ANÁLISE DE DADOS ESTRUTURADOS COM BALANCEAMENTO GERAL
APLICADOS A ENS/IOS AGRONÔMICOS

MARIA HELENA DE CARVALHO GUADANHIN
Licenciada em Matemática

Orientador: PROF. DR. CLÓVIS POMPÍLIO DE ABREU

Dissertação apresentada à Escola
Superior de Agricultura "Luiz de
Queiroz", Universidade de São
Paulo, para obtenção do título
de Mestre em Agronomia, Área de
Concentração: Estatística e
Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Dezembro - 1991

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Livros da
Divisão de Biblioteca e Documentação - PCAP/USP

Guadanhin, Maria Helena de Carvalho
G897a Análise de dados estruturados com balanceamento geral
aplicados a ensaios agronômicos. Piracicaba, 1991.
143p.

Diss. (Mestre) - ESALQ
Bibliografia.

1. Delineamento de experimento 2. Estatística agrícola
3. Estatística experimental 4. Estrutura de blocos I.
Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba

CDD 519.5

ANÁLISE DE DADOS ESTRUTURADOS COM BALANCEAMENTO GERAL
APLICADOS A ENSAIOS AGRONÔMICOS

MARIA HELENA DE CARVALHO GUADANHIN

Aprovada em: 17/02/92

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Clóvis Pompílio de Abreu	ESALQ/USP
- Prof. Dr. Fernando Ferrari	IBILCE/UNESP
- Prof. ^a Dr. ^a Maria Cristina Stolf Nogueira	ESALQ/USP

Prof. Dr. CLÓVIS POMPÍLIO DE ABREU

Orientador

A meus pais: Antônio Aóziz de Carvalho (in memoriam)
e Maria Aparecida Feixeira de Carvalho

OFEREÇO

Ao José Roberto
e ao nosso filho Gustavo

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força para alcançar este objetivo.

Ao professor Dr. Clóvis Pompílio de Abreu, meu orientador.

Ao professor Dr. José Eduardo Corrênte, pelo incentivo e sugestões.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ.

À UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática da UFMS.

Ao meu esposo, José Roberto, pelo apoio, e companheirismo, em toda esta jornada.

Ao meu filho Gustavo, pela amizade e apoio.

Ao professor Dr. Antonio Assiz de Carvalho Filho pelo apoio e incentivo.

Aos colegas do Curso de Pós-graduação, pela amizade e cooperação.

Aos meus familiares pelo apoio e incentivo.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

	Página
RESUMO.....	vii
SUMMARY.....	ix
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	3
3. METODOLOGIA.....	5
3.1. Estrutura de blocos.....	5
3.2. Partição do espaço de resposta.....	9
3.2.1. Partição do espaço de respostas segundo a estrutura de blocos para o caso de experimento inteiramente casualizado.....	9
3.2.2. Partição do espaço de respostas segundo a estrutura de blocos para o caso de experimento em blocos casualizados.....	15
3.2.3. Partição do espaço de respostas segundo a estrutura de blocos para o caso de experimento em quadrados latinos.....	24
3.3. Estrutura de covariância.....	33

3.4. Análise de Variância Nula.....	39
3.4.1. Apresentação da forma do operador de covariância de Y, para o caso de ex- perimento inteiramente casualizado..	41
3.4.2. Apresentação da forma do operador de covariância de Y, para o caso de ex- perimento em blocos casualizados....	44
3.4.3. Apresentação da forma do operador de covariância de Y, para o caso de ex- perimento em quadrado latino.....	48
3.5. Estrutura de Tratamentos.....	54
3.5.1. Estrutura de tratamentos para expe- rimento inteiramente casualizado....	56
3.5.2. Estrutura de tratamentos para expe- rimento em blocos casualizados - esquema inteiramente casualizado....	59
3.5.3. Estrutura de tratamentos para expe- rimento em blocos casualizados - esquema fatorial.....	59
3.5.4. Estrutura de tratamentos para expe- rimento em quadrado latino - esquema inteiramente casualizado.....	61

	Página
3.6. Delineamento.....	62
3.6.1. Matriz de incidência N.....	62
3.6.2. Conceito geralmente balanceado.....	65
3.6.3. Tabelas de Fisher.....	67
3.7. Análise dos resultados.....	68
3.7.1. Método dos mínimos quadrados.....	69
3.7.2. Estimação num dado estrato $\mathcal{P}_\alpha$	78
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	90
5. CONCLUSÕES.....	139
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	141

ANÁLISE DE DADOS ESTRUTURADOS COM BALANCEAMENTO GERAL APLICADOS A ENSAIOS AGRONÔMICOS

Autor: MARIA HELENA DE CARVALHO GUADANHIN

Orientador: PROF. DR. CLÓVIS POMPÍLIO DE ABREU

RESUMO

Na análise de experimentos, uma das preocupações é criar-se modelos que explicitem as estruturas do fenômeno em observação.

Uma estratégia conveniente seria supor que cada observação é formada por duas partes: uma previsível e outra aleatória.

Se considerarmos essas duas estruturas independentes e ligadas a uma matriz de alocação, que define a que tratamento cada unidade experimental é submetida, temos uma análise mais simples.

Assim, este trabalho tem como objetivo estudar uma outra metodologia de análise, levando em conta uma estrutura de blocos e uma outra de tratamento, apresentando uma alternativa para a análise clássica.

Esta nova metodologia trabalha diretamente com os operadores e as projeções que geralmente envolvem apenas cálculos de médias sobre colunas, linhas, blocos, etc.

Como aplicação desta técnica, considera-se exemplos encontrados na literatura e já analisados, com o interesse de comparar os dois métodos de análise.

Conclui-se que, considerando dados com uma estrutura de blocos e uma estrutura de tratamentos, pode-se ter uma maior flexibilidade no esquema adotado para a aleatorização dos tratamentos, isto é, pode-se adotar um esquema mais complicado na aplicação dos mesmos, com uma maneira simples de analisá-los, o que talvez tornasse inviável à análise pelo método clássico.

GENERALLY BALANCED STRUCTURED DATA ANALYSIS APPLIED AN AGRONOMIC TRIALS

Author: MARIA HELENA DE CARVALHO GUADANHIN

Adviser: PROF. DR. CLÓVIS POMPÍLIO DE ABREU

SUMMARY

In experimental analysis the creation of models that state the observation phenomenon structures is one of the main concerns.

Assuming that each observation is formed by two parts, a foreseeable a random one, would be a convenient strategy.

If these two structures are considered independent and connected to an allocation matrix defining to wich treatment each experimental unit is submitted a simpler analysis may be obtained.

Therefore, the present work was carried out to study another analysis methodology taking into account a block and a treatment structure presenting an alternative to the classical analysis.

This new methodology deals directly with the projecting operators that usually involve only calculus of means on columns, rows, blocks, etc.

Already analysed examples and others found in literature are considered to determine this technique's application in order to compare the two methods of analysis.

One concludes that when data are considered with block and treatment structures a higher flexibility in the adopted scheme for treatment randomization may be accomplished, that is, a more complicated scheme with a more simplified approach, which might turn the classical method analysis not viable.

1. INTRODUÇÃO

Uma das preocupações estatísticas ao analisar dados, é a de criar modelos que explicitem estruturas do fenômeno em observação, as quais frequentemente estão misturadas com variações acidentais ou aleatórias. A identificação dessas estruturas permite conhecer melhor o fenômeno, bem como fazer afirmações sobre possíveis comportamentos do mesmo. Assim, uma estratégia conveniente de análise é supor que cada observação é formada por duas partes: uma previsível (ou controlada) e outra aleatória (ou não previsível).

A primeira componente, a parte previsível, incorpora o conhecimento que o pesquisador tem sobre o fenômeno e é usualmente expressa por uma função matemática com parâmetros desconhecidos.

Para a segunda componente, devido ao seu caráter aleatório, impõe-se que os mesmos obedecam a algum modelo probabilístico.

Com essas suposições, o trabalho estatístico passa a ser aquele de produzir estimativas para os

parâmetros desconhecidos, baseando-se em amostras observadas.

Na análise de variância, elaborada pelo método clássico, a estimação desses parâmetros desconhecidos não são possíveis pois as matrizes não tem posto completo, até a montagem do Quadro da Análise de Variância o que dificulta algumas vezes a análise dos dados.

Uma maneira mais direta para se elaborar a Análise de Variância seria considerar, além da estrutura de tratamentos uma estrutura de blocos, que poderá facilitar a montagem do Quadro da Análise de Variância.

Considera-se as duas estruturas como sendo independentes, e que são ligadas a uma matriz de alocação que define a que tratamento cada unidade experimental é submetida e isto torna a análise mais simples e unificada das respostas de um experimento.

Assim, o objetivo deste trabalho é estudar uma outra metodologia de análise levando em conta uma estrutura de blocos e uma estrutura de tratamentos, apresentando assim uma alternativa para a análise de variância clássica, na tentativa de obter respostas mais precisas aos dados analisados.

2. REVISÃO DE LITERATURA

FISHER (1935), distingue em um experimento duas estruturas independentes: uma, por ele denominada topográfica, associada à classificação das unidades experimentais segundo determinados fatores (como exemplo, considera-se grupos de canteiros homogêneos em localidades diferentes ou metades diferentes de folhas de árvores diferentes em seções distintas de um pomar) e outra, denominada de tratamentos, ligada às questões de interesse a serem medidas através do experimento. Observa ainda que o delineamento de um experimento pode ser entendido como a maneira de relacionar estas duas estruturas.

NELDER (1965a,b), retoma os estudos iniciados por Fisher, escrevendo dois artigos nos quais define o delineamento de um experimento como a superposição de duas estruturas independentes, análogas àquelas propostas por Fisher. A estrutura topográfica passa a ser denominada estrutura de blocos, e a outra foi mantida o nome de tratamentos. Nelder trata também nestes artigos o conceito de balanceamento geral (GB), que generaliza o conceito de balanceamento de um delineamento.

Através da noção de balanceamento geral, Nelder relaciona dentro de um mesmo contexto, três tópicos de fundamental importância dentro da teoria de planejamento de experimentos: o balanceamento de um delineamento, a importância de contrastes, que são autovetores de matrizes de covariâncias, e a combinação de informações obtidas através de diferentes estratos.

BELTRÃO & PESSOA (1988), abordam o problema de dados estruturados como realmente uma alternativa à análise de variância clássica, onde se trabalha diretamente com os operadores de projeção que geralmente envolvem apenas cálculos de médias sobre colunas, sobre linhas, blocos, etc... Neste, contexto ainda, pode-se abordar modelos com efeitos fixos, aleatórios ou mistos.

PINHEIRO (1985) elaborou um programa computacional que permite realizar a análise de dados, levando em conta a estrutura de blocos e a estrutura de tratamentos. Este programa construído em linguagem FORTRAN, utiliza sub-rotinas do IMSL.

3. METODOLOGIA

3.1. Estrutura de Blocos

Estrutura de Blocos, foi assim denominada por NELDER (1965 a, b) como sendo um dos dois aspectos básicos observados numa análise de dados, obtidos através de *Designamento de Experimentos*.

Este aspecto diz respeito à relação intrínseca entre as unidades experimentais, ou seja, as unidades experimentais são agrupadas ou classificadas, segundo uma série de fatores considerados relevantes para explicar a variabilidade das respostas observadas. Tal classificação existe independentemente dos tratamentos aplicados ou aplicáveis a estas unidades. O modo como são classificadas as unidades experimentais define um conjunto de relações entre as mesmas, que se traduz em um modelo para o operador de covariância das respostas.

O operador de covariância V de um vetor aleatório Y que toma valores em um espaço vetorial $\mathcal{D}$, é definido, como o único operador linear em $\mathcal{D}$ tal que $\forall u, v \in \mathcal{D}$,

$$\text{cov}(\langle u, Y \rangle, \langle v, Y \rangle) = \langle u, Vv \rangle$$

A este conjunto de relações entre as unidades, dá-se o nome de *estrutura de blocos* do experimento, que é denotado por E.B.

A E.B. pode ser definida pela aleatorização adotada no experimento, que por sua vez é caracterizada por um grupo de permutações G , que reflete a arbitrariedade de uma indexação das unidades experimentais por um conjunto de índices I , finito, ligados aos fatores de classificação.

Os elementos de G são funções g , bijetoras de I em I , ($g: I \rightarrow I$).

Os principais tipos de operações associativas de fatores de classificação são o cruzamento e o aninhamento. As estruturas obtidas a partir da combinação destes dois tipos de operações, recebem a denominação de *estruturas de blocos simples*.

A operação de cruzamento é a empregada, por exemplo, na combinação dos fatores linha e coluna de um quadrado latino. Usa-se o símbolo "*" asterisco para representá-la.

O aninhamento é a operação utilizada para associar os blocos e as parcelas em um delineamento em blocos casualizados, a notação utilizada é "/" barra.

Se as unidades estão rotuladas por elementos $i \in I$, onde I é um conjunto de índices com n elementos, o vetor $y = (y_i)_{i \in I}$ é chamado de vetor de medidas ou de respostas de um conjunto estruturado de dados. O vetor de res-

postas $y = (y_i)_{i \in I}$, é um elemento de um espaço vetorial $\mathfrak{D} = \mathbb{R}^I$.

O grupo G de permutações dos índices, induz um espaço G^* de transformações lineares g^* , de $\mathfrak{D}$ em $\mathfrak{D}$.

$$(y_i)_{i \in I} \longrightarrow (y_{g(i)})_{i \in I}$$

onde $g(i)$ é a imagem de i sob a permutação g .

Observa-se que, $\forall g \in G$, o operador g^* induzido por g é inversível.

Para uma determinada classe de estrutura de blocos, denominadas ortogonais, que engloba as estruturas de blocos simples, o grupo de operadores

$$G^*: \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$$

induzido por G , determina uma partição do espaço vetorial $\mathfrak{D}$ em subespaços $\mathcal{P}_\alpha$, ortogonais entre si e G invariante, isto é, existe $\mathcal{P}_\alpha$, tal que,

$$\forall y \in \mathcal{P}_\alpha, g^*(y) \in \mathcal{P}_\alpha, \forall g^* \in G^*$$

e são minimais, no sentido de não conter nenhum outro subespaço invariante além do vetor nulo. Os subespaços ortogonais $\mathcal{P}_\alpha$ são denominados *estratos*.

Do ponto de vista estatístico, espera-se obter estimadores lineares cujas normas sejam independentes da rotulação utilizada, ou seja, também G -invariantes. Para

isto, deve-se usar S , satisfazendo:

$$\|S g^*(y)\| = \|S y\|, \forall y \in \mathcal{D}; \forall g^* \in G^*$$

onde a estatística S , é um operador de projeção ortogonal no estrato $\mathcal{P}$.

Os subespaços minimais G -invariantes definem uma partição de $\mathcal{D}$, como uma soma direta, isto é,

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{P}_{\alpha}$$

e as estatísticas G -invariantes são exatamente os operadores de projeção ortogonal nesses subespaços. Equivalentemente tem-se também uma decomposição do operador identidade.

$$I = \sum_{\alpha} S_{\alpha}$$

$$\text{com } S_{\alpha'} S_{\alpha} = 0 \text{ se } \alpha \neq \alpha' \text{ e } S_{\alpha'} S_{\alpha} = S_{\alpha},$$

ou seja, os operadores S_{α} , são ortogonais e idempotentes.

Para denotar os subespaços e operadores de projeção, usa-se a seguinte notação:

- a) para os subespaços usam-se letras em *ocript*, ex: $\mathcal{P}$.
- b) para os operadores de projeção ortogonal correspondentes serão denotados pela mesma letra em *negrito*, ex: S .
- c) I_K denota-se o operador identidade num espaço de dimensão K .
- d) J_K denota-se o operador de R^K em R^K ($J_K: R^K \rightarrow R^K$), que leva no vetor de componentes iguais a soma das

componentes do vetor original, isto é:

$$J_K(y_i)_{i \in I} = (y)_{i \in I}, \text{ onde } y = \sum_{i \in I} y_i$$

e) o produto de dois operadores:

$$A: R^K \longrightarrow R^K \quad \text{e} \quad B: R^n \longrightarrow R^n$$

denotado por $A \otimes B: R^{Kn} \longrightarrow R^{Kn}$, terá o sentido usual de produto de Kroenecher.

f) um ponto no lugar de um índice significa a média sobre todos os valores da variável com os outros índices fixos, exemplo:

$$y_{i..k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ijk}, \text{ onde } n \text{ é a cardinalidade dos índices } j.$$

g) vetores serão denotados por componentes genéricos indexados entre parênteses, exemplo:

$$y = (y_{ijk})_{ijk \in I}$$

3.2. Partição do Espaço de Respostas

3.2.1. Partição do espaço de respostas segundo a estrutura de blocos para o caso de experimento inteiramente casualizado

A representação esquemática da estrutura de blocos para este caso é:

EB: n unidades arbitrariamente rotuladas

Índices: $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Notação: $\underline{n}$

Nesse caso o grupo de permutações é a coleção de funções bijetoras, $g: I \rightarrow I$ que reindexam as unidades experimentais e (i) é o índice do indivíduo. Neste caso o grupo é a ordem $n!$ e é denominado S_n . Por exemplo, um g pertencente a G , é definido por:

$$g(1) = 3$$

$$g(2) = 1$$

$$g(3) = 2$$

$g(i) = i$ caso contrário. A representação esquemática da estrutura de blocos acima, é

Os subespaços invariantes minimais, para o caso de n unidades, são $\mathcal{M}$ e $\mathcal{D} - \mathcal{M}$, onde:

$\mathcal{M}$: representa o subespaço constituído de vetores com coordenadas iguais e dimensão igual a 1, que é a média geral.

$\mathcal{D} - \mathcal{M}$: representa o subespaço constituído de vetores, com

coordenadas cuja soma é igual a zero e é um subespaço ortogonal a $\mathcal{M}$, denotado por $\mathcal{M}^\perp$.

Os operadores de projeção ortogonal são M e $I - M$, associados aos subespaços $\mathcal{M}$ e $\mathcal{D} - \mathcal{M}$, respectivamente, onde $I = I_n$ e M é definido por:

$$M y_i = y_i, \quad i \in I$$

ou, em função dos operadores primitivos, como:

$$M = \frac{1}{n} J_n = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_n$$

Aplicando-se o operador de projeção ortogonal M , ao vetor de respostas

$y = (y_i)_{i \in I}$, tem-se:

$$M y_i = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_1 = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \\ \sum y_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum y_i \end{bmatrix}_1$$

onde n é a cardinalidade de S_n .

Permutando-se um vetor de $\mathcal{M}$, obtém-se um vetor novamente pertencente a $\mathcal{M}$, ou seja, o mesmo vetor.

Formalmente, tem-se:

$$g^* M y_i = g^*(y_{\cdot}) = M y_i$$

onde $y_i \in \mathcal{D}$ e $M y_i \in \mathcal{M}$.

As decomposições que representam a estrutura de blocos são:

$$\mathcal{D} = \mathcal{M} \oplus (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \quad \text{subespaços}$$

$$I = M + (I - M) \quad \text{operadores}$$

$$y_i = y_{\cdot} + (y_i - y_{\cdot}) \quad \text{respostas}$$

$$\|y\|^2 = \|M y\|^2 + \|(I - M)y\|^2 \quad \text{análise de variância nula}$$

$$n = 1 + (n - 1) \quad \text{dimensão}$$

A decomposição em termos das coordenadas do vetor de respostas é ilustrada por:

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{y_1} & \boxed{y_2} & \dots \dots \dots \boxed{y_n} \\
 & & = \\
 \boxed{y_{\cdot}} & \boxed{y_{\cdot}} & \dots \dots \dots \boxed{y_{\cdot}} \\
 & & + \\
 \boxed{y_1 - y_{\cdot}} & \boxed{y_2 - y_{\cdot}} & \dots \dots \dots \boxed{y_n - y_{\cdot}}
 \end{array}$$

ou, em termos de vetor coluna

$${}_n \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_1 = {}_n \begin{bmatrix} y_{\cdot} \\ y_{\cdot} \\ \vdots \\ y_{\cdot} \end{bmatrix}_1 + {}_n \begin{bmatrix} y_1 - y_{\cdot} \\ y_2 - y_{\cdot} \\ \vdots \\ y_n - y_{\cdot} \end{bmatrix}_1$$

Usando a ortogonalidade dos operadores, obtém-se a partição para a norma:

$$\|y\|^2 = \|y_{\cdot}\|^2 + \|y - y_{\cdot}\|^2,$$

que em termos dos operadores de projeção ortogonal é dada por:

$$\|I y\|^2 = \|M y\|^2 + \|(I - M)y\|^2.$$

Esta expressão é denominada análise de variância nula, onde:

$$\|M y\|^2 = {}_1 \begin{bmatrix} y_{\cdot} & \dots & y_{\cdot} \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} y_{\cdot} \\ y_{\cdot} \\ \vdots \\ y_{\cdot} \end{bmatrix}_1 = y_{\cdot}^2 + y_{\cdot}^2 + \dots + y_{\cdot}^2 = n y_{\cdot}^2$$

$$\|I y\|^2 = {}_1 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_1$$

$$= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\|(I - M)y\|^2 = {}_1 \begin{bmatrix} y_1 - y_{\cdot} & y_2 - y_{\cdot} & \dots & y_n - y_{\cdot} \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} y_1 - y_{\cdot} \\ y_2 - y_{\cdot} \\ \vdots \\ y_n - y_{\cdot} \end{bmatrix}_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

e n é a cardinalidade de S_n .

A prova da expressão:

$$\|I y\|^2 = \|M y\|^2 + \|CI - MD y\|^2,$$

é dada por:

$$\|M y\|^2 + \|CI - MD y\|^2 = n\bar{y}^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$= n\bar{y}^2 + \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2]$$

$$= n\bar{y}^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\bar{y} \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \bar{y}^2$$

$$= n\bar{y}^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\bar{y} \sum_{i=1}^n y_i + n\bar{y}^2$$

$$= n\bar{y}^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\bar{y} n\bar{y} + n\bar{y}^2$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$= \|I y\|^2,$$

lembrando que $y_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i = ny_{..}$.

3.2.2. Partição do espaço de respostas segundo a estrutura de blocos para o caso de experimentos em blocos casualizados.

A representação esquemática da estrutura de blocos para este caso é:

11	21	31	...	b1
12	22	32		b2
⋮	⋮	⋮		⋮
1k	2k	3k		bk

onde:

EB: b blocos aninhados com k parcelas.

Índices: $I = \{11, 12, \dots, 1k, 21, 22, \dots, 2k, \dots, b1, b2, \dots, bk\}$

Notação: b/k, b blocos/k parcelas

Grupo G: S_k "wreath" S_b

Cardinalidade de G: $[k]^b \times b!$

O grupo G de permutações é a coleção de funções bijetoras, $g: I \rightarrow I$, que reindexam as unidades ex-

perimentais e ij , ($i = 1, 2, \dots, b$ e $j = 1, 2, \dots, k$) é o índice do indivíduo. Neste caso, no índice ij , tanto i como j são arbitrários.

Por exemplo, tomando-se $g \in G$, definido por:

$$\begin{array}{ll} g(11) = 21 & g(21) = 11 \\ g(12) = 22 & g(22) = 12 \quad \text{e} \quad g(ij) = ij \text{ caso contrário.} \\ \vdots & \vdots \\ g(1k) = 2k & g(2k) = 1k \end{array}$$

Assim,

$$I = (21, 22, \dots, 2k, 11, 12, \dots, 1k, 31, 32, \dots, 3k, \dots, b1, b2, \dots, bk),$$

e as unidades são representadas por:

21	11	31	b1
22	12	32	b2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2k	1k	3k	bk

Os subespaços invariantes minimais para o caso de aninhamento b/k , são $\mathcal{M}$, $\mathcal{B} - \mathcal{M}$, $\mathcal{D} - \mathcal{B}$, onde:

$\mathcal{M}$ é o subespaço constituído de vetores com coordenadas iguais e de dimensão igual a 1, que representam a média geral.

