vdots \\ y_{abcn_{abc}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^* & \alpha_1^* \dots \alpha_{a-1}^* & \beta_1^* \dots \beta_{b-1}^* & \gamma_1^* \dots \gamma_{c-1}^* \\ 1 & 1 \dots 0 & 1 \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ 1 & 1 \dots 0 & 1 \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ 1 & 1 \dots 0 & 1 \dots 0 & -1 \dots -1 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ 1 & 1 \dots 0 & 1 \dots 0 & -1 \dots -1 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ 1 & 1 \dots 0 & -1 \dots -1 & -1 \dots -1 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ 1 & 1 \dots 0 & -1 \dots -1 & -1 \dots -1 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ 1 & -1 \dots -1 & -1 \dots -1 & -1 \dots -1 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \dots \vdots \\ 1 & -1 \dots -1 & -1 \dots -1 & -1 \dots -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_{a-1}^* \\ \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_{b-1}^* \\ \gamma_1^* \\ \vdots \\ \gamma_{c-1}^* \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \mathcal{X}_1^* \\ \Theta_1^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix}
\begin{matrix} \alpha\beta^* & \dots \\ 11 \end{matrix} & \begin{matrix} \alpha\beta^* & \dots & \dots \\ 1(b-1) \end{matrix} & \begin{matrix} \alpha\beta^* & \dots \\ (a-1)1 \end{matrix} & \begin{matrix} \alpha\beta^* & \dots \\ (a-1)(b-1) \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \alpha\beta^*_{11} \\ \alpha\beta^*_{1(b-1)} \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ \alpha\beta^*_{(a-1)1} \\ \vdots \\ \alpha\beta^*_{(a-1)(b-1)} \end{bmatrix} \\
\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots \\ \vdots \\ \alpha\beta^*_{(a-1)1} \\ \vdots \\ \alpha\beta^*_{(a-1)(b-1)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\mathcal{X}_2^*$
 Θ_2^*

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\beta\gamma^* & \dots & \beta\gamma^* & \dots & \dots & \beta\gamma^* & \dots & \beta\gamma^* \\
11 & & 1(c-1) & & & (b-1)1 & & (b-1)(c-1) \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
-1 & \dots & -1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
-1 & \dots & -1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
\dots & & \dots & & & \dots & & \dots \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
\dots & & \dots & & & \dots & & \dots \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
\dots & & \dots & & & \dots & & \dots \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & 1
\end{array} \right] & \left[\begin{array}{c}
\beta\gamma^*_{11} \\
\beta\gamma^*_{1(c-1)} \\
\vdots \\
\dots \\
\vdots \\
\beta\gamma^*_{(b-1)1} \\
\vdots \\
\beta\gamma^*_{(b-1)(c-1)}
\end{array} \right]
\end{array}
+ \begin{array}{c}
\mathbb{X}_4^* \\
\oplus_4^*
\end{array}
\end{array}$$

Novamente, com a reparametrização, a matriz de planejamento X^* com a Restrição- Σ é agora de posto completo. Portanto, a solução única do sistema de equações normais $X^{*'}X^*\theta^* = X^{*'}y$ é dada por:

$$\hat{\theta}^* = (X^{*'}X^*)^{-1} X^{*'}y \quad [4.2.6.5]$$

onde,

$$\hat{\theta}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mu}^* \\ \hat{\theta}_{\mu}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\beta}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\gamma}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\alpha\beta}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\alpha\gamma}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\beta\gamma}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\alpha\beta\gamma}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}^* \\ \dots \\ \hat{\alpha}_1^* \\ \dots \\ \hat{\alpha}_{a-1}^* \\ \dots \\ \hat{\beta}_1^* \\ \dots \\ \hat{\beta}_{b-1}^* \\ \dots \\ \hat{\gamma}_1^* \\ \dots \\ \hat{\gamma}_{c-1}^* \\ \dots \\ \langle \hat{\alpha\beta}_{ij}^* \rangle \\ \dots \\ \langle \hat{\alpha\gamma}_{ik}^* \rangle \\ \dots \\ \langle \hat{\beta\gamma}_{jk}^* \rangle \\ \dots \\ \langle \hat{\alpha\beta\gamma}_{ijk}^* \rangle \end{bmatrix} \quad [4.2.6.6]$$

Sendo assim, a redução da soma de quadrados devida ao ajuste do modelo completo é dada por:

$$\begin{aligned} R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*, \alpha\beta\gamma^*) &= y'X^*(X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}y = \\ &= \hat{\theta}^{*'}X^{*'}y = \text{S.Q. Parâmetros} \end{aligned} \quad [4.2.6.7]$$

Logo, a soma de quadrados do resíduo é obtida por:

$$SQ_{Res} = y'y - \hat{\theta}^{*'}X^{*'}y. \quad [4.2.6.8]$$

4.2.7. Hipóteses Testáveis

Agora, considera-se a hipótese geral dada em [3.3.4.1] para testar os efeitos principais de α_i 's, β_j 's, γ_k 's e das interações $\alpha\beta_{ij}$'s, $\alpha\gamma_{ik}$'s, $\beta\gamma_{jk}$'s e $\alpha\beta\gamma_{ijk}$'s.

Quando os dados são não balanceados (número de observações diferentes nas caselas), mas com todas as caselas ocupadas ($n_{ijk} \geq 1$), YATES(1934), BANCROFT(1968) e mais recentemente SEARLE(1971), recomendam-se o Método das Médias Quadráticas Ponderadas. Este método fornece estimadores não viciados para os efeitos principais quando as interações estão presentes no modelo.

Utilizando-se o Método Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa em associação com a Notação $R(\cdot)$ e Restrição - Σ , obtém-se as somas de quadrados para o numerador da estatística F que testam os efeitos principais e das interações.

Como o modelo [4.2.5.1] sujeito às restrições [4.2.5.4] é de posto completo, definem-se as expressões para as somas de quadrados, idênticas, a expressão [3.3.5.6] :

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} & - R(\alpha^* | \text{ todos os outros efeitos}) = \hat{e}_{\alpha}^*, T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{e}_{\alpha}^* \\
 \text{(ii)} & - R(\beta^* | \text{ todos os outros efeitos}) = \hat{e}_{\beta}^*, T_{\beta\beta}^{-1} \hat{e}_{\beta}^* \\
 \text{(iii)} & - R(\gamma^* | \text{ todos os outros efeitos}) = \hat{e}_{\gamma}^*, T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{e}_{\gamma}^* \quad [4.2.7.1] \\
 \text{(iv)} & - R(\alpha\beta^* | \text{ todos os outros efeitos}) = \hat{e}_{\alpha\beta}^*, T_{\alpha\beta}^{-1} \hat{e}_{\alpha\beta}^* \\
 \text{(v)} & - R(\alpha\gamma^* | \text{ todos os outros efeitos}) = \hat{e}_{\alpha\gamma}^*, T_{\alpha\gamma}^{-1} \hat{e}_{\alpha\gamma}^* \\
 \text{(vi)} & - R(\beta\gamma^* | \text{ todos os outros efeitos}) = \hat{e}_{\beta\gamma}^*, T_{\beta\gamma}^{-1} \hat{e}_{\beta\gamma}^* \\
 \text{(vii)} & - R(\alpha\beta\gamma^* | \text{ todos os outros efeitos}) = \hat{e}_{\alpha\beta\gamma}^*, T_{\alpha\beta\gamma}^{-1} \hat{e}_{\alpha\beta\gamma}^*
 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 R(\alpha^* | \text{todos os outros efeitos}) &= \\
 &= R(\alpha^* | \mu^*, \beta^*, \gamma^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*, \alpha\beta\gamma^*) \\
 &\vdots \\
 R(\alpha\beta\gamma^* | \text{todos os outros efeitos}) &= \\
 &= R(\alpha\beta\gamma^* | \mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*)
 \end{aligned}$$

e que testam as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} &- H_o: e_{\alpha}^* = 0 \\
 \text{(ii)} &- H_o: e_{\beta}^* = 0 \\
 \text{(iii)} &- H_o: e_{\gamma}^* = 0 \\
 \text{(iv)} &- H_o: e_{\alpha\beta}^* = 0 \quad [4.2.7.2] \\
 \text{(v)} &- H_o: e_{\alpha\gamma}^* = 0 \\
 \text{(vi)} &- H_o: e_{\beta\gamma}^* = 0 \\
 \text{(vii)} &- H_o: e_{\alpha\beta\gamma}^* = 0
 \end{aligned}$$

Pode-se verificar que as hipóteses de [4.2.7.2] são testáveis nos modelos não balanceados (mas, com todas as caselas ocupadas ($n_{ijk} \geq 1$)), porque são parâmetros do modelo de posto completo ou modelo com Restrição - Σ . Além disso, pode-se constatar que as expressões dadas em [4.2.5.2], são funções estimáveis no modelo de posto incompleto. Portanto, sendo as funções estimáveis, logicamente, as hipóteses de [4.2.7.2] são testáveis. Isso acontece porque os elementos de $e_{\alpha}^* = 0$, $e_{\beta}^* = 0$, $e_{\gamma}^* = 0$, $e_{\alpha\beta}^* = 0$, $e_{\alpha\gamma}^* = 0$, $e_{\beta\gamma}^* = 0$ e $e_{\alpha\beta\gamma}^* = 0$, junto com α_a^* , β_b^* , γ_c^* , $\alpha\beta_{aj}^*$, $\alpha\beta_{ib}^*$, $\alpha\gamma_{ak}^*$, $\alpha\gamma_{ic}^*$, $\beta\gamma_{bk}^*$, $\beta\gamma_{jc}^*$, $\alpha\beta\gamma_{ajk}^*$, $\alpha\beta\gamma_{ibk}^*$ e $\alpha\beta\gamma_{ijc}^*$ de [4.2.6.1], implicam em:

$$\begin{aligned}
\alpha_i + \overline{\alpha\beta}_{i.} + \overline{\alpha\gamma}_{i.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i..} &= \overline{\alpha}_{.} + \overline{\alpha\beta}_{..} + \overline{\alpha\gamma}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} \\
\beta_j + \overline{\alpha\beta}_{.j} + \overline{\beta\gamma}_{.j} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.j.} &= \overline{\beta}_{.} + \overline{\alpha\beta}_{..} + \overline{\beta\gamma}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} \\
\gamma_k + \overline{\alpha\gamma}_{.k} + \overline{\beta\gamma}_{.k} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{..k} &= \overline{\gamma}_{.} + \overline{\alpha\gamma}_{..} + \overline{\beta\gamma}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} \quad [4.2.7.3] \\
\alpha\beta_{ij} + \overline{\alpha\beta}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{ij.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} &= \overline{\alpha\beta}_{i.} + \overline{\alpha\beta}_{.j} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.j.} \\
\alpha\gamma_{ik} + \overline{\alpha\gamma}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i.k} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} &= \overline{\alpha\gamma}_{i.} + \overline{\alpha\gamma}_{.k} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{..k} \\
\beta\gamma_{jk} + \overline{\beta\gamma}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.jk} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} &= \overline{\beta\gamma}_{.j.} + \overline{\beta\gamma}_{.k} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.j.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{..k} \\
\alpha\beta\gamma_{ijk} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.j.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{..k} &= \overline{\alpha\beta\gamma}_{ij.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i.k} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.jk} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...}
\end{aligned}$$

significando que:

$$\begin{aligned}
(i) - H_0: \alpha_i + \overline{\alpha\beta}_{i.} + \overline{\alpha\gamma}_{i.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i..} &\text{ todos iguais} \\
(ii) - H_0: \beta_j + \overline{\alpha\beta}_{.j} + \overline{\beta\gamma}_{.j} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.j.} &\text{ todos iguais} \\
(iii) - H_0: \gamma_k + \overline{\alpha\gamma}_{.k} + \overline{\beta\gamma}_{.k} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{..k} &\text{ todos iguais} \quad [4.2.7.4] \\
(iv) - H_0: \alpha\beta_{ij} + \overline{\alpha\beta}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{ij.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} &\text{ todos iguais} \\
(v) - H_0: \alpha\gamma_{ik} + \overline{\alpha\gamma}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i.k} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} &\text{ todos iguais} \\
(vi) - H_0: \beta\gamma_{jk} + \overline{\beta\gamma}_{..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.jk} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{...} &\text{ todos iguais} \\
(vii) - H_0: \alpha\beta\gamma_{ijk} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i..} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{.j.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{..k} &\text{ todos iguais}
\end{aligned}$$

ou, de modo equivalente, veja SEARLE(1987):

$$\begin{aligned}
(i) - H_0: \mu_{i..} &\text{ todos iguais} \\
(ii) - H_0: \mu_{.j.} &\text{ todos iguais} \\
(iii) - H_0: \mu_{..k} &\text{ todos iguais} \quad [4.2.7.5] \\
(iv) - H_0: \mu_{ij.} - \mu_{i'.j.} - \mu_{i.j'} + \mu_{i'.j'} &\text{ todos iguais} \\
(v) - H_0: \mu_{i.k} - \mu_{i'.k} - \mu_{i.k'} + \mu_{i'.k'} &\text{ todos iguais} \\
(vi) - H_0: \mu_{.jk} - \mu_{.j'k} - \mu_{.jk'} + \mu_{.j'k'} &\text{ todos iguais} \\
(vii) - H_0: (\mu_{ijk} - \mu_{i'.jk} - \mu_{ij.k'} + \mu_{i'.jk'}) - & \\
& - (\mu_{ijk'} - \mu_{i'.jk'} - \mu_{ij.k} + \mu_{i'.jk}) \text{ todos iguais}
\end{aligned}$$

e que são as hipóteses testadas pelo Método das Médias Quadráticas Ponderadas e, portanto, equivalentes às hipóteses de [4.2.7.2], testadas pelo Algoritmo da Inversa

de Parte da Inversa.

Portanto, os resultados obtidos através do Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa associada à Restrição- Σ e a Notação RC.), são idênticas aos resultados obtidos pelo Método das Médias Quadráticas Ponderadas. Veja dentre outros, SEARLE(1987) e IEMMA(1991).

Usando novamente a expressão dada em [3.3.5.7], pois, o modelo é de posto completo, a estatística F para testar as hipóteses H_0 são dadas por:

$$(i) - FCH_0: e_{\alpha}^* = 0 = (\hat{e}_{\alpha}^*, T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{e}_{\alpha}^*) / [(a-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.7.6]$$

onde,

$$\hat{e}_{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_1^*, \hat{\alpha}_2^*, \dots, \hat{\alpha}_{a-1}^*]$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQRes}{N - abc}$$

$$\begin{aligned} SQRes &= y'y - R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*, \alpha\beta\gamma^*) \\ &= y'y - \hat{e}^* X^* y \end{aligned}$$

$$N = \sum_i \sum_j \sum_k n_{ijk}$$

$T_{\alpha\alpha}^{-1}$ é a inversa da parte inversa de $X^* X^*$, isto é, $T_{\alpha\alpha}^{-1} = T_{11}^{-1}$

$$(X^* X^*)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} X_1^* X_1^* & X_1^* X_2^* \\ \hdashline X_2^* X_1^* & X_2^* X_2^* \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hdashline T_{21} & T_{22} \end{array} \right]$$

e

$$X_1^* = [X_{\alpha_1}^* \mid X_{\alpha_2}^* \mid \dots \mid X_{\alpha_{a-1}}^*]$$

$$X_2^* = [X_{\mu}^* \mid X_{\{\beta\}}^* \mid X_{\{\gamma\}}^* \mid X_{\{\alpha\beta\}}^* \mid X_{\{\alpha\gamma\}}^* \mid X_{\{\beta\gamma\}}^* \mid X_{\{\alpha\beta\gamma\}}^*]$$

$$(ii) - FCH_0: e_{\beta}^* = 0 = (\hat{e}_{\beta}^*, T_{\beta\beta}^{-1} \hat{e}_{\beta}^*) / [(b-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.7.7]$$

onde,

$$\hat{\Theta}_{\beta}^* = [\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*, \dots, \hat{\beta}_{b-1}^*]$$

$$T_{\beta\beta}^{-1} = T_{11}^{-1}$$

$$(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_2^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \cdot & \cdot \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{X}_1^* = [\mathcal{X}_{\beta_1}^* \mid \mathcal{X}_{\beta_2}^* \mid \dots \mid \mathcal{X}_{\beta_{b-1}}^*]$$

$$\mathcal{X}_2^* = [\mathcal{X}_{\mu}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\alpha\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\gamma\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\alpha\beta\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\alpha\gamma\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\beta\gamma\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\alpha\beta\gamma\rangle}^*]$$

$$(iii) - F(H_o: \Theta_{\gamma}^* = \emptyset) = (\hat{\Theta}_{\gamma}^*, T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{\Theta}_{\gamma}^*) / [(c-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.7.8]$$

