ESTIMABILIDADE EM DELINEAMENTOS DESCONEXOS

MARTIN FELICIANO MEDINA VOLCA

Dissertacao apresentada Escola
Superior de Agricultura "Luiz de
Queiroz" da Universidade de Sao
Paulo, para obtencao do Titulo
de Mestre em Agronomia. Area de
Concentracao: Estatistica e Ex-
perimentacao Agronomica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Novembro - 1990

ESTIMABILIDADE EM DELINEAMENTOS DESCONEXOS

MARTIN FELICIANO MEDINA VOLCA

Orientador: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

Dissertacao apresentada Escola
Superior de Agricultura "Luiz de
Queiroz" da Universidade de Sao
Paulo, para obtencao do Titulo
de Mestre em Agronomia. Area de
Concentracao: Estatistica e Ex-
perimentacao Agronomica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Novembro - 1990

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Livros da
Divisão de Biblioteca e Documentação - PCAP/USP

Medina Vilca, Martin Feliciano
M491e Estimabilidade em delineamentos desconexos. Pi-
racicaba, 1990.
125p.

Diss. (Mestre) - ESALQ
Bibliografia.

1. Delineamento de experimento - Estimativa 2. Es-
tatística agrícola 3. Modelo matemático I. Escola Su-
perior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba.

CDD 630.219

ESTIMABILIDADE EM DELINEAMENTOS DESCONEXOS

MARTIN FELICIANO MEDINA VILCA

Aprovada em: 17.12.1990

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Décio Barbin ESALQ/USP

Prof. Dr. Dilermando Perecin UNESP/JABOTICABAL

Prof. Dr. Francisco Vivaldo da Cruz ESALQ/USP

PROF. DR. DÉCIO BARBIN

Substituindo Orientador

PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

Ao Altíssimo por conceder-me

uma vida abundante

DEDICO

A minha mãe (in memoriam)

A meu Pai e Irmãos

OFEREÇO

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Antonio Francisco Iemma, Professor Associado do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, pela gentileza e sensibilidade na sugestão do assunto, orientação e apoio no decorrer dos estudos, para elaboração deste trabalho.

Ao Dr. Humberto de Campos Diretor da ESALQ e Prof. Titular do Departamento de Matemática e Estatística, pelo incondicional apoio e constante estímulo na minha permanência neste centro de estudos.

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agrônoma da ESALQ/USP, na pessoa de seu coordenador e muito amigo pessoal Prof. Dr. Décio Barbin pela compreensão, receptividade e estímulos nos ensinamentos.

Ao Dr. Manuel Zeballos Vera, Ex-rector da Universidade Nacional São Agostinho, pelo valioso apoio incommensurável e oportunidade concedida para a realização do curso.

Ao Departamento de Matemática e Estatística e faculdade de Ciências Naturais e Formais pela licença concedida.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida.

A Gabriel Andrian Sarries pelo apoio incondicional na elaboração deste trabalho.

A Maria Izalina Ferreira Alves pela amizade e constante estímulo na continuidade destes estudos.

Ao Prof. José Nivaldo Garcia do Departamento de Engenharia de Ciências Florestais pela amizade e estímulo na realização deste trabalho, assim também a Luiz Eduardo Facão, funcionário do mesmo Departamento.

Ao Prof. Sergio Duarte do Nascimento do Departamento de Irrigação e Drenagem pelas sugestões na redação do trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP, por sua simpatia e cooperação oferecidas, nas pessoas de Luciane Bajão e Rosa Maria Alves.

Aos colegas do curso de Pós-Graduação, pela vivência, amizade e colaboração incondicionais.

Aos funcionários do Departamento de Economia em particular a Alice da Silva Cipriano, Luciane Cristina Martineli e Maria Angélica Amador Funaro.

A todos aqueles que contribuíram na realização deste trabalho.

ÍNDICE

	Página
RESUMO	viii.
SUMMARY	xi.
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
2.1. Introdução	3
2.2. Blocos Casualizados	8
2.2.1. Caracterização	9
2.2.2. Equações normais	10
2.3. Blocos Incompletos	11
2.3.1. Classificação dos BIB	13
2.3.2. O Modelo Linear	15
2.3.3. Eficiência	17
2.4. Delineamentos em Blocos Incompletos Parcial- mente Balanceados	20
2.5. Equações Normais Reduzidas	23
2.6. Estimabilidade	27
2.6.1. Caracterização	27
2.6.2. O Método dos Mínimos Quadrados	28
2.6.3. BLUE (Melhor Estimador Linear Não Vie- sado)	32
2.7. Influência dos Efeitos Fixos e Aleatórios na Estimação de Parcelas	33
2.7.1. Conceituação	33
2.7.2. Caso em que os dois fatores são fixos .	34

	Página
2.7.3. Blocos Aleatórios e Tratamentos Fixos .	36
2.7.4. Caso em que Ambos fatores são Aleató- rios	39
3. METODOLOGIA	41
3.1. Conectividade	41
3.1.1. Conceito de conectividade	41
3.1.2. Definições e teoremas	42
3.2. Modelos de Médias	44
3.2.1. Conectividade em modelo de médias	44
3.2.2. Exemplo do modelo de Graybill	46
3.2.3. Modelo de médias simplificado	47
3.2.4. Testes de hipóteses	51
3.2.5. Modelos conectados	53
3.2.5.1. Conceituação	53
3.2.5.2. Exemplo aplicativo	54
3.2.6. Modelo de médias e algoritmo geométrico apresentado por Searle	55
3.2.6.1. Conceituação	56
3.2.6.2. Um exemplo gráfico	56
3.2.7. Modelo de médias de efeitos fixos de Hocking	59
3.2.7.1. Modelo reduzido	61
3.2.7.2. Modelo efetivo	63
3.2.7.3. Exemplo de modelo reduzido de médias de HOCKING	65

3.3. O Modelo Aditivo de Classificação de Dois Fatores de Efeitos Fixos Sem Interação ou Modelo de DODGE (1985)	73
3.3.1. Conceituação	73
3.3.2. O processo R	79
3.3.3. Um processo alternativo	81
3.3.4. Exemplo modelo	82
3.3.5. Análise de variância	87
3.3.6. Cálculo da soma de quadrados de regressão ajustados para as diferentes fontes de variação	88
3.3.6.1. Exemplo 2	90
4. EXEMPLOS APLICATIVOS EM DELINEAMENTOS DE DOIS FATORES	94
4.1. Delineamento em Blocos Incompletos	94
4.2. Modelo de Médias	94
5. CONCLUSÕES	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	116

ESTIMABILIDADE EM DELINEAMENTOS DESCONEXOS

Autor: MARTIN FELICIANO MEDINA VILCA

Orientador: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

RESUMO

O presente trabalho aborda estudos desenvolvidos sobre o tema de desconexão, como uma forma de determinar funções paramétricas estimáveis, mediante a obtenção de contrastes em delineamentos de dois fatores, quando acontece perda de observações.

Com esse objetivo, apresentam-se os critérios mais importantes desenvolvidos na teoria de conectividade, bem como três dos mais usados algoritmos na detecção de conectividade.

O modelo efetivo de médias apresentado por HOCKING (1985), o qual restringe o número dos parâmetros, é dado pela combinação das suas médias. Neste modelo as médias das parcelas perdidas são dadas por μ_m e μ_o , respectivamente. Através de um processo de redução de linhas e reordenamento respectivo na matriz de restrição G, no modelo reduzido, são eliminadas do modelo as médias das parcelas perdidas μ_m . Estas parcelas são representadas mediante contrastes em

função das parcelas conhecidas, determinando-se deste modo, a conexão ou desconexão do delineamento.

O uso do algoritmo apresentado por DODGE (1985), conhecido como "Processo R", na situação de perda de parcelas considera-se a matriz de "Incidência N" a qual permite, por um processo iterativo, a obtenção da matriz final M que determina que parcelas são estimáveis.

Mediante a determinação do triângulo contador, são obtidos os contrastes estimáveis, tanto para o fator α , como o fator β . Obtidas as dimensões dos fatores α e β , determina-se as bases dos contrastes estimáveis, obtendo-se o "posto da matriz X", e por conseguinte, os graus de liberdade para cada fator. Deste modo, é estruturado o quadro de Análise de Variância.

Englobando estes dois procedimentos, utiliza-se alternativamente o método gráfico, como um instrumento de verificação dos resultados obtidos pelos dois algoritmos citados. Como corolário, são apresentados dois casos de delineamentos desconexos, e analisados pelos dois algoritmos, obtendo-se resultados semelhantes.

Tendo em vista os estudos realizados, estabeleceram-se dentre outras as seguintes conclusões:

- O estabelecimento de contrastes ortogonais entre os níveis de cada fator é uma alternativa eficiente para se estimar a perda de parcelas, prestando uma valiosa contribuição na análise de variância e proporcionando os graus de liberdade para cada efeito.

- O modelo efetivo de médias determina as estimativas dos contrastes das parcelas não observadas em função das parcelas observadas, que são vistas na partição final da matriz de restrição G .
- O modelo efetivo de médias permite observar a estrutura de conexão do delineamento de forma transparente, contribuindo na compreensão dos problemas de conexão e estimabilidade de funções estimáveis. Essa metodologia poderia ser utilizada com finalidade didática.
- O processo R é mais operante e funcional, atuando com sucesso nos casos de grande quantidade de dados, em relação ao modelo efetivo de médias, que emprega maior número de passos e tempo de operação.

ESTIMABILITY IN DISCONNECTEDNESS DESIGNS

Author: MARTIN FELICIANO MEDINA VILCA

Adviser: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

SUMMARY

In the present work current literature about the theory of desconnection is shown as mean to determine parametric functions estimability by contrasts in two factors design, with missing data.

Whith this purpose, the main facts abound desconnection theory were studied as well as three of the most used algorithmy for detect connectedness.

The means effective model presented by HOCKING (1985), that restrained the numbers of parameters, is given by combinations of their respective means. In this model the means of parcels missing and of the parcels present are given for μ_m e μ_o , respectively. The means of the missing parcels μ_m are eliminated from the model by a reduction rows process and reorganized respectively in the G restric matrix in the reduced model. These parcels are represented by contrast in function of know parcels, determinating by this way the connectivity or desconnectedness of the design.

The use of the algorithmy presented by DODGE (1985), namely the "R Process", in case of missing cells, considerate the incident "matrix N" which enables the obtainment of the matrix M by a iterative process. This last matrix determinate which parcels are estimable.

The estimable contrasts are obtained, as for factor α as for factor β , by the determination of the triangle counter. After obtaining factors α and β dimensions, contrasts bases estimability are determined and the rank of the design matrix X is obtained, wich lead to the determination of the grees of freedom for each factor. From this mode, the variance analise "Tableu" is conformed.

Including these two proceedings, the grafic method is used alternatively as a instrument of verification of the results obtained by the two cited algorithmy. To check the proceeding two cases of desconnected design are presented and analised by each algorithmy, obtaining the same result.

The analysis of the results lead to the following conclusions:

- Ortogonal contrasts establishment between each fator level is a efficient alternative for missing parcels estimative, leading to a valuable contribution to the variance analise and giving the grees of freedom needed for each factor.

- The effect model in means determinate the contrasts estimabilities of no the observed parcels in function of the observed parcels, which are obtained in the final G restric matrix partition.
- The effect model in means permit obtaining the connectedness design structure in a transparent form, contributing to the connectedness problems comprehension and to the estimate functions estimability. This methodology can be used with didact purpose.
- The "R Process" is easier to opperate, working very well in cases of great number of data, in comparison with the effective model in means, which needs a great number of passes and time of operation.

1. INTRODUÇÃO

A perda de parcelas nos delineamentos em blocos, especialmente nos blocos incompletos (balanceados ou parcialmente balanceados) acarreta, em determinadas situações, há impossibilidade de se estimar certas combinações lineares dos parâmetros do modelo correspondente. Essa situação caracteriza um delineamento desconexo, ou não conectado.

Dentre as funções lineares paramétricas, as de maior interesse prático são, em geral, os contrastes entre efeitos de tratamentos. Assim torna-se importante a disponibilidade de algoritmos eficientes que permitam evidenciar, num delineamento experimental desconexo, quais dessas funções lineares são estimáveis e quais são os grupos de conexão do delineamento.

Um outro inconveniente em caso de perda de conexão é a dificuldade de se identificar o número de graus de liberdade de tratamentos ajustados para blocos e para a média, que em geral não são calculados subtraindo-se uma unidade do número de tratamentos, como é usual nos delineamentos conexos (balanceados ou não).

Existem algoritmos que permitem estudar a estimabilidade de funções lineares paramétricas baseados em

processos matriciais, em geral muito onerosos em termos de memória e tempo de computação.

Por outro lado a revisão bibliográfica evidencia a ausência de publicações sobre o tema, direcionadas para os verdadeiros e reais interessados, isto é, direcionadas aos usuários das ciências aplicadas.

Nesse contexto, aflora como um dos objetivos deste trabalho, dissertar sobre o problema da desconexão de modo prático e direto, possibilitando, tanto quanto possível a fixação e a divulgação dos conceitos envolvidos entre os leitores das ciências aplicadas.

Para tanto, optou-se por abordar os delineamentos de classificação dupla, por considerar-se que eles constituem um excelente recurso didático e por entender-se que a partir daí as generalizações são muitas vezes imediatas. Sob essa filosofia são abordados vários modelos lineares como os superparametrizados e os de médias de caselas, dentre outros, naturalmente são exaustivamente exemplificados.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1. Introdução

É freqüente, mesmo em bons planejamentos experimentais a perda de observações por diversas causas tais como acidentes, pestes, ausência do paciente, morte dentre outras, determinando desbalanceamento dos dados, especialmente em casos de delineamentos em blocos incompletos.

O estudo dos delineamentos com perda de parcelas têm sido considerado a várias décadas. Segundo Allan & Wishart citado por YATES (1933) foram os primeiros em abordar este problema no ano de 1930 (ver também Tocher, 1952). Eles fornecem duas fórmulas para estimar o valor de uma observação perdida em delineamentos em blocos casualizados e quadrados latinos. Assim, considerando y como o rendimento dependendo do fator bloco b e do fator tratamento t pode-se expressar esta relação funcional como $y = b_i + t_j + k$ onde k é uma constante, e representa a produção de uma parcela perdida minimizando:

$$\sum_{i,j}^{ns-1} (y - b_i - t_j - k)^2$$

sob b_i , t_j e k , tem-se

$$k = \frac{(n + s - 1)S - sS_t - nS_b}{(n - 1)(S - 1)}$$

onde:

s é o número de tratamentos;

n é o número de blocos;

S soma de $ns-1$ parcelas;

S_b é a soma total de blocos sem os blocos com perda de parcela;

S_t é a soma total de tratamentos sem as parcelas perdidas.

YATES (1933) aplica o critério de estimativas de observações perdidas mediante a minimização de Soma de Quadrados dos resíduos. Esse critério é recomendado posteriormente por TEDERCY (1955), COCHRAN & COX (1957), JOHN (1971), TAYLOR (1948), NELDER (1954), NORTON (1955) e THOMPSON (1956).

Se existir mais de uma observação perdida YATES (1933) recomendou o uso da fórmula para o valor perdido iterativamente, começando com um valor suposto para a parcela perdida, as iterações continuam até que os resíduos nas parcelas sejam desprezíveis.

É importante ressaltar o fato que YATES (1933) apresenta um modelo linear

$$y = X\theta + \varepsilon$$

onde:

y é o vetor de $n \neq 1$ observações;

X é a matriz do delineamento $n \times p$ de posto r ,

θ é o vetor dos parâmetros desconhecidos e

ε é o vetor dos elementos não observáveis e distribuídos independentemente com média zero e variância σ^2 .

Com o objetivo de minimizar as observações perdidas, YATES (1933) particiona a expressão inicial do modelo.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

considerando m como o número de observações perdidas e n o total de observações, de modo que y_2 (de dimensão $m \times 1$) é o vetor de observações perdidas e y_1 (de dimensão $n \times 1$) é o vetor de observações presentes. Assim a soma de quadrados dos resíduos fica:

$$\begin{aligned} S(\theta, y_2) &= (y - X\theta)'(y - X\theta) \\ &= \|y_1 - X_1\theta\|^2 + \|y_2 - X_2\theta\|^2 \\ &= S_1(\theta) + S_2(y_2, \theta) \end{aligned}$$

então é possível minimizar a soma de quadrados do resíduo com respeito aos parâmetros θ e y_2 obtendo-se primeiramente a solução para θ como se não existissem observações perdidas e dizer tanto, no processo de obter o estimador $\hat{\theta}$ como na solução de mínimos quadrados do resíduo são funções de y .

CORNISH (1940) estendeu o método de YATES (1933) para cobrir um amplo espectro de delineamentos experimentais.

HEALY & WESTMACOTT (1956) propuseram um método iterativo para estimativas de observações perdidas.

HARTLEY (1956) apresentou uma técnica para estimar quando existir apenas uma observação perdida.

BARTHELL (1937) apontou um procedimento não iterativo, alternativo no caso de observações perdidas, completando os dados com o valor zero nas m observações perdidas e confirmou que seu método era similar ao método de YATES (1933).

TOCHER (1952) propôs um modelo de análise padrão baseado no uso da notação matricial a partir da qual as observações perdidas são estimadas e corrigidas.

