**ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS:
IDENTIFICAÇÃO DE UM ÚNICO “OUTLIER” EM DADOS
DE EXPERIMENTOS DELINEADOS EM
BLOCOS CASUALIZADOS**

ANA BEATRIZ COSTA CZERMAINSKI

Orientador: Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: “Estatística e Experimentação Agronômica”.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Dezembro - 1986

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma pela orientação.
- Ao Corpo Docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pelos ensinamentos recebidos.
- Aos colegas do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Pelotas pelo apoio e oportunidade de realização do Curso.
- Ao colega Engº Agrº Lusbi Herrera Sandoval pelas valiosas sugestões e apoio recebidos na realização deste trabalho.
- Ao colega Engº Agrº João Riboldi pela colaboração e troca de idéias.
- Ao meu esposo, Engº Agrº Paulo Ricardo Dias de Oliveira pelo constante incentivo e participação em todos os momentos.
- A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização desta dissertação.

ÍNDICE

	Página
RESUMO	v
SUMMARY	vii
1. INTRODUÇÃO	01
2. REVISÃO DE LITERATURA	04
2.1. Aspectos da teoria dos "outliers"	04
2.2. "Outliers" em delineamentos experimentais .	12
2.3. O modelo de Gauss-Markov e os resíduos	19
2.4. Resíduos nos ensaios com dois fatores	27
2.5. A detecção de um valor discordante	31
2.5.1. Gráficos de probabilidade normal ...	34
2.5.2. Os métodos propostos por GENTLEMAN e WILK (1975a, 1975b)	46
2.6. Um teste de discordância para um único "out- lier"	50
2.7. Homogeneidade de variâncias e aditividade	
2.7.1. Homogeneidade de variâncias	54
2.7.2. Aditividade	56
2.8. Procedimentos remediadores na presença de uma observação aberrante	58
3. MATERIAL E MÉTODOS	61
3.1. Material	61
3.2. Métodos	64
3.2.1. Obtenção dos resíduos e suas correla- ções	64
3.2.1.1. Modelo linear	64
3.2.2.2. Matriz de projeção e corre- lações entre resíduos	66

3.2.2. Escolha de uma estratégia para a análise exploratória dos dados	72
3.2.2.1. Avaliação do padrão geral dos dados	72
3.2.2.2. Identificação de um valor aberrante	73
3.2.2.3. Verificação da homogeneidade de variâncias de tratamentos e da aditividade do modelo	77
3.2.3. Análise da variância	77
4. APRESENTAÇÃO DE EXEMPLOS	79
4.1. O ensaio nulo	79
4.2. Ensaio 2	81
4.3. Ensaio 3	103
5. CONCLUSÕES	116
6. LITERATURA CITADA	118
7. APÊNDICE	124

ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS: IDENTIFICAÇÃO DE UM ÚNICO "OUTLIER" EM DADOS DE EXPERIMENTOS DELINEADOS EM BLOCOS CASUALIZADOS

Autora: ANA BEATRIZ COSTA CZERMAINSKI

Orientador: Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

RESUMO

A análise exploratória de dados é hoje considerada uma etapa imprescindível e simultânea às análises conclusivas, que têm por base modelos usuais em análise de dados. A moderna análise da variância, sem dúvida, envolve o cálculo e avaliação de resíduos. Dentre os aspectos comumente considerados em uma análise de resíduos, situa-se o reconhecimento e avaliação de "outliers". No entanto, em delineamentos experimentais, esse reconhecimento é feito, geralmente, através de métodos informais. Isto se deve ao fato de que, com raras e felizes exceções, o desenvolvimento do estudo dos "outliers" disponível na bibliografia tem estado basicamente preso aos modelos de regressão ou às amostras isoladas.

Este estudo visou apresentar uma sequência de procedimentos que levam à identificação de um único "outlier" e promover sua adaptação, através do modelo linear de Gauss-

Markov, aos delineamentos em blocos casualizados, tão úteis na pesquisa agropecuária.

Apresentou-se também a análise exploratória de dados, bem como um procedimento remediador, para dados de exemplos numéricos, buscando evidenciar algumas das sequelas causadas pela presença de um único valor aberrante e, à medida do possível, como amenizá-las.

EXPLORATORY DATA ANALYSIS: IDENTIFICATION OF A SINGLE OUTLIER IN EXPERIMENTS DESIGNED IN RANDOMIZED BLOCKS

Author: ANA BEATRIZ COSTA CZERMAINSKI

Adviser: Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

SUMMARY

The exploratory data analysis today is considered a simultaneous and indispensable phase to a conclusive analysis that has as base usual models in data analysis. The modern analysis of variance, without question, involves the calculation and evaluation of residuals. Among the commonly considered aspects in a residuals analysis, one can find the reconnaissance and evaluation of outliers. However, in experimental designs the reconnaissance is done, generally, through informal methods. This occurs because, with rare and successful exceptions, the development of the outliers study, available in the literature, has been basically connected to the regression models and to isolated samples.

This study aimed to show a series of procedures that lead to the identification of a single outlier and promote its adaptation, through Gauss-Markov's linear model, to the randomized blocks designs, very useful on the agriculture research.

Exploratory data analysis was also presented, as well as a helpful procedure, for numerical examples data, seeking to show some of the effects caused by the presence of a single outlier and, as much as possible, how to undermine them.

1. INTRODUÇÃO

Sem dúvida, o modelo linear de Gauss - Markov $y = X\theta + \varepsilon$, nas suas mais diversas caracterizações, tem sido a ferramenta básica para a análise de dados na pesquisa agropecuária, bem como em muitas outras áreas do saber. Este facto pode estar justificado na estrutura simples dos erros exigida pelo modelo.

No entanto, em geral, os dados experimentais podem apresentar estruturas mais complexas para a matriz de covariâncias e, nesse caso, os resultados de inferências obtidas com base no modelo σ^2 são seriamente comprometidos. Sob esse aspecto, as técnicas da análise de resíduos têm sido fundamentais para detectar violações e sugerir procedimentos remediadores.

Para muitos autores (por exemplo, GENTLEMAN e WILK, 1975b), a moderna análise da variância envolve o cálculo e análise dos resíduos, no sentido de verificar se pelo menos aproximadamente, $\varepsilon \sim N(\Phi, \sigma^2)$.

De fato, a maioria dos procedimentos em análise exploratória de dados considera resíduos como o reflexo natural da impropriedade das pressuposições básicas da análise da variância. De modo geral, isso significa verificar se os erros são homocedásticos, se são independentes e, ainda, se têm distribuição normal. Além disso, outro aspecto a ser levantado é a presença de dados aberrantes ou "outliers".

A preocupação com dados aberrantes é da máxima importância, pois muitos autores, dentre eles ANSCOMBE e TUKEY (1963), WILK e GNANADESIKAN (1968) e BARNETT e LEWIS, (1978, 1984), referem-se à influência destes dados, particularmente, em processos para se verificar ausência de normalidade, não-aditividade removível e heterogeneidade de variâncias. De fato, COOK e WEISBERG (1982) recomendam que procedimentos para constatar a ocorrência de observações discrepantes sejam aplicados antes de ser testada qualquer outra hipótese, pois a sua presença afetará todos os testes formais que utilizam resíduos.

Além de não ser de rotina na pesquisa em geral, considerar a ocorrência de "outlier", quando isso é feito, é comum o uso de métodos informais na sua detecção. Isso se justifica, talvez, porque os métodos de reconhecimento e avaliação de "outliers" são inúmeros, porém tendem a aparecer dispersos na literatura. Com raras exceções, cite-se, por exemplo, o texto de BARNETT e LEWIS (1978, 1984), a grande maioria dos métodos disponíveis aplicam-se ao estudo de re

gressão e de amostras isoladas e são raros para casos de delineamentos experimentais (modelo de análise de variância). Não obstante, existe razoável disponibilidade de métodos para o modelo linear geral.

Pretende-se apresentar aqui um levantamento dos métodos mais significativos da teoria dos "outliers", visando sua divulgação entre profissionais da pesquisa agropecuária, e uma sequência de procedimentos que levam ao reconhecimento de um único valor aberrante, procurando adequá-los aos modelos de experimentos delineados em blocos casualizados, tão úteis a tais pesquisadores.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. ASPECTOS DA TEORIA DOS "OUTLIERS"

O interesse por observações aberrantes é tão antigo quanto a tentativa de basear conclusões em um conjunto de dados estatísticos. Segundo BECKMAN e COOK (1983), comentários de Bernoulli, registrados em 1777, indicam que a prática de descartar dados aberrantes era comum há mais de duzentos anos. Os primeiros esforços para desenvolver métodos estatisticamente objetivos para lidar com "outliers" foram relatados por volta de 1850 (BECKMAN e COOK, 1983). Nesse sentido, BARNETT e LEWIS (1984) citam Chauvenet, 1863.

Entretanto, considerações de diversos autores ilustram que o conceito de "outlier" é subjetivo e, a despeito da vasta literatura disponível, existem divergências em relação a conceitos básicos e à própria nomenclatura.

BECKMAN e COOK (1983) apontam que devido à ên-

fase dada a modelos nos últimos anos, o termo "outlier" está sendo usado por alguns autores para indicar qualquer observação que não provenha da população alvo. Contudo, na maioria dos trabalhos falta até mesmo uma definição informal. BECKMAN e COOK (1983), considerando ser a terminologia dominante nos últimos vinte anos, adotam as seguintes noções:

- "discordant observation": qualquer observação que pareça surpreendente ou discrepante para o pesquisador;

- "contaminant": qualquer observação que não é uma realização da população alvo;

- "outlier": termo geral para fazer referência a qualquer dos anteriores.

A tradução literal para a língua portuguesa dos dois primeiros termos são observação discordante e contaminante, respectivamente. O termo "outlier" significa "estranho", "forasteiro", "... a parte do lote principal".

BARNETT e LEWIS (1978) usam o termo "outlier" e "discordant observation" onde BECKMAN e COOK (1983) usam, respectivamente, "discordant observation" e "contaminant". Na terminologia de BARNETT e LEWIS (1978) uma "discordant observation" não aparece necessariamente como um "outlier".

Aqui serão usados os termos "valor", "dado" ou "observação" acompanhados de "aberrante" ou "discrepante" (isto é, "valor aberrante", etc.) com o sentido geral empregado

por BECKMAN e COOK (1983) ao usarem o termo "outlier", podendo ser usado o próprio.

Historicamente, métodos objetivos que tratam de dados aberrantes são empregados somente após serem rotulados como "valores suspeitos" através de uma inspeção visual dos dados.

BARNETT (1978) e BARNETT e LEWIS (1978) distinguem quatro procedimentos básicos para lidar com "outliers":

- (a) acomodação: diz respeito ao uso de métodos robustos de análise de dados ou inferências, ou seja, métodos que não sejam afetados pela presença de valores aberrantes;
- (b) incorporação: é a substituição do modelo adotado por outro no qual nenhuma observação pareça discrepante;
- (c) identificação: um "outlier" pode servir para indicar, por si só, a presença de fatores experimentais de importância prática, podendo levar o pesquisador a estabelecer um modelo alternativo ou voltar sua atenção especificamente sobre o novo fator, inclusive com novo experimento baseado no modelo apropriado para a população que produz os contaminantes;
- (d) rejeição: esta regra está limitada a casos onde o modelo inicial é inviolável e a

alternativa é descartar o valor discordante e tratar apropriadamente o restante dos dados.

Para BARNETT e LEWIS (1978), um processo de detecção deve ser empreendido como um pré-requisito dos procedimentos acima, sendo indispensável a todos exceto ao processo de ajustamento de valores, ou seja, à acomodação. Um teste estatístico, chamado por estes autores de teste de discordância, deve decidir se o "valor discordante" detectado ("outlier" na terminologia de BARNETT e LEWIS) pode ser considerado como um membro da população principal de onde se obteve a amostra. O diagrama apresentado na Figura 1 constitui um resumo, esquematicamente, dos diferentes interesses e princípios a respeito de observações discordantes, conforme BARNETT e LEWIS (1978).

BECKMAN e COOK (1983) distinguem dois procedimentos amplos para lidar com a possibilidade de ocorrência de "outliers". O primeiro método refere-se à sua identificação, para posterior estudo. O segundo método diz respeito à adaptação ou acomodação desses dados por modificações convenientes do modelo ou dos métodos de análise. Para esses autores, a identificação é mais importante, sendo que pode levar a:

- (a) sua subsequente rejeição;
- (b) nova e importante informação contida em variáveis concomitantes que teriam sido omitidas;

Figura 1. Tratamento de dados discordantes. Fonte: adaptado de BARNETT e LEWIS, 1978.

- (c) sua incorporação através de uma revisão do modelo;
- (d) um reconhecimento da fragilidade inerente dos dados, levando a experimentos adicionais.

É de se observar que BECKMAN e COOK (1983) utilizam o termo identificação para designar a fase em que se constata a ocorrência da observação discordante e a sua caracterização, ou não, como sendo um contaminante. ROSADO* refere-se a três fases na identificação de "outliers": a detecção, a escolha do modelo de discordância e o teste de discordância.

A escolha do modelo de discordância diz respeito ao estabelecimento das hipóteses nula e alternativa a serem examinadas no teste de discordância. Neste teste estatístico, a hipótese nula ou hipótese de trabalho expressa o modelo probabilístico básico que gera todos os dados. A hipótese alternativa expressa o modo em que o modelo pode ser modificado para incorporar ou explicar prováveis contaminantes. Em BARNETT e LEWIS (1978) está detalhada uma variedade de diferentes formas de hipótese alternativa (ou modelos de geração de "outliers").

*ROSADO, F.F. (Universidade de Lisboa, Lisboa). Comunicação pessoal, 7º SINAPE, Campinas, SP, 1986.

O tipo mais comum de hipótese alternativa como um modelo para a geração de "outliers" é aquele referido em BARNETT e LEWIS (1978) como a alternativa de deslizamento ("slip page alternative"). Nesse caso, todas as observações, exceto um pequeno número k , são independentemente obtidas de um modelo inicial F com parâmetro de posição μ e de dispersão σ^2 ; as k observações restantes são independentes e surgem de uma versão modificada de F em que o valor de μ ou de σ^2 está alterado. Na maioria dos trabalhos publicados F é uma distribuição normal (BARNETT e LEWIS, 1978).

Embora Ferguson (1961), segundo BARNETT e LEWIS (1978), tenha dado uma expressão mais geral à alternativa de deslizamento normal, a formulação dos modelos misturados para explicar a presença de "outliers" é anterior. DIXON (1950) sugeriu dois tipos de modelos de contaminação em amostras de população normal com média μ e variância σ^2 :

A. Uma ou mais observações de $N(\mu + \lambda\sigma, \sigma^2), \lambda \neq 0$

B. Uma ou mais observações de $N(\mu, \lambda^2\sigma^2), \lambda^2 > 1$

A representa a ocorrência de um "erro" no valor da média. B representa a ocorrência de um "erro" originado por uma população com a mesma média, mas com uma variância maior que a da amostra.

Na terminologia de COOK et alii (1982) e BECKMAN e COOK (1982), A é o modelo de média modificada ("mean-

shift model") e indica a mistura de elementos $N(\mu, \sigma^2)$ e $N(\mu + \lambda\sigma, \sigma^2)$, $\lambda \neq 0$, e B é o modelo de variância inflacionada ou modificada ("variance-inflation model") ou, ainda, modelo de deslizamento da variância ("variance-slippage model") para a mistura de $N(\mu, \sigma^2)$ e $N(\mu, \lambda^2\sigma^2)$, $\lambda^2 > 1$.

Muitos trabalhos sobre métodos de identificação de dados aberrantes referem-se à situação em que o pesquisador deseja obter uma amostra aleatória univariada de população normal (por exemplo, QUESENBERY e DAVID, 1961). Ou seja, o analista deseja uma amostra de população não contaminada, de modo a não violar as hipóteses básicas de processos de inferência.

Vários caminhos tem sido propostos para estender a metodologia referente à "outliers" em amostras simples ao acaso para situações com dados estruturados, isto é, os dados disponíveis são valores de uma variável-resposta que sofre a influência de outras variáveis (independentes) ou de diferentes fatores qualitativos. O primeiro caso, suscita um estudo de modelos de regressão. O segundo caso, diz respeito, é claro, aos delineamentos experimentais analisados sob um modelo linear através de técnicas de análise de variância (ANOVA).

A literatura referente ao estudo de "outliers" em regressão é vasta. Citam-se aqui TIETJEN et alii (1973), DACHS e CARVALHO (1984), COOK (1979), DRAPER e JOHN (1981), COOK e WEISBERG (1982), dentre outros.

Não é objeto desse trabalho o estudo dos valores discrepantes em modelos de regressão.

2.2. "OUTLIERS" EM DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

"Intuitivamente, a provável integridade de uma observação é refletida pela sua conexão com outras observações obtidas sob condições similares" (BECKMAN e COOK, 1983). Nesse sentido, o analista conta com o fator "surpresa"; o impacto que um dado discordante causa em relação aos restantes.

BARNETT e LEWIS (1978) chamam a atenção para uma distinção crucial na ocorrência de dados discordantes: em uma amostra univariada ordenada, uma inspeção visual pode levar à detecção de um valor discordante pois que ele estará visível no final da amostra. Essa identificação subjetiva não é confiável em dados estruturados. Nesse caso, o provável "outlier" não é um simples valor extremo, mas ele rompe um padrão geral dos dados.

BROSS (1961) e BARNETT e LEWIS (1978, 1984) consideram um exemplo, anteriormente apresentado por Daniel (1960), para discutir a dificuldade de identificação do valor discordante. A Tabela 1 apresenta as produções hipotéticas de um certo produto em diferentes níveis de dois fatores químicos A e B.

Tabela 1. Produções hipotéticas.

	Níveis de B				Total
Níveis de A	35	32	37	40	144
	29	29	34	36	128
	25	29	30	20	104
	19	25	25	35	104
	22	20	29	29	100
TOTAL	130	135	155	160	580

Fonte: BROSS (1961).

Se as vinte observações constituíssem uma amostra, os valores extremos (19 e 40) seriam candidatos a aberrantes. E, ainda, a linha onde está o valor 40 (primeiro nível de A) poderia ser uma sub-amostra discrepante, porém esse é um efeito esperado no esquema de análise e que não serve de base para que se suspeite da integridade dos dados. Por outro lado, a observação 20 na última coluna dos dados, é relativamente mais extrema dentro da coluna (e da linha) que qualquer outra. Ela parece romper um padrão geral de resultados onde os valores decrescem com os níveis de A e crescem com os níveis de B.

Com base em avaliações desse tipo sobre o arranjo dos dados experimentais, BROSS (1961) estabelece uma de

finição de um "outlier" em um experimento padronizado como sendo uma observação isolada que rompe, em algum sentido, o padrão de interrelação nos dados.

Além da dificuldade de detecção, um outro problema básico referente a "outliers" em resultados de experimento, apontado por BARNETT e LEWIS (1978), é a sua influência na análise da variância. O efeito na análise da variância pode ser no sentido de encobrir efeitos significantes ou exibir efeitos aparentes, os quais não surgiriam em condições normais.

O efeito combinado do "outlier" e das técnicas de análise de variância é salientado em BROSS (1961). Ele resalta que a "contaminação" se expande, atingindo a linha, a coluna e a média geral, influenciando estimativas e testes de significância. O mesmo autor refere-se ao efeito do surgimento de significância ("star burst") especialmente notado em experimentos fatoriais: a inclusão de determinada observação pode levar a uma análise da variância com efeitos principais e interações estatisticamente significantes.

Para ilustrar a distorção na análise da variância causada pela presença de "outliers" em dados experimentais, considere-se o exemplo apresentado por GENTLEMAN e WILK (1975a). Eles apresentam as análises da variância dos dados de um ensaio de dois fatores (8×5), sem e com dois "outliers" introduzidos artificialmente. Na Tabela 2 estão os dados do exemplo, com os valores aberrantes entre parênteses.

Tabela 2.

	1	2	3	4	5
1	8,4883	11,3327	10,1865	8,5163	8,4653
2	7,6039	11,6601	8,6973	7,7149	7,5774
					(10,3199)
3	7,6158	11,2652	8,2592	7,6454	7,5694
4	7,4900	10,8051	8,8186	7,5517	7,4407
				(11,9397)	
5	7,5310	9,8628	8,2441	7,5251	7,4512
6	7,4466	10,4725	8,1391	7,4697	7,3914
7	7,3658	9,8933	7,7354	7,3356	7,2556
8	7,8594	8,8630	7,9570	7,8906	7,8320

Fonte: GENTLEMAN e WILK (1975a)

Tabela 3. Análise da variância referente aos dados da Tabela 2.