onde,

$$\hat{\Theta}_{\gamma}^* = [\hat{\gamma}_1^*, \hat{\gamma}_2^*, \dots, \hat{\gamma}_{c-1}^*]$$

$$T_{\gamma\gamma}^{-1} = T_{11}^{-1}$$

$$(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_2^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \cdot & \cdot \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{X}_1^* = [\mathcal{X}_{\gamma_1}^* \mid \mathcal{X}_{\gamma_2}^* \mid \dots \mid \mathcal{X}_{\gamma_{c-1}}^*]$$

$$\mathcal{X}_2^* = [\mathcal{X}_{\mu}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\alpha\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\beta\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\alpha\beta\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\alpha\gamma\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\beta\gamma\rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle\alpha\beta\gamma\rangle}^*]$$

$$(iv) - F(H_o: \Theta_{\alpha\beta}^* = \emptyset) = (\hat{\Theta}_{\alpha\beta}^*, T_{\alpha\beta}^{-1} \hat{\Theta}_{\alpha\beta}^*) / [(a-1)(b-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.7.9]$$

onde,

$$\hat{\Theta}_{\alpha\beta}^* = [\hat{\alpha\beta}_{11}^*, \dots, \hat{\alpha\beta}_{1b-1}^*, \dots, \hat{\alpha\beta}_{a-11}^*, \dots, \hat{\alpha\beta}_{a-1b-1}^*]$$

$$T_{\alpha\beta}^{-1} = T_{11}^{-1}$$

$$(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_2^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \cdot & \cdot \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e \quad \mathcal{X}_1^* &= [\mathcal{X}_{\langle \alpha \beta \rangle}^*] \\ \mathcal{X}_2^* &= [\mathcal{X}_\mu^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \beta \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \gamma \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \gamma \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \beta \gamma \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \beta \gamma \rangle}^*] \end{aligned}$$

$$(v) - F(H_o : \theta_{\alpha\gamma}^* = \emptyset) = (\hat{\theta}_{\alpha\gamma}^*, T_{\alpha\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha\gamma}^*) / [(a-1)(c-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.7.10]$$

onde,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\alpha\gamma}^* &= [\hat{\alpha}_{11}^*, \dots, \hat{\alpha}_{1c-1}^*, \dots, \hat{\alpha}_{a-11}^*, \dots, \hat{\alpha}_{a-1c-1}^*] \\ T_{\alpha\gamma}^{-1} &= T_{11}^{-1} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_2^* \\ \hdashline \mathcal{X}_2^*, \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_2^*, \mathcal{X}_2^* \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hdashline T_{21} & T_{22} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} e \quad \mathcal{X}_1^* &= [\mathcal{X}_{\langle \alpha \gamma \rangle}^*] \\ \mathcal{X}_2^* &= [\mathcal{X}_\mu^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \beta \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \gamma \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \beta \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \beta \gamma \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \beta \gamma \rangle}^*] \end{aligned}$$

$$(vi) - F(H_o : \theta_{\beta\gamma}^* = \emptyset) = (\hat{\theta}_{\beta\gamma}^*, T_{\beta\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\beta\gamma}^*) / [(b-1)(c-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.7.11]$$

onde,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\beta\gamma}^* &= [\hat{\beta}_{11}^*, \dots, \hat{\beta}_{1c-1}^*, \dots, \hat{\beta}_{b-11}^*, \dots, \hat{\beta}_{b-1c-1}^*] \\ T_{\beta\gamma}^{-1} &= T_{11}^{-1} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_2^* \\ \hdashline \mathcal{X}_2^*, \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_2^*, \mathcal{X}_2^* \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hdashline T_{21} & T_{22} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} e \quad \mathcal{X}_1^* &= [\mathcal{X}_{\langle \beta \gamma \rangle}^*] \\ \mathcal{X}_2^* &= [\mathcal{X}_\mu^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \beta \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \gamma \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \beta \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \gamma \rangle}^* \mid \mathcal{X}_{\langle \alpha \beta \gamma \rangle}^*] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (vii) - F(H_o : \theta_{\alpha\beta\gamma}^* = \emptyset) &= \\ &= (\hat{\theta}_{\alpha\beta\gamma}^*, T_{\alpha\beta\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha\beta\gamma}^*) / [(a-1)(b-1)(c-1)\hat{\sigma}^2] \quad [4.2.7.12] \end{aligned}$$

onde,

$$\hat{\theta}_{\alpha\beta\gamma}^* = [\{\alpha\beta\gamma^*, s\}]$$

$$T_{\alpha\beta\gamma}^{-1} = T_{11}^{-1}$$

$$(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* & \mathcal{X}_1^* \\ \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_2^* & \mathcal{X}_2^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{X}_1^* = [\mathcal{X}_{\{\alpha\beta\gamma\}}^*]$$

$$\mathcal{X}_2^* = [\mathcal{X}_{\mu}^* | \mathcal{X}_{\{\alpha\}}^* | \mathcal{X}_{\{\beta\}}^* | \mathcal{X}_{\{\gamma\}}^* | \mathcal{X}_{\{\alpha\beta\}}^* | \mathcal{X}_{\{\alpha\gamma\}}^* | \mathcal{X}_{\{\beta\gamma\}}^*]$$

4.2.8. Quadro de Análise da Variância

Quadro de Análise de Variância

CV	GL	SQ	QM	F
α^* (ajust.)	a-1	$\hat{\theta}_{\alpha}^*, T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha}^*$	QM_A	$QM_A / QMRes$
β^* (ajust.)	b-1	$\hat{\theta}_{\beta}^*, T_{\beta\beta}^{-1} \hat{\theta}_{\beta}^*$	QM_B	$QM_B / QMRes$
γ^* (ajust.)	c-1	$\hat{\theta}_{\gamma}^*, T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\gamma}^*$	QM_C	$QM_C / QMRes$
$\alpha\beta^*$ (ajust.) (a-1)(b-1)		$\hat{\theta}_{\alpha\beta}^*, T_{\alpha\beta}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha\beta}^*$	QM_{AB}	$QM_{AB} / QMRes$
$\alpha\gamma^*$ (ajust.) (a-1)(c-1)		$\hat{\theta}_{\alpha\gamma}^*, T_{\alpha\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha\gamma}^*$	QM_{AC}	$QM_{AC} / QMRes$
$\beta\gamma^*$ (ajust.) (b-1)(c-1)		$\hat{\theta}_{\beta\gamma}^*, T_{\beta\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\beta\gamma}^*$	QM_{BC}	$QM_{BC} / QMRes$
$\alpha\beta\gamma^*$ (aj.) (a-1)(b-1)(c-1)		$\hat{\theta}_{\alpha\beta\gamma}^*, T_{\alpha\beta\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha\beta\gamma}^*$	QM_{ABC}	$QM_{ABC} / QMRes$
Resíduo	N - abc	$y'y - \hat{\theta}^*, \mathcal{X}^*, y$	QMRes	

Como se viu, existem vários métodos para o cálculo das somas de quadrados e teste de hipóteses na análise de variância. Embora estes métodos forneçam resultados idênticos para as somas de quadrados quando os dados são balanceados, eles podem e, geralmente, produzem resultados diferentes quando os dados são não balanceados.

Neste caso, viu-se que o Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa equivalente ao Método das Médias Quadráticas Ponderadas, fornece somas de quadrados para os efeitos principais e interações quando os dados são não balanceados, mas todas as caselas são ocupadas. Também viu-se que no modelo sem interações, este método fornece somas de quadrados para os efeitos principais através do ajuste de um parâmetro em relação a todos os outros.

Entretanto, a principal dificuldade para a obtenção das somas de quadrados surge quando ocorrem dados não balanceados com algumas caselas vazias ($n_{ijk} = 0$). Assim, tanto o Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa quanto o Método das Médias Quadráticas Ponderadas, fornecem somas de quadrados para testar hipóteses sobre os efeitos principais que são difíceis de interpretar.

Portanto, a fim de eliminar as dificuldades, principalmente, na interpretação das hipóteses a serem testadas quando os dados são não balanceados e existem caselas vazias, muitos autores têm sugerido o uso de modelo de médias de caselas (modelo μ_{ijk}). Este modelo testa apenas as hipóteses baseadas em funções estimáveis.

4.3. Modelo de Médias

A fim de eliminar as dificuldades, principalmente, em termos de interpretação das hipóteses testadas pelos modelos superparametrizados e modelos com Restrição - Σ quando existem caselas vazias ($n_{ijk} = 0$), introduz-se a definição de modelo de médias.

4.3.1. Modelo de Médias Para Três Fatores

Sem perda de generalidade, o modelo definido em [3.2.2.1] na sua forma matricial é dada por:

$$y = W\mu + \varepsilon \quad [4.3.1.1]$$

$$\text{sujeito à restrição} \quad G\mu = g \quad [4.3.1.2]$$

onde,

y é um vetor de dimensão $(N \times 1)$, que representa a variável resposta no modelo definido em [3.2.2.1] ;

$$N = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c n_{ijk}, \quad i=1,2,\dots,a, \quad j=1,2,\dots,b, \quad k=1,2,\dots,c$$

representa o número total de observações;

$W = \text{Diag} (J_{n_{ijk}})$ é uma matriz de diagonais de comprimento abc , onde o ijk -ésimo diagonal é um vetor coluna de 1's de comprimento n_{ijk} (representado por $J_{n_{ijk}}$);

μ é um vetor de dimensão $(abc \times 1)$, que representa os componentes μ_{ijk} (médias populacionais);

G é uma matriz de dimensão $(s \times abc)$ com posto $r(G) = s$ (posto completo) e g é um vetor coluna de dimensão $(s \times 1)$, ambos conhecidos;

ε é um vetor que representa o erro residual, tal que, $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$.

Portanto, tem-se:

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} y_{111} \\ \vdots \\ y_{11c} \\ \vdots \\ y_{ijk} \\ \vdots \\ y_{ab1} \\ \vdots \\ y_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n_{111}} & & & & & \\ & J_{n_{11c}} & & & & \\ & & J_{n_{ijk}} & & & \\ & & & J_{n_{ab1}} & & \\ & & & & J_{n_{abc}} & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mu_{111} \dots \mu_{11c} \dots \mu_{ijk} \dots \mu_{ab1} \dots \mu_{abc} \\ \begin{bmatrix} \mu_{111} \\ \vdots \\ \mu_{11c} \\ \vdots \\ \mu_{ijk} \\ \vdots \\ \mu_{ab1} \\ \vdots \\ \mu_{abc} \end{bmatrix} \end{array} + \varepsilon \\
 \begin{array}{ccc} y & W & \mu \end{array}
 \end{array}$$

sujeito à restrição

$$G\mu = 0 \Leftrightarrow (\Delta_{(a-1)} \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes \Delta_{(c-1)})\mu = 0$$

onde,

$$\Delta_{a-1} = (I_{(a-1)} \mid - J_{(a-1)}) ;$$

$$\Delta_{b-1} = (I_{(b-1)} \mid - J_{(b-1)}) ;$$

$$\Delta_{c-1} = (I_{(c-1)} \mid - J_{(c-1)}) ;$$

$\otimes$ representa o produto de Kronecker ;

I 's são matrizes identidade de ordens $(a-1)$, $(b-1)$ e $(c-1)$;

J 's são vetores coluna de 1's de comprimentos $(a-1)$, $(b-1)$ e $(c-1)$.

4.3.2. Estimação de Parâmetros no Modelo de Médias

Irrestrito: $n_{ijk} > 0$

Para obter as estimativas dos parâmetros no modelo $y = W\mu + \varepsilon$, utiliza-se, novamente, o procedimento conhecido como método de mínimos quadrados, que consiste em minimizar o vetor de erros.

$$\begin{aligned} Q(\mu) &= \varepsilon' \varepsilon = (y - W\mu)'(y - W\mu) = y'y - y'W\mu - \\ &\quad - \mu'W'y + \mu'W'W\mu \\ &= y'y - 2\mu'W'y + \mu'W'W\mu. \end{aligned}$$

Derivando-se $Q(\mu)$ em relação à μ , obtém-se:

$$\frac{dQ(\mu)}{d\mu} = 2W'W\mu - 2W'y$$

E igualando-se a derivada ao vetor nulo,

obtém-se o sistema de equações,

$$W'W\mu = W'y \quad [4.3.2.1]$$

E conforme IEMMA(1991), como W é uma matriz de posto completo, então, $W'W$ é positiva definida, e portanto, não singular. Logo, as estimativas de μ e σ^2 são dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= (W'W)^{-1}W'y \\ s^2 &= \frac{Q(\hat{\mu})}{(N-abc)} = \frac{y'[I - W(W'W)^{-1}W']y}{(N-abc)} = \frac{SQRes}{(N-abc)} \end{aligned} \quad [4.3.2.2]$$

Pode-se constatar que:

$$\begin{aligned} E[\hat{\mu}] &= E[(W'W)^{-1}W'y] = \mu \\ V[\hat{\mu}] &= V[(W'W)^{-1}W'y] = (W'W)^{-1}\sigma^2 \end{aligned}$$

e assim, $\hat{\mu}_{ijk} = \bar{y}_{ijk} \sim N(\mu_{ijk}, \sigma^2/n_{ijk})$ [4.3.2.3]

Além disso, pode-se verificar ainda que $Q(\hat{\mu}) = y'[I - W(W'W)^{-1}W']y$ em [4.3.2.2] é uma forma quadrática, onde, $[I - W(W'W)^{-1}W']$ é simétrica e idempotente.

Portanto, $Q(\hat{\mu}) / \sigma^2$ tem distribuição qui-quadrado com $(N-abc)$ graus de liberdade, ou seja:

$$\frac{Q(\hat{\mu})}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(N-abc)} \quad [4.3.2.4]$$

4.3.3. - Estimação de Parâmetros no Modelo de Médias

Restrito: $n_{ijk} > 0$.

Na seção 4.3.2, viu-se que no modelo de médias irrestrito, pode-se estimar os parâmetros do modelo através do método de mínimos quadrados. Neste caso, a estimativa de mínimos quadrados para as médias de caselas, são as médias amostrais das observações de cada casela (por exemplo, $\hat{\mu}_{ijk} = \bar{y}_{ijk}$. no modelo de classificação tripla).

Para o modelo de médias restrito é mais conveniente, teoricamente, usar o método dos multiplicadores de Lagrange (GRAYBILL, 1976). Mas, computacionalmente, é mais eficiente adotar a restrição para resolver o problema da dimensão da matriz de delineamento, reduzindo-se o número de parâmetros e, em seguida, utilizam-se o método de mínimos quadrados no modelo reduzido pela imposição da restrição.

Como a matriz G em [4.3.1.2] é de dimensão $(s \times abc)$ e com posto $r(G) = s$, logo, existe uma submatriz de G , isto é G_1 de dimensão $(s \times s)$ e com posto $r(G_1) = s$.