WILKINSON (1958) baseado no modelo particionado de YATES (1933) o qual admite perdas de observações apresenta uma fórmula explícita para delineamentos padrões e prova que a expressão $y_2 = X_2 \theta$ é estimável sendo que y_2 corresponde as observações perdidas, fato que indica $\hat{y}_2 = X_2 \hat{\theta}$, esta expressão é chamada solução de mínimos quadrados para $\hat{y}_2$. É importante ressaltar que se o posto de X_1 é igual ao posto de X então a restrição imposta a θ é suficiente para garantir a unicidade de $\hat{\theta}$ unicamente no caso em que o delineamento da matriz X é de posto máximo. Assim por minimização da soma de quadrados do resíduo com respeito aos parâmetros não conhecidos θ e os valores não conhecidos y_2 , após o processo se tem

$$[I - X_2 (X'X)^{-1} X_2'] \hat{y}_2 = X_2 (X'X)^{-1} X_1' y_1 \quad [2.1]$$

o que implica que a esperança dos valores perdidos é

$$E(\hat{y}_2) = R^{-1} X_2 (X'X)^{-1} X_1' \hat{y}_1 \text{ onde } R = [I - X_2 (X'X)^{-1} X_2']$$

O citado autor observa que a coluna de ordem I da matriz do lado esquerdo [de 2.1] chamada matriz R é um vetor dos resíduos obtidos pela análise de um vetor de dados simulados com 1 na i -ésima observação perdida (de ordem 1) e zero nas outras parcelas; e do lado direito de [2.1] consiste nos menores resíduos ρ nas parcelas perdidas quando o dado observado y_1 é aumentado pelos valores fictícios, ou seja, zeros nas parcelas perdidas. Assim se m observações são perdidas em um delineamento experimental, pode-se proceder a uma série de $m+1$ análises padrão com vetores de dados inscrevendo os resíduos nas parcelas perdidas e resolvendo as equações

$$[R \hat{y}_2 = - \rho]$$

RUBIN (1972) apresentou um algoritmo simples baseado na análise de covariância o qual obtem-se a matriz R_{mxm} e o vetor ρ_{mx1} , onde m são as observações perdidas.

Assim mediante uma subrotina do algoritmo é possível encontrar-se uma matriz simétrica R_{mxm} . Entretanto se a matriz R for singular o método de Rubin não tem solução. Rubin acrescenta algumas ideias nas quais a matriz singular R corresponde a uma solução onde se tenta estimar um parâmetro para o qual não existem dados.

HASSEMAN & GAYLOR (1973) apresentaram um procedimento simples não iterativo para a obtenção de valores perdidos, resolvendo um conjunto de equações lineares simultâneas onde a matriz de delineamento deve ser "conectada". No caso de ausência de dados a matriz de coeficientes " R " é

singular onde R é a matriz dos resíduos; neste caso os valores perdidos podem ser estimados por aplicação de algoritmos dentro dos grupos de dados desconectados, levando-se em consideração o número de linhas e colunas. Os mesmos autores apresentaram um procedimento similar para o caso de estimação de valores perdidos numa classificação cruzada de p fatores.

JOHN (1980), ARTHANARE & DODGE (1981) estudaram as diferenças dos delineamentos em blocos incompletos utilizando a matriz de incidência " N ", obtendo-se nesse trabalho uma contribuição importante no desenvolvimento de algoritmos para detecção de conectividade.

Posteriormente LI (1982) apresentou um estudo de aproximação para conduzir a análise experimental de classificação dupla com dados não balanceados, através da solução de equações lineares simultâneas. Os métodos descritos de estimação de valores perdidos são somente uma solução parcial do problema, pois todos requerem a inclusão de uma matriz singular, quando o delineamento da matriz original X não é de posto máximo.

2.2. Blocos Casualizados

Trata-se de um modelo linear para experimentos com um fator e uma restrição na casualização. Em múltiplos experimentos quando a natureza do material experimental é heterogênea, é recomendável a formação de blocos com o obje-

tivo de reduzir a variação residual, agrupando o material experimental em blocos homogêneos.

2.2.1. Caracterização

O modelo linear que representa esse delineamento experimental apresentado por IEMMA (1987) é o seguinte:

$$y = X\theta + \varepsilon \quad \text{Gauss Markov Normal}$$

onde $_{bv}y_1$ é o vetor de realizações de variáveis aleatórias

$$y' = [y_{11}, \dots, y_{1v}; y_{21}, \dots, y_{2v}; \dots; y_{b1}, \dots, y_{bv}]$$

e $_{bv}X_{1+b+v}$ é a matriz conhecida do delineamento de posto

$$b + v - 1$$

$$X = \begin{bmatrix} \mu & \beta_1 & & \beta_b & t_1 & & t_v \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{bv \times 1+b+v}$$

$$= [X_1 \mid X_2 \mid X_3]$$

$_{1+b+v}\theta_1$ é um vetor de parâmetros desconhecidos

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \beta \\ \tau \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_b \end{bmatrix}; \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \dots \\ \tau_v \end{bmatrix}$$

$_{bv}\varepsilon_1$ é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis, tal que

$$e \sim N(\phi, I\sigma^2)$$

e cuja caracterização é $y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + e_{ij}$, onde $i = 1, 2, \dots, b$ blocos e $j = 1, 2, \dots, v$ tratamentos

y_{ij} é o valor observado na parcela do bloco i que recebeu o tratamento j

μ é uma constante inerente a todas as observações;

β_i é o efeito do bloco i

τ_j é o efeito do tratamento j

e_{ij} é o erro aleatório atribuído a observação y_{ij} , tal que $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ e posto $(X) = b + v - 1$

2.2.2. Equações normais

Em geral o sistema de equações normais em blocos casualizados dado por $XX'e^0 = X'y$, tem a forma:

$$\begin{bmatrix} bv & v & v & \dots & v & b & b & \dots & b \\ v & v & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ v & 0 & v & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v & 0 & 0 & \dots & v & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & 1 & 1 & \dots & 1 & b & 0 & \dots & 0 \\ b & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^0 \\ \beta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ \dots \\ \beta_b^0 \\ t_1^0 \\ t_2^0 \\ \dots \\ t_v^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_b \\ T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_v \end{bmatrix}$$

onde:

G é o total geral, B_i é o total observado no bloco i e

T_j é o total observado no tratamento j .

Deste modo é possível obter as soluções para as equações normais. Em geral, para o sistema sem restrições o vetor solução é dado por

$$e^{\circ} = (X'X)^{\circ} X'y$$

onde $(X'X)^{\circ}$ é uma inversa generalizada qualquer de $X'X$.

Sabendo-se que $\hat{y} = Py = Xe^{\circ}$ é invariante $\forall e^{\circ}$ solução das equações normais, obtém-se de maneira simples as somas de quadrados dos tratamentos; assim

$$SQT = SQPar + SQR$$

onde:

SQT é a soma de Quadrados devida à variação total;

SQPar é a soma de quadrados dos efeitos métodos os parâmetros;

SQRes é a soma de quadrados devida ao efeito dos fatores não controlados.

2.3. Blocos Incompletos

Por razões econômicas e de homogeneidade do material experimental muitas vezes não é possível a utilização de blocos que permitam a locação de todos os tratamentos (o número de unidades experimentais num bloco é menor que o número de tratamentos). Essa situação identifica os Delineamentos em Blocos Incompletos.

Esses delineamentos foram introduzidos por YATES (1936) quem generalizou o conceito dos ensaios em blocos e apresentou técnicas para análise de experimentos em blocos incompletos.

Autores como SCHEFFÉ (1959), CHAKRABARTI (1962), JOHN (1971), RAGHAVARAO (1971), GRAYBILL (1976), JOHN & QUENOUILLE (1977) e DAS & GHOSH (1985) consideram os ensaios em blocos incompletos balanceados (BIB) como aqueles obtidos por arranjos de v tratamentos aplicados nas parcelas dos b blocos de tamanhos

$$k_1, k_2, \dots, k_v$$

onde $(K < v)$ e sendo que o i -ésimo tratamento ocorre em r_i blocos, os tratamentos i, i' ocorrem juntos em $\lambda_{ii'}$ blocos onde

$$(\lambda < b), (i, i' = 1, 2, \dots, v; i \neq i').$$

Considere-se T_i como o rendimento total para o i -ésimo tratamento e B_j como o total produzido no j -ésimo bloco ($i = 1, 2, \dots, v; j = 1, 2, \dots, b$) e seja

$$T' = (T_1 + T_2 + \dots + T_v) \text{ e } B' = (B_1 + B_2 + \dots + B_b).$$

Define-se a matriz de Incidência $N = (n_{ij})$ de ordem $v \times b$ onde n_{ij} é o número de vezes que o i -ésimo tratamento ocorre no j -ésimo bloco.

Nos BIB observam-se as seguintes propriedades:

- i) O experimento consta de $\left\{ \begin{smallmatrix} v \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ pares de tratamentos e cada par ocorre em λ blocos;
- ii) Cada bloco tem $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ pares de tratamentos, assim em b blocos tem-se $b \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ pares de tratamentos. Desse modo

$$\lambda \left\{ \begin{smallmatrix} v \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = b \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$$

e então $v \lambda (v - 1) = bk (k - 1)$.

Além disso o número total de parcelas (n) pode ser obtido por bk ou rv . Assim a última expressão transforma-se em

$$\lambda (v - 1) = r (k - 1)$$

o que fornece uma condição de balanceamento e permite isolar λ ,

$$\lambda = \left[\begin{array}{c} v - 2 \\ k - 2 \end{array} \right]$$

Os BIB satisfazem a desigualdade de FISHER (1940) $b \geq v$, conseqüentemente $r = k$ e por isso são chamados delineamentos simétricos.

2.3.1. Classificação dos BIB

Com o objetivo de apresentar os métodos de cálculo mais viáveis e aplicar um melhor controle reduzindo os erros experimentais, COCHRAN & COX (1957) e IEMMA (1987) classificam os ensaios de BIB em 5 tipos:

i) BIB tipo I: Quando os blocos podem ser arranjados em repetições de tratamentos,

- sendo que o número de repetições é dada por

$$r = \frac{\lambda(v - 1)}{k - 1}$$

e o número necessário de blocos obtidos é

$$v \lambda (v - 1) = bk (k - 1)$$

$$b = \frac{v \lambda (v - 1)}{k - 1}$$

- se b^* é o número de blocos por repetição, então

$$b^* = \frac{b}{r}$$

ii) BIB tipo II: Quando os blocos não podem ser arranjados em repetições, mas podem ser arranjados em grupos de repetições, neste caso o número de blocos é

$$\lambda = \left[\begin{array}{c} v - 2 \\ k - 2 \end{array} \right]$$

isto é verificado previamente ao se obter λ o número de blocos para cada par de tratamentos, e a partir deste valor obter-se as repetições dos tratamentos; se este valor é comparado como total dos blocos, para obter-se b^* blocos por repetição, então

$$b^* = \frac{b}{r};$$

se o valor resultante é fracionário; adota-se o tipo II.

iii) BIB III: Quando os blocos não podem ser arranjados em repetições e nem mesmo em grupos de repetições de tratamentos; o número de blocos para cada par de tratamentos será:

$$\lambda = \frac{r(k - 1)}{(v - 1)}$$

neste ensaio não é possível obter-se b^* ao não cumprir a condição do tipo I, que consiste em que todos os tratamentos fossem repetidos o mesmo número de vezes em cada repetição. Por outro lado não é possível obter um BIB tipo II $r^* = \frac{r}{g}$ onde g representa o número de grupos por bloco, portanto $\ni g \in \mathbb{N}$ (não existe um g pertencente a $\mathbb{N}$), tal que r^* seja inteiro; nota-se que $\mathbb{N}$ é o conjunto de números naturais.

iv) BIB IV: Quando o número de tratamentos é igual ao número de blocos. O número de blocos para cada par de tratamentos será

$$\lambda = \left[\begin{array}{c} v - 2 \\ k - 2 \end{array} \right]$$

e o número de repetições

$$r = \lambda \frac{(v - 1)}{k - 1}$$

Este esquema é um caso particular de um BIB do tipo III, no qual $b = v$. Acontece do mesmo modo para os casos I e II.

v) BIB tipo V: Quando o número total de parcelas é pequeno em relação ao número de tratamentos e de blocos, acarretando em pequeno número de graus de liberdade para o resíduo.

A esse respeito é importante notar, que qualquer dos tipos abordados anteriormente pode ser entendido como um BIB tipo V. Na verdade a grande maioria dos autores, com exceção daqueles que seguem COCHRAN e COX (1957) adota os três primeiros tipos.

2.3.2. O Modelo Linear

De acordo com IEMMA (1987) se tem

$$y = X\theta + e \quad (GMN)$$

onde:

y_{bv} é um vetor de realizações de variáveis aleatórias

$$y = [y_{11} \dots y_{1v}, y_{21} \dots y_{2v}, y_{b1} \dots y_{bv}]$$

$X_{bv, 1+b+v}$ é a matriz conhecida do delineamento de posto
coluna $b + v - 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & O(1) \end{bmatrix}$$

bv $1+b+v$

sendo

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \beta \\ \tau \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \dots \\ \beta_b \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_j \\ \dots \\ \tau_v \end{bmatrix}$$

A notação $O(1)$ na última componente da matriz do delineamento indica que o último tratamento poderão estar presente no último bloco (refere-se aqui aos blocos incompletos).

$e_{bv, 1}$ é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis,
tal que $e \sim N(\phi, I\sigma^2)$

- O modelo apresenta a seguinte caracterização

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + e_{ij}$$

$i = 1, \dots, b \quad j = 1, \dots, v$

y_{ij} é o vetor resposta da parcela do bloco i que recebeu o tratamento j ;

μ é uma constante inerente, a todas as observações;

β_i é o efeito do bloco i ;

τ_j é o efeito do tratamento j ;

e_{ij} é o erro aleatório atribuído a observação y_{ij} , tal que $e_{ij} \sim N(\phi, \sigma^2)$.

2.3.3. Eficiência

De acordo com RAGHAVARAO (1971), uma característica dos delineamentos em blocos incompletos é a sua eficiência, definida pela razão

$$E = \frac{\bar{V}_r}{\bar{V}}$$

onde $\bar{V}$ é a variância média das estimativas intrablocos dos contrastes elementares entre tratamentos, para o delineamento de BIB considerado, e $\bar{V}_r$ representa o mesmo, para blocos casualizados, usando o mesmo número de unidades experimentais; tanto V_r e $\bar{V}$ são calculados com a suposição de que a variância residual intrablocos seja a mesma em ambos casos.

De acordo com KEMPTHORNE (1976), a variância média nos delineamentos conexos vem dado por

$$\bar{V} = \frac{1}{V(V-1)} \sum_{i \neq i'} V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'})^2 = \frac{2\sigma^2}{H}$$

onde

$$H = \frac{V-1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \dots + \frac{1}{\theta_{V-1}}} = \frac{V-1}{\sum_{i=1}^{V-1} \frac{1}{\theta_i}}$$

$\bar{V}$ é a variância média para estimar os contrastes elementares $\hat{t}_i - \hat{t}_j$

H é a média harmônica dos autovalores θ_i da matriz C , onde $i = 1, 2, \dots, v - 1$, sendo um autovalor de C nulo pois seu posto é $v - 1$ e. Por outro lado

$$\bar{V}_r = \frac{2\sigma^2}{\bar{r}}$$

onde:

$\bar{r} = \frac{r}{v}$ n é o total das parcelas, $\bar{r}$ é o número médio de repetições dos tratamentos, então

$$E = \frac{\bar{V}_r}{\bar{V}} = \frac{2\sigma^2/\bar{r}}{2\sigma^2/H} = H/\bar{r}$$

Sendo que a média harmônica de um conjunto de quantidades positivas não pode exceder a média aritmética desta quantidades, e como $\text{Tr } [C] = \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i$, onde $\text{Tr } [C]$ representa o traço da matriz c , tem-se:

$$H \leq \frac{\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i}{v-1} = \text{Tr}[C]/v-1 = \frac{v\bar{r} - b}{v-1}$$

e então

$$E \leq \frac{v\bar{r} - b}{\bar{r}(v-1)}$$

para os delineamentos de igual repetição $\bar{r} = r$ a eficiência será

$$E \leq \frac{vr - b}{r(v-1)}$$

A igualdade é válida somente quando os autovalores não nulos de C são iguais, isto é, quando

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{v-1} = \theta$$

nesse caso a média harmônica H desses autovalores é igual a média aritmética

$$H = \frac{1}{v-1} \sum_{i=1}^{v-1} e(v-1) = (v-1) e(v-1) = e$$

se os autovalores de C são iguais o delineamento é dito balanceado e conexo, como será visto no capítulo 3 de conectividade. Segundo RAGHAVARAO (1971) o delineamento balanceado é sempre mais eficiente dado que a igualdade para a expressão de E se verifica.

Partindo da condição de balanceamento

$$E = \frac{v}{rk} = \frac{2\sigma^2/r}{2k\sigma^2/\lambda v} = \frac{\lambda v}{rk}$$

$\lambda(v-1) = r(k-1)$, se tem

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{(k-1)}{v-1}$$

então

$$E = \frac{\lambda v}{rk} = \frac{v(k-1)}{k(v-1)} = \frac{k-1/k}{v-1/v} = \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{v}}$$

nos blocos incompletos tem-se $k < v$, e então

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{v} \text{ ou } 1 - \frac{1}{k} < 1 - \frac{1}{v}$$

Logo se tem,

$$1 - \frac{1}{k} < 1 - \frac{1}{v},$$

de modo que

$$E = \frac{\lambda v}{rk} = \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{v}} < 1$$

Assim nos BIB a eficiência é sempre menor de que 1, por isso deve-se dar preferência aos delineamentos experimentais cuja eficiência E seja a mais próxima possível de 1.

2.4. Delineamentos em Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados

Os BIB nem sempre podem ser aplicados em problemas práticos, já que exigem um número elevado de repetições, o que se faz necessário a utilização de outros delineamentos.

BOSE & NAIR (1939) introduziram os delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB) que requerem um menor número de parcelas que os BIB. Segundo os autores um delineamento em blocos incompletos é parcialmente balanceado se satisfaz as seguintes condições:

- i) Os tratamentos são agrupados em b blocos de k parcelas com diferentes tratamentos alocados em cada uma delas.
- ii) Existem v tratamentos que ocorrem em r blocos.
- iii) Em relação a qualquer dos v tratamentos, os demais podem ser divididos em m grupos contendo, respectivamente $n_1, n_2, \dots, n_m$ tratamentos, tal que os tratamentos do i -ésimo grupo ocorram juntos com um determinado tratamento em λ_i blocos. Os tratamentos do i -ésimo grupo são chamados de i -ésimos associados do tratamento em questão e os valores de $n_1, n_2, \dots, n_m$ e de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ são independentes do tratamento considerado.

iv) Dados quaisquer dos tratamentos que são i -ésimo associados, o número de tratamentos que são j -ésimo associados do segundo tratamento, e o mesmo sem importar com que par de i -ésimo associado se inicia. Este número se representa pelo símbolo p_{jk}^i ademais $p_{jk}^i = p_{kj}^i$.