$\mathcal{B} - \mathcal{M}$ é o subespaço de vetores com coordenadas constantes num mesmo bloco corrigidas pela média geral. Observa-se que as coordenadas dos vetores pertencentes a $(\mathcal{B} - \mathcal{M})$ somam zero.

$\mathcal{D} - \mathcal{B}$ é o subespaço das parcelas corrigidas para os blocos, associado ao complemento ortogonal de $\mathcal{B}$. Observa-se que as coordenadas dos vetores pertencentes a $(\mathcal{D} - \mathcal{B})$ somam zero.

Os operadores de projecção ortogonal associados aos subespaços $\mathcal{M}$; $(\mathcal{B} - \mathcal{M})$ e $(\mathcal{D} - \mathcal{B})$ são respectivamente: M , $(B - M)$ e $(I - B)$, onde M , B e I são definidos por:

$$M = \frac{1}{b \cdot k} J_b \otimes J_k = \frac{1}{b \cdot k} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{bk} = \frac{1}{n} J_n, \text{ onde } n=b \cdot k$$

isto é:

$$J_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_b, \quad J_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_k$$

$$J_b \otimes J_k = \begin{bmatrix} 1J_k & 1J_k & \dots & 1J_k \\ 1J_k & 1J_k & \dots & 1J_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1J_k & 1J_k & \dots & 1J_k \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{bk}$$

Dai,

$$M = \frac{1}{b \cdot k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{bk} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_n$$

$$B = \frac{1}{k} \left[I_b \otimes J_k \right] = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1J_k & 0J_k & \dots & 0J_k \\ 0J_k & 1J_k & \dots & 0J_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0J_k & 0J_k & \dots & 1J_k \end{bmatrix}_b$$

$$B = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} J_k & & & 0 \\ & J_k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix}_b, \text{ onde } J_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_k$$

$$e \quad I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}_{bk}$$

Aplicando cada operador ao vetor resposta

$$y = [y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1k}, y_{z1}, y_{z2}, \dots, y_{zk}, \dots, y_{b1}, y_{b2}, \dots, y_{bk}]'$$

obtem-se:

$$M y = \frac{1}{b \cdot k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1k} \\ \hline \vdots \\ \hline y_{b1} \\ y_{b2} \\ \vdots \\ y_{bk} \end{bmatrix}_1$$

$$= \frac{1}{b \cdot k} \begin{bmatrix} y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1k} + y_{21} + y_{22} + \dots + y_{2k} + \dots + y_{b1} + \dots + y_{bk} \\ y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1k} + y_{21} + y_{22} + \dots + y_{2k} + \dots + y_{b1} + \dots + y_{bk} \\ \vdots \\ y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1k} + y_{21} + y_{22} + \dots + y_{2k} + \dots + y_{b1} + \dots + y_{bk} \end{bmatrix}_1$$

$$= \frac{1}{b \cdot k} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k y_{ij} \\ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k y_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k y_{ij} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \end{bmatrix}_1$$

Assim, $\sum_{i,j} y_{ij} = y_{..} = \frac{1}{b \cdot k} \sum_i \sum_j y_{ij}$

$$B \cdot y = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \emptyset & \dots & \emptyset \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \emptyset & \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} & \dots & \emptyset \end{matrix} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \begin{matrix} \emptyset & \emptyset & \dots & \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} \end{matrix} \end{bmatrix}_{bk \quad bk} \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1k} \\ \hline y_{21} \\ \vdots \\ y_{2k} \\ \hline \vdots \\ \hline y_{b1} \\ \vdots \\ y_{bk} \end{bmatrix}_1$$

$$= \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k y_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k y_{1j} \\ \hline \vdots \\ \hline \sum_{j=1}^k y_{bj} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k y_{bj} \end{bmatrix}_{bk} = \begin{bmatrix} y_{1.} \\ y_{1.} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline y_{1.} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline y_{b.} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline y_{b.} \end{bmatrix}_1$$

$$\text{Assim, } B y_{ij} = y_{i.} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_{ij}$$

$$\text{e } I y_{ij} = y_{ij}$$

Observa-se que $\mathcal{B}$ não é um subespaço minimal, pois:

$$\mathcal{B} = \mathcal{M} \oplus (\mathcal{B} - \mathcal{M})$$

isto é, $\mathcal{B}$ é a soma direta de dois subespaços $\mathcal{M}$ e $\mathcal{B} - \mathcal{M}$, onde cada um deles é invariante minimal.

As decomposições que representam a estrutura de blocos são:

$$\mathcal{D} = \mathcal{M} \oplus (\mathcal{B} - \mathcal{M}) \oplus (\mathcal{D} - \mathcal{B}) \text{ subespaços}$$

$$I = M + (B - M) + (I - B) \text{ operadores}$$

$$y_{ij} = y_{..} + (y_{i.} - y_{..}) + (y_{ij} - y_{i.}) \text{ respostas}$$

$$\|y\|^2 = \|My\|^2 + \|(B - M)y\|^2 + \|(I - B)y\|^2 \quad \text{ANOVA nula}$$

$$bk = 1 + (b - 1) + (bk - b) \text{ dimensão}$$

A decomposição em termos das coordenadas do vetor de respostas é ilustrada por:

y_{11}	y_{21}	...	y_{b1}
y_{12}	y_{22}	...	y_{b2}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
y_{1k}	y_{2k}	...	y_{bk}
		=	
$y_{..}$	$y_{..}$	...	$y_{..}$
$y_{..}$	$y_{..}$	...	$y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$y_{..}$	$y_{..}$	...	$y_{..}$
		+	
$y_{1.} - y_{..}$	$y_{2.} - y_{..}$	...	$y_{b.} - y_{..}$
$y_{1.} - y_{..}$	$y_{2.} - y_{..}$	...	$y_{b.} - y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$y_{1.} - y_{..}$	$y_{2.} - y_{..}$	...	$y_{b.} - y_{..}$
		+	
$y_{11} - y_{1.}$	$y_{21} - y_{2.}$	...	$y_{b1} - y_{b.}$
$y_{12} - y_{1.}$	$y_{22} - y_{2.}$	...	$y_{b2} - y_{b.}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$y_{1k} - y_{1.}$	$y_{2k} - y_{2.}$	...	$y_{bk} - y_{b.}$

ou, em termos do vetor coluna:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1k} \\ \hline y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2k} \\ \hline \vdots \\ y_{b1} \\ y_{b2} \\ \vdots \\ y_{bk} \end{array} \\
 \text{bk} \left[\begin{array}{c} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1k} \\ \hline y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2k} \\ \hline \vdots \\ y_{b1} \\ y_{b2} \\ \vdots \\ y_{bk} \end{array} \right]_1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \\ \hline y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \\ \hline \vdots \\ y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \end{array} \\
 \text{bk} \left[\begin{array}{c} y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \\ \hline y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \\ \hline \vdots \\ y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \end{array} \right]_1
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} y_{1.} - y_{..} \\ y_{1.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{1.} - y_{..} \\ \hline y_{2.} - y_{..} \\ y_{2.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{2.} - y_{..} \\ \hline \vdots \\ y_{b.} - y_{..} \\ y_{b.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{b.} - y_{..} \end{array} \\
 \text{bk} \left[\begin{array}{c} y_{1.} - y_{..} \\ y_{1.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{1.} - y_{..} \\ \hline y_{2.} - y_{..} \\ y_{2.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{2.} - y_{..} \\ \hline \vdots \\ y_{b.} - y_{..} \\ y_{b.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{b.} - y_{..} \end{array} \right]_1
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} y_{11} - y_{1.} \\ y_{12} - y_{1.} \\ \vdots \\ y_{1k} - y_{1.} \\ \hline y_{21} - y_{2.} \\ y_{22} - y_{2.} \\ \vdots \\ y_{2k} - y_{2.} \\ \hline \vdots \\ y_{b1} - y_{b.} \\ y_{b2} - y_{b.} \\ \vdots \\ y_{bk} - y_{b.} \end{array} \\
 \text{bk} \left[\begin{array}{c} y_{11} - y_{1.} \\ y_{12} - y_{1.} \\ \vdots \\ y_{1k} - y_{1.} \\ \hline y_{21} - y_{2.} \\ y_{22} - y_{2.} \\ \vdots \\ y_{2k} - y_{2.} \\ \hline \vdots \\ y_{b1} - y_{b.} \\ y_{b2} - y_{b.} \\ \vdots \\ y_{bk} - y_{b.} \end{array} \right]_1
 \end{array}$$

Usando a ortogonalidade dos operadores obtém-se a partição para a norma:

$$\|y\|^2 = \|My\|^2 + \|(CB - M)y\|^2 + \|(CI - B)y\|^2$$

onde:

$$\|My\|^2 = \begin{bmatrix} y_{..} & y_{..} & \dots & y_{..} \end{bmatrix}_{1 \text{ bk}} \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \end{bmatrix}_{\text{bk} 1} = y_{..}^2 + \dots + y_{..}^2$$

$$= \text{bk} y_{..}^2 = n y_{..}^2$$

$$\|CB-My\|^2 = \left[y_{1.} - y_{..}, y_{1.} - y_{..}, \dots, y_{b.} - y_{..} \right]'_{bk} \begin{bmatrix} y_{1.} - y_{..} \\ y_{1.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{b.} - y_{..} \end{bmatrix}_1$$

$$= (y_{1.} - y_{..})^2 + \dots + (y_{b.} - y_{..})^2 = k \sum_i^b (y_{i.} - y_{..})^2$$

$$= \|CI-By\|^2 = \left[y_{11} - y_{i.}, \dots, y_{bk} - y_{i.} \right]'_{bk} \begin{bmatrix} y_{11} - y_{i.} \\ y_{12} - y_{i.} \\ \vdots \\ y_{bk} - y_{i.} \end{bmatrix}_1$$

$$= \sum_i^b \sum_j^k (y_{ij} - y_{i.})^2$$

3.2.3. Partição do espaço de respostas segundo a estrutura de blocos para o caso de experimento com cruzamento de 2 fatores com l linhas e c colunas.

A representação esquemática da estrutura de blocos neste caso é:

11	12	...	1c
21	22	...	2c
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
l1	l2	...	lc

EB: cruzamento de l linhas com c colunas.

Índices: $I = \{11, 12, \dots, 1c, 21, 22, \dots, 2c, \dots, l1, l2, \dots, lc\}$

Notação: $l \times c$ ou $c \times l$

Grupo G: $S_l \times S_c$

Cardinalidade de G é $(c!) \times (l!)$

Observação: A arbitrariedade no rotulamento é a do n° associado a cada linha (i) e a cada coluna (j).

Os subespaços invariantes mínimos para o caso de cruzamento $l \times c$ são M , $(L - M)$, $(C - M)$ e $(L + C)^\perp$, onde:

M : é o subespaço associado aos vetores cujas coordenadas são constantes e de dimensão 1, que representam a média geral.

$L - M$: onde L é o subespaço de dimensão l , com componentes constantes por linha, corrigidos pela média. Observa-se que a soma dos seus elementos é nula.

$C - M$: onde C é o subespaço de dimensão c , com componentes constantes por colunas, corrigidos pela média. Observa-se que a soma dos seus elementos é nula.

$(L + C)^\perp$: é o subespaço ortogonal a $(L + C)$, que é denominado de interação e denotado por $L.C$, quando corrigido por linha e coluna.

Os operadores de projeção ortogonal associados aos subespaços M , $(L - M)$, $(C - M)$ e $L.C$ são respectivamente: M , $(L - M)$, $(C - M)$, $(I - L - C + M)$, onde M ,

L, C e I são definidos por:

$$M = \left[\frac{1}{l} J_l \right] \otimes \left[\frac{1}{c} J_c \right] = \frac{1}{c \cdot l} J_{cl} = \frac{1}{c \cdot l} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{cl}$$

$$L = \left[\frac{1}{c} I_l \right] \otimes \left[J_c \right] = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 1 J_c & \emptyset \\ \emptyset & 1 J_c \end{bmatrix}_l = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{cl}$$

$$C = \left[\frac{1}{l} J_l \right] \otimes \left[I_c \right] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & \dots & \emptyset & \dots & 1 & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \dots & 1 & \dots & \emptyset & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & \emptyset & \dots & 1 & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \dots & 1 & \dots & \emptyset & \dots & 1 \end{bmatrix}_{cl}$$

$$e I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \emptyset \\ \vdots & & \vdots \\ \emptyset & \dots & 1 \end{bmatrix}_{cl}$$

Aplicando cada operador ao vetor resposta

$$y = \begin{bmatrix} y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1c}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2c}, \dots, y_{l1}, y_{l2}, \dots, y_{lc} \end{bmatrix}'_{cl}$$

obtem-se:

$$M y = \frac{1}{c \ell} \underset{cl}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}}_{cl} \underset{cl}{\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1c} \\ \hline \vdots \\ \hline y_{l1} \\ \vdots \\ y_{lc} \end{bmatrix}}_1 =$$

$$= \frac{1}{c \ell} \underset{cl}{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^c y_{ij} \\ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^c y_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^c y_{ij} \end{bmatrix}}_1 = \underset{cl}{\begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \end{bmatrix}}_1$$

$$\text{Assim, } M y_{ij} = y_{..} = \frac{1}{c \ell} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^c y_{ij}$$

$$C y = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{cl} \dots \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{cl} \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1c} \\ \vdots \\ y_{l1} \\ \vdots \\ y_{lc} \end{bmatrix}_1 = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ \sum_{i=1}^l y_{i1} \\ \vdots \\ 1 \\ \sum_{i=1}^l y_{ic} \\ \vdots \\ 1 \\ \sum_{i=1}^l y_{ic} \end{bmatrix}_1$$

$$\text{Assim, } C y_{ij} = y_{.j} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^l y_{ij}$$

$$e I y = y$$

As decomposições que representam a estrutura de blocos são:

$$D = M \oplus (L - MD) \oplus (C - MD) \oplus (LC - L - C + MD) \text{ subespaços.}$$

$$I = M + (L - MD) + (C - MD) + (LC - L - C + MD) \text{ operadores.}$$

$$y_{ij} = y_{..} + (y_{i.} - y_{..}) + (y_{.j} - y_{..}) + (y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y_{..})$$

respostas.

$$\|y\|^2 = \|My\|^2 + \|(L - MD)y\|^2 + \|(C - MD)y\|^2 + \|(LC - L - C + MD)y\|^2$$

ANOVA nula.

$$lc = 1 + (l - 1) + (c - 1) + (lc - l - c + 1) \text{ dimensão.}$$

$$\text{onde } (lc - l - c + 1) = (l - 1)(c - 1).$$

A decomposição em termos das coordenadas do vetor respostas é ilustrada por:

y_{11}	y_{12}	y_{1c}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_{l1}	y_{l2}	y_{lc}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{..}$	$y_{..}$	$y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{..}$	$y_{..}$	$y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{1.} - y_{..}$	$y_{1.} - y_{..}$	$y_{1c} - y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{l.} - y_{..}$	$y_{l.} - y_{..}$	$y_{lc} - y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{.1} - y_{..}$	$y_{.2} - y_{..}$	$y_{.c} - y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{.1} - y_{..}$	$y_{.2} - y_{..}$	$y_{.c} - y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{11} - y_{1.} - y_{.1} + y_{..}$	$y_{12} - y_{1.} - y_{.2} + y_{..}$	$y_{1c} - y_{1.} - y_{.c} + y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{21} - y_{2.} - y_{.1} + y_{..}$	$y_{22} - y_{2.} - y_{.2} + y_{..}$	$y_{2c} - y_{2.} - y_{.c} + y_{..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{l1} - y_{l.} - y_{.1} + y_{..}$	$y_{l2} - y_{l.} - y_{.2} + y_{..}$	$y_{lc} - y_{l.} - y_{.c} + y_{..}$

Ou, em termos de vetor coluna:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1c} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2c} \\ \vdots \\ y_{l1} \\ y_{l2} \\ \vdots \\ y_{lc} \end{bmatrix}_{lc} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \\ y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \\ y_{..} \\ \vdots \\ y_{..} \end{bmatrix}_{lc} + \begin{bmatrix} y_{1.} - y_{..} \\ y_{1.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{1.} - y_{..} \\ y_{2.} - y_{..} \\ y_{2.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{2.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{l.} - y_{..} \\ y_{l.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{l.} - y_{..} \end{bmatrix}_{lc} + \begin{bmatrix} y_{.1} - y_{..} \\ y_{.2} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{.c} - y_{..} \\ y_{.1} - y_{..} \\ y_{.2} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{.c} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{.1} - y_{..} \\ y_{.2} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{.c} - y_{..} \end{bmatrix}_{lc} + \begin{bmatrix} y_{11} - y_{1.} - y_{.1} + y_{..} \\ y_{12} - y_{1.} - y_{.2} + y_{..} \\ \vdots \\ y_{1c} - y_{1.} - y_{.c} + y_{..} \\ y_{21} - y_{2.} - y_{.1} + y_{..} \\ y_{22} - y_{2.} - y_{.2} + y_{..} \\ \vdots \\ y_{2c} - y_{2.} - y_{.c} + y_{..} \\ \vdots \\ y_{l1} - y_{l.} - y_{.1} + y_{..} \\ y_{l2} - y_{l.} - y_{.2} + y_{..} \\ \vdots \\ y_{lc} - y_{l.} - y_{.c} + y_{..} \end{bmatrix}_{lc}$$

Usando a ortogonalidade dos operadores
obtem-se a partição para a norma:

$$\|y\|^2 = \|My\|^2 + \|CL - MDy\|^2 + \|CC - MDy\|^2 + \|CI - L - C + MDy\|^2$$

onde:

$$\|y\|^2 = y'y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{lc} \end{bmatrix}_{lc} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{lc} \end{bmatrix}_{lc} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^c y_{ij}^2$$

$$\|CL-MDy\|^2 = \left[y_{1.} - y_{..} \quad y_{1.} - y_{..} \mid \dots \mid y_{l.} - y_{..} \right]_l \cdot \begin{bmatrix} y_{1.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{1.} - y_{..} \\ y_{2.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{2.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{1.} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{l.} - y_{..} \end{bmatrix}_l =$$

$$= c \sum_{i=1}^l (y_{i.} - y_{..})^2$$

$$\|CC-MDy\|^2 = \left[y_{.1} - y_{..} \quad y_{.c} - y_{..} \mid \dots \mid y_{.1} - y_{..} \quad y_{.c} - y_{..} \right]_c \cdot \begin{bmatrix} y_{.1} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{.c} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{.1} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{.1} - y_{..} \\ \vdots \\ y_{.c} - y_{..} \end{bmatrix}_c =$$

$$= l \sum_{j=1}^c (y_{.j} - y_{..})^2$$

3.3. Estrutura de Covariância

Uma primeira análise é feita utilizando um modelo simplificado que somente projeta os dados sobre os subespaços que compõem a estrutura de blocos, ignorando na análise os possíveis efeitos de tratamentos.

Para iniciar o estudo da estrutura de covariância são necessários algumas definições e lemas, cujas demonstrações serão omitidas.

Considera-se $\mathcal{D}$ um vetor aleatório definido em um espaço vetorial $\mathcal{D}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 1: Seja T um operador linear sobre um espaço $\mathcal{D}$ com produto interno. Dizemos que T possui um adjunto se existe um operador linear T^* sobre $\mathcal{D}$ tal que $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle$ para todos u e v em $\mathcal{D}$.

Teorema 1: Seja $\mathcal{D}$ um espaço de dimensão finita com produto interno. Se T e $\mathcal{U}$ são operadores lineares sobre $\mathcal{D}$ e c é um escalar

$$(a) (T + \mathcal{U})^* = T^* + \mathcal{U}^*$$

$$(b) (cT)^* = c T^*$$

$$(c) (T\mathcal{U})^* = \mathcal{U}^* T^*$$

$$(d) (T^*)^* = T$$

Definição 2: Seja α uma base ortogonal e $T: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ um operador linear. Então:

- a) T é chamado um operador auto-adjunto se $[T]_{\alpha}^{\alpha^{(1)}}$ é uma matriz simétrica.
- b) T é chamado um operador ortogonal se $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz ortogonal.

Lema 1: Seja $T: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ um operador linear. Então T auto-adjunto implica que

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle, \text{ para todo } v, w \in \mathcal{D}.$$

(demonstração omitida).

Lema 2: Seja $T: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ um operador linear.

Então as condições abaixo são equivalentes:

- a) T é ortogonal,
- b) T transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base ortonormal de $\mathcal{D}$, então $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ é uma base ortonormal em $\mathcal{D}$.
- c) T preserva o produto interno, isto é, $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$.
- d) T preserva a norma, isto é, $\|Tv\| = \|v\|$

(demonstração omitida).

⁽¹⁾ A matriz $[T]_{\alpha}^{\alpha'}$ é chamada matriz de mudança da base α' para a base α .

Definição 3: τ é a esperança do vetor aleatório Y , definido em um espaço vetorial $\mathcal{D}$, se $\forall t \in \mathcal{D}$, então:

$$E \langle t, Y \rangle = \langle t, \tau \rangle$$

Definição 4: V é o operador de covariância de um vetor aleatório Y , se $\forall u, v \in \mathcal{D}$, então:

$$\text{cov}(\langle u, Y \rangle, \langle v, Y \rangle) = \langle u, Vv \rangle$$

Lema 3: Se Y é um vetor aleatório com valores em um espaço vetorial $\mathcal{D}$, e operador de covariância V , então qualquer A , operador de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}$.

$$E \langle Y, AY \rangle = \text{tr} AV + \langle E(Y), AE(Y) \rangle$$

(demonstração omitida).

Lema 4: Se S_α é um operador de projeção ortogonal em $\mathcal{P}_\alpha$ então:

$$\text{tr}(S_\alpha) = \dim \mathcal{P}_\alpha$$

(demonstração omitida).

Considera-se aqui, o vetor de respostas $y = (y_i)_{i \in I}$, pertencente a $\mathcal{D}$ e indexado por elementos de um conjunto de índices I , como uma realização de um vetor aleatório $Y = (Y_i)_{i \in I}$, de média nula e operador de covariância V . Consistente com a arbitrariedade da rotulação, supõe-se que a distribuição de Y satisfaz a propriedade de invariância pelo grupo G de permutações dos índices, isto é,

$$g^*Y \sim Y \quad \forall g^* \in G^*$$

onde G^* é uma família de operadores lineares induzida em $\mathcal{D}$ por G .

Para simplificar trabalha-se com o equivalente nesse contexto à estacionaridade de segunda ordem em processos estocásticos, a G -invariância do primeiro e segundo momento.

$$E(Y) = E(g^*Y) \quad e$$

$$V = g^* V g^{*-1} \quad , \quad \forall g^* \in G^* \quad ,$$

ou seja, o vetor esperança e o operador de covariância de g^*Y são os mesmos de Y .

A importância da obtenção dos subespaços G^* -invariantes minimais de $\mathcal{D}$, está no fato de que eles determinam a forma do operador de covariância V das respostas. A forma mais geral de V é dada pelo teorema:

Teorema 2. Decomposição Espectral. Seja G um grupo de permutações dos índices I que indexam vetores em um espaço vetorial $\mathcal{D}$, com produto interno $\langle . , . \rangle$ e G^* a família de operadores lineares induzida por G em $\mathcal{D}$. Seja $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ um operador auto adjunto e G -invariante. Então, existem projeções ortogonais $S_1, S_2, \dots, S_n$ em $\mathcal{D}$ e escalares $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, tais que:

$$i) \quad V = \xi_1 S_1 + \xi_2 S_2 + \dots + \xi_n S_n = \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha S_\alpha$$

$$ii) S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{\alpha=1}^n S_{\alpha} = I$$

$$iii) S_{\alpha} S_{\beta} = 0 \text{ para } \alpha \neq \beta$$

onde $\xi_{\alpha} \in \mathbb{R} \forall \alpha$, $S_1, S_2, \dots, S_n$ são os operadores de projeção ortogonal em $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$, subespaços G-invariantes definindo uma partição de $\mathcal{D}$.
(demonstração omitida)

Corolário: Se $\mathcal{D}$ tem uma partição G-invariante minimal única, $\mathcal{D} = \oplus \mathcal{P}_{\alpha}$, então existe $\{\xi_{\alpha}\}$ tal que

$$V = \sum_{\alpha=1}^n (\xi_{\alpha} S_{\alpha})$$

(demonstração omitida).