Assim, segundo HOCKING(1985), reordenando as colunas de G e particionando-a em duas submatrizes G_1 e G_2 de dimensões $(s \times s)$ e $(s \times (abc - s))$, pode-se reescrever o modelo de médias definido em [4.3.1.1] na forma:

$$y = W_1 \mu_1 + W_2 \mu_2 + \varepsilon \quad [4.3.3.1]$$

$$\text{sujeito à restrição} \quad G_1 \mu_1 + G_2 \mu_2 = g. \quad [4.3.3.2]$$

onde,

G_1 é uma matriz de posto completo, e portanto, não singular. Logo, a solução para μ_1 em termos de μ_2 existe e, é única, dada por:

$$\mu_1 = (G_1)^{-1}g - (G_1)^{-1}G_2\mu_2. \quad [4.3.3.3]$$

Substituindo-se [4.3.3.3] em [4.3.3.1], obtém-se o modelo reduzido dado por:

$$y_R = W_R \mu_R + \varepsilon \quad [4.3.3.4]$$

onde,

$$y_R = y - W_1(G_1)^{-1}g \quad [4.3.3.5]$$

$$W_R = W_2 - W_1(G_1)^{-1}G_2 \quad [4.3.3.6]$$

$$\mu_R = \mu_2 \quad [4.3.3.7]$$

Se a matriz $W_R = W_2 - W_1(G_1)^{-1}G_2$ de dimensão $[N \times (abc - s)]$ tem posto $r(W_R) = (abc - s)$, então, $W_R'W_R$ é não singular, neste caso, aplicando-se o método de mínimos quadrados, o qual, foi adotado no modelo irrestrito de posto completo, obtém-se os estimadores para μ_1 e μ_2 :

$$\tilde{\mu}_1 = (G_1)^{-1}g - (G_1)^{-1}G_2\tilde{\mu}_2 \quad [4.3.3.8]$$

$$\tilde{\mu}_2 = \hat{\mu}_R = (W_R'W_R)^{-1}W_R'y_R \quad [4.3.3.9]$$

tal que, $\hat{\mu}_R \sim N[\mu_R, (W_R' W_R)^{-1} \sigma^2]$

$$e \quad s^2 = s_R^2 = \frac{Q_R(\hat{\mu}_R)}{(N-abc+s)} \quad [4.3.3.10]$$

$$\begin{aligned} \text{com} \quad Q_R(\hat{\mu}_R) &= (y_R - W_R \hat{\mu}_R)' (y_R - W_R \hat{\mu}_R) \\ &= y_R' [I - W_R (W_R' W_R)^{-1} W_R'] y_R \end{aligned} \quad [4.3.3.11]$$

A distribuição de $\tilde{\mu}$ é dada por $\tilde{\mu} \sim N[\mu, V(\tilde{\mu})]$ onde,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_1 \\ \tilde{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_1)^{-1} g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(G_1)^{-1} G_2 \\ I_R \end{bmatrix} \hat{\mu}_R \\ V(\tilde{\mu}) &= \begin{bmatrix} -(G_1)^{-1} G_2 \\ I_R \end{bmatrix} (W_R' W_R)^{-1} \sigma^2 \begin{bmatrix} -(G_1)^{-1} G_2 \\ I_R \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad [4.3.3.12]$$

Como $Q_R(\hat{\mu}_R)$ em [4.3.3.11] é uma forma quadrática, onde $[I - W_R (W_R' W_R)^{-1} W_R']$ é uma matriz simétrica e idempotente, logo, $Q_R(\hat{\mu}_R) / \sigma^2$ tem distribuição qui-quadrado com $(N-abc+s)$ graus de liberdade, ou seja,

$$\frac{(N-abc+s)s^2}{\sigma^2} = \frac{Q_R(\hat{\mu}_R)}{\sigma^2} \sim \chi_{(N-abc+s)}^2 \quad [4.3.3.13]$$

As idéias desenvolvidas aqui nesta seção pressupõem que todas as caselas sejam ocupadas ($n_{ijk} > 0$). Assim, se não existem caselas vazias, conseqüentemente a matriz de delineamento W_R tem posto $r(W_R) = abc - s$ (posto

completo). Se existirem algumas caselas vazias ($n_{ijk} = 0$), a matriz W_R pode ainda ter o mesmo posto, isto é, $(abc - s)$ e [4.3.3.8] e [4.3.3.9] ainda serão estimadores de μ_1 e μ_2 . Se o posto de W_R , ou seja, $r(W_R) < (abc - s)$, conseqüentemente, volta-se ao mesmo caso anterior do modelo superparametrizado.

4.3.4. - Estimação de Parâmetros no Modelo de Médias com Caselas Vazias: (Existe $n_{ijk} = 0$)

Para a obtenção das estimativas, tanto no modelo irrestrito quanto no modelo restrito, foi adotada a suposição de que todas as caselas fossem ocupadas ($n_{ijk} > 0$). A existência de caselas vazias ($n_{ijk} = 0$) em nada altera a obtenção das estimativas no modelo irrestrito, já que a média populacional μ_{ijk} da casela vazia não pode ser estimada. Mas, no modelo restrito a situação se modifica, já que a média populacional μ_{ijk} , onde ocorreram as caselas vazias, poderá ser estimada através das relações existentes entre as médias populacionais das outras caselas restantes.

Suponha agora que no modelo restrito dado em [4.3.1.1], ocorre alguns $n_{ijk} = 0$, e sem perda de generalidade, que as m populações não observadas correspondem às m primeiras médias do vetor μ . Portanto, pode-se reescrever a

matriz W e o vetor de médias μ particionando-os por:

$$W = [W_m | W_o] \quad [4.3.4.1]$$

e

$$\mu' = [\mu'_m | \mu'_o] \quad [4.3.4.2]$$

onde,

W_m é uma matriz de zeros de dimensão $(N \times m)$;

$W_o = \text{Diag}(J_{n_{ijk}})$ de comprimento $(abc - m)$;

μ_m e μ_o são, respectivamente, os vetores de médias correspondentes às caselas vazias e as caselas ocupadas.

Também, a matriz G é particionada na forma:

$$G = [G_m | G_o] \quad [4.3.4.3]$$

Como o vetor de médias μ_m não pode ser estimado através de suas observações, o objetivo será remover o vetor μ_m do modelo através da restrição, expressando-o em termos das médias observadas μ_o . Isto pode ser feito através de operações elementares de redução das linhas de G e g , obtendo-se:

$$G = \left[\begin{array}{c|c} G_{mm} & G_{mo} \\ \hline 0 & G_E \end{array} \right] \quad g = \begin{bmatrix} g_m \\ g_E \end{bmatrix} \quad [4.3.4.4]$$

onde,

G_{mm} tem posto linha t (posto completo).

Logo, a eliminação de μ_m do modelo, originou um novo conjunto de restrição, obtido através da parte inferior de [4.3.4.4].

Portanto, o modelo resultante desta operação é definido por:

$$y = W_o \mu_o + \varepsilon \quad [4.3.4.5]$$

$$\text{sujeito à restrição} \quad G_E \mu_o = g_E \quad [4.3.4.6]$$

denominado, segundo HOCKING(1985), de modelo efetivo, enquanto a restrição em [4.3.4.6] é denominada de restrição efetiva.

Os resultados obtidos na seção 4.3.3 podem ser aplicados agora no modelo efetivo definido em [4.3.4.5] para estimar μ_o . Entretanto, segundo o mesmo autor, a estimabilidade de μ_m depende da estrutura da equação dada por:

$$G_{mm} \mu_m + G_{mo} \mu_o = g_m \quad [4.3.4.7]$$

Se G_{mm} é não-singular, então μ_m é definido unicamente em termos de μ_o , e portanto, μ_m é estimado através de:

$$\tilde{\mu}_m = G_{mm}^{-1} (g_m - G_{mo} \tilde{\mu}_o) \quad [4.3.4.8]$$

$$\tilde{\mu}_o = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{o1} \\ \tilde{\mu}_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{E1}^{-1}(g_E - G_{E2}\tilde{\mu}_{o2}) \\ (W'_{oR}W_{oR})^{-1}W'_{oR}y_{oR} \end{bmatrix} \quad [4.3.4.9]$$

com

$$W_o = [W_{o1} | W_{o2}]$$

$$G_E = [G_{E1} | G_{E2}]$$

e
$$W_{oR} = W_{o2} - W_{o1}G_{E1}^{-1}G_{E2}$$

$$y_{oR} = y - W_{o1}G_{E1}^{-1}g_E$$

$$\mu_{oR} = \mu_{o2}$$

Suponha que, sem perda de generalidade,

$$G_{mm} = I_{(m)}.$$

Sendo assim, a estimativa da variância para o modelo efetivo é dada por:

$$s^2 = s_{oR}^2 = Q(\hat{\mu}_{oR}) / [N - r(W_{oR})] \quad [4.3.4.10]$$

onde,

$$Q(\hat{\mu}_{oR}) = (y_R - W_{oR}\hat{\mu}_{oR})'(y_R - W_{oR}\hat{\mu}_{oR})$$

e $r(W_{oR})$ é o posto de W_{oR}

Por outro lado, se $G_{mm} \neq I_{(m)}$, então, G_{mm} deve ser escrita da seguinte forma:

$$G_{mm} = [I_{(t)} | C] \quad [4.3.4.11]$$

onde;

$I_{(t)}$ é a matriz identidade de dimensão $(t \times t)$;

e C é uma matriz de dimensão $[t \times (m-t)]$.

Neste caso, μ_m não é mais definido unicamente em termos de μ_o , com exceção de algumas funções lineares. Isto significa que apenas alguns componentes de μ_m podem ser expressos unicamente em termos de μ_o , e portanto, estimado.

Vamos agora relacionar a idéia de estimabilidade no modelo de médias, ao conceito de conexão, e desenvolver um critério para a verificação de estimabilidade de μ baseado no modelo reduzido dado em [4.3.3.4] e no modelo efetivo dado em [4.3.4.5]. Para tanto, considera-se as seguintes definições dadas por ROCKING(1985) e IEMMA(1987).

Definição 1: Uma função linear paramétrica, $\lambda'\theta$ é dita estimável no modelo $y = X\theta + \varepsilon$, se e só se, existe uma combinação linear das observações, $a'y$, tal que $E[a'y] = \lambda'\theta$

Segundo ROCKING(1985), o termo conexão é sinônimo de estimabilidade. Isto significa que, pode-se considerar situações onde o modelo e os dados são, tais que, todas as médias populacionais são linearmente estimáveis, ou seja, existe uma combinação linear das observações do tipo $A'y + a$, tal que, $E[A'y + a] = \mu$.

Definição 2: O delineamento associado ao modelo de médias é dito conectado se todos os componentes de μ são linearmente estimáveis.

De acordo com ROCKING(1985), μ_o é linearmente

estimável em [4.3.4.5], enquanto a estimabilidade de μ_m depende da não singularidade de G_{mm} .

Assim, o conceito de conexão é uma função de todos os aspectos do modelo, incluindo-se os dados disponíveis e as restrições impostas aos componentes de μ , e portanto, ambos devem ser examinados com muito cuidado.

SEARLE(1971) fornece uma verificação geométrica simples de conectividade entre os dados para experimentos fatoriais com dois fatores. Entretanto, este procedimento não é disponível para experimentos fatoriais com mais de dois fatores. Deste modo, será dado um critério para a determinação de conectividade, que é baseado no modelo reduzido dado em [4.3.3.4] e na definição 2. Veja dentre outros, MURRAY & SMITH(1985), HOCKING(1985), VILCA & IEMMA (1990) e WEEKS & WILLIAMS(1964).

Teorema 1: O delineamento associado ao modelo de Médias é conexo se e só se, a matriz W_R no modelo reduzido tem posto coluna completo, ou seja, $r[W_R] = abc - s$.

Prova. Na seção 4.3.3, tem-se que no modelo reduzido, W_R foi dado por:

$$W_R = W_2 - W_1(G_1)^{-1}G_2$$

onde, μ_1 era relacionado a $\mu_2 = \mu_R$ por:

$$\mu_1 = (G_1)^{-1}g - (G_1)^{-1}G_2\mu_2$$

Se W_R tem posto coluna completo, então, $W_R'W_R$ é

não singular e os estimadores de mínimos quadrados de μ_1 e $\mu_2 = \mu_R$ são dados de modo únicos por:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1 &= (G_1)^{-1}g - (G_1)^{-1}G_2\tilde{\mu}_2 \\ \tilde{\mu}_2 &= \hat{\mu}_R = (W_R'W_R)^{-1}W_R'y_R\end{aligned}$$

e portanto, o delineamento é conexo.

De modo inverso, como conectividade é sinônimo de estimabilidade, então se o delineamento é conexo, logo, existe uma matriz A, tal que,

$$E[A'y_R] = A'E[y_R] = A'W_R\mu_R = \mu_R \Rightarrow (A'W_R - I_{(abc-s)})\mu_R = 0,$$

$$\forall \mu_R \Rightarrow A'W_R - I_{(abc-s)} = 0,$$

onde, $(abc-s) = r[I_{(abc-s)}] = r[A'W_R] \leq r[W_R] \leq (abc-s)$

Portanto, se o delineamento é conexo, então, conclui-se que W_R tem posto coluna completo $(abc - s)$.

Similarmente, no caso de delineamento conexo, as estimativas de μ_1 , μ_2 e σ^2 permanecem tal como em [4.3.3.8], [4.3.3.9] e [4.3.3.10], respectivamente. A distribuição de s^2 pode ser determinada por [4.3.3.13] e, mesmo com as caselas vazias, não há diminuição dos graus de liberdade.

Agora, se W_R não tem posto coluna completo, então, deve-se proceder da seguinte maneira:

(a) - Retornar ao modelo efetivo ou;

(b) - Eliminar $(m-t)$ colunas em W_R , onde t é o posto de G_{mm} , de modo que, a matriz resultante tenha posto coluna completo.

Considerando-se o caso (b), para eliminar as colunas de W_R , se atribuirmos o valor zero para os parâmetros correspondentes, então os componentes restantes de $\mu_R = \mu_2$ são estimados da maneira usual por [4.3.3.9] e μ_1 é estimado por [4.3.3.8].

Na prática, este procedimento é o mais usado quando se trabalha com o modelo reduzido, pois, fornece estimativas não-viciada para as médias de caselas ocupadas e também para algumas caselas vazias que são estimadas através da relação existente em [4.3.4.7]. O restante das caselas vazias não é estimável. Entretanto, sem a decomposição em [4.3.4.4], não se pode distinguir entre estes dois grupos de caselas vazias.

Portanto, quando o delineamento é desconexo, o procedimento (b) deve ser usado com muito mais cuidado. A análise através do modelo efetivo evita tais dificuldades.

Finalmente, nota-se que a estimativa de σ^2 no caso desconexo, pode ser obtida de maneira usual ao modelo reduzido com a eliminação das colunas. Os graus de liberdade associados à soma de quadrados do resíduo são dados agora por $[N-abc+s+(m-t)]$, os quais, corresponde ao resultado do modelo efetivo.

Embora, o uso de modelo reduzido apresente vantagens computacionais na obtenção de soluções práticas, infelizmente, fornece dificuldades em relação a notação no

desenvolvimento teórico, exigindo a identificação de uma submatriz G_1 não singular.

Assim, será vista a seguir uma maneira mais conveniente de trabalhar, tanto do ponto de vista teórico, quanto do ponto de vista computacional. Este procedimento, denominado formas canônicas, consiste em obter um novo conjunto de parâmetros, o qual, seja uma função linear das médias de caselas através da transformação(reparametrização) do modelo de médias em formas canônicas.

Com a transformação, obtém-se um novo modelo com as mesmas características dos modelos de médias, mas sem as dificuldades de notação, com a mesma dimensão do modelo reduzido, além de permitir expressar os parâmetros do modelo em termos dos efeitos principais.

4.3.5. Formas Canônicas

Como foi comentado, as formas canônicas são obtidas através da transformação em um novo conjunto de parâmetros. Existem várias formas de se fazer essa transformação. Entretanto, neste trabalho, enfocou-se aquela de uso mais comum entre os pesquisadores, que consiste em exprimir os parâmetros em termos de efeitos principais e interações.

A maneira mais comum para se obter as formas

canônicas é definir os novos parâmetros como desvios entre as médias marginais e a média geral. Assim, aplicando-se a transformação (reparametrização) no modelo de médias para três fatores definido em [4.3.1.1], obtém-se os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}\mu^* &= \bar{\mu}_{...} \\ \alpha_i^* &= \bar{\mu}_{i..} - \bar{\mu}_{...} \quad i=1, \dots, a-1 \\ \beta_j^* &= \bar{\mu}_{.j.} - \bar{\mu}_{...} \quad j=1, \dots, b-1 \\ \gamma_k^* &= \bar{\mu}_{...k} - \bar{\mu}_{...} \quad k=1, \dots, c-1\end{aligned} \quad [4.3.5.1]$$

O vetor de parâmetros θ^* do novo modelo será dada por:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \mu^* \\ \alpha_i^* \\ \beta_j^* \\ \gamma_k^* \end{bmatrix} \quad [4.3.5.2]$$

Como as formas canônicas tem as mesmas características do modelo reduzido e, portanto, equivalentes, pode-se escrever que:

$$E[y] = X^* \theta^* \quad [4.3.5.3]$$

sendo X^* a matriz de delineamento (reparametrizado), expressa por:

$$\mathbb{X}^* = W\mathbb{X}_0 P^* \quad [4.3.5.4]$$

onde,

W é a matriz de contagem, tal que, $W = \text{Diag}(J_{n_{ijk}})$;

$\mathbb{X}_0$ é a matriz de delineamento (sem a reparametrização), tal que,

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_0 &= [J_{abc} | I_a \otimes J_b \otimes J_c | J_a \otimes I_b \otimes J_c | J_a \otimes J_b \otimes I_c] \\ P^* &= \text{diag}(1, \Delta'_{a-1}, \Delta'_{b-1}, \Delta'_{c-1}) \quad \text{com} \\ \Delta'_{a-1} &= (I_{a-1} | -J_{a-1}) \\ \Delta'_{b-1} &= (I_{b-1} | -J_{b-1}) \\ \Delta'_{c-1} &= (I_{c-1} | -J_{c-1}) \end{aligned} \quad [4.3.5.5]$$

É importante ressaltar que as formas canônicas foram desenvolvidas, principalmente, devido às conveniências de notações e computacionais. Entretanto, matematicamente, elas são equivalentes ao modelo reduzido. Portanto, se as formas canônicas são usadas, é essencial que as relações entre os parâmetros θ^* e μ sejam especificadas como em [4.3.5.1].