Fonte de variação	GL	Dados originais			Dados com "outliers"		
		SQ	QM	F	SQ	QM	F
Linhas	7	7,6132	1,0876	5,50	13,1785	1,8826	2,42
Colunas	4	48,9065	12,2266	61,88	40,5506	10,1376	13,03
Interação	28	5,5337	0,1976		21,7922	0,7783	
TOTAL	39	62,0534	-		75,5214	-	

Fonte: adaptada de GENTLEMAN e WILK (1975a)

GENTLEMAN e WILK (1975a) consideram que o efeito mais dramático ocorre na soma de quadrados da interação que cresce quase quatro vezes em relação a dos dados originais. Além disso, se fixado um $\alpha = 0,01$ para testar o efeito de linhas, teremos significância com os dados originais e não significância na análise com os dois "outliers", pois o teste F para linhas cai de 5,5 (significativo a $\alpha = 0,001$) para 2,42 (significativo para $\alpha = 0,05$), respectivamente.

Retomando-se o exemplo da Tabela 1, pode se verificar a alteração na análise da variância quando se considera os dados originais da Tabela 1 e com o valor 20 substituído pela correspondente estimativa de mínimos quadrados cujo valor é 35. A Tabela 4 contém os resultados das análises de variância das duas situações.

Tabela 4. Análise da variância referente aos dados da Tabela 1.

Fonte de variação	Dados originais				Com a estimativa			
	GL	SQ	QM	F	GL	SQ	QM	F
Fator A	4	368	92	5,47**	4	323	80,75	13,26**
Fator B	3	130	43,33	2,57	3	253,75	84,58	13,89**
Resíduo	12	202	16,83	-	11	67	6,09	-
TOTAL	19	700	-		18	643,75	-	

Naturalmente, a soma de quadrados residual fica diminuída, tendo-se substituído uma parcela pela estimativa de mínimos quadrados correspondente. Porém, cabe salientar que essa redução é bem mais drástica com a substituição acima do que em qualquer outra parcela, na qual o valor original é substituído pela estimativa correspondente.

A maioria das técnicas para detecção de pontos discordantes ou para testar sua discordância utiliza os resíduos em relação ao modelo linear ajustado, como uma medida básica da importância das observações individuais (BARNETT e LEWIS, 1978).

Seguindo com os dados da Tabela 1 para ilustração, BROSS (1961) e BARNETT e LEWIS (1978) obtiveram os resíduos associados às observações, à partir do modelo linear aditivo

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, 5; j = 1, \dots, 4$$

ajustado aos dados, de modo que $\sum_{i=1}^5 \alpha_i = \sum_{j=1}^4 \beta_j = 0$.

A tabela de resíduos é a que segue (Tabela 5).

Tabela 5. Resíduos ordinários associados aos dados da Tabela 1.

		Níveis de B			
Níveis de A	2	-2	-1	1	
	0	-1	0	1	
	2	5	2	-9	
	-4	1	-3	6	
	0	-3	2	1	

Fonte: BROSS (1961).

O resíduo associado à observação de valor 20 na última coluna da Tabela 1 é o mais distante da média zero de todo o conjunto de resíduos.

Segundo BECKMAN e COOK (1983), a idéia geral existente por trás dos métodos para identificar um único "outlier" é associar os dados a um conjunto de n estatísticas univariadas, uma para cada observação, que são inspecionadas visualmente ou, em alguns casos, usadas para construir testes de significância.

Para BROSS (1961), o uso de resíduos não constitui uma base fidedigna para decidir se existem ou não valores discordantes em resultados de experimentos padronizados. A partir da idéia de efeito combinado entre contaminante e análise da variância, ele considera que todos os resíduos são afetados por um "outlier", além das desvantagens de serem correlacionados e serem calculados sob um modelo nulo especificado previamente. BROSS (1961) sugere que a identificação de um "outlier" deve ser feita relativamente a um padrão percebido no arranjo dos dados ao invés de um modelo especificado a priori. No entanto, BECKMAN e COOK (1983) consideram que isso parece impossível de ser generalizado de um modo prático. "Outliers" devem ser julgados com algum modelo em mente e a sua presença indicará que o modelo considerado ou os dados estão inadequados. Também GENTLEMAN e WILK (1975b) consideram que existe um "outlier" relativamente a um modelo ou teoria pré-especificados.

2.3. O MODELO DE GAUSS-MARKOV E OS RESÍDUOS

Seja o modelo linear de Gauss-Markov

$${}_n y_1 = {}_n X_p \theta_1 + {}_n \varepsilon_1 \quad (2.3.1)$$

onde y é um vetor de realizações de variáveis aleatórias;

X é uma matriz conhecida com posto

$$r[X] < \min \{n, p\};$$

θ é um vetor de parâmetros desconhecidos;

ε é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis,

tal que $\varepsilon \sim N(\phi; I\sigma^2)$.

Ao adotar-se o modelo (2.3.1) pressupõem-se as seguintes hipóteses básicas:

- i) os diversos efeitos são aditivos;
- ii) a esperança do vetor aleatório ε é nula, isto é, $E(\varepsilon_i) = 0, i = 1, \dots, n$;
- iii) as componentes de ε têm variância constante e não são correlacionadas, ou seja,
 $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ e $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$;
- iv) a distribuição de $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$, é normal.

A condição (i) é imposta pelo modelo, sendo que os efeitos variam conforme o delineamento usado. E, naturalmente, as hipóteses (iii) e (iv) implicam que os ε_i 's são independentes.

Nesse contexto, a teoria geral fornece o sistema de equações normais $X'X\theta^0 = X'y$, sempre consistente. As soluções usuais de mínimos quadrados para θ podem ser obtidas de

$$\theta^0 = (X'X)^G X'y$$

onde $(X'X)^G$ indica qualquer inversa generalizada de $X'X$.

Assim, a aproximação de mínimos quadrados para o vetor y , que é a projeção ortogonal de y no espaço gerado pelas colunas de X , é obtida por

$$\hat{y} = X\theta^0 = X(X'X)^G X'y = H y$$

invariante para qualquer θ^0 solução das equações normais ou, equivalentemente, para qualquer escolha de $(X'X)^G$.

A representação geométrica da aproximação de mínimos quadrados para y está na Figura 2.

Figura 2. Representação geométrica do ajuste de mínimos quadrados.

$H = X(X'X)^G X'$ é a matriz de projeção de y no espaço-coluna de X ou matriz chapéu (segundo HOAGLIN e WELSCH (1978), o termo matriz chapéu - "hat matrix" - foi introduzido por John Tukey).

H é invariante para qualquer inversa generalizada $(X'X)^G$, e como é simétrica e idempotente tem-se que:

$$V(\hat{y}) = H\sigma^2$$

O vetor de resíduos ordinários é dado por

$$e = y - \hat{y}$$

Logo,

$$e = y - X\theta^0 = (I-H)y \quad (2.3.2)$$

A relação entre $\underline{e}$ e $\underline{\varepsilon}$ é encontrada substituindo-se y por $X\theta + \varepsilon$ em (2.3.2)

$$e = (I-H)(X\theta + \varepsilon)$$

portanto,

$$e = (I-H)\varepsilon \quad (2.3.3)$$

A identidade (2.3.3) demonstra claramente que a relação entre e e ε depende somente da matriz chapéu, H . COOK e WEISBERG (1982) chamam a atenção para a importância do comportamento de H : se as suas componentes são suficientemente pequenas, $\underline{e}$ servirá como um substituto razoável de $\underline{\varepsilon}$; caso contrário, a utilidade de $\underline{e}$ pode ser limitada.

Importantes discussões sobre as propriedades de H e, especialmente, sobre os elementos de sua diagonal são apresentados em HOAGLIN e WELSCH (1978), DACHS e CARVALHO (1984) e COOK e WEISBERG (1982).

A esperança de e é nula e a matriz de variâncias e covariâncias é

$$V(e) = (I-H) \sigma^2$$

Logo, a variância de um resíduo particular é $(1 - h_{ii})\sigma^2$ e a covariância entre e_i e e_j , $i \neq j$, é $(-h_{ij})\sigma^2$. Ou seja, mesmo quando os erros são de variância constante e não-correlacionados, tem-se resíduos de variâncias diferentes e correlacionados (DACHS e CARVALHO, 1984).

A correlação entre e_i e e_j , $i \neq j$, é dada por

$$\rho_{ij} = \frac{-h_{ij}}{[(1-h_{ii})(1-h_{jj})]^{1/2}}, \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n.$$

A performance de diversos testes de discordância na identificação de "outliers" depende da estrutura de correlação entre os resíduos (BECKMAN e COOK, 1983).

A soma de quadrados de resíduos usual é $e'e$. Como $s^2 = y'(I-H)y/(n-p)$ é um estimador não tendencioso de σ^2 , então

$$\hat{V}(e) = (I-H)s^2$$

Segundo BECKMAN e COOK (1983), muitos traba-

lhos sobre observações aberrantes em modelos lineares estão baseados, algumas vezes de modo implícito, no modelo de média modificada

$$y = X\theta + D\gamma + \epsilon \quad (2.3.4)$$

onde γ é um vetor de k parâmetros desconhecidos; D é uma matriz $n \times k$ com colunas $u_i (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik})$ nas quais aparece 1 na i -ésima posição e zeros nas restantes. As demais quantidades foram definidas anteriormente.

Supondo que apenas um valor, digamos o i -ésimo caso, é suspeito de ser aberrante, admite-se o modelo

$$y = X\theta + D_i\gamma + \epsilon \quad (2.3.5)$$

onde D_i é um vetor n dimensional com o i -ésimo elemento igual a 1 e todos os outros iguais a zero (COOK e WEISBERG, 1982).

Sob o modelo de variância inflacionada, o vetor y tem a seguinte representação (COOK et alii, 1982):

$$y = X\theta + Z \quad (2.3.6)$$

onde X e θ são como em (2.3.1) e Z é um vetor de erros aleatórios de dimensão n , sendo $Z = \pi.\epsilon$, onde π é uma matriz desconhecida, ϵ tem distribuição multinormal com média zero e matriz de covariâncias

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{(n-1)} \end{bmatrix}$$

com $\sigma^2 > 0$ e $W > 1$. Ou seja, o modelo homocedástico $y = X\theta + \epsilon$ é verdadeiro para todos menos um caso desconhecido com variância $W\sigma^2$, $W > 1$.

Segundo BECKMAN e COOK (1983), o modelo de média modificada é mais adequado quando há interesse em identificação ao invés de acomodação de dados discrepantes.

COOK et alii (1982) demonstram que a posição estimada do possível contaminante não é necessariamente a mesma para ambos os modelos: a identificação de um dado discrepante depende da forma do modelo de discordância ("outlier model") assumido ao operar os dados. Porém, sob os dois modelos, a posição estimada será a mesma quando o maior resíduo studentizado corresponde ao maior resíduo ordinário. E isso será verificado em delineamentos experimentais balanceados, onde todos os resíduos têm a mesma variância (BARNETT e LEWIS, 1978; COOK et alii, 1982; BECKMAN e COOK, 1983).

Diversas transformações dos resíduos ordinários têm sido sugeridas, visando obter estatísticas que tenham distribuição nula independente de qualquer quantidade, já que os resíduos ordinários têm distribuição dependente de σ^2 e de h_{ij} .

A nomenclatura para os vários resíduos que podem ser derivados dos resíduos ordinários, e_i , é infelizmente confusa (VELLEMAN e WELSCH, 1981; ATKINSON, 1981).

Segundo COOK e WEISBERG (1982), o termo studentização serve para descrever a divisão de uma estatística de-

pendente em escala, por exemplo U , por uma estimativa do parâmetro de escala, T , resultando numa estatística independente $S = U/T$. Uma distinção entre studentização interna e studentização externa diz respeito a serem U e T dependentes (se T foi obtida dos mesmos dados) ou independentes, respectivamente.

Assim, os resíduos studentizados internamente são definidos por

$$r_i = \frac{e_i}{[V_{..}(e_i)]^{1/2}} = \frac{e_i}{s \cdot (1 - h_{ii})^{1/2}}, \quad (2.3.7)$$

$$i = 1, \dots, n$$

onde $s^2 = e'e/(n-p)$ é a soma de quadrados de resíduos. Para COOK e WEISBERG (1982) e DACHS e CARVALHO (1984), a distribuição de r_i não é exatamente uma t de Student porque as variáveis do numerador e denominador não são independentes.

Os resíduos studentizados externamente são definidos por:

$$t_i = \frac{e_i}{s_{(i)} (1 - h_{ii})^{1/2}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3.8)$$

onde $s^2_{(i)}$ é um estimador de σ^2 que é independente de e_i , ou seja, é obtido sem o i -ésimo caso (COOK e WEISBERG, 1982; DACHS e CARVALHO, 1984). DACHS e CARVALHO (1984) apresentam uma maneira de calcular cada $s^2_{(i)}$ da fórmula (2.3.8) sem precisar

fazer cada ajuste após a retirada do i -ésimo ponto:

$$s_{(i)}^2 = \frac{n-p}{n-p-1} s^2 + \frac{e_i^2}{(n-p-1)(1-h_{ii})}, \quad i = 1, \dots, n$$

Sob normalidade $s_{(i)}^2$ e e_i são independentes e t_i tem distribuição t , de Student, com $n-p-1$ graus de liberdade.

DRAPER e SMITH (1966) e NETER e WASSERMAN (1974), dentre outros, utilizam a forma

$$d_i = \frac{e_i}{s}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3.9)$$

onde $s^2 = \text{QMRes}$, sendo chamados de resíduos padronizados ou standartizados. Esta definição baseia-se em que, sob a hipótese de que $e_i/\sigma \sim N(0,1)$, $i = 1, \dots, n$, cerca de 95% dos e_i/s , $i = 1, \dots, n$, pertencem ao intervalo $[-2, 2]$.

COOK e WEISBERG (1982) reservam o termo resíduo studentizado para referirem-se a (2.3.7), tal como em LUND (1975), COOK e PRESCOTT (1981) e BARNETT e LEWIS (1984). DACHS e CARVALHO (1984), atribuem o termo aos resíduos studentizados externamente (forma 2.3.8), assim como em HOAGLIN et alii (1983), no qual a forma (2.3.7) representa os resíduos padronizados. Aqui, será adotado o termo resíduo studentizado para a forma (2.3.7).

Os resíduos studentizados são muito usados para detectar observações discordantes sob um determinado mode-

lo linear. Usualmente, é dada atenção especial à observação com o maior resíduo absoluto studentizado e esta é considerada a mais provável de ser um contaminante. Para COOK e PRESSCOTT (1981), o teste estatístico básico para um único "outlier" no modelo linear de Gauss-Markov envolve o resíduo studentizado absoluto máximo, $\max |r_i|$. Esta estatística é usualmente associada à alternativa do deslizamento da média, isto é, (2.3.1) está correto exceto pelo fato de que a esperança de uma observação desconhecida está modificada, ou que a esperança de um elemento de ϵ é diferente de zero.

2.4. RESÍDUOS NOS ENSAIOS COM DOIS FATORES

O modelo linear para ensaios de classificação dupla com uma observação por casela ("two-way layouts") é largamente utilizado para ilustrar a aplicação de métodos de diagnóstico através de resíduos em delineamentos experimentais (BARNETT e LEWIS, 1978; COOK e WEISBERG, 1982). Notadamente, métodos de detecção e avaliação de dados discordantes para ensaios com dois fatores tem sido discutidos mas tendem a aparecer dispersos na literatura (GENTLEMAN e WILK, 1975a, 1975b; DANIEL, 1978; JOHN e DRAPER, 1978; STEFANSKY, 1971).

Para COOK e WEISBERG (1982) desde o aparecimento do teste de aditividade de Tukey (1949), essa gama de métodos tem sido desenvolvida valendo-se da vantagem da estrutu-

tura especial das tabelas de dois fatores e que podem, frequentemente, ser generalizados para "layouts" de maior dimensão.

O modelo aditivo linear usual para experimentos de classificação dupla, assumindo que não existe interação entre os dois fatores A, com r níveis, e B, com c níveis, é caracterizado da seguinte forma:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, c; j = 1, \dots, r$$

onde, y_{ij} é a observação resultante da parcela que recebeu o nível i do fator A e o nível j do fator B. Sob as restrições paramétricas $\sum_{i=1}^c \alpha_i = 0$ e $\sum_{j=1}^r \beta_j = 0$, μ é a média geral do experimento; α_i é o efeito do nível i do fator A; β_j é o efeito do nível j do fator B e ϵ_{ij} é o erro experimental associado a y_{ij} .

Com as restrições citadas, tem-se que

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}, \quad i = 1, \dots, c$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}, \quad j = 1, \dots, r$$

logo, os resíduos ordinários serão obtidos do seguinte modo

$$e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}, \quad i = 1, \dots, c; j = 1, \dots, r.$$

Neste caso, sob balanceamento, $n = cr$ e $p = r+c-1$ e a matriz chapéu, H , terá como componentes (HOAGLIN e WELSCH, 1978):

$$h_{ij,ij} = (r+c-1)/cr = p/n \quad (2.4.1)$$

$$h_{ij,il} = (c-1)/cr, \quad l \neq j \quad (2.4.2)$$

$$h_{ij,kj} = (r-1)/cr, \quad k \neq i \quad (2.4.3)$$

$$h_{ij,kl} = -1/rc, \quad k \neq i, \quad l \neq j \quad (2.4.4)$$

Portanto, de (2.4.1) vê-se que todos os elementos da diagonal de H são iguais, o que ocorre em todos os experimentos balanceados.

A variância dos resíduos é dada por

$$\text{Var}(e_{ij}) = \left(1 - \frac{r+c-1}{rc}\right) \sigma^2 = \left(1 - \frac{p}{n}\right) \sigma^2, \quad i=1, \dots, c; \quad j=1, \dots, r$$

Logo, a distribuição de um resíduo individual será a normal com média 0 e variância $(r-1)(c-1)\sigma^2/rc$.

As covariâncias são:

$$\text{Cov}(e_{ij}, e_{il}) = -(c-1)\sigma^2/cr, \quad l \neq j$$

$$\text{Cov}(e_{ij}, e_{kj}) = -(r-1)\sigma^2/cr, \quad k \neq i$$

$$\text{Cov}(e_{ij}, e_{kl}) = \sigma^2/cr, \quad k \neq i; \quad l \neq j$$

Assim, tem-se nos ensaios com dois fatores apenas três valores diferentes para as correlações entre resíduos:

$\rho_{ij,il} = -1/(r-1)$, $l \neq j$, entre resíduos correspondentes a observações com o mesmo nível (tratamento) i do fator A.

$\rho_{ij,kj} = -1/(c-1)$, $k \neq i$, entre resíduos correspondentes a observações com o mesmo nível (tratamento) j do fator B.

$\rho_{ij,kl} = 1/(c-1)(r-1)$, $k \neq i$, $l \neq j$, entre resíduos correspondentes a observações de diferentes níveis de A e de B.

Como as variâncias dos resíduos são iguais em um ensaio de classificação dupla, não existe distinção essencial entre os resíduos ordinários e os studentizados.

O modelo para ensaios de dois fatores com único "outlier", admitindo a alternativa de deslizamento da média, é expressado por BARNETT e LEWIS (1978) pela forma

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + a_{ij}\sigma + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, c; \quad j = 1, \dots, r$$

onde $a_{ij} \neq 0$ para exatamente um par (i,j) e é zero para os demais.

GENTLEMAN e WILK (1975a) e COOK e WEISBERG (1982) mostram o padrão de valores esperados de resíduos, quando um valor λ for adicionado à observação $(1,1)$. Os valores esperados caem em quatro categorias: (a) a cela que contém o "outlier"; (b) aquelas celas não na mesma linha ou coluna do "outlier"; (c) celas na mesma linha e (d) celas na mesma coluna que o "outlier". Generalizando as expressões, isto é, para qualquer posição (i,j) onde se adicione o valor λ tem-se que:

$$E(e_{ij}) = \lambda(c-1)(r-1)/cr \quad (2.4.5)$$

$$E(e_{il}) = -\lambda(c+1)/cr, \quad l \neq j \quad (2.4.6)$$

$$E(e_{kj}) = -\lambda(r+1)/cr, \quad k \neq i \quad (2.4.7)$$

$$E(e_{kl}) = \lambda/cr, \quad k \neq i; \quad l \neq j \quad (2.4.8)$$

Portanto, se $\lambda > 0$, o resíduo correspondente à observação aumentada y_{ij} ficará aumentado de um valor $\Delta_{ij} = \lambda(r-1)(c-1)/cr$ assim como todos os resíduos e_{kl} , $k \neq i$, $l \neq j$ ficarão acrescidos de $\Delta_{kl} = \lambda/cr$. Os resíduos das observações da mesma linha e da mesma coluna que y_{ij} diminuirão.

Se $\lambda < 0$, a observação y_{ij} sofrerá um decréscimo; o seu resíduo bem como os de observações em outras linhas e colunas serão reduzidos. Os resíduos das observações na mesma linha ou na mesma coluna que y_{ij} ficarão aumentados.

Evidentemente, que a variância dos resíduos permanece inalterada.