No conceito de BOSE & NAIR (1939), os pares de tratamentos que ocorrem juntos num mesmo bloco, chamam-se de primeiros associados, o número de primeiros associados é dado por λ_1 . Os pares de tratamentos que não ocorrem juntos num mesmo bloco, chamam-se de segundos associados, o número de segundos associados é dado por λ_2 .

Considere-se o seguinte modelo

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + e_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, v$$

$$j = 1, 2, \dots, b$$

onde:

y_{ij} é a observação do i -ésimo tratamento no j -ésimo bloco;

μ é uma constante inerente a todas as observações;

τ_i é o efeito do i -ésimo tratamento;

e_{ij} é o erro experimental associado a observação y_{ij} .

Supõe-se $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ são independentes.

O modelo tem em consideração a restrição paramétrica

$$\sum_{i=1}^v t_i = 0$$

e efetuando a conveniente partição da matriz X

$$X = [X_1 \mid X_2 \mid X_3]$$

onde:

${}_{rv}VX_1$ é o vetor de coeficiente associados a média;

${}_{rv}VX_2$ é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos;

${}_{rv}VX_3$ é a matriz dos coeficiente associados aos blocos.

O vetor θ é particionado conforme a partição da matriz X como segue

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ t \\ \beta \end{bmatrix}$$

$${}_v t_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_v \end{bmatrix}$$

$${}_b \beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_b \end{bmatrix}$$

O sistema de equações normais é

$$XX\theta = X'y$$

$$\begin{bmatrix} X'_1 X_1 & X'_1 X_2 & X'_1 X_3 \\ X'_2 X_1 & X'_2 X_2 & X'_2 X_3 \\ X'_3 X_1 & X'_3 X_2 & X'_3 X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{t} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_1 y \\ X'_2 y \\ X'_3 y \end{bmatrix}$$

$X'_1 X_1 = bk = rv = n$ é o número total de unidades experimentais ou parcelas

2.5. Equações Normais Reduzidas

Segundo IEMMA (1987), considera-se a expressão vetorial das observações como $y = X\theta + e$. Neste modelo linear a coluna correspondente à média na matriz de delineamento X é dependente das demais colunas.

Com o objetivo de se obter o sistema de equações normais reduzidas a coluna correspondente à média será suprimida de modo que a matriz de delineamento terá a seguinte forma particionada.

$$X = [X_1 \mid X_2]$$

onde:

X_1 é a matriz dos coeficientes associados aos blocos;

X_2 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos. Assim o modelo pode ser escrito da forma

$$y = [X_1 \mid X_2] \begin{bmatrix} \beta \\ \tau \end{bmatrix} + e$$

$$y = X_1\beta + X_2\tau + e$$

A expressão no sistema de equações normais na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \tau^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{bmatrix}$$

ou

$$X_1'X_1 \beta^0 + X_1'X_2 \tau^0 = X_1'y \quad [2.5.1]$$

$$X_2'X_1 \beta^0 + X_2'X_2 \tau^0 = X_2'y \quad [2.5.2]$$

multiplicando [2.5.1] por X_2X_1' vem

$$\begin{aligned} & X_2' X_1' + X_1' X_1 \beta^0 + X_2' X_1' + X_1' X_2 \tau^0 = X_2' X_1' + X_1' y \\ \Rightarrow & X_2' (X_1' X_1)^+ X_1' \beta^0 + X_2' (X_1' X_1)^+ X_1' \tau^0 = X_2' (X_1' X_1)^+ y \\ \Rightarrow & X_2' X_1' X_1^+ X_1' \beta^0 + X_2' X_1' X_1^+ X_1' \tau^0 = X_2' X_1' X_1^+ y \end{aligned}$$

sendo $p_1 = X_1' X_1^+$ o projetor ortogonal do vetor y das observações sobre o espaço geral pelas colunas da matriz X do delineamento, tem-se

$$X_2' X_1' \beta^0 + X_2' X_1' X_1^+ X_1' \tau^0 = X_2' X_1' X_1^+ y,$$

esta expressão é subtraída de 2.5.2 obtendo-se

$$\begin{aligned} X_2' X_1' \beta^0 - X_2' X_1' X_1^+ X_1' \tau^0 &= X_2' y - X_2' X_1' X_1^+ y \\ X_2' X_2 \tau^0 - X_2' P_1 X_2 \tau^0 &= X_2' y - X_2' P_1 y \\ X_2' (I - P_1) X_2 \tau^0 &= X_2' (I - P_1) y \end{aligned} \quad [2.5.3]$$

Que a expressão do sistema de equações normais reduzidas para efeitos de tratamentos eliminando-se desse modo o efeito da média e blocos.

Muitos autores adotam a forma

$$C \tau^0 = Q \quad [2.5.4]$$

onde

$$C = X_2' (I - P_1) X_2 \quad [2.5.5]$$

e

$$Q = X_2' (I - P_1) y \quad [2.5.6]$$

então

$$C = X_2' X_2 - X_2' P_1 X_2 \quad [2.5.7]$$

sabe-se que $X_2' X_2 = R = v I_{(v)}$, é a chamada matriz de repetições dos tratamentos e $X_1' X_1 = K = k I_{(k)}$, é a chamada matriz dos tamanhos dos blocos dado que $P_1 = X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1'$ e o projetor correspondente aos blocos.

Substituindo estes valor em [2.5.7] se tem a matriz

$$C = R - X_2' X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2$$

$$C = R - \frac{1}{k} X_2' X_1 X_1' X_2$$

pois

$$(X_1' X_1)^{-1} = \frac{1}{k} I_{(b)}$$

sendo $X_1' X_2 = N'$

$$C = R - \frac{1}{k} N N' \quad [2.5.8]$$

onde N é a matriz de incidência dos tratamentos nos blocos; então os valores das parcelas para

$$N = (\delta_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{se o tratamento } j \text{ está no bloco } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

no caso dos delineamentos em BIB a estrutura matricial será

$$N N' = \begin{bmatrix} v & l & \dots & l \\ l & v & \dots & l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l & l & \dots & v \end{bmatrix}$$

onde:

v = é o número de repetições por tratamento;

l = é o número de vezes que se repetem os pares de tratamentos no número de blocos.

Deste modo, a matriz C é facilmente obtida por quanto

$$C = (C_{ij}') = \begin{cases} \frac{r(k-1)}{k} & \text{se } j = j' \text{ para } j = 1, 2, \dots, v \\ -\frac{l}{k} & \text{se } j \neq j' \end{cases}$$

De modo semelhante procede-se para se obter a matriz Q

$$Q = X_2' (I - P_1) y = X_2' y - \frac{1}{k} N X_1' y \quad [2.5.9]$$

dado que $X_2' y = T$ é o vetor dos totais dos tratamentos igualmente $X_1' y = B$ é o vetor dos totais dos blocos; a qual permite se expressá-lo como

$$Q = T - \frac{1}{k} NB \quad [2.5.10]$$

CHAKBARARTI (1963) apresenta a matriz C mediante a expressão:

$$C = (A'A) - N (B'B)^{-1} N'$$

onde A é a matriz de coeficientes dos tratamentos, B é a matriz de coeficientes dos blocos e N é a matriz de incidência; C é a chamada matriz reduzida intrablocos.

Uma outra forma de obtenção do sistema de equações normais reduzidas nos delineamentos de blocos incompletos é apresentado por RIBOLDI (1988), no desenvolvimento teórico para análise de experimentos em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB).

Observa-se nesta seção a relação existente entre as propriedades dos delineamentos em blocos incompletos e o conceito de estimação expressado no sistema de Equações Normais Reduzidas eliminando-se o efeito de blocos. O estudo de estimação por sua vez, leva á menção de funções lineares paramétricas estimáveis da forma $\lambda' \theta$, com

$$\lambda' I = \sum_{i=1}^v \lambda_i = 0$$

denominados contrastes elementares do tipo $t_i - t'_i$ o que permite estabelecer a continuidade ou desconexão entre os parâmetros.

Esse procedimento de obtenção do sistema de equações normais reduzidas é apresentado por IEMMA (1987).

2.6. Estimabilidade

DEFINIÇÃO 2.6.1. - De acordo com RAO (1945). Dado o modelo linear $y = X\theta + e$ (G.M.O.). Então uma função paramétrica $\lambda'\theta$ é dita estimável se existir ao menos uma combinação das observações dada por $a'y$, tal que $E[a'y] = \lambda'\theta$.

2.6.1. Caracterização

Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$ os valores que assumem as variáveis aleatórias y , sendo sua esperança matemática, uma combinação linear de parâmetros desconhecidos. O vetor de n observações será descrito por $y' = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e o vetor de parâmetros por $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$.

A esperança da variável y pode ser expressada matricialmente como:

$$E(y) = E \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} = X\theta \quad [2.6.1a]$$

onde $X = (x_{ij})$ é uma matriz $n \times m$ de constantes conhecidas. A variância de y é $\text{VAR}(y) = \sigma^2 I$.

Uma função paramétrica linear

$$l'\theta = l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + \dots + l_m\theta_m \quad [2.6.1b]$$

é dita estimável se existir $a' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tal que

$$E(a'y) = l'\theta$$

como $E(a'y) = a'X\theta$ então

$$X'a = l$$

Uma condição necessária e suficiente para a existência da solução de a para [2.6.1c] é

$$\text{posto } (X) = \text{posto } (X \mid 0) \quad [2.6.1c]$$

Teorema [2.6.1] Uma condição necessária e suficiente para que uma função paramétrica ℓ' seja estimável e que cumpra a condição [2.6.1c].

2.6.2. O Método dos Mínimos Quadrados

É um dos mais antigos métodos de Estimação; foi desenvolvido independentemente por Gauss no ano 1809 e Legendre ano de 1906 segundo SCHEFFÉ (1959). Posteriores melhoramentos na teoria de mínimos quadrados tem sido registrados após o trabalho de Markov no ano de 1900 de acordo com SCHEFFÉ (1959) e PLACKETT (1949), AITKEN (1935), BOSE (1949), NEYMAN & DAVID (1938), PARSEN (1961), RAO (1945a - 1962), ZYSKIND & MARTIN (1969).

a) Mínimos Quadrados Ordinários

Quando a matriz de covariâncias dos erros é do tipo $V = I\sigma^2$, tem-se o método dos mínimos quadrados ordinários.

Nesse caso, o sistema de equações normais fica

$$X'Xe = X'y$$

Se a matriz de delineamento X tem posto coluna completo, então $X'X$ é positiva e portanto não singular neste caso o sistema tem solução única dada por

$$\hat{\theta} = (X'X)^{-1} X'y$$

Se a matriz de delineamento X não tem posto coluna completo, então o sistema não apresenta solução única. São soluções dentre outras:

$$e^o = (X'X)^- X'y; \quad e^o = X^L y; \quad e^o = X^+ y$$

b) Método de Mínimo Quadrados Ponderados (GMD)

Quando a matriz de covariâncias dos erros é do tipo $V = D\sigma^2$ com $D \neq I$ e D é matriz diagonal, não singular, então o sistema de equações normais é do tipo.

$$X'D^{-1}Xe = X'D^{-1}y$$

De modo análogo ao anterior, se X posto coluna completo, a solução única é dada por

$$e^o = (X'D^{-1}X)^G X'D^{-1}y,$$

E se X não tem posto coluna completa, uma solução é, por exemplo.

$$e^o = (X'D^{-1}X)^G X'D^{-1}y, \quad \forall G - \text{inversa de } X'X$$

c) O Método dos Mínimos Quadrados Generalizados

Em muitas situações experimentais, os dados pela própria natureza do experimento, não podem ser analisados através do modelo Gauss Markov Ordinário, nada se pode garantir sobre condições como homogeneidade de variâncias e independência dos erros. Na prática, as condições de homogeneidade de variâncias e de independência não são sempre possíveis de cumprir, daí a importância de se utilizar o modelo de mínimos quadrados generalizados.

Segundo a conceituação de KSHIRSAGAR (1983) e IEMMA (1987), considere-se o modelo Generalizado Gauss Markov Normal (G.M.N.).

$$y = X\theta + \varepsilon \quad [2.6.2a]$$

Neste modelo a matriz de variâncias e covariâncias dos erros assume a forma $\Omega\sigma^2$, onde σ^2 não é conhecida e a matriz Ω é conhecida é positiva definida e tem estrutura mais geral que as formas diagonais anteriores.

O método de obtenção dos BLUES das funções lineares estimáveis de θ neste modelo é conhecido como o Método de Mínimos Quadrados Generalizados (Equações de Aitken).

O problema de se estimar θ pode ser reduzido quando o modelo tem resíduos não correlacionados, ao se transformar y em outras variáveis. Assim considere-se Ω como uma matriz positiva definida, isto implica que $\exists$ Δ matriz não singular, tal que

$$\Delta'\Delta = \Omega^{-1} \Leftrightarrow (\Delta'\Delta)^{-1} = \Omega$$

$$\Leftrightarrow \Delta^{-1}\Delta^{-1} = \Omega$$

$$\Rightarrow \Delta \Omega \Delta' = I$$

considerando a expressão do modelo linear dado por [2.6.2a] e pré-multiplicando ambos lados por a matriz Δ tem-se

$$\Delta y = \Delta X\theta + \Delta\varepsilon$$

fazendo o seguinte câmbio de variáveis

$$Z = \Delta y; \quad W = \Delta X \quad e \quad e = \Delta\varepsilon$$

obtem-se $Z = W\theta + e$ [2.6.2b] que é a expressão do sistema de equações normais transformadas a partir do qual obtém-se

$$E(e) = E(\Delta \varepsilon) = \Delta E(\varepsilon) = \Delta(O) = 0$$

$$V(e) = V(\Delta \varepsilon) = \Delta V(\varepsilon) \Delta' = \Delta \Omega \sigma^2 \Delta' = \Delta \Omega \Delta' \sigma^2 = \Delta \Delta^{-1} \Delta^{-1} \Delta' \sigma^2$$

$$V(e) = I \sigma^2 \quad [2.6.4c]$$

Que nos leva de volta aos mínimos quadrados ordinários.

Então o sistema de equações fica:

$$W' W e = W' Z$$

Ou, recuperando X e y

$$(\Delta X)' \Delta X e = (\Delta X)' \Delta y$$

$$X' \Delta' \Delta X e = X' \Delta' \Delta y$$

$$X' \Omega^{-1} X e = X' \Omega^{-1} y$$

Que é o sistema de equações normais generalizadas, também conhecidas como sistema de equações de AITKEN.

De modo análogo aos anteriores, se X tem posto coluna completo a solução única é dada por

$$\hat{e} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} y.$$

Se X não tem posto coluna completa uma solução é

$$e^0 = (X' \Omega^{-1} X)^0 X' \Omega^{-1} y$$

$\forall G$ - inversa de $X' \Omega^{-1} X$.

Nesse caso, tem-se o modelo

$$y = X \hat{e} + \varepsilon$$

onde:

$y_{n \times 1}$ é um vetor de realizações de variáveis aleatórias;

$X_{n \times p}$ é uma matriz conhecida de posto $k \leq \min \{n, p\}$;

$\theta_{p \times 1}$ é um vetor de parâmetros desconhecidos;

$\varepsilon_{n \times 1}$ é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis tais que $\varepsilon \sim N(\phi; \Omega \sigma^2)$.

2.6.3. BLUE (Melhor Estimador Linear Não Viesado)

Segundo SCHEFFÉ (1959), SEARLE (1971), RAGHAVA-RAO (1975), IEMMA (1987), tem-se as seguintes definições e teoremas que caracterizam o BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

DEFINIÇÃO 2.6.3.1. - Dado $y = X\theta + e$ (GMO), então se $\lambda'\theta$ é estimável o sistema consistente $X'X\rho = \lambda$ é dito sistema de equações normais associadas.

Teorema [2.6.3.1] [RAO (1945)] - Uma condição necessária e suficiente para que $\lambda'\theta$ seja estimável no (GMO) e que $\lambda \in C(X')$ (pertence ao espaço coluna X).

Teorema [2.6.3.2] - Se $\lambda'\theta$ é estimável, então seu "BLUE" pode ser obtido de: $\hat{\lambda'\theta} = \rho X'y$ único, onde ρ é qualquer solução das equações normais associadas.

Teorema [2.6.3.3] - Uma condição necessária e suficiente para que $\lambda'\theta$ seja estimável é que $\text{posto}(X'X) = \text{posto}(X'X|\lambda)$.

DEFINIÇÃO 2.6.3.2 - Dado o modelo (GM), sejam todas as combinações possíveis $a'y$ tais que $E[a'y] = \lambda'\theta$. Dentre elas, seja a^*y . Então a^*y é definido como o melhor estimador não viesado de $\lambda'\theta$ se e somente se:

$$\text{var}[a^*y] = \min \text{var}[a'y], \forall a'y : E[a'y] = \lambda'\theta$$

a^*y é conhecido como BLUE de $\lambda'\theta$ (Best Linear Umbiased Estimator) e denotado

$$\text{"BLUE" de } \lambda'\theta = \lambda'\hat{\theta}$$

Pode-se testar se H_0 é estimável partindo do fato que $\lambda'\theta$ é estimável então $\exists a: X'a = \lambda \Rightarrow \lambda' = aX'$; pós-multiplicando-se por H , temos

$$\lambda H = a'X (X'X)^{-1} X'X = a'X = \lambda'$$

onde $\lambda'\theta$ é estimável então $\lambda'H = \lambda'$, o que implica que λ é combinação linear dos parâmetros do SEN e está incluindo em λ' estimável. Deste modo é confirmada a hipótese testada.

É importante salientar que no caso de Estimação de delineamentos de Blocos Incompletos não balanceados são válidos as conceituações de estimabilidade em geral.

2.7. Influência dos Efeitos Fixos e Aleatórios na Estimação de Parcelas

2.7.1. Conceituação

Existem fórmulas apresentadas por YATES (1933) para estimação de parcelas perdidas no delineamento em blocos casualizados (DBC), assim como nos quadrados latinos. O procedimento utilizado é o de Minimização da soma de quadrados dos erros, onde as equações resultantes são resolvidas para os valores estimados das parcelas perdidas.