Dessa forma, pode-se estabelecer a relação existente entre modelo de médias e modelo com restrição - Σ de completo (modelo reparametrizado) definido em [4.2.1.2], já que eles são, simplesmente, um caso particular das formas canônicas.

Portanto, considerando-se todos esses aspectos

e mais a relação $\mu = X_o P^* \theta^*$, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} E[y] &= X^* \theta^* \\ &= W X_o P^* \theta^* \\ &= W \mu \end{aligned} \quad [4.3.5.6]$$

Tem-se enfatizado que a ocorrência de caselas vazias não causam nenhum problema ao modelo de médias irrestrito, já que, as caselas vazias, simplesmente, não podem ser estimadas. Mas, no modelo restrito isto se modifica, uma vez que pode-se estimar as médias das caselas vazias através das relações existentes entre as médias das caselas ocupadas.

Assim, introduzida a idéia das formas canônicas, será mostrado como as relações existentes entre as médias, poderão permitir estimar as caselas vazias nos novos parâmetros definidos em [4.3.5.2].

Devido a exata equivalência existente entre o modelo reduzido e as formas canônicas, de acordo com HOCKING(1985), os resultados do teorema 1, podem ser aplicados também para as formas canônicas.

Teorema 2: O delineamento na sua forma canônica, é conexo se e só se a matriz X^* é de posto completo, neste caso, $(a + b + c - 2)$.

Através deste teorema, pode-se constatar que, mesmo existindo caselas vazias ($n_{ijk} = 0$), a matriz X^* pode ainda ter posto completo, já que a conexão depende da posição das caselas vazias, e portanto, estas caselas vazias poderão ser estimadas.

Agora, se X^* tem posto incompleto, e portanto, desconexo, segundo o mesmo autor, tem-se duas alternativas:

- 1 - pode-se subdividir em grupos conexos e fazer as análises separadamente para cada subgrupo ou;
- 2 - fazer as análises através do modelo efetivo.

4.3.6. Teste de Hipóteses Lineares no Modelo de Médias Com Interações: $n_{ijk} > 0$

Para testar as hipóteses associadas aos efeitos principais e interações, considera-se a hipótese geral definida em [3.3.4.1], com a adaptação para o modelo de médias. Assim, a hipótese geral associada ao conjunto de parâmetros é definida da seguinte forma:

$$H_0: H'\mu = h \quad [4.3.6.1]$$

onde,

H é uma matriz conhecida e h um vetor também conhecido (é comum adotar $h = 0$);

μ é o vetor de parâmetros μ_{ijk} desconhecidos.

Quando os elementos de $H'\mu$ são todos ou, conjuntamente estimáveis, então, a hipótese $H_0: H'\mu = h$ é dita testável. Sendo assim, a estatística F para testar $H_0: H'\mu = h$ é dada por:

$$F(H_0) = N_H / [r(HD) s^2] \quad [4.3.6.2]$$

onde,

$$N_H = (H'\hat{\mu} - h)' [H'(W'W)^{-1}H]^{-1} (H'\hat{\mu} - h);$$

$$r(HD) = \text{posto de } H;$$

$$s^2 = \frac{y'[I - W(W'W)^{-1}W']y}{(N - abc)} = \frac{Q(\hat{\mu})}{(N - abc)} = \frac{SQRes}{(N - abc)}$$

1 - Teste para a interação tripla

Para testar a interação tripla, a hipótese é descrita por:

$$H_0: H'_{ABC}\mu = (\Delta_{a-1} \otimes \Delta_{b-1} \otimes \Delta_{c-1})\mu = 0 \quad [4.3.6.3]$$

onde,

$$\begin{aligned}\Delta_{a-1} &= (I_{a-1} \mid -J_{a-1}); \\ \Delta_{b-1} &= (I_{b-1} \mid -J_{b-1}); \\ \Delta_{c-1} &= (I_{c-1} \mid -J_{c-1}).\end{aligned}$$

ou de modo equivalente,

$$H_o : \bar{\mu}_{ijk} + \bar{\mu}_{ajc} + \bar{\mu}_{ibc} + \bar{\mu}_{abk} - \bar{\mu}_{ajk} - \bar{\mu}_{ibk} -$$

$$- \bar{\mu}_{ijc} - \bar{\mu}_{abc} = 0 ,$$

para $i=1, \dots, a-1$; $j=1, \dots, b-1$; $k=1, \dots, c-1$

2 - Teste para a interação dupla

Para testar a interação dupla, são definidas as seguintes hipóteses:

$$(i) \quad H_o : H'_{AB} \mu = [\Delta_{a-1} \otimes \Delta_{b-1} \otimes (1/c)J'_c] \mu = 0 \quad [4.3.6.4]$$

$$(ii) \quad H_o : H'_{AC} \mu = [\Delta_{a-1} \otimes (1/b)J'_b \otimes \Delta_{c-1}] \mu = 0 \quad [4.3.6.5]$$

$$(iii) \quad H_o : H'_{BC} \mu = [(1/a)J'_a \otimes \Delta_{b-1} \otimes \Delta_{c-1}] \mu = 0 \quad [4.3.6.6]$$

ou de modo equivalente,

$$(i) \quad H_o : \bar{\mu}_{ij.} - \bar{\mu}_{aj.} - \bar{\mu}_{ib.} + \bar{\mu}_{ab.} = 0$$

$$(ii) \quad H_o : \bar{\mu}_{i.k} - \bar{\mu}_{a.k} - \bar{\mu}_{i.c} + \bar{\mu}_{a.c} = 0$$

$$(iii) \quad H_o : \bar{\mu}_{.jk} - \bar{\mu}_{.bk} - \bar{\mu}_{.jc} + \bar{\mu}_{.bc} = 0$$

para $i=1, \dots, a-1$; $j=1, \dots, b-1$; $k=1, \dots, c-1$.

3 - Teste para os efeitos principais

Para testar os efeitos principais, são definidas as seguintes hipóteses:

$$(i) \quad H_o : H'_A \mu = [\Delta_{a-1} \otimes (1/b) J'_b \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0 \quad [4.3.6.7]$$

$$(ii) \quad H_o : H'_B \mu = [(1/a) J'_a \otimes \Delta_{b-1} \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0 \quad [4.3.6.8]$$

$$(iii) \quad H_o : H'_C \mu = [(1/a) J'_a \otimes (1/b) J'_b \otimes \Delta_{c-1}] \mu = 0 \quad [4.3.6.9]$$

ou de modo equivalente,

$$(i) \quad H_o : \bar{\mu}_{i..} - \bar{\mu}_{a..} = 0$$

$$(ii) \quad H_o : \bar{\mu}_{.j.} - \bar{\mu}_{.b.} = 0$$

$$(iii) \quad H_o : \bar{\mu}_{..k} - \bar{\mu}_{..c} = 0$$

para $i=1, \dots, a-1$; $j=1, \dots, b-1$; $k=1, \dots, c-1$

Uma vez obtidas as hipóteses referentes aos efeitos principais e as interações, pode-se aplicar a estatística F definida em [4.3.6.2] para testar essas hipóteses:

$$(i) \quad F(H_A) = N_A / [(a-1)s^2] \quad [4.3.6.10]$$

$$N_A = (H'_A \hat{\mu})' [H'_A (W'W)^{-1} H_A]^{-1} (H'_A \hat{\mu})$$

$$(ii) \quad F(H_B) = N_B / [(b-1)s^2] \quad [4.3.6.11]$$

$$N_B = (H'_B \hat{\mu})' [H'_B (W'W)^{-1} H_B]^{-1} (H'_B \hat{\mu})$$

$$(iii) \quad F(H_C) = N_C / [(c-1)s^2] \quad [4.3.6.12]$$

$$N_C = (H'_C \hat{\mu})' [H'_C (W'W)^{-1} H_C]^{-1} (H'_C \hat{\mu})$$

$$(iv) \quad F(H_{AB}) = N_{AB} / [(a-1)(b-1)s^2] \quad [4.3.6.13]$$

$$N_{AB} = (H'_{AB} \hat{\mu})' [H'_{AB} (W'W)^{-1} H_{AB}]^{-1} (H'_{AB} \hat{\mu})$$

$$(v) \quad F(H_{AC}) = N_{AC} / [(a-1)(c-1)s^2] \quad [4.3.6.14]$$

$$N_{AC} = (H'_{AC} \hat{\mu})' [H'_{AC} (W'W)^{-1} H_{AC}]^{-1} (H'_{AC} \hat{\mu})$$

$$(vi) \quad F(H_{BC}) = N_{BC} / [(b-1)(c-1)s^2] \quad [4.3.6.15]$$

$$N_{BC} = (H'_{BC} \hat{\mu})' [H'_{BC} (W'W)^{-1} H_{BC}]^{-1} (H'_{BC} \hat{\mu})$$

$$(vii) \quad F(H_{ABC}) = N_{ABC} / [(a-1)(b-1)(c-1)s^2] \quad [4.3.6.16]$$

$$N_{ABC} = (H'_{ABC} \hat{\mu})' [H'_{ABC} (W'W)^{-1} H_{ABC}]^{-1} (H'_{ABC} \hat{\mu})$$

E pode-se constatar que as hipóteses testadas no modelo de médias com interações e todas as caselas ocupa-

das, são equivalentes às hipóteses testadas pelo Método das Médias Quadráticas Ponderadas.

4.3.7. Quadro de Análise da Variância

Análise da Variância				
C. V	GL	SQ	QM	F
fator A	a-1	N_A	QM_A	$QM_A / QMRes$
fator B	b-1	N_B	QM_B	$QM_B / QMRes$
fator C	c-1	N_C	QM_C	$QM_C / QMRes$
int. A*B	(a-1)(b-1)	N_{AB}	QM_{AB}	$QM_{AB} / QMRes$
int. A*C	(a-1)(c-1)	N_{AC}	QM_{AC}	$QM_{AC} / QMRes$
int. B*C	(b-1)(c-1)	N_{BC}	QM_{BC}	$QM_{BC} / QMRes$
int. A*B*C	(a-1)(b-1)(c-1)	N_{ABC}	QM_{ABC}	$QM_{ABC} / QMRes$
Resíduo	$N - abc$	$y'y - \hat{\mu}'W'y$	$QMRes$	

4.3.8. Teste de Hipóteses Lineares no Modelo de Médias Sem Interações: $n_{ijk} > 0$

Para testar as hipóteses referentes ao conjunto de parâmetros no modelo de médias com restrição, ou seja, modelo reduzido devido a restrição de não interações, o procedimento geral é o mesmo daquele adotado para o caso com interações:

$$H_0: H'\mu = h \quad [4.3.8.1]$$

Se todos os elementos de $H'\mu$ são todos ou conjuntamente estimáveis, então, a hipótese é dita testável. Assim, a estatística F para testar a hipótese $H_0: H'\mu = h$ é dada por:

$$F(H_0) = N_H / [r(H)S^2] \quad [4.3.8.2]$$

onde,

$$N_H = Q_{RR}(\hat{\mu}_{RR}) - Q_R(\hat{\mu}_R) ;$$

com $Q_R(\hat{\mu}_R) = (y_R - W_R \hat{\mu}_R)'(y_R - W_R \hat{\mu}_R)$, obtida através da incorporação da restrição $G\mu = g$ no modelo ;

e $Q_{RR}(\hat{\mu}_{RR}) = (y_{RR} - W_{RR} \hat{\mu}_{RR})'(y_{RR} - W_{RR} \hat{\mu}_{RR})$ é obtida através das incorporações simultânea das restrições $G\mu = g$ e da hipótese $H'\mu = h$ no modelo.

Assim, as hipóteses testadas no modelo de médias sem interações são dadas por:

$$(i) \quad H_0: H'_A \mu = 0 \iff H_0: \mu_{i..} = \mu_{i'..} \quad [4.3.8.3]$$

$$(ii) \quad H_0: H'_B \mu = 0 \iff H_0: \mu_{.j.} = \mu_{.j'.} \quad [4.3.8.4]$$

$$(iii) \quad H_0: H'_C \mu = 0 \iff H_0: \mu_{..k} = \mu_{..k'} \quad [4.3.8.5]$$

Uma outra forma e talvez a mais interessante, é trabalhar com o modelo reduzido na sua forma canônica apresentada na seção 4.3.5.

Viu-se que as formas canônicas tem as mesmas características do modelo de médias, a mesma dimensão do modelo reduzido, além de permitir expressar os parâmetros do modelo em termos de efeitos principais.

Sendo assim, considerando-se o modelo sem interações na sua forma canônica, que é equivalente ao modelo com restrição - Σ , pode-se utilizar o Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa para testar as seguintes hipóteses:

$$(i) \quad H_0: H'_A \mu = 0 \iff H_0: e^*_{\alpha} = 0 \quad [4.3.8.6]$$

$$(ii) \quad H_0: H'_B \mu = 0 \iff H_0: e^*_{\beta} = 0 \quad [4.3.8.7]$$

$$(iii) \quad H_0: H'_C \mu = 0 \iff H_0: e^*_{\gamma} = 0 \quad [4.3.8.8]$$

4.3.9. Quadro de Análise da Variância

Análise da Variância

CV	GL	SQ	QM	F
α^* ajust.	a-1	$RC(\alpha^* \mu^*, \beta^*, \gamma^*)$	QM_A	$QM_A / QMRes$
β^* ajust.	b-1	$RC(\beta^* \mu^*, \alpha^*, \gamma^*)$	QM_B	$QM_B / QMRes$
γ^* ajust.	c-1	$RC(\gamma^* \mu^*, \alpha^*, \beta^*)$	QM_C	$QM_C / QMRes$
Resíduo	N-a-b-c+2	$y'y - RC(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$	QMRes	

4.3.10. Caselas Vazias e Hipóteses Efetivas

Na seção 4.3.4 foi visto que a ocorrência de caselas vazias ($n_{ijk} = 0$), em nada alteram a obtenção das estimativas no modelo de médias com interações, já que elas podem ser, simplesmente, eliminadas da análise. Neste caso, as hipóteses a serem testadas são formuladas apenas com as caselas ocupadas.

Entretanto, segundo HOCKING(1985), o problema que surge na prática é que certas hipóteses podem ser de interesse e essas hipóteses deverão ser formuladas em termos

de todas as populações. Como tais hipóteses não podem mais ser testadas pela falta de observações sobre algumas das populações, é interessante fazer um ajuste na hipótese original de modo que se possa tirar o máximo de informações, considerando-se os efeitos que estão sendo analisados.

No modelo com restrição de não interação a situação se altera, já que, nos casos conexos, as médias das caselas vazias podem ser, em muitos casos, estimadas através da imposição de restrições. E isto pode ocorrer com as hipóteses de interesse, que serão testadas mesmo quando colocadas em termos das médias não observadas.

Segundo o mesmo autor, neste caso, deve-se identificar que hipóteses originais são testáveis nestas situações e, caso exista alguma que não seja, determinar alternativas mais razoáveis. Aqui, será dado ênfase apenas aos modelos com restrição de não interação e alguns resultados, simplesmente, estendidos aos modelos com interações.

O procedimento a ser desenvolvido na obtenção de tais hipóteses ajustadas, dadas às circunstâncias de disponibilidade de dados, será baseado no conceito de modelo efetivo introduzido na seção 4.3.4 e definido por:

$$y = W_o \mu_o + \varepsilon \quad [4.3.10.1]$$

sujeito à restrição $G_E \mu_o = g_E \quad [4.3.10.2]$

onde,

as médias correspondentes as caselas vazias estão relacionadas à μ_o através de:

$$G_{mm} \mu_m + G_{mo} \mu_o = g_m \quad [4.3.10.3]$$

E de acordo com HOCKING(1985), para definir as hipóteses efetivas correspondentes à hipótese original $H_o: H'\mu = h$, deve-se particioná-la da seguinte forma:

$$H_o: H'_m \mu_m + H'_o \mu_o = h \quad [4.3.10.4]$$

No modelo com restrição de não interação, como visto anteriormente, tem-se dois casos a considerar: o conexo e o desconexo.