2.5. A DETECÇÃO DE UM VALOR DISCORDANTE

ANSCOMBE e TUKEY (1963) e BARNETT e LEWIS (1978) alertam que quase todos os procedimentos de análise de resíduos são sensíveis à presença de valores aberrantes ou contaminantes. Particularmente, os testes para detectar ausência de normalidade, para não-aditividade removível e heterogeneidade de variâncias geram indicações de comportamento discrepante de uma ou mais observações. No entanto, o uso

destes testes com o objetivo de detectar prováveis "outliers" poderia gerar confusão, uma vez que seu resultado poderá ser devido a esses dados ou ao verdadeiro propósito do teste.

Para ANSCOMBE e TUKEY (1963) os processos gráficos são os menos afetados pela presença de dados aberrantes.

Uma variedade de métodos gráficos tem sido usada para investigar a validade das várias hipóteses básicas da análise da variância de dados obtidos sob um delineamento experimental. Para BARNETT e LEWIS (1978), mais frequentemente estão sob investigação as hipóteses de normalidade, aditividade ou homocedasticidade, porém as performances dos gráficos são sensíveis à presença de valores aberrantes. Nessa situação, é difícil distinguir, especificamente, que hipótese básica não está satisfeita e está causando o comportamento inaceitável do gráfico. Porém, algumas vezes o método é mais sensível a um aspecto do que outro e isso deve ser levado em consideração na avaliação gráfica.

Entretanto, existem procedimentos gráficos dirigidos especificamente a exibir ou examinar valores discordantes (BARNETT e LEWIS, 1978). NETER e WASSERMAN (1974) recomendam a construção do gráfico dos resíduos padronizados (na forma 2.3.9) contra os $\hat{y}$ estimados, no qual o resíduo correspondente ao "outlier" apresenta o comportamento mostrado na Figura 3.

Figura 3. Gráfico dos resíduos padronizados contra y estimados, caracterizando a presença de um "outlier".

Fonte: Adaptado de NETER e WASSERMAN (1974).

Diversos autores como WILK e GNANADESIKAN (1968), SEBER (1977), BARNETT e LEWIS (1978), DANIEL e WOOD (1980), COOK e WEISBERG (1982) admitem a utilidade de gráficos de probabilidade na detecção de um valor discordante em amostras univariadas.

Para DANIEL e WOOD (1980) tanto o gráfico de resíduos contra valores y ajustados como o gráfico de probabilidade normal dos resíduos são necessários para detectar um ponto discordante. Para ilustração do comportamento dos gráficos, os autores apresentam os dois tipos construídos para um conjunto de 58 resíduos com um "outlier" (Figuras 4 e 5).

Figura 4. Gráfico dos resíduos ordinários contra y estimados.
 Fonte: Adaptado de DANIEL e WOOD (1980).

Em gráficos de probabilidade normal, o elemento discordante da "amostra" situa-se em um dos extremos do gráfico, enquanto os demais pontos tendem a uma linha reta (SEBER, 1977; DANIEL e WOOD, 1980; COOK e WEISBERG, 1982).

2.5.1. GRÁFICOS DE PROBABILIDADE NORMAL

Os gráficos de probabilidade são usados comumente, como um complemento de um teste estatístico formal da

Figura 5. Gráfico de probabilidade normal de resíduos ordinários, caracterizando a presença de um "outlier".
 Fonte: Adaptado de DANIEL e WOOD (1980).

hipótese distribucional. A idéia de complementar o teste escolhido não tem o sentido de confirmar ou colocar em dúvida a conclusão obtida do teste, mas sim apenas visualizar melhor essa conclusão.

LOONEY e GULLEDGE (1985) sugerem o exame do gráfico probabilístico antes de ser efetuado um teste de hipótese formal, ao contrário da idéia de ser um teste "aumentado" pelo gráfico.

KIMBALL (1960) aponta três tipos de objetivos ao se usar um gráfico de probabilidade:

- i) verificar se a amostra disponível é oriunda de determinada população;
- ii) obter estimativa do parâmetro de dispersão da distribuição que originou os dados;
- iii) detectar valores discrepantes.

Esses objetivos podem sobrepor-se.

DANIEL e WOOD (1980) e COOK e WEISBERG (1982) fazem referência à utilidade dos gráficos probabilísticos com os objetivos (i) e (iii) acima.

De acordo com WILK e GNANADESIKAN (1968), a es sência de um gráfico de probabilidade está em localizar os va lores amostrais ordenados contra alguns valores representati-
vos, à partir de uma presumida distribuição nula padrão.

O fundamento geral da construção de gráficos de probabilidade normal é que se os valores de uma amostra da da forem de uma população normal, então sua função de distri-
buição acumulada empírica deve estar "próxima" de $\Phi(x)$ na Fi-
gura 6, para qual tem-se:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz, \text{ onde } z \text{ é uma variável aparente,}$$

$$\text{e } \Phi(x_0) = P(-\infty < X < x_0).$$

Figura 6. A função de distribuição normal.

A avaliação da proximidade à $\Phi(x)$ é facilitada pelo uso do papel normal de probabilidade cuja escala é tal que os valores da $\Phi(x)$ (teórica) formam uma linha reta. Ou seja, a escala vertical do gráfico da Figura 6 é transformada não uniformemente como mostra a Figura 7. Em papel de probabilidade normal, o gráfico de $100 \cdot \Phi(x)$ contra valores da variável $X \sim N(0,1)$ é uma linha reta.

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ o gráfico correspondente à Figura 7 será ainda uma linha reta, porém com diferente declividade e posição (SEBER, 1977).

Assim, sejam $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ as estatísticas de ordem de uma amostra cuja função de distribuição (acumulada) é supostamente da forma $\Phi[(x-\mu)/\sigma]$, onde μ e σ são os parâmetros de posição e dispersão, respectivamente. Para se construir um gráfico de probabilidade em papel normal de

Figura 7. A função de distribuição normal em papel de probabilidade normal.

Fonte: adaptado de SEBER (1977).

probabilidade, a amostra de estatísticas de ordem $x_{(k)}$ é localizada no eixo de escala linear (geralmente horizontal) contra p_k , no eixo de escala não linear, onde p_k é uma estimativa de $\Phi[(x_{(k)} - \mu)/\sigma]$, isto é, é uma função de distribuição (acumulada) empírica. Essa estimativa da probabilidade, p_k , é chamada posição de "plot" ("plotting position") e existem diversas fórmulas propostas para sua obtenção como será abor-

dado. Sob a hipótese de que os x_k 's formam uma amostra identicamente distribuída, $N(\mu, \sigma^2)$, espera-se um comportamento linear dos pontos no papel de probabilidade.

Outra maneira de se construir um gráfico probabilístico normal pode ser obtida localizando-se o vetor observado de estatísticas de ordem, $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, contra o vetor esperado de estatísticas de ordem obtido com base na função de distribuição acumulativa, F_0 , da variável padronizada $(X-\mu)/\sigma$ (LLOYD, 1952). Nesse caso, é dispensado o uso do papel normal de probabilidade. Espera-se uma relação linear entre os dois vetores de estatísticas de ordem, caso X seja normal.

Para COOK e WEISBERG (1982), a construção do gráfico sem o papel de probabilidade pode ser dificultada pela inviabilidade de se obter valores exatos para as estatísticas de ordem esperadas. Nesse caso, aproximações adequadas são obtidas de $\Phi^{-1}(p_k)$. Essas aproximações são quantis normais correspondentes à k -ésima observação ordenada, isto é, se p_k é a estimativa de $\Phi[(x_{(k)}-\mu)/\sigma]$, então o k -ésimo quantil será $\Phi^{-1}(p_k)$.

Adequadamente, WILK e GNANADESIKAN (1968) denominam gráficos Q-Q ("Q-Q plot"), de quantil "versus" quantil, a esses gráficos probabilísticos. De fato, localiza-se cada "quantil amostral", $x_{(k)}$, contra um correspondente "quantil teórico padrão", $\Phi^{-1}(p_k)$.

O problema da escolha da posição de "plot" tem

sido discutido por muitos autores, dentre eles HARTER (1961), FILLIBEN (1975), CUNNANE (1978) e HOAGLIN et alii (1983) atribuem a Blom (1958) a proposta de aproximar a estimativa da probabilidade acumulada por meio da fórmula

$$p_k = \frac{k - c}{n - 2c + 1} \quad (2.5.1)$$

onde $k = 1, \dots, n$, é a ordem da observação na amostra ordenada de tamanho n ; c é uma função de n , $0 \leq c < 1$.

Ou seja, a k -ésima estatística de ordem para uma amostra de tamanho n será aproximada por

$$E(X_{(k)}) = \Phi^{-1} \left(\frac{k-c}{n-2c+1} \right) \quad (2.5.2)$$

Na prática os autores simplificam o uso da expressão (2.5.1) assumindo um valor constante para c (MAGE, 1982).

MAGE (1982), seguindo o estudo de KIMBALL (1960) sobre a escolha de p_k , apresenta nove diferentes convenções observadas na literatura estatística, conforme a Tabela 6.

CUNNANE (1978) e LOONEY e GULLEDGE (1985) atribuem as fórmulas 1 e 8, respectivamente, a Weibull (1939) e Hazen (1914), afirmando serem as mais usadas. Observa-se, de fato, que autores como WILK e GNANADESIKAN (1968), SEBER (1977) e DANIEL e WOOD (1980) fazem uso da fórmula 8 da Tabela 6.

Tabela 6. Posições de "plot" recomendadas na literatura estatística.

Fórmula	Valor de c na equação (2.5.1)	Posição de "plot" (p_k)	Referências
1	0,0000	$1/(n+1)$	Gumbel (1954)
2	0,3000	$(k-0,3)/(n+0,4)$	Benard e Bos-Levenbach (1953)
3	0,3175	$(k-0,3175)/(n+0,365)$	Filliben (1975)
4	0,3330	$(k-0,33)/(n+0,33)$	Biomedical (1979)
5	0,3750	$(k-0,375)/(n+0,25)$	Blom (1958)
6	0,4000	$(k-0,4)/(n+0,2)$	Larsen, Curran e Hunt (1980)
7	0,4400	$(k-0,44)/(n+0,12)$	Gringorten (1963)
8	0,5000	$(k-0,5)/n$	Hahn e Shapiro (1967) Wilk e Gnanadesikan (1968) Bowker e Lieberman (1972)
9	0,5670	$(k-0,567)/(n-0,134)$	Larsen, Curran e Hunt (1980)

Fonte: MAGE (1982)

Segundo HARTER (1961), Blom investigou o valor de c que resultaria no valor correto de $E(X_{(k)})$, $k=1, \dots, (n/2)$, quando $n = 2(2)10(5)20$. Blom teria observado que os valores de c crescem quando n cresce, permanecendo no intervalo $(0,33, 0,50)$. Ele sugeriu o uso de $c = 3/8$ como o valor mais adequado para aproximar estatísticas de ordem normais em (2.5.2).

Embora HARTER (1961) considere o valor de $c=3/8$ baixo, exceto para pequenos valores de n , KIMBALL (1960) e CUNNANE (1978) recomendam a aproximação de Blom (fórmula 5 da Tabela 6). E, ainda, para LOONEY e GULLEDGE (1985) essa posição de "plot" tem sido a mais aceita atualmente, inclusive sendo usada nos gráficos de probabilidade produzidos pelo Sistema de Análise Estatística (SAS - Statistical Analysis System).

HARTER (1961) apresenta a tabela de valores esperados das k -ésimas maiores estatísticas de ordem normais, $E(X_{(k)})$, $k = (n/2+1), \dots, n$ (n par) ou $k = (n/2 + 0,5), \dots, n$ (n ímpar), para $n = 2(1)100(25)250(50)400$ obtidas de:

$$E(X_{(k)}) = k \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} x [1/2 - \Phi(x)]^{k-1} [1/2 + \Phi(x)]^{n-k} \phi(x) dx,$$

onde

$$\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-(1/2)x^2} \quad \text{e} \quad \Phi(x) = \int_0^x \phi(y) dy.$$

Os valores esperados das k menores observações para um dado n são os mesmos, apenas precedidos do sinal negativo, isto é, $E(X_{(k)}) = -E(X_{(n-k+1)})$.

Para WILK e GNANADESIKAN (1968) as configura

ções gráficas resultantes são similares ao serem usados quantis aproximados ou valores esperados como posição de "plot". Porém, consideram mais conveniente, conceitualmente e para efeito de cálculo, empregar quantis ao invés de valores esperados.

Após ter sido escolhida a posição de "plot" e construído o gráfico de probabilidade normal, um critério formal para interpretar o gráfico é necessário. Existe maior preocupação com o julgamento do gráfico em relação à hipótese distribucional de normalidade (objetivo (i) de KIMBALL (1960)).

MAGE (1982) cita como desvantagem dos gráficos de probabilidade a falta de regras para traçar a linha reta que melhor se ajusta aos pontos e de maneiras objetivas simples para julgar quão bem está esse ajustamento. Segundo o autor, o exame da literatura não aponta um processo único aceito para traçar a linha reta no papel probabilístico, sendo, geralmente, traçada "a olho", porém, Bowker e Lieberman (1972), citados por MAGE (1982), dizem que o método de mínimos quadrados pode ser usado. E, ainda, o julgamento de um gráfico não é uniforme quando feito por diversas pessoas, pois, em geral, é usado um critério subjetivo, isto é, de avaliação visual.

Julgar a adequação de um gráfico probabilístico exige experiência (COOK e WEISBERG, 1982). SEBER (1977) alerta para que gráficos probabilísticos sejam tratados com cautela: deve ser considerada a "forte evidência não estatística" e o número total de observações, n . Para esse autor,

"quando n é pequeno é quase impossível dizer se uma única observação é um verdadeiro 'outlier'".

DANIEL e WOOD (1980) apresentam diversos exemplos de gráficos probabilísticos normais com n variando de 8 a 384. Os autores concluem que conjuntos de tamanho 8 quase nada dizem sobre normalidade, conjuntos de 16 mostram muitas oscilações, conjuntos de 32 são visivelmente melhor comportados, conjuntos de 64 aparecem lineares na região central, mas flutuam nas extremidades, e conjuntos de 384 são estáveis a não ser por poucos pontos nas extremidades.

SEBER (1977) faz referência aos gráficos citados acima e recomenda que n seja pelo menos 20 e, preferivelmente, maior que 50.

MAGE (1982) propõe um método objetivo para traçar a linha reta de modo a obter o menor valor para a estatística $D_n = \max |F(x) - S_n(x)|$, de Kolmogorov-Smirnov. Compara-se o D_n obtido do gráfico com o valor tabelado por Lilliefors (1967), para concluir se a linha reta é uma adequada representação da distribuição do conjunto de dados.

Outro procedimento para avaliar gráficos de probabilidade normal é o teste proposto por SHAPIRO e WILK (1965). A estatística do teste, W , é essencialmente a razão entre dois estimadores de σ^2 : o quadrado do melhor estimador linear do parâmetro de dispersão e a variância amostral (FILLIBEN, 1975 e LOONEY e GULLEDGE, 1985). A estatística W é definida por

$$W = \frac{w^2}{s^2} \quad (2.5.3)$$

onde $w = \sum_{k=1}^{[n/2]} a_{n-k+1} (x_{(n-k+1)} - x_{(k)})$, para n par, $n = 2t$, sendo a_{n-k+1} valores tabelados (Tabela A3 do Apêndice). Se n é ímpar, $n = 2t+1$, o cálculo é idêntico, porém com $a_{t+1} = 0$. Em contra-se então

$$w = a_n (x_{(n)} - x_{(1)}) + a_{n-1} (x_{(n-1)} - x_{(2)}) + \dots + a_{t+2} (x_{(t+2)} - x_{(t)}).$$

s^2 é a soma de quadrados dos desvios $(x_k - \bar{x})$.

Calculado o valor de W , compara-se com o valor tabelado correspondente ao n e ao nível de significância, α , desejado. Pequenos valores de W são significantes (Tabela A4 do Apêndice), isto é, indicam não normalidade (SHAPIRO e WILK, 1965).

BARNETT e LEWIS (1984) consideram a estatística W de relevância para testar dados discordantes sendo este teste referido como um teste bilateral para a presença de um número indefinido de contaminantes em amostra normal com μ e σ^2 desconhecidos.

FILLIBEN (1975) sugere o uso do coeficiente de correlação de Pearson como medida da linearidade do gráfico de probabilidade. A estatística do teste é o coeficiente de correlação entre as observações ordenadas, $x_{(k)}$, e quantis correspondentes da $N(0,1)$, $M_k = \Phi^{-1}(p_k)$, onde p_k é dado por

$$p_k = \begin{cases} 1 - p_n, & k = 1 \\ (k-0,3175)/(n+0,365), & k = 2, 3, \dots, (n-1) \\ (0,5)1/n, & k = n \end{cases}$$

O coeficiente de correlação para o gráfico probabilístico normal entre $x_{(k)}$ e M_k é então definido por:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(M_k - \bar{M})}{\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot \sum_{k=1}^n (M_k - \bar{M})^2 \right]^{1/2}} \quad (2.5.4)$$

O mesmo autor apresenta diversas propriedades da estatística r e a tabela de valores críticos (mínimos) para r quando $n = 3(1)50(5)100$ e diversos níveis de significância.

Para LOONEY e GULLEDGE (1985) técnicas como a de MAGE (1982) e de SHAPIRO e WILK (1965) não avaliam a linearidade do gráfico probabilístico tão diretamente como o coeficiente de correlação. Seguindo, então, a idéia de FILLIBEN (1975), eles avaliaram o uso do coeficiente de correlação em gráfico de probabilidade normal, concluindo que o teste do coeficiente de correlação é um teste mais poderoso que o teste de Shapiro-Wilk, quando utiliza-se a posição de "plot" da fórmula 5 da Tabela 6, proposta por Blom. A Tabela A5 do Apêndice apresenta os limites mínimos para o r calculado originalmente empiricamente por LOONEY e GULLEDGE (1985).

2.5.2. OS MÉTODOS PROPOSTOS POR GENTLEMAN e WILK (1975a; 1975b)

Gráficos de probabilidade são usados numa bateria de métodos de detecção de dados discordantes descritos por GENTLEMAN e WILK (1975a; 1975b).

No primeiro trabalho, GENTLEMAN e WILK (1975a) examinam resíduos oriundos de tabelas de classificação dupla (experimentos com dois fatores), admitindo aditividade de linhas e colunas. Eles examinam gráficos de probabilidade normal, e meio-normal confirmando sua utilidade na detecção de um valor discordante, e que, no caso de não haver "outliers", os resíduos comportam-se aproximadamente como uma amostra normal, especialmente para grandes configurações.

Quando dois ou mais valores discordantes estão presentes, GENTLEMAN e WILK (1975a) demonstram, que ocorrem "efeitos compensadores" e o gráfico de probabilidade tem pouco valor.

Para o julgamento parcial dos gráficos probabilísticos de resíduos, GENTLEMAN e WILK (1975a) usaram a estatística W , de SHAPIRO e WILK (1965), que consideraram ser uma medida sensível à não-normalidade e que responde à presença de um "outlier". Isso foi comprovado através de gráficos da função de distribuição acumulada empírica de W , obtida de resíduos, contra a função de distribuição acumulada de W para amostras normais. Se as duas funções fossem as mesmas, isto é, se resíduos comportam-se próximos a uma amostra normal, então seria obtida uma linha reta passando pela origem e de declividade 1. Foram feitos os gráficos para várias configurações da tabela de dados com "resíduos nulos" (sem "outlier") e com um "outlier" de magnitude 5σ introduzido no conjunto de dados.

Entre as conclusões de GENTLEMAN e WILK (1975a) tem-se que, no caso de não haver "outliers" em dados de ensaios com dois fatores, os resíduos comportam-se de modo muito semelhante a uma amostra de população normal, e tendem a apresentar "super-normalidade" para pequenas configurações. Quando um dado aberrante está presente, o uso direto de resíduos proporciona uma base completa para sua detecção, especialmente através do uso de gráficos probabilísticos. Quando estão presentes dois valores aberrantes, porém, os resíduos resultantes não demonstram, em geral, peculiaridades, seja através da avaliação visual do gráfico probabilístico, seja através da estatística W.

No segundo trabalho, GENTLEMAN e WILK (1975b) levam em consideração a redução na soma de quadrados de resíduos causada pela omissão de K valores do conjunto de dados. Resumindo a metodologia proposta pelos autores, o processo consiste na escolha de um valor K como o número máximo razoável de prováveis "outliers" ($K \ll (n-p)$); calcular para todas as possíveis $\binom{n}{K}$ partições dos dados o valor de Q_K , sendo

$$Q_K = e'e - e'_*e_*$$

onde $e'e$ é a soma de quadrados de resíduos para os dados originais e e'_*e_* é a soma de quadrados de "resíduos revisados" que resultam do ajuste do modelo básico para o restante dos dados após a omissão do subconjunto de K valores. A maior Q_K , representada por Q_K^* , indica os K valores mais prováveis de serem aberrantes.

Para julgar se a magnitude de Q_K^* é "suficientemente grande" em relação aos demais Q_K 's necessitar-se-ia conhecer sua distribuição nula. Como esta é desconhecida, são usados métodos informais para avaliar a significância de Q_K , que consistem de duas formas de gráficos probabilísticos: o gráfico dos maiores Q_K 's para os dados sob análise contra "valores típicos" desses, obtidos (presumivelmente por simulação) sob o modelo nulo na mesma configuração; e o gráfico de probabilidade normal para os resíduos normalizados (forma 2.3.6).