Nos DBC é aplicada uma fórmula para obtenção de uma estimativa de parcela perdida, no caso de mais de uma

parcela perdida a fórmula é utilizada iterativamente. A suposição básica de muitos autores é que dita fórmula adequa-se a modelos fixos, aleatórios ou mistos. A continuação mostrar-se-a que efetivamente a estimativa clássica de perda de parcelas é imparcial independentemente do modelo adotado, porém não tendo variância mínima em todos os casos. Existe variância mínima unicamente quando os efeitos dos fatores são fixos.

De acordo com MURRAY (1988), utiliza-se o modelo de médias apresentado por HOCKING (1985). Dado um delineamento em (Blocos casualizados) (DBC) com t tratamentos e b blocos e a parcela perdida na posição (p, q) a fórmula usual para obter uma estimativa da parcela perdida é:

$$\hat{y}_{pq} = (ty_{p.} + by_{.q} - y_{..}) / (t-1)(b-1) \quad [2.7.1a]$$

ou

$$\hat{y}_{pq} = ((t-1)y_{p.} + (b-1)y_{.q} - \sum_{\substack{i \neq p \\ j \neq q}} y_{ij}) / ((t-1)(b-1)) \quad [2.7.1b]$$

2.7.2. Caso em que os dois fatores são fixos

O modelo de médias do DBC de efeitos fixos é

$$Y_{ij} = \mu_{ij} + e_{ij} \quad [2.7.2a]$$

Sendo os erros independentes e identicamente distribuídos com

$$e_{ij} \sim N(0, I\sigma^2)$$

sob o suposto de não interação entre bloco e tratamento, então o modelo toma a forma

$$\mu_{ij} - \bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{.j} + \bar{\mu}_{..} = 0 \quad \forall_{ij} \quad [2.7.2b]$$

onde $\bar{\mu}_{i.} = \mu_{i.} / b$ e $\bar{\mu}_{.j} = \mu_{.j} / t$ e $\bar{\mu} = \mu_{..} / tb$ então
 $E(y_{ij}) = \mu_{ij}$ com a restrição [2.7.2b] vem

$$\text{cov}[y_{ij}, y_{i'j'}] = \sigma_e^2 \text{ para } i = i' \text{ e } j = j'$$

$$\text{cov}[y_{ij}, y_{i'j'}] = 0$$

em outros casos. Então a estimativa da parcela perdida tem
esperança

$$E[\hat{y}_{pq}] = \frac{(t-1)(\mu_{p.} - \mu_{pq}) + (b-1)(\mu_{.q} - \mu_{pq}) - (\mu_{..} - \mu_{p.} - \mu_{.q} + \mu_{pq})}{(t-1)(b-1)}$$

Desenvolvendo a expressão no 2º membro e
expressando as médias em termos dos seus equivalentes se tem

$$t\mu_{p.} - t\mu_{pq} + b\mu_{.q} - b\mu_{pq} + \mu_{pq} - \mu_{..}$$

somando e subtraindo $tb\mu_{pq}$ no segundo membro se tem

$$= \frac{(t-1)(b-1)\mu_{pq} - tb(\mu_{pq} - \bar{\mu}_{p.} - \bar{\mu}_{.q} + \bar{\mu}_{..})}{(t-1)(b-1)}$$

$$= \frac{(t-1)(b-1)\mu_{pq}}{(t-1)(b-1)} = \mu_{pq}$$

$$E[\hat{y}_{pq}] = \mu_{pq} \quad [2.7.2c]$$

Sua variância será

$$V[\hat{y}_{ij}] = \sigma_e^2 (t + b - 1) / (t - 1)(b - 1) \quad [2.7.2d]$$

e todas suas covariâncias são zero, pois

$$E(y_{p.}) = E(y_{p.} - y_{pq}) = \mu_{p.} - \mu_{pq}$$

$$E(y_{.q}) = E(y_{.q} - y_{pq}) = \mu_{.q} - \mu_{pq}$$

$$\sum_{\substack{i \neq p \\ j \neq q}} (y_{ij}) = E[\sum_{i,j} y_{ij} - y_{p.} - y_{.q} + y_{pq}]$$

$$= E[\sum_{i,j} y_{ij} - y_{p.} - y_{.q} + y_{pq}]$$

$$= \mu_{..} - \mu_{p.} - \mu_{.q} - \mu_{pq}$$

e sendo que

$$\begin{aligned}\mu_{p.} &= b\bar{\mu}_{p.} \\ \mu_{.q} &= t\bar{\mu}_{.q} \\ \mu_{..} &= tb\bar{\mu}_{..}\end{aligned}$$

Assim, sob a suposição de não interação, entre os fatores fixos. $\hat{Y}_{ij}$ é imparcial para μ_{pq} . Assim no caso de um ou ambos fatores serem aleatórios não adota esta forma. O delineamento de blocos casualizados pode ser considerado um caso especial do modelo misto de dois fatores, com interação de componente zero.

2.7.3. Blocos Aleatórios e Tratamentos Fixos

O modelo é dado por

$$y_{ij} = \mu_i + b_j + e_{ij} \quad [2.7.3a]$$

onde μ_i é uma constante e b_j e e_{ij} ambos são aleatórios e independentes. A suposição de não interação bloco por tratamento, e que não existe efeito aleatório no bloco por tratamento, assim $\sigma_{bi}^2 = 0$, então

$$E(y_{ij}) = \mu_i$$

e

$$\begin{aligned}\text{cov}[y_{ij}, y_{i'j'}] &= \sigma_e^2 + \sigma_b^2 \\ &= \sigma_b^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

para $i = i', j = j'$ $i \neq i', j = j'$ outros casos.

$$\text{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = E[y_{ij} - E(y_{ij})][y_{i'j'} - E(y_{i'j'})]$$

$$= E[(y_{ij} y_{i'j'}) - y_{ij} E(y_{i'j'}) - \\ - E(y_{ij}) y_{i'j'} + E(y_{ij}) E(y_{i'j'})]$$

se

$$i = i' \quad j = j'$$

$$\text{cov}(y_{ij}, y_{ij}) = V(y_{ij}) \quad [2.7.3b]$$

Substituindo [2.7.3b] pelos seus componentes, e considerando que tratamento é fixo e blocos são aleatórios, tem-se

$$\text{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = E[b_j + (e_{ij}^2)] =$$

$$\text{cov}(y_{ij}, y_{ij}) = \sigma_b^2 + \sigma_e^2$$

Seguindo o procedimento anterior tem-se

$$\text{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \sigma_b^2, \text{ quando } i \neq i' \text{ e } j = j'$$

Assim a estimativa da parcela perdida pode ser expressada

$$E(\hat{y}_{pq}) = \frac{(t-1)(b-1)\mu_p + (b-1)(\mu_{.} - \mu_p) - (b-1)(\mu_{.} - \mu_p)}{(t-1)(b-1)} \quad [2.7.3c]$$

$$= \frac{(b-1)\mu_p (t-1)}{(b-1)(t-1)}$$

$$E(\hat{y}_{pq}) = \mu_p$$

E a sua variância será

$$V(\hat{y}_{pq}) = \{(\sigma_e^2 + \sigma_b^2)(t+b-1) + \sigma_e^2(tb-2t-2b+2)\} / (t-1)(b-1) \quad [2.7.3d]$$

$$V(\hat{y}_{pq}) = \sigma_e^2 (t+b-1) / (t-1)(b-1) + \sigma_b^2 \quad [2.7.3e]$$

De [2.7.3d] nota-se que o primeiro termo provém da $V(y_{ij})$ e o segundo termo de $\text{cov}(y_{ij}, y_{i'j'})$ e também existe semelhança da variância $V(\hat{y}_{pq})$ entre [2.7.2d] e [2.7.3e] e ademais as esperanças dos termos:

$$(b-1)y_{.q} = \sum_{\substack{i \neq p \\ j \neq q}} y_{ij}$$

em [2.7.3c] se cancelam pelo que não contribuem para $E(y_{pq})$. A esperança restante e do termo do tratamento $(t-1)y_{p.}$ então uma candidata para estimar a parcela perdida e a média dos tratamentos

$$\bar{y}_{p.} = \sum_{j \neq q} y_{pj} / (b-1).$$

A estimativa de mínimos quadrados não ponderado que é claramente imparcial para μ_p , tem variância

$$V(\bar{y}_{p.}) = (\sigma_e^2 + \sigma_b^2) / b - 1.$$

Sendo σ_e^2 e σ_b^2 positivos, se tem que

$$V(\hat{y}_{pq}) > V(\bar{y}_{p.}),$$

assim a condição do componentes de variância positiva e restritiva.

Como, por hipótese, a matriz de covariâncias das y_{ij} é positiva definida então os autovalores de V são todos positivos. No caso de perda de uma parcela, os autovalores de V são σ_e^2 com multiplicidade $(t-1)(b-1) + (t-2) = tb - b - 1$; $\sigma_e^2 + t\sigma_b^2$ com multiplicidade $b-1$ e $\sigma_e^2 + (t-1)\sigma_b^2$ com multiplicidade 1. Sob as condições menos restritivas e que estes autovalores são positivos.

Sabemos que $V(\hat{y}_{pq}) > V(\bar{y}_{p.})$. Assim se uma estimativa da parcela é desejada, $\hat{y}_{p.}$ é melhor que $\hat{y}_{pq}$. Infelizmente $\hat{y}_{p.}$ não é de variância mínima uniformemente imparcial (M.M.V.).

É importante e suficiente que as médias dos tratamentos restantes $\hat{y}_{i.}$ ($i = 1, \dots, p-1, p+1, \dots, t$).

Tenham variância $(\sigma_e^2 + t\sigma_b^2)/b$ e sejam uniformemente imparciais para as médias das parcelas

$$\mu_i = (i = 1, p-1, p+1, \dots, t).$$

2.7.4. Caso em que Ambos fatores são Aleatórios

Quando os dois fatores são aleatórios, o modelo de médias para o delineamento vem dado por

$$y_{ij} = \mu + t_i + b_j + e_{ij}$$

onde μ é constante e t_i , b_j e e_{ij} são todos aleatórios e mutuamente independentes, então a esperança das observações do delineamento é $E[y_{ij}] = \mu$ sua covariância vem dada por

$$\begin{aligned} \text{cov}[y_{ij}, y_{i'j'}] &= \sigma_e^2 + \sigma_b^2 + \sigma_t^2 && \text{para } i = i', j = j' \\ &= \sigma_b^2 && i \neq i', j = j' \\ &= \sigma_t^2 && i = i', j \neq j' \\ &= 0 && \text{em outros casos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) &= E[y_{ij} - E(y_{i'j'})][y_{i'j'} - E(y_{i'j'})] \\ &\quad \text{para } i = i', j = j' \\ &= E\{y_{ij}^2 - [E(y_{ij})]^2\} \\ &= E[(\mu + t_i + b_j + e_{ij})^2 - [E(\mu + t_i + b_j + e_{ij})]^2] \end{aligned}$$

$$\text{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \sigma_t^2 + \sigma_b^2 + \sigma_e^2$$

Para o caso de

$$i \neq i' \text{ e } j = j'$$

$$= E(t_i t_{i'}) + \sigma_b^2 + E(e_{ij}) E(e_{i'j})$$

$$\text{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \sigma_b^2$$

Segue-se o mesmo procedimento para o caso quando $i = i'$ e $j \neq j'$, pode-se mostrar que y_{pq} é imparcial para μ_{pq} .

Sendo

$$V[y_{pq}] = [\sigma_e^2 (t + b - 1) / (t - 1)(b - 1)] + \sigma_t^2 + \sigma_b^2,$$

um estimador alternativo a média geral é

$$\bar{y}_{..} = \sum_{(i,j) \neq (pq)} y_{ij} / (tb - 1)$$

sendo imparcial também para a média μ tendo como variância

$$V(\bar{y}_{..}) = \frac{\sigma_e^2}{(tb - 1)} + \frac{(t^2b - 2t + 1)\sigma_b^2 + (tb^2 - 2b + 1)\sigma_t^2}{(tb - 1)^2}$$

novamente pode ser mostrado que

$$V(\hat{y}_{pq}) > V(\bar{y}_{..})$$

se σ_e^2 , σ_b^2 e σ_t^2 são todos positivos.

Conclui-se que o processo de estimação no caso de perda de parcelas no delineamentos, de blocos casualizados, quando os tratamentos e blocos são aleatórios, sua estimativa é imparcial, mas não tem variância mínima, só terá variância mínima quando os tratamentos e blocos são fixos.

As variâncias das estimativas das parcelas perdidas nos diferentes tipos de delineamentos apresenta a seguinte desigualdade.

$$\text{Var}(\text{fac. fixo}) < \text{var}(\text{fac. misto}) < \text{var}(\text{fac. aleatório})$$

3. METODOLOGIA

3.1. Conectividade

3.1.1. Conceito de conectividade

A idéia de delineamentos conexos foi introduzida por BOSE (1949) na forma de uma cadeia entre blocos e tratamentos. Um bloco e um tratamento são conectados se perder formar uma cadeia de tratamentos e blocos da forma: tratamento-bloco-tratamento- bloco-...-tratamento, começando com o fator A (tratamento) passando através da cadeia (bloco) para associar-se, dessa forma, vários blocos na cadeia são associados mediante tratamentos adjacentes entre si. Posteriormente CHAKRABARTI (1963) define conectividade do seguinte modo, um delineamento é conectado se a matriz C (item 2.5) é de posto $v-1$; essa definição é equivalente à dada por BOSE (1949), o autor trabalhou com blocos casualizados de efeitos fixos com parcela perdida.

WEEKS & WILLIAMS (1964) definem a conectividade da seguinte forma: " um modelo é conectado se todo contraste simples de diferenças de dois níveis de um fator é estimável".

3.1.2. Definições e teoremas

DEFINIÇÃO 3.1.2.1 [RAGHAVARAO, 1971]: Define a conectividade como: Um delineamento é dito conectado se todos os contrastes elementares são estimáveis. Se não acontece isto, é chamado delineamento desconexo. Todos os autores citados restringiram o conceito de conectividade aos delineamentos de dois fatores sem interação.

TEOREMA 3.1.2.1 [RAGHAVARAO, 1971]: A matriz C de delineamento de um bloco (BIB) que satisfaz

$$C \cdot E_1 = 0$$

onde C é uma matriz singular e tem E_1 como um vetor característico igual a zero, C é de posto máximo igual a $v-1$, de fato o posto da matriz C é relacionado à propriedade das conexões do delineamento.

TEOREMA 3.1.2.2 [RAGHAVARAO, 1971]: Um delineamento de blocos incompletos é conectado se e somente se o posto da matriz C é $v-1$.

TEOREMA 3.1.2.3 [RAGHAVARAO, 1971]: Num delineamento conectado os elementos da diagonal principal da matriz C são todos positivos. Além disso os menores principais de todos as ordens $(1, 2, \dots, v-1)$ da matriz C são todos positivos.

TEOREMA 3.1.2.4 [RAGHAVARAO, 1971]: Num delineamento conectado, os cofatores de todos os elementos da matriz C tem o mesmo valor positivo.

Das definições enunciadas pode-se inferir uma propriedade importante que caracteriza os delineamentos em

blocos: A conectividade fornece estimadores não viesados dos contrastes elementares dos tratamentos.

ECCLESTON & HEDAYAT (1974) classificam os delineamentos conexos, procurando otimizar as análises dos experimentos com essa característica.

Estes autores classificam os delineamentos de blocos incompletos conexos em três categorias:

- a) Conexões Locais: Um delineamento é dito ser conectado localmente quando não todas as observações participam na estimação.
- b) Conexões Globais: Um delineamento é dito ser conectado globalmente quando todas as observações participam na estimação.
- c) Conexões Pseudo-Globais: Este tipo de delineamento reúne as duas características do delineamento local e do delineamento global.

Atendendo a estrutura dos dados, pode-se caracterizar a conectividade como:

- 1) De estrutura Conexa: Deste modo abrange todos os delineamentos de blocos incompletos, sejam estes balanceados ou parcialmente balanceados, mais um setor dos BNB.
- 2) De estrutura Desconexa: constituído pelo restante do setor de blocos não balanceados, como se observa no gráfico.

DELINEAMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS

DEFINIÇÃO 3.1.2.2 [RAGHAVARAO, 1971]: Um delineamento é balanceado se todos os contrastes elementares são estimáveis com a mesma precisão. Essa é uma condição necessária e suficiente de balanceamento nos delineamentos conexos.

Segundo RAO (1958), afirma que um delineamento é balanceado se e só se todas as raízes características da matriz C são diferentes de zero e iguais entre si.

3.2. Modelos de Médias

3.2.1. Conectividade em modelo de médias

GRAYBILL (1961) apresenta um modelo de efeitos fixos como segue:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad [3.2.1a]$$

Y , X , e β são parâmetros já conhecidos. o vetor $\varepsilon \sim (0, I\sigma^2)$. O modelo apresentado não contempla interação entre blocos e tratamentos. A equação do modelo é:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad [3.2.1b]$$

onde $i = 1, 2, \dots, v$; $j = 1, 2, \dots, b$; $k = 0, 1, 2, \dots, n_{ij}$ e ε denota o vetor de parâmetros de dimensão $v+b+1$, no caso de

total de parcelas (delineamentos conexos) a matriz X é de posto $v+b-1$ e os componentes individuais de e não são estimáveis individualmente, o valor esperado na parcela i,j é chamado de média da parcela i,j e simbolizado por μ_{ij} . Assim

$$E(Y_{ijk}) = \mu_{ij} = \mu + \tau_i + b_j \quad [3.2.1c]$$

Uma alternativa para a expressão [3.2.1a] em termos do valor esperado é:

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad [3.2.1d]$$

O modelo [3.2.1d] contém vb parâmetros, os possíveis valores que assume a expressão [3.2.1c] não são funcionalmente independentes, e sua relação funcional vem dada por:

$$\mu_{ij} - \mu_{i'j} - \mu_{ij'} + \mu_{i'j'} = 0 \quad [3.2.1e]$$

com $i, i' = 1, \dots, v$; $j, j' = 1, \dots, b$ $i \neq i'$ e $j \neq j'$.