(i) - Caso conexo. Se o delineamento é conexo, supõem-se $G_{mm} = I$. Neste caso, substituindo-se [4.3.10.3] em [4.3.10.4], obtém-se a hipótese efetiva considerando-se apenas as médias das caselas ocupadas.

$$\begin{aligned}
H'_m(g_m - G_{m0}\mu_0) + H'_0\mu_0 &= h \\
(H'_0 - H'_m G_{m0})\mu_0 &= h - H'_m g_m \quad [4.3.10.5] \\
\tilde{H}'\mu_0 &= \tilde{g}
\end{aligned}$$

(ii) - Caso desconexo. Agora se o delineamento é desconexo, supõem-se $G_{mm} \neq I$, pois a matriz G_{mm} é singular e, portanto, expressa na forma $G_{mm} = [I_{(t)} \mid C]$, onde C é uma matriz de dimensão $t \times (m-t)$. Assim, [4.3.10.3] pode ser escrita como:

$$\mu_{m1} + C\mu_{m2} + G_{m0}\mu_0 = g_m \quad [4.3.10.6]$$

onde,

μ_{m1} e μ_{m2} são as partições de μ_m de dimensões t e $(m-t)$, respectivamente.

Fazendo a mesma partição para H' , obtém-se:

$$H' = [H'_{m1} \mid H'_{m2} \mid H'_0] \quad [4.3.10.7]$$

logo, a hipótese original pode ser colocada na forma:

$$H'_{m1}\mu_{m1} + H'_{m2}\mu_{m2} + H'_0\mu_0 = h \quad [4.3.10.8]$$

e, substituindo em [4.3.10.6], obtém-se:

$$(H'_{m2} - H'_{m1} C) \mu_{m2} + (H'_o - H'_{m1} G_{mo}) \mu_o = h - H'_{m1} g_m \quad [4.3.10.9]$$

podendo reescrever [4.3.10.9] na forma:

$$H_m^* \mu_{m2} + H_o^* \mu_o = h^* \quad [4.3.10.10]$$

e, aplicando às operações de redução das linhas, como no desenvolvimento das restrições efetivas em [4.3.4.4], obtém-se a hipótese efetiva através da eliminação das linhas envolvendo as caselas vazias.

$$H^* = [H_m^* | H_o^*] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} H_{mm}^* & H_{mo}^* \\ \hline \dots & \dots \\ \emptyset & H_E^* \end{array} \right] \text{ e } h^* = \begin{bmatrix} h_m^* \\ \dots \\ h_E^* \end{bmatrix} \quad [4.3.10.11]$$

A fim de finalizar as idéias desenvolvidas sobre as hipóteses efetivas, a seguir, considera-se a definição que sumariza esses resultados.

Definição 3: Para o caso geral de caselas vazias, a hipótese efetiva é definida por:

$$H_E^* \mu_o = h_E^* \quad [4.3.10.12]$$

Observa-se que no caso de modelo com interações, o desenvolvimento de H'_E inicia-se em [4.3.10.11], e as operações de redução das linhas são aplicados em H' , ao invés de em H^{*} .

Em geral, o posto de H'_E é menor do que H' e, portanto, a hipótese efetiva é testada apenas sobre uma parte da hipótese original. Uma característica interessante das hipóteses efetivas é que, se [4.3.10.12] não for aceita, a hipótese original $H_0: H'\mu = h$ também não o será.

No caso conexo, a hipótese efetiva é dada por [4.3.10.5] e a redução de linhas em [4.3.10.11] é desnecessária. Observe também que a matriz dos coeficientes de μ em [4.3.10.5] tem o mesmo posto de H , sendo portanto, equivalente à hipótese original.

O teorema seguinte, dado por HOCKING(1985), enfatiza esse fato.

Teorema 3: Se o delineamento é conexo, qualquer hipótese que tenha sido planejada para o experimento com $n_{ijk} > 0$, pode ser testada.

Esse teorema evidencia que, se o delineamento é conexo, a mesma análise planejada para o caso de todas as

caselas ocupadas, pode ser usada mesmo que existam caselas vazias e, neste caso, as hipóteses não precisam ser alteradas.

Se o delineamento é desconexo, ainda é possível testar algumas hipóteses de interesse. A condição para que isto seja verdade é que em [4.3.10.9],

$$H'_{m2} - H'_{m1} C = \emptyset \quad [4.3.10.13]$$

Neste caso, a hipótese é dada por:

$$(H'_o - H'_{m1} G_{mo}) \mu_o = h - H'_{m1} g_m \quad [4.3.10.14]$$

Agora, se o delineamento é desconexo e a condição [4.3.10.14] não for verdadeira, então, o pesquisador deve decidir por uma outra análise apropriada. A hipótese efetiva é a candidata natural. Entretanto, o pesquisador deve tomar muito cuidado, uma vez que, as hipóteses efetivas podem mutilar seriamente a hipótese original.

E finalmente, determina-se a estatística F que testa a hipótese da forma $\tilde{H}' \mu_o = \tilde{g}$, onde $(\tilde{H}' = H'_o - H'_{m1} G_{mo})$. Se $\tilde{H}' \mu_o$ é estimável, então, sob a suposição de normalidade,

a hipótese pode ser testada por:

$$F = \frac{N(\tilde{H})/r(H')}{s^2} \quad [4.3.10.15]$$

onde,

$$N(\tilde{H}) = (\tilde{H}'\tilde{\mu}_o - \tilde{g})'(\tilde{H}'\tilde{V}\tilde{H})^{-1}(\tilde{H}'\tilde{\mu}_o - \tilde{g})$$

$r(H')$ = posto de H' da hipótese original

$$\tilde{V} = (W_o'W_o)^{-1} - [G_E(W_o'W_o)^{-1}][G_E(W_o'W_o)^{-1}G_E']^{-1}[G_E(W_o'W_o)^{-1}]$$

$$s^2 = s_{oR}^2 = \frac{\alpha(\hat{\mu}_{oR})}{[N - r(W_{oR})]} .$$

E para o caso de delineamento desconexo, a expressão da estatística F é a mesma de [4.3.10.15], apenas substituindo $\tilde{H}'$ por H_E^* .

4.4. Exemplo Numérico Para o modelo Superparametrizado

Com o objetivo de melhor exemplificar a metodologia proposta, foram considerados os dados provenientes de um experimento fictício associados à três fatores.

Tabela 1 - Dados de um experimento com três fatores

i = nível do fator A	k = nível do fator C			
	1		2	
	j=nível do fator B		j=nível do fator B	
	1	2	1	2
1	7	6	3	4
	8	-	4	4
	9	-	5	-
2	8	4	7	5
	-	6	6	4
	-	8	-	5

4.4.1. Modelo sem Interações

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijkl}$$

$$i = 1, 2 \quad ; \quad j = 1, 2$$

$$k = 1, 2 \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, n_{ijk}$$

4.4.2. Modelo Linear $y = X\theta + \varepsilon$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{222} \end{bmatrix}$$

y
 X
 θ
 ε

4.4.3. Restrição - Σ

$$\sum_i \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\sum_j \beta_j = 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -\beta_1$$

$$\sum_k \gamma_k = 0 \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -\gamma_1$$

Aplicando-se estas restrições diretamente nas equações do modelo $y = X\theta + \varepsilon$, obtém-se a seguinte configuração para o modelo com restrição - Σ .

$$y = \begin{matrix} & \mu^* & \alpha_1^* & \beta_1^* & \gamma_1^* \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] & \begin{bmatrix} \mu^* \\ \alpha_1^* \\ \beta_1^* \\ \gamma_1^* \\ \theta^* \end{bmatrix} & + \varepsilon \end{matrix}$$

X^*

4.4.4. Sistema de Equações Normais ($X^* X^* e^* = X^* y$)

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 18 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \alpha_1^* \\ \beta_1^* \\ \gamma_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103 \\ -3 \\ -11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Como X^* é de posto completo, o sistema de equações normais $X^* X^* e^* = X^* y$ tem solução única dada por $\hat{e}^* = (X^* X^*)^{-1} X^* y$, onde:

$$(X^* X^*)^{-1} = \begin{array}{c} \mu^* \qquad \qquad \alpha_1^* \qquad \qquad \beta_1^* \qquad \qquad \gamma_1^* \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0,0562500 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0,0625000 & \dots & \dots \\ \dots & -0,0208333 & 0,0625000 & \dots \\ \dots & 0,0000000 & 0,0000000 & 0,0562500 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\hat{e}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mu}^* \\ \hat{\alpha}_1^* \\ \hat{\beta}_1^* \\ \hat{\gamma}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,85 \\ -0,416667 \\ 0,75 \\ 1,15 \end{bmatrix}$$

4.4.5. Somas de Quadrados da Análise de Variância

$$R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = \hat{e}^{*'} X^* y = 622,4$$

$$SQRes = y'y - R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = 643 - 622,4 = 20,6$$

$$\begin{aligned}
 R(\alpha^* | \mu^*, \beta^*, \gamma^*) &= \hat{\theta}_{\alpha}^*, T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha}^* \\
 &= [-0,416667] [0,0625]^{-1} [-0,416667] \\
 &= 2,777782
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(\beta^* | \mu^*, \alpha^*, \gamma^*) &= \hat{\theta}_{\beta}^*, T_{\beta\beta}^{-1} \hat{\theta}_{\beta}^* \\
 &= [0,75] [0,0625]^{-1} [0,75] \\
 &= 9,0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(\gamma^* | \mu^*, \alpha^*, \beta^*) &= \hat{\theta}_{\gamma}^*, T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\gamma}^* \\
 &= [1,15] [0,05625]^{-1} [1,15] \\
 &= 23,511111
 \end{aligned}$$

4.4.6. Quadro de Análise da Variância

Análise da Variância

CV	GL	SQ	QM	F
α^* ajust.	1	2,77778	2,77778	1,8878 ^(n.s)
β^* ajust.	1	9,0	9,0	6,1165 ^(*)
γ^* ajust.	1	23,51111	23,51111	15,9784 ^(**)
Resíduo	14	20,6	1,47143	

4.4.7. Modelo com Interações

$$\begin{aligned}
 y_{ijkl} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + \\
 &\quad + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \\
 i &= 1, 2 \quad ; \quad j = 1, 2 \quad ; \quad k = 1, 2 \quad ; \\
 l &= 1, 2, \dots, n_{ijk}
 \end{aligned}$$

4.4.8. Modelo Linear $y = X\theta + \varepsilon$

Particionando a matriz X e o vetor de parâmetro θ de acordo com os efeitos principais e interações, o modelo $y = X\theta + \varepsilon$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$y = X_1 \theta_1 + X_2 \theta_2 + X_3 \theta_3 + X_4 \theta_4 + X_5 \theta_5 + \varepsilon$$

onde,

$$X_1 = [X_\mu | X_\alpha | X_\beta | X_\gamma] ; X_2 = [X_{\alpha\beta}] ; X_3 = [X_{\alpha\gamma}] ; X_4 = [X_{\beta\gamma}]$$

e $X_5 = [X_{\alpha\beta\gamma}]$

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} ; \theta_2 = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)_{11} \\ (\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{21} \\ (\alpha\beta)_{22} \end{bmatrix} ; \theta_3 = \begin{bmatrix} (\alpha\gamma)_{11} \\ (\alpha\gamma)_{12} \\ (\alpha\gamma)_{21} \\ (\alpha\gamma)_{22} \end{bmatrix} ; \theta_4 = \begin{bmatrix} (\beta\gamma)_{11} \\ (\beta\gamma)_{12} \\ (\beta\gamma)_{21} \\ (\beta\gamma)_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \theta_5 = \begin{bmatrix} (\alpha\beta\gamma)_{111} \\ (\alpha\beta\gamma)_{112} \\ (\alpha\beta\gamma)_{121} \\ (\alpha\beta\gamma)_{122} \\ (\alpha\beta\gamma)_{211} \\ (\alpha\beta\gamma)_{212} \\ (\alpha\beta\gamma)_{221} \\ (\alpha\beta\gamma)_{222} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix} +$$

y
 $\mathcal{X}_1$

$$\begin{aligned}
& + \begin{array}{c} \alpha\beta_{11} \quad \alpha\beta_{12} \quad \alpha\beta_{21} \quad \alpha\beta_{22} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (\alpha\beta)_{11} \\ (\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{21} \\ (\alpha\beta)_{22} \end{array} \right] \\ \Theta_2 \end{array} + \\
& \begin{array}{c} \alpha\gamma_{11} \quad \alpha\gamma_{12} \quad \alpha\gamma_{21} \quad \alpha\gamma_{22} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (\alpha\gamma)_{11} \\ (\alpha\gamma)_{12} \\ (\alpha\gamma)_{21} \\ (\alpha\gamma)_{22} \end{array} \right] \\ \Theta_3 \end{array} + \\
& \begin{array}{c} \mathbb{X}_2 \\ \mathbb{X}_3 \end{array}
\end{aligned}$$

4.4.9. Restrição - Σ

$$\sum_i \alpha_i = 0 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\sum_j \beta_j = 0 \rightarrow \beta_1 + \beta_2 = 0 \rightarrow \beta_2 = -\beta_1$$

$$\sum_k \gamma_k = 0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \rightarrow \gamma_2 = -\gamma_1$$

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha \beta_{ij} = 0 &\Rightarrow \alpha \beta_{11} + \alpha \beta_{21} = 0 \Rightarrow \alpha \beta_{21} = -\alpha \beta_{11} \\ &\Rightarrow \alpha \beta_{12} + \alpha \beta_{22} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_j \alpha \beta_{ij} = 0 &\Rightarrow \alpha \beta_{11} + \alpha \beta_{12} = 0 \Rightarrow \alpha \beta_{12} = -\alpha \beta_{11} \\ &\rightarrow \alpha \beta_{21} + \alpha \beta_{22} = 0 \Rightarrow \alpha \beta_{22} = -\alpha \beta_{21} = \alpha \beta_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha \gamma_{ik} = 0 &\rightarrow \alpha \gamma_{11} + \alpha \gamma_{21} = 0 \rightarrow \alpha \gamma_{21} = -\alpha \gamma_{11} \\ &\Rightarrow \alpha \gamma_{12} + \alpha \gamma_{22} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \alpha \gamma_{ik} = 0 &\Rightarrow \alpha \gamma_{11} + \alpha \gamma_{12} = 0 \Rightarrow \alpha \gamma_{12} = -\alpha \gamma_{11} \\ &\Rightarrow \alpha \gamma_{21} + \alpha \gamma_{22} = 0 \Rightarrow \alpha \gamma_{22} = -\alpha \gamma_{21} = \alpha \gamma_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_j \beta \gamma_{jk} = 0 &\Rightarrow \beta \gamma_{11} + \beta \gamma_{21} = 0 \Rightarrow \beta \gamma_{21} = -\beta \gamma_{11} \\ &\rightarrow \beta \gamma_{12} + \beta \gamma_{22} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \beta \gamma_{jk} = 0 &\Rightarrow \beta \gamma_{11} + \beta \gamma_{12} = 0 \Rightarrow \beta \gamma_{12} = -\beta \gamma_{11} \\ &\Rightarrow \beta \gamma_{21} + \beta \gamma_{22} = 0 \Rightarrow \beta \gamma_{22} = -\beta \gamma_{21} = \beta \gamma_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha \beta \gamma_{ijk} = 0 &\Rightarrow \alpha \beta \gamma_{111} + \alpha \beta \gamma_{211} = 0 \Rightarrow \alpha \beta \gamma_{211} = -\alpha \beta \gamma_{111} \\ &\Rightarrow \alpha \beta \gamma_{112} + \alpha \beta \gamma_{212} = 0 \Rightarrow \alpha \beta \gamma_{112} = -\alpha \beta \gamma_{212} \\ &\Rightarrow \alpha \beta \gamma_{121} + \alpha \beta \gamma_{221} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha \beta \gamma_{122} + \alpha \beta \gamma_{222} = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_j \alpha\beta\gamma_{ijk} = 0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma_{111} + \alpha\beta\gamma_{121} = 0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma_{121} = -\alpha\beta\gamma_{111}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{112} + \alpha\beta\gamma_{122} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{211} + \alpha\beta\gamma_{221} = 0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma_{221} = -\alpha\beta\gamma_{211}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{212} + \alpha\beta\gamma_{222} = 0$$

$$\sum_k \alpha\beta\gamma_{ijk} = 0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma_{111} + \alpha\beta\gamma_{112} = 0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma_{112} = -\alpha\beta\gamma_{111}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{121} + \alpha\beta\gamma_{122} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{211} + \alpha\beta\gamma_{212} = 0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma_{212} = -\alpha\beta\gamma_{211}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{221} + \alpha\beta\gamma_{222} = 0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma_{222} = -\alpha\beta\gamma_{221}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{222} = -\alpha\beta\gamma_{221} = \alpha\beta\gamma_{211} = -\alpha\beta\gamma_{111}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{212} = -\alpha\beta\gamma_{211} = \alpha\beta\gamma_{111}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{112} = -\alpha\beta\gamma_{212} = -\alpha\beta\gamma_{111}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma_{112} = -\alpha\beta\gamma_{121} = \alpha\beta\gamma_{111}$$