Nas condições do corolário a variância de qualquer combinação linear das componentes de y com coeficientes definindo um vetor normalizado de $\mathcal{P}_{\alpha}$ é ξ_{α} , pois $\forall t \in \mathcal{P}_{\alpha}$,

$$\begin{aligned} \text{def. 4} \\ \text{var } \langle t, Y \rangle &= \langle t, Vt \rangle \\ &= \langle t, \sum_{\alpha=1}^n \xi_{\alpha} S_{\alpha} t \rangle \\ &= \langle t, \xi_{\alpha} S_{\alpha} t \rangle \\ &= \xi_{\alpha} \langle t, S_{\alpha} t \rangle, \text{ com } t \in \mathcal{P}_{\alpha} \\ &= \xi_{\alpha} \langle t, t \rangle \\ &= \xi_{\alpha} \|t\|^2 \end{aligned}$$

Assim, ξ_α é denominado *variância do estrato*
 $\mathcal{P}_\alpha$.

A representação de V é conhecida como *forma espectral*.

Nota-se que o teorema prova que mesmo quando não existe uma partição G -invariante minimal única de $\mathcal{D}$, para todo V , existe uma partição $\mathcal{D} = \bigoplus_\alpha \mathcal{P}_\alpha$ de subespaços G -invariantes e um conjunto $\{\xi_\alpha\}$ tal que

$$V = \sum_\alpha \xi_\alpha S_\alpha$$

Deste modo, conclui-se que os estratos são auto-espaços de V com autovalores ξ_α , denominados variâncias de estratos.

Esta formulação do operador de covariância decorre da hipótese de que $\forall g^* \in G^*$,

$$\text{cov}(g^*Y) = g^* V g^{*-1} = g^{*-1} \left[g^{*-1} V g^* \right] g^{*-1} = V = \text{cov}(Y)$$

ou seja, o operador V é invariante sob qualquer elemento de G^* .

Verifica-se, assim, que a estrutura de blocos define um modelo de dispersão para as respostas do experi-

mento. Tal modelo é explicitado por:

$$\text{cov}(Y) \in \mathcal{V},$$

$$\text{onde: } \mathcal{V} = \{V: V = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} S_{\alpha}, \xi_{\alpha} > 0\}$$

3.4. Análise da Variância Nula

A análise da variância nula, por sua vez, depende somente da *estrutura de blocos* e fornece uma decomposição de $\|y\|^2$, segundo os estratos determinados pelo grupo G de transformações (que também determina a estrutura de blocos). A partir desta decomposição pode-se obter estimadores das variabilidades dentro de alguns estratos (mais especificamente da esperança da norma quadrática da projeção de y em cada estrato, isto é, $E\|S_{\alpha}y\|^2$).

O esquema da análise da variância nula terá o seguinte aspecto:

Estrato	GL	SQ	QM	ECQM
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{P}_{\alpha}$	$n_{\alpha} = \dim \mathcal{P}_{\alpha}$	$\ S_{\alpha}y\ ^2$	$\frac{1}{n_{\alpha}} \ S_{\alpha}y\ ^2$	ξ_{α}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{D}$	n	$\ y\ ^2$		

onde cada coluna é encabeçada por:

- a) estrato: representa o subespaço de $\mathcal{P}_\alpha$ onde se está projetando y ,
- b) G.L. (graus de liberdade): dimensão de $\mathcal{P}_\alpha$,
- c) S.Q.: soma dos quadrados,
- d) Q.M.: quadrado médio, definido por: $\frac{\text{S.Q.}}{\text{G.L.}}$,
- e) EC(Q.M.): esperança do quadrado médio, equivale aqui, a variância do estrato $\mathcal{P}_\alpha$, representado por ξ_α .

Para calcular ECQMD, utiliza-se o seguinte resultado:

Lema 5. Seja $V = \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha S_\alpha$, o operador de covariância de Y , onde Y é o vetor aleatório de esperança nula, tomando valores de $\mathcal{D}$, e $I = \sum_{\alpha=1}^n S_\alpha$ é uma partição da identidade em operadores ortogonais simétricos e idempotentes. Então:

$$E\|S_\alpha Y\|^2 = \xi_\alpha \text{tr}(S_\alpha)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} E\|S_\alpha Y\|^2 &= E\langle S_\alpha Y, S_\alpha Y \rangle, \text{ como } S_\alpha \text{ é auto adjunto} \\ &= E\langle Y, S_\alpha S_\alpha Y \rangle, \text{ mas } S_\alpha S_\alpha = S_\alpha \\ &= E\langle Y, S_\alpha Y \rangle, \text{ pelo Lema 3} \\ &= \text{tr } S_\alpha Y + \langle E(Y), S_\alpha E(Y) \rangle, \text{ como } E(Y) = 0, \\ &= \text{tr } S_\alpha V, \quad \text{mas } V = \sum_{\gamma=1}^n \xi_\gamma S_\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{tr } S_{\alpha} \sum_{\gamma=1}^n \xi_{\gamma} S_{\gamma}, \quad \gamma = 1, 2, 3, \dots, \alpha, \dots, n \\
 &= \text{tr } \xi_{\alpha} S_{\alpha} \quad (2) \\
 &= \xi_{\alpha} \text{tr } S_{\alpha}
 \end{aligned}$$

3.4.1. Apresentação da forma do operador de covariância de Y, para o caso de experimento inteiramente casualizado

As decomposições que representam a estrutura de blocos para o experimento inteiramente casualizado são dadas por:

1. $\mathcal{D} = \mathcal{M} \oplus (\mathcal{D} - \mathcal{M})$, isto é, $\mathcal{D}$ é a soma direta de dois subespaços que representam os seguintes estratos:
 - a) $\mathcal{M}$: o da grande média.
 - b) $(\mathcal{D} - \mathcal{M})$: parcelas corrigidas para a grande média.
2. $I = M + (I - M)$, onde I e M representam os operadores ortogonais, referentes aos estratos $\mathcal{D}$ e $\mathcal{M}$, respectivamente.

$$(2) \quad \text{tr } S_{\alpha} \sum_{\gamma=1}^n \xi_{\gamma} S_{\gamma} = \text{tr } S_{\alpha} \left[\xi_1 S_1 + \xi_2 S_2 + \dots + \xi_{\alpha} S_{\alpha} + \xi_n S_n \right]$$

como $S_{\alpha} S_{\alpha'} = 0$ se $\alpha \neq \alpha'$ e $S_{\alpha} S_{\alpha} = S_{\alpha}$, obtém-se:

$$\text{tr } S_{\alpha} \xi_{\alpha} S_{\alpha} = \text{tr } \xi_{\alpha} S_{\alpha}$$

A forma do operador de covariância é dada por:

$$V = \xi_0 M + \xi_1 (I - M)$$

$$= \xi_0 \frac{1}{n} J_n + \xi_1 \left(I_n - \frac{1}{n} J_n \right)$$

A matriz associada ao operador linear V , é dada por:

$$V = \xi_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}_n + \xi_1 \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{bmatrix}_n$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \xi_0 + \xi_1 \left(1 - \frac{1}{n} \right) & \frac{1}{n} (\xi_0 - \xi_1) & \dots & \frac{1}{n} (\xi_0 - \xi_1) \\ \frac{1}{n} (\xi_0 - \xi_1) & \frac{1}{n} \xi_0 + \xi_1 \left(1 - \frac{1}{n} \right) & \dots & \frac{1}{n} (\xi_0 - \xi_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} (\xi_0 - \xi_1) & \frac{1}{n} (\xi_0 - \xi_1) & \dots & \frac{1}{n} \xi_0 + \xi_1 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \end{bmatrix}_n$$

Nota-se que V , a matriz associada ao operador V , tem elementos:

$$v_{ij} = \begin{cases} \xi_1 + \frac{1}{n} (\xi_0 - \xi_1) & \text{se } i = j \\ \frac{1}{n} (\xi_0 - \xi_1) & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

O esquema da análise da variância nula neste caso será dada por:

Estrato	GL	SQ	QM	ECQM
M	1	$\ My\ ^2$	$\ My\ ^2/1$	ξ_0
$D - M$	$n - 1$	$\ (I - M)y\ ^2$	$\ (I - M)y\ ^2/n-1$	ξ_1
D	n	$\ y\ ^2$		

onde:

$$\|My\|^2 = ny_{\cdot}^2, \quad \text{com } y_{\cdot} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$\begin{aligned} \|(I - M)y\|^2 &= \sum (y_i - y_{\cdot})^2 \\ &= \sum (y_i^2 - 2y_i y_{\cdot} + y_{\cdot}^2) \\ &= \sum y_i^2 - 2y_{\cdot} \sum y_i + \sum y_{\cdot}^2 \\ &= \sum y_i^2 - 2y_{\cdot} n y_{\cdot} + n y_{\cdot}^2 \\ &= \sum y_i^2 - n y_{\cdot}^2 \\ &= \|y\|^2 - \|My\|^2 \end{aligned}$$

A coluna ECQM foi obtida aplicando o Lema 3.

Assim,

$$E\|My\|^2 = \xi_0 \operatorname{tr}(MD) = \xi_0 \cdot 1 = \xi_0$$

$$\begin{aligned} \frac{E\|CI - MDy\|^2}{n-1} &= \xi_1 \frac{1}{n-1} \operatorname{tr}(CI - MD) = \xi_1 \frac{1}{n-1} (\operatorname{tr}I - \operatorname{tr}MD) = \\ &= \xi_1 \frac{1}{n-1} (n-1) = \xi_1 \end{aligned}$$

3.4.2. Apresentação da forma do operador de covariância de Y , para o caso de experimento em blocos casualizados

No caso de aninhamento do tipo b/k , as decomposições que representam a estrutura de blocos são dadas por:

$$i) D = M \oplus (B \oplus MD \oplus (D \oplus B))$$

$$ii) I = M + (B - MD) + (I - B)$$

A forma do operador de covariância é dada por:

$$V = \xi_0 M + \xi_1 (B - MD) + \xi_2 (I - B)$$

$$= \xi_0 \frac{1}{n} J_n + \xi_1 \left[\frac{1}{k} I_b \otimes J_k - \frac{1}{n} J_n \right] + \xi_2 \left[I_n - \frac{1}{k} I_b \otimes J_k \right]$$

onde $n = b \cdot k$

Nota-se que existem três tipos diferentes de covariância entre os elementos de y :

- a) para componentes em blocos distintos,
- b) para componentes distintos do mesmo bloco,
- c) para variância de cada uma das componentes.

Para caracterizar os elementos de V , ou seja, os elementos da matriz associada ao operador linear V , representa-se na forma matricial a expressão:

$$V = \xi_0 \frac{1}{n} J_n + \xi_1 \left(\frac{1}{k} I_b \otimes J_k - \frac{1}{n} J_n \right) + \xi_2 \left(I_n - \frac{1}{k} I_b \otimes J_k \right)$$

com $n = k.b$.

Desta maneira, tem-se:

$$V = \begin{bmatrix} A & A & \dots & A \\ A & A & \dots & A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A & A & \dots & A \end{bmatrix}_b + \xi_1 \begin{bmatrix} B & C & \dots & C \\ C & B & \dots & C \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & C & \dots & B \end{bmatrix}_b + \xi_2 \begin{bmatrix} D & & & \emptyset \\ & D & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & D \end{bmatrix}_b$$

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_k, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} & \frac{1}{k} - \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{k} - \frac{1}{n} & \frac{1}{k} - \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \end{bmatrix}_k$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}_k$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & \dots & -\frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & 1 - \frac{1}{k} & \dots & -\frac{1}{k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & \dots & 1 - \frac{1}{k} \end{bmatrix}_k$$

Assim, os elementos da matriz V , são da seguinte forma:

$$V = \begin{bmatrix} E & F & \dots & F \\ F & E & \dots & F \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F & F & \dots & E \end{bmatrix}_b$$

onde:

$$E = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}_k \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} c & c & \dots & c \\ c & c & \dots & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \dots & c \end{bmatrix}_k$$

$$\text{com,} \quad a = \xi_0 \frac{1}{n} + \xi_1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) + \xi_2 \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

$$b = \xi_0 \frac{1}{n} + \xi_1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right)$$

$$c = \xi_0 \frac{1}{n} - \xi_1 \frac{1}{n}$$

O esquema da análise da variância nula neste caso é dada por:

Estrato	GL	SQ	QM	ECQM
$\mathcal{M}$	1	$\ My\ ^2$	$\ My\ ^2/1$	ξ_0
$\mathcal{B} - \mathcal{M}$	$b - 1$	$\ CB - MDy\ ^2$	$\ CB - MDy\ ^2/b-1$	ξ_1
$\mathcal{D} - \mathcal{B}$	$b(k-1)$	$\ CI - BDy\ ^2$	$\ CI - BDy\ ^2/b(k-1)$	ξ_2
$\mathcal{D}$	bk	$\ y\ ^2$		

onde:

$$\|My\|^2 = ny_{..}^2$$

$$\|CB - MDy\|^2 = k \sum_{i=1}^b (y_{i.} - y_{..})^2$$

$$\|CI - BDy\|^2 = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (y_{ij} - y_{i.})^2$$

Aplicando o Lema 5, obtém-se ECQM, em cada estrato, assim:

$$E \left(\|My\|^2 \right) = \xi_0 \operatorname{tr}(MD) = \xi_0 \cdot 1 = \xi_0$$

$$E \left[\frac{\|CB - MDy\|^2}{b-1} \right] = \frac{1}{b-1} \text{tr}(CB - MD) \cdot \xi_1 = \frac{1}{b-1} (b-1) \cdot \xi_1 = \xi_1$$

$$E \left[\frac{\|CI - BDy\|^2}{b(k-1)} \right] = \frac{1}{b(k-1)} \dim(CI - BD) \cdot \xi_2 = \frac{1}{b(k-1)} b(k-1) \cdot \xi_2 = \xi_2$$

3.4.3. Apresentação da forma do operador de covariância de Y, para o caso de experimento em quadrado latino

No caso de cruzamento $c \times l$, as decomposições que representam a estrutura de blocos são dadas por:

$$i) \mathcal{D} = \mathcal{M} \oplus (\mathcal{L} \oplus \mathcal{M}) \oplus (\mathcal{C} \oplus \mathcal{M}) \oplus (\mathcal{L} \cdot \mathcal{C})$$

onde, identificam-se, quatro estratos: o da grande média representada por $\mathcal{M}$; o das linhas corrigidas para a grande média, representado por $(\mathcal{L} \oplus \mathcal{M})$, o das colunas corrigidas para a grande média, representado por $(\mathcal{C} \oplus \mathcal{M})$ e o da interação entre linhas e colunas, representado por $(\mathcal{L} \cdot \mathcal{C})$ ou $(\mathcal{D} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{C} \oplus \mathcal{M})$.

$$ii) I = M + (L - M) + (C - M) + (I - L - C + M)$$

onde I , M , $(L - M)$, $(C - M)$ e $(I - L - C + M)$ representam os operadores de projeção ortogonal nos subespaços $\mathcal{D}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, $\mathcal{C} \oplus \mathcal{M}$, e $(\mathcal{L} \cdot \mathcal{C})$ respectivamente.

A forma do operador de covariância é dada por:

$$\begin{aligned}
 V &= \xi_0 M + \xi_1 (CL - MD) + \xi_2 (CC - MD) + \xi_3 (L.C) \\
 &= \xi_0 \frac{1}{n} J_n + \xi_1 \left[\left(\frac{1}{c} I_l \otimes J_c \right) - \left(\frac{1}{n} J_n \right) \right] + \xi_2 \left[\left(\frac{1}{l} J_l \otimes I_c \right) - \left(\frac{1}{n} J_n \right) \right] + \\
 &+ \xi_3 \left[I_n - \left(\frac{1}{c} I_l \otimes J_c \right) - \left(\frac{1}{l} J_l \otimes I_c \right) + \frac{1}{n} J_n \right]
 \end{aligned}$$

com $n = c.l$

Nota-se que existem 4 tipos diferentes de covariância entre os elementos de y :

- a) para componentes em linhas e colunas diferentes,
- b) para componentes na mesma linha, mas em colunas diferentes,
- c) para componentes na mesma coluna, mas em linhas diferentes,
- d) para as variâncias das componentes.

Para caracterizar os elementos de V , ou seja, os elementos da matriz associada ao operador linear V , representa-se na forma matricial a expressão:

$$V = \frac{1}{n} \xi_0 M + \xi_1 (CL - MD) + \xi_2 (CC - MD) + \xi_3 (I - L - C + MD)$$

$$\begin{aligned}
 V = \xi_o \frac{1}{n} & \begin{bmatrix} A & A & \dots & A \\ A & A & \dots & A \\ A & A & \dots & A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A & A & \dots & A \end{bmatrix}_c + \begin{bmatrix} B & C & C & \dots & C \\ C & B & C & \dots & C \\ C & C & B & \dots & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & C & C & \dots & B \end{bmatrix}_c + \\
 & + \begin{bmatrix} D & D & \dots & D \\ D & D & \dots & D \\ D & D & \dots & D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D & D & \dots & D \end{bmatrix}_c + \begin{bmatrix} E & F & F & \dots & F \\ F & E & F & \dots & F \\ F & F & E & \dots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ F & F & F & \dots & E \end{bmatrix}_c
 \end{aligned}$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_1, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} - \frac{1}{n} & \frac{1}{c} - \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{c} - \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{c} - \frac{1}{n} & \frac{1}{c} - \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{c} - \frac{1}{n} \end{bmatrix}_1$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}_1$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{n} & & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ & -\frac{1}{n} & \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & -\frac{1}{n} & & -\frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}_1$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{n} & & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{n} & \dots & & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{n} \\ & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{n} & & 1 & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{n} & \dots & & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{n} \\ & \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\ & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{n} & & & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}_1$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} + \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ & \frac{1}{n} & -\frac{1}{\ell} + \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{\ell} + \frac{1}{n} \end{bmatrix}_1$$

Logo, a matriz V , é representada por:

$$D(Y) = Y = \begin{bmatrix} O & H & H & \dots & H \\ H & O & H & \dots & H \\ H & H & O & \dots & H \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ H & H & H & \dots & O \end{bmatrix}_c$$

onde:

$$O = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}_l \quad H = \begin{bmatrix} c & d & d & \dots & d \\ d & c & d & \dots & d \\ d & d & c & \dots & d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d & d & d & \dots & c \end{bmatrix}_l$$

onde:

$$a = \xi_0 \frac{1}{n} + \xi_1 \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{n} \right] + \xi_2 \left[\frac{1}{\ell} - \frac{1}{n} \right] + \xi_3 \left[1 - \frac{1}{c} - \frac{1}{\ell} + \frac{1}{n} \right]$$

$$b = \xi_0 \frac{1}{n} + \xi_1 \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{n} \right] + \xi_2 \left[-\frac{1}{n} \right] + \xi_3 \left[-\frac{1}{c} + \frac{1}{n} \right]$$

$$c = \xi_0 \frac{1}{n} + \xi_1 \left[-\frac{1}{n} \right] + \xi_2 \left[\frac{1}{\ell} - \frac{1}{n} \right] + \xi_3 \left[-\frac{1}{\ell} + \frac{1}{n} \right]$$

$$d = \xi_0 \frac{1}{n} + \xi_1 \left[-\frac{1}{n} \right] + \xi_2 \left[-\frac{1}{n} \right] + \xi_3 \left[\frac{1}{n} \right]$$

O esquema da análise de variância nula, neste caso é dada por:

Estrato	GL	SQ	QM	ECQM
$\mathcal{M}$	1	$\ My\ ^2$	$\ My\ ^2/1$	ξ_0
$\mathcal{E} - \mathcal{M}$	$c-1$	$\ C-CMy\ ^2$	$\ C-CMy\ ^2/c-1$	ξ_1
$\mathcal{L} - \mathcal{M}$	$\ell-1$	$\ L-LMy\ ^2$	$\ L-LMy\ ^2/\ell-1$	ξ_2
$\mathcal{E} \cdot \mathcal{L}$	$(c-1)(\ell-1)$	$\ L.Cy\ ^2$	$\ L.Cy\ ^2/(c-1)(\ell-1)$	ξ_3
$\mathcal{D}$	$\ell \cdot c$	$\ y\ ^2$		

onde:

$$\|My\|^2 = ny_{..}^2$$

$$\|C-CMy\|^2 = \ell \sum_{j=1}^c (y_{.j} - y_{..})^2$$

$$\|L-LMy\|^2 = c \sum_{i=1}^{\ell} (y_{i.} - y_{..})^2$$

$$\|L.Cy\|^2 = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^{\ell} (y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y_{..})^2$$

Analogamente, aplicando-se o Lema 3, obtém-se ECQM para cada estrato.

3.5. Estrutura de Tratamentos

Os diferentes tratamentos utilizados em um experimento possuem determinadas relações entre si, que definem a chamada *estrutura de tratamentos* do delineamento, denota-se por E.T. Estas relações existem independentes da estrutura de blocos e normalmente está associada a uma intenção do pesquisador de observar nas respostas os efeitos resultantes de diferentes tratamentos por ele aplicados, e não existe uma dicotomia entre as estruturas de blocos e tratamentos. O que é tratamento para um, passa a ser bloco para outro, na dependência das questões de interesse.

Assim, como a estrutura de blocos está associada com o operador de covariância das respostas, a estrutura de tratamentos define o seu vetor de esperanças. Especificamente, assume-se a hipótese de aditividade, onde cada resposta é igual a soma de um efeito de tratamento com um efeito da unidade experimental.

Em geral, as relações entre os tratamentos empregados em um experimento definem um modelo que pode ser descrito, de modo compacto, através da utilização de operadores lineares. Os tratamentos, são considerados como componentes de um vetor (μ_j) , $j \in J$, onde J é um conjunto de índices, de cardinalidade m , igual ao n^o de tratamentos utilizados, e tomando valores em um espaço vetorial $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$.

Seja D uma matriz diagonal de ordem m , cujo j -ésimo elemento da diagonal principal é dado pelo n° de repetições do tratamento u_j no experimento.

$$D = \begin{bmatrix} n_1 & & & & & \\ & n_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & n_j & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & n_m \end{bmatrix}$$

onde $n_j = n^{\circ}$ de repetições do tratamento u_j .

Os operadores de representação do modelo devem ser escolhidos de modo que a decomposição do espaço $\mathcal{U}$, que eles definem seja composta por subespaços D -ortogonais. Visa-se, com isso, atribuir uma ponderação diferenciada aos tratamentos com diferentes números de repetições. A decomposição resultante é representada por:

$$\mathcal{U} = \oplus_{\beta} \mathcal{U}_{\beta}$$

$$I = \sum_{\beta} U_{\beta}$$

onde U_{β} representam os operadores utilizados na representação do modelo e

$$\mathcal{U}_{\beta} = U_{\beta} \mathcal{U}$$

Observa-se que, quando o n° de repetições é igual, os subespaços $\mathcal{U}_{\beta}$ são ortogonais com relação ao produ-

to interno usual. Essa decomposição denomina-se *estrutura de tratamentos*.

3.5.1. Estrutura de tratamento para experimento inteiramente casualizado

Num ensaio inteiramente casualizado o modelo matemático é dado por:

$$y_{ij} = u_i + e_{ij} \quad , \quad \text{onde}$$

$$u_i = \mu + A_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad (m = n^o \text{ de tratamentos})$$

onde:

y_{ij} : é a j -ésima observação do i -ésimo tratamento.

μ : média geral

A_i : efeito do tratamento i .

e_{ij} : erro casual, associado a j -ésima observação do i -ésimo tratamento.