A expressão [3.2.1e] é conhecida como "Condição de não Interação", a qual pode-se escrever de modo equivalente.

$$\mu_{ij} - \mu_{vj} - \mu_{ib} + \mu_{vb} = 0 \quad [3.2.1f]$$

$i=1, \dots, (v-1)$; $j=1, \dots, (b-1)$.

Por quanto existem somente $vb - (v-1)(b-1) = v + b - 1$ parâmetros definidos a serem estimados.

As médias restantes são obtidas a partir de [3.2.1f].

3.2.2. Exemplo do modelo de Graybill

A seguir apresenta-se um exemplo simples que ilustra o modelo apresentado por GRAYBILL (1961). Trata-se de um delineamento em blocos completos com dois tratamentos e duas repetições.

O modelo considerado é:

$$Y_{ijk} = \mu + t_i + b_j + e_{ijk}$$

com $i=1,2$; $j=1,2$; $k=1,2$.

Sua expressão matricial será:

$$\begin{array}{c} Y \\ \left[\begin{array}{c} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} X \\ \left[\begin{array}{ccccc} \mu & t_1 & t_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ \left[\begin{array}{c} \mu \\ t_1 \\ t_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{array} \right] \end{array} + \begin{array}{c} e \\ \left[\begin{array}{c} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{array} \right] \end{array}$$

Sem considerar perda de parcelas, a expressão matricial em termos das médias da "condição de não interação" deve conter $vb = 4$ parâmetros linearmente independentes.

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{21} & \mu_{22} \end{matrix} \\
 \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$\xrightarrow{\hspace{1.5cm}}$ RESTRIÇÃO DE CONDIÇÃO DE NÃO INTERAÇÃO

3.2.3. Modelo de médias simplificado

MURRAY e SMITH (1985) fizeram contribuições nas áreas de estimabilidade, conectividade e testabilidade para o modelo linear de posto incompleto de efeitos fixos no caso de perda de parcelas. A perda de parcelas determina o grau de estimabilidade dos parâmetros, o que condiciona a possibilidade de formulação de testes de hipóteses envolvendo os parâmetros mencionados. Somente serão testáveis hipóteses que envolvam parâmetros pertencentes a grupos conexos.

Os autores mencionados alertam o pesquisador desprevenido para a utilização cautelosa de pacotes computacionais, já que muitos destes não consideram casos de desconexão.

O modelo apresentado por MURRAY & SMITH (1985) descreve uma parcela qualquer em termos das médias populacionais, como segue:

$$Y = W\mu + \varepsilon \quad [3.2.3a]$$

sujeito à restrição

$$G\mu = g \quad [3.2.3b]$$

no qual Y é definido como o vetor das observações, W é a matriz de variáveis indicadoras cujos componentes da diagonal são vetores coluna de uns de extensão n_i (cada um desses vetores é denotado por J_i) onde n_i é o número de observações da i -ésima população), o vetor μ tem μ_i componentes correspondentes às médias populacionais. A matriz G é de dimensão $s \times p$ (onde s é o posto de G e p é o número de populações); o vetor g define uma série de combinações lineares de parâmetros que assumem valor zero.

Quando se estabelece uma relação linear de parâmetros (médias) como em [3.2.3b] o modelo é chamado de restrito, quando não existirem essas relações o modelo é chamado de irrestrito.

A título de exemplo toma-se o modelo de médias de dois fatores sem interação descrito em 3.2. nas expressões [3.2.1b] ou [3.2.1d] e [3.2.1f], na qual a forma matricial é dada como

$$Y' = [y_{111}, y_{112}, \dots, y_{vbn_{vb}}] \quad [3.2.3c]$$

sendo

$$W = \text{diagonal } (j_{ij}) \quad i=1,2,\dots,v \text{ e } j=1,2,\dots,b$$

$$\mu' = (\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{vb}) \quad [3.2.3d]$$

$$G = D_v \otimes D_b \quad [3.2.3e]$$

$$g = 0 \quad [3.2.3f]$$

onde $\otimes$ denota o produto de KRONECKER e as matrizes D são definidas da forma:

$$D_a = \begin{bmatrix} I_{(a-1)} & -J_{(a-1)} \end{bmatrix} \quad [3.2.3g]$$

onde I é uma matriz identidade de dimensão $a-1$, e J é um vetor coluna de uns de extensão $a-1$.

Ao rearranjar as colunas da matriz G , determina a partição da matriz G original em duas submatrizes G_1 (de dimensão $s \times (p-s)$) e G_2 (de dimensão $s \times s$ e posto s). Assim este rearranjo condicoa uma modificação da ordem das linhas de μ para corresponder a partição de G , da seguinte forma:

$$\mu' = (\mu'_1 \quad \mu'_2) \quad [3.2.3h]$$

Em função disso [3.2.1b] pode ser reescrita como a segue:

$$G\mu = G_1\mu_1 + G_2\mu_2 = 0 \quad [3.2.3i]$$

G tem posto completo, e existe uma solução para μ em termos de μ_1 e é $\mu_2 = -G_2^{-1} G_1\mu_1$ pois se $G_2\mu_2 = -G_1\mu_1$, pré-multiplicando por G_2^{-1} se tem $G_2^{-1} G_2\mu_2 = -G_2^{-1} G_1\mu_1$

$$\mu_2 = -G_2^{-1} G_1 \mu_1 \quad [3.2.3j]$$

A partição de μ é independente dos dados obtidos e independente do número de parcelas perdidas m e sua localização.

A participação depende unicamente da matriz G e das relações lineares amostrais das médias.

Assim a expressão [3.2.3a] pode ser reescrita em termos de [3.2.3j], resultando:

$$y = (w_1 \mid w_2) \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + e \quad [3.2.3k]$$

sendo

$$y = (w_1 \mid w_2) \begin{bmatrix} I \\ -G_2^{-1} G_1 \end{bmatrix} \mu_1 + e \quad [3.2.3l]$$

pois $\mu_2 = -G_2^{-1} G_1 \mu_1$ é $v = w_1 - w_2 G_2^{-1} G_1$ se tem

$$y = V\mu_1 + e \quad [3.2.3m]$$

sendo v do posto $N \times (p-s)$ onde N é o número de observações; $V'V$ é não singular, então pode-se aplicar o método de mínimos quadrados para o modelo de posto completo não restrito, obtendo-se o estimador BLUE para μ_1 e

$$\hat{\mu}_1 = (V'V)^{-1} V'y \quad [3.2.3n]$$

o estimador BLUE de μ_2 é

$$\hat{\mu}_2 = -G_2^{-1} G_1 \hat{\mu}_1 \quad [3.2.3o]$$

Se não existir perda de parcelas o posto de V é $(p-s)$; onde p é o número de médias a serem estimadas e s é o posto da matriz G ; se existir perda de parcelas p pode ainda ter posto $(p-s)$ nestes casos as expressões [3.2.3n] e [3.2.3o] são ainda estimadores BLUE únicos de μ_1 e μ_2 . Se o posto de V for menor que $(p-s)$ então está-se no modelo de médias superparametrizado (3.3.1).

Como consequência do exposto tem-se uma nova definição de conectividade.

DEFINIÇÃO 3.2.3.1 [MURRAY & SMITH, 1985]: Um experimento que consta de um conjunto de dados associados ao modelo de médias μ , é conectado se unicamente se puder ser estimado linearmente, esta definição é válida tanto para o modelo restrito como para o modelo irrestrito.

Resulta importante mencionar que a verificação geométrica de conectividade para dois fatores não é válida para delineamentos de maior número de fatores.

Quando V não é de posto coluna completo, não é possível achar $(v'v)^{-1}$, utiliza-se no seu lugar uma inversa generalizada, não é aconselhável o uso do modelo dado em [3.2.3m] nos casos de posto incompleto.

Nos casos de desconexão é necessário que o experimento seja minuciosamente examinado, para ver a quantidade de informação perdida na perda de parcelas e quanto de informação é disponível.

Quando existir perda de parcelas é possível estimar quaisquer parcelas pela combinação das outras, mediante a restrição [3.2.3b].

Porém em outros casos, estas poderam ser estimadas unicamente mediante combinações lineares das parcelas crescentes.

3.2.4. Teste de hipóteses

No estudo dos modelos com perda de parcelas, um dos fatores de maior interesse é a apresentação de diferentes programas computacionais na análise de variância das médias das parcelas.

Ao adotar um modelo para um determinado experimento, o fazemos com o interesse de examinar certas funções lineares das médias das parcelas. Esta investigação assumida é proposta pela hipótese linear:

$$H\mu = 0$$

[3.2.4a]

onde H é de dimensão $h \times p$ de posto h e sua alternativa é

$$H\mu \neq 0.$$

A perda de parcelas permite considerar as seguintes situações:

- a) é possível testar estas hipóteses;
- b) caso contrário pode ser reestruturada uma nova hipótese.

A resposta à primeira consideração é que se o modelo é conectado é possível testar a hipótese original, podendo ser reescrito em termos da média μ_1 , fazendo o conveniente rearranjo e a partição de G e μ na relação [3.2.4a].

Se H é igualmente rearranjada e particionada, então [3.2.4a] tem sua forma equivalente a

$$(H_1 - H_2 G_2^{-1} G_1) \mu_1 = 0 \quad [3.2.4b]$$

Se o modelo não é conectado então a hipótese original pode não ser testável, sendo no entanto testável algum sub-conjunto de hipóteses originais. Esta é a chamada também hipótese efetiva (e um subconjunto de funções originais que são possíveis de ser observadas as parcelas perdidas).

MURRAY & SMITH (1985) sugerem que nos casos não conectados não tem sentido apresentar uma tabela de análise de variância a qual dê um teste para um efeito particular (por exemplo ou efeito médio ou interação).

3.2.5. Modelos conectados

3.2.5.1. Conceituação

GRAYBILL (1976) define os modelos conectados de dois fatores a partir da equação

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \varepsilon_{ijk} \quad [3.2.5.1a]$$

onde $k=0,1,\dots,n_{ij}$; $i=1,2,\dots,v>1$ e $j=1,\dots,b>1$, n é um inteiro não negativo e o experimento deve ser conectado. O modelo apresentado tem a característica de ser superparametrizado sem interação de efeitos fixos é de posto incompleto.

Se o conjunto dos n_{ij} cumpre a condição de que todos os contrastes $\alpha_i - \alpha_{i'}$ são estimáveis para $i, i'=1,2,\dots,v$ e $i \neq i'$, então o modelo é definido como A-conectado.

Se $\tau_j - \tau_{j'}$ é estimável para $j, j'=1,2,\dots,b$ e $j \neq j'$, então o modelo é definido como modelo conectado-T.

Desse modo se o modelo A é conectado, também T é conectado, e vice-versa.

Para se esclarecer esta definição de conexão, apresenta-se o seguinte teorema.

TEOREMA 3.2.5.1.1 [GRAYBILL, 1976]: Se $\varepsilon_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2)$ ou também no caso em que os erros $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, então, somente serão estimáveis as combinações lineares de α_i que sejam contrastes. O delineamento será A-conectado se e somente se todos os contrastes dos α_i são estimáveis e em forma equivalente define-se para o caso dos contrastes τ_j estimáveis.

3.2.5.2. Exemplo aplicativo

Para exemplificar os conceitos colocados anteriormente escolheu-se um delineamento inteiramente ao acaso com arranjo de tratamentos fatorial de dois fatores. Trata-se de um arranjo fatorial 2x2 com o seguinte número de repetições:

	τ_1	τ_2
α_1	2	2
α_2	1	2

O modelo matemático superametrizado com interação é

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + b_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad [3.2.5.1b]$$

cuja matriz de delineamento é

$$X = \begin{matrix} & \mu & t_1 & t_2 & b_1 & b_2 & t_1 b_1 & t_1 b_2 & t_2 b_1 & t_2 b_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

O modelo matemático de médias com interação é

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad [3.2.5.1c]$$

De acordo com a expressão [3.2.3a] a matriz de delineamento W pode-se construir mediante as colunas das interações γ_{ij} como segue

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{21} & \mu_{22} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Nota-se que na expressão do modelo [3.2.5.1b] a matriz de delineamento X é de posto incompleto e na expressão [3.2.5.1c] a matriz de delineamento W é de posto completo, e o número de observações é diferente para cada tratamento o que faz mais viável o uso do modelo de médias.

3.2.6. Modelo de médias e algoritmo geométrico apresentado por Searle

3.2.6.1. Conceituação

Esse algoritmo é apresentado por SEARLE (1987) para o estudo do modelo de dois fatores com classificação cruzada ou de um fator com uma restrição na casualização. Nesse trabalho o autor apresenta um modelo de médias para salvar as dificuldades de análise apresentadas pelos modelos superparametrizados.

Quando a ocorrência de parcelas ocupadas entre parcelas de dados vazios é suficientemente dispersa então algum conjunto de funções, podem não ser estimáveis. Assim

por exemplo no caso do modelo sem interação, $EY_{ijk} = \mu_i + \tau_j$, algumas diferenças da forma $\mu_i - \mu_{i'}$, para $i \neq i'$ e $\tau_j - \tau_{j'}$, para $j \neq j'$ podem não ser estimáveis. Quando todas as diferenças podem ser estimadas, então pode-se estimar todo o conjunto de parcelas de um modelo, isto é $\mu_{ij} = \mu_i + \tau_j$ é estimável $\forall i, \forall j$, embora existam parcelas vazias. Essa característica tipifica os delineamentos conexos.

Na continuação apresenta-se um exemplo que caracteriza a possibilidade de estimação de uma determinada média a partir de uma combinação linear de outro conjunto de médias conhecidas num experimento com perda de parcelas. Assim tem-se as seguintes médias μ_{11} , μ_{23} , μ_{21} das parcelas ocupadas, e a partir dessas três médias pode-se obter a média μ_{13} como se segue:

$$\begin{aligned}\mu_{13} &= \mu_1 + \tau_3 = \mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_3 - (\mu_{11} + \tau_1) \\ &= \mu_{11} + \mu_{23} - \mu_{21}\end{aligned}$$

Portanto é possível se obter seus BLUES, assim o BLUE da parcela 1,3 no modelo sem interação é obtido mediante a restrição.

$$\mu_{i,j} - \mu_{i',j} - \mu_{i,j'} + \mu_{i',j'} = 0$$

$$\therefore \hat{\mu}_{13} = \hat{\mu}_{11} + \hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{21} = \mu_1 + \tau_3$$

3.2.6.2. Um exemplo gráfico

No gráfico 1 apresenta-se um diagrama representando as parcelas ocupadas, simbolizadas mediante o sím-

bolo v , os sub índices i correspondem às linhas e os j às colunas.

		v_{--}	$--v$
	v_{--}	$--v$	v
v_{--}	$--v$		

Gráfico 1. Diagrama representando um caso em que pode ser estimada uma parcela a partir das demais.

		v_{--}	$--v$
		v_{--}	$--v$
v	v		

Gráfico 2. Diagrama representando um caso em que não pode ser estimada uma parcela a partir das demais.

Pode-se observar que no Gráfico 1 a média da parcela 1,2 pode ser estimada, através das parcelas 1,4; 2,4 e 2,2 que estão presentes e ainda esta estimativa constitui um BLUE, de modo que ao serem estimáveis esses dados são conectados. Num modelo com interação isso não acontece, a parcela 1,2 não teria BLUE por que a parcela é vazia.

Ja no Gráfico 2 a ausência da parcela 2,2 impede a estimativa da parcela 1,2 assim esses dados são desconectados.

DEFINIÇÃO 3.2.6.2.1 (SEARLE, 1987): Dados conectados são aqueles nos quais para todos os efeitos médios dos fatores, todas as diferenças entre os níveis de um determinado fator são estimáveis.

SEARLE (1987) apresenta um algoritmo geométrico para os modelos de classificação cruzada dos fatores. Um modelo desse tipo é conectado se as parcelas ocupadas, num reticulado similar aos graficos 1 e 2, podem ser ligadas por uma linha contínua com as seguintes características: a linha contém unicamente segmentos horizontais e verticais, que mudam de direção unicamente no caso em que as parcelas estão ocupadas. Se todas as parcelas estão ocupadas obviamente o delineamento é conectado.

A continuação apresentam-se dois gráficos que ilustram duas situações de conectividade:

	1	2	3	4	5
1	v--	--v--	-----	--v--	--v
2	v--	--v--	--v		v
3			v--	--v	

Gráfico 3. Diagrama de um delineamento conexo.

	1	2	3	4	5
1	v--	-----	--v		
2		v--	--v	--v--	--v
3			v		
4		v--	-----	--v	

Gráfico 4. Diagrama de um delineamento desconexo.

No gráfico 3 representa-se um delineamento conexo, e o gráfico 4 um delineamento desconexo, no entanto no gráfico 4 caracteriza-se como um delineamento desconexo pelo

fato que existe duas sequências de linhas contínuas, que permitem a identificação clara de dois grupos de conexão.

3.2.7. Modelo de médias de efeitos fixos de Hocking

HOCKING (1985) apresenta um modelo de médias para dois fatores na forma matricial.

$$y = W\mu + e \quad [3.2.7a]$$

Sujeito a restrição $G\mu = g$

como o descrito no item [3.2.3], y é o vetor de respostas $W = D(J_n)$ é uma matriz diagonal de dimensão $n \times p$ chamada matriz de incidência, a qual indica um número de observações em cada população, J_n é um vetor de uns referente as observações do tratamento i . O vetor μ é composto por médias, G e g são matrizes análogas as definidas no item 3.2.2.

No caso do modelo de dois fatores são utilizados dois sub-índices para descrever as médias,

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk} \quad [3.2.7b]$$

$$i = 1, \dots, v$$

$$j = 1, \dots, b$$

$$k = 1, \dots, n_{ij}$$

$$e \sim N(0, I \sigma^2).$$

O número de populações é obtido multiplicando-se $v \times b = p$. Esse modelo contempla a possibilidade de perda de parcelas.

No modelo de um fator não é necessário o uso de restrição, porém no modelo de dois fatores sua utilização

é freqüente. Essa restrição é idêntica a utilizada nos modelos de médias já expostos nos itens 3.2.3, 3.2.5 e 3.2.6, ou seja

No modelo de dois fatores sem interação, irrestrito, com $n_{ij} > 0$ é possível estimar a média

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{Y}_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2/n_{ij}) \quad [3.2.7c]$$

$$1 \leq i \leq v$$

$$1 \leq j \leq b$$

As estimativas $(\hat{\mu}_{ij})$ são independentes.