Novamente, aplicando-se estas restrições nas equações do modelo $y = X\theta + \epsilon$, obtém-se a seguinte configuração para o modelo $y = X^* \theta^* + \epsilon$ de posto completo.

$$\mathbf{y} = \begin{matrix} & \mu^* & \alpha_1^* & \beta_1^* & \gamma_1^* & \alpha\beta_{11}^* & \alpha\gamma_{11}^* & \beta\gamma_{11}^* & \alpha\beta\gamma_{111}^* \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] & \begin{bmatrix} \mu^* \\ \alpha_1^* \\ \beta_1^* \\ \gamma_1^* \\ \alpha\beta_{11}^* \\ \alpha\gamma_{11}^* \\ \beta\gamma_{11}^* \\ \alpha\beta\gamma_{111}^* \\ \Theta^* \end{bmatrix} & + \quad \varepsilon
 \end{matrix}$$

$\mathcal{X}^*$

4.4.10. Sistema de Equações Normais ($X^* X^{*e*} = X^* y$)

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & -2 & 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & 6 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 18 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 18 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 18 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 6 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \alpha_1^* \\ \beta_1^* \\ \gamma_1^* \\ \alpha\beta_{11}^* \\ \alpha\gamma_{11}^* \\ \beta\gamma_{11}^* \\ \alpha\beta\gamma_{111}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103 \\ -3 \\ 11 \\ 9 \\ 33 \\ 11 \\ 5 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$(X^* X^*)^{-1} =$$

$$\begin{matrix} & \mu^* & \alpha_1^* & \beta_1^* & \gamma_1^* & \alpha\beta_{11}^* \\ = & \begin{bmatrix} 0,0677083 & 0 & 0 & 0,0156250 & -0,0260417 & 0 & 0 & -0,0156250 \\ 0 & 0,0677083 & -0,0260417 & 0 & 0 & 0,0156250 & -0,0156250 & 0 \\ 0 & -0,0260417 & 0,0677083 & 0 & 0 & -0,0156250 & 0,0156250 & 0 \\ 0,0156250 & 0 & 0 & 0,0677083 & -0,0156250 & 0 & 0 & -0,0260417 \\ -0,0260417 & 0 & 0 & -0,0156250 & 0,0677083 & 0 & 0 & 0,0156250 \\ 0 & 0,0156250 & -0,0156250 & 0 & 0 & 0,0677083 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0156250 & 0,0156250 & 0 & 0 & 0 & 0,0677083 & 0 \\ -0,0156250 & 0 & 0 & -0,0260417 & 0,0156250 & 0 & 0 & 0,0677083 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \alpha\gamma_{11}^* & \beta\gamma_{11}^* & \alpha\beta\gamma_{111}^* \\ & \begin{bmatrix} 0,0677083 & -0,0260417 & 0 \\ 0 & 0,0677083 & 0 \\ 0,0677083 & -0,0260417 & 0,0677083 \\ 0 & 0 & 0,0677083 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

Com a aplicação das restrições diretamente no modelo, a solução única do sistema de equações normais é dada por:

$$\hat{\theta}^* = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{\mu}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\alpha}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\beta}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\gamma}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\alpha\beta}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\alpha\gamma}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\beta\gamma}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\alpha\beta\gamma}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,8958288 \\ \dots \\ -0,3958336 \\ \dots \\ 0,7291664 \\ \dots \\ 1,1041656 \\ \dots \\ -0,2291712 \\ \dots \\ 0,3958328 \\ \dots \\ 0,2708328 \\ \dots \\ 0,2291656 \end{bmatrix}$$

4.4.11. Somas de Quadrados da Análise de Variância

$$\begin{aligned} RC(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*, \alpha\beta\gamma^*) &= \hat{\theta}^{*'} X^{*'} y = 629,833333 \equiv \\ &\equiv RC(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

$$SQRes = y'y - \hat{\theta}^{*'} X^{*'} y = 643 - 629,833333 = 13,166667$$

$$\begin{aligned} RC\alpha^* | \mu^*, \beta^*, \gamma^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*, \alpha\beta\gamma^* &= \hat{\theta}_{\alpha}^{*'} T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha}^* \\ &= [-0,3958336] [0,0677083]^{-1} [-0,3958336] \\ &= 2,3141068 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RC\beta^*|\mu^*,\alpha^*,\gamma^*,\alpha\beta^*,\alpha\gamma^*,\beta\gamma^*,\alpha\beta\gamma^*\rangle &= \hat{e}_{\beta}^*, T_{\beta\beta}^{-1} \hat{e}_{\beta}^* \\
&= [0,7291664] [0,0677083]^{-1} [0,7291664] \\
&= 7,8525622
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RC\gamma^*|\mu^*,\alpha^*,\beta^*,\alpha\beta^*,\alpha\gamma^*,\beta\gamma^*,\alpha\beta\gamma^*\rangle &= \hat{e}_{\gamma}^*, T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{e}_{\gamma}^* \\
&= [1,1041656] [0,0677083]^{-1} [1,1041656] \\
&= 18,00638435
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RC\alpha\beta^*|\mu^*,\alpha^*,\beta^*,\gamma^*,\alpha\gamma^*,\beta\gamma^*,\alpha\beta\gamma^*\rangle &= \hat{e}_{\alpha\beta}^*, T_{\alpha\beta}^{-1} \hat{e}_{\alpha\beta}^* \\
&= [-0,2291712] [0,0677083]^{-1} [-0,2291712] \\
&= 0,7756721
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RC\alpha\gamma^*|\mu^*,\alpha^*,\beta^*,\gamma^*,\alpha\beta^*,\beta\gamma^*,\alpha\beta\gamma^*\rangle &= \hat{e}_{\alpha\gamma}^*, T_{\alpha\gamma}^{-1} \hat{e}_{\alpha\gamma}^* \\
&= [0,3958328] [0,0677083]^{-1} [0,3958328] \\
&= 2,3140975
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RC\beta\gamma^*|\mu^*,\alpha^*,\beta^*,\gamma^*,\alpha\beta^*,\alpha\gamma^*,\alpha\beta\gamma^*\rangle &= \hat{e}_{\beta\gamma}^*, T_{\beta\gamma}^{-1} \hat{e}_{\beta\gamma}^* \\
&= [0,2708328] [0,0677083]^{-1} [0,2708328] \\
&= 1,08332963
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RC\alpha\beta\gamma^*|\mu^*,\alpha^*,\beta^*,\gamma^*,\alpha\beta^*,\alpha\gamma^*,\beta\gamma^*\rangle &= \hat{e}_{\alpha\beta\gamma}^*, T_{\alpha\beta\gamma}^{-1} \hat{e}_{\alpha\beta\gamma}^* \\
&= [0,2291656] [0,0677083]^{-1} [0,2291656] \\
&= 0,77563342
\end{aligned}$$

4.4.12. Quadro de Análise da Variância

Análise da Variância

CV	GL	SQ	QM	F
α^* ajust.	1	2,3141068	2,3141068	1,76 ^(n.s)
β^* ajust.	1	7,8525622	7,8525622	5,96 ^(*)
γ^* ajust.	1	18,0063843	18,0063843	13,67 ^(***)
$\alpha\beta^*$ ajust.	1	0,7756721	0,7756721	0,59 ^(n.s)
$\alpha\gamma^*$ ajust.	1	2,3140975	2,3140975	1,76 ^(n.s)
$\beta\gamma^*$ ajust.	1	1,0833296	1,0833296	0,82 ^(n.s)
$\alpha\beta\gamma^*$ ajust.	1	0,7756342	0,7756342	0,59 ^(n.s)
Resíduo	10	13,1666667	1,3166667	

4.5. Exemplo Numérico Para Modelo de Médias de Caselas

A fim de mostrar as aplicações da teoria desenvolvida, considerou-se um experimento fatorial ($4 \times 3 \times 2$) citado em SEARLE (1987) pag. 392, com dados não balanceados.

Tabela 2 - Dados de um experimento com três fatores

i = nível do fator A	k = nível do fator C					
	1			2		
	j = nível do fator B			j = nível do fator C		
	1	2	3	1	2	3
1	10	3	1	4	2	4
	-	5	2	6	3	5
	-	-	3	-	7	9
	-	-	-	-	-	-
2	5	5	6	8	6	2
	9	-	10	-	8	-
	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
3	2	3	5	3	4	6
	3	4	-	4	-	-
	3	8	-	8	-	-
	4	-	-	-	-	-
4	4	1	8	5	19	20
	-	1	-	7	-	24
	-	3	-	9	-	-
	-	7	-	-	-	-

4.5.2. Estimação no Modelo Com Interações: $n_{ijk} > 0$

4.5.3. Teste de Hipóteses no Modelo Com Interações:

$$n_{ijk} > 0$$

Considerando-se a hipótese geral definida em [3.3.4.1] com a adaptação para o modelo de médias, testam-se as hipóteses associadas aos efeitos principais e interações

1 - Teste para os efeitos principais:

$$(i) - H_0: H'_A \mu = 0 \leftrightarrow H_0: [\Delta_{(a-1)} \otimes (1/b) J'_b \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0$$

$$H'_A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1/3 \ 1/3 \ 1/3] \otimes [1/2 \ 1/2] \right\}$$

$$N_A = (H'_A \hat{\mu})' [H'_A (W'W)^{-1} H_A]^{-1} (H'_A \hat{\mu}) = 194,175387$$

$$F(H_A) = \frac{N_A}{(a-1)s^2} = 12,7328$$

$$(ii) - H_0: H'_B \mu = 0 \leftrightarrow H_0: [(1/a) J'_a \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0$$

$$H'_B = \left\{ [1/4 \ 1/4 \ 1/4 \ 1/4] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1/2 \ 1/2] \right\}$$

$$N_B = (H'_B \hat{\mu})' [H'_B (W'W)^{-1} H_B]^{-1} (H'_B \hat{\mu}) = 10,37601$$

$$F(H_B) = \frac{N_B}{(b-1)s^2} = 1,0206$$

$$(iii) - H_0: H'_C \mu = 0 \leftrightarrow H_0: [(1/a) J'_a \otimes (1/b) J'_b \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_C = \left\{ \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N_C = (H'_C \hat{\mu})' [H'_C (W'W)^{-1} H'_C]^{-1} (H'_C \hat{\mu}) = 62$$

$$F(H'_C) = \frac{N_C}{(c-1)s^2} = 12,1967$$

2 - Teste para a interação dupla:

$$(i) - H_0: H'_{AB} \mu = 0 \iff H_0: [\Delta_{(a-1)} \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0$$

$$H'_{AB} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N_{AB} = (H'_{AB} \hat{\mu})' [H'_{AB} (W'W)^{-1} H'_{AB}]^{-1} (H'_{AB} \hat{\mu}) = 160,48084$$

$$F(H'_{AB}) = \frac{N_{AB}}{(a-1)(b-1)s^2} = 5,2617$$

$$(ii) - H_0: H'_{AC} \mu = 0 \iff H_0: [\Delta_{(a-1)} \otimes (1/b) J'_b \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_{AC} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N_{AC} = (H'_{AC} \hat{\mu})' [H'_{AC} (W'W)^{-1} H'_{AC}]^{-1} (H'_{AC} \hat{\mu}) = 215,450959$$

$$F(H'_{AC}) = \frac{N_{AC}}{(a-1)(c-1)s^2} = 14,1279$$

$$(iii) - H_0: H'_{BC} \mu = 0 \iff H_0: [(1/a) J'_a \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_{BC} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N_{BC} = (H'_{BC} \hat{\mu})' [H'_{BC} (W'W)^{-1} H_{BC}]^{-1} (H'_{BC} \hat{\mu}) = 28,003129$$

$$F(H_{BC}) = \frac{N_{BC}}{(b-1)(c-1)s^2} = 2,7544$$

3 - Teste para a interação tripla:

$$(iv) - H_o: H'_{ABC} \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [\Delta_{(a-1)} \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_{ABC} = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \otimes [1 \ -1] \right\}$$

$$N_{ABC} = (H'_{ABC} \hat{\mu})' [H'_{ABC} (W'W)^{-1} H_{ABC}]^{-1} (H'_{ABC} \hat{\mu}) = 120,761786$$

$$F(H_{ABC}) = \frac{N_{ABC}}{(a-1)(b-1)(c-1)s^2} = 3,9565$$

4.5.4. Quadro de Análise da Variância

Análise da Variância

C. V	GL	SQ	QM	F
fator A	3	194,175387	64,725129	12,7328 ^(**)
fator B	2	10,376010	5,188005	1,0206 ^(n. s)
fator C	1	62,000000	62,000000	12,1967 ^(**)
int. A*B	6	160,480840	26,746806	5,2617 ^(**)
int. A*C	3	215,450958	71,816986	14,1279 ^(**)
int. B*C	2	28,003129	14,001564	2,7544 ^(n. s)
int. A*B*C	6	120,671786	20,111964	3,9565 ^(**)
Resíduo	24	122,000000	5,083333	

4.5.5. Estimação no Modelo Sem Interações: $n_{ijk} > 0$

Como foi visto na seção 4.3.8, o uso de modelos restritos na obtenção das somas de quadrados é dificultoso quando incorpora-se as restrições $H_0: H'\mu = 0$ e $G'\mu = 0$ simultaneamente ao modelo. Assim, serão adotadas as formas canônicas definidas na seção 4.3.5.

Como as formas canônicas têm as mesmas características do modelo reduzido, então, o modelo na sua forma canônica é dada por:

$$y = W\mu + \epsilon = W\mathcal{X}_0 P^* \theta^* + \epsilon = \mathcal{X}^* \theta^* + \epsilon$$

onde,

$$\mathcal{X}^* = W\mathcal{X}_0 P^* ;$$

$$W = \text{Diag} (J_{n_{ijk}}) ;$$

$$\mathcal{X}_0 = [J_{abc} | I_a \otimes J_b \otimes J_c | J_a \otimes I_b \otimes J_c | J_a \otimes J_b \otimes I_c] ;$$

$$P^* = \text{Diag} (1, \Delta'_{(a-1)}, \Delta'_{(b-1)}, \Delta'_{(c-1)}) ;$$

$$\theta^* = [\mu^*, \alpha_i^*, \beta_j^*, \gamma_k^*]$$

para $i=1,2,\dots,a-1$; $j=1,2,\dots,b-1$; $k=1,2,\dots,c-1$.

Logo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} y \\ 10 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 5 \\ 9 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \\ 19 \\ 8 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^* \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^* \\ \mu^* \\ \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \gamma_1^* \end{bmatrix} + \epsilon$$

Como X^* é de posto completo, através do teorema 3 constata-se que o delineamento é conexo, sendo portanto, os parâmetros estimáveis. Assim, para obter a estimativa do parâmetro θ^* , minimiza-se o vetor de erros, obtendo-se o sistema de equações normais $X^{*'}X^*\theta^* = X^{*'}y$,

$$\begin{bmatrix} 48 & 2 & -3 & 10 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 26 & 12 & 12 & -4 & -3 & -2 \\ -3 & 12 & 21 & 21 & -1 & -2 & 1 \\ 10 & 12 & 21 & 34 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & -1 & 4 & 31 & 14 & -1 \\ 3 & -3 & -2 & 0 & 14 & 31 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & -1 & 3 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \gamma^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 288 \\ -44 \\ -49 \\ 8 \\ -11 \\ -16 \\ -58 \end{bmatrix}$$

e

$$(X'X)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mu^* & \alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^* & \beta_1^* & \beta_2^* & \gamma_1^* \\ 0,029728 & & & & & & \\ -0,005455 & 0,054855 & & & & & \\ 0,037748 & -0,034252 & 0,193808 & & & & \\ -0,030492 & 0,002323 & -0,120824 & 0,114979 & & & \\ 0,002570 & 0,006031 & 0,014483 & -0,017431 & 0,044205 & & \\ -0,002176 & 0,000601 & -0,001335 & 0,003862 & -0,019024 & 0,041338 & \\ 0,000478 & 0,003121 & 0,003416 & -0,006302 & 0,003405 & -0,003158 & 0,021666 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução única de mínimos quadrados é dada por:

$$\hat{\theta}^* = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{\mu}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\alpha}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\beta}^* \\ \dots \\ \hat{\theta}_{\gamma}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,686849 \\ \dots \\ -2,544638 \\ 1,579164 \\ -1,548128 \\ \dots \\ -0,753770 \\ -0,825822 \\ \dots \\ -1,460957 \end{bmatrix}$$

A estimativa da variância é dada por:

$$s^2 = \frac{y'y - R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)}{[N - (a + b + c - 2)]} = \text{QMRes}$$

onde, $R(\mu^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = \hat{\theta}^{*'} X^* y = 2054,252568$

e $s^2 = 689,747432$

4.5.6. Teste de Hipóteses no Modelo Sem Interações:

$n_{ijk} > 0.$

Para obter as somas de quadrados que testam os efeitos principais no modelo sem interações, será usado o modelo na sua forma canônica $y = X^* \theta^* + \varepsilon$, e os cálculos feitos através do Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa.