Considera-se no modelo:

- i) os efeitos são aditivos.
- ii) os erros e_{ij} são independentes.
- iii) $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

com restrição $\sum_{i=1}^m A_i = 0$

Uma forma alternativa de representar o modelo, já incluindo a restrição acima é:

$$u_i = u_{\cdot} + (u_i - u_{\cdot})$$

$$\text{onde } u_{\cdot} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i$$

Considerando u_i como componente de um vetor u que toma valores em um espaço vetorial $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, cuja decomposição em subespaços ortogonais é dada por:

$$\mathcal{U} = \mathcal{M} \oplus (\mathcal{U} - \mathcal{M})$$

com respectivos operadores de projeção, M e $(U - M)$ o modelo, $u_i = \mu + A_i$ pode ser representado de uma forma compacta, dada por:

$$u = M u + (U - M) u$$

onde, os operadores de projeção são da seguinte forma:

$$M(u_1, u_2, u_3, \dots, u_m) = (u_{\cdot}, u_{\cdot}, \dots, u_{\cdot})'$$

$$(U - M)(u_1, u_2, \dots, u_m) = (u_1 - u_{\cdot}, u_2 - u_{\cdot}, \dots, u_m - u_{\cdot})'$$

Para ilustrar a situação acima, suponha que se queira comparar os efeitos nutritivos de 3 tipos de leite: A, B e C.

E.T. 3

As questões de interesse (e respectivos vetores no espaço reduzido) podem ser:

A	B	C	efeito
+	+	+	medida da média
-		+	testar C contra A
	+	-	testar B contra C
+		-	testar A contra C
2	-	-	testar A contra média de B e C
-	2	-	testar B contra média de A e C
-	-	2	testar C contra média de A e B

A base para o espaço reduzido de tratamentos poderá ser constituída pelos vetores: média e mais outros dois.

Observa-se que todos os vetores aqui definidos, a não ser a média, são ortogonais a ela, e são denominados *contrastos*. Contrastes são definidos como funcionais lineares da forma:

$\langle t, \tau \rangle$, onde $\tau = E(Y) \in \mathcal{T}$ e t é um vetor

tal que a soma de suas coordenadas é nula. Assim, as questões de interesse são expressas através de *contrastos*.

A dimensão do espaço reduzido de tratamentos é independente do n° de repetições de cada tratamento, isto é, do n° de unidades experimentais onde cada um foi aplicado.

Neste exemplo, pode-se considerar como base ortogonal para o espaço reduzido de tratamentos, os seguintes vetores:

A	B	C	
+	+	+	M
+	-		$U-M$
-	-	2	$U-M$

Neste caso o espaço de tratamentos $\mathcal{U}$, pode ser particionado em $\mathcal{M}$ e $(\mathcal{U} - \mathcal{M})$.

Se esses tratamentos fossem aplicados a duas unidades cada ($\dim \mathcal{D} = 6$), a base correspondente para o subespaço de tratamento no espaço de observações é dado novamente por 3 vetores, constituído pela média e mais dois.

AA	BB	CC	
++	++	++	$\mathcal{M}$
++	--		$\mathcal{U} - \mathcal{M}$
--	--	22	$\mathcal{U} - \mathcal{M}$

3.5.2. Estrutura de tratamentos para experimento em blocos casualizados - esquema inteiramente casualizado

Quando a estrutura de tratamentos é considerada com esquema inteiramente casualizado, tanto o modelo a ser considerado como o desenvolvimento teórico são análogos ao item 3.5.1.

3.5.3. Estrutura de tratamentos para experimento em blocos casualizados - esquema fatorial

Toma-se como exemplo, um experimento fatorial do tipo 2×2 , cujo modelo matemático é dado por:

$$y_{ij} = u_{ij} + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, I; \quad j = 1, 2, \dots, J$$

$$\text{onde } u_{ij} = \mu + A_i + B_j + C_{ij}$$

e y_{ij} = valor observado

μ = média geral

A_i = efeito principal de A no nível i

B_j = efeito principal de B no nível j

C_{ij} = a interação entre A e B nos níveis i e j

e_{ij} = erro experimental

Considera-se no modelo:

i) os efeitos são aditivos

ii) os erros e_{ij} são independentes

iii) $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

e as seguintes restrições:

$$\sum_i A_i = \sum_j B_j = \sum_i C_{ij} = \sum_j C_{ij} = 0$$

Uma forma alternativa de representar o modelo, já incluindo as restrições acima é:

$$u_{ij} = u_{..} + (u_{i.} - u_{..}) + (u_{.j} - u_{..}) + (u_{ij} - u_{i.} - u_{.j} + u_{..})$$

onde:

$$u_{i.} = \frac{1}{J} \sum_j u_{ij}; \quad u_{.j} = \frac{1}{I} \sum_i u_{ij} \quad \text{e} \quad u_{..} = \frac{1}{IJ} \sum_i \sum_j u_{ij}$$

Considerando u_{ij} como componentes de um vetor u que toma valores em um espaço vetorial $\mathcal{U} = \mathbb{R}^d$, cuja decomposição em subespaços ortogonais é dada por:

$$\mathcal{U} = \mathcal{M} \oplus (\mathcal{U}_A - \mathcal{M}) \oplus (\mathcal{U}_B - \mathcal{M}) \oplus (\mathcal{U} - \mathcal{U}_A - \mathcal{U}_B + \mathcal{M})$$

com respectivos operadores de projeção: M , $(\mathcal{U}_A - \mathcal{M})$, $(\mathcal{U}_B - \mathcal{M})$ e $(\mathcal{U} - \mathcal{U}_A - \mathcal{U}_B + \mathcal{M})$.

Assim, $u_{ij} = \mu + A_i + B_j + C_{ij}$, pode ser representado de uma forma compacta, incluindo as restrições, dada por:

$$u = M u + (\mathcal{U}_A - \mathcal{M}) u + (\mathcal{U}_B - \mathcal{M}) u + (\mathcal{U} - \mathcal{U}_A - \mathcal{U}_B + \mathcal{M}) u$$

onde, os operadores de projeção são da seguinte forma:

$$M(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = (u_{..}, u_{..}, u_{..}, u_{..})'$$

$$(\mathcal{U}_A - \mathcal{M})(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = (u_{1.} - u_{..}, u_{1.} - u_{..}, u_{2.} - u_{..}, u_{2.} - u_{..})'$$

$$(\mathcal{U}_B - \mathcal{M})(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = (u_{.1} - u_{..}, u_{.2} - u_{..}, u_{.1} - u_{..}, u_{.2} - u_{..})'$$

$$(\mathcal{U} - \mathcal{U}_A - \mathcal{U}_B + \mathcal{M})u = u - Mu - (\mathcal{U}_A - \mathcal{M})u - (\mathcal{U}_B - \mathcal{M})u$$

3.5.4. Estrutura de tratamentos para experimento em quadrado latino - esquema inteiramente casualizado

Como a E.T. considerada é um esquema inteiramente casualizado, assim tanto o modelo matemático, como o desenvolvimento teórico são análogos ao item 3.5.1.

3.6. Delineamento

O delineamento de um experimento, segundo BELTRÃO & PINHEIRO (1989), é constituído de 3 partes:

a) *Estrutura de Blocos*: caracterizada pela partição do espaço $\mathcal{D}$ de observações em subespaços ortogonais

$$\mathcal{P}_\alpha (\mathcal{D} = \oplus_\alpha \mathcal{P}_\alpha).$$

b) *Estrutura de Tratamentos*: caracterizada pela decomposição do espaço $\mathcal{U}$ de tratamentos em subespaços ortogonais

$$\mathcal{U}_\beta (\mathcal{U} = \oplus_\beta \mathcal{U}_\beta).$$

c) *Alocação de tratamentos às unidades experimentais* caracterizada pela *matriz de incidência* N .

3.6.1. Matriz de incidência N

A matriz de incidência N , é uma matriz $n \times t$, $n \geq t$, constituída de "zeros" e "uns", onde $n = \dim \mathcal{D}$ e $t = \dim \mathcal{U}$ e

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o } j\text{-ésimo tratamento for aplicado a } i\text{-ésima unidade} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\mathcal{T} = N \mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, a imagem de $\mathcal{U}$ sob N , denominada o subespaço de tratamento do experimento. Existe uma decomposição de $\mathcal{T}$ análoga àquela obtida na especificação da estrutura de tratamentos [como decorrência da D-ortogonalidade tanto os subespaços $\mathcal{U}_\beta$, como os subespaços $\mathcal{T}_\beta$ são ortogonais com relação ao produto interno usual], isto é:

$$i) \mathcal{T} = \oplus_{\beta} \mathcal{T}_{\beta}, \text{ onde } \mathcal{T}_{\beta} = N \mathcal{U}_{\beta}$$

ii) $T = \sum_{\beta} T_{\beta}$, onde T e T_{β} representam os operadores de projeção ortogonal em $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}_{\beta}$, respectivamente.

As colunas da matriz N , determinam uma base do subespaço $\mathcal{T}$, que será utilizada para representar os vetores deste subespaço.

O modelo adotado para a esperança do vetor de respostas é dado por:

$$E(Y) = \tau \in \mathcal{T}$$

A maneira como o delineamento afeta a análise do experimento está vinculado a determinadas relações existentes entre os operadores S_{α} e T_{β} .

Um esquema que ilustra as relações entre as estruturas de blocos e tratamentos na formulação de um delineamento e na análise subsequente é dado por:

Tais relações giram todas, em torno de um tema que vem ocupando os teóricos de planejamento de experimento há décadas, o balanceamento.

NAIR & RAO (1948) definem um delineamento balanceado como sendo aquele em que todos os contrastes entre tratamentos são estimados com a mesma precisão. Por esta definição, quadrados latinos, blocos casualizados completos e blocos incompletos balanceados são balanceados. Para relacionar a estrutura de blocos e a estrutura de tratamentos (via matriz de incidência) NELDER (1965) introduziu a noção de *geralmente balanceado* (G.B.).

3.6.2. Conceito de geralmente balanceado

Para relacionar a *estrutura de blocos* e a *estrutura de tratamentos* (via matriz de incidência) NELDER introduziu a noção de *geralmente balanceado* (G.B.).

A seguir formalizam-se alguns conceitos envolvendo os subespaços $\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_\beta$ e correspondentes operadores de projeção ortogonal nos mesmos, para o caso

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{P}_{\alpha}$$

$$\mathcal{T} = \bigoplus_{\beta} \mathcal{T}_{\beta}$$

dizemos que:

- a) $\mathcal{T}_{\beta}$ é ortogonal a $\mathcal{P}_{\alpha}$ (não existe informação sobre $\mathcal{T}_{\beta}$ em $\mathcal{P}_{\alpha}$) se $S_{\alpha} T_{\beta} = T_{\beta} S_{\alpha} = 0$,
- b) $\mathcal{T}_{\beta}$ é estimável em $\mathcal{P}_{\alpha}$ se $\mathcal{T}_{\beta} \subset T(\mathcal{P}_{\alpha})$, isto é, se está contido na imagem do subespaço $\mathcal{P}_{\alpha}$ segundo o operador T ,
- c) toda a informação sobre $\mathcal{T}_{\beta}$ está contida em $\mathcal{P}_{\alpha}$ se $\mathcal{T}_{\beta} \subset \mathcal{P}_{\alpha}$,
- d) S_{α} e T_{β} são ortogonalmente relacionados se $S_{\alpha} T_{\beta} = T_{\beta} S_{\alpha}$, isto é, se são comutáveis,
- e) o delineamento é ortogonal se todos os pares de operadores S_{α} e T_{β} são ortogonalmente relacionados,
- f) T_{β} é balanceado com respeito a S_{α} se existir $\lambda_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ tal que

$$T_{\beta} S_{\alpha} T_{\beta} = \lambda_{\alpha\beta} T_{\beta}$$

- g) T_β é *geralmente balanceado* no delineamento se T_β é balanceado com respeito a todos estratos $\mathcal{P}_\alpha$,
 h) o delineamento é *geralmente balanceado* se todos os subespaços de tratamentos são balanceados, isto é,

$\forall \alpha, \beta \quad \exists \lambda_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$T_\beta S_\alpha T_\beta = \lambda_{\alpha\beta} T_\beta$$

ou

$$\sum_{\alpha\beta} T_\beta S_\alpha T_\beta = \sum_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} T_\beta$$

Cumpra notar que os conceitos de ortogonalidade e balanceamento variam de autor para autor. Para alguns a não existência da ortogonalidade é sinônimo de não balanceamento. O balanceamento porém está sempre relacionado ao grau de "simetria" da alocação dos tratamentos as unidades experimentais. Nesse enfoque um delineamento ortogonal é um caso particular de *geralmente balanceado* ($\lambda_{\alpha\beta} = 0$ ou 1, $\forall \alpha, \beta$) e a maior parte das definições de delineamentos balanceados encontrados na literatura satisfazem a propriedade de *geralmente balanceados*.

Na definição de *geralmente balanceado*, os números $\lambda_{\alpha\beta}$ são auto-valores, denominados de fatores de eficiência do subespaço $\mathcal{T}_\beta$ no estrato $\mathcal{P}_\alpha$ e medem, de certo modo, o quanto de informação é obtida quando se faz a estimação de um contraste de $\mathcal{T}_\beta$, baseando-se apenas na informação contida no estrato $\mathcal{P}_\alpha$.

Dois resultados sobre os fatores de eficiência são obtidos, a partir da definição de *geralmente balanceado*:

a) Para todo α e todo β , $0 \leq \lambda_{\alpha\beta} \leq 1$

b) $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha\beta} = 1 \quad \forall \beta$

Costuma-se representar os fatores de eficiência de um delineamento através de uma tabela, denominada tabela de Fisher.

3.8.3. Tabelas de Fisher

O $\lambda_{\alpha\beta}$ da definição de *Balanceamento Geral* é exatamente a eficiência do estimador de contrastes pertencentes ao subespaço $\mathcal{T}_{\beta}$ no estrato $\mathcal{P}_{\alpha}$. Desta forma $\lambda_{\alpha\beta}$ pode ser interpretado como a quantidade de informações no estrato $\mathcal{P}_{\alpha}$ sobre os contrastes contidos no subespaço $\mathcal{T}_{\beta}$, representados numa tabela denominada *Tabela de Fisher* dada a seguir:

Subespaços de Tratamentos	Estratos						Soma
	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	...	$\mathcal{P}_\alpha$	...	$\mathcal{P}_n$	$\mathcal{D}$
$\mathcal{T}_1$	λ_{11}	λ_{21}	...	$\lambda_{\alpha 1}$	...	λ_{n1}	1
$\mathcal{T}_2$	λ_{12}	λ_{22}	...	$\lambda_{\alpha 2}$	...	λ_{n2}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{T}_\beta$	$\lambda_{1\beta}$	$\lambda_{2\beta}$	...	$\lambda_{\alpha\beta}$	...	$\lambda_{n\beta}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{T}_k$	λ_{1k}	λ_{2k}	...	$\lambda_{\alpha k}$	...	λ_{nk}	1
Soma $\mathcal{T}$							

Obs₁: Para cada $\lambda_{\alpha\beta}$, temos que β varia sobre questões de interesse e α varia sobre os estratos.

Obs₂: Um delineamento ortogonal é um caso particular de *geralmente balanceado* ($\lambda_{\alpha\beta} = 0$ ou 1 , $\forall \alpha, \beta$)

3.7. Análise dos Resultados

Considera-se y , o vetor de medidas, como sendo uma realização de um vetor aleatório Y , que sob a hipótese nula (nenhum efeito de tratamento) é G -invariante, isto é, $g^*Y \sim Y \forall g^* \in G^*$.

Assumindo-se a aditividade da unidade e tratamento, o modelo adotado é:

$$Y = \tau + e$$

onde:

$\tau \in \mathcal{T}$, subespaço (modelo linear) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{D}$

$$E(e) = 0, \quad \text{Var}(e) = \sigma_e^2 V$$

$$\text{Cov}(e) = V \in \mathcal{V} \quad \text{e} \quad \mathcal{V} = \{V: V = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} S_{\alpha}, \xi_{\alpha} > 0\}$$

V : operador linear positivo definido, não singular⁽³⁾ sobre $\mathcal{D}$.

Observa-se:

$$\text{Cov}(Y) = \text{Cov}(\tau + e) = \text{Cov}(e) = V$$

$$E(Y) = E(\tau + e) = \tau$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\tau) + \text{Var}(e) = 0 + \sigma_e^2 V = \sigma_e^2 V$$

O modelo $Y = \tau + e$, não representa apenas uma amostra e sim todos os indivíduos da população. O problema agora é estimar os parâmetros τ e σ_e^2 , em função da amostra obtida. Uma das maneiras de estimar é usando o *método de mínimos quadrados*.

3.7.1. Método dos Mínimos Quadrados

Seja y uma realização do vetor aleatório Y , tomando valores num espaço euclidiano $\mathcal{D}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Deseja-se estimar $\tau = E(Y)$, onde $\tau \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{D}$ e para

⁽³⁾ V operador linear positivo definido, não singular sobre $\mathcal{D}$, então $V = V^{1/2} V^{1/2}$.

isso, basta resolver o seguinte problema:

Problema: Determinar $Z \in \mathcal{T}$ que minimize a distância a y , segundo a direção V .

Para determinar Z que satisfaça a condição do citado problema, considera-se inicialmente $V = I$, onde V é a matriz de covariância de Y .

Neste caso, tem-se o modelo:

$$y = \tau + e \quad (\text{Gauss Markov Normal Ordinário})$$

onde: $e \sim N(\phi, I\sigma^2)$

Para determinar $\hat{\tau}$, tal que,

$$\|y - \hat{\tau}\|^2 = \min_{z \in \mathcal{T}} \|y - z\|^2, \text{ toma-se } \tau = X\theta \text{ e o modelo de GMN,}$$

ficará: $y = X\theta + e$ onde:

$y_{n \times 1}$: vetor de observações.

$X_{n \times m}$: matriz de planejamento de posto $m = n^\circ$ de trat., ($m < n$).

$\theta_{m \times 1}$: vetor de elementos desconhecidos chama-se vetor de parâmetros.

$e_{n \times 1}$: vetor de erros.

Qualquer $\hat{\theta}$, tal que $\|y - X\hat{\theta}\|^2 = \min_{\theta \in \mathcal{T}} \|y - X\theta\|^2$ implica em que $\hat{\tau} = X\hat{\theta}$ seja o estimador de mínimos quadrados para τ .

Para se obter uma solução, ou aproximação de mínimos quadrados no modelo linear, toma-se a função:

$$Q(\theta) = \|y - X\theta\|^2, \text{ a qual será minimizada.}$$

Tem-se:

$$Q(\theta) = y'y - 2\theta'X'y + \theta'X'X\theta$$

Derivando em relação a θ , resulta:

$$\frac{d Q(\theta)}{d \theta} = -2 X'y + 2X'X\theta$$

Igualando a zero, obtém-se:

$$X'X\hat{\theta} = X'y$$

Essa relação é conhecida como *Equações Normais*.

Nota-se que $Q(\theta) \geq 0$, por ser soma de quadrados, sendo limitada inferiormente, e varia sobre $\mathcal{J}$ e $Q(\theta)$ é função conhecida de θ . Assim $Q(\theta)$ admite um mínimo. Este mínimo deverá ser uma solução das equações normais, se elas admitem solução. Observa-se que $\hat{r} = X\hat{\theta}$ é combinação linear das colunas de X .

Seja $C(X) = \mathcal{J}$ o espaço vetorial gerado pelas colunas de X , denominado por espaço coluna de X .

O problema de aproximação que está sendo tratado pode ser encarado desta forma: dado um vetor y , encontrar $\hat{r} \in C(X)$ tal que

$$\|y - \hat{r}\| = \min_{Z \in C(X)} \|y - Z\|, \text{ sendo } \|\cdot\| \text{ a norma euclídiana.}$$

Das equações normais, resulta:

$$X'(y - \hat{\tau}) = \phi$$

Assim, o vetor de residuo é ortogonal a $C(X)$.

Simbolicamente temos:

$P_{\mathcal{T}}^V y$ - representa o operador de projeção em $\mathcal{T}$, ortogonal, com respeito ao produto interno $\langle \dots \rangle_V = \langle \dots, V^{-1} \dots \rangle$ onde $V = I$ e $P_{\mathcal{T}}^V = X(X'X)^{-1}X'$. Logo $\hat{\tau} = P_{\mathcal{T}}^V y$.

Considera-se agora o caso geral, onde a matriz de covariância de Y é V , não obrigatoriamente a identidade. O critério a minimizar é então a distância segundo a direção V , induzida pelo produto interno $\langle x, y \rangle_V = \langle x, V^{-1}y \rangle$ onde $\langle \dots \rangle$ é o produto interno euclidiano.

Se V é conhecida e não singular, o problema pode ser reduzido ao anterior, definindo-se um outro vetor $y^* = V^{-1/2}y$.

Então, o modelo $y = \tau + e$, via transformação, passa a ter a forma:

$$y^* = V^{-1/2} y = V^{-1/2} (\tau + e) = V^{-1/2} \tau + V^{-1/2} e$$

$$y^* = \tau^* + \xi$$

$$\text{onde } E(\xi) = E(V^{-1/2} e) = V^{-1/2} E(e) = \phi$$

$$\text{Var}(\xi) = \text{Var}(V^{-1/2} e) = V^{-1/2} \text{Var}(e) V^{-1/2'} \quad (4) = V^{-1/2} V V^{-1/2'} \sigma^2$$

mas $V = V^{1/2} V^{1/2'}$ então:

$$\text{Var}(\xi) = V^{-1/2} V^{1/2} V^{1/2'} V^{1/2'} \sigma^2 = I \sigma^2$$

$$\therefore \xi \cap N(\phi, I\sigma^2) \longrightarrow \text{Gauss Markov Normal}$$

Além disso,

$$E(y^*) = E(\tau^* + \xi) = \tau^* = V^{-1/2} \tau$$

$$\text{Var}(y^*) = \text{Var}(\tau^* + \xi) = \text{Var}(\xi) = I\sigma^2$$

$$\therefore y^* \cap N(V^{-1/2} \tau, I\sigma^2)$$

Então, através de $y^* = \tau^* + \xi$, tem-se novamente a estrutura de G.M.

Em termos do vetor original y , isto é equivalente a determinar um vetor $\hat{\tau} \in \mathcal{T}$ que minimize a distância a y segundo a direção V .

(4) Seja y v.a. com distribuição normal n -dimensional. Se $y \cap N(\mu, V) \Rightarrow By \cap N(B\mu, BV B')$

A solução da equação:

$$\|y - \hat{\tau}\|_V^2 = \min_{z \in \mathcal{T}} \|y - z\|^2$$

é o estimador de mínimos quadrados generalizado, que é exatamente o vetor $\hat{\tau} = Qy$, onde Q é o operador de projeção segundo V em $\mathcal{T}$, isto é, $Q = P_{\mathcal{T}}^V$ que satisfaz as condições:

- i) $\hat{\tau} \in \mathcal{T}$
- ii) $y - \hat{\tau} \perp_V \hat{\tau}$

onde $\perp_V$ denota ortogonalidade segundo

$$\langle ., . \rangle_V = \langle ., V^{-1}. \rangle$$

Simbolicamente:

As duas condições i e ii são equivalentes a:

- i) $\hat{\tau} \in \mathcal{T}$
 - ii) $V^{-1}(y - \hat{\tau}) \perp \mathcal{T}$, ou
- $$\langle V^{-1}(y - Qy), t \rangle = 0, \forall t \in \mathcal{T}$$

e finalmente, se T é o operador de projeção de $\mathcal{T}$, ortogonal segundo $\langle ., . \rangle_V$, tem-se:

$$\langle TV^{-1}(y - Qy), t \rangle = 0 \quad , t \in \mathcal{T} \Rightarrow$$

$$\langle TV^{-1}y - TV^{-1}Qy, t \rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\langle TV^{-1}y, t \rangle - \langle TV^{-1}Qy, t \rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\langle TV^{-1}y, t \rangle = \langle TV^{-1}Qy, t \rangle$$

logo, $TV^{-1}y = TV^{-1}Qy$, que é denominada equações normais.