Se conclui-se que Q_K^* não é estatisticamente aberrante, considera-se, então, sucessivamente um número $K - 1$, $K - 2, \dots$ de prováveis dados aberrantes até um conjunto discrepante significativo ser detectado.

Embora sejam apresentadas fórmulas de cálculo para simplificação do processo para delineamentos de linhas e colunas, a bateria de cálculos é bastante grande (BARNETT e LEWIS, 1978). GENTLEMAN e WILK (1975b) concordam que é um processo pesado em termos de cálculos, mas argumentam que computadores o tornam relativamente simples e rápido para valores razoáveis de K (tal como 3) e de n (tal como 100).

GENTLEMAN e WILK (1975b) e JOHN e DRAPPER (1978) consideram que o método é bastante aplicável para $K = 1$. Nesse caso, cada Q_1 é proporcional ao quadrado do resíduo normalizado e será estatisticamente equivalente ao resíduo absoluto para o caso onde todos os resíduos têm igual variância, ou seja, em ensaios balanceados. E nesse caso, também o gráfi-

co probabilístico normal dos resíduos é equivalente ao gráfico dos Q_1 , quando, de fato, somente um "outlier" está presente.

Na obtenção de Q_1 , a soma de quadrados dos resíduos revisados pode ser obtida inserindo-se a estimativa de mínimos quadrados em lugar da observação suspeita e calculando-a então, do reajuste do modelo a todas as n observações (GENTLEMAN, 1980).

2.6. UM TESTE DE DISCORDÂNCIA PARA UM ÚNICO "OUTLIER"

Após a detecção de uma observação discordante através de um processo informal, um teste estatístico adequado deverá confirmar sua inaceitabilidade. Só então pode se afirmar que existe um valor aberrante no conjunto de dados experimentais, tendo por base um modelo inicial especificado (BARNETT e LEWIS, 1978).

Os resíduos studentizados (forma 2.3.4) desempenham um papel central nos testes de discordância para um único valor discrepante em um modelo linear normal (BARNETT e LEWIS, 1978; BECKMAN e COOK, 1982). Para BARNETT e LEWIS (1978) existe quase total preocupação com o resíduo studentizado máximo (positivo, negativo ou absoluto) como estatística teste que indicará a observação discrepante se for "suficientemente grande". Assim, para o teste bilateral rejeita-se a

hipótese básica de que o modelo (2.3.1) é correto em favor de uma hipótese que postule um único valor aberrante se

$$\max |r_i| > h_\alpha$$

onde, para um nível de significância α , o valor crítico h_α é tal que

$$P [\max |r_i| \geq h_\alpha | H_0] = \alpha \quad (2.6.1)$$

ou seja, sob o modelo (2.3.1), o modelo alternativo (2.3.5) ou (2.3.6) ocorre com probabilidade α (ELLENBERG, 1976; BARNETT e LEWIS, 1978; DOORNBOS, 1981). A observação que produz o valor máximo de r_i será ou não declarada como aberrante.

Não é comum a preocupação em estabelecer o modelo alternativo, isto é, o modelo de discordância que caracterize a hipótese alternativa do teste (BARNETT e LEWIS, 1978). BECKMAN e COOK (1982) e COOK e PRESCOTT (1951) admitem que, para dados estruturados sob o modelo de Gauss-Markov, é comumente adotado, ainda que não explicitamente, o modelo de deslizamento da média (2.3.5). De fato, em ELLENBERG (1976), BARNETT e LEWIS (1984) e DOORNBOS (1981) a hipótese a ser testada é a de que o modelo (2.3.1) é correto, contra um modelo alternativo para o qual existe um y_i , onde i é um valor qualquer desconhecido, com esperança diferente de $x'_{i*}\theta$, onde x'_{i*} é a i -ésima linha de X .

Muitos trabalhos tem sido desenvolvidos sobre o problema de determinar valores críticos para os resíduos stu-

dentizados (BARNETT e LEWIS, 1984; BECKMAN e COOK, 1983). A princípio, a determinação desses valores críticos envolveria a distribuição da estatística-teste. Como a distribuição exata de $\max |r_i|$ sob H_0 , tal como (2.6.1), é de difícil determinação, ELLENBERG (1973) sugeriu estabelecer os valores críticos para o resíduo máximo a partir do uso iterativo da desigualdade de Bonferroni. A desigualdade de Bonferroni, aplicada ao evento $|r_i| > r_0$, onde $|r_i|$ é o valor absoluto do i -ésimo resíduo studentizado, fica (BARNETT e LEWIS, 1984):

$$\sum_{i=1}^n P(|r_i| > r_0) - \sum_{i < j} P(|r_i| > r_0, |r_j| > r_0) \leq P(\max |r_i| > r_0) \leq \sum_{i=1}^n P(|r_i| > r_0) \quad (2.6.2)$$

Além disso, ELLENBERG (1973) determinou a função de densidade conjunta para os resíduos studentizados (2.3.7) divididos pela raiz quadrada dos graus de liberdade desses resíduos, ou seja, $r_i^* = r_i / (n-p)^{1/2}$.

LUND (1975), a partir da função de densidade marginal para r_i^* e empregando a desigualdade de primeira-ordem de Bonferroni (o lado direito de (2.6.2)), construiu tabelas de valores críticos superiores para os resíduos studentizados r_i , em modelos lineares, ao nível $\alpha = 0,10, 0,05$ e $0,01$ e para $n = 5(1)10(2)20(5)50(10)100$ e $p = 1(1)6(2)10,15,25$. BARNETT e LEWIS (1984) consideram a mais útil tabulação atual e DANIEL e WOOD (1980) também abordam o teste viabilizado pela tabela de LUND (1975). Esta tabela está reproduzida no Apêndice (Tabela A6).

Como a tabela de LUND (1975) foi baseada na de sigualdade de primeira-ordem de Bonferroni, ela possibilita um teste para um único valor discordante com nível de significância igual ou menor que o estabelecido. DOORNBOS (1981) e COOK e PRESCOTT (1981) consideram toda a desigualdade (2.6.2), isto é, também a desigualdade de segunda-ordem (o lado esquerdo de (2.6.2)), de modo a obter um limite inferior para o nível de significância do teste para um "outlier" em modelos lineares. DOORNBOS (1981) mostra que, quando as correlações entre resíduos são menores, em valor absoluto, que um certo valor tabelado, ou seja

$$\max |r_{ij,k}| \leq g_{\alpha}, \quad k \neq i \text{ ou } i \neq j$$

então o uso do valor tabelado r_0 leva a um teste para o qual

$$\alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 < P(\max |r_i| > r_0) < \alpha \quad (2.6.3)$$

No mesmo estudo, DOORNBOS (1981) propõe o teste para $r_i/(n-p)^{1/2}$, que é, basicamente, o mesmo teste de LUND (1975), apenas com os resíduos studentizados divididos por $(n-p)^{1/2}$. DOORNBOS (1981) encontrou alguns erros de uma unidade na última casa decimal na tabela de LUND (1975) (Tabela A6 do Apêndice) e refere-se a uma extensa tabela produzida em Doornbos (1980). A Tabela A7 do Apêndice traz os valores críticos para o coeficiente de correlação máximo entre resíduos, g_{α} , extraídos de DOORNBOS (1981).

2.7. HOMOGENEIDADE DE VARIÂNCIAS E ADITIVIDADE

Como já citado no item 2.5., além da ausência de normalidade, tanto a falta de homogeneidade de variâncias como a não-aditividade dos dados sob o modelo adotado podem ter como causa a ocorrência de um ou mais valores aberrantes entre os dados experimentais. A metodologia até aqui aborda da está intimamente ligada à verificação da hipótese distribucional da normalidade, marcadamente no item 2.5.1.

Visando aplicações nos capítulos seguintes, apresenta-se aqui uma rápida abordagem sobre a problemática da heterogeneidade de variâncias e da não-aditividade.

2.7.1. HOMOGENEIDADE DE VARIÂNCIAS

Diversos testes formais estão disponíveis para estudar a homocedasticidade de dados para os quais tenha sido adotado o modelo ANOVA. Citam-se, por exemplo, o teste de Bartlett e o teste de Hartley, abordados por NETER e WASSERMAN (1974). Entretanto, para experimentos de dois fatores ou de um fator e uma restrição na casualização, a aplicação desses testes não é direta, pois as variâncias amostrais não são independentes. Além disso, os dois testes são extremamente sensíveis à ausência de normalidade (NETER e WASSERMAN, 1974).

Considerando as restrições acima, IEMMA (1985) utiliza o teste proposto por BOX (1949, 1950) para verificar

a uniformidade da matriz de covariâncias. Esse teste, de caráter mais geral que os de Bartlett, de Hartley e congêneres, apresenta a vantagem de considerar possíveis correlações entre parcelas que por ventura possam existir. Procedimentos nessa linha de conduta estão descritos em KIRK (1968), HUYHN e FELDT (1970) e GILL (1978).

Então, no contexto de BOX (1949, 1950), considere-se o seguinte, para v níveis ou tratamentos,

$$1. \rho \sigma_{12}^2 = \rho \sigma_{13}^2 = \dots = \rho \sigma_{(v-1)v}^2$$

$$2. \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_v^2$$

isto é, as covariâncias populacionais entre pares de tratamentos são iguais e as variâncias das populações dos v níveis são homogêneas. Se 1 e 2 são verdadeiras a matriz de variâncias e covariâncias

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_{12}^2 & \rho \sigma_{13}^2 & \dots & \rho \sigma_{1v}^2 \\ \rho \sigma_{12}^2 & \sigma_2^2 & \rho \sigma_{23}^2 & \dots & \rho \sigma_{2v}^2 \\ \rho \sigma_{13}^2 & \rho \sigma_{23}^2 & \sigma_3^2 & \dots & \rho \sigma_{3v}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho \sigma_{1v}^2 & \rho \sigma_{2v}^2 & \rho \sigma_{3v}^2 & \dots & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

é uniforme. Assim, para o teste de

$$H_0: V = U$$

$$H_a: V \neq U$$

onde U é a matriz uniforme

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix} \sigma^2$$

o procedimento consiste em se obter

$$\chi_c^2 = (1-E)M$$

onde

$$M = -(b-1) \ln \frac{|V^*|}{|\bar{V}^*|} ; \quad E = \frac{v(v+1)^2 (2v-3)}{6(b-1)(v-1)(v^2+v-4)}$$

e $|V^*|$ é o determinante da matriz amostral de covariâncias;
 $|\bar{V}^*|$ é o determinante da matriz uniforme obtida do polimento
 de V^* , sendo $\bar{V}^* = (v_{ij})$ onde v_{ii} é a média das variâncias amostrais e v_{ij} , $i \neq j$, é a média das covariâncias que estão em V^*
 e b é o tamanho das amostras.

Sob H_0 , $(1-E)M$ tem distribuição aproximada de χ^2 com $(v^2+v-4)/2$ graus de liberdade.

2.7.2. ADITIVIDADE

O modelo de efeitos aditivos descritos em 2.4.,
 $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$, não considera, pela própria natureza,

a interação entre os efeitos dos fatores α e β . No entanto, em situações práticas a interação pode estar presente mesmo que imperceptível ou inexplicável para o pesquisador.

Um teste adequado para a verificação da suposição de aditividade do modelo é proposto por TUKEY (1949). Este teste é sensível à existência de interação como causa da não-aditividade.

O teste consiste basicamente em se verificar as hipóteses:

H_0 : o modelo é aditivo

H_a : o modelo não é aditivo.

O procedimento do teste segue com a obtenção da soma de quadrados da interação por

$$SQAB = \frac{\left[\sum_i \sum_j (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) \right]^2}{\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2}$$

Obtida SQAB, esta é subtraída da soma de quadrados do resíduo, sendo obtida a soma de quadrados do erro puro

$$SQEP = SQResíduo - SQAB$$

cujos graus de liberdade são (g.l.resíduos - 1), que para o caso de ensaio de dois fatores será $(r-1)(c-1)-1$. A seguir obtém-se a estatística do teste:

$$F_{\tilde{N}A} = \frac{SQAB}{SQEP/(rc-r-c)}$$

Sob H_0 , SQAB e SQEP são independentemente distribuídos e $F_{\tilde{N}A}$ tem distribuição $F_{(1,rc-r-c)}$.

2.8. PROCEDIMENTOS REMEDIADORES NA PRESENÇA DE UMA OBSERVAÇÃO ABERRANTE

Embora os procedimentos remediadores não constituam o objetivo formal deste estudo, julgou-se que a discussão dos exemplos no capítulo 4, ficaria enriquecida através de sua apresentação. Desse modo, apresentam-se aqui algumas idéias básicas sobre o assunto.

Ficando constatada a presença de "outliers" no conjunto de dados em estudo, a indagação que surge é como reagir a eles. Em BARNETT e LEWIS (1978; 1984) esta questão é discutida amplamente tendo por base os procedimentos gerais que se pode observar na Figura 1, de 2.1. As possíveis ações em relação a dados aberrantes devem ser consideradas em conformidade com sua origem (quando for possível assegurar qual a sua causa) e com o propósito da análise estatística (ANSCOMBE e TUKEY, 1963; BARNETT e LEWIS, 1984; BECKMAN e COOK, 1983).

A presença de "outliers" num conjunto de dados obtidos sob um modelo linear pode ser um indicativo de especificações inadequadas da estrutura de erros ou do próprio mo-

delo básico. Neste sentido, torna-se bastante importante o estudo de origem e forma, isto é, a "identificação" com a co notação dada por BARNETT e LEWIS (1978).

Quando se suspeita que um dado discrepante é uma observação correta de um fenômeno pouco comum, ele pode ser modificado, atribuindo-se um peso menor, ou eliminado da análise de variância e avaliado separadamente. Outra possibilidade é a transformação de todas as observações a fim de se efetuar a análise de variância usual, ou, ainda, o uso de análise não-paramétrica (ANSCOMBE e TUKEY, 1963).

Autores como ANSCOMBE e TUKEY (1963), NETER e WASSERMAN (1974) e BARNETT e LEWIS (1984) concordam em que se existem evidências de medição mal feita ou erro de registro como origem de um dado aberrante, se não for possível corrigí-lo, causa menos problema descartá-lo do que utilizá-lo na condução da análise. Naturalmente, este procedimento é mais simples em amostras univariadas do que em dados estruturados, para os quais métodos formais de rejeição ou de acomodação estão menos desenvolvidos (BARNETT e LEWIS, 1984).

No contexto de experimentos balanceados, uma alternativa viável para contornar o problema da ocorrência de um único dado aberrante é substituí-lo pela estimativa de mínimos quadrados, procedendo-se a análise conclusiva, como se aquela observação fosse perdida. Esta possibilidade está implícita em BARNETT e LEWIS (1984) e é sugerida em DODGE (1985), em especial para quando a observação aberrante é admitida ser

de natureza determinística e não se tem como corrigir ou recuperar o verdadeiro valor.

Cabe ressaltar que esta alternativa é sensata, dependendo de uma variedade de fatores relativos ao interesse do pesquisador na situação prática. A garantia de que a causa do "outlier" é um erro de registro ou medição ou uma influência estranha de nenhum interesse prático é relativa à confiança no modelo adotado. Por sua vez, considerar um modelo inicial como inviolável, pressupõe um planejamento rigoroso do experimento, um conhecimento seguro do material experimental e um bom controle local das condições experimentais.

Através da Figura 1, pode-se cogitar outros procedimentos remediadores, tais como acomodação, incorporação e identificação (no sentido do estudo separado de origem e forma). Estes procedimentos não serão aqui abordados.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. MATERIAL

A fim de ilustrar a metodologia abordada no item 2, são mostrados exemplos numéricos de ensaios em blocos casualizados. Os exemplos são compostos de dados hipotéticos, sendo que o primeiro deles constitui o chamado ensaio nulo, isto é, não contendo dados discordantes ou aberrantes. Os exemplos subsequentes resultam da contaminação dos dados do ensaio nulo, obtida por adição de um valor arbitrado λ_{ij} a uma observação de posição (i, j) , de modo a constituírem exemplos de ensaios que possibilitem aplicar e discutir a metodologia abordada, caracteristicamente, com a presença de um valor aberrante dentre os dados experimentais. Este procedimento foi usado seguindo GENTLEMAN e WILK (1975a, 1975b), conforme descrito em 2.5.2.

É importante ressaltar que os exemplos obtidos

a partir do ensaio nulo não constituem situações que poderiam ser consideradas absurdas na prática. Antes, são dados que, "a primeira vista" de um pesquisador podem ser perfeitamente razoáveis, isto é, sem qualquer valor inadequado no conjunto. Apenas optou-se por este caminho, isto é, de contaminação de um ensaio nulo, de modo a se ter um referencial na discussão dos efeitos da ocorrência de um único "outlier".

Outrossim, cabe observar que, obviamente, outras inúmeras situações poderiam ter sido obtidas com a adição de diferentes λ_{ij} 's a diferentes observações, melhorando ou rompendo o padrão geral de dados.

a) Ensaio 1: ensaio nulo

Tabela 7. Valores observados do ensaio 1.

Blocos	Tratamentos			
	A	B	C	D
I	7,54	8,48	8,73	9,33
II	9,97	10,82	10,88	11,31
III	7,97	10,21	9,61	11,06
IV	8,06	9,96	9,38	10,42
V	8,71	9,56	8,94	9,44
VI	9,21	8,70	9,81	10,10

b) Ensaio 2: $\lambda_{21} = 3$

Tabela 8. Valores observados do ensaio 2.

Blocos	Tratamentos			
	A	B	C	D
I	7,54	8,48	8,73	9,33
II	12,97	10,82	10,88	11,31
III	7,97	10,21	9,61	11,06
IV	8,06	9,96	9,38	10,42
V	8,71	9,56	8,94	9,44
VI	9,21	8,70	9,81	10,10

c) Ensaio 3: $\lambda_{24} = -3,5$

Tabela 9. Valores observados do ensaio 3.

Blocos	Tratamentos			
	A	B	C	D
I	7,54	8,48	8,73	9,33
II	9,97	10,82	10,88	7,81
III	7,97	10,21	9,61	11,06
IV	8,06	9,96	9,38	10,42
V	8,71	9,56	8,94	9,44
VI	9,21	8,70	9,81	10,10

3.2. MÉTODOS

Apresenta-se aqui, dentre outras, uma sequência de procedimentos a ser aplicada aos três exemplos referidos em 3.1. Após a obtenção dos resíduos são efetuados procedimentos peculiares da análise exploratória de dados. A seguir é feita a análise da variância para os dados do ensaio sem que sejam considerados os resultados da análise exploratória, isto é, estando ou não satisfeitas as pressuposições básicas da análise da variância. Pretende-se com isso, chamar a atenção sobre os riscos de conclusões errôneas na presença de um único "outlier".

Cabe salientar que aqui está se considerando a identificação de um único possível valor aberrante, derivado de perturbações aditivas e relativo a um modelo especificado, neste caso o modelo para experimentos com um fator e uma restrição na casualização aqui caracterizado como o de blocos casualizados.

3.2.1. OBTENÇÃO DOS RESÍDUOS E SUAS CORRELAÇÕES

3.2.1.1. Modelo linear

O modelo linear usual para os ensaios em blocos casualizados, com b blocos e v tratamentos, é caracterizado por:

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + t_j + \varepsilon_{ij}$$

onde, para $i = 1, \dots, b$ e $j = 1, \dots, v$,

y_{ij} é a observação do bloco i que recebeu o tratamento j ;

β_i é o efeito do bloco i ;

t_j é o efeito do tratamento j ;

ϵ_{ij} é o erro experimental não-observável associado a y_{ij} , tal que $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$;

com as restrições usuais $\sum_i \beta_i = 0$ e $\sum_j t_j = 0$, μ é a média geral.

Considerando o modelo linear na sua forma matricial $y = X\theta + \epsilon$ descrito em 2.3, y será um vetor $bv \times 1$, ou seja:

$$y' = [y_{11} \dots y_{1v}; y_{21} \dots y_{2v}; \dots; y_{b1} \dots y_{bv}]$$

$X_{bv \times 1+b+v}$ é a matriz conhecida do delineamento, de posto $b+v-1$ e que tem a forma:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$1+b+v\theta_1$ é um vetor de parâmetros desconhecidos, tal que

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \beta \\ \tau \end{bmatrix} ; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_b \end{bmatrix} ; \quad \tau = \begin{bmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_v \end{bmatrix}$$

$bv\varepsilon_1$ é um vetor de variáveis aleatórias não-observáveis, tal que $\varepsilon \sim N(\Phi, I\sigma^2)$.