(i) $H_0: \alpha_i^* = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, a-1$

$$R(\alpha^* | \mu^*, \beta^*, \gamma^*) = \hat{\theta}_{\alpha}^{*'} T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha}^*$$

$$= \begin{bmatrix} -2,544638 \\ 1,579164 \\ -1,548128 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,054855 & -0,034252 & 0,002323 \\ -0,034252 & 0,193808 & -0,120824 \\ 0,002323 & -0,120824 & 0,114979 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2,544638 \\ 1,579164 \\ -1,548128 \end{bmatrix}$$

$$R(\alpha^* | \mu^*, \beta^*, \gamma^*) = 183,011289$$

$$(cii) \quad H_0: \beta_j^* = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, b-1$$

$$\begin{aligned} R(\beta^* | \mu^*, \alpha^*, \gamma^*) &= \hat{\theta}_\beta^{*'} T_{\beta\beta}^{-1} \hat{\theta}_\beta^* \\ &= \begin{bmatrix} -0,753770 \\ -0,825822 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,044205 & -0,019024 \\ -0,019024 & 0,041338 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0,753770 \\ -0,825822 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$R(\beta^* | \mu^*, \alpha^*, \gamma^*) = 52,761053$$

$$(ciii) \quad H_0: \gamma_k^* = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, c-1$$

$$\begin{aligned} R(\gamma^* | \mu^*, \alpha^*, \beta^*) &= \hat{\theta}_\gamma^{*'} T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{\theta}_\gamma^* \\ &= [-1,460957]' [0,021666]^{-1} [-1,460957] \end{aligned}$$

$$R(\gamma^* | \mu^*, \alpha^*, \beta^*) = 98,514716$$

4.5.7. Quadro de Análise da Variância

Análise da Variância				
CV	GL	SQ	QM	F
α^* ajust.	3	183,011289	61,003763	3,6262 ^(*)
β^* ajust.	2	52,761053	26,380527	1,5681 ^(n.s)
γ^* ajust.	1	98,514716	98,514716	5,8559 ^(*)
Resíduo	41	689,747432	16,823108	

4.5.8. Caselas Vazias e Hipóteses Efetivas

Como já citado nas seções 4.3.4 e 4.3.10, se todas as caselas envolvidas estiverem ocupadas ($n_{ijk} > 0$), conseqüentemente serão estimáveis tanto no modelo com interações quanto no modelo sem interações. Porém, no caso da existência de caselas vazias a situação se modifica, já que no modelo com interações só serão estimáveis as médias das caselas observadas. Entretanto, no modelo sem interações, as médias das caselas vazias podem ser estimadas através das relações existentes entre as médias das caselas ocupadas.

Neste caso, considerando-se o modelo sem interação tripla significativa, tem-se:

$$(\mu_{ijk} - \mu_{i'jk} - \mu_{ij'k} + \mu_{i'j'k}) - (\mu_{ijk'} - \mu_{i'jk'} - \mu_{ij'k'} + \mu_{i'j'k'}) = 0, \quad \forall i, i', j, j', k, k' \text{ e } i \neq i', j \neq j', k \neq k'.$$

Das $abc = 24$ restrições possíveis, existem muitos conjuntos de $(a-1)(b-1)(c-1) = 6$ restrições linearmente independentes. Um destes conjuntos linearmente independente é o conjunto $i' = a, j' = b \text{ e } k' = c$. Assim, têm-se:

$$(\mu_{ijk} - \mu_{ajk} - \mu_{ibk} + \mu_{abk}) - (\mu_{ijc} - \mu_{ajc} - \mu_{ibc} + \mu_{abc}) = 0$$

para $i = 1, 2, \dots, a-1$; $j = 1, 2, \dots, b-1$; $k = 1, 2, \dots, c-1$,

e a expressão acima pode ser escrita matricialmente na

expresso em termos das médias observadas μ_o , e através de operações elementares, obtém-se a matriz particionada G como em [4.3.4.4].

$$G = \begin{bmatrix} G_{mm} & G_{mo} \\ \dots & \dots \\ \emptyset & G_E \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que $G_{mm} = I_{(5)}$, e portanto, o deli-
neamento é conexo. Neste caso, a restrição efetiva é dada
pela última linha da matriz G particionada, e as cinco pri-
meiras linhas definem a única relação existente entre as
caselas vazias e as caselas observadas. Assim, tem-se:

$$y = W_o \mu_o + \varepsilon$$

$$\text{sujeito à restrição} \quad G_E \mu_o = 0$$

onde,

$$G_E = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1]$$

$$\mu_o = \begin{bmatrix} \mu_{112} \mu_{121} \mu_{122} \mu_{131} \mu_{212} \mu_{221} \mu_{231} \mu_{232} \mu_{311} \mu_{321} \mu_{322} \mu_{331} \mu_{332} \mu_{411} \\ \mu_{412} \mu_{421} \mu_{422} \mu_{431} \mu_{432} \end{bmatrix}$$

Fazendo-se a partição de W_o , G_E e μ_o em função
da restrição efetiva tem-se:

$$W_o = [W_{o1} | W_{o2}] = \begin{bmatrix} W_1 & W_{10} \\ W_2 & W_{20} \end{bmatrix}$$

$$G_E = [G_{E1} | G_{E2}] = [1 | 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1]$$

$$W_{OR} = W_{O2} - W_{O1} G_{E1}^{-1} G_{E2}$$

$$\mu_o = [\mu_{o1} | \mu_{o2}]$$

$$\mu_{o1} = [\mu_{321}]$$

$$\mu_{o2} = \mu_{OR} = [\mu_{112} \mu_{121} \mu_{122} \mu_{131} \mu_{212} \mu_{221} \mu_{231} \mu_{232} \mu_{311} \mu_{322} \mu_{331} \mu_{332}$$

$$\mu_{411} \mu_{412} \mu_{421} \mu_{422} \mu_{431} \mu_{432}]$$

Portanto, pode-se obter as estimativas de μ_o e μ_m , onde μ_m é definido unicamente em termos de μ_o .

$$\tilde{\mu}_o = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{o1} \\ \tilde{\mu}_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_{E1}^{-1} G_{E2} \tilde{\mu}_{o2} \\ (W'_{OR} W_{OR})^{-1} W'_{OR} y \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mu}_{o1} = \hat{\mu}_{321} = 4.780822$$

$$\tilde{\mu}_{o2} = [5 \ 4 \ 4 \ 2 \ 8 \ 5 \ 8 \ 2 \ 3 \ 4,657534 \ 5,657534 \ 5,342466$$

$$4 \ 7 \ 3,164384 \ 18,342466 \ 7,342466 \ 22,328767]$$

$$\tilde{\mu}_m = -G_{mm}^{-1} G_{mo} \tilde{\mu}_o = \begin{bmatrix} 17,178082 \\ 1,808219 \\ 25,986301 \\ -0,808219 \\ -9,301370 \end{bmatrix}$$

$$e \quad s^2 = QMRes = Q(\hat{\mu}_{OR}) / [N - r(W_{OR})]$$

$$\begin{aligned} Q(\hat{\mu}_{OR}) &= y'(I - W_{OR}(W'_{OR} W_{OR})^{-1} W'_{OR}) y \\ &= 2227 - 2140,369863 = 86,630137 \end{aligned}$$

$$QMRes = \frac{86,630137}{(37 - 18)} = 4,559480$$

Para o caso de delineamento conexo, considerando-se a hipótese original $H_o: H'\mu = h$, particiona-se e ajusta-se de acordo com a disponibilidade dos dados, a fim

de identificar quais hipóteses originais são testáveis nestas condições. Tais hipóteses são denominadas hipóteses efetivas e fornecem hipóteses úteis para os efeitos principais e interações duplas, mesmo com a ocorrência de algumas caselas vazias.

1 - Teste para os efeitos principais:

$$(i) - H_o: H'_A \mu = 0 \iff H_o: [\Delta_{(a-1)} \otimes (1/b) J'_b \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0$$

$$H'_A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1/3 \ 1/3 \ 1/3] \otimes [1/2 \ 1/2] \right\}$$

particionado $H'_A = [H'_{Am} | H'_{Ao}]$ e escrevendo-as em termos das restantes caselas observadas, obtém-se:

$$\tilde{H}'_{A_o} \mu_o = (H'_{Ao} - H'_{Am} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$\tilde{H}'_A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3-1/6-1/6-1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3-1/3 & 0 & -1/6-1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/3-1/3 & 0 & -1/6-1/6 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$N(\tilde{H}'_A) = (\tilde{H}'_{A_o} \tilde{\mu}_o)' [\tilde{H}'_A V \tilde{H}'_A]^{-1} (\tilde{H}'_{A_o} \tilde{\mu}_o) = 223,197987$$

$$F(\tilde{H}'_A) = \frac{N(\tilde{H}'_A)}{r(H'_A) S^2} = 16,31750$$

$$(ii) - H_o: H'_B \mu = 0 \iff H_o: [(1/a) J'_a \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0$$

$$H'_B = \left\{ [1/4 \ 1/4 \ 1/4 \ 1/4] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1/2 \ 1/2] \right\}$$

$$\tilde{H}'_{B_o} \mu_o = (H'_{Bo} - H'_{Bm} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$\tilde{H}'_B =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4-1/4-1/4 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0-1/4 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4-1/4 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8-1/8-1/8 & 0 & 0-1/8 & 3/8 & 1/8-3/8 \end{bmatrix}$$

$$N(\tilde{H}'_B) = (\tilde{H}'_B \tilde{\mu}_o)' [\tilde{H}'_B V \tilde{H}'_B]^{-1} (\tilde{H}'_B \tilde{\mu}_o) = 11,686466$$

$$F(\tilde{H}'_B) = \frac{N(\tilde{H}'_B)}{r(H'_B) s^2} = 1,28156$$

$$(iii) - H_o: H'_C \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [(1/a)J'_a \otimes (1/b)J'_b \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_C = \left\{ \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\tilde{H}'_C \mu_o = (H'_{Co} - H'_{Cm} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$\tilde{H}'_C =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & 1/12 & -1/12 & 1/6 & -1/6 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & -1/12 & 1/12 \end{bmatrix}$$

$$N(\tilde{H}'_C) = (\tilde{H}'_C \tilde{\mu}_o)' [\tilde{H}'_C V \tilde{H}'_C]^{-1} (\tilde{H}'_C \tilde{\mu}_o) = 9,393550$$

$$F(\tilde{H}'_C) = \frac{N(\tilde{H}'_C)}{r(H'_C) s^2} = 2,06022$$

2 - Teste para a interação dupla:

$$(i) - H_o: H'_{AB} \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [\Delta_{(a-1)} \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes (1/c)J'_c] \mu = 0$$

$$H'_{AB} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\tilde{H}'_{AB} \mu_o = (H'_{ABo} - H'_{ABm} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$\tilde{H}'_{AB} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$N(\tilde{H}'_{AB}) = (\tilde{H}'_{AB} \tilde{\mu}_o)' [\tilde{H}'_{AB} V \tilde{H}'_{AB}]^{-1} (\tilde{H}'_{AB} \tilde{\mu}_o) = 236,593567$$

$$F(\tilde{H}'_{AB}) = \frac{N(\tilde{H}'_{AB})}{r(H'_{AB})s^2} = 8.64841$$

$$(ii) - H_o: H'_{AC} \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [\Delta_{(a-1)} \otimes (1/b) J'_b \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_{AC} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1/3 \ 1/3 \ 1/3] \otimes [1 \ -1] \right\}$$

$$\tilde{H}'_{AC} \mu_o = (H'_{ACo} - H'_{ACm} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$\tilde{H}'_{AC} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & -2/3 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$N(\tilde{H}'_{AC}) = (\tilde{H}'_{AC} \tilde{\mu}_o)' [\tilde{H}'_{AC} V \tilde{H}'_{AC}]^{-1} (\tilde{H}'_{AC} \tilde{\mu}_o) = 236,593567$$

$$F(\tilde{H}'_{AC}) = \frac{N(\tilde{H}'_{AC})}{r(H'_{AC})s^2} = 8.648410$$

$$(iii) - H_o: H'_{BC} \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [(1/a) J'_a \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_{BC} = \left\{ [1/4 \ 1/4 \ 1/4 \ 1/4] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1 \ -1] \right\}$$

$$\tilde{H}'_{BC} \mu_o = (H'_{BCo} - H'_{BCm} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$\tilde{H}'_{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -3/4 & -3/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$N(\tilde{H}_{BC}) = (\tilde{H}'_{BC} \tilde{\mu}_o)' [\tilde{H}'_{BC} V \tilde{H}_{BC}]^{-1} (\tilde{H}'_{BC} \tilde{\mu}_o) = 72,569863$$

$$F(\tilde{H}_{BC}) = \frac{N(\tilde{H}_{BC})}{r(H'_{BC})s^2} = 7,95813$$

4.5.9. Quadro de Análise da Variância

Análise da Variância

C. V	GL	SQ	QM	F
fator A	3	223,197987	74,399330	16,31750 ^(***)
fator B	2	11,686466	5,843230	1,28156 ^(n. s)
fator C	1	9,393550	9,393550	2,06022 ^(n. s)
int. A*B	6	236,593567	39,432260	8,64841 ^(***)
int. A*C	3	286,725015	95,575010	20,96182 ^(***)
int. B*C	2	72,569863	36,284930	7,95813 ^(***)
Resíduo	19	86,630140	4,559480	

E finalmente supõe-se, também, que não existe a média μ_{411} para os dados considerados na tabela 2.

Neste caso, particionando W , μ e G em subgrupos constituídos de caselas vazias e caselas com observações, tem-se:

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{bmatrix} W_m & W_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{30} & W_{18} \end{bmatrix} \\
 \mu' &= \begin{bmatrix} \mu'_m & \mu'_o \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mu_{111} \mu_{132} \mu_{211} \mu_{222} \mu_{312} \mu_{411} & \mu_{112} \mu_{121} \mu_{122} \mu_{131} \mu_{212} \mu_{221} \mu_{231} \mu_{232} \mu_{311} \mu_{321} \mu_{322} \\ \mu_{331} \mu_{332} \mu_{412} \mu_{421} \mu_{422} \mu_{431} \mu_{432} \end{bmatrix} \\
 G &= \begin{bmatrix} G_m & G_o \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

E expressando o vetor de médias μ_m em função das médias observadas μ_o , através de operações elementares, obtém-se a matriz G particionada como em [4.3.4.4].

$$\begin{aligned}
 G &= \begin{bmatrix} G_{mm} & G_{mo} \\ \emptyset & G_E \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Observa-se que $G_{mm} \neq I_{(5)}$ e portanto, o delimitamento é desconexo. Sendo assim, deve-se particionar G_{mm} na forma definida em [4.3.4.11].

$$G_{mm} = [I_{(5)} \mid C] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Agora, pode-se notar que μ_m não pode mais ser definido unicamente em função de μ_o , exceto, para algumas funções lineares.

Neste caso, a restrição efetiva é dada pela última linha da matriz G particionada, e apenas μ_{132} e μ_{222} podem ser definidas unicamente em função de μ_o . As demais são definidas como: $\mu_{111} - \mu_{411}$, $\mu_{211} - \mu_{411}$ e $\mu_{312} + \mu_{411}$.

E considerando-se o modelo efetivo, tem-se:

$$y = W_o \mu_o + \varepsilon$$

$$\text{sujeito à restrição} \quad G_E \mu_o = 0$$

onde,

$$G_E = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1]$$

$$\mu_o = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} \mu_{112} & \mu_{121} & \mu_{122} & \mu_{131} & \mu_{212} & \mu_{221} & \mu_{231} & \mu_{232} & \mu_{311} & \mu_{321} & \mu_{322} & \mu_{331} & \mu_{332} \\ \mu_{412} & \mu_{421} & \mu_{422} & \mu_{431} & \mu_{432} \end{array} \right]$$

Particionando-se W_o , G_E e μ_o em função da restrição efetiva tem-se:

$$W_o = [W_{o1} \mid W_{o2}] = \left[\begin{array}{cc|cc} W_{36} & W_{17} \\ W_{36} & W_{17} \end{array} \right]$$

E como o delineamento é desconexo, particiona-se e ajusta-se a hipótese original $H_0: H'\mu = h$, de acordo com a disponibilidade dos dados, a fim de identificar quais hipóteses originais ainda são testáveis nestas condições. Para identificar tais hipóteses, foram utilizadas as hipóteses efetivas, que testam as hipóteses de interesse sobre os efeitos principais e interações duplas, mesmo com a ocorrência de caselas vazias e o delineamento sendo desconexo. Entretanto, deve-se ressaltar que, se o delineamento é desconexo, nem sempre é possível determinar as hipóteses efetivas para certos efeitos considerados. Porém, isto não impede que outras hipóteses sejam formuladas.