No caso do modelo restrito não interativo, a restrição:

$$\mu_{ij} - \mu_{vj} - \mu_{ib} + \mu_{vb} = 0 \quad [3.2.7d]$$

$$i = 1, \dots, v-1$$

$$j = 1, \dots, b-1$$

pode ser também escrita de forma equivalente,

$$\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..} = 0 \quad [3.2.7e]$$

$$i = 1, \dots, v-1$$

$$j = 1, \dots, b-1$$

Note-se que no processo de estimação tanto para o modelo irrestrito, quanto para o restrito, os contrastes envolvendo médias de parcelas ocupadas ($n_{ij} > 0$) serão estimáveis. Porém, no caso da existência de parcelas perdidas, somente poderão ser estimáveis contrastes provenientes da aplicação do modelo restrito quando o delineamento for conexo ou quando as médias pertencerem a um mesmo grupo de conexão. Os conceitos de estimabilidade mencionados aplicam-se na elaboração de testes de hipóteses e intervalos de confiança.

3.2.7.1. Modelo reduzido

Dentre os modelos restritos uma alternativa é o Modelo Reduzido, que permite obter estimadores utilizando-se uma restrição $G\theta = g$, (onde θ é o vetor de parâmetros), para reduzir o número de parâmetros. O modelo é o seguinte:

$$Y = W_1 \mu_1 + W_2 \mu_2 + e \quad [3.2.7.1a]$$

sujeito à restrição

$$G_1 \mu_1 + G_2 \mu_2 = g \quad [3.2.7.1b]$$

com G_1 matriz não singular e onde

$$\mu_1 \left\{ \begin{array}{l} \mu_{1j} \quad i = 1, \dots, v-1; \\ \quad \quad \quad j = 1, \dots, b-1; \end{array} \right.$$

$$\mu_2 \left\{ \begin{array}{l} \mu_{ib} \quad i = 1, \dots, a-1 \\ \quad \quad \quad j = 1, \dots, b. \end{array} \right.$$

$$\mu_v \quad j = 1, \dots, b.$$

Assim se $g = 0$ o modelo reduzido pode-se expressar como:

$$Y_R = W_R \mu_R + e \quad [3.2.7.1c]$$

onde

$$W_R = W_2 - W_1 G_1^{-1} G_2 \quad [3.2.7.1d]$$

e $\mu_R = \mu_2$, pois $G_1 \mu_1 + G_2 \mu_2 = 0$ e $W_R \mu_R = W_1 \mu_1 + W_2 \mu_2$

Da expressão [3.2.7.2b] premultiplicando-a por G_1^{-1} e despejando μ_1 tem-se:

$$G_1^{-1} G_1 \mu_1 + G_1^{-1} G_2 \mu_2 = G_1^{-1} g \quad [3.2.7.2e]$$

$$\mu_1 = G_1^{-1} g - G_1^{-1} G_2 \mu_2. \quad [3.2.7.2f]$$

DEFINIÇÃO 3.3.5.1 HOCKING (1985): Um modelo é dito conexo se todos os componentes de μ são linearmente estimáveis, e tais que $G_{mm} = I_m$ ($m=v+b$).

No caso do modelo irrestrito, a condição de conexão requer que $n_{ij} > 0$. Já no restrito, a condição é que G seja não singular, portanto não depende do suposto que $n_{ij} > 0$. Porém existe uma dificuldade proveniente do fato de que, ao estimar μ_R , se requer que W_R tenha posto coluna completo.

TEOREMA 3.2.7.2 [HOCKING, 1985]: As médias das parcelas são conectadas se, é somente se a matriz W_R do modelo reduzido tem posto coluna completo.

Se W_R não tem posto coluna completo procede-se de duas formas: a) Aceitar o modelo efetivo, reparametrizando e aplicando restrições ao modelo inicial (esse tópico é desenvolvido nos capítulos IV, V e VI da obra mencionada de HOCKING (1985)), ou b) anular $m-t$ colunas em W_R onde t é o posto de G_{mm} de forma que a matriz resultante tem posto coluna completo. Assinalando-se o valor zero para os parâmetros correspondentes, então os componentes restantes de μ_R são estimados de maneira usual e μ é estimada por [3.2.7.1f]. Este procedimento é aplicado comumente no uso do modelo reduzido.

A título de ilustração considera-se o seguinte exemplo:

Exemplo 1: Considere a parcela perdida $n_{11} = 0$ é conhecidas as estimativas das seguintes médias μ_{12} , μ_{21} e μ_{22} , num delineamento conectado.

$$\text{Sabe-se que } \mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{22}$$

Sabemos que $\mu_{ij} = \mu_i + t_j$ então a estimativa de $\hat{\mu}_{11}$ em função outras médias é

$$\hat{\mu}_{11} = \hat{\mu}_{12} + \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{22}$$

pois

$$\hat{\mu}_{11} = \hat{\mu}_1 + \hat{t}_2 + \hat{\mu}_2 + \hat{t}_1 - \hat{\mu}_2 - \hat{t}_2$$

$$\therefore \hat{\mu}_{11} = \hat{\mu}_1 - \hat{t}_1$$

No caso de um delineamento desconexo do modelo irrestrito, considere o seguinte exemplo 2.

$$\begin{array}{ccc} n_{11} & n_{12} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} \end{array}$$

Pode-se observar que as restrições de não interação do modelo irrestrito não são de ajuda na estimação das médias de parcelas perdidas; assim no exemplo 2 se tem dois conjuntos desconexos, o primeiro formado pelas parcelas n_{11} , n_{12} e n_{21} e n_{22} ; e o segundo subconjunto consta de uma única, a parcela (3.3).

3.2.7.2. Modelo efetivo

Dado o modelo restrito

$$y = W\mu + e \quad [3.2.7.2a]$$

$$\text{com a restrição } G\mu = g \quad [3.2.7.2b]$$

então a matriz de Delineamento W é o vetor de médias μ podem escrever-se na forma particionada

$$W = \left[W_m \mid W_o \right] \quad [3.2.7.2c]$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_m \\ \mu_o \end{bmatrix} \quad [3.2.7.2d]$$

onde W_m é uma matriz de zeros de dimensão $n \times m$ e $W_o = D_{p-m}(j_{ni})$, μ_m e μ_o são os vetores de médias correspondentes as parcelas perdidas e as parcelas observadas.

Do mesmo modo pode-se particionar a matriz G como

$$G = \begin{bmatrix} G_m & G_o \end{bmatrix} \quad [3.2.7.2e]$$

Nós devemos eliminar μ_m do modelo para expressá-lo em termos de μ_o usando as restrições e logrado isto mediante a redução das linhas em G e g em [3.2.7.2e] obtendo-se

$$G \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} G_{mm} & G_{mo} \\ \hline 0 & G_o \end{array} \right) \quad [3.2.7.2f]$$

$$e \ g \rightarrow \begin{bmatrix} G_m \\ G_o \end{bmatrix} \quad [3.2.7.2g]$$

Se a matriz G_{mm} for não singular (deposto linha completo), o delineamento é conexo, e as parcelas perdidas são estimáveis assim como os contrastes entre os níveis de fatos α ou β .

Se a matriz G_{mm} for singular o delineamento é desconexo, o que implica que nem todas as parcelas perdidas são estimáveis portanto, nem todos os contrastes entre os níveis do fator α ou níveis do fator β são estimáveis.

Assim no caso de parcelas vazias define-se o modelo efetivo como:

$$y = w_0 \mu_0 + e$$

restrito a $G_E \mu_0 = g_E$ chamada restrição efetiva.

3.2.7.3. Exemplo do modelo reduzido de médias de HOCKING

Tem se dirigido um experimento para estudar os efeitos de períodos extensos de congelação no crescimento da massa do pão. Um fator de interesse neste estudo foi o tipo de farinha fina usada. O experimento consiste no preparo de quatro fornadas de massa de farinha com cada três tipos de farinhas fina e congelação para um determinado tempo. Os dados são apresentados na tabela 3.2 onde as respostas anotadas de volume fermentado depois de quatro horas de removido do congelador.

Tabela 3.2

		nível 1 do fator θ níveis do fator α			nível 2 do fator θ níveis do fator α		
		1	2	3	1	2	3
fornadas repetições ρ	1	y_{111}	y_{211}	y_{311}	y_{121}	y_{221}	y_{321}
	2	y_{112}	y_{212}	y_{312}	y_{122}	y_{222}	y_{322}
	3	y_{113}	y_{213}	y_{313}	y_{123}	y_{223}	y_{323}
	4	y_{114}	y_{214}	y_{314}	y_{124}	y_{224}	y_{324}

Onde o modelo superparametrizado tem a seguinte caracterização.

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \theta_j + \rho_k + (\alpha\theta)_{ij} + E_{ijk} \quad [3.2.7.3a]$$

onde

$i = 1, 2, 3$ indica os níveis do fator α

$j = 1, 2$ indica os níveis do fator θ

$k = 1, 2, 3, 4$ indica o número de repetições ρ .

Y_{ijk} denota a resposta do i -ésimo nível α , no j -ésimo nível de fator θ na k -ésima repetição ρ .

Como é nosso interesse exemplificar o modelo de médias vai se supor segundo os resultados teóricos apresentados em HOCKING (1985) o seguinte modelo de médias.

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$$

Nesse caso, dada a restrição imposta no modelo de não interação segundo a expressão [3.2.7g], e considerando que o efeito do fator θ vai ter a mesma repercussão nas repetições temos que o modelo [3.2.7.3a] caracteriza o já conhecido modelo de dois fatores sem interação

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \theta_j + e_{ijk}$$

com $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$ e $k = 1, \dots, n_{ij}$

A partir de agora se considerarmos que

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \theta_j$$

então

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$$

A partir desse modelo de médias, vai-se mostrar a matriz

$$W = D_{\sigma}(1_4)$$

Nota-se que cada observação esta dada pela combinação de suas médias, na qual $i = 1, 2, 3$ (tipos) e

$j = 1, 2$ (vezes) com $k = 1, 2, 3, 4$ repetições o que implica que existam $\mu_{ij} = 6$ combinações cada uma total de 24 observações como segue.

$$\begin{aligned}
 Y_{111} &= \mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{31} - \mu_{32} \\
 Y_{211} &= \mu_{21} = \mu_{22} + \mu_{31} - \mu_{32} \\
 Y_{311} &= \mu_{31} = \mu_{11} - \mu_{12} + \mu_{32} \\
 Y_{121} &= \mu_{12} = \mu_{11} - \mu_{31} + \mu_{32} \\
 Y_{221} &= \mu_{22} = \mu_{21} - \mu_{31} + \mu_{32} \\
 Y_{321} &= \mu_{32} = \mu_{22} - \mu_{21} + \mu_{31}
 \end{aligned}$$

$$W = \begin{bmatrix}
 \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{31} & \mu_{32} \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

Observa-se que na tabela 3.2 não existe parcelas vazias pelo qual não é necessário estabelecer nenhum tipo de restrição.

Supondo agora que a partir desta tabela não existem as observações y_{111} e y_{211} ; mas nota-se que é possível estimar ditas parcelas pois,

$$y_{111} = \mu_{11} + e_{11k}$$

$$y_{211} = \mu_{21} + e_{21k}$$

Dada a restrição do modelo de média [3.2.7g] pode-se estruturar

$$G_{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{31} + \mu_{32} \\ \mu_{21} - \mu_{22} - \mu_{31} + \mu_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uma consequência deste fato é que

$$\mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{31} - \mu_{32}$$

que no caso do modelo superparametrizado seu equivalente é

$$\mu_{11} = \mu + \alpha_1 + \theta_2 + \mu_3 + \theta_1 - \mu - \alpha_3 - \theta_2$$

$$\mu_{11} = \mu_1 + \alpha_1 + \theta_1$$

No que segue utiliza-se o modelo reduzido de médias com o objetivo de eliminar dois parâmetros utilizando a restrição já conhecida.

O modelo reduzido vem dado pela sua forma, matricial

$$Y = W_R \mu_R + e$$

onde o vetor de médias reduzido é $\mu = (\mu_{12}, \mu_{22}, \mu_{31}, \mu_{32})$ é a matriz de coeficientes W_R e

$$W_R = \begin{bmatrix} \mu_{12} & \mu_{22} & \mu_{31} & \mu_{32} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A notação compacta mediante o produto de Kronecker é $W = D_\sigma \otimes J_4$

$$W_R = \begin{bmatrix} J_4 & 0 & J_4 & -J_4 \\ J_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_4 & J_4 & -J_4 \\ 0 & J_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix}$$

Uma consequência deste tipo de estimação de parcelas faltantes é que a estrutura do delineamento é conexo.

a) Caso de Conectividade

Considere-se o exemplo 3.2.7.4 na qual as parcelas $\{(2,3)$ $(3,1)$ e $(3,2)\}$ são perdidas, e atribuindo a parcela perdida o valor zero pode-se construir do seguinte modo.

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} \end{bmatrix}$$

Da definição de modelo de médias apresentada na seção [3.2.7.2] e levando em consideração [3.2.7.2c]. Temos a forma particionada se tem $W = [{}_n W_3 \mid {}_n W_0]$ onde $n = \sum n_i$ expressando [3.2.7.2d] como

$$\mu' = [\mu_m \mid \mu_0] = [\mu_{23}, \mu_{31}, \mu_{32} \mid \mu_{13}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{33}]$$

Levando em consideração a restrição [3.2.7g]; nota-se que pode ser construído o seguinte sistema de equações as quais permitem estimar a média das parcelas faltantes.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \mu_{23} - \mu_{13} + \mu_{11} - \mu_{21} = 0 & (i = 1,2; j = 1,3) \\ \text{ii)} \quad & \mu_{31} - \mu_{13} + \mu_{11} - \mu_{33} = 0 & (i = 1,3; j = 1,3) \\ \text{iii)} \quad & \mu_{32} - \mu_{13} - \mu_{12} + \mu_{33} = 0 & (i = 1,3; j = 2,3) \\ \text{iv)} \quad & \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22} = 0 & (i = 1,2; j = 1,2) \end{aligned}$$

Tendo em consideração a partição de $G = [G_m \mid G_0]$ se tem a matriz de coeficientes (depois de estabelecer a matriz escalonada G_m).

$$G = \begin{bmatrix} \mu_{23} & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{13} & \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da última linha da matriz reduzida G obtém-se a restrição efetiva $\mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22} = 0$ e as três primeiras linhas definem a única relação entre as parcelas perdidas e as parcelas observadas, mediante as quais verificamos as conexões.

Assim se tem

$$G_E \mu_0 = [0, 1, -1, -1, 1, 0]$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{33} \end{bmatrix}$$

$$G_E \mu_0 = \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22}$$

Deste modo a restrição do modelo $y = W_0 \mu_0 + e$ sujeito a $G_E \mu_0 = g_E$ é chamada restrição efetiva se converte em modelo efetivo.

É usando o modelo reduzido pode-se estimar μ_R e as outras μ_{ij} são estimadas pela a restrição

$$\mu_{ij} = \mu_{ib} - \mu_{vj} - \mu_{vb}$$

Pode-se concluir que em casos desconectados no modelo de médias observadas, é possível determinar funções lineares paramétricas estimáveis das médias não observadas em termos das médias observadas como foi ilustrado acima.

3.3. O Modelo Aditivo de Classificação de Dois Fatores de Efeitos Fixos Sem Interação ou Modelo de DODGE (1985)

3.3.1. Conceituação

O Modelo aditivo de classificação dupla tem a seguinte notação:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$$

sendo que (y_{ijk}) é o conjunto de variáveis aleatórias independentes distribuídas normalmente cada uma com variância σ^2 ,

onde: $i = 1, 2, \dots, v$

$j = 1, 2, \dots, b$

$k = 1, 2, \dots, n_{ij}$

v = número de tratamentos

b = número de blocos

k = número de parcelas por bloco

Quando $n_{ij} = 0$, nenhum valor da variável exposta é observada para o tratamento i no bloco j , com a seguinte caracterização:

$$n_{i.} = \sum_j n_{ij} \neq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, v$$

$$n_{.j} = \sum_i n_{ij} \neq 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, b$$

Determinando que cada linha e que cada coluna tenha no mínimo uma observação.

Se a matriz de delineamento $X = (1 \ A \ B)$ então a matriz de incidência será: $N = A'B$.

Dois níveis do fator 1, dois níveis do fator 2, ou um nível do fator 1 e um nível do fator 2 são conexos se e possível passar de um para o outro por meio de uma cadeia consistindo, alternativamente de níveis do fator 1 e níveis do fator 2, tais que, quaisquer dos membros adjacentes da cadeia são associados.

A matriz X de delineamento associado com uma matriz de incidência N tem posto máximo,

$$\text{posto}(X) = v + b - 1,$$

se e somente se o delineamento é conexo.

Consideremos o exemplo 1. Um delineamento experimental na qual $v = 4$, $b = 4$, $r = 2$, $k = 2$, $\lambda = 1$, tem-se quatro tratamentos; 1, 2, 3 e 4 em quatro blocos I, II, III e IV, o número de parcelas por bloco é 2, repetindo-se uma única vez cada par de parcelas de modo que fica

BLOCOS			
I	II	III	IV
1	3	1	2
2	4	3	4

ou expressado em termos da matriz de incidência

BLOCOS					
	I	II	III	IV	
1	1	0	1	0	
2	1	0	0	1	
3	0	1	1	0	
4	0	1	0	1	

$N = \text{trat}$

Sendo que n_{ij} é o número de vezes que o i -ésimo tratamento ocorre no j -ésimo bloco, no BIB n_{ij} adota 1 ou 0, segundo a observação está presente ou ausente.

No exemplo 1, utilizando o procedimento gráfico a partir da matriz de Incidência N e unindo os diferentes níveis do fator tratamento (parcelas presentes) com os níveis do fator blocos, mediante uma cadeia tem-se:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 & & 0 \\ 1 & \text{---} & 0 & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 \\ 0 & & 1 & \text{---} & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 \end{bmatrix}$$

o que implica que o delineamento é conexo.