Recordando que por hipótese, $V = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} S_{\alpha}$,

e assumindo ξ_{α} estritamente positivo, tem-se:

$$V^{-1} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^{-1} S_{\alpha} \quad , \text{ e como } I = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \quad , \text{ as}$$

equações normais, passam a ser escritas por:

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^{-1} TS_{\alpha} y = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^{-1} TS_{\alpha} \hat{\tau} \quad , \hat{\tau} \in \mathcal{T}.$$

Assim, o estimador $\hat{\tau}$ pode ser definido como solução dessas equações, ou alternativamente, quando o operador de covariância V das respostas é conhecido a menos de um fator de escala, o Estimador de Mínimos Quadrados de $E(Y)=\tau$ é dado por: $\hat{\tau} = P_{\mathcal{T}}^V y = Qy$.

Em planejamento de experimentos, o objetivo maior da análise reside não na estimação de τ , mas sim de determinados contrastes de interesse. Isso decorre do fato de que o estudo é sempre comparativo. Aqui, restringe-se a estimadores lineares nas observações e que sejam não viciados. Nesta classe de estimadores determina-se aquele de

mínima variância (BLUE). Esse estimador é caracterizado pelo Teorema de Gauss-Markov, enunciado a seguir.

Teorema 3: Teorema de Gauss Markov. Seja Y um vetor aleatório com esperança τ e $\mathcal{T}$ o operador de covariância V . O único BLUE de um contraste $\langle t, \tau \rangle$ é dado por:

$$\langle t, P_{\mathcal{T}}^V Y \rangle = \langle t, \hat{\tau} \rangle$$

onde $\hat{\tau}$ é o estimador de mínimos quadrados generalizado de τ com respeito a matriz V .
(demonstração omitida)

Assim, através do teorema de Gauss-Markov, sabe-se que o melhor estimador não viciado (BLUE) de um contraste $\langle t, \tau \rangle$ é dado por:

$$\langle t, \hat{\tau} \rangle = \langle t, P_{\mathcal{T}}^V y \rangle$$

onde:

$P_{\mathcal{T}}^V y$: representa o operador de projeção em $\mathcal{T}$, ortogonal com respeito ao produto interno $\langle ., . \rangle_V = \langle ., V^{-1}. \rangle$

O problema da análise está solucionado se o operador $Q = P_{\mathcal{T}}^V$ for conhecido, ou seja, se V é conhecido a menos de uma constante. Porém, na maioria das situações práticas, os ξ_{α} são desconhecidos e conseqüentemente V também o é, impossibilitando com isso determinar Q .

O procedimento padrão nestes casos tem sido analisar a informação só no último estrato, ou só no estrato onde há informação (no caso de delineamentos ortogonais). A resposta de Nelder é analisar cada estrato separadamente, trabalhando-se com $S_{\alpha}Y$, o vetor de respostas projetado no estrato e combinar as informações obtidas. No estrato $\mathcal{P}_{\alpha}$, o modelo passa a ser dado por:

$$S_{\alpha}Y = S_{\alpha}\tau + e'$$

onde:

$$E(e') = 0$$

$$\text{Cov}(e') = \xi_{\alpha} S_{\alpha}$$

ou seja:

$$E(S_{\alpha}Y) = S_{\alpha}\tau$$

$$\text{Cov}(S_{\alpha}Y) = \xi_{\alpha} S_{\alpha}, \quad \xi_{\alpha} > 0$$

O operador de covariância de $S_{\alpha}Y$ é conhecido a menos de uma constante ξ_{α} , e quando restrito a $\mathcal{P}_{\alpha}$, o operador S_{α} é a identidade e a análise pode ser realizada mesmo sem o conhecimento do ξ_{α} . Tem-se ainda que $V = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} S_{\alpha}$ com S_{α} conhecidos. A determinação do Estimador de Mínimos Quadrados de τ então não depende de parâmetros a estimar. É possível resolver o problema em cada estrato $\mathcal{P}_{\alpha}$ e eventualmente combinar as informações encontradas.

3.7.2. Estimacão num dado estrato $\mathcal{P}_\alpha$

Observa-se que na análise dentro dos estratos, o interesse principal está na estimacão de contrastes.  necessário, no entanto, tomar cuidado, pois nem todos os contrastes são estimáveis em um dado estrato. Os resultados apresentados a seguir, indicam as condioes para que um contraste $\langle t, \tau \rangle$, $t \in \mathcal{T}$ seja estimável em um estrato $\mathcal{P}_\alpha$.

Resultado 1. Um contraste $\langle t, \tau \rangle$, $t \in \mathcal{T}$  estimável em um estrato $\mathcal{P}_\alpha$, se e somente se, t pertencer a imagem de TS_α .

Demonstrao:

Assumindo que $\exists \mu \in \mathcal{D}$ tal que para todo $\tau \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} E \langle \mu, S_\alpha Y \rangle &= \langle t, \tau \rangle && \Leftrightarrow \\ \langle \mu, S_\alpha E(Y) \rangle &= \langle t, \tau \rangle && \Leftrightarrow \\ \langle \mu, S_\alpha \tau \rangle &= \langle t, \tau \rangle && \Leftrightarrow \\ \langle S_\alpha \mu, \tau \rangle &= \langle t, \tau \rangle && \Leftrightarrow \\ \langle S_\alpha \mu - t, \tau \rangle &= 0 && \Leftrightarrow \\ \langle TS_\alpha \mu - t, \tau \rangle &= 0 && \Leftrightarrow \\ t &= TS_\alpha \mu \end{aligned}$$

Logo, são  possível conseguir um estimador não viciado de $\langle t, \tau \rangle$, baseado em $S_\alpha y$, se e somente se t pertencer a imagem de TS_α .

Resultado 2. Um contraste $\langle t, \tau \rangle$, $t \in \mathcal{T}$, $\tau = E(Y) \in \mathcal{T}$, é estimável em um estrato $\mathcal{P}_\alpha$, se e somente se, $\exists c \in \mathcal{P}_\alpha$ tal que $Tc = t$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} E\langle c, S_\alpha Y \rangle &= \langle c, S_\alpha E(Y) \rangle \\ &= \langle c, S_\alpha \tau \rangle \\ &= \langle S_\alpha c, \tau \rangle, \quad c \in \mathcal{P}_\alpha \\ &= \langle c, \tau \rangle \\ &= \langle c, T\tau \rangle, \quad T \text{ é auto-adjunto} \\ &= \langle Tc, \tau \rangle \end{aligned}$$

mas, $\langle t, \tau \rangle$ é estimável se $E\langle c, S_\alpha Y \rangle = \langle t, \tau \rangle$ logo $\langle Tc, \tau \rangle = \langle t, \tau \rangle$, $\forall \tau \in \mathcal{T} \Leftrightarrow Tc = t$

Obs: Qualquer combinação linear de contrastes que possuem estimadores não viciados também tem estimador não viciado.

Resultado 3. Se $\langle t, \tau \rangle$, $t \in \mathcal{T}$ é um contraste estimável em $\mathcal{P}_\alpha$ e $c \in \mathcal{P}_\alpha$ é tal que $Tc = t$, então o BLUE de $\langle t, \tau \rangle$ baseado em $S_\alpha Y$ é dado por:

$$\langle c, P_{S_\alpha(\mathcal{T})} Y \rangle = \langle P_{S_\alpha(\mathcal{T})} c, Y \rangle = \langle P_{S_\alpha(\mathcal{T})} c, SY \rangle$$

(omite-se a demonstração)

Resultado 4. Se t é um autovetor de $TS_\alpha T$ com autovalor não nulo λ_α , então $\langle t, \tau \rangle$ é estimável em $\mathcal{P}_\alpha$ e o seu BLUE, baseado em $S_\alpha Y$, é dado por $\lambda_\alpha^{-1} \langle t, S_\alpha Y \rangle$, com variância $\lambda_\alpha^{-1} \|t\|^2 \xi_\alpha$.

Demonstração:

O resultado 3, afirma que o BLUE de $\langle t, \tau \rangle$ baseado em $S_\alpha Y$ é dado por:

$$\langle P_{S_\alpha(\mathcal{T})} c, S_\alpha Y \rangle, \text{ com } c \in \mathcal{P}_\alpha \text{ e } Tc = t.$$

Mas, por hipótese, $c \in \mathcal{P}_\alpha$, isto implica em $P_{S_\alpha(\mathcal{T})} c = c$, e ainda t é autovetor de $TS_\alpha T$ com autovalor $\lambda_\alpha \neq 0$, então $TS_\alpha Tt = \lambda_\alpha t$.

De $TS_\alpha Tt = \lambda_\alpha t$, e $Tc = t$, $t \in \mathcal{T}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} TS_\alpha Tt &= \lambda_\alpha Tc, \text{ mas } Tt = t, \text{ pois } t \in \mathcal{T} \Rightarrow \\ \Rightarrow TS_\alpha t &= \lambda_\alpha Tc \Rightarrow \\ S_\alpha t &= \lambda_\alpha c \Rightarrow \\ c &= \lambda_\alpha^{-1} S_\alpha t \end{aligned}$$

Assim, o BLUE de $\langle t, \tau \rangle$ será dado por:

$$\begin{aligned} \langle P_{S_\alpha(\mathcal{T})} c, S_\alpha Y \rangle &= \langle c, S_\alpha Y \rangle \\ &= \langle \lambda_\alpha^{-1} S_\alpha t, S_\alpha Y \rangle \end{aligned}$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} \langle S_{\alpha} t, S_{\alpha} Y \rangle ; \text{ como } S_{\alpha} \text{ é auto-adjunto}$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} \langle t, S_{\alpha} S_{\alpha} Y \rangle$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} \langle t, S_{\alpha} Y \rangle$$

A variância de $\langle t, \tau \rangle$ baseado em $S_{\alpha} Y$ será:

$$\text{Cov} \left[\lambda_{\alpha}^{-1} \langle t, S_{\alpha} Y \rangle, \lambda_{\alpha}^{-1} \langle t, S_{\alpha} Y \rangle \right] = \lambda_{\alpha}^{-2} \text{Cov} \left[\langle t, S_{\alpha} Y \rangle, \langle t, S_{\alpha} Y \rangle \right]$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-2} \text{Cov} \left[\langle S_{\alpha} t, Y \rangle, \langle S_{\alpha} t, Y \rangle \right]$$

$$\stackrel{\text{def. 4}}{=} \lambda_{\alpha}^{-2} \langle S_{\alpha} t, V S_{\alpha} t \rangle$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-2} \langle t, S_{\alpha} V S_{\alpha} t \rangle$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-2} \langle t, \xi_{\alpha} S_{\alpha} t \rangle ,$$

$$\text{pois } V = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} S_{\alpha}$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-2} \xi_{\alpha} \langle S_{\alpha} t, t \rangle$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-2} \xi_{\alpha} \langle T S_{\alpha} t, T t \rangle$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-2} \xi_{\alpha} \langle T S_{\alpha} T t, t \rangle ,$$

$$\text{mas } T S_{\alpha} T = \lambda_{\alpha} T$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-2} \xi_{\alpha} \langle \lambda_{\alpha} T t, t \rangle$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} \xi_{\alpha} \langle t, t \rangle$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} \xi_{\alpha} \|t\|^2$$

Resultado 5. Se $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$ é um subespaço de $\mathcal{T}$ gerado por auto-vetores de $TS_\alpha T$ tendo o mesmo autovetor $\lambda_1 \neq 0$, então $P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)} = \lambda^{-1}_\alpha S_\alpha T_1 S_\alpha$, onde T_1 é um projetor ortogonal sobre $\mathcal{T}_1$.

Demonstração:

Desde que $TS_\alpha T u = \lambda_1 u$ para todo $u \in \mathcal{T}_1$,

deduz-se que $T_1 S_\alpha T_1 u = \lambda_1 u$.

É preciso mostrar que $P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)}$ é auto-adjunto,

idempotente e que a sua imagem está contida em $S_\alpha(\mathcal{T}_1)$.

a) Mostrar que $P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)}$ é auto-adjunto (lembrar que $(TU)^* = U^* T^*$).

$$P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)}^* = (\lambda^{-1}_\alpha S_\alpha T_1 S_\alpha)^* = \lambda^{-1}_\alpha S_\alpha^* T_1^* S_\alpha^* = \lambda^{-1}_\alpha S_\alpha T_1 S_\alpha = P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)}$$

Logo, $P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)}$ é auto-adjunto

b) $P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)}$ é idempotente

$$\begin{aligned} P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)} \cdot P_{S_\alpha(\mathcal{T}_1)} &= (\lambda^{-1}_\alpha S_\alpha T_1 S_\alpha)(\lambda^{-1}_\alpha S_\alpha T_1 S_\alpha) \\ &= \lambda^{-2}_\alpha S_\alpha T_1 S_\alpha S_\alpha T_1 S_\alpha \\ &= \lambda^{-2}_\alpha S_\alpha T_1 S_\alpha T_1 S_\alpha, \text{ mas } T_1 S_\alpha T_1 = \lambda_1 T_1 \\ &= \lambda^{-2}_\alpha S_\alpha \lambda_1 T_1 S_\alpha \end{aligned}$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} S_{\alpha} T S_{\alpha}$$

$$= P_{S_{\alpha}(\mathcal{T})}$$

Logo, $P_{S_{\alpha}(\mathcal{T})}$ é idempotente.

$$c) \operatorname{Im}(\lambda_{\alpha}^{-1} S_{\alpha} T S_{\alpha}) \subseteq S_{\alpha}(\mathcal{T})$$

Se $w \in S_{\alpha}(\mathcal{T})$, ou seja, $w = S_{\alpha} t_1$ para $t_1 \in$

$\mathcal{T}$, então:

$$\lambda_{\alpha}^{-1} S_{\alpha} T S_{\alpha} w = \lambda_{\alpha}^{-1} S_{\alpha} T S_{\alpha} S_{\alpha} t_1$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} S_{\alpha} T S_{\alpha} t_1$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} S_{\alpha} T S_{\alpha} T t_1$$

$$= \lambda_{\alpha}^{-1} S_{\alpha} \lambda_{\alpha} t_1$$

$$= S_{\alpha} t_1$$

$$= w$$

Resultado B. Se $(\mathcal{T} - M)$ é um auto-espaço de $TS_{\alpha}T$ com autovalor $\lambda_{\alpha} \neq 0$, isto é, $TS_{\alpha}T = \lambda_{\alpha}(\mathcal{T} - M)$, então o operador de projeção ortogonal na imagem de $\mathcal{T}$, segundo a direção S_{α} é $\frac{1}{\lambda_{\alpha}} S_{\alpha} T S_{\alpha}$.

Demonstração:

Usar o resultado B.

Para determinar o BLUE de $\langle t, \tau \rangle$, onde $(\mathcal{T} - \mathcal{M})$ é um auto espaço de $TS_\alpha T$, com correspondente autovalor $\lambda_\alpha \neq 0$, isto é, $TS_\alpha T = \lambda_\alpha (T - \mathcal{M})$, é necessário determinar a expressão de $\langle t, \tau \rangle$, para $\forall t \in (\mathcal{T} - \mathcal{M})$, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle t, \tau \rangle &= \langle t, \frac{1}{\lambda_\alpha} TS_\alpha T \tau \rangle \\ &= \langle \frac{1}{\lambda_\alpha} T t, TS_\alpha T \tau \rangle, \text{ mas } T \text{ é auto-adjunto} \\ &= \langle \frac{1}{\lambda_\alpha} T t, S_\alpha T \tau \rangle, \text{ mas } T t = t \text{ e } T \tau = \tau, \text{ pois } \tau \in \mathcal{T} \\ &= \langle \frac{1}{\lambda_\alpha} t, S_\alpha \tau \rangle \end{aligned}$$

e, assim o BLUE de $\langle t, \tau \rangle$ baseado em $S_\alpha y$ é mesmo que o BLUE de $\langle \frac{1}{\lambda_\alpha} t, S_\alpha \tau \rangle$. O BLUE de $\langle \frac{1}{\lambda_\alpha} t, S_\alpha \tau \rangle$ pode ser obtido aplicando-se o Teorema de Gauss Markov e é $\langle \frac{1}{\lambda_\alpha} t, \hat{\tau}^* \rangle$, onde $\hat{\tau}^*$ é a projeção ortogonal de $S_\alpha y$ sobre a imagem de $S_\alpha(\mathcal{T})$. Através do resultado B, foi visto que, o operador de projeção ortogonal na imagem de $\mathcal{T}$ segundo a direção S_α é dado por $\frac{1}{\lambda_\alpha} S_\alpha TS_\alpha$. Assim, a partir desse resultado pode-se obter o BLUE de $\langle t, \tau \rangle$ dado $S_\alpha y$, $\alpha \neq 0$, $t \in (\mathcal{T} - \mathcal{M}) \equiv T(S_\alpha)$:

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{\lambda_\alpha} t, \hat{\tau}^* \rangle &= \frac{1}{\lambda_\alpha} \langle T t, \frac{1}{\lambda_\alpha} S_\alpha TS_\alpha y \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_\alpha} \langle t, \frac{1}{\lambda_\alpha} TS_\alpha TS_\alpha y \rangle, \text{ mas } TS_\alpha T = \lambda_\alpha T \\ &= \frac{1}{\lambda_\alpha} \langle t, TS_\alpha y \rangle \end{aligned}$$

O Teorema de Gauss-Markov, não pode ser aplicado, para minimizar $\|S_{\alpha}y - \tau\|_v^2$, já que $E(S_{\alpha}Y) \neq \tau$, mas formalmente tudo se passa como se o teorema, pudesse ser aplicado, isto é, o BLUE de $\langle t, \tau \rangle$ é $\langle t, \hat{\tau} \rangle$, onde $\hat{\tau}$ é o estimador de mínimos quadrados de τ e $\mathcal{T}$, onde a função a ser minimizada é $\|S_{\alpha}y - \tau\|_v^2$.

O operador de covariância é dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov} \left(\left\langle t, \frac{1}{\lambda_{\alpha}} TS_{\alpha}Y \right\rangle, \left\langle t, \frac{1}{\lambda_{\alpha}} TS_{\alpha}Y \right\rangle \right) &= \\
 &= \text{Cov} \left(\left\langle \frac{1}{\lambda_{\alpha}} TS_{\alpha}t, Y \right\rangle, \left\langle \frac{1}{\lambda_{\alpha}} TS_{\alpha}Yt, Y \right\rangle \right) = \\
 &= \left\langle \frac{1}{\lambda_{\alpha}} TS_{\alpha}t, v \frac{1}{\lambda_{\alpha}} TS_{\alpha}t \right\rangle = \\
 &= \frac{1}{\lambda_{\alpha}^2} \langle TS_{\alpha}t, S_{\alpha}^T TS_{\alpha}t \rangle = \\
 &= \frac{1}{\lambda_{\alpha}^2} \xi_{\alpha} \langle TS_{\alpha}Tt, S_{\alpha}^T TS_{\alpha}t \rangle, \quad TS_{\alpha}T = \lambda_{\alpha}T \\
 &= \frac{1}{\lambda_{\alpha}^2} \xi_{\alpha} \langle \lambda_{\alpha}Tt, S_{\alpha}^T S_{\alpha}Tt \rangle = \\
 &= \frac{1}{\lambda_{\alpha}^2} \lambda_{\alpha} \xi_{\alpha} \langle Tt, S_{\alpha}^T Tt \rangle = \\
 &= \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \xi_{\alpha} \langle t, t \rangle = \\
 &= \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \xi_{\alpha} \|t\|^2
 \end{aligned}$$

O esquema da análise da variância é dado por:

Estrato	Fonte	GL	SQ	QM	ECQM
$\mathcal{J}_\alpha$	$S_\alpha(\mathcal{T})$	t	$\ S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$	$\frac{1}{t} \ S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$	$\xi_\alpha + \frac{\lambda_\alpha \ T_r\ ^2}{t}$
	erro	d_α	$\ S_\alpha y - S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$	$\frac{1}{d_\alpha} \ S_\alpha y - S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$	ξ_α
$\mathcal{J}_\alpha$	Total	n_α	$\ S_\alpha y\ ^2$		

onde:

$$t = \dim(S_\alpha(\mathcal{T})) = \dim \mathcal{T}$$

$$n_\alpha = \dim \mathcal{J}_\alpha$$

$$d_\alpha = n_\alpha - t$$

$$S_\alpha \hat{\tau} = P_{S_\alpha(\mathcal{T})} y$$

$$\|S_\alpha y\|^2 = \|S_\alpha y\|^2 + \|S_\alpha y - S_\alpha \hat{\tau}\|^2$$

A ECQM foi obtida utilizando os Lemas 3 e 4,

assim:

$$E \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} y\|^2 = E \langle P_{S_\alpha(\mathcal{T})} y, P_{S_\alpha(\mathcal{T})} y \rangle$$

(Lema 3)

$$= \text{tr } P_{S_\alpha(\mathcal{T})} V + \langle E(y), P_{S_\alpha(\mathcal{T})} E(y) \rangle$$

mas $V = \xi_\alpha \mathcal{J}_\alpha$, $\mathcal{J}_\alpha = (\mathcal{T} - \mathcal{M})$, $E(y) = \tau$, $\tau \in S(\mathcal{T})$

$$\begin{aligned}
E \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} Y\|^2 &= \text{tr } P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \xi_\alpha S_\alpha + \langle \tau, P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau \rangle \\
&= \xi_\alpha \text{tr } P_{S_\alpha(\mathcal{T})} S_\alpha + \langle P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau, P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau \rangle \\
&\quad (\text{Lema 4}) \\
&= \xi_\alpha \dim S_\alpha(\mathcal{T}) + \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau\|^2 \\
&= \xi_\alpha t + \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau\|^2
\end{aligned}$$

$$E \|S_\alpha Y\|^2 = E \langle S_\alpha Y, S_\alpha Y \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\quad (\text{Lema 3}) \\
&= \text{tr } S_\alpha V + \langle E(Y), S_\alpha E(Y) \rangle,
\end{aligned}$$

mas $V = \xi_\alpha S_\alpha$ e $E(Y) = \tau$, então

$$= \text{tr } S_\alpha \xi_\alpha S_\alpha + \langle \tau, S_\alpha \tau \rangle, \text{ mas } S_\alpha = P_{S_\alpha(\mathcal{T})}$$

$$= \xi_\alpha \text{tr } S_\alpha + \langle P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau, P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\quad (\text{Lema 4}) \\
&= \xi_\alpha \dim S_\alpha + \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau\|^2
\end{aligned}$$

$$= \xi_\alpha n_\alpha + \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau\|^2$$

$$E \|S_\alpha Y - P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau\|^2 = E \|S_\alpha Y\|^2 - E \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} Y\|^2$$

$$(\text{pois } \|S_\alpha Y\|^2 = \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} Y\|^2 + \|SY - P_{S_\alpha(\mathcal{T})} Y\|^2)$$

$$= \xi_\alpha n_\alpha + \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau\|^2 - \xi_\alpha t - \|P_{S_\alpha(\mathcal{T})} \tau\|_{(\mathcal{T})}^2$$

$$= \xi_\alpha (n_\alpha - t)$$

$$= \xi_\alpha d_\alpha$$

Supõe-se que Y é um vetor aleatório multivariado normal com esperança τ ($\tau = 0$ na hipótese nula) e operador de covariância $V = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathcal{P}_{\alpha}$.

Para determinar a distribuição de uma estatística de teste necessita-se de uma versão do Teorema de Cochran (Rao (1965)) dado por:

Teorema 4. Seja $Y \sim N(\mu, S_{\alpha})$ onde S_{α} é um operador de projeção ortogonal e $Y'Y = \sum_i Y'A_iY$, onde $A_i S_{\alpha} A_j = 0$ todo $i \neq j$. Então $\{Y'A_iY\}$ são variáveis aleatórias $\chi^2_{n_i, \lambda_i}$ independentes onde $n_i = \text{posto}$

$\{S_{\alpha} A_i\}$ e $\lambda_i = \mu' S_{\alpha} A_i S_{\alpha} \mu$ (omite-se a demonstração).