Também é interessante ressaltar que, quando ocorrem caselas vazias, tanto no delineamento conexo, quanto no delineamento desconexo, existem outras hipóteses testáveis para determinados efeitos e que, certamente, produzirão somas de quadrados diferentes.

1 - Teste para os efeitos principais:

$$(1) - H_0: H'_A \mu = 0 \Leftrightarrow H_0: [\Delta_{(a-1)} \otimes (1/b) J'_b \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0$$

$$H'_A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1/3 \ 1/3 \ 1/3] \otimes [1/2 \ 1/2] \right\}$$

particionado $H'_A = [H'_{Am} | H'_{Ao}]$, e escrevendo-as em termos das restantes caselas ocupadas, obtém-se:

$$H_A^* \mu_o = (H'_{Am2} - H'_{Am1} C) \mu_{m2} + (H'_{Ao} - H'_{Am1} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$H_A^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/6 & -1/6 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & -1/6 & -1/6 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$H'_{AE} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/6 & -1/6 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N(H'_{AE}) = (H'_{AE} \tilde{\mu}_o)' [H'_{AE} V H'_{AE}]^{-1} (H'_{AE} \tilde{\mu}_o) = 84,188347$$

$$F(H'_{AE}) = \frac{N(H'_{AE})}{r(H'_A) s^2} = 6,15482$$

$$(ii) - H_o: H'_B \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [(1/a) J'_a \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes (1/c) J'_c] \mu = 0$$

$$H'_B = \left\{ \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_B^* \mu_o = (H'_{Bm2} - H'_{Bm1} C) \mu_{m2} + (H'_{Bo} - H'_{Bm1} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$H_B^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & -1/8 & -1/8 & 0 & -1/8 & 3/8 & 1/8 & -3/8 \end{bmatrix}$$

$$H'_{BE} =$$

$$= [0 \ 1/4 \ 0 \ -1/4 \ 0 \ 1/4 \ -1/4 \ 0 \ 0 \ 1/8 \ 1/8 \ -1/8 \ -1/8 \ 0 \ -1/8 \ 3/8 \ 1/8 \ -3/8]$$

$$N(H'_{BE}) = (H'_{BE} \tilde{\mu}_o)' [H'_{BE} V H'_{BE}]^{-1} (H'_{BE} \tilde{\mu}_o) = 5,552756$$

$$F(H'_{BE}) = \frac{N(H'_{BE})}{r(H'_B) s^2} = 0,60892$$

$$(iii) - H_o: H'_C \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [(1/a)J'_a \otimes (1/b)J'_b \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_C = \left\{ \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_{C_o}^{*'} \mu_o = (H'_{Cm2} - H'_{Cm1} C) \mu_{m2} + (H'_{Co} - H'_{Cm1} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$H_{C_o}^{*'} =$$

$$= [1/3 \ 0 \ 1/4 \ -1/4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/4 \ -1/4 \ 0 \ 1/12 \ -1/12 \ 1/6 \ -1/6 \ -1/3 \ 0 \ 0 \ -1/12 \ 1/12]$$

Observa-se que não existe a hipótese efetiva para o efeito principal do fator C. Entretanto, pode-se formular a hipótese:

$$\mu_{121} - \mu_{131} + \mu_{221} - \mu_{231} + \mu_{322} - \mu_{332} + \mu_{422} - \mu_{432} = 0$$

$$H'_{C1} =$$

$$= [0 \ 1/3 \ 0 \ 1/4 \ 0 \ -1/4 \ 1/4 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1/3 \ 0 \ -1/4 \ 0 \ 0 \ 1/6 \ 0 \ -1/6]$$

$$N(CH'_{C1}) = (H'_{C1} \tilde{\mu}_o)' [H'_{C1} V_{H'_{C1}}]^{-1} (H'_{C1} \tilde{\mu}_o) = 22,295418$$

$$F(CH'_{C1}) = \frac{N(CH'_{C1})}{r(CH'_{C1}) S^2} = 4,88990$$

2 - Teste para a interação dupla:

$$(i) - H_o: H'_{AB} \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [\Delta_{(a-1)} \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes (1/c)J'_c] \mu = 0$$

$$H'_{AB} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_{AB_o}^{*'} \mu_o = (H'_{ABm2} - H'_{ABm1} C) \mu_{m2} + (H'_{AB_o} - H'_{ABm1} G_{mo}) \mu_o = 0$$

$$H_{AB}^{*'} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$H_{ABE}' =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$NCH_{ABE} = (H_{ABE}' \tilde{\mu}_o)' [H_{ABE}' V H_{ABE}]^{-1} (H_{ABE}' \tilde{\mu}_o) = 234,363913$$

$$FCH_{ABE} = \frac{NCH_{ABE}}{r(H_{AB}') s^2} = 10,28029$$

$$(ii) - H_o: H_{AC}' \mu = 0 \Leftrightarrow H_o: [\Delta_{(a-1)} \otimes (1/b) J_b' \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H_{AC}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1/3 \ 1/3 \ 1/3] \otimes [1 \ -1] \right\}$$

$$H_{AC}^{*'} \mu_o = (H_{ACm2}' - H_{ACm1}' C) \mu_{m2} + (H_{ACo}' - H_{ACm1}' G) \mu_{mo} = 0$$

$$H_{AC}^{*'} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & -2/3 & 0 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$H_{ACE}' =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & -2/3 & 0 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$NCH_{ACE} = (H_{ACE}' \tilde{\mu}_o)' [H_{ACE}' V H_{ACE}]^{-1} (H_{ACE}' \tilde{\mu}_o) = 286,725015$$

$$FCH_{ACE} = \frac{NCH_{ACE}}{r(H_{AC}') s^2} = 20,96182$$

$$(iii) - H_0: H'_{BC} \mu = 0 \Leftrightarrow H_0: [(1/a) J'_a \otimes \Delta_{(b-1)} \otimes \Delta_{(c-1)}] \mu = 0$$

$$H'_{BC} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H'^*_{BC} \mu_0 = (H'_{BCm2} - H'_{BCm1} C) \mu_{m2} + (H'_{BC0} - H'_{BCm1} G_{mo}) \mu_0 = 0$$

$$H'^*_{BC} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 & 3/4 & -3/4 & -3/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$H'_{BCE} =$$

$$= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/4 \ -1/4 \ -1/4 \ 1/4 \ 0 \ 3/4 \ -3/4 \ -3/4 \ 3/4]$$

$$NCH_{BCE} = (H'_{BCE} \tilde{\mu}_0)' [H'_{BCE} V H_{BCE}]^{-1} (H'_{BCE} \tilde{\mu}_0) = 0,0244080$$

$$FCH_{BCE} = \frac{NCH_{BCE}}{r(H'_{BC}) s^2} = 0,00535$$

4.5.10. Quadro de Análise da Variância

Análise da Variância

C. V	GL	SQ	QM	F
fator A	3	84,188347	28,062780	6,15482 ^(**)
fator B	2	5,552756	2,776380	0,60892 ^(n. s)
fator C	1	22,295418	22,295418	4,88990 ^(**)
int. A*B	5	234,363913	46,872780	10,28029 ^(**)
int. A*C	3	286,725015	95,575010	20,96182 ^(**)
int. B*C	1	0,024480	0,024480	0,00535 ^(n. s)
Resíduo	19	86,630140	4,559480	

5. CONCLUSÕES

As dificuldades que geralmente surgem em casos de caselas vazias são que, tanto nos modelos superparametrizados quanto nos modelos com restrição - Σ de posto completo, não são possíveis de testar hipóteses sobre os efeitos principais α'_i s, β'_j s e γ'_k s.

(a) No modelo sem interações, mas com todas as caselas ocupadas, as somas de quadrados tais como $R(\alpha|\mu, \beta, \gamma)$, $R(\beta|\mu, \alpha, \gamma)$ e $R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$ testam hipóteses do tipo: $H_0: \alpha'_i$ s todos iguais, $\forall i = 1, 2, \dots, a$; $H_0: \beta'_j$ s todos iguais, $\forall j = 1, 2, \dots, b$ e $H_0: \gamma'_k$ s todos iguais, $\forall k = 1, 2, \dots, c$. Estas somas de quadrados podem ser calculadas diretamente como em SEARLE (1971, sec. 7.1), através do Método de Ajuste de Constantes ou de modo equivalente pelas formas indiretas $R(\alpha^*|\mu^*, \beta^*, \gamma^*) = \hat{\theta}_{\alpha}^*, T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha}^*$, $R(\beta^*|\mu^*, \alpha^*, \gamma^*) = \hat{\theta}_{\beta}^*, T_{\beta\beta}^{-1} \hat{\theta}_{\beta}^*$ e $R(\gamma^*|\mu^*, \alpha^*, \beta^*) = \hat{\theta}_{\gamma}^*, T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\gamma}^*$ que são obtidas pelo Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa.

(b) Para modelos com interações e todas as caselas ocupadas ($n_{ij} > 0$), as somas de quadrados tais como

$RC(\alpha | \mu, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$, $RC(\beta | \mu, \alpha, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$ e

$RC(\gamma | \mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$ não testam hipóteses sobre os efeitos principais (ver SEARLE 1971, pag. 310), mas as somas de quadrados obtidas pelo Método das Médias Quadráticas Ponderadas ainda testam as hipóteses:

$H_0: \alpha_i + \overline{\alpha\beta}_{i.} + \overline{\alpha\gamma}_{i.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{i..}$ todos iguais $\forall i = 1, 2, \dots, a$,

$H_0: \beta_j + \overline{\alpha\beta}_{.j} + \overline{\beta\gamma}_{.j.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{..j.}$ todos iguais $\forall j = 1, 2, \dots, b$ e

$H_0: \gamma_k + \overline{\alpha\gamma}_{.k} + \overline{\beta\gamma}_{.k.} + \overline{\alpha\beta\gamma}_{..k.}$ todos iguais $\forall k = 1, 2, \dots, c$,

Elas podem ser calculadas de modo equivalente pelo Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa.

$$RC(\alpha^* | \mu^*, \beta^*, \gamma^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*, \alpha\beta\gamma^*) = \hat{\theta}_{\alpha}^*, T_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\theta}_{\alpha}^*$$

$$RC(\beta^* | \mu^*, \alpha^*, \gamma^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*, \alpha\beta\gamma^*) = \hat{\theta}_{\beta}^*, T_{\beta\beta}^{-1} \hat{\theta}_{\beta}^*$$

$$RC(\gamma^* | \mu^*, \alpha^*, \beta^*, \alpha\beta^*, \alpha\gamma^*, \beta\gamma^*, \alpha\beta\gamma^*) = \hat{\theta}_{\gamma}^*, T_{\gamma\gamma}^{-1} \hat{\theta}_{\gamma}^*$$

(c) Para modelos com interações e algumas caselas vazias ($n_{ijk} = 0$), as somas de quadrados tais como $RC(\alpha | \mu, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$, $RC(\beta | \mu, \alpha, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$ e $RC(\gamma | \mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$ testam hipóteses que são difíceis de interpretar, veja por exemplo, (SEARLE 1971, eq. 100 e 104, pag. 307-308); e tanto o Método das Médias Quadráticas Ponderadas quanto o Algoritmo da Inversa de Parte da Inversa também não podem, pois não são definidos porque nem todas as caselas estão ocupadas.

(d) Uma alternativa viável e correta para se calcular as somas de quadrados quando ocorrem caselas vazias, é usar o método conhecido como modelo de médias de caselas. Este Mé-

todo testa apenas as hipóteses baseadas em funções estimáveis, neste caso, possibilitando testar apenas as hipóteses que são testáveis.

(e) No modelo restrito, se o delineamento é conexo, as médias populacionais μ_{ijk} 's onde ocorreram as caselas vazias, poderão ser estimadas através das relações existentes entre as médias das outras caselas restantes.

(f) Se o delineamento é desconexo, apenas alguns componentes de μ_m podem ser expressos unicamente em termos de μ_o e, portanto, estimados.

(g) No modelo efetivo é possível testar hipóteses de interesse para os efeitos principais e as interações, mesmo com a ocorrência de caselas vazias e o delineamento sendo desconexo.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APPELBAUM, M.I. & CRAMER, E.M. "Some problems in the nonorthogonal analysis of variance". Psychological Bulletin, 81: 335-343, 1979.

BANCROFT, T.A. "Topics in intermediate statistical methods". Iowa State Univ. Press Ames. Iowa, 1968.

GRAYBILL, F.A. "Theory and application of the linear model". North Scituate, Mass.: Duxbury Press. 1976.

HARVEY, W.R. "Least-Squares analysis of data with unequal subclass numbers". U.S.D.A., ARS 20-8. 1979.

HENDERSON, C.R. "Estimation of variance and covariance components". Biometrics, 9: 226-252. 1953.

HENDERSON, C.R. "Design and analysis of animal husbandry experiments". Techniques and Procedures in Animal Science Research, (p.2-55, listed 1959, 2nd ed. 1969) Corvallis, Oreg.; American Society of Animal Science.

HOCKING, R.R. "The analysis of linear models". Monterey. California Brooks/Cole publishing. 1985. 384p.

HOCKING, R.R. & SPEED, F.M. "A full rank analysis of some linear model problems". J.A.S.A., 70: 706-712. 1975.

HOCKING, R.R.; SPEED, F.M. & COLEMAN, A.T. "Hypotheses to be tested with unbalanced data". Commun. Statist. - Theor. Meth., A9(2): 117-129. 1980.

IEMMA, A.F. "Modelos lineares: uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária". Londrina. FUEL/ Depto. de matemática aplicada. 1987. 263p.

IEMMA, A.F. "Uma introdução a álgebra de matrizes". Piracicaba. ESALQ/USP. 1989. 424p.

IEMMA, A.F. "Testes de hipóteses em modelos lineares com amostras desequilibradas". Gembloux-Belgique. 1991. 101p.

IEMMA, A.F. & PALM, R. "Les matrices inverses generalisees et leur utilisation dans le modele lineaire". Faculté des Sciences Agronomiques. Gembloux - Belgique. 1992. 25p.

MARSAGLIA, G. & STYAN, G.P.H. "Equalities and inequalities for of matrices". Linear and Multilinear Algebra, 2: 269-292, 1974.

MURRAY, L.; SMITH, D. "Estimability testability and connectedness in the cell means models". Comm. Statist. theory Methods, New York, 14, No 8, 1899-1917. 1985.

NETER, J. & WASSERMAN, W. "Applied linear statistical models". Irwin - Homewood. 1974. 842p.

OVERALL, J.E. & SPIEGEL, D.K. "Concerning least squares analysis of experimental data". Psychological Bulletin, 72: 311-322, 1969.

RAO, C.R.; MITRA, S.K. "Generalized inverse of matrices and its applications". Wiley. New York. 1971

SCHEFFÉ, H. "The analysis of variance". New York. John Wiley and Sons. 1959.

SEARLE, S.R. "Matrix algebra for the biological science", New York, John Wiley. 1966.

SEARLE, S.R. "Linear Models", New York, John Wiley, 1971.

SEARLE, S.R. "Linear Models for Unbalanced Data". Wiley, 536p. 1987.

SEARLE, S.R.; SPEED, F.M. & HENDERSON, H.V. "Some computational and model equivalences in analyses of variance of unequal - subclass - numbers data". The American Statistician, 35: 16-33. 1981.

SPEED, F.M. & HOCKING, R.R. "The use of the $R()$ - notation with unbalanced data". The American Statistician, 30: 30-33. 1976.

SPEED, F.M.; HOCKING, R.R. & HACKNEY, O.P. "Methods of analysis of linear models with unbalanced data". J.A.S.A., 73: 105-112. 1978.

URQUHART, N.S. & WEEKS, D.L. "Linear models in messy data: some problems and alternatives". Biometrics, 34: 696-705. 1978.

URQUHART, N.S.; WEEKS, D.L. & HENDERSON, C.R. "Estimation associated with linear models: a revisitation". Communications in Statistics, 1: 303-330. 1973.

VILCA, M.F.M. & IEMMA, A.F. "Estimability of contrasts in unconnected designs". Biometrics Bull, 7(2):5 (Abstracts)

WEEKS, D.L.; WILLIAMS, D.R. "A note on the determination of connectedness in an n-way cross classification". Technometrics, 6: No 3, 319-324. 1964.

YATES, F. "The analysis of multiple classifications with unequal numbers in the different classes". J.A.S.A., 29: 51-66. 1934.