O mesmo resultado é obtido pelo processo R no que segue.

Em DODGE (1985) apresenta-se um conjunto de definições e teoremas que descrevem o processo R , o que permite estimar um conjunto de funções associadas aos fatores no caso de perda de parcelas. Enuncia-se a sequência teórica no processo de obtenção do Triângulo Contador, a partir do qual se geram os contrastes estimáveis no delineamento de dois fatores.

A dimensão do espaço vetorial dos contrastes α estimáveis é $f_{\alpha} = a - s = \text{posto}(X) - b$, onde s é o número de grupos conexos no delineamento.

A matriz de Incidência " N " é definida como: A matriz de dimensões $v \times b$ por elementos n_{ij} onde n_{ij} denota o número de observações do tratamento i no bloco j , v denota o número de tratamentos e b denota o número de blocos.

A matriz "M" é definida como a matriz $v \times b$ das mesmas dimensões que a matriz de Incidência N e cujos elementos zeros são substituídos por uma medida que se estabelece uma cadeia, determinando quais das esperanças das observações são estimáveis.

O triângulo contador C_α se define como aquela porção subdiagonal do produto MM' na qual todos os componentes diferentes de zero foram substituídos por 1.

$$C_{ij}^{(\alpha)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{k=1}^v m_{ik} m_{jk} \neq 0 \\ & \text{para } 1 \leq j < i \leq v \\ 0 & \text{se } \sum_{k=1}^v m_{ik} m_{jk} = 0 \end{cases}$$

Associado com o triângulo contador C_α define-se I_α como sendo o conjunto:

$$I_\alpha = \{i : C_{ij}^{(\alpha)} = 1 \text{ para algum } j, 1 \leq j < i\}$$

O conjunto das diferenças entre os níveis de α $\{\alpha_i - \alpha_{j(i)} : i \in I_\alpha\}$ constitui uma base para espaço vetorial $\bar{A}$ dos contrastes estimáveis α .

Com o mesmo critério uma base para o espaço vetorial $\bar{B}$ pode ser construída a partir das diferenças estimáveis de β ou $\beta_i - \beta_j$ ($1 \leq i, j \leq b$) e estimável se e somente se os elementos (i, j) de $M'M$ são não nulos. Assim o conjunto das diferenças β $\{\beta_i - \beta_{j(i)} : i \in I_\beta\}$ constitui uma base para o espaço vetorial $\bar{B}$ de contrastes β estimáveis, onde a dimensão de $\bar{B}$ é $f_\beta = b - s = \text{posto}(x) - v$ onde esse s é o número de grupos conexos.

Define-se o triângulo contador C_β , como sendo a porção subdiagonal de $M'M$ com todos os elementos não nulos substituídos por uns e associados com C_β o conjunto $I_\beta = \{i = C_{ij}^{(\beta)} = 1 \text{ para algum } j, 1 < j < i\}$.

O conjunto das diferenças entre os $\beta(\beta_i - \beta_{j(i)}) : i \in I_\beta$ constitui uma base para o espaço vetorial $\bar{B}$ dos contrastes estimáveis entre os níveis do fator β .

$\bar{A}$ e $\bar{B}$ são subespaços de $\bar{\Theta}$ o espaço vetorial das funções lineares paramétricas estimáveis.

$$\dim \bar{\Theta} = \dim \Omega = \text{posto}(X) = f_\alpha + f_\beta + S$$

Então uma base para $\bar{\Theta}$ consiste da adição linear das funções paramétricas independentes de $\bar{A}$, $\bar{B}$ e S . Assim seja

$i_{(k)} = \text{mínimo} \{i : i \in I_k\}$ e $j_{(k)} = \text{mínimo} \{j : j \in J_k\}$ para $k = 1, 2, \dots, s$. Então:

$$\{\mu + \alpha_{i_{(k)}} + \beta_{j_{(k)}} : \text{para } k = 1, 2, \dots, s\}$$

é um conjunto de s não funções lineares paramétricas estimáveis a que são linearmente independentes entre eles mesmos e dos elementos de $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

$\bar{\varepsilon}$ denota-se como o espaço vetorial gerado por este conjunto e seja $f_\varepsilon = \dim \bar{\varepsilon} = S$. Então o conjunto acima descrito é uma base para $\bar{\varepsilon}$.

Uma outra base para $\bar{\varepsilon}$ é dado por:

$$\{\mu + \alpha_{i_{(1)}} + \beta_{j_{(1)}}, \alpha_{i_{(1)}} - \alpha_{i_{(k)}} + \beta_{j_{(1)}} - \beta_{j_{(k)}} : k = 2, 3, \dots, s\}$$

Assim se tem que uma base para $\bar{\Theta}$ o espaço vetorial das funções lineares paramétricas estimáveis e dadas pela adição $\bar{\Theta} = \bar{A} \oplus \bar{B} \oplus \bar{\varepsilon}$.

A seguir, apresenta-se o algoritmo R e ilustra-se mediante um exemplo. Todo o processo para construir uma base para o espaço vetorial $\bar{E}$ das funções lineares paramétricas estimáveis.

3.3.2. O processo R

Este método apresentado por DODGE (1985) trabalha com a matriz de incidência "N" que é transformada na matriz final M formada exclusivamente de zeros e uns, toda informação sobre conectividade são obtidos a partir da matriz final M, utilizando operações simples com variáveis binárias.

Passos do processo R

- 1) considera-se a matriz M de dimensão $v \times b$ de componentes zeros;
- 2) para cada par i, j se existe $n_{ij} = 0$, então $m_{ij} = 1$;
- 3) para cada par i, j se existe os elementos k e l de modo que se cumpra $m_{il} = m_{kl} = m_{kj} = 1$, então $m_{ij} = 1$ (graficamente se adicionará um quarto vértice sempre que aparecem os três vértices de um retângulo na matriz MD);
- 4) continuar o passo 3 usando os originais e novos m_{ij} não zeros como vértices de novos retângulos, até que nenhum outro elemento possa ser mudado.

Observa-se que a matriz final M é uma matriz de dimensão igual a matriz N ; no caso de ser todos os $n_{ij} = 1$, a formação da matriz M é imediata.

A continuação por conveniência vai ser particionar os índices das linhas e colunas da matriz final M formando grupos de índices.

- 1) Seja J_1 o conjunto de índices das colunas de M que possuem 1 na primeira linha e onde $J_1 \neq \emptyset$ por quanto supossemos que $n_{1j} \neq 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, v$.
- 2) Seja $j \in J_1$ e denotemos por I_1 ao conjunto dos índices das linhas de M que tem 1 na coluna j .
- 3) A continuação escolhemos $i \in I_1$ e denotamos por J_2 ao conjunto dos índices das colunas de M que tem 1 na linha i .
- 4) Escolhemos $j_2 \in J_2$ e denotamos por I_2 ao conjunto dos índices das linhas de M que tem 1 na coluna j_2 .
- 5) Continuamos este processo até esgotar todos os índices das linhas da matriz M .

Esta sequência de passo nos determina a união disjunta

$$\{1, \dots, v\} = \bigcup_{k=1}^s I_k \quad \text{e} \quad \{1, \dots, b\} = \bigcup_{k=1}^s J_k$$

A partir desta informação conclui-se que $m_{ij} = 1$ se e somente se k existe no intervalo $1 \leq k \leq s$, tais que $i \in I_k$ e $j \in J_k$ então os pares $(I_1, J_1), (I_2, J_2), \dots, (I_s, J_s)$ descrevem as porções conectadas do delineamento, estas porções conectadas são visualizadas em termos da

matriz final M , após de arranjar as linhas e colunas de tal maneira que as linhas e colunas indexadas pelos elementos de I_1 e J_1 respectivamente ocorram primeiro, seguidamente ocorrem as linhas e colunas indexadas por I_2 e J_2 na ordem respectiva, e assim por diante. Este arranjo de linhas e colunas nos conduzirá à seguinte matriz:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & M_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & M_s \end{bmatrix}$$

onde M_k é uma matriz $v_k \times b_k$ de uns com $v_k = \#(I_k)$ e $b_k = \#(J_k)$ para todo $k = 1, \dots, s$ onde $\#$ representa o número de elementos.

Processo Interativo para obter a matriz M para o exemplo 1.

Para o valor m_{12} que, a priori é igual a 0 onde $i = 1$ e $j = 2$, se existir k e ℓ tal que $m_{i\ell} = m_{k\ell} = m_{kj} = 1$ então será $m_{12} = 1$, caso contrário permanecerá igual a zero.

$$\text{para } k = 1 \quad \ell = 1$$

$$m_{11} = m_{11} = m_{12} = 1$$

$$1 = 1 \neq 0 \neq 1$$

não satisfaça a condição.

Pode se observar para $k = 1$, a condição não será satisfeita porque $m_{kj} = m_{22} = 0$. Também para $k = 2$ não será satisfeita porque $m_{kj} = m_{22} = 0$.

para $k = 3$ $l = 1$

$$m_{11} = m_{31} = m_{32} = 1$$

$$1 \neq 0 \neq 1 \neq 1$$

não cumpre a condição

para $k = 3$ $l = 2$

$$m_{12} = m_{32} = m_{32} = 1$$

$$0 \neq 1 \neq 1 \neq 1$$

não cumpre a condição

para $k = 3$ $l = 3$

$$m_{13} = m_{33} = m_{32} = 1$$

$$1 = 1 = 1 = 1$$

cumpre a condição.

Então m_{12} assume o valor 1, o processo continua até fazer todo um ciclo de operações (por substituições dos zeros por uns) sem se manifestar nenhuma troca de valores.

O processo R é útil pois é utilizado como um algoritmo computacional de fácil programação.

3.3.3. Um processo alternativo

Uma outra alternativa é pelo processo de semelhança ou aproximação.

Assim, no caso do exemplo inicial se enumera as parcelas e se vão colocando na ordem atendendo as suas semelhanças. No nosso caso se tem as parcelas (1,1), (1,3), (2,1), (2,4), (3,2), (3,3), (4,2), (4,4).

Disponindo-se na ordem se tem

(1,1), (2,1), (3,2), (4,2)

(1,3), (2,4), (3,3), (4,4)

Nota-se que nenhuma parcela fica isolada, o que determina ser linearmente conectada. Se existirem parcelas isoladas diz-se que o delineamento não é conectado.

O método gráfico nos permite chegar ao mesmo resultado. Este método afirma que sempre que aparecem três vértices de um retângulo na matriz M se adiciona um quarto vértice. Assim, considera-se como vértices os componentes m_{13} , m_{32} e m_{33} se unimos com uma linha se obtém m_{12} que é o quarto vértice e assim por diante.

Um caso aplicativo de Desconecção

3.3.4. Exemplo modelo

Este exemplo está contido num trabalho apresentado pelo autor no 3^o Simpósio de Estatística Aplicada À Experimentação Agronômica (julho 1979). Lavras - MG.

Num experimento de dois fatores BIB no qual se tem registrado perda de parcelas se tem os seguintes arranjos de pontos e de x, onde um ponto representa uma parcela vazia e x representa uma parcela ocupada.

		fator β							
		1	2	3	4	5	6	7	8
fator α	1	x	-----	x					
	2	.	.	x	-----	x			
	3	.	x	-----	x	x			
	4	.	x	-----	x	x			
	5	.	.		.	x			
	6	.	.	x	-----	x			
	7	.	.	.	x	x			

onde a matriz de incidência N é

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o processo R à matriz de incidência N obtém-se a matriz final M .

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1^* & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Partição da matriz final M

Observa-se na primeira linha que os valores das colunas 1, 4 e 5 são iguais a 1, então

$$J_1 = \{\beta_1, \beta_4, \beta_5\}$$

Essa mesma estrutura de linha repete-se nas linhas n^o 5 e 7, o que implica

$$I_1 = \{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_7\}$$

Escolhendo agora a linha $i = \alpha_2 \notin I_1$ o que nos determina

$$J_2 = \{\beta_3, \beta_8\}$$

Escolhendo $j_2 = \beta_3 \in J_2$ obtém-se

$$I_2 = \{\alpha_2, \alpha_6\}$$

Seguidamente escolhem-se $i_2 = \alpha_3 \notin I_1 \cup I_2$ obtém-se

$$J_3 = \{\beta_2, \beta_6, \beta_7\}$$

Finalmente escolhe-se $j_3 = \beta_2$ obtém-se

$$I_3 = \{\alpha_3, \alpha_4\}$$

Reunindo os subconjuntos

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\} \text{ e}$$

$$J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8\}$$

Fazendo um rearranjo nas linhas e colunas na matriz final M se tem:

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc|cc} \beta_1 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_2 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_3 & \beta_8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \phi & & \phi & \\ 1 & 1 & 1 & & & & & \\ \hline & \phi & & 1 & 1 & 1 & & \phi \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline & \phi & & & \phi & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_2 \\ \alpha_6 \end{array} \end{array}$$

Pode-se observar na matriz final M os três subconjuntos conexos, cujos componentes são os parâmetros.

$$\{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_7, \beta_1, \beta_4, \beta_5\};$$

$$\{\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_6, \beta_7\};$$

$$\{\alpha_2, \alpha_6, \beta_3, \beta_8\}$$

Obtenção dos contrastes para os dois fatores.

Multiplicando-se MM' e considerando-se somente os componentes diferentes de zero da porção subdiagonal inferior como iguais a 1 se tem o Triângulo Contador para as diferenças entre os níveis do fator α .

$$C_{\alpha} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 0 & & & & & \\ 3 & 0 & 0 & & & & \\ 4 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

No Triângulo Contador C_{α} , observa-se que as linhas 4, 5, 6 e 7 tem pelo menos um componente que assume o valor 1 de modo que

$$I_{\alpha} = \{4, 5, 6 \text{ e } 7\}$$

Portanto a dimensão do espaço vetorial dos contrastes estimáveis de α é:

$$f_{\alpha} = \#(I_{\alpha}) = 4$$

Uma base para $\bar{A}$ é:

$$\{\alpha_3 - \alpha_4, \alpha_1 - \alpha_5, \alpha_2 - \alpha_6, \alpha_1 - \alpha_7\}$$

O mesmo critério é aplicado para se obter os contrastes para o fator β ao multiplicar $M'M$ e considerar somente os componentes diferentes de zero da porção subdiagonal inferior iguais a 1.

$$C_{\beta} = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 0 & & & & & & \\ 3 & 0 & 0 & & & & & \\ 4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

No Triângulo Contador C_{β} , observa-se que as linhas 4, 5, 6, 7 e 8 tem pelo menos um componente que assume o valor 1 de modo que

$$I_{\beta} = \{4, 5, 6, 7 \text{ e } 8\}$$

Portanto a dimensão de $f_{\beta} = \#(I_{\beta}) = 5$

Uma base para $\bar{B}$ obtém-se dos contrastes seguintes:

$$\{\beta_1 - \beta_4, \beta_1 - \beta_5, \beta_2 - \beta_6, \beta_2 - \beta_7, \beta_3 - \beta_8\}$$

pode-se também ter-se outra base.

$$\{\beta_1 - \beta_4, \beta_4 - \beta_5, \beta_2 - \beta_6, \beta_6 - \beta_7, \beta_7 - \beta_8\}$$

Sabe-se que $f_c = s = 3$ (n° de grupos conexos);

uma base para $\bar{\varepsilon}$ é

$$\{\mu + \alpha_1 + \beta_1; \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_3\}$$

Sendo que $f_{\alpha} = v - s = 7 - 3 = 4$, confirma-se sua dimensão, ademais sabe-se que o posto $(x) - b = f_{\alpha}$

$$\text{posto } (x) = f_{\alpha} + b$$

$$\text{posto } (x) = 4 + 8$$

$$\text{portanto } \text{posto } (x) = 12$$

Verificando-se deste modo que $f_{\beta} = \text{posto } (x) - v = 12 - 7 = 5$ e a dimensão do espaço vetorial $\bar{e} = \text{posto } (x) = f_{\alpha} + f_{\beta} + s = 4 + 5 + 3 = 12$.

3.3.5. Análise de variância

O quadro de análise de variância que resume as informações obtidas com respeito aos graus de liberdade é o seguinte:

CAUSAS DE VARIAÇÃO E GRAUS DE LIBERDADE PARA O EX. 2

CV	GL
Regressão	12
Ajuste para a média	1
Blocos não ajustados (ajust. p/ a média β/μ)	7
Tratamentos $\tau/\mu, \beta$ (ajust. p/ a média e blocos)	4
Ajuste para a média	1
Tratamentos não ajustados (ajust. p/ a média τ/μ)	6
Blocos $\beta/\mu, \tau$ (ajust. p/ a média e tratamentos)	5
Resíduo	20
TOTAL	32

Nota-se que o número total de 32 corresponde ao número de observações do experimento.

3.3.6. Cálculo da soma de quadrados de regressão ajustados para as diferentes fontes de variação

Apresenta-se a continuação o método que nos permite obter algumas importantes somas de quadrados associados com o modelo considerado.

A anotação da soma dos quadrados a considerar é:

$$SQ(\alpha/\beta) = SQ(\alpha, \beta) - SQ(\beta) \quad \text{e} \quad [3.3.5a]$$

$$SQ(\beta/\alpha) = SQ(\alpha, \beta) - SQ(\alpha)$$

onde $SQ(\alpha/\beta)$ denota a soma de quadrados para os efeitos do fator α , ajustado pelo fator β , ou seja, para os efeitos de α após ajustar os efeitos de β . A interpretação da $SQ(\beta/\alpha)$ é similar.

É de salientar que as somas de maior dificuldade apresentam na sua obtenção são: $SQ(\alpha, \beta)$, $SQ(\alpha/\beta)$ e $SQ(\beta/\alpha)$, porém obtendo-se somente uma delas o cálculo das restantes é imediata.

A escolha de qual soma de quadrados deve ser obtida primeiro depende da soma de quadrados do fator cuja dimensão seja menor; sejam estes f_α ou f_β .

Para encontrar uma solução única das E.N. em modelos de dois fatores com posto máximo da matriz x ; posto $(x) = v + b - 1$, e aplicável às restrições:

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_j \beta_j = 0$$

No caso de delineamento desconexos este procedimento não é adequado. Assim deve-se optar por uma parametrização alternativa contida no seguinte teorema.