3.2.2.2. Matriz de projeção e correlações entre resíduos

O sistema de equações normais será

$$X'X\theta^0 = X'y$$

tendo por solução de mínimos quadrados

$$\theta^0 = (X'X)^G X'y$$

onde $(X'X)^G$ é uma inversa generalizada de $(X'X)$. Para o sistema irrestrito pode-se tomar, por exemplo, $(X'X)^G = (X'X)^-$, onde $(X'X)^-$ pode ser da seguinte forma (SOUZA, 1984):

$$(X'X)^- = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} -1/bv & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1/v & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/v & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1/b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1/b \end{array} \right]$$

Como

$$X'y = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ \dots \\ y_{b.} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \\ \dots \\ y_{.v} \end{bmatrix}$$

com a escolha da inversa condicional $(X'X)^{-}$, a solução obtida para o sistema de equações normais será:

$$\hat{\theta} = [-\bar{y}_{..} \quad \bar{y}_{1.} \quad \dots \quad \bar{y}_{b.} \quad \bar{y}_{.1} \quad \dots \quad \bar{y}_{.v}]$$

A matriz de projeção ou matriz chapéu é invariante para qualquer escolha de $(X'X)^G$ (IEMMA, 1985). Obteve-se a forma genérica para a matriz de projeção apresentada a seguir.

		i=1				i=2				i=3				...				i=b			
		j=1	j=2	...	j=v																
i=1	j=1	b+v-1	b-1	...	b-1	v-1	-1	...	-1	v-1	-1	...	-1	...	v-1	-1	...	-1			
	j=2	b-1	b+v-1	...	b-1	-1	v-1	...	-1	-1	v-1	...	-1	...	-1	v-1	...	-1			
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...			
	j=v	b-1	b-1	...	b+v-1	-1	-1	...	v-1	-1	-1	...	v-1	...	-1	-1	...	v-1			
i=2		v-1	-1	...	-1	b+v-1	b-1	...	b-1	v-1	-1	...	-1	...	v-1	-1	...	-1			
		-1	v-1	...	-1	b-1	b+v-1	...	b-1	-1	v-1	...	-1	...	-1	v-1	...	-1			
		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...			
		-1	-1	...	v-1	b-1	b-1	...	b+v-1	-1	-1	...	v-1	...	-1	-1	...	v-1			
i=3		v-1	-1	...	-1	v-1	-1	...	-1	b+v-1	b-1	...	b-1	...	v-1	-1	...	-1			
		-1	v-1	...	-1	-1	v-1	...	-1	b-1	b+v-1	...	b-1	...	-1	v-1	...	-1			
		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...			
		-1	-1	...	v-1	-1	-1	...	v-1	b-1	b-1	...	b+v-1	...	-1	-1	...	v-1			
i=b		v-1	-1	...	-1	v-1	-1	...	-1	v-1	-1	...	-1	...	b+v-1	b-1	...	b-1			
		-1	v-1	...	-1	-1	v-1	...	-1	-1	v-1	...	-1	...	b-1	b+v-1	...	b-1			
		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...			
		-1	-1	...	v-1	-1	-1	...	v-1	-1	-1	...	v-1	...	b-1	b-1	...	b+v-1			

Ou seja, H é uma matriz $bv \times bv$ com as seguintes componentes:

$$h_{ij,ij} = (b+v-1)/bv \quad (3.2.1)$$

$$h_{ij,il} = (b-1)/bv, \quad l \neq j \quad (3.2.2)$$

$$h_{ij,kj} = (v-1)/bv, \quad k \neq i \quad (3.2.3)$$

$$h_{ij,kl} = -1/bv, \quad k \neq i, l \neq j \quad (3.2.4)$$

Logo, as componentes do projetor ortogonal são idênticas àsquelas mostradas por (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) e (2.4.4) para o modelo de classificação dupla sem interação, apenas com c e r substituídos pelo número de blocos (b) e número de tratamentos (v), respectivamente.

Da mesma forma, o vetor de resíduos ordinários dado por

$$e = (I-H)y$$

terá matriz de variâncias e covariâncias, bem como matriz de correlações, análogas àsquelas abordadas em 2.4, apenas substituídos c por b e r por v . Portanto:

$$\text{Var}(e_{ij}) = [1 - (b+v-1)/bv] \sigma^2 \quad (3.2.5)$$

$$\text{Cov}(e_{ij}, e_{il}) = -(b-1)\sigma^2/bv, \quad l \neq j \quad (3.2.6)$$

$$\text{Cov}(e_{ij}, e_{kj}) = -(v-1)\sigma^2/bv, \quad k \neq i \quad (3.2.7)$$

$$\text{Cov}(e_{ij}, e_{kl}) = \sigma^2/bv, \quad k \neq i, \quad l \neq j \quad (3.2.8)$$

E as correlações entre resíduos serão:

$$\rho_{ij,il} = -1/(v-1), \quad l \neq j, \quad \text{entre resíduos correspondentes a observações situadas no mesmo bloco;} \quad (3.2.9)$$

$$\rho_{ij,kj} = -1/(b-1), \quad k \neq i, \quad \text{entre resíduos correspondentes a observações que receberam mesmo tratamento;} \quad (3.2.10)$$

$\rho_{ij,kl} = 1/(b-1)(v-1)$, $k \neq i$, $l \neq j$, entre resíduos correspondentes a observações situadas em blocos diferentes e de tratamentos distintos. (3.2.11)

Logo, as correlações entre resíduos são fixas para uma determinada configuração de b blocos e v tratamentos.

Com o acréscimo de um valor arbitrado λ a uma observação y_{ij} o vetor de observações será:

$$y^{*1} = [y_{11}y_{12}\dots y_{1v}; \dots; y_{i1}\dots(y_{ij}+\lambda)\dots y_{iv}; \dots; y_{b1}\dots y_{bv}]$$

e

$$X'y^* = \begin{bmatrix} y_{..} + \lambda \\ \hline y_{1.} \\ \vdots \\ y_{i.} + \lambda \\ \vdots \\ y_{b.} \\ \hline y_{.1} \\ \vdots \\ y_{.j} + \lambda \\ \vdots \\ y_{.v} \end{bmatrix}$$

Desse modo, o vetor solução fica:

$$\hat{\theta}^* = [-(\bar{y}_{..} + \lambda/bv) \mid \bar{y}_{1.} \ \bar{y}_{2.} \ \dots (\bar{y}_{i.} + \lambda/v) \dots \bar{y}_{b.} \mid \bar{y}_{.1} \ \bar{y}_{.2} \ \dots \\ \dots (\bar{y}_{.j} + \lambda/b) \dots \bar{y}_{.v}] .$$

Obtido o vetor $y^* = X\hat{\theta}^*$, que caracteriza a aproximação de mínimos quadrados, invariante para qualquer solução das equações normais, o vetor de resíduos, considerando-se o valor λ , será:

$$e^* = y^* - \hat{y}^* = \begin{bmatrix} y_{11} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{.1} \\ \dots \\ y_{1j} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - \bar{y}_{1.} - (\bar{y}_{.j} + \lambda/b) \\ \dots \\ y_{1v} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{.v} \\ \vdots \\ y_{i1} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - (\bar{y}_{i.} + \lambda/v) - \bar{y}_{.1} \\ \dots \\ y_{ij} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - (\bar{y}_{i.} + \lambda/v) - (\bar{y}_{.j} + \lambda/b) \\ \dots \\ y_{iv} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - (\bar{y}_{i.} + \lambda/v) - \bar{y}_{.v} \\ \vdots \\ y_{b1} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - \bar{y}_{b.} - \bar{y}_{.1} \\ \dots \\ y_{bj} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - \bar{y}_{b.} - (\bar{y}_{.j} + \lambda/b) \\ \dots \\ y_{bv} + \bar{y}_{..} + \lambda/bv - \bar{y}_{b.} - \bar{y}_{.v} \end{bmatrix}$$

Portanto, o vetor $e^* = e + \Delta$, sendo $\Delta = (\Delta_{ij})$, onde

$$\Delta_{ij} = \frac{\lambda(b-1)(v-1)}{bv} \quad (3.2.12)$$

$$\Delta_{i1} = -\frac{\lambda(b-1)}{bv}, \quad i \neq j \quad (3.2.13)$$

$$\Delta_{kj} = - \frac{(v-1)}{bv} , \quad k \neq i \quad (3.2.14)$$

$$\Delta_{kl} = \frac{\lambda}{bv} , \quad k \neq i, \quad l \neq j \quad (3.2.15)$$

A soma de quadrados para os novos resíduos, SQR^* será:

$$e^{*'}e^* = (e+\Delta)'(e+\Delta) = e'e + 2e'\Delta + \Delta'\Delta$$

$$\therefore SQR^* = SQR + 2e'\Delta + \Delta'\Delta$$

$$\text{ou} \quad SQR^* = SQR + S \quad (3.2.16)$$

Como S pode ser maior ou menor que zero, a soma de quadrados de resíduos pode sofrer acréscimo ou decréscimo com a adição de um λ a uma das observações.

3.2.2. ESCOLHA DE UMA ESTRATÉGIA PARA A ANÁLISE EXPLORATÓRIA DOS DADOS

3.2.2.1. Avaliação do padrão geral dos dados

Tendo por base as sugestões de BROSS (1961) é observado o padrão geral dos dados dos ensaios, considerando-se a ordem decrescente de magnitude das observações dentro da coluna (tratamento) e dentro da linha (bloco). Para facilitar esta apreciação é utilizada uma tabela cujas caselas, cor respondentes a cada observação, trazem dois algarismos onde o

superior representa a ordem da observação dentro da coluna (tratamento) e o inferior a ordem na linha (bloco). E, ainda, é apresentado o gráfico de valores observados por bloco, e o gráfico de valores observados por tratamento. Os pontos unidos por linha reta formam uma poligonal que, no primeiro gráfico, constitui o perfil dos tratamentos e, no segundo, o perfil dos blocos. Com estes gráficos, objetiva-se melhorar a visualização do comportamento de tratamentos e de blocos.

3.2.2.2. Identificação de um valor aberrante

A identificação de um único valor aberrante é, conforme em 2.1, composta de duas fases: detecção, onde, através da análise gráfica de resíduos, verifica-se se ocorre um valor discordante, e teste de discordância, onde verifica-se se o valor discordante detectado é, de fato, um dado aberrante ou "outlier".

Assim, tem-se três tipos de procedimentos:

a) Gráficos de resíduos contra y estimados:

São apresentados gráficos de resíduos ordinários contra y estimados, seguindo DANIEL e WOOD (1980) e gráficos de resíduos padronizados contra y estimados, seguindo NETER e WASSERMAN (1974).

A avaliação destes gráficos é feita visualmente e considerando-se o critério informal de NETER e WASSERMAN (1974) em que os resíduos padronizados devem pertencer ao intervalo $(-3,3)$ quando não ocorrem "outliers".

b) Gráficos de probabilidade normal:

Para cada ensaio considerado, são apresentados gráficos de probabilidade normal dos resíduos padronizados. A probabilidade acumulada empírica foi obtida pela expressão

$$p_k = \frac{k - 3/8}{n + 1/4}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.2.17)$$

onde k é a ordem do resíduo no conjunto de resíduos ordenados de forma crescente e $n = bv$ o número total de observações. A Tabela A1 do Apêndice mostra os valores das posições de "plot" p_k , $k=1, \dots, n$, sendo consideradas algumas das possíveis configurações de experimentos em blocos completos casualizados, desde $n=bv=6$ até $n=bv=50$. Como $p_k = 1 - p_{n-k+1}$, foram tabeladas as posições de plot p_k para $k=(n/2+1), \dots, n$ para n par e $k = (n/2+0,5), \dots, n$ para n ímpar.

Foram obtidos os gráficos em papel normal de probabilidade, isto é, localizando resíduos ordenados contra a correspondente probabilidade empírica $100 \cdot p_k$, e em escala linear, ou seja, localizando os resíduos contra o correspondente quantil normal $\Phi^{-1}(p_k)$.

Na Tabela A2 do Apêndice estão os quantis normais obtidos para as probabilidades empíricas da Tabela A1, para os mesmos tamanhos de "amostras", $n=bv$. Considerando que $\Phi^{-1}(p_k) = -\Phi^{-1}(p_{n-k+1})$, foram tabelados os quantis

$$\Phi^{-1} [(k-3/8)/(n+1/4)] \quad (3.2.18)$$

para $k = [n/2 + 1], \dots, n$ quando n é par e para $k = [n/2 + 0,5], \dots, n$ quando n é ímpar.

A avaliação formal dos gráficos probabilísticos normais é efetuada pelo teste W de Shapiro-Wilk e pelo teste do coeficiente de correlação r . As hipóteses a serem consideradas são:

H_0 : os erros têm distribuição normal

H_a : os erros não têm distribuição normal.

A estatística W foi definida em (2.5.3) por

$$W = \frac{w^2}{s^2} \quad (3.2.19)$$

Como os valores amostrais passam a ser resíduos padronizados, no cálculo de w , o numerador de W , tem-se $x_k = d_k$, $k = 1, \dots, bv$. E como $\bar{d}$ é igual a zero, a não ser por efeitos de arredondamentos, o denominador de W será:

$$s^2 = \sum_{k=1}^{bv} d_k^2.$$

Porém, como $d_k = e_k / \sqrt{QMR}$, conforme definido em (2.3.9), e $QMR = SQR / (b-1)(v-1)$, então, $s^2 = (b-1)(v-1)$, ou seja, é igual ao número de graus de liberdade dos resíduos.

As constantes a_{n-k+1} , necessárias para o cálculo de w estão na Tabela A3 do Apêndice. E os valores críticos para W estão na Tabela A4 do Apêndice.

O coeficiente de correlação associado a gráficos de probabilidade está definido por (2.5.4). Ao utilizarem-se resíduos padronizados e os quantis $\Phi^{-1}(p_k)$, a expressão (2.5.4) passa a

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{bv} d_k \cdot \Phi^{-1}(p_k)}{\left\{ \sum_{k=1}^{bv} d_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{bv} [\Phi^{-1}(p_k)]^2 \right\}^{1/2}} \quad (3.2.20)$$

onde $\sum_{k=1}^{bv} [\Phi^{-1}(p_k)]^2$ é constante para um dado $n=bv$. A Tabela A5 do Apêndice contém os valores críticos para r .

c) Teste de discordância para o maior resíduo studentizado:

Para ser efetuado o teste de discordância abordado em 2.6 o procedimento será o que segue:

- obtenção do maior resíduo absoluto studentizado

$$\max |r_{ij}| = \frac{\max |e_{ij}|}{[\hat{\text{Var}}(e_{ij})]^{1/2}} \quad (3.2.21)$$

- comparação do $\max |r_{ij}|$ com o valor tabelado por LUND (1975). Os valores tabelados estão reproduzidos na Tabela A6 do Apêndice.

- avaliação da correlação máxima entre resíduos por comparação com o valor tabelado por DOORNBOS. (1981)

(Tabela A7 do Apêndice), a fim de se obter, com maior precisão, o nível de significância do teste, conforme a desigualdade (2.6.3).

3.2.2.3. Verificação da homogeneidade de variâncias de tratamentos e da aditividade do modelo

A homogeneidade de variâncias de tratamentos é verificada pelo teste da uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias de tratamentos, abordado em 2.7.1. A aditividade dos dados sob o modelo descrito em questão é verificada pelo teste de Tukey para não-aditividade descrito em 2.7.2.

3.2.3. ANÁLISE DA VARIÂNCIA

É efetuada a análise da variância sem levar em consideração os resultados da análise exploratória. Embora este não seja um procedimento sensato na rotina da análise de dados tendo por base o modelo ANOVA, aqui tem o sentido de avaliar, para os exemplos abordados, justamente as consequências da ausência de uma análise de resíduos.

A seguir, somente para os exemplos 2 e 3, é apresentada a análise da variância tendo sido substituído o valor aberrante pela estimativa de mínimos quadrados, calculada da maneira usual, como por exemplo em NETER e WASSERMAN (1974):

$$y_{ij}^o = \frac{b.y_{i.}^! + v.y_{.j}^! - y_{..}^!}{(b-1)(v-1)} \quad (3.2.22)$$

onde $y_{i.}^!$, $y_{.j}^!$ e $y_{..}^!$ são os totais das observações disponíveis, isto é, aqui, sem a observação aberrante, considerada como perdida.

É, então, obtida a estatística Q_1^* , utilizada em GENTLEMAN e WILK (1975b), conforme abordado em 2.5.2. Q_1^* corresponde à redução na soma de quadrados de resíduos causada pelo ajuste do modelo a $(n-1)$ dados, isto é, omitindo-se o valor aberrante.

4. APRESENTAÇÃO DE EXEMPLOS

4.1. O ENSAIO NULO

Da Tabela 7, correspondente aos dados do ensaio 1 ou ensaio nulo, ao considerar-se a ordem decrescente de magnitude das observações dentro de colunas (tratamentos) e dentro de linhas (blocos), obtêm-se:

Tabela 10.

Blocos	Tratamentos			
	A	B	C	D
I	(6) (4)	(6) (3)	(6) (2)	(6) (1)
II	(1) (4)	(1) (3)	(1) (2)	(1) (1)
III	(5) (4)	(2) (2)	(2) (3)	(2) (1)
IV	(4) (4)	(3) (2)	(3) (3)	(3) (1)
V	(3) (4)	(4) (1)	(5) (3)	(5) (2)
VI	(2) (3)	(5) (4)	(4) (2)	(4) (1)

Pela Tabela 10 pode ser observado o padrão geral dos dados. Considerando a ordem das observações dentro de tratamentos (no sentido de colunas, algarismos superiores da Tabela 10) o padrão será avaliado na linha. Assim, nota-se que todos os tratamentos apresentam sua observação mais baixa no bloco I e a mais alta no bloco II. Dos blocos III a VI, o tratamento A rompe o padrão da linha, os tratamentos C e D têm ordens idênticas e o tratamento B destoa de C e D apenas pelas ordens "trocadas" das observações nos blocos V e VI. A Figura 8 mostra o perfil dos tratamentos. Pode-se notar que os tratamentos B, C e D indicam um padrão geral, pois o perfil desses tratamentos são semelhantes, a não ser pela observação no bloco VI do tratamento B. Já o tratamento A difere mais acentuadamente deste padrão.

Considerando a ordem das observações dentro dos blocos (linhas, algarismos inferiores), nota-se que a observação mais baixa dos blocos I a V corresponde ao tratamento A, exceto no bloco VI que é do tratamento B. Exceto para o bloco V, em todos os demais a observação mais alta corresponde ao tratamento D. A ordem nos blocos, para o tratamento C, é igual a (2) ou (3); o mesmo ocorre no tratamento B, exceto para os blocos V e VI.

A Figura 9 mostra as poligonais que indicam o perfil dos blocos.

Nota-se que os blocos V e VI têm um perfil diferente da maioria formada pelos outros quatro blocos.

Figura 8. Perfil dos tratamentos no ensaio 1.

Figura 9. Perfil dos blocos no ensaio 1.

Na Tabela 11 constam os resíduos ordinários referentes aos dados do ensaio nulo. Observa-se que, neste caso, convém apresentar os resíduos sob forma de tabela para se ter a correspondência com a observação.

Tabela 11. Resíduos ordinários para o ensaio nulo.

-0,0483	-0,1533	0,1600	0,0417
0,1567	-0,0383	0,0850	-0,2033
-0,8108	0,3842	-0,1525	0,5792
-0,4633	0,3917	-0,1250	0,1967
0,4792	0,2842	-0,2725	-0,4908
0,6867	-0,8683	0,3050	-0,1233

A observação $y_{62} = 8,70$ (bloco VI, tratamento B) tem o maior resíduo absoluto do conjunto. De fato, essa observação faz romper o padrão do tratamento B, em relação aos tratamentos C e D; e do bloco VI em relação aos demais blocos. No entanto, é de se salientar que y_{62} não é um extremo dentro do conjunto de observações.

A soma de quadrados de resíduos, dada por $SQR = e'e = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 e_{ij}^2$ é igual a 3,673 com $(b-1)(v-1) = 15$ graus de liberdade.

Com os resíduos ordinários e os valores da aproximação de mínimos quadrados para y , $\hat{y} = X\theta^0$ (Tabela 12), ob-

tem-se o gráfico apresentado na Figura 10. Na Figura 11, vê-se o gráfico de resíduos padronizados contra y_{ij} estimados.

Tabela 12. y_{ij} estimados para o ensaio nulo.

7,5883	8,6333	8,5700	9,2883
9,8133	10,8583	10,7950	11,5133
8,7808	9,8258	9,7625	10,4808
8,5233	9,5683	9,5050	10,2233
8,2308	9,2758	9,2125	9,9308
8,5233	9,5683	9,5050	10,2233

As Figuras 10 e 11 não indicam nenhum valor discordante, conforme sugerido pelas Figuras 3 e 4 do capítulo 2. Todos os resíduos padronizados pertencem ao intervalo $(-2,2)$ sendo o maior em módulo, correspondente à observação y_{62} , igual a $d_{62} = -1,7547$. Portanto, pelo critério de NETER e WASSERMAN (1974) não existe "outlier" entre os dados do ensaio 1.