Aplicando-se o Teorema de Cochran, prova-se que na hipótese nula, $\|S_{\alpha} \hat{\tau}\|^2$ e $\|S_{\alpha} Y - S_{\alpha} \hat{\tau}\|^2$ são variáveis aleatórias independentes, distribuídas como χ^2 com respectivamente $t = \dim(\mathcal{T} - \mathcal{M})$ e $d_{\alpha} = \dim \mathcal{P}_{\alpha} - t$ graus de liberdade. Na hipótese alternativa $\tau \neq 0$, a primeira é uma χ^2 não central com parâmetro $\frac{1}{\xi_{\alpha}} \|S_{\alpha} \tau\|^2$.

Então para um dado $t \in (\mathcal{T} - \mathcal{M})$, a estatística

$$\frac{\frac{\lambda_{\alpha} \langle t, \hat{\tau} \rangle}{\|t\|}}{\frac{\|S_{\alpha} Y - S_{\alpha} \hat{\tau}\|}{\sqrt{d_{\alpha}}}}$$

é distribuída, na hipótese nula $H_0: \langle t, \hat{\tau} \rangle = 0$, como uma variável aleatória com distribuição de t de Student com d_{α} graus de liberdade.

A estatística

$$\frac{\frac{\|S_{\alpha} \hat{\tau}\|^2}{t}}{\frac{\|S_{\alpha} Y - S_{\alpha} \hat{\tau}\|^2}{d_{\alpha}}}$$

na mesma hipótese nula é distribuída como $F_{t, d_{\alpha}}$.

Observa-se que estas distribuições não dependem do parâmetro desconhecido ξ_{α} , e intervalos de confiança e testes podem ser definidos a partir destas estatísticas.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para comparar a análise da variância pelo método clássico e a análise da variância considerando a análise de dados estruturados, toma-se quatro exemplos, onde apresentase em cada um deles a análise feita através dos dois métodos citados.

Exemplo 1 - Este exemplo refere-se a um ensaio de alimentação de leitoas no experimento inteiramente casualizado.

Este experimento foi obtido por GOMES (1985), no qual ele considerou dois tratamentos (feno de alfafa e feno de quicuí) aplicados a 8 leitoas Duroc Jersey, bem homogêneas. A quatro leitoas, escolhidas por sorteio, foi fornecida a ração com feno de alfafa, e às quatro restantes, a ração com feno de quicuí. Os ganhos de peso no período experimental (3 meses) são dados na Tabela 1.

Tabela 1 - Ganhos de peso no período experimental (3 meses) de 8 leitões Duroc Jersey, onde foram aplicados dois tipos de tratamentos (Feno de alfafa e feno de quicuío).

Feno de ALFAFA	Feno de QUICUIO
67,5 Kg	65,0 Kg
70,5 Kg	58,5 Kg
76,0 Kg	65,0 Kg
67,5 Kg	64,0 Kg

Fonte: GOMES, F.P. (1985).

A análise da variância pelo método clássico, conduziu aos resultados apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Análise da Variância pelo método clássico.

CV	GL	SQ	QM	F
Rações	1	105,13	105,13	8,15*
Resíduo	6	77,37	12,90	
TOTAL	7	182,50		

Fonte: GOMES, F.P. (1985).

Através da análise da variância clássica, conclui-se que o feno de alfafa é realmente melhor ao nível de 5% de probabilidade.

Apresenta-se, agora, a análise da variância considerando a análise da dados estruturados, tomando-se o cuidado de esclarecer a teoria desenvolvida no presente trabalho.

Aqui, o experimentador está livre para rotular as unidades experimentais usando o conjunto de índices:

$$I = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

Supõe-se que o experimentador rotulou as unidades da seguinte maneira:

Posição:	1	2	3	4	5	6	7	8
Tratamento:	A	A	B	A	B	B	A	B
Peso:	67,5	70,5	65,0	76,0	58,5	65,0	67,5	64,0

O tratamento A refere-se a feno de alfafa e o tratamento B refere-se a feno de quicuí.

Os dados acima, referem-se a estrutura de blocos, sendo representada por $\underline{8}$. Neste caso o grupo é de ordem $8!$ e é denominado S_8 .

Os estratos relevantes na análise são:

M e $D - M$, com os operadores M e $(I - M)$ respectivamente. A decomposição do vetor de respostas, segundo a estrutura de blocos é dada por:

$$y = My + (I - M)y$$

$$\begin{bmatrix} 67,5 \\ 70,5 \\ 65,0 \\ 76,0 \\ 58,5 \\ 65,0 \\ 67,5 \\ 64,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66,75 \\ 66,75 \\ 66,75 \\ 66,75 \\ 66,75 \\ 66,75 \\ 66,75 \\ 66,75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,75 \\ 3,75 \\ -1,75 \\ 9,25 \\ -8,25 \\ -1,75 \\ 0,75 \\ -2,75 \end{bmatrix}$$

Aplicando-se a ortogonalidade dos operadores, obtém-se a partição para a norma:

$$\|Iy\|^2 = \|My\|^2 + \|(I - M)y\|^2$$

$$35827,00 = 35644,50 + 182,50$$

A tabela da análise da variância nula, depende somente da estrutura de blocos e fornece uma decomposição de $\|y\|^2$ segundo os estratos determinados pelo grupo G^* de transformações. Neste exemplo, a Tabela 3 fornece resultados da análise da variância nula.

Tabela 3 - Análise da Variância Nula.

Estrato	GL	SQ	QM	ECQM
M	1	35644,50	35644,50	ξ_0
$D - M$	7	182,50	26,07	ξ_1
D	8	35827,00		

Neste exemplo a estrutura de Tratamentos é 2.

A decomposição do espaço de tratamento, com dimensão 2, no caso é:

$$U = M \oplus (U - M)$$

com respectivos operadores de projeção M e $U - M$.

Por simplicidade, trabalha-se no espaço isomorfo reduzido com 2 componentes. A decomposição, neste espaço, é dada por:

$$\begin{aligned} Uu &= Mu + (U-M)u \\ \begin{bmatrix} 70,375 \\ 63,125 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 66,75 \\ 66,75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,625 \\ -3,625 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde:

$$y_{..} = 66,75 = u_{.} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i, \quad m = 2$$

$$y_{1.} = 70,375 = u_1$$

$$y_{2.} = 63,125 = u_2$$

O contraste de interesse compara as duas rações, sendo representado no espaço isomorfo reduzido por:

$$\begin{array}{cc} A & B \\ + & - \end{array}$$

que com a média, constitui uma base ortogonal para o espaço reduzido de tratamentos.

Voltando ao espaço isomorfo $\mathcal{D} = \mathbb{R}^8$ onde a estrutura de blocos é de 8 unidades não estruturadas e a estrutura de tratamentos é de 2 tratamentos, aplicados quatro vezes cada, ou seja:

1	2	3	4	5	6	7	8
A	A	B	A	B	B	A	B

a matriz de incidência é dada por:

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Os contrastes mais o vetor média, definindo os subespaços constam da Tabela 4, onde:

- o primeiro vetor de componentes constantes, pertence ao subespaço M da estrutura de bloco e simultaneamente ao subespaço média da estrutura de tratamentos.
- o segundo vetor pertence ao subespaço $(D - M)$ e corresponde ao contraste A.B que forma junto com o primeiro vetor uma base para T .
- os seis últimos vetores, indicados por erro na coluna t, pertencem simultaneamente ao subespaço $(D - M)$ da estrutura de bloco e ao subespaço $(D - T)$ de erros.

Tabela 4 - Decomposição do espaço de tratamentos em contrastes, e vetor média, referentes ao experimento de ganho de peso.

Unidades	1	2	3	4	5	6	7	8	Tratamento	Subespaço
Tratam.	A	A	B	A	B	B	A	B	t	$\mathcal{P}$
	+	+	+	+	+	+	+	+	média	$\mathcal{M}$ } $\mathcal{T}$
	+	+	-	+	-	-	+	-	A.B	
	+	+		-			-		erro	$\mathcal{D}-\mathcal{M}$ } $\mathcal{D}-\mathcal{T}$
	+	-		+			-		erro	
	+	-		-			+		erro	
			+		+	-		-	erro	
			+		-	+		-	erro	
			-		+	+		-	erro	
									erro	

Observa-se que o estrato $(\mathcal{D} - \mathcal{M})$ é formado por 7 vetores LI, que juntamente com o vetor do estrato $\mathcal{M}$, gera uma base para $\mathcal{D} = \mathbb{R}^8$.

Na Tabela 5, encontram-se os resultados para construir a Tabela de Fisher.

Tabela 5 - Tabela de Fisher

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{D}-\mathcal{M}$
$\mathcal{M}$	1	0
$\mathcal{T}-\mathcal{M}$	0	1

Pelo quadro de contrastes, observa-se que o subespaço $(\mathcal{I}-\mathcal{M}) \subset (\mathcal{D}-\mathcal{M})$, assim, pode-se dizer que toda informação sobre $(\mathcal{I}-\mathcal{M}) = \mathcal{I}_\beta$ está contida em $(\mathcal{D}-\mathcal{M}) = \mathcal{I}_\alpha$, isto é $\lambda_{\alpha\beta} = 1$. Como $\lambda_{\alpha\beta} = 1$, diz-se neste caso, que o delineamento satisfaz a condição de geralmente balanceado.

Análise Global - Tabela da análise de variância

Na Tabela 6, tem-se os resultados da análise da variância, onde:

$$t = \dim S_\alpha(\mathcal{I})$$

$$n_\alpha = \dim \mathcal{I}_\alpha$$

Tabela 6 - Análise da variância para dados estruturados.

Estrato	Fonte	GL	SQ	QM	F
$\mathcal{I}_\alpha$	$S_\alpha(\mathcal{I})$	t	$\ S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$	$\frac{1}{t} \ S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$	$\frac{1}{t} \ S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$
	erro	d_α	$\ S_\alpha y - S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$	$\frac{1}{d_\alpha} \ S_\alpha y - S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$	$\frac{1}{d_\alpha} \ S_\alpha y - S_\alpha \hat{\tau}\ ^2$
$\mathcal{I}_\alpha$	Total	n_α	$\ S_\alpha y\ ^2$		

Estes valores são encontrados mediante os seguintes cálculos:

$$(\mathcal{I}-\mathcal{M})y = \begin{bmatrix} A & A & B & A & B & B & A & B \\ 0,75; 3,75; -1,75; 9,25; -8,25; -1,75; 0,75; -2,75 \end{bmatrix},$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{TCI-MD}y &= T \begin{bmatrix} 0,75; 3,75; -1,75; 9,25; -8,25; -1,75; 0,75; -2,75 \end{bmatrix}' = \\ &= \begin{bmatrix} 3,625; 3,625; -3,625; 3,625; -3,625; -3,625; 3,625; -3,625 \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

onde o operador T é dado por: $T = NCN'ND^{-1}N'$.

Assim,

$$T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{S_{\alpha^T}y} = S_{\alpha^T}^{\hat{}} = \frac{1}{\lambda} \text{TCI-MD}y =$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3,625; 3,625; -3,625; 3,625; -3,625; -3,625; 3,625; -3,625 \end{bmatrix}'$$

$$\|S_{\alpha^{\hat{\sigma}}}^{\hat{}}\|^2 = \langle S_{\alpha^{\hat{\sigma}}}^{\hat{}}, S_{\alpha^{\hat{\sigma}}}^{\hat{}} \rangle = 105,125$$

$$S_{\alpha}y = (I-MD)y \longrightarrow \|S_{\alpha}y\|^2 = \|(I-MD)y\|^2$$

Logo, $\|S_{\alpha}y\|^2 = 182,50$ (dado pela Tabela 3).

$$S_{\alpha}y - S_{\alpha}\hat{\tau} = \begin{bmatrix} 0.75 - 3.625 \\ 3.75 - 3.625 \\ -1.75 + 3.625 \\ 9.25 - 3.625 \\ -8.25 + 3.625 \\ -1.75 + 3.625 \\ 0.75 - 3.625 \\ -2.75 + 3.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.875 \\ 0.125 \\ 1.875 \\ 5.625 \\ -4.625 \\ 1.875 \\ -2.875 \\ 0.875 \end{bmatrix}$$

$$\|S_{\alpha}y - S_{\alpha}\hat{\tau}\|^2 = 77,375$$

Obtido esses valores, constrõe-se a Tabela da Análise de Variância, cujos resultados constam da Tabela 7.

Tabela 7 - Análise de Variância para dados estruturados.

Estrato	Fonte	GL	SQ	QM	F
D-M	T-M	1	$\ S_{\alpha}\hat{\tau}\ ^2 = 105,125$	105,125	8,15*
	erro	6	$\ S_{\alpha}y - S_{\alpha}\hat{\tau}\ ^2 = 77,375$	12,8958	
D-M	Total	7	$\ S_{\alpha}y\ ^2 = 182,50$		

Supondo normalidade do vetor de respostas o teste F para o efeito de tratamentos é dado por:

$$F = \frac{QM_{TRAT}}{QM_{ERRO}} = \frac{105,125}{12,8958} = 8,15^*$$

que sob H_0 (nulidade de efeito de tratamento) tem

distribuição $F_{1;5}$. O teste rejeita H_0 ao nível de 5% de probabilidade.

Neste caso, o feno de alfafa é realmente melhor ao nível de 5% de probabilidade.

Observa-se que, tanto na análise clássica, como na análise de dados estruturados, para o caso de experimentos inteiramente casualizados, obteve-se o mesmo resultado; isto acontece quando a informação sobre tratamentos está contida num mesmo estrato.

Exemplo 2 - Este exemplo refere-se a experimento em blocos casualizados.

Num experimento de competição de variedades de batatinha, feito pelo Eng^o Agr^o Oscar A. Garay em Balcarce, Argentina, em blocos casualizados, nas produções obtidas em t/ha, cujos resultados encontram-se na Tabela 8.

Tabela 8 - Competição de variedades de batatinha, Balcarce, Argentina.

Variedades	1° Bloco	2° Bloco	3° Bloco	4° Bloco	Total de Variedades
Kennebec	9,2	13,4	11,0	9,2	42,8
Huinkul	21,1	27,0	28,4	25,7	100,2
S. Rafaela	22,8	29,9	24,2	25,1	101,8
Buena Vista	15,4	11,9	10,1	12,3	49,7
B 25-50 E	12,7	18,0	18,2	17,1	66,0
B 1-52	20,0	21,1	20,0	28,0	89,1
B 116-51	23,1	24,2	28,4	18,3	90,0
B 72-53 A	18,0	24,8	24,0	24,8	91,2
Totais de Blocos	142,1	170,1	160,3	158,3	630,8

Fonte: GOMES, F.P. (1985).

A análise da variância pelo método clássico, conduziu aos resultados apresentados na Tabela 9.

Tabela 9 - Análise de variância (método clássico)

CV	GL	SQ	QM	F
Blocos	3	50,53	16,84	1,97
Tratamentos	7	919,72	131,39	15,37**
Resíduo	21	179,48	8,55	
TOTAL	31	1149,71		

Fonte: GOMES, F.P. (1985).

Através da análise da variância clássica, conclui-se que existe diferença significativa entre as variedades de batatinhas ao nível de 1% de probabilidade.

Apresenta-se agora, a análise da variância considerando a análise de dados estruturados.

O experimentador está livre para rotular as unidades experimentais usando o conjunto de índices:

$$I = \{11, 12, \dots, 18, 21, 22, \dots, 28, \dots, 41, 42, \dots, 48\}$$

Supõe-se que o experimentador rotulou as unidades da seguinte maneira:

11	9,2
12	21,1
13	22,6
14	15,4
15	12,7
16	20,0
17	23,1
18	18,0

21	13,4
22	27,0
23	29,9
24	11,9
25	18,0
26	21,1
27	24,2
28	24,6

31	11,0
32	26,4
33	24,2
34	10,1
35	18,2
36	20,0
37	26,4
38	24,0

41	9,2
42	25,7
43	25,1
44	12,3
45	17,1
46	28,0
47	16,3
48	24,6

Neste caso tem-se:

EB: Quatro blocos aninhados com oito parcelas

Índices: $\{11, 12, \dots, 18, \dots, 41, 42, \dots, 48\}$

Notação: $4/8$

Grupo G: S_8 "wreath" S_4

Os estratos relevantes na análise são:

M , $(B - M)$ e $(D - B)$, com os operadores M , $(B - M)$ e $(I - B)$

respectivamente. A decomposição do vetor de respostas, segundo a estrutura de blocos é dada por:

$$y = My + (B - My) + (I - B)y$$

Neste exemplo, o vetor resposta e os operadores aplicados nele, são dados por:

$$y = \begin{bmatrix} 9,2 \\ 21,1 \\ 22,6 \\ 15,4 \\ 12,7 \\ 20,0 \\ 23,1 \\ 18,0 \\ \text{---} \\ 13,4 \\ 27,0 \\ 29,9 \\ 11,9 \\ 18,0 \\ 21,1 \\ 24,2 \\ 24,6 \\ \text{---} \\ 11,0 \\ 26,4 \\ 24,2 \\ 10,1 \\ 18,2 \\ 20,0 \\ 26,4 \\ 24,0 \\ \text{---} \\ 9,2 \\ 25,7 \\ 25,1 \\ 12,3 \\ 17,1 \\ 28,0 \\ 16,3 \\ 24,6 \end{bmatrix}; My = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ \text{---} \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ \text{---} \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ \text{---} \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \\ 630,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ \text{---} \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ \text{---} \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ \text{---} \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \end{bmatrix}; By = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 142,1 \\ 142,1 \\ 142,1 \\ 142,1 \\ 142,1 \\ 142,1 \\ 142,1 \\ 142,1 \\ \text{---} \\ 170,1 \\ 170,1 \\ 170,1 \\ 170,1 \\ 170,1 \\ 170,1 \\ 170,1 \\ 170,1 \\ \text{---} \\ 160,3 \\ 160,3 \\ 160,3 \\ 160,3 \\ 160,3 \\ 160,3 \\ 160,3 \\ 160,3 \\ \text{---} \\ 158,3 \\ 158,3 \\ 158,3 \\ 158,3 \\ 158,3 \\ 158,3 \\ 158,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,7625 \\ 17,7625 \\ 17,7625 \\ 17,7625 \\ 17,7625 \\ 17,7625 \\ 17,7625 \\ 17,7625 \\ \text{---} \\ 21,2625 \\ 21,2625 \\ 21,2625 \\ 21,2625 \\ 21,2625 \\ 21,2625 \\ 21,2625 \\ 21,2625 \\ \text{---} \\ 20,0375 \\ 20,0375 \\ 20,0375 \\ 20,0375 \\ 20,0375 \\ 20,0375 \\ 20,0375 \\ 20,0375 \\ \text{---} \\ 19,7875 \\ 19,7875 \\ 19,7875 \\ 19,7875 \\ 19,7875 \\ 19,7875 \\ 19,7875 \end{bmatrix}$$

32 1 32 1 32 1 32 1

A decomposição do vetor de respostas, segundo a estrutura de blocos é dada por:

$$y = My + (B - My) + (I - B)y$$

9,2	19,7125	17,7625 - 19,7125	9,2 - 17,7625
21,1	19,7125	17,7625 - 19,7125	21,1 - 17,7625
22,6	19,7125	17,7625 - 19,7125	22,6 - 17,7625
15,4	19,7125	17,7625 - 19,7125	15,4 - 17,7625
12,7	19,7125	17,7625 - 19,7125	12,7 - 17,7625
20,0	19,7125	17,7625 - 19,7125	20,0 - 17,7625
23,1	19,7125	17,7625 - 19,7125	23,1 - 17,7625
18,0	19,7125	17,7625 - 19,7125	18,0 - 17,7625
-----	-----	-----	-----
13,4	19,7125	21,2625 - 19,7125	13,4 - 21,2625
27,0	19,7125	21,2625 - 19,7125	27,0 - 21,2625
29,9	19,7125	21,2625 - 19,7125	29,9 - 21,2625
11,9	19,7125	21,2625 - 19,7125	11,9 - 21,2625
18,0	19,7125	21,2625 - 19,7125	18,0 - 21,2625
21,1	19,7125	21,2625 - 19,7125	21,1 - 21,2625
24,2	19,7125	21,2625 - 19,7125	24,2 - 21,2625
24,6	19,7125	21,2625 - 19,7125	24,6 - 21,2625
-----	-----	-----	-----
11,0	19,7125	20,0375 - 19,7125	11,0 - 20,0375
26,4	19,7125	20,0375 - 19,7125	26,4 - 20,0375
24,2	19,7125	20,0375 - 19,7125	24,2 - 20,0375
10,1	19,7125	20,0375 - 19,7125	10,1 - 20,0375
18,2	19,7125	20,0375 - 19,7125	18,2 - 20,0375
20,0	19,7125	20,0375 - 19,7125	20,0 - 20,0375
26,4	19,7125	20,0375 - 19,7125	26,4 - 20,0375
24,0	19,7125	20,0375 - 19,7125	24,0 - 20,0375
-----	-----	-----	-----
9,2	19,7125	19,7875 - 19,7125	9,2 - 19,7875
25,7	19,7125	19,7875 - 19,7125	25,7 - 19,7875
25,1	19,7125	19,7875 - 19,7125	25,1 - 19,7875
12,3	19,7125	19,7875 - 19,7125	12,3 - 19,7875
17,1	19,7125	19,7875 - 19,7125	17,1 - 19,7875
28,0	19,7125	19,7875 - 19,7125	28,0 - 19,7875
16,3	19,7125	19,7875 - 19,7125	16,3 - 19,7875
24,6	19,7125	19,7875 - 19,7125	24,6 - 19,7875

32 1 32 1 32 1 32 1

ou seja:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} 9,2 \\ 21,1 \\ 22,6 \\ 15,4 \\ 12,7 \\ 20,0 \\ 23,1 \\ 18,0 \\ \text{-----} \\ 13,4 \\ 27,0 \\ 29,9 \\ 11,9 \\ 18,0 \\ 21,1 \\ 24,2 \\ 24,6 \\ \text{-----} \\ 11,0 \\ 26,4 \\ 24,2 \\ 10,1 \\ 18,2 \\ 20,0 \\ 26,4 \\ 24,0 \\ \text{-----} \\ 9,2 \\ 25,7 \\ 25,1 \\ 12,3 \\ 17,1 \\ 28,0 \\ 16,3 \\ 24,6 \end{array} & = & \begin{array}{c} 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ \text{-----} \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ \text{-----} \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ \text{-----} \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \\ 19,7125 \end{array} & + & \begin{array}{c} -1,95 \\ -1,95 \\ -1,95 \\ -1,95 \\ -1,95 \\ -1,95 \\ -1,95 \\ -1,95 \\ \text{-----} \\ 1,55 \\ 1,55 \\ 1,55 \\ 1,55 \\ 1,55 \\ 1,55 \\ 1,55 \\ 1,55 \\ \text{-----} \\ 0,325 \\ 0,325 \\ 0,325 \\ 0,325 \\ 0,325 \\ 0,325 \\ 0,325 \\ 0,325 \\ \text{-----} \\ 0,975 \\ 0,975 \\ 0,975 \\ 0,975 \\ 0,975 \\ 0,975 \\ 0,975 \\ 0,975 \end{array} & + & \begin{array}{c} -8,5625 \\ 3,3375 \\ 4,8375 \\ -2,3625 \\ -5,0625 \\ 2,2375 \\ 5,3375 \\ 0,2375 \\ \text{-----} \\ -7,8625 \\ 5,7375 \\ 8,6375 \\ -9,3625 \\ -3,2625 \\ -0,1625 \\ 2,9375 \\ 3,3375 \\ \text{-----} \\ -9,0375 \\ 8,3625 \\ 4,1625 \\ -9,9375 \\ -1,8375 \\ -0,0375 \\ 8,3625 \\ 3,9625 \\ \text{-----} \\ -10,5875 \\ 5,9125 \\ 5,3125 \\ -7,4875 \\ -2,6875 \\ 8,2125 \\ -3,4875 \\ 4,8125 \end{array} \\
\begin{array}{c} 32 \\ 1 \end{array} & & \begin{array}{c} 32 \\ 1 \end{array} & & \begin{array}{c} 32 \\ 1 \end{array} & & \begin{array}{c} 32 \\ 1 \end{array}
\end{array}$$

Usando a ortogonalidade dos operadores
obtem-se a partição para a norma:

$$\|y\|^2 = \|My\|^2 + \|(B-M)y\|^2 + \|(I-B)y\|^2$$

$$13584,36 = 12434,65 + 50,53 + 1099,18$$

A tabela da análise da variância nula, depende somente da estrutura de blocos e fornece uma decomposição de $\|y\|^2$ segundo os estratos determinados pelo grupo G^* de transformações. Neste exemplo, os resultados da análise da variância nula estão na Tabela 10.

Tabela 10 - Análise da Variância Nula.

Estrato	GL	SQ	QM	ECQM
M	1	12434,85	12434,85	ξ_0
$S - M$	$b-1=3$	50,53	18,84	ξ_1
$D - S$	$b(k-1)=28$	1099,18	39,28	ξ_2
D	$bk=32$	13584,38		

Neste exemplo a estrutura de tratamentos é $\underline{8}$, ou seja, 8 tratamentos não estruturados. A decomposição do subespaço de tratamento, com dimensão 8, no caso é:

$$U = M \oplus (U - M)$$

com respectivos operadores M e $U - M$.

Por ser mais simples, toma-se o espaço isomorfo reduzido com 8 componentes. A decomposição neste espaço será dada por:

$$U_u = M_u + (U - M)u$$

A	10,7	=	19,7125	+	-9,0125
B	25,05		19,7125		5,3375
C	25,45		19,7125		5,7375
D	12,425		19,7125		-7,2875
E	16,5	=	19,7125	+	-3,2125
F	22,275		19,7125		2,5625
G	22,50		19,7125		2,7875
H	22,8		19,7125		3,0875

onde:

$$e \quad u = y_{..} = 19,7125$$

$$\begin{aligned} y_{.1} &= 10,7 &= u_1 \\ y_{.2} &= 25,05 &= u_2 \\ y_{.3} &= 25,45 &= u_3 \\ y_{.4} &= 12,425 &= u_4 \\ y_{.5} &= 16,5 &= u_5 \\ y_{.6} &= 22,275 &= u_6 \\ y_{.7} &= 22,50 &= u_7 \\ y_{.8} &= 22,8 &= u_8 \end{aligned}$$

O espaço de tratamento $\mathcal{U}$ é um subespaço do espaço $\mathcal{D}$. Trabalha-se num espaço reduzido com número de componentes igual a dimensão do espaço $\mathcal{U}$, ou seja, $\dim \mathcal{U} = 8$.

A dimensão do espaço reduzido de tratamentos é independente do número de repetições de cada tratamento. A base para esse espaço é constituída do vetor média e mais sete vetores que representam cada um deles, os contrastes de interesse.

Assim, o seguinte quadro poderá representar uma base para $\mathcal{U}$ no espaço reduzido

A	B	C	D	E	F	G	H	μ	M
+	+	+	+	+	+	+	+	}	$\mu - M$
+	-								
+	+	-2							
+	+	+	-3						
+	+	+	+	-4					
+	+	+	+	+	-5				
+	+	+	+	+	+	-6			
+	+	+	+	+	+	+	-7		

Voltando ao espaço $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{32}$, onde a estrutura de blocos é formada de (i,j) unidades experimentais, onde $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, \dots, 8$ e a de tratamentos é de 8 tratamentos, repetidos 4 vezes cada, ou seja:

11	A
12	B
13	C
14	D
15	E
16	F
17	G
18	H

21	A
22	B
23	C
24	D
25	E
26	F
27	G
28	H

31	A
32	B
33	C
34	D
35	E
36	F
37	G
38	H

41	A
42	B
43	C
44	D
45	E
46	F
47	G
48	H

Os contrastes, o vetor média e erros definindo os estratos são representados na Tabela 11.

Tabela 11 - Decomposição do espaço de tratamentos em contrastes, mais a média, referentes ao experimento de competição de batatinhas.

UNIDADES	11	12	13	14	15	16	17	18	21	22	23	24	25	26	27	28	31	32	33	34	35	36	37	38	41	42	43	44	45	46	47	48	t	S			
TRATAMENTO	A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H					
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	média	M			
	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-																	erro	B-M			
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2									erro				
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	erro				
	+	-							+	-							+	-							+	-							A.B	D-B			
	+	-							-	+							-	+							+	-							erro				
	+	-							-	+							+	-							-	+							erro				
	+	-							+	-							-	+							-	+							erro				
	+	+	-2						+	+	-2						+	+	-2						+	+	-2								AB.C		
	+	+	-2						-	-	+2						-	-	+2						+	+	-2								erro		
	+	+	-2						-	-	+2						+	+	-2						-	-	+2								erro		
	+	+	-2						+	+	-2						-	-	+2						-	-	+2								erro		
	+	+	+	-3					+	+	+	-3					+	+	+	-3					+	+	+	-3								ABC.D	
	+	+	+	-3					-	-	-	+3					-	-	-	+3					+	+	+	-3								erro	
	+	+	+	-3					-	-	-	+3					+	+	+	-3					-	-	-	+3								erro	
	+	+	+	-3					+	+	+	-3					-	-	-	+3					-	-	-	+3								erro	
	+	+	+	+	-4				+	+	+	+	-4				+	+	+	+	-4				+	+	+	+	-4								ABCD.E
	+	+	+	+	-4				-	-	-	-	+4				-	-	-	-	+4				+	+	+	+	-4								erro
	+	+	+	+	-4				-	-	-	-	+4				+	+	+	+	-4				-	-	-	-	+4								erro
	+	+	+	+	-4				+	+	+	+	-4				-	-	-	-	+4				-	-	-	-	+4								erro
	+	+	+	+	+	-5			+	+	+	+	+	-5			+	+	+	+	+	-5			+	+	+	+	+	-5							ABCDE.F
	+	+	+	+	+	-5			-	-	-	-	-	+5			-	-	-	-	-	+5			+	+	+	+	+	-5							erro
	+	+	+	+	+	-5			-	-	-	-	-	+5			+	+	+	+	+	-5			-	-	-	-	-	+5							erro
	+	+	+	+	+	-5			+	+	+	+	+	-5			-	-	-	-	-	+5			-	-	-	-	-	+5							erro
	+	+	+	+	+	+	-6		+	+	+	+	+	+	-6		+	+	+	+	+	+	-6		+	+	+	+	+	+	+	-6				ABCDEF.G	
	+	+	+	+	+	+	-6		-	-	-	-	-	-	+6		-	-	-	-	-	-	+6		+	+	+	+	+	+	+	+	-6				erro
	+	+	+	+	+	+	-6		-	-	-	-	-	-	+6		+	+	+	+	+	+	-6		-	-	-	-	-	-	-	-	+6				erro
	+	+	+	+	+	+	-6		+	+	+	+	+	+	-6		-	-	-	-	-	-	+6		-	-	-	-	-	-	-	-	+6				erro
	+	+	+	+	+	+	+	-7	+	+	+	+	+	+	+	-7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-7		ABCDEFGH	
	+	+	+	+	+	+	+	-7	-	-	-	-	-	-	-	+7	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-7		erro	
	+	+	+	+	+	+	+	-7	-	-	-	-	-	-	-	+7	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+7		erro	
	+	+	+	+	+	+	+	-7	+	+	+	+	+	+	+	-7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+7		erro	

Matriz de Incidência:

	A	B	C	D	E	F	G	H
	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1

Nota-se que o espaço de tratamentos está todo contido no estrato (D-B) e conseqüentemente é ortogonal a (B-M). Diz-se neste caso que os tratamentos são ortogonais aos blocos e que toda a informação sobre $\mathcal{T} = N\mathcal{U}$ está contida

em (D-B). Este fato facilita a análise e sempre que possível tenta-se delinear experimentos com esta propriedade.

Na Tabela 12, encontram-se os resultados para construir a Tabela de Fisher:

Tabela 12 - Tabela de Fisher.

	M	B-M	D-B
M	1	0	0
D-M	0	0	1

Análise Global - Tabela da Análise da Variância

Cálculo para obter a tabela da análise da variância.

$$S_{\alpha}^2 = \frac{1}{\lambda} T(I - B)y = \frac{1}{\lambda} (IIy - TBy)$$

onde $T = NCN'ND^{-1}N'$

$$S_{\alpha} \hat{\tau} = \frac{1}{\lambda} I(I-B)y =$$

$y_{.1} - y_{..}$	10,7 -19,7125	-9,0125
$y_{.2} - y_{..}$	25,05 -19,7125	5,3375
$y_{.3} - y_{..}$	25,45 -19,7125	5,7375
$y_{.4} - y_{..}$	12,425 -19,7125	-7,2875
$y_{.5} - y_{..}$	16,5 -19,7125	-3,2125
$y_{.6} - y_{..}$	22,275 -19,7125	2,5625
$y_{.7} - y_{..}$	22,50 -19,7125	2,7875
$y_{.8} - y_{..}$	22,8 -19,7125	3,0875
-----	-----	-----
$y_{.1} - y_{..}$	10,7 -19,7125	-9,0125
$y_{.2} - y_{..}$	25,05 -19,7125	5,3375
$y_{.3} - y_{..}$	25,45 -19,7125	5,7375
$y_{.4} - y_{..}$	12,425 -19,7125	-7,2875
$y_{.5} - y_{..}$	16,5 -19,7125	-3,2125
$y_{.6} - y_{..}$	22,275 -19,7125	2,5625
$y_{.7} - y_{..}$	22,50 -19,7125	2,7875
$y_{.8} - y_{..}$	22,8 -19,7125	3,0875
-----	-----	-----
$y_{.1} - y_{..}$	10,7 -19,7125	-9,0125
$y_{.2} - y_{..}$	25,05 -19,7125	5,3375
$y_{.3} - y_{..}$	25,45 -19,7125	5,7375
$y_{.4} - y_{..}$	12,425 -19,7125	-7,2875
$y_{.5} - y_{..}$	16,5 -19,7125	-3,2125
$y_{.6} - y_{..}$	22,275 -19,7125	2,5625
$y_{.7} - y_{..}$	22,50 -19,7125	2,7875
$y_{.8} - y_{..}$	22,8 -19,7125	3,0875

$$\|S_{\alpha} \hat{\tau}\|^2 = \langle S_{\alpha} \hat{\tau}, S_{\alpha} \hat{\tau} \rangle$$

$$= 919,7199985$$

$$S_{\alpha} y = (I-B)y \Rightarrow \|S_{\alpha} y\|^2 = \langle S_{\alpha} y, S_{\alpha} y \rangle$$

$$\|S_{\alpha} y\|^2 = 1099,18 \quad (\text{Tabela 10})$$

$$S_{\alpha y} - S_{\alpha \hat{\tau}} =$$

-8,5625 + 9,0125	0,45
3,3375 - 5,3375	-2,00
4,8375 - 5,7375	-0,90
-2,3625 + 7,2875	4,925
-5,0625 + 3,2125	-1,85
2,2375 - 2,5625	-0,325
5,3375 - 2,7875	2,55
0,2375 - 3,0875	-2,85

-7,8625 + 9,0125	1,15
5,7375 - 5,3375	0,40
8,6375 - 5,7375	2,90
-9,3625 + 7,2875	-2,075
-3,2625 + 3,2125	-0,05
-0,1625 - 2,5625	-2,725
2,9375 - 2,7875	0,15
3,3375 - 3,0875	0,25

-9,0375 + 9,0125	-0,025
6,3625 - 5,3375	1,025
4,1625 - 5,7375	-1,575
-9,9375 + 7,2875	-2,65
-1,8375 + 3,2125	1,375
-0,0375 - 2,5625	-2,6
6,3625 - 2,7875	3,575
3,9625 - 3,0875	0,875

-10,5875 + 9,0125	-1,575
5,9125 - 5,3375	0,575
5,3125 - 5,7375	-0,425
-7,4875 + 7,2875	-0,200
-2,6875 + 3,2125	0,525
8,2125 - 2,5625	5,65
-3,4875 - 2,7875	-6,275
4,8125 - 3,0875	1,725

$$\text{Assim, } \|S_{\alpha y} - S_{\alpha \hat{\tau}}\|^2 = \langle (S_{\alpha y} - S_{\alpha \hat{\tau}}), (S_{\alpha y} - S_{\alpha \hat{\tau}}) \rangle$$

$$= 179,46$$

Obtido esses valores, constrõe-se a Tabela da Análise de Variância, cujos resultados constam na Tabela 13.

Tabela 13 - Análise de Variância de dados estruturados.

Estrato	Fonte	GL	SQ	QM	F
D-8	T-M	7	$\ S_{\alpha}\hat{\tau}\ ^2 = 919,72$	131,39	15,37**
	erro	21	$\ S_{\alpha}y - S_{\alpha}\hat{\tau}\ ^2 = 179,48$	8,55	
D-8	Total	28	$\ S_{\alpha}y\ ^2 = 1099,18$		

Supondo normalidade do vetor de respostas, o teste F para o efeito de tratamentos é dado por:

$$F = \frac{QM_{TRAT}}{QM_{ERRO}} = \frac{131,39}{8,55} = 15,37^{**}$$

que sob H_0 (nulidade de efeito de tratamento) tem distribuição $F_{4;21}$. O teste rejeita H_0 ao nível de 1% de probabilidade.

Neste caso, constata-se que existe diferença significativa entre as variedades de batatinhas ao nível de 1% de probabilidade.

Observa-se que foi obtido o mesmo resultado tanto na análise de variância clássica, como na análise de dados estruturados.

Exemplo 3 - Este exemplo refere-se a um experimento fatorial 2x2, cujos dados estão representados na Tabela 14.

Tabela 14 - Dados referentes a adubo mineral (A) e torta dos filtros Oliver de usinas de açúcar (T).

TRATAM.	BLOCOS				TOTAIS
	1º	2º	3º	4º	
(1)	18,0	8,8	9,4	11,4	47,4
A	20,6	21,0	18,6	20,6	80,8
T	19,6	15,0	14,6	15,8	65,0
AT	19,2	19,6	18,4	20,2	77,4
TOTAIS	77,4	64,2	61,0	68,0	270,6

Fonte: GOMES, F.P. (1985)

A análise de variância pelo método clássico, conduziu aos resultados, fornecidos pela Tabela 15.

Tabela 15 - Análise da Variância (Método clássico)

CV	GL	SQ	QM	F
Blocos	3	37,83		
Adubo Mineral (A)	1	131,11	131,11	31,29 ^{**}
Torta (T)	1	12,61	12,61	3,00
Interação A x T	1	27,57	27,57	6,57 [*]
(Tratamentos)	(3)	(171,29)		
Resíduo	9	37,88	4,19	
TOTAL	15	246,80		

Apresenta-se agora, a análise da variância considerando a análise de dados estruturados.

O experimentador está livre para rotular as unidades experimentais usando o conjunto de índices:

$$I = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, \dots, 41, 42, 43, 44\}$$

Supõe-se que o experimentador rotulou as unidades da seguinte maneira:

11	18,0
12	20,6
13	19,6
14	19,2

21	8,6
22	21,0
23	15,0
24	19,6

31	9,4
32	18,6
33	14,6
34	18,4

41	11,4
42	20,6
43	15,8
44	20,2

Neste caso tem-se:

EB: 4 blocos aninhados com 4 parcelas.

Índices: {11,12,13,14,...,41,42,43,44}

Notação: 4/4

Grupo G: S_4 "wreath" S_4 .

Os estratos relevantes na análise são:

M , $(B - M)$ e $(I - B)$, com os operadores M , $(B - M)$ e $(I - B)$ respectivamente. A decomposição do vetor de respostas, segundo a estrutura de blocos é dada por:

$$Iy = My + (B - M)y + (I - B)y$$

Neste exemplo, o vetor resposta e os operadores aplicados nele, são dados por:

$$\begin{array}{c}
 Y = \begin{bmatrix} 18,0 \\ 20,3 \\ 19,6 \\ 19,2 \\ \hline 8,6 \\ 21,0 \\ 15,0 \\ 19,6 \\ \hline 9,4 \\ 18,6 \\ 14,6 \\ 18,4 \\ \hline 11,4 \\ 20,6 \\ 15,8 \\ 20,2 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 My = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 270,6 \\ 270,6 \\ 270,6 \\ 270,6 \\ \hline 270,6 \\ 270,6 \\ 270,6 \\ 270,6 \\ \hline 270,6 \\ 270,6 \\ 270,6 \\ 270,6 \\ \hline 270,6 \\ 270,6 \\ 270,6 \\ 270,6 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ \hline 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ \hline 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ \hline 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$B y = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 77,4 \\ 77,4 \\ 77,4 \\ 77,4 \\ 64,2 \\ 64,2 \\ 64,2 \\ 64,2 \\ 61,0 \\ 61,0 \\ 61,0 \\ 61,0 \\ 68,0 \\ 68,0 \\ 68,0 \\ 68,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19,35 \\ 19,35 \\ 19,35 \\ 19,35 \\ 16,05 \\ 16,05 \\ 16,05 \\ 16,05 \\ 15,25 \\ 15,25 \\ 15,25 \\ 15,25 \\ 17,00 \\ 17,00 \\ 17,00 \\ 17,00 \end{bmatrix}$$

A decomposição do vetor de respostas, segundo a estrutura de blocos é dada por:

$$I y = M y + (B - M) y + (I - B) y$$

$$\begin{bmatrix} 18,0 \\ 20,6 \\ 19,6 \\ 19,2 \\ 8,6 \\ 21,0 \\ 15,0 \\ 19,6 \\ 9,4 \\ 18,6 \\ 14,6 \\ 18,4 \\ 11,4 \\ 20,6 \\ 15,8 \\ 20,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,4375 \\ 2,4375 \\ 2,4375 \\ 2,4375 \\ -0,8625 \\ -0,8625 \\ -0,8625 \\ -0,8625 \\ -1,8625 \\ -1,8625 \\ -1,8625 \\ -1,8625 \\ 0,0875 \\ 0,0875 \\ 0,0875 \\ 0,0875 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,35 \\ 1,25 \\ 0,25 \\ -0,15 \\ -7,45 \\ 4,95 \\ -1,05 \\ 3,55 \\ -5,85 \\ 3,35 \\ -0,65 \\ 3,15 \\ -5,60 \\ 3,60 \\ -1,20 \\ 3,20 \end{bmatrix}$$

Usando a ortogonalidade dos operadores, obtém-se a partição para a norma:

$$\|y\|^2 = \|M y\|^2 + \|(B - M) y\|^2 + \|(I - B) y\|^2$$

$$\text{onde } \|y\|^2 = 4823,32$$

$$\|My\|^2 = 4576,522496$$

$$\|(B-M)y\|^2 = 37,8275$$

$$\|(I-B)y\|^2 = 208,97$$

A análise da variância nula é dada pela Tabela 16.

Tabela 16 - Análise da Variância Nula.

Estrato	GL	SQ	QM	EQMD
M	1	4576,52	4576,52	ξ_0
B-M	3	37,83	12,61	ξ_1
D-B	12	208,97	17,41	ξ_2
D	16	4823,32		

Neste exemplo a estrutura de tratamentos é um fatorial 2x2 (dois fatores com dois níveis cada). A decomposição do subespaço de tratamentos, neste caso é dado por:

$$U = M \oplus (U_A - M) \oplus (U_T - M) \oplus (U_A * U_T)$$

com respectivos operadores de projeção:

$$I, M, U_A, U_T, (U - U_A - U_T + M)$$

Como a dimensão do espaço reduzido de tratamentos é independente do número de replicações de cada tratamento, a base para esse espaço é constituída do vetor

média e mais três vetores que representam cada um deles, contrastes de interesse.

Tabela 17 - Decomposição do espaço reduzido de tratamentos em contrastes mais a média.

(1)	A	T	AT		
+	+	+	+	média	} $\mathcal{M}$
+	-	+	-	torta	
+	+	-	-	adubo mineral	} $\mathcal{T} - \mathcal{M}$
+	-	-	+	interação	

Observando a Tabela 17, nota-se que os contrastes geram o espaço de tratamentos.

Na Tabela 18, encontram-se os resultados para construir a Tabela de Fisher.

Tabela 18 - Tabela de Fisher.

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{B} - \mathcal{M}$	$\mathcal{D} - \mathcal{B}$
$\mathcal{M}$	1	0	0
$\mathcal{T}_A - \mathcal{M}$	0	0	1
$\mathcal{T}_T - \mathcal{M}$	0	0	1
$\mathcal{T}_A * \mathcal{T}_T$	0	0	1

Os resultados que constam na Tabela 18, podem ser reduzidos fornecendo a Tabela 19, pelo fato do subespaço $(\mathcal{T} - \mathcal{M})$ estar todo contido no estrato $\mathcal{D} - \mathcal{B}$.

Tabela 19 - Tabela de Fisher (reduzida).

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{B} - \mathcal{M}$	$\mathcal{D} - \mathcal{B}$
$\mathcal{M}$	1	0	0
$\mathcal{T} - \mathcal{M}$	0	0	1

Como o espaço de tratamento $\mathcal{U}$, é um subespaço do espaço $\mathcal{D}$, trabalha-se num espaço reduzido com número de componentes igual a dimensão do espaço $\mathcal{U}$, ou seja, $\dim \mathcal{U} = 4$.

A decomposição neste espaço será dada por:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \begin{matrix} T_u \\ A \\ T \\ AT \end{matrix} \begin{bmatrix} 11,85 \\ 20,20 \\ 16,25 \\ 19,35 \end{bmatrix} &= \begin{matrix} M_u \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \\ 16,9125 \end{bmatrix} + \begin{matrix} (U_A - MD_u) \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 14,05 - 16,9125 \\ 19,775 - 16,9125 \\ 14,05 - 16,9125 \\ 19,775 - 16,9125 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{matrix} (U_T - MD_u) \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 16,025 - 16,9125 \\ 16,025 - 16,9125 \\ 17,80 - 16,9125 \\ 17,80 - 16,9125 \end{bmatrix} + \begin{matrix} (U - U_A - U_T + MD_u) \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 11,85 - 14,05 - 16,025 + 16,9125 \\ 20,20 - 19,775 - 16,025 + 16,9125 \\ 16,25 - 14,05 - 17,80 + 16,9125 \\ 19,35 - 19,775 - 17,80 + 16,9125 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{20} \\ u_{16} \\ u_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{20} \\ m_{16} \\ m_{19} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (U_A - M)u \\ (U_T - M)u \\ (I - U_A - U_T + M)u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2,8625 \\ 2,8625 \\ -2,8625 \\ 2,8625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,8875 \\ -0,8875 \\ 0,8875 \\ 0,8875 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,3125 \\ 1,3125 \\ 1,3125 \\ -1,3125 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição do vetor de tratamento

$u \in \mathcal{U}$, no espaço reduzido é dado por:

$$Iu = Mu + (U_A - M)u + (U_T - M)u + (I - U_A - U_T + M)u$$

onde os operadores de projeção são da seguinte forma:

$$M(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = (u_{..}, u_{..}, u_{..}, u_{..})$$

$$(U_A - M)(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = (u_{.1} - u_{..}, u_{.2} - u_{..}, u_{.1} - u_{..}, u_{.2} - u_{..})$$

$$(U_T - M)(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = (u_{1.} - u_{..}, u_{2.} - u_{..}, u_{1.} - u_{..}, u_{2.} - u_{..})$$

$$(I - U_A - U_T + M)(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = Iu - Mu - (U_A - M)u - (U_T - M)u$$

onde:

$$u_{i.} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 u_{ij}$$

$$u_{.j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 u_{ij}$$

$$u_{..} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 u_{ij}$$

e $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ é a média dos y_{ij} em cada linha da Tabela

14.