A Tabela 13 traz os resíduos padronizados já ordenados e os correspondentes valores da probabilidade acumulada empírica ou posição de "plot" (p_k) e do quantil normal, $\Phi^{-1}(p_k)$, obtidos das Tabelas A1 e A2 do Apêndice, respectivamente, para $n = b.v = 24$.

Figura 10. Resíduos ordinários contra y estimados para o ensaio 1.

Figura 11. Resíduos padronizados contra y estimados para o ensaio 1.

Tabela 13. Resíduos padronizados ordenados (d_k), para o ensaio 1, posições de plot (p_k) e quantis normais $\Phi^{-1}(p_k)$, $k=1, \dots, 24$.

Ordem do resíduo (k)	(i,j)*	d_k	p_k	$\Phi^{-1}(p_k)$
1	(6,2)	-1,7547	0,0258	-1,9468
2	(3,1)	-1,6385	0,0670	-1,4984
3	(5,4)	-0,9919	0,1082	-1,2359
4	(4,1)	-0,9363	0,1495	-1,0386
5	(5,3)	-0,5507	0,1907	-0,8752
6	(2,4)	-0,4109	0,2320	-0,7324
7	(1,2)	-0,3099	0,2732	-0,6032
8	(3,3)	-0,3082	0,3144	-0,4833
9	(4,3)	-0,2526	0,3557	-0,3701
10	(6,4)	-0,2492	0,3969	-0,2614
11	(1,1)	-0,0977	0,4381	-0,1557
12	(2,2)	-0,0775	0,4794	-0,0517
13	(1,4)	0,0842	0,5206	0,0517
14	(3,3)	0,1718	0,5618	0,1557
15	(2,1)	0,3166	0,6031	0,2614
16	(1,3)	0,3233	0,6443	0,3701
17	(4,4)	0,3974	0,6856	0,4833
18	(5,2)	0,5742	0,7268	0,6032
19	(6,3)	0,6164	0,7680	0,7324
20	(3,2)	0,7763	0,8093	0,8752
21	(4,2)	0,7914	0,8505	1,0386
22	(5,1)	0,9683	0,8918	1,2359
23	(3,4)	1,1704	0,9330	1,4984
24	(6,1)	1,3876	0,9742	1,9468

* Posição na Tabela 7: bloco i, tratamento j.

A seguir, são apresentados os gráficos de probabilidade normal dos resíduos padronizados, em papel de probabilidade (Figura 12) e em papel comum (Figura 13). Logo, no primeiro, foram plotados d_k contra p_k e no segundo gráfico, d_k contra $\Phi^{-1}(p_k)$, $k=1, \dots, n$.

A avaliação visual dos gráficos de probabilidade normal não sugere a presença de dados discordantes.

Calculados os valores das estatísticas-teste W , conforme (3.2.19), e r , conforme (3.2.20), obteve-se $W = 0,9696$ (n.s. conforme a Tabela A4 para $n=24$), e $r = 0,9869$ (n.s. conforme a Tabela A5 para $n=24$). Portanto, não há evidências que induzam à rejeição da hipótese de normalidade para os erros do ensaio nulo.

O teste de discordância para a observação y_{62} é efetuado a seguir. A estimativa da variância dos resíduos, conforme (3.2.5) é dada por:

$$\hat{V}(e_{ij}) = \frac{15}{24} \cdot \frac{3,673}{15} = 0,1530$$

logo, o maior resíduo studentizado, associado à observação y_{62} , é dado por

$$\max |r_{ij}| = \frac{-0,8683}{\sqrt{0,1530}} = 2,22$$

Figura 12. Gráfico probabilístico normal para os resíduos padronizados do ensaio 1, em papel normal.

Figura 13. Gráfico probabilístico normal para os resíduos padronizados do ensaio 1, em papel comum.

O valor crítico obtido da Tabela A5, para $n=24$, $p=9$ e $\alpha=0,05$, por interpolação harmônica, é igual a 2,748. Portanto, não se tem razões para considerar y_{62} uma observação aberrante.

As estimativas das covariâncias entre resíduos, usando (3.2.6), (3.2.7) e (3.2.8) são:

$$\text{Cov}(e_{ij}, e_{il}) = - \frac{5}{24} \cdot 0,2449 = -0,0510, \quad i \neq j, \text{ para resíduos associados a observações do mesmo bloco;}$$

$\text{Cov}(e_{ij}, e_{kj}) = -\frac{3}{24} \cdot 0,2449 = -0,0306$, $k \neq i$, para resí-
duos de observações do mesmo tratamento;

$\text{Cov}(e_{ij}, e_{kl}) = \frac{1}{24} \cdot 0,2449 = 0,0102$, $k \neq i$, $l \neq j$, para resí-
duos de observações de blocos e tratamentos distintos.

As correlações entre resíduos podem ser calcu-
ladas por (3.2.9), (3.2.10) e (3.2.11). Assim:

$\rho_{ij,il} = -1/(4-1) = -0,333$, $l \neq j$, entre resíduos de observa-
ções do mesmo bloco;

$\rho_{ij,kj} = -1/(6-1) = -0,20$, $k \neq i$, entre resíduos de observações
do mesmo tratamento;

$\rho_{ij,kl} = 1/(b-1)(v-1) = 0,0667$, $k \neq i$ e $j \neq l$, entre resíduos de
observações de blocos e tratamentos distintos.

Logo, a maior correlação absoluta será

$$\max |\rho| = 0,333$$

que é maior que o valor crítico $g_{0,05}$ correspondente, da Tabe-
la A7 para $n=24$ e $p=r(X) = 9$.

O teste F para aditividade e o critério de Box
para homogeneidade de variâncias, aplicados ao ensaio 1, leva-
ram aos resultados mostrados na Tabela 14.

Tabela 14. Resultados do teste de aditividade e do teste de homogeneidade de variâncias, para o ensaio 1.

	$F_{\tilde{N}A}$	χ^2
Valor calculado	0,0098 ns	10,0153 ns
Valor tabelado	0,001 (1)	15,51 (2)

(1) Para $\alpha = 0,05$ e 1 e 14 graus de liberdade ($F < 1$).

(2) Para $\alpha = 0,05$ e 8 graus de liberdade.

Nesse contexto, efetuou-se a análise da variância, conforme consta da Tabela 15.

Tabela 15. Análise de variância para o ensaio 1.

Causas da variação	GL	SQ	QM	F
Média	1	2169,802		
Blocos	5	10,692		
Tratamentos	3	8,842	2,947	12,44**
Resíduo	15	3,673	0,245	
Total	24	2193,009		
Total corrig.	23	23,208		

4.2. ENSAIO 2

Considere-se o ensaio em blocos casualizados, cujos resultados estão na Tabela 8. Na Tabela 16 tem-se a ordem de cada observação dentro do tratamento e dentro do bloco.

Tabela 16.

Blocos	Tratamentos			
	A	B	C	D
I	(6) (4)	(6) (3)	(6) (2)	(6) (1)
II	(1) (1)	(1) (4)	(1) (3)	(1) (2)
III	(5) (4)	(2) (2)	(2) (3)	(2) (1)
IV	(4) (4)	(3) (2)	(3) (3)	(3) (1)
V	(3) (4)	(4) (1)	(5) (3)	(5) (2)
VI	(2) (3)	(5) (4)	(4) (2)	(4) (1)

Em relação ao ensaio 1, a ordem dos resultados dentro do tratamento A não foi alterada. Porém, a ordem dentro do bloco 2 foi modificada, alterando o padrão de colunas na Tabela 16: a observação $y_{21} = 12,97$ passa a ser a mais al-

ta do bloco 11, enquanto, em quatro blocos, o tratamento A contribui com a mais baixa observação (ordem (4)). As Figuras 14 e 15, referem-se ao comportamento de tratamentos e de blocos, respectivamente. Pela Figura 14, nota-se um perfil do tratamento A bastante diferente dos demais marcadamente no bloco 11.

De fato, a observação y_{21} , não só é extrema no bloco e no tratamento respectivo, como constitui um extremo em todo o conjunto de observações.

Os resíduos do ensaio 2 podem ser obtidos pelo ajuste do modelo aos dados ou pelas expressões (3.2.12) a (3.2.15). Isto é, sejam e_{ij} os resíduos do ensaio 1, então os resíduos do ensaio 2, e_{ij}^* , serão

$$e_{21}^* = e_{21} + \lambda(b-1)(v-1)/bv = 0,1567 + 3 \cdot (15/24) = 2,0317$$

$$e_{2j}^* = e_{2j} - 3(3/24), \quad j \neq 1$$

$$e_{i1}^* = e_{i1} - 3(5/24), \quad i \neq 2 \quad e,$$

$$e_{ij}^* = e_{ij} + 3/24, \quad i \neq 2, \quad j \neq 1.$$

Os resíduos associados aos dados do ensaio 2 estão na Tabela 17.

Figura 14. Perfil dos tratamentos no ensaio 2.

Figura 15. Perfil dos blocos no ensaio 2.

Tabela 17. Resíduos ordinários para o ensaio 2.

-0,4233	-0,0283	0,2850	0,1667
2,0317	-0,6633	-0,5400	-0,8283
-1,1858	0,5092	-0,0275	0,7042
-0,8383	0,5167	0,0000	0,3217
0,1042	0,4092	-0,1475	-0,3658
0,3117	-0,7433	0,4300	0,0017

A soma de quadrados dos resíduos é igual a 10,238 com 15 graus de liberdade. De fato, a soma de quadrados de resíduos deste ensaio (SQR^*) pode ser calculada, tal como em (3.2.16), da soma de quadrados de resíduos do ensaio nulo (SQR). O acréscimo S é dado por

$$2e'\Delta + \Delta'\Delta = 0,94 + 5,625 = 6,565.$$

Assim, $SQR^* = 3,673 + 6,565 = 10,238$
como já obtido pelo cálculo usual.

Obtidos os y_{ij} estimados (Tabela 18) e, a partir da Tabela 17, os resíduos padronizados, constrói-se os gráficos apresentados nas Figuras 16 e 17.

Tabela 18. y_{ij} estimados para o ensaio 2.

7,9633	8,5083	8,4450	9,1633
10,9383	11,4833	11,4200	12,1383
9,1558	9,7008	9,6375	10,3558
8,8983	9,4433	9,3800	10,0983
8,6058	9,1508	9,0875	9,8058
8,8983	9,4433	9,3800	10,0983

Nas Figuras 16 e 17 observa-se que um ponto destaca-se acima da massa de pontos formada pelos demais. Este ponto corresponde à observação y_{21} que constitui, assim, um valor discordante. O resíduo padronizado $d_{21} = 2,4592$ é o maior em valor absoluto, de modo que, pelo critério de NETER e WASSERMAN (1974), não há dados aberrantes no ensaio 2.

Na Tabela 19 estão os resíduos padronizados ordenados, os quais, com as correspondentes posições de "plot" p_k , já obtidas na Tabela 13, levam ao gráfico probabilístico da Figura 18. Também da Tabela 13, tem-se os quantis normais $\Phi^{-1}(p_k)$, que com os resíduos padronizados respectivos levam ao gráfico probabilístico da Figura 19.

Figura 16. Gráfico de resíduos ordinários contra y estimados, para o ensaio 2.

Figura 17. Gráfico de resíduos padronizados contra y estimados, para o ensaio 2.

Tabela 19. Resíduos padronizados ordenados para o ensaio 2.

Ordem do resíduo (k)	(i,j)*	d_k	Ordem do resíduo (k)	(i,j)	d_k
1	(3,1)	-1,4354	13	(6,4)	0,0020
2	(3,2)	-1,0147	14	(5,1)	0,1261
3	(2,4)	-1,0026	15	(1,4)	0,2017
4	(6,4)	-0,8997	16	(1,3)	0,3450
5	(2,2)	-0,8029	17	(6,1)	0,3773
6	(2,3)	-0,6536	18	(4,4)	0,3894
7	(1,1)	-0,5124	19	(5,2)	0,4953
8	(5,4)	-0,4428	20	(6,3)	0,5205
9	(5,3)	-0,1785	21	(3,2)	0,6163
10	(1,2)	-0,0343	22	(4,2)	0,6254
11	(3,3)	-0,0333	23	(3,4)	0,8523
12	(4,3)	0,0	24	(2,1)	2,4592

*Posição na Tabela 8: bloco i, tratamento j.

As Figuras 18 e 19 indicam o ponto discordante corresponde a y_{21} . Nota-se que este ponto foge à tendência linear dos demais. Os valores calculados do teste de Shapiro-Wilk e do coeficiente de correlação são $W = 0,9295$ (ns) e $r = 0,9560^*$. Portanto, mesmo com um valor discordante, não se pode rejeitar a hipótese de normalidade dos erros, pelo teste de Shapiro-Wilk. Porém, pelo teste do coeficiente de correlação a mesma hipótese não é aceita, a um nível $\alpha = 0,05$ de probabilidade.

Figura 18. Gráfico probabilístico normal para os resíduos padronizados do ensaio 2, em papel normal.

Figura 19. Gráfico probabilístico normal para resíduos padronizados do ensaio 2, em papel comum.

A estimativa da variância dos resíduos é igual

a

$$\hat{V}(e_{ij}) = \frac{15}{24} \cdot \frac{10,238}{15} = 0,4266$$

logo, o maior resíduo absoluto studentizado será

$$\max |r_{ij}| = \frac{2,0317}{\sqrt{0,4266}} = 3,1106^{**}$$

O valor crítico obtido da Tabela A6, por interpolação harmônica, para $n=24$ e $p=9$, a $\alpha = 0,01$ é igual a 3,0. Portanto, a observação y_{21} é aberrante ao nível $\alpha = 0,01$

As estimativas das covariâncias entre resíduos são

$$\text{Côv}(e_{ij}, e_{il}) = -(5/24)(0,6825) = -0,1422, \text{ para } l \neq j ;$$

$$\text{Côv}(e_{ij}, e_{kj}) = -(3/24)(0,6825) = -0,0853, \text{ para } k \neq i ;$$

$$\text{e } \text{Côv}(e_{ij}, e_{kl}) = (1/24)(0,6825) = 0,0284, \text{ para } k \neq i, l \neq j.$$

As correlações entre resíduos são fixas como visto em 3.2.2.2. Portanto, serão as mesmas já obtidas para o ensaio 1. Como $\max |\rho| = 0,333 > g_{0.05}$ (Tabela A7, para $n=24$), afirma-se apenas que o nível de significância para o teste de discordância é menor que 0,01.

Os resultados do teste de homogeneidade de variâncias e de aditividade são os seguintes:

Tabela 20. Resultados do teste de aditividade e de homogeneidade de variâncias, para o ensaio 2.

	$F_{\tilde{N}A}$	χ^2
Valor calculado	5,42 *	20,51**
Valor tabelado	4,60 (1)	20,09 (2)

(1) Para $\alpha = 0,05$ e 1 e 14 graus de liberdade

(2) Para $\alpha = 0,01$ e 8 graus de liberdade.

A observação discrepante y_{21} alterou plenamente a aditividade e a homogeneidade de variâncias, comprometendo profundamente a validade das inferências sob o modelo adotado.

Ignorando-se as violações das pressuposições básicas da análise da variância, obtêm-se o seguinte:

Tabela 21. Análise da variância para o ensaio 2.

Causas da variação	GL	SQ	QM	F
Média	1	2227,227		
Blocos	5	19,987		
Tratamentos	3	4,377	1,459	2,14 ns
Resíduo	15	10,238	0,682	
Total	24	2261,829		
Total corrig.	23	34,602		

Observa-se que o teste F para tratamento passou a ser não significativo. Esse resultado evidencia o fato de que a presença do "outlier" prejudicou sobremaneira a sensibilidade do teste.

Tomando-se, conforme (3.2.22), a estimativa de mínimos quadrados para a observação y_{21} , $y_{21}^0 = 9,72$, observa-se que fica retomado o padrão geral dos dados do ensaio 1.

Procedendo-se a uma avaliação das pressuposições de normalidade, aditividade e homogeneidade de variâncias, com y_{21}^0 , obtêm-se:

Tabela 22. Testes de Shapiro-Wilk (W), aditividade ($F_{\tilde{N}A}$) e homogeneidade de variâncias (χ^2), com $y_{21}^0 = 9,72$ no ensaio 2.

	W	$F_{\tilde{N}A}$	χ^2
Valor calculado	0,9590ns	0,1668ns	8,7846ns
Valor tabelado	0,916(1)	0,001 (2)	15,51(3)

(1) Para $\alpha = 0,05$ e $n = 24$.

(2) Para $\alpha = 0,05$, 1 e 13 GL ($F < 1$).

(3) Para $\alpha = 0,05$ e 8 GL

Os resultados da Tabela 22 aproximam-se dos correspondentes para o ensaio nulo.

A análise da variância utilizando a estimativa y_{21}^0 é dada a seguir (Tabela 23).

A redução na soma de quadrados de resíduos obtida com a substituição do "outlier" pela estimativa de mínimos quadrados é igual a $Q_1 = 10,238 - 3,633 = 6,605$.

O teste F para tratamentos leva às mesmas conclusões que o do ensaio nulo.

Tabela 23. Análise da variância utilizando $y_{21}^0 = 9,72$ no ensaio 2.

Causas da variação	GL	SQ	QM	F
Média	1	2165,050		
Blocos	5	10,087		
Tratamentos	3	9,316	3,105	11,96**
Resíduo	14	3,633	0,260	
Total	23	2188,086		
Total corrig.	22	23,036		

4.3. ENSAIO 3

Para os dados da Tabela 9 referentes ao ensaio 3 tem-se o seguinte padrão geral considerando-se a ordem decrescente de magnitude dentro de tratamentos e de blocos (Tabela 24).

A observação $y_{24} = 7,81$ rompe mais drasticamente do que outras caselas, tanto o padrão na linha como na coluna: todos os demais tratamentos tem sua observação mais alta no bloco II, enquanto que o tratamento D tem o valor mais baixo; e, ainda, a ordem da observação y_{24} na linha (bloco II) é a mais baixa (ordem (4)) no tratamento D, enquanto que

Tabela 24.

Blocos	Tratamentos			
	A	B	C	D
I	(6) (4)	(6) (3)	(6) (2)	(5) (1)
II	(1) (3)	(1) (2)	(1) (1)	(6) (4)
III	(5) (4)	(2) (2)	(2) (3)	(1) (1)
IV	(4) (4)	(3) (2)	(3) (3)	(2) (1)
V	(3) (4)	(4) (1)	(4) (3)	(4) (2)
VI	(2) (3)	(5) (4)	(5) (2)	(3) (1)

em quatro outros blocos a ordem no mesmo tratamento é a mais alta (ordem (1)).

Através das Figuras 20 e 21, visualiza-se melhor a diferença de comportamento do tratamento D e do bloco II, respectivamente. A observação y_{24} não é um extremo se os dados forem considerados como uma amostra.

Os resíduos ordinários para os dados da Tabela 9 são apresentados na Tabela 25.

Figura 20. Perfil dos tratamentos no ensaio 3.

Figura 21. Perfil dos blocos no ensaio 3.

Tabela 25. Resíduos ordinários para o ensaio 3.

-0,1942	-0,2992	0,0142	0,4792
0,8858	0,6908	0,8142	-2,3908
-0,9567	0,2383	-0,2983	1,0167
-0,6092	0,2458	-0,2708	0,6342
0,3333	0,1383	-0,4183	-0,0533
0,5408	-1,0142	0,1592	0,3142

Retomando-se as expressões (3.2.12) a (3.2.15), sejam e_{ij} os resíduos do ensaio nulo e e_{ij}^* os resíduos do ensaio 3, segue que

$$e_{24}^* = e_{24} + \lambda(b-1)(v-1)/bv$$

$$\therefore e_{24}^* = -0,2033 + (-3,5)15/24 = -2,3908$$

E, de fato,

$$e_{2j}^* = e_{2j} - (-3,5)3/24, \text{ para } j \neq 4$$

$$e_{i4}^* = e_{i4} - (-3,5)5/24, \text{ para } i \neq 2$$

$$e_{ij}^* = e_{ij} + (-3,5)/24, \text{ para } i \neq 2 \text{ e } j \neq 4.$$

A soma de quadrados de resíduos é igual a 12,753 com 15 graus de liberdade. Em relação a soma de quadrados de resíduos do ensaio 1, $SQR = 3,673$, ela foi aumentada. Verificando-se a expressão (3.2.16), tem-se que $2e'\Delta = 1,42$ e

$\Delta' \Delta = 7,656$. Portanto, o acréscimo é de $S = 1,42 + 7,66 = 9,08$, e $SQR + S = 3,673 + 9,079 = 12,753$ que corresponde à soma de quadrados de resíduos do ensaio 3.

Tabela 26. y_{ij} estimados para o ensaio 3.

7,7342	8,7792	8,7158	8,8508
9,0842	10,1292	10,0658	10,2008
8,9267	9,9717	9,9083	10,0433
8,6692	9,7142	9,6508	9,7858
8,3767	9,4217	9,3583	9,4933
8,6692	9,7142	9,6508	9,7858

Com os valores das Tabelas 25 e 26 construiu-se o gráfico da Figura 22. Na Figura 23, encontra-se o gráfico equivalente, apenas utilizando-se resíduos padronizados contra y_{ij} estimados.