Análise Global

Análise da variância considerando uma estrutura de tratamentos com esquema fatorial 2×2 .

Cálculos para o quadro da análise da variância.

$$S_{\alpha}^{\hat{\tau}} = \frac{1}{\lambda} TCI - B)u = \begin{bmatrix} 11,85 - 16,9125 \\ 20,20 - 16,9125 \\ 16,25 - 16,9125 \\ 19,35 - 16,9125 \end{bmatrix}$$

$$S_{\alpha}^{\hat{\tau}} = \begin{bmatrix} -5,0625 \\ 3,2875 \\ -0,6625 \\ 2,4375 \end{bmatrix}$$

onde, para calcular a SQ é preciso levar em conta o número de repetições de cada tratamento.

$$\text{Assim, } \|S_{\alpha}^{\hat{\tau}}\|^2 = 171,2480$$

$$S_{\alpha}y = (I - B)y \rightarrow \|S_{\alpha}y\|^2 = 208,97$$

$$\begin{aligned} \|S_{\alpha}y - S_{\alpha}^{\hat{\tau}}\|^2 &= \|S_{\alpha}y\|^2 - \|S_{\alpha}^{\hat{\tau}}\|^2 \\ &= 208,97 - 171,2480 \\ &= 37,7220 \end{aligned}$$

Assim,

$$S_{\alpha}(\mathcal{T}_A) = (T_A - M)y \rightarrow \|S_{\alpha}(\mathcal{T}_A)\|^2 = 131,1025$$

$$S_{\alpha}(\mathcal{T}_T) = (T_T - M)y \rightarrow \|S_{\alpha}(\mathcal{T}_T)\|^2 = 12,6025$$

$$S_{\alpha}^{\hat{\tau}} = \frac{1}{1} TCI - B)u \rightarrow \|S_{\alpha}^{\hat{\tau}}\|^2 = 171,2480$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|S_{\alpha}(\tau_A * \tau_T)u\|^2 &= \|(T_A * T_T)u\|^2 = \\
 &= \|S_{\alpha} \hat{\tau}\|^2 - \|S_{\alpha}(\tau_A)\|^2 - \|S_{\alpha}(\tau_T)\|^2 = \\
 &= 171,2480 - 131,1025 - 12,8025 \\
 &= 27,5430
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e o erro} &= \|S_{\alpha} y\|^2 - \|S_{\alpha} \hat{\tau}\|^2 \\
 &= 208,97 - 171,2480 \\
 &= 37,722
 \end{aligned}$$

Assim, a análise da variância é dada pela Tabela 20.

Tabela 20 - Análise da variância para dados estruturados.

Estrato	Fonte	GL	SQ	QM	F
D-8	$S_{\alpha}(\mathcal{J}_A)$ (Adubo)	1	131,1025	131,1025	31,29**
	$S_{\alpha}(\mathcal{J}_T)$ (Torta)	1	12,6025	12,6025	3,00
	$S_{\alpha}(\mathcal{J}_A * \mathcal{J}_T)$ (Interação)	1	27,5430	27,5430	6,57*
	Erro	9	37,722	4,19	
D-8	Total	12	208,97		

Supondo normalidade do vetor de respostas,
e sob H_0 , o teste F para os efeitos de tratamentos é:

$$F_{\text{adubo}} = 31,29^{**}$$

$$F_{\text{Torta}} = 3,00$$

$$F_{\text{Interação}} = 6,57^*$$

Vê-se então que em relação aos tratamentos, o efeito do adubo foi significativo assim como a interação.

Neste caso, observa-se a importância de se ter uma estrutura de tratamentos e se possível levá-la em conta, já que a análise se torna, mais rigorosa, revelando todos os possíveis efeitos dos fatores.

Exemplo 4 - Este exemplo refere-se a experimento em quadrados latinos - esquema inteiramente casualizado.

Apresenta-se um experimento de Rodrigues et alii (1969), cujo objetivo foi estudar o efeito da idade da castração no desenvolvimento e produção de suínos. Os tratamentos eram quatro, os quais foram sorteados às letras do modelo utilizado:

- (C) - castração aos 7 dias de idade
- (D) - castração aos 21 dias de idade
- (A) - castração aos 56 dias de idade
- (B) - inteiros

A variação entre leitegadas foi controlada pelas linhas do quadrado, e a variação dos pesos dos leitões dentro das leitegadas foi isolada pelas colunas.

Os ganhos de peso em kg, ao final do experimento (252 dias) estão representados pela Tabela 22.

Tabela 21 - Ganhos de peso em kg no período de 252 dias, no experimento com suínos.

Linhas	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Totais
Leitegada (1)	^A 93,0	^B 108,6	^C 108,9	^D 102,0	412,5
Leitegada (2)	^B 115,4	^D 96,5	^A 77,9	^C 100,2	390,0
Leitegada (3)	^C 102,1	^A 94,9	^D 116,9	^B 96,0	409,9
Leitegada (4)	^D 117,6	^C 114,1	^B 118,7	^A 97,6	448,0
Totais de Colunas	428,1	414,1	422,4	395,8	1660,4

Fonte: KALIL, E. B. (1974).

A análise de variância, pelo método clássico conduziu aos resultados apresentados na Tabela 22.

Tabela 22 - Análise da Variância.

Estrato	GL	SQ	QM	F
Colunas	3	148,95	49,65	0,72
Linhas	3	436,55	145,52	2,11
Tratamentos	3	913,57	304,52	4,42
Resíduo	6	413,00	68,83	
TOTAL	15	1912,07		

Fonte: KALIL, E. B. (1974).

Os valores de F não são significativos, pois o valor tabelado, com 3 e 8 graus de liberdade ao nível de 5% de probabilidade é igual a 4,75.

Apresenta-se agora, a análise da variância considerando a análise de dados estruturados.

Neste exemplo, as variáveis que definem a estrutura de blocos, são as quatro épocas de castração de suínos (A,B,C e D). O experimentador pode rotular a época, independentemente, usando para tal dois dígitos. Aqui, tem-se um cruzamento 4*4 (Quadrado Latino) e o esquema será dado por:

11 93,0	21 108,6	31 108,9	41 102,0
12 115,4	22 96,5	32 77,9	42 100,2
13 102,1	23 94,9	33 116,9	43 96,0
14 117,6	24 114,1	34 118,7	44 97,6

E.B.: cruzamento de 4 linhas com 4 colunas

Índices: I = {11,12,13,14,...,41,42,43,44}

Notação: 4*4

Os estratos relevantes na análise são:

M, (L - MD), (B, MD) e (D - L - B + MD), com os operadores M, (L - MD), (C - MD) e (I - L - C + MD) respectivamente. A

decomposição do vetor de respostas segundo a estrutura de blocos é dada por:

$$y = My + (L - My + (C - My + (I - L - C + My$$

Neste exemplo, o vetor de respostas e os operadores aplicados nele, são dados por:

$$y = \begin{bmatrix} 93,0 \\ 108,8 \\ 108,9 \\ 102,0 \\ \text{-----} \\ 115,4 \\ 96,5 \\ 77,9 \\ 100,2 \\ \text{-----} \\ 102,1 \\ 94,9 \\ 116,9 \\ 96,0 \\ \text{-----} \\ 117,6 \\ 114,1 \\ 118,7 \\ 97,6 \end{bmatrix}, \quad My = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1660,4 \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ \text{-----} \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ \text{-----} \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ \text{-----} \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ 1660,4 \\ 1660,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \\ \text{-----} \\ 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \\ \text{-----} \\ 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \\ \text{-----} \\ 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 412,5 \\ 412,5 \\ 412,5 \\ 412,5 \\ \hline 390,0 \\ 390,0 \\ 390,0 \\ 390,0 \\ \hline 409,9 \\ 409,9 \\ 409,9 \\ 409,9 \\ \hline 448,0 \\ 448,0 \\ 448,0 \\ 448,0 \end{bmatrix}_{16} = \begin{bmatrix} 103,125 \\ 103,125 \\ 103,125 \\ 103,125 \\ \hline 97,5 \\ 97,5 \\ 97,5 \\ 97,5 \\ \hline 102,475 \\ 102,475 \\ 102,475 \\ 102,475 \\ \hline 112,0 \\ 112,0 \\ 112,0 \\ 112,0 \end{bmatrix}_{16} ; (L-M)y = \begin{bmatrix} 103,125-103,775 \\ 103,125-103,775 \\ 103,125-103,775 \\ 103,125-103,775 \\ \hline 97,5-103,775 \\ 97,5-103,775 \\ 97,5-103,775 \\ 97,5-103,775 \\ \hline 102,475-103,775 \\ 102,475-103,775 \\ 102,475-103,775 \\ 102,475-103,775 \\ \hline 112,000-103,775 \\ 112,000-103,775 \\ 112,000-103,775 \\ 112,000-103,775 \end{bmatrix}_{16} = \begin{bmatrix} -0,65 \\ -0,65 \\ -0,65 \\ -0,65 \\ \hline -6,275 \\ -6,275 \\ -6,275 \\ -6,275 \\ \hline -1,3 \\ -1,3 \\ -1,3 \\ -1,3 \\ \hline 8,225 \\ 8,225 \\ 8,225 \\ 8,225 \end{bmatrix}_{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 428,1 \\ 414,1 \\ 422,4 \\ 395,8 \\ \hline 428,1 \\ 414,1 \\ 422,4 \\ 395,8 \\ \hline 428,1 \\ 414,1 \\ 422,4 \\ 395,8 \end{bmatrix}_{16} = \begin{bmatrix} 107,025 \\ 103,525 \\ 105,6 \\ 98,95 \\ \hline 107,025 \\ 103,525 \\ 105,6 \\ 98,95 \\ \hline 107,025 \\ 103,525 \\ 105,6 \\ 98,95 \end{bmatrix}_{16} ; (C-M)y = \begin{bmatrix} 107,025-103,775 \\ 103,525-103,775 \\ 105,6-103,775 \\ 98,95-103,775 \\ \hline 107,025-103,775 \\ 103,525-103,775 \\ 105,6-103,775 \\ 98,95-103,775 \\ \hline 107,025-103,775 \\ 103,525-103,775 \\ 105,6-103,775 \\ 98,95-103,775 \end{bmatrix}_{16} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ -0,25 \\ 1,825 \\ -4,825 \\ \hline 3,25 \\ -0,25 \\ 1,825 \\ -4,825 \\ \hline 3,25 \\ -0,25 \\ 1,825 \\ -4,825 \end{bmatrix}_{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{bmatrix} 93,0-103,125-107,025-103,775 \\ 108,6-103,125-103,525-103,775 \\ 108,9-103,125-105,6-103,775 \\ 102,0-103,125-98,95-103,775 \\ \hline 115,4-97,5-107,025-103,775 \\ 96,5-97,5-103,525-103,775 \\ 77,9-97,5-105,6-103,775 \\ 100,2-97,5-98,95-103,775 \\ \hline 102,1-102,475-107,025-103,775 \\ 94,9-102,475-103,525-103,775 \\ 116,9-102,475-105,6-103,775 \\ 96,0-102,475-98,95-103,775 \\ \hline 117,6-112,0-107,025-103,775 \\ 114,1-112,0-103,525-103,775 \\ 118,7-112,0-105,6-103,775 \\ 97,6-112,0-98,95-103,775 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -13,375 \\ 5,725 \\ 3,95 \\ 3,7 \\ \hline 14,85 \\ -0,75 \\ -21,425 \\ 7,525 \\ \hline -3,625 \\ -7,325 \\ 12,6 \\ -1,65 \\ \hline 2,35 \\ 2,35 \\ 4,875 \\ -9,575 \end{bmatrix} \\
 \text{CI-L-C+MDy} = & &
 \end{array}$$

$$\| \text{CI} - \text{L} - \text{C} + \text{MDy} \|^2 = 1326,57$$

A decomposição do vetor de respostas, segundo a estrutura de blocos, é dada por:

$$y = My + (L-M)y + (C-M)y + (CI-L-C+MD)y$$

93,0	103,775	-0,85	3,25	-13,375
108,8	103,775	-0,85	-0,25	5,725
108,9	103,775	-0,85	1,825	3,95
102,0	103,775	-0,85	-4,825	3,7
115,4	103,775	-8,275	3,25	14,65
96,5	103,775	-8,275	-0,25	-0,75
77,9	103,775	-8,275	1,825	-21,425
100,2	103,775	-8,275	-4,825	7,525
102,1	103,775	-1,3	3,25	-3,625
94,9	103,775	-1,3	-0,25	-7,325
116,9	103,775	-1,3	1,825	12,6
96,0	103,775	-1,3	-4,825	-1,65
117,6	103,775	8,225	3,25	2,35
114,1	103,775	8,225	-0,25	2,35
118,7	103,775	8,225	1,825	4,875
97,6	103,775	8,225	-4,825	-9,575

Usando a ortogonalidade dos operadores,
obtem-se a partição para a norma:

$$\|y\|^2 = \|My\|^2 + \|CL-My\|^2 + \|CC-My\|^2 + \|CI-L-C+My\|^2$$

onde:

$$\|y\|^2 = 174220,08$$

$$\|My\|^2 = 172308,0098$$

$$\|CL-My\|^2 = 436,555$$

$$\|CC-My\|^2 = 148,945$$

$$\|CI-L-C+My\|^2 = 1326,57$$

A análise da variância nula é dada pela Tabela 23.

Tabela 23 - Análise de Variância Nula

Estrato	GL	SQ	QM	ECQM
M	1	172308,0098	172308,0098	ξ_0
$E-M$	3	148,945	49,8483	ξ_1
$X-M$	3	436,555	145,5183	ξ_2
$X*E$	6	1326,57	147,3967	ξ_3
D	15	174220,08		

Neste exemplo, a estrutura de tratamentos é 4, decomposição do subespaço de tratamento com dimensão 4, no caso é:

$$U = M \oplus (U - M)$$

A decomposição, no espaço isomorfo reduzido é dada por:

$$\begin{array}{l}
 U_u \\
 \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \end{array}
 \begin{bmatrix} 90,85 \\ 109,675 \\ 106,325 \\ 108,25 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 M_u \\
 \begin{bmatrix} 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \\ 103,775 \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{l}
 (U-M)_u \\
 \begin{bmatrix} -12,925 \\ 5,9 \\ 2,55 \\ 4,475 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

onde:

$u_1 = 90,85$ é a média do tratamento A

$u_2 = 109,675$ é a média do tratamento B

$u_3 = 106,325$ é a média do tratamento C

$u_4 = 108,25$ é a média do tratamento D

O espaço de tratamento $\mathcal{U}$ é um subespaço do espaço $\mathcal{D}$. Trabalha-se num espaço reduzido com número de componentes igual a dimensão do espaço $\mathcal{U}$, ou seja $\dim \mathcal{U} = 4$.

Como a dimensão do espaço reduzido de tratamentos é independente do número de replicações de cada tratamento, a base para esse espaço é constituída do vetor média e mais 3 vetores que representam cada um dos contrastes de interesse. Assim, o quadro abaixo, poderá representar uma base para $\mathcal{U}$ no espaço reduzido.

$$\left. \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ + & + & + & + \\ + & - & & \\ + & + & -2 & \\ + & + & + & -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{M} \\ \mathcal{U} - \mathcal{M} \end{array} \right\} \mathcal{U}$$

Retomando o espaço $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{16}$, onde a estrutura de blocos é um cruzamento 4×4 e a de tratamento é de 4, repetidas 4 vezes cada, ou seja:

11	A	21	B	31	C	41	D
12	B	22	D	32	A	42	C
13	C	23	A	33	D	43	B
14	D	24	C	34	B	44	A

A matriz de incidência é dada por:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 21 & 22 & 23 & 24 & 31 & 32 & 33 & 34 & 41 & 42 & 43 & 44 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Os contrastes mais o vetor média de $D=\mathbb{R}^{16}$, definindo os estratos estão na Tabela 24.

Tabela 24 - Decomposição do espaço de tratamentos em contrastes e vetor média, referentes ao experimento com suínos.

U.	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44	t	S
T.	A	B	C	D	B	D	A	C	C	A	D	B	D	C	B	A	média	$\bar{M}$
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	erro	
	+	-			+	-			+	-			+	-			erro	$\bar{C}-\bar{M}$
	+	+	-2		+	+	-2		+	+	-2		+	+	-2		erro	
	+	+	+	-3	+	+	+	-3	+	+	+	-3	+	+	+	-3	erro	
	+	+	+	+	-	-	-	-									erro	
	+	+	+	+	+	+	+	+	-2	-2	-2	-2					erro	$\bar{L}-\bar{M}$
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-3	-3	-3	-3	erro	
	+	-			-		+			+		-			-	+	A.B	
	+	-			+		-			+		-			+	-	erro	
	+	-			-		+			-		+			+	-	erro	
	+	+	-2		+		+	-2	-2	+		+		-2	+	+	AB.C	$\bar{L}*\bar{C}$
	+	+	-2		-		-	2	2	-		-		-2	+	+	erro	
	+	+	-2		+		+	-2	2	-		-		2	-	-	erro	
	+	+	+	-3	+	-3	+	+	+	+	-3	+	-3	+	+	+	ABC.D	
	+	+	+	-3	-	+	-	-	-	-	3	-	-3	+	+	+	erro	
	+	+	+	-3	+	-3	+	+	-	-	3	-	3	-	-	-	erro	

Nota-se que o espaço de tratamentos $\mathcal{T}$ está todo contido no estrato $(\mathcal{L}*\mathcal{B})$, isto é, toda a informação sobre $\mathcal{T}$ está contida em $(\mathcal{L}*\mathcal{B})$.

A tabela de Fisher neste caso é dada pela Tabela 25.

Tabela 25 - Tabela Fisher

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{B}-\mathcal{M}$	$\mathcal{L}-\mathcal{M}$	$\mathcal{L}*\mathcal{B}$
$\mathcal{M}$	1	0	0	0
$\mathcal{T}-\mathcal{M}$	0	0	0	1

Análise Global

Cálculo para montar o Quadro da análise da variância:

$$\|S_{\alpha}y\|^2 = \|(I-L-C+M)y\|^2 = 1326,57$$

$$S_{\alpha}^{\hat{\tau}} = \frac{1}{\lambda} T(I-L-C+M)y \stackrel{\lambda=1}{=} T(I-L-C+M)y =$$

$$= \begin{bmatrix} 90,85 & -103,775 \\ 109,675 & -103,775 \\ 106,325 & -103,775 \\ 108,255 & -103,775 \\ \hline 90,85 & -103,775 \\ 109,675 & -103,775 \\ 106,325 & -103,775 \\ 108,255 & -103,775 \\ \hline 90,85 & -103,775 \\ 109,675 & -103,775 \\ 106,325 & -103,775 \\ 108,255 & -103,775 \\ \hline 90,85 & -103,775 \\ 109,675 & -103,775 \\ 106,325 & -103,775 \\ 108,255 & -103,775 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,925 \\ 5,9 \\ 2,55 \\ 4,475 \\ \hline -12,925 \\ 5,9 \\ 2,55 \\ 4,475 \\ \hline -12,925 \\ 5,9 \\ 2,55 \\ 4,475 \\ \hline -12,925 \\ 5,9 \\ 2,55 \\ 4,475 \end{bmatrix}$$

$$\|S_{\alpha}^{\hat{\tau}}\|^2 = 913,575$$

$$\text{erro} = \|S_{\alpha}y\|^2 - \|S_{\alpha}^{\hat{\tau}}\|^2 = 1326,57 - 913,575 = 412,995$$

A análise da variância é dada pela Tabela 26.

Tabela 26 - Análise da variância para dados estruturados.

Estrato	Fonte	GL	SQ	QM	F
X*8	T-M (Tratamento)	4-1=3	913,575	304,525	4,42
	erro	6	412,995	68,83	
X*8	total	9	1326,57		

Pode-se concluir que não houve diferença significativa ao nível de 5%, na época de castração dos suínos e observa-se que a análise da variância clássica coincidiu com a análise da variância elaborada com dados estruturados, isto porque foi considerado como E.T. um esquema inteiramente casualizado.

5. CONCLUSÕES

Considerando-se o objetivo deste trabalho julgou-se necessário que as conclusões se dessem confrontando os resultados que foram obtidos ao analisar os exemplos apresentados através das duas análises de variâncias, ou seja, a análise de variância clássica e a análise de variância levando em conta uma estrutura de blocos e uma estrutura de tratamentos.

Assim, pode-se chegar ao seguinte:

1. A coincidência observada nos resultados obtidos através das duas análises apresentadas em cada exemplo, foi devido ao fato de que na análise clássica se faz um sorteio aleatório dos tratamentos, o que induz a uma estrutura de tratamentos com um esquema inteiramente casualizado.
2. Quando se considera um esquema de estrutura de tratamentos diferente da inteiramente casualizada, observa-se que a análise obtida é mais detalhada fornecendo assim, informações que através da análise clássica não são possíveis de se obter.
3. A teoria que envolve dados estruturados é basicamente voltada à Álgebra Linear e devido a esse fato, utili-

za-se uma notação mais sofisticada, tornando-a aparentemente difícil de ser entendida. Entretanto, o que ocorre na prática, é justamente ao contrário, pois os cálculos utilizados para elaborar uma análise de variância levando-se em conta a estrutura de blocos e a estrutura de tratamentos, são mais simples que os utilizados na análise clássica pois envolvem apenas médias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BELTRÃO, K.I. & PESSOA, D.G.C. *Análise de dados estruturados*. Rio de Janeiro., IMPA, 1988. 166 p.
- BELTRÃO, K.I. & PINHEIRO, J.C.R.C. *Análise de dados estruturados*. Lavras, ESAL, 1989. 44 p.
- BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.F.F.; WETZLER, H.G. *Álgebra linear*. 2.ed. São Paulo, Harper & Row do Brasil, 1980. 372 p.
- BUSSAB, W.O. *Análise de variância e regressão*. São Paulo. Atual, 1986. 147 p.
- CAMPOS, H. *Estatística aplicada à experimentação com cana-de-açúcar*. Piracicaba, FEALQ, 1984. 292p.
- COCHRAN, W.G. & COX, G.M. *Experimental designs*. 2.ed. New York, John Wiley, 1957. 811 p.
- FISHER, R.A. *The design of experiments*. Edinburg, Oliver and Boyd, 1935. 252p.
- GOMES, F.P. *Curso de estatística experimental*. 11.ed. Piracicaba, Nobel, 1985. 466 p.

- HOFFMANN, K. & KUNZE, R. Álgebra linear. São Paulo, Polígono, 1970. 354 p.
- IEMMA, A.F. Modelos lineares; uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária. Londrina, UEL/Depto. Matemática Aplicada, 1987. 263 p.
- KALIL, E.B. Princípios de técnica experimental com animais. Piracicaba, ESALQ/Depto. de Nutrição Animal e Pastagens, 1974. 209 p.
- NAIR, K.R. & RAO, C.R. Confounding in assymetrical factorial experiments. Journal of the Royal Statistical Society, London, B, 10: 109-31, 1948.
- NELDER, J.A. The analysis of randomized experiments with orthogonal block structure. I. Block structure and the null analysis of variance. Proceedings of the Royal Society, London, Sér. A, 273: 147-62, 1965a.
- NELDER, J.A. The analysis of randomized experiments with orthogonal block structure. II. Treatment structure and the general analysis of variance. Proceeding of the Royal Society, London, Sér. A, 273: 163-78, 1965b.
- NELDER, J.A. The combination of information in generally balanced designs. Journal of the Royal Statistical Society, London. Sér. B, 30: 301-11, 1968.
- PINHEIRO, J.C.R.C. Um algoritmo para análise de experimentos planejados. Rio de Janeiro, IMPA/CNPq, 1985. 119 p. (Informes de Matemática. Sér. D-019)

SPEED, T.P. Lectures on the analysis of designed and comparative experiments. Princeton, Princeton University/Statistics Department, 1978. 171 p. (Course, 585).