Pelas Figuras 22 e 23, nota-se que o resíduo correspondente à observação y_{24} localiza-se fora da massa de pontos, o que leva à suspeita de que este pode ser um valor aberrante. Pelo sugerido em NETER e WASSERMAN (1974), nenhum valor do ensaio é aberrante, pois todos os resíduos padronizados incluem-se no intervalo $(-3,3)$.

Figura 22. Gráfico de resíduos ordinários contra y estimados, para o ensaio 3.

Figura 23. Gráfico de resíduos padronizados contra y estimados, para o ensaio 3.

Obtidos os resíduos padronizados ordenados (Tabela 27), obtêm-se os gráficos de probabilidade normal: na Figura 24, em papel de escala especial, portanto utilizando-se a posição de "plot" p_k e na Figura 25, em papel comum, utilizando-se quantis normais. No canto inferior do gráfico probabilístico localiza-se, fora da tendência linear dos demais, o ponto corresponde à observação y_{24} .

Tabela 27. Resíduos padronizados ordenados, para o ensaio 3.

Ordem do resíduo (k)	(i,j)*	d_k	Ordem do resíduo (k)	(i,j)	d_k
1	(2,4)	-2,5929	13	(6,3)	0,1726
2	(6,2)	-1,0999	14	(3,2)	0,2585
3	(3,1)	-1,0375	15	(4,2)	0,2666
4	(4,1)	-0,6607	16	(6,4)	0,3407
5	(5,4)	-0,4537	17	(5,1)	0,3615
6	(1,2)	-0,3245	18	(1,4)	0,5197
7	(3,3)	-0,3236	19	(6,1)	0,5866
8	(4,3)	-0,2937	20	(4,4)	0,6878
9	(1,1)	-0,2106	21	(2,2)	0,7492
10	(5,4)	-0,0578	22	(2,3)	0,8830
11	(1,3)	0,0154	23	(2,1)	0,9607
12	(5,2)	0,1500	24	(3,4)	1,1026

* Posição na Tabela 9: bloco i, tratamento j.

PROBABILIDADE ACUMULADA EMPÍRICA

Figura 24. Gráfico probabilístico normal para os resíduos padronizados do ensaio 3, em papel normal.

Figura 25. Gráfico probabilístico normal para os resíduos padronizados do ensaio 3, em papel comum.

Para melhor avaliar o gráfico de probabilidade, são calculadas a estatística de Shapiro-Wilk e o coeficiente de correlação, que para o ensaio 3 são $W = 0,8997^*$ e $r = 0,9422^*$. Portanto, conclui-se que os erros não provêm de população normal, com $\alpha = 0,05$ de probabilidade. Pela Tabela A5, observa-se que o coeficiente de correlação calculado está abaixo do valor crítico para $\alpha = 0,025$.

Efetuando-se o teste de discordância para a observação y_{24} obtêm-se

$$\hat{V}(e_{ij}) = \frac{15}{24} \cdot \frac{12,753}{15} = 0,5314.$$

Portanto, a estatística do teste, o maior resíduo absoluto studentizado, é igual a

$$\max |r_{ij}| = \frac{2,3908}{\sqrt{0,5314}} = 3,2798^{**}$$

o que indica que a observação $y_{24} = 7,81$ é aberrante ao nível $\alpha < 0,01$.

As estimativas das covariâncias entre resíduos são:

$$\text{Côv}(e_{ij}, e_{il}) = -(5/24)(0,8502) = -0,1771, \quad l \neq j;$$

$$\text{Côv}(e_{ij}, e_{kj}) = -(3/24)(0,8502) = -0,1063, \quad k \neq i;$$

$$\text{Côv}(e_{ij}, e_{kl}) = (1/24)(0,8502) = 0,0354, \quad k \neq i, l \neq j.$$

A Tabela 28 mostra os resultados do teste de homogeneidade de variâncias e do teste de aditividade de Tukey.

Das hipóteses básicas da análise da variância avaliadas, tem-se duas violações: a presença de um valor aberrante e, por consequência, a ausência de normalidade dos erros. Efetuada a análise da variância sem levar em conta as

Tabela 28. Resultados dos testes de aditividade e da homogeneidade de variâncias, para o ensaio 3.

	F_{NA}	χ^2
Valor calculado	0,1197 ns	12,88 ns
Valor tabelado	0,001 (1)	15,51 (2)

(1) Para $\alpha = 0,05$ e 1 e 14 graus de liberdade ($F < 1$).

(2) Para $\alpha = 0,05$ e 8 graus de liberdade.

transgressões verificadas, encontram-se os resultados apresentados na Tabela 29.

Tabela 29. Análise da variância para o ensaio 3.

Causas da variação	GL	SQ	QM	F
Média	1	2103,754		
Blocos	5	4,588		
Tratamentos	3	4,995	1,665	1,96ns
Resíduo	15	12,753	0,850	
Total	24	2126,089		
Total corrig.	23	22,336		

Observa-se que no ensaio 3, o valor aberrante afetou apenas a normalidade. No entanto, a significância do teste F mudou, isto é, novamente a sensibilidade do teste foi afetada pela presença do dado aberrante.

A estimativa de mínimos quadrados para a observação y_{24} é $y_{24}^o = 11,64$, conforme (3.2.22). Substituindo-se o "outlier" por esta estimativa, encontram-se os resultados da Tabela 30, para a análise exploratória e da Tabela 31, para a análise de variância.

Tabela 30. Testes de Shapiro-Wilk (W), aditividade ($F_{\tilde{N}A}$) e homogeneidade de variâncias (χ^2), com $y_{24}^o = 11,64$ no ensaio 3.

	W	$F_{\tilde{N}A}$	χ^2
Valor calculado	0,9667ns	0,1450ns	13,2764ns
Valor tabelado	0,916(1)	0,001 (2)	15,51(3)

(1) Para $\alpha = 0,05$ e $n = 24$

(2) Para $\alpha = 0,05$, 1 e 13 GL ($F < 1$).

(3) Para $\alpha = 0,05$ e 8 GL

A substituição do valor aberrante pela correspondente estimativa de mínimos quadrados causa uma redução acentuada na soma de quadrados de resíduos, sendo $Q_1 = 12,753 - 3,607 = 9,146$.

Tabela 31. Análise da variância utilizando $y_{24}^0 = 11,64$ no ensaio 3.

Causas da variação	GL	SQ	QM	F
Média	1	2176,082		
Blocos	5	11,531		
Tratamentos	3	9,363	3,121	12,11**
Resíduo	14	3,607	0,258	
Total	23	2200,582		
Total corrig.	22	24,501		

Novamente, tanto nos testes efetuados na análise exploratória como na análise da variância, os resultados aproximam-se daqueles do ensaio nulo.

5. CONCLUSÕES

Face aos resultados obtidos, concluiu-se que:

a) A presença de um dado aberrante pode afetar individual ou coletivamente o conjunto de pressuposições considerado neste estudo para a análise da variância via modelo linear ordinário de Gauss-Markov: normalidade, homogeneidade de variâncias e aditividade.

b) Quando se acrescenta um valor real λ a uma observação y_{ij} , visando obter um "outlier", a aproximação de mínimos quadrados para o novo vetor y sofre a influência de λ . Essa influência propaga-se naturalmente para o correspondente vetor de erros, alterando a soma de quadrados do resíduo. Nesse contexto, a presença do "outlier" pode alterar a sensibilidade do teste F para tratamentos.

c) Os gráficos de resíduos, usados na fase inicial da detecção de um "outlier", bem como os perfis de blo-

cos e tratamentos mostraram-se, nos exemplos abordados, plenamente satisfatórios e os resultados por eles sugeridos foram confirmados na fase final de identificação através dos processos formais de inferência.

d) Os gráficos de probabilidade dos resíduos em papel normal (utilizando a probabilidade empírica) ou em papel comum (utilizando quantis normais) foram considerados equivalentes, tanto na verificação da normalidade quanto na detecção do "outlier".

e) A substituição do valor aberrante pela correspondente estimativa de mínimos quadrados mostrou-se uma medida remediadora satisfatória para os exemplos discutidos.

6. LITERATURA CITADA

- ANSCOMBE, F.J. e J.W. TUKEY, 1963. The examination and analysis of residuals. Technometrics. Washington, 5: 141-160.
- ATKINSON, A.C., 1981. Two graphical displays for outlying and influential observations in regression. Biometrika. Cambridge, 68: 13-20.
- BARNETT, V., 1978. The study of outliers: purpose and model. Applied Statistics. London, 27: 242-250.
- BARNETT, V. e T. LEWIS, 1978. Outliers in Statistical Data. Belfast, John Wiley & Sons, Inc. 365p.
- BARNETT, V. e T. LEWIS, 1984. Outliers in Statistical Data. 2ª ed. Chichester, John Wiley & Sons, Inc. 463p.
- BECKMAN, R.J. e R.D. COOK, 1983. Outliers ... s. Technometrics. Washington, 25: 119-163.
- BOX, G.E.P., 1949. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. Biometrika. Cambridge, 36: 317-346.

- BOX, G.E.P., 1950. Problems in the analysis of growth and wear curves. Biometrics. Washington, 6: 362-389.
- BROSS, I.D.J., 1961. Outliers in patterned experiments: a strategic appraisal. Technometrics. Washington, 3: 91-102.
- COOK, R.D., 1979. Influential observations in linear regression. Journal of the American Statistical Association. Boston, 74: 169-174.
- COOK, R.D. e P. PRESCOTT, 1981. On the accuracy of Bonferro-ni significance levels for detecting outliers in linear models. Technometrics. Washington, 23: 59-63.
- COOK, R.D.; N. HOLSCHUH e S. WEISBERG, 1982. A note on an alternative outlier model. Journal of the Royal Statistical Society (Series B). London, 44: 370-376.
- COOK, R.D. e S. WEISBERG, 1982. Residuals and Influence in Regression. London, Chapman & Hall. 231p.
- CUNNANE, C., 1978. Unbiased plotting positions - a review. Journal of Hydrology. Amsterdam, 37: 205-222.
- DACHS, J.N.W. e J.F. CARVALHO, 1984. Diagnóstico em regressão. In: 6º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, Rio de Janeiro. 85p.
- DANIEL, C., 1978. Patterns in residuals in the two-way layout. Technometrics. Washington, 20: 385-395.
- DANIEL, C. e F.S. WOOD, 1980. Fitting Equations to Data. 2ª ed. New York, John Wiley & Sons, Inc. 458p.

- DIXON, W.J., 1950. Analysis of extreme values. Annals of Mathematical Statistics. Ann Arbor, 21: 489-506.
- DODGE, Y., 1985. Analysis of Experiments with Missing Data. New York, Wiley. 499p.
- DOORNBOS, R., 1981. Testing for a single outlier in a linear model. Biometrics. Washington, 37: 705-712.
- DRAPER, N.R. e J.A. JOHN, 1981. Influential observations and outliers in regression. Technometrics. Washington, 23: 21-26.
- DRAPER, N.R. e H. SMITH, 1966. Applied Regression Analysis. New York, John Wiley e Sons, Inc. 407p.
- ELLENBERG, J.H., 1973. The joint distribution of the standardized least squares residuals from a general linear regression. Journal of the American Statistical Association. Boston, 68: 941-943.
- ELLENBERG, J.H., 1976. Testing for a single outlier from a general linear regression. Biometrics. Washington, 32: 637-645.
- FILLIBEN, J.J., 1975. The probability plot correlation coefficient test for normality. Technometrics. Washington, 17: 111-117.
- GENTLEMAN, J.F., 1980. Finding the k most likely outliers in a two-way tables. Technometrics. Washington, 22: 591-600.

- GENTLEMAN, J.F. e M.B. WILK, 1975a. Detecting outliers in a two-way table: I. Statistical behavior of residuals. Tech-nometrics. Washington, 17: 1-14.
- GENTLEMAN, J.F. e M.B. WILK, 1975b. Detecting outliers. II. Supplementing the direct analysis of residuals. Biometrics. Washington, 31: 387-410.
- GILL, J.L., 1978. Design and Analysis of Experiments in the Animal and Medical Sciences. Ames, 882p.
- HAN, C.P., 1969. Testing the homogeneity of variances in a two-way classification. Biometrics. Washington, 25: 153-158.
- HARTER, L., 1961. Expected values of normal order statistics. Biometrika. Cambridge, 48: 151-165.
- HOAGLIN, D.C.; F. MOSTELLER e J.W. TUKEY, 1983. Understanding Robust and Exploratory Data Analysis. New York, Wiley, 447p.
- HOAGLIN, D.C. e R.E. WELSH, 1978. The hat matrix in regression and ANOVA. The American Statistician. Washington, 32: 17-22.
- HUYHN, H. e L.S. FELDT, 1970. Conditions under which mean square ratios in repeated measurements designs have exact F-distributions. Journal of the Royal Statistical Society. London, 65: 1582-89.
- IEMMA, A.F., 1985. Modelos Lineares para Experimentos com Medidas Repetidas e Covariância Uniforme: um Enfoque através das Matrizes de Helmert. Piracicaba, ESALQ/USP, 155p. (Tese de Livre-Docência).

- JOHN, J.A. e N.R. DRAPER, 1978. On testing for two outliers and one outlier in two-way tables. Technometrics. Washington, 20: 69-79.
- KIMBALL, B.F., 1960. On the choice of plotting positions on probability paper. Journal of the American Statistical Association. Boston, 55: 546-560.
- KIRK, R.E., 1968. Experimental Designs: Procedures for the Behavioral Sciences. Belmont, Wagsworth. 571p.
- LLOYD, E.H., 1952. Least-squares stimation of location and scale parameters using order statistics. Biometrika, Cambridge, 39: 88-95.
- LOONEY, S.W. e T.R. GULLEDGE Jr., 1985. Use of the correlation coefficient with normal probability plots. The American Statistician. Washington, 39: 75-79.
- LUND, R.E., 1975. Tables for an approximate test for outliers in linear models. Technometrics. Washington, 17: 473-476.
- MAGE, D.T., 1982. An objective graphical method for testing normal distributional assumptions using probability plots. The American Statistician. Washington, 36: 116-120.
- NETER, J. e W. WASSERMAN, 1974. Applied Linear Statistical Models - Regression, Analysis of Variance and Experimental Designs. Illinois, Richard D. Irwin. 842p.
- QUESENBERRY, C.P. e H.A. DAVID, 1961. Some tests for outliers. Biometrika. Cambridge, 48: 379-390.

- SEBER, G.A.F., 1977. Linear Regression Analysis. New York, John Wiley & Sons, Inc. 465p.
- SHAPIRO, S.S. e M.B. WILK, 1965. An analysis of variance test for normality (complete samples). Biometrika. Cambridge, 52: 591-611.
- SOUZA, F.A.M. de, 1984. Alguns Modelos para Interação em Análise de Variância com 2 Fatores e Uma Observação por Célula. Rio de Janeiro, IMPA, 109p. (Dissertação de Mestrado).
- STEFANSKY, W., 1971. Rejecting outliers by maximum normal residual. The Annals of Mathematical Statistics. Ann Arbor, 42: 35-45.
- TIETJEN, G.L.; R.H. MOORE e R.J. BECKMAN, 1973. Testing for a single outlier in simple linear regression. Technometrics. Washington, 15: 717-721.
- TUKEY, J.W., 1949. One degree of freedom for non-additivity. Biometrics. Washington, 5: 233-242.
- VELLEMAN, P.F. e R.E. WELSCH, 1981. Efficient computing of regression diagnostics. The American Statistician. Washington, 35: 234-242.
- WILK, M.B. e R. GNANADESIKAN, 1968. Probability plotting methods for the analysis of data. Biometrika. Cambridge, 55: 1-17.

7. APÊNDICE

Tabela A1. Posição de "plot".

$$p_k = \begin{cases} 1 - p_{n-k+1}, & \text{se } k = 1, \dots, 1 \lfloor n/2 \rfloor; \\ (k-0,375)/(n+0,25), & \text{se } k = \lfloor n/2 \rfloor, \dots, n \end{cases}$$

n \ k	6	8	9	10	12	14	15
4	0.58000						
5	0.74000	0.56061	0.50000				
6	0.90000	0.68182	0.60311	0.54878			
7		0.80303	0.71622	0.64634	0.54082		
8		0.92424	0.82432	0.74390	0.62245	0.53509	0.50000
9			0.93243	0.84146	0.70408	0.60526	0.56557
10				0.93902	0.78571	0.67544	0.63115
11					0.86735	0.74561	0.69672
12					0.94898	0.81579	0.76230
13						0.88596	0.82787
14						0.95614	0.89344
15							0.95902

n \ k	16	18	20	21	24	25	26
9	0.53077						
10	0.59231	0.52740					
11	0.65385	0.58219	0.52469	0.50000			
12	0.71538	0.63699	0.57407	0.54706			
13	0.77692	0.69178	0.62346	0.59412	0.52062	0.50000	
14	0.83846	0.74658	0.67284	0.64118	0.56186	0.53960	0.51905
15	0.90000	0.80137	0.72222	0.68824	0.60309	0.57921	0.55714
16	0.96154	0.85616	0.77160	0.73529	0.64433	0.61881	0.59524
17		0.91096	0.82099	0.78235	0.68557	0.65842	0.63333
18		0.96575	0.87037	0.82941	0.72680	0.69802	0.67143
19			0.91975	0.87647	0.76804	0.73762	0.70952
20			0.96914	0.92353	0.80928	0.77723	0.74762
21				0.97059	0.85052	0.81683	0.78571
22					0.89175	0.85644	0.82381
23					0.93299	0.89604	0.86190
24					0.97423	0.93564	0.90000
25						0.97525	0.93810
26							0.97619

n \ k	27	28	30	32	33	35	36
14	0.50000						
15	0.53670	0.51770					
16	0.57339	0.55310	0.51653				
17	0.61009	0.58850	0.54959	0.51550	0.50000		
18	0.64679	0.62389	0.58264	0.54651	0.53000	0.50000	
19	0.68349	0.65929	0.61570	0.57752	0.56015	0.52837	0.51379
20	0.72018	0.69469	0.64876	0.60853	0.59023	0.55674	0.54138
21	0.75688	0.73009	0.68182	0.63953	0.62030	0.58511	0.56897
22	0.79358	0.76549	0.71488	0.67054	0.65038	0.61348	0.59655
23	0.83028	0.80088	0.74793	0.70155	0.68045	0.64184	0.62414
24	0.86697	0.83628	0.78099	0.73256	0.71053	0.67021	0.65172
25	0.90367	0.87168	0.81405	0.76357	0.74060	0.69858	0.67931
26	0.94037	0.90708	0.84711	0.79457	0.77068	0.72695	0.70690
27	0.97706	0.94248	0.88017	0.82558	0.80075	0.75532	0.73448
28		0.97788	0.91322	0.85659	0.83083	0.78357	0.76207
29			0.94628	0.88760	0.86090	0.81206	0.78966
30			0.97934	0.91860	0.89098	0.84043	0.81724
31				0.94961	0.92105	0.86879	0.84483
32				0.98062	0.95113	0.89716	0.87241
33					0.98120	0.92553	0.90000
34						0.95390	0.92759
35						0.98227	0.95517
36							0.98276

Tabela A1. Continuação.

k \ n	n						
	40	42	44	45	48	49	50
21	0.51242						
22	0.53727	0.51183					
23	0.56211	0.53550	0.51130	0.50000			
24	0.58696	0.55917	0.53390	0.52210			
25	0.61180	0.58284	0.55650	0.54420	0.51036	0.50000	
26	0.63665	0.60651	0.57910	0.56630	0.53109	0.52030	0.50995
27	0.66149	0.63018	0.60169	0.58840	0.55181	0.54061	0.52985
28	0.68634	0.65385	0.62429	0.61050	0.57254	0.56091	0.54975
29	0.71118	0.67751	0.64689	0.63260	0.59326	0.58122	0.56965
30	0.73602	0.70118	0.66949	0.65470	0.61399	0.60152	0.58955
31	0.76087	0.72485	0.69209	0.67680	0.63472	0.62183	0.60945
32	0.78571	0.74852	0.71469	0.69890	0.65544	0.64213	0.62935
33	0.81056	0.77219	0.73729	0.72099	0.67617	0.66244	0.64925
34	0.83540	0.79586	0.75989	0.74309	0.69689	0.68274	0.66915
35	0.86025	0.81953	0.78249	0.76519	0.71762	0.70305	0.68905
36	0.88509	0.84320	0.80508	0.78729	0.73834	0.72335	0.70896
37	0.90994	0.86686	0.82768	0.80939	0.75907	0.74365	0.72886
38	0.93478	0.89053	0.85028	0.83149	0.77979	0.76396	0.74876
39	0.95963	0.91420	0.87288	0.85359	0.80052	0.78426	0.76866
40	0.98447	0.93787	0.89548	0.87569	0.82124	0.80457	0.78856
41		0.96154	0.91808	0.89779	0.84197	0.82487	0.80846
42		0.98521	0.94068	0.91989	0.86269	0.84518	0.82836
43			0.96328	0.94199	0.88342	0.86548	0.84826
44			0.98588	0.96409	0.90415	0.88579	0.86816
45				0.98619	0.92487	0.90609	0.88806
46					0.94560	0.92640	0.90796
47					0.96632	0.94670	0.92786
48					0.98705	0.96701	0.94776
49						0.98731	0.96766
50							0.98756

Tabela A2. Quantis normais

$$\Phi^{-1}(p_k) = \begin{cases} -\Phi^{-1}(p_{n-k+1}), & \text{se } k = 1, \dots, [n/2]; \\ \Phi^{-1}(k-0,375)/(n+0,25), & \text{se } k = [n/2], \dots, n. \end{cases}$$

n \ k	6	8	9	10	12	14	15
4	0.2019						
5	0.6433	0.1525	0.0000				
6	1.2816	0.4728	0.2744	0.1226			
7		0.8525	0.5717	0.3755	0.1025		
8		1.4342	0.9320	0.6554	0.3119	0.0881	0.0000
9			1.4942	1.0005	0.5362	0.2670	0.1651
10				1.5467	0.7917	0.4550	0.3349
11					1.1140	0.6608	0.5150
12					1.6350	0.8994	0.7137
13						1.2053	0.9458
14						1.7075	1.2451
15							1.7394

n \ k	16	18	20	21	24	25	26
9	0.0772						
10	0.2335	0.0687					
11	0.3957	0.2075	0.0620	0.0000			
12	0.5692	0.3504	0.1868	0.1183			
13	0.7619	0.5009	0.3146	0.2382	0.0517	0.0000	
14	0.9881	0.6638	0.4478	0.3616	0.1557	0.0994	0.0478
15	1.2816	0.8465	0.5894	0.4909	0.2614	0.1998	0.1437
16	1.7687	1.0633	0.7441	0.6289	0.3701	0.3024	0.2410
17		1.3467	0.9191	0.7802	0.4833	0.4081	0.3407
18		1.8217	1.1281	0.9518	0.6032	0.5187	0.4439
19			1.4034	1.1575	0.7324	0.6360	0.5520
20			1.8683	1.4292	0.8752	0.7628	0.6670
21				1.8895	1.0386	0.9034	0.7917
22					1.2359	1.0644	0.9300
23					1.4984	1.2592	1.0890
24					1.9468	1.5192	1.2816
25						1.9642	1.5390
26							1.9808

n \ k	27	28	30	32	33	35	36
14	0.0000						
15	0.0921	0.0444					
16	0.1850	0.1335	0.0414				
17	0.2796	0.2237	0.1246	0.0389	0.0000		
18	0.3766	0.3157	0.2087	0.1169	0.0755	0.0000	
19	0.4775	0.4105	0.2942	0.1955	0.1513	0.0712	0.0346
20	0.5834	0.5092	0.3820	0.2755	0.2281	0.1427	0.1039
21	0.6963	0.6131	0.4728	0.3572	0.3063	0.2150	0.1738
22	0.8189	0.7240	0.5677	0.4414	0.3863	0.2884	0.2444
23	0.9552	0.8448	0.6680	0.5289	0.4690	0.3634	0.3164
24	1.1122	0.9793	0.7755	0.6206	0.5549	0.4405	0.3900
25	1.3028	1.1344	0.8929	0.7178	0.6452	0.5203	0.4658
26	1.5579	1.3230	1.0241	0.8224	0.7411	0.6036	0.5443
27	1.9966	1.5760	1.1759	0.9368	0.8443	0.6913	0.6264
28		2.0117	1.3609	1.0651	0.9574	0.7847	0.7130
29			1.6098	1.2138	1.0844	0.8855	0.8052
30			2.0402	1.3958	1.2318	0.9962	0.9049
31				1.6412	1.4122	1.1207	1.0145
32				2.0669	1.6559	1.2655	1.1379
33					2.0793	1.4433	1.2816
34						1.6839	1.4580
35						2.1033	1.6972
36							2.1142

Tabela A2. Continuação.

k \ n							
	40	42	44	45	48	49	50
21	0.0311						
22	0.0936	0.0297					
23	0.1564	0.0891	0.0283	0.0000			
24	0.2197	0.1439	0.0851	0.0554			
25	0.2840	0.2092	0.1421	0.1110	0.0260	0.0000	
26	0.3495	0.2702	0.1996	0.1669	0.0780	0.0509	0.0249
27	0.4165	0.3323	0.2577	0.2234	0.1303	0.1019	0.0749
28	0.4855	0.3957	0.3168	0.2806	0.1828	0.1533	0.1251
29	0.5569	0.4608	0.3769	0.3387	0.2359	0.2050	0.1755
30	0.6311	0.5278	0.4385	0.3980	0.2897	0.2573	0.2264
31	0.7091	0.5973	0.5018	0.4588	0.3444	0.3103	0.2779
32	0.7917	0.6698	0.5672	0.5212	0.4000	0.3642	0.3302
33	0.8800	0.7461	0.6350	0.5858	0.4570	0.4191	0.3833
34	0.9757	0.8269	0.7059	0.6529	0.5155	0.4754	0.4376
35	1.0815	0.9136	0.7806	0.7231	0.5758	0.5332	0.4932
36	1.2008	1.0077	0.8599	0.7970	0.6383	0.5928	0.5503
37	1.3404	1.1117	0.9451	0.8757	0.7033	0.6547	0.6093
38	1.5124	1.2294	1.0376	0.9601	0.7715	0.7191	0.6706
39	1.7464	1.3671	1.1401	1.0519	0.8435	0.7867	0.7344
40	2.1564	1.5371	1.2562	1.1537	0.9201	0.8580	0.8014
41		1.7687	1.3923	1.2691	1.0026	0.9341	0.8722
42		2.1758	1.5605	1.4044	1.0925	1.0160	0.9477
43			1.7900	1.5716	1.1922	1.1053	1.0290
44			2.1938	1.8002	1.3056	1.2044	1.1177
45				2.2024	1.4386	1.3171	1.2163
46					1.6036	1.4495	1.3283
47					1.8292	1.6136	1.4601
48					2.2274	1.8386	1.6235
49						2.2354	1.8475
50							2.2434

Tabela A3. Valores das constantes a_{n-t+1} requeridas para o cálculo da estatística W de Shapiro-Wilk.

$\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.7071									
4	0.6872	0.1677								
5	0.6646	0.2413								
6	0.6431	0.2806	0.0875							
7	0.6233	0.3031	0.1401							
8	0.6052	0.3164	0.1743	0.0561						
9	0.5888	0.3244	0.1976	0.0947						
10	0.5739	0.3291	0.2141	0.1224	0.0399					
12	0.5475	0.3325	0.2347	0.1586	0.0922	0.0303				
14	0.5251	0.3318	0.2460	0.1802	0.1240	0.0727	0.0240			
16	0.5056	0.3290	0.2521	0.1939	0.1447	0.1005	0.0593	0.0196		
18	0.4886	0.3253	0.2553	0.2027	0.1587	0.1197	0.0837	0.0496	0.0163	
20	0.4734	0.3211	0.2565	0.2085	0.1686	0.1334	0.1013	0.0711	0.0422	0.0140
25	0.4450	0.3069	0.2543	0.2148	0.1822	0.1539	0.1283	0.1046	0.0823	0.0610
30	0.4254	0.2944	0.2487	0.2148	0.1870	0.1630	0.1415	0.1219	0.1036	0.0862
35	0.4096	0.2834	0.2427	0.2127	0.1883	0.1673	0.1487	0.1317	0.1160	0.1013
40	0.3964	0.2737	0.2368	0.2098	0.1878	0.1691	0.1526	0.1376	0.1237	0.1108
45	0.3850	0.2651	0.2313	0.2065	0.1865	0.1695	0.1545	0.1410	0.1286	0.1170
50	0.3751	0.2574	0.2260	0.2032	0.1847	0.1691	0.1554	0.1430	0.1317	0.1212

$\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	0.0403	0.0200								
30	0.0697	0.0537	0.0381	0.0227	0.0076					
35	0.0873	0.0739	0.0610	0.0484	0.0361	0.0239	0.0119			
40	0.0986	0.0870	0.0759	0.0651	0.0546	0.0444	0.0343	0.0244	0.0146	0.0049
45	0.1062	0.0959	0.0860	0.0765	0.0673	0.0584	0.0497	0.0412	0.0328	0.0245
50	0.1113	0.1020	0.0932	0.0846	0.0764	0.0685	0.0608	0.0532	0.0459	0.0386

$\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$	21	22	23	24	25
45	0.0163	0.0081			
50	0.0314	0.0244	0.0174	0.0104	0.0035

n = número de observações.

Fonte: BARNETT e LEWIS (1984).

Tabela A4. Valores críticos para a estatística W de Shapiro-Wilk para $\alpha = 0,05$ e $0,01$.

n	α	
	5%	1%
3	0.767	0.753
4	0.748	0.687
5	0.762	0.686
6	0.788	0.713
7	0.803	0.730
8	0.818	0.749
9	0.829	0.764
10	0.842	0.781
12	0.859	0.805
14	0.874	0.825
16	0.887	0.844
18	0.897	0.858
20	0.905	0.868
25	0.918	0.888
30	0.927	0.900
35	0.934	0.910
40	0.940	0.919
45	0.945	0.926
50	0.947	0.930

n = número de observações.

Fonte: BARNETT e LEWIS (1984).

Tabela A5. Valores críticos para o teste do coeficiente de correlação baseado na posição de "plot" $p_k = (k-0,375)/(n+0,25)$.

n	.000	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
3	.866	.867	.869	.872	.879	.891	.924	.966	.992	.999	.9997	.9999	1.000	1.000
4	.785	.813	.824	.846	.868	.894	.931	.958	.979	.992	.996	.998	.999	1.000
5	.729	.807	.826	.856	.880	.903	.934	.960	.977	.988	.992	.995	.997	.998
6	.686	.820	.838	.866	.888	.910	.939	.962	.977	.986	.990	.993	.996	.997
7	.651	.828	.850	.877	.898	.918	.944	.964	.978	.986	.990	.992	.995	.996
8	.623	.840	.861	.887	.906	.924	.948	.966	.978	.986	.990	.992	.994	.995
9	.599	.854	.871	.894	.912	.930	.952	.968	.980	.986	.990	.992	.994	.995
10	.578	.862	.879	.901	.918	.934	.954	.970	.980	.987	.990	.992	.994	.995
11	.560	.870	.886	.907	.923	.938	.957	.972	.981	.987	.990	.992	.994	.995
12	.544	.876	.892	.912	.928	.942	.960	.973	.982	.988	.990	.992	.994	.995
13	.529	.885	.899	.918	.932	.945	.962	.974	.983	.988	.991	.992	.994	.995
14	.516	.890	.905	.923	.935	.948	.964	.976	.984	.989	.991	.992	.994	.995
15	.504	.896	.910	.927	.939	.951	.965	.977	.984	.989	.991	.993	.994	.995
16	.493	.899	.913	.929	.941	.953	.967	.978	.985	.989	.991	.993	.994	.995
17	.483	.905	.917	.932	.944	.954	.968	.979	.986	.990	.992	.993	.994	.995
18	.473	.908	.920	.935	.946	.957	.970	.979	.986	.990	.992	.993	.9945	.9952
19	.465	.914	.924	.938	.949	.958	.971	.980	.987	.990	.992	.993	.9946	.9953
20	.457	.916	.926	.940	.951	.960	.972	.981	.987	.991	.992	.994	.9947	.9954
21	.449	.918	.930	.943	.952	.961	.973	.982	.987	.991	.993	.994	.995	.996
22	.442	.923	.933	.945	.954	.963	.974	.982	.988	.991	.993	.994	.995	.996
23	.435	.925	.935	.947	.956	.964	.975	.983	.988	.991	.993	.994	.995	.996
24	.429	.927	.937	.949	.957	.965	.976	.983	.988	.992	.993	.994	.995	.996
25	.422	.929	.939	.951	.959	.966	.976	.984	.989	.992	.993	.994	.995	.996
26	.417	.932	.941	.952	.960	.967	.977	.984	.989	.992	.993	.994	.995	.996
27	.411	.934	.943	.953	.961	.968	.978	.985	.989	.992	.994	.995	.9955	.9960
28	.406	.936	.944	.955	.962	.969	.978	.985	.990	.992	.994	.995	.9955	.9960
29	.401	.939	.946	.956	.963	.970	.979	.985	.990	.993	.994	.995	.9956	.9961
30	.396	.939	.947	.957	.964	.971	.979	.986	.990	.993	.994	.995	.9957	.9962
31	.392	.942	.950	.958	.965	.972	.980	.986	.990	.993	.994	.995	.9957	.9962
32	.387	.943	.950	.959	.966	.972	.980	.987	.991	.993	.994	.995	.9958	.9963
33	.383	.944	.951	.961	.967	.973	.981	.987	.991	.993	.994	.995	.9959	.9963
34	.379	.946	.953	.962	.968	.974	.981	.987	.991	.993	.994	.995	.996	.997
35	.375	.947	.954	.962	.969	.974	.982	.987	.991	.994	.9945	.9953	.996	.997
36	.371	.948	.955	.963	.969	.975	.982	.988	.991	.994	.9946	.9954	.996	.997
37	.368	.950	.956	.964	.970	.976	.983	.988	.991	.994	.995	.9955	.9962	.997
38	.364	.951	.957	.965	.971	.976	.983	.988	.992	.994	.995	.9956	.9963	.997
39	.361	.951	.958	.966	.971	.977	.983	.988	.992	.994	.995	.9957	.9963	.997
40	.358	.953	.959	.966	.972	.977	.984	.989	.992	.994	.995	.9957	.9964	.997
41	.354	.953	.960	.967	.973	.977	.984	.989	.992	.994	.995	.996	.9965	.9968
42	.351	.954	.961	.968	.973	.978	.984	.989	.992	.994	.995	.996	.9965	.9969
43	.348	.956	.961	.968	.974	.978	.984	.989	.992	.994	.995	.996	.9966	.9969
44	.346	.957	.962	.969	.974	.979	.985	.989	.993	.9945	.9953	.996	.9966	.9970
45	.343	.957	.963	.969	.974	.979	.985	.990	.993	.9945	.9954	.996	.9966	.9970
46	.340	.958	.963	.970	.975	.980	.985	.990	.993	.995	.9955	.9961	.9968	.9971
47	.337	.959	.965	.971	.976	.980	.986	.990	.993	.995	.9956	.9962	.9968	.9972
48	.335	.959	.965	.971	.976	.980	.986	.990	.993	.995	.9956	.9962	.9968	.9972
49	.332	.961	.966	.972	.976	.981	.986	.990	.993	.995	.9957	.9963	.9968	.9972
50	.330	.961	.966	.972	.977	.981	.986	.990	.993	.995	.9957	.9963	.9969	.9972
55	.319	.965	.969	.974	.979	.982	.987	.991	.994	.995	.996	.9966	.9971	.9974
60	.309	.967	.971	.976	.980	.984	.988	.992	.994	.9956	.9963	.9968	.9973	.9975
65	.300	.969	.973	.978	.981	.985	.989	.992	.994	.996	.9965	.9969	.9974	.9977
70	.292	.971	.975	.979	.983	.986	.990	.993	.995	.996	.9966	.9971	.9975	.9978
75	.284	.973	.976	.981	.984	.987	.990	.993	.995	.996	.9968	.9972	.9976	.9979
80	.277	.975	.978	.982	.985	.987	.991	.993	.995	.996	.9970	.9974	.9978	.9980
85	.271	.976	.979	.983	.985	.988	.991	.994	.996	.9966	.9971	.9975	.9979	.9981
90	.266	.977	.980	.984	.986	.988	.992	.994	.996	.9967	.9972	.9976	.9979	.9981
95	.260	.979	.981	.984	.987	.989	.992	.994	.996	.9969	.9973	.9977	.9980	.9982
100	.255	.979	.982	.985	.987	.989	.992	.995	.996	.9970	.9974	.9978	.9981	.9983

n = número de observações.

Fonte: LOONEY e GULLEDGE (1985).

Tabela A6. Valores críticos superiores para resíduos studentizados.

n	(α = .05)									
	p									
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	25
5	1.92									
6	2.07	1.93								
7	2.19	2.08	1.94							
8	2.28	2.20	2.10	1.94						
9	2.35	2.29	2.21	2.10	1.95					
10	2.42	2.37	2.31	2.22	2.11	1.95				
12	2.52	2.49	2.45	2.39	2.33	2.24	1.96			
14	2.61	2.58	2.55	2.51	2.47	2.41	2.25	1.96		
16	2.68	2.66	2.63	2.60	2.57	2.53	2.43	2.26		
18	2.73	2.72	2.70	2.68	2.65	2.62	2.55	2.44		
20	2.78	2.77	2.76	2.74	2.72	2.70	2.64	2.57	2.15	
25	2.89	2.88	2.87	2.86	2.84	2.83	2.80	2.76	2.60	
30	2.96	2.96	2.95	2.94	2.93	2.93	2.90	2.88	2.79	2.17
35	3.03	3.02	3.02	3.01	3.00	3.00	2.98	2.97	2.91	2.64
40	3.08	3.08	3.07	3.07	3.06	3.06	3.05	3.03	3.00	2.84
45	3.13	3.12	3.12	3.12	3.11	3.11	3.10	3.09	3.06	2.96
50	3.17	3.16	3.16	3.16	3.15	3.15	3.14	3.14	3.11	3.04
60	3.23	3.23	3.23	3.23	3.22	3.22	3.22	3.21	3.20	3.15
70	3.29	3.29	3.28	3.28	3.28	3.28	3.27	3.27	3.26	3.23
80	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.32	3.32	3.31	3.29
90	3.37	3.37	3.37	3.37	3.37	3.37	3.36	3.36	3.36	3.34
100	3.41	3.41	3.40	3.40	3.40	3.40	3.40	3.40	3.39	3.38

- continua -

Tabela A6. Continuação.

(α = .01)										
n	p									
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	25
5	1.98									
6	2.17	1.98								
7	2.32	2.17	1.98							
8	2.44	2.32	2.18	1.98						
9	2.54	2.44	2.33	2.18	1.99					
10	2.62	2.55	2.45	2.33	2.18	1.99				
12	2.76	2.70	2.64	2.56	2.46	2.34	1.99			
14	2.86	2.82	2.78	2.72	2.65	2.57	2.35	1.99		
16	2.95	2.92	2.88	2.84	2.79	2.73	2.58	2.35		
18	3.02	3.00	2.97	2.94	2.90	2.85	2.75	2.59		
20	3.08	3.06	3.04	3.01	2.98	2.95	2.87	2.76	2.20	
25	3.21	3.19	3.18	3.16	3.14	3.12	3.07	3.01	2.78	
30	3.30	3.29	3.28	3.26	3.25	3.24	3.21	3.17	3.04	2.21
35	3.37	3.36	3.35	3.34	3.34	3.33	3.30	3.28	3.19	2.81
40	3.43	3.42	3.42	3.41	3.40	3.40	3.38	3.36	3.30	3.08
45	3.48	3.47	3.47	3.46	3.46	3.45	3.44	3.43	3.38	3.23
50	3.52	3.52	3.51	3.51	3.51	3.50	3.49	3.48	3.45	3.34
60	3.60	3.59	3.59	3.59	3.58	3.58	3.57	3.56	3.54	3.48
70	3.65	3.65	3.65	3.65	3.64	3.64	3.64	3.63	3.61	3.57
80	3.70	3.70	3.70	3.70	3.69	3.69	3.69	3.68	3.67	3.64
90	3.74	3.74	3.74	3.74	3.74	3.74	3.73	3.73	3.72	3.70
100	3.78	3.78	3.78	3.77	3.77	3.77	3.77	3.77	3.76	3.74

n = número de observações; p = r[X].

Fonte: LUND (1975).

Tabela A7. Limite superior, g_α , para o coeficiente de correlação mínimo,
 $\alpha = 0,05$.

n	p									
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	
5	.744	.923								
6	.624	.768	.936							
7	.542	.645	.787	.944						
8	.481	.559	.663	.803	.951					
9	.434	.495	.573	.678	.816	.957				
10	.397	.445	.506	.586	.690	.827				
12	.340	.373	.414	.464	.526	.607	.845			
14	.298	.323	.352	.386	.428	.479	.624	.858		
16	.266	.285	.307	.332	.362	.398	.492	.639		
18	.241	.256	.273	.293	.315	.341	.408	.504	.978	
20	.220	.233	.246	.262	.279	.299	.349	.416	.765	
25	.183	.191	.199	.209	.219	.231	.258	.293	.435	
30	.157	.162	.168	.175	.182	.190	.207	.228	.304	
35	.137	.142	.146	.151	.156	.161	.174	.188	.235	
40	.123	.126	.130	.133	.137	.141	.150	.160	.192	
50	.102	.104	.106	.108	.111	.113	.119	.125	.143	

n = número de observações; p = r[X].

Fonte: DOORNBOS (1981).