TEOREMA 3.3.6.1: suponhamos $f_\beta > 0$ e seja $\Lambda'\beta$ um vetor de dimensão $f_\beta \times 1$ de funções paramétricas estimáveis que constitui uma base para o espaço de todos os contrastes estimáveis em β (Λ = matriz cujas colunas são as combinações lineares estimáveis do fator β , e ainda sendo $G = (I - PA)\beta \Lambda$, onde PA denota a projeção ortogonal no espaço coluna de A . Então uma parametrização irrestrita de posto coluna completa para Ω (espaço vetorial gerado pelas colunas de x) é:

$$E(y) = A\psi + G\xi = (A \mid G) \begin{pmatrix} \psi \\ \xi \end{pmatrix} = w\delta \quad [3.3.6b]$$

onde: $\psi \in R^v$, $\xi \in R^{f_\beta}$ e $\delta \in R^m$ (v = número de tratamentos; f_β = dimensão do espaço vetorial gerado pelas funções paramétricas estimáveis do fator β e m = posto (x)). Sabemos que $w = (A \mid G)$ e dada a parametrização irrestrita

$$E(y) = 1\mu + A\alpha + B\beta = X\theta$$

$\theta \in R^p$ onde $p = v+b+1$ e $E(y) = A\psi + G\xi = (A \mid G) \begin{pmatrix} \psi \\ \xi \end{pmatrix} = w\delta$.

Esta parametrização nunca será de posto completo pois $\text{posto}(x) = m \leq (v + b - 1 < P)$.

Só serão de posto completo se:

a) se $m = p - k$

b) impusermos k restrições linearmente independentes e não estimáveis, então $E(y) = w\delta$ $\delta \in R^m$

A parametrização será de posto completo se $\text{posto}(w) = m = \text{posto}(x) = \dim \Omega$.

Da parametrização realizada no teorema [3.3.6.1] obtém-se as seguintes equações normais $w'w\hat{\delta} = w'y$, onde $w'w$ é não singular, além disso as matrizes $A'A$ e $G'G$

são também não singulares e $A'G = 0$, assim as equações normais para o teorema 3.3.6.1 pode reduzir-se a dois sistemas separados.

$$A'A \hat{\psi} = A'y \text{ e } G'G \hat{\xi} = G'y$$

A soma de quadrados $SQ(\beta/\alpha)$ servirá para testar a hipótese $H_0 : A'\beta = 0$; isto é, a hipóteses de que todas as funções lineares estimáveis y' envolvem os parâmetros β são iguais a zero.

A correspondência entre a soma de quadrados do modelo original [$E(y) = A\mu + A\alpha + B\beta = x\theta$] e o parametrizado [3.3.6b] segundo o TEOREMA [3.3.6.1] é o seguinte:

$$SQ(\alpha) = SQ(\psi)$$

$$SQ(\alpha, \beta) = SQ(\psi, \xi) = SQ(\psi) + SQ(\xi)$$

Lembrando que $SQ(\alpha, \beta) = SQ(\alpha) + SQ(\beta/\alpha)$, assim: $SQ(\beta/\alpha) = SQ(\xi)$.

A soma de quadrados $SQ(\xi)$ nos permite testar as hipóteses

$H_0 : \xi = 0$ e desta forma também permite testar as hipóteses $H_0 : E(y) \in R(A)$ espaço coluna de x , ou seja a hipótese de que $E(y_{ijk})$ tem a forma $\mu + \alpha_1$ e $f_\beta = 0$, então $SQ(\beta/\alpha) = SQ(\xi) = 0$.

3.3.6.1. Exemplo 2

A continuação apresenta-se uma aplicação para obter as somas de quadrados segundo a parametrização proposta por DODGE (1985) (Equações Normais Reduzidas).

Seja o caso do experimento fatorial 2^2 é o seguinte:

	1	2
N = 1	1	0
2	2	3

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \text{fator } v & 1 & \text{fator } b & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CÁLCULOS DAS SEGUINTE EXPRESSÕES

$$PA = A(A'A)^{-1}A$$

$$\text{Sabe-se que } \hat{\psi}_i = \frac{y_{i..}}{n_{i.}} \text{ para } \hat{\psi}_1 = \frac{y_{1.}}{n_{1.}}$$

$$G = (I - PA)BA$$

$$\hat{\psi} = (A'A)^{-1}A'Y$$

$$\hat{\psi}_2 = \frac{y_{2.}}{n_{2.}}$$

$$SQ(\psi) = \hat{\psi}'A'A\hat{\psi}$$

$$\hat{\zeta} = (G'G)^{-1}G'Y$$

$$SQ(\zeta) = \hat{\zeta}'G'Y$$

Assim tem-se as seguintes expressões:

$$A'A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \quad |A'A|^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{vmatrix}$$

O projetor em A

$$PA = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 \\ 0.00 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 \\ 0.00 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 \\ 0.00 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 \\ 0.00 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\psi} = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.80 \end{bmatrix}$$

$$SQ(\psi) = 76.20$$

$$I - PA = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.20 & -0.20 \\ 0.00 & -0.20 & 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.20 \\ 0.00 & -0.20 & -0.20 & 0.80 & -0.20 & -0.20 \\ 0.00 & -0.20 & -0.20 & -0.20 & 0.80 & -0.20 \\ 0.00 & -0.20 & -0.20 & -0.20 & -0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.20 \\ 1.20 \\ -0.80 \\ -0.80 \\ 0.80 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\zeta} = -0.25$$

$$SQ(\zeta) = 0.30$$

$$G'G = 48$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(G'G)^{-1} = 0.2083$$

Por conseguinte o Quadro de Análise de Variância; pelo método original de Parametrização irrestrita e

FONTE DE VAR.	GL	SQ	QM	VALOR F	PROB. > F
Regressão	3	76.50	25.50		
Ajuste para μ	1	73.50			
Ajuste para (β/μ)	1	1.50	1.50		
Ajuste para $(\tau/\mu\beta)$	1	1.50	1.50	1.80	0.27
Ajuste para μ	1	73.50	2.70		
Ajuste para $(\tau/\mu) = SQ(\alpha/\mu)$	1	2.70			
Ajuste para $(\beta/\tau\mu) = SQ(\beta/\alpha)$	1	0.30			
Resíduo	3	2.50	0.83		
TOTAL	6	79.00			

Das equivalências das somas de quadrados se tem

$$SQ(\psi) = SQ(\alpha) \text{ e}$$

$$SQ(\xi) = SQ(\beta/\alpha)$$

Substituindo pelos seus valores se tem

$$76.2 = 73.50 + 270$$

$$76.2 = 76.2$$

$$\text{e} \quad 0.30 = 0.30$$

Isto nos confirma que são válidas as expressões, por conseguinte é viável a parametrização alternativa apresentada por DODGE (1980).

4. EXEMPLOS APLICATIVOS EM DELINEAMENTO DE DOIS FATORES

4.1. Delineamento em Blocos Incompletos

Este tipo de delineamento é empregado na aplicação do processo R (DODGE 1985). O modelo aditivo é dado por:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$$

Chamado também modelo superparametrizado cuja caracterização é dada no item [3.2.1].

4.2. Modelo de Médias

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$$

O delineamento de dois fatores que descreve as parcelas perdidas em termos das parcelas presentes é dado pelo modelo restrito já descrito no ponto 3.2.5.2.

CASO A: Um Exemplo em Blocos Incompletos

O presente experimento analisa o coeficiente de digestibilidade de nutrientes para CAITETUS (*Tayassu Tayacu*), consumido a níveis crescentes de alimentos volumosos.

O tipo de delineamento inicial foi planejado para blocos casualizados, balanceados envolvendo 4 tratamentos; os tratamentos A, B, C e D, constituem níveis volumosos de ração, com 6 repetições. As fileiras 1, 3, 5 e 6 constituem machos e as fileiras 2 e 4 são fêmeas.

Por razões próprias do manejo experimental perderam-se 4 parcelas, como se encontra na Tabela 4.2.1, a sua eficácia de digestibilidade é medida por

$$\text{sensibilidade} = \frac{\text{consumo} - \text{escretado}}{\text{consumo total}} \times 100$$

Tabela 4.2.1.

	TRATAMENTOS				
	A	B	C	D	
BLOCOS	1	75,68	-	-	60,38
	2	75,13	69,85	71,73	63,73
	3	77,84	77,54	74,03	-
	4	78,51	77,45	66,24	60,95
	5	-	70,70	74,09	65,91
	6	78,70	73,19	70,05	68,79

A perda de parcelas determina que o delineamento seja de Blocos Incompletos não Balanceados.

O modelo aditivo superparametrizado de DODGE (1985).

Delineamento em blocos incompletos

O modelo aditivo vem dado por

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$$

A matriz de delineamento para este experimento no modelo irrestrito sobreparametrizado é

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

cuj a matriz de incidência fica da seguinte forma

		BLOCOS					
		1	2	3	4	5	6
TRATAMENTOS	1	1	1	1	1	0	1
	2	0	1	1	1	1	1
	3	0	1	1	1	1	1
	4	1	1	0	1	1	1

Pode-se observar que apesar da perda das parcelas (1,5), (2,1), (3,1) e (4,3) o delineamento é conectado. Basta aplicar o procedimento geométrico obtendo-se uma cadeia que une as observações presentes.

A continuação por um processo aleatório progressivo de tirar parcelas perdem-se as seguintes parcelas: (1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,1) e (4,5), ficando ao final:

		BLOCOS					
		1	2	3	4	5	6
TRATAMENTOS	1	1	0	0	1	0	1
	2	0	0	0	1	0	1
	3	0	0	0	0	1	0
	4	0	1	1	1	0	1

Aplicando o Processo R se tem

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 \\ 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 \\ 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 \end{bmatrix}$$

Determinando-se um delineamento desconectado, ao ter-se dois grupos de conexão, o primeiro constitui o grupo ligado pela cadeia, e o segundo o constitui a parcela (3,5); a matriz de delineamento fica

$$X = \begin{matrix} & \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A parcela (3,5) não pode ser estimada, pois o tratamento 3 não ocorre com nenhum dos outros tratamentos no mesmo bloco. Deste modo o efeito do tratamento 3 é confundido com o bloco 5.

O grupo de contrastes dos tratamentos é determinado pela matriz diagonal inferior do produto da matriz final MM' dado por C_α , onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C_{\alpha} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & & \\ 3 & 0 & 0 & \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Os contrastes que formam uma base são:

$$\bar{A} = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_4) \text{ ou } (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_4)$$

Com o objetivo de conferir a validade dos resultados da análise exposta neste exemplo, utiliza-se o Modelo Efetivo de Médias.

a) No caso de Conexão

1) Conforme HOCKING (1985), no modelo reduzido a forma particionada da matriz W será $W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$ e

$$\mu = [\mu_m \mid \mu_o] = \begin{bmatrix} \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{34}, \mu_{51} \mid \mu_{11}, \mu_{14}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}, \mu_{41}, \\ \mu_{42}, \mu_{43}, \mu_{44}, \mu_{52}, \mu_{53}, \mu_{54}, \mu_{61}, \mu_{62}, \mu_{63}, \mu_{64} \end{bmatrix}$$

No processo de estabelecer as combinações possíveis das parcelas, com o objetivo de se conferir a validade da matriz G , é conveniente considerar o seguinte:

- Estabelecer contrastes das parcelas perdidas em função das parcelas presentes.
- Estabelecer contrastes com o menor número de parcelas presentes.

Assim as parcelas perdidas em função das parcelas presentes são

$$\mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{11} - \mu_{22}$$

$$\mu_{13} + \mu_{24} - \mu_{23} - \mu_{14}$$

$$\mu_{34} + \mu_{43} - \mu_{44} - \mu_{33}$$

$$\mu_{31} + \mu_{62} - \mu_{61} - \mu_{52}$$

O total de combinações é dado por $n-a-b+1$, o que determina $24-6-4+1 = 15$ combinações, o resto é escolhido dos contrastes de tratamentos dado pela combinação $C_6^2 = 15$ contrastes, completando-se com

$$\mu_{11} + \mu_{24} - \mu_{21} - \mu_{14}$$

$$\mu_{11} + \mu_{34} - \mu_{31} - \mu_{14}$$

$$\mu_{11} + \mu_{44} - \mu_{41} - \mu_{14}$$

$$\mu_{11} + \mu_{54} - \mu_{51} - \mu_{14}$$

$$\mu_{11} + \mu_{64} - \mu_{61} - \mu_{14}$$

$$\mu_{21} + \mu_{32} - \mu_{31} - \mu_{22}$$

$$\mu_{21} + \mu_{43} - \mu_{41} - \mu_{23}$$

$$\mu_{22} + \mu_{53} - \mu_{52} - \mu_{23}$$

$$\mu_{21} + \mu_{62} - \mu_{61} - \mu_{22}$$

$$\mu_{31} + \mu_{42} - \mu_{41} - \mu_{32}$$

$$\mu_{52} + \mu_{63} - \mu_{53} - \mu_{62}$$

A matriz G assume a estrutura do seguinte modo:

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{34} & \mu_{51} & \mu_{11} & \mu_{14} & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & \mu_{44} & \mu_{52} & \mu_{53} & \mu_{54} & \mu_{61} & \mu_{62} & \mu_{63} & \mu_{64} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fazendo arranjos nas linhas e simplificando, tem-se a partição da matriz G .

$$G = \left[\begin{array}{c|c} G_{mm} & G_o \\ \hline 0 & G_E \end{array} \right]$$

μ_{12}	μ_{13}	μ_{34}	μ_{51}	μ_{11}	μ_{14}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{24}	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}	μ_{41}	μ_{42}	μ_{43}	μ_{44}	μ_{52}	μ_{53}	μ_{54}	μ_{61}	μ_{62}	μ_{63}	μ_{64}
1	0	0	0	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0
				1	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				1	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
				1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	-1	1	0	0
				1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1
				0	0	1	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				0	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
				0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
				0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
				0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	1	0

Nota-se que a matriz G_{mm} é não singular de posto linha completo, e que a restrição efetiva está integrada por $m-a-b+1$ combinações possíveis dos contrastes dos tratamentos em termos das parcelas presentes, ou seja, $20-6-4+1=11$, onde m é o número de observações presentes.

Pelo modelo efetivo de médias, de acordo com Hocking o delineamento é conexo. Deste modo confirma-se o já demonstrado pelo processo R.

b) No caso desconexo

Considere-se agora o caso de perda de parcelas do delineamento desconexo apresentado anteriormente, onde sua matriz de incidência é dada por:

		FATOR B					
		1	2	3	4	5	6
FATOR A	1	1	0	0	1	0	1
	2	0	0	0	1	0	1
	3	0	0	0	0	1	0
	4	0	1	1	1	0	1

onde 0 representa perda de parcela.

Conforme já estabelecido, as combinações possíveis das médias das parcelas perdidas com respeito às parcelas presente são:

$$\mu_{12} + \mu_{41} - \mu_{11} - \mu_{42}$$

$$\mu_{13} + \mu_{41} - \mu_{11} - \mu_{42}$$

$$\mu_{21} + \mu_{14} - \mu_{11} - \mu_{24}$$

$$\mu_{22} + \mu_{44} - \mu_{42} - \mu_{24}$$

$$\mu_{23} + \mu_{44} - \mu_{43} - \mu_{24}$$

$$\mu_{31} + \mu_{16} - \mu_{11} - \mu_{36}$$

$$\mu_{32} + \mu_{43} - \mu_{42} - \mu_{33}$$

$$\mu_{33} + \mu_{44} - \mu_{43} - \mu_{34}$$

$$\mu_{15} + \mu_{24} - \mu_{12} - \mu_{25}$$

$$\mu_{25} + \mu_{36} - \mu_{35} - \mu_{26}$$

$$\mu_{45} + \mu_{36} - \mu_{35} - \mu_{46}$$

$$\mu_{14} + \mu_{26} - \mu_{24} - \mu_{16}$$

$$\mu_{24} + \mu_{46} - \mu_{44} - \mu_{26}$$

$$\mu_{34} + \mu_{45} - \mu_{44} - \mu_{35}$$

$$\mu_{41} + \mu_{16} - \mu_{11} - \mu_{46}$$

A matriz G fica estruturada como segue:

G =

μ_{12}	μ_{13}	μ_{15}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{25}	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}	μ_{34}	μ_{35}	μ_{41}	μ_{43}	μ_{11}	μ_{14}	μ_{16}	μ_{24}	μ_{26}	μ_{35}	μ_{42}	μ_{43}	μ_{44}	μ_{45}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	-1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1

fazendo os arranjos respectivos nas linhas tem-se:

G =

μ_{12}	μ_{13}	μ_{15}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{25}	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}	μ_{34}	μ_{35}	μ_{41}	μ_{43}	μ_{11}	μ_{14}	μ_{16}	μ_{24}	μ_{26}	μ_{35}	μ_{42}	μ_{43}	μ_{44}	μ_{45}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	-1	-1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
														0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0
														0	0	0	1	-1	0	0	-1	1	1

Observa-se que na G_E só se dão os contrastes do fator A para $\alpha_1 - \alpha_2$ e $\alpha_1 - \alpha_4$, confirmando-se os contrastes obtidos pelo Processo R. Portanto é válido o procedimento do Modelo Efetivo.

Discussão

Nota-se no exemplo apresentado nessa seção, que a matriz G_{mm} é singular, sendo de posto incompleto igual a 13 o que indica que o delineamento é desconexo.

Na matriz dos contrastes efetivos, pode-se observar que a coluna correspondente à parcela μ_{35} é formada exclusivamente por zeros, o que indica que a média dessa parcela não é estimável e, portanto, não poderão ser efetuados os contrastes entre o nível 3 do fator A com os demais níveis, nem poderão ser efetuados contrastes entre o nível 5 do fator B com os demais níveis deste fator. Os contrastes observados para o fator A são $\alpha_1 - \alpha_2$ e $\alpha_1 - \alpha_4$, confirmando os já obtidos pelo método de DODGE (1985).

CASO B: Um Exemplo em PBIB

Caracterização

Trata-se de um látice 6×6 com 4 repetições, cuja matriz tem a seguinte estrutura:

		FATOR B					
		1	2	3	4	5	6
FATOR A	1	1	0	1	1	0	1
	2	1	1	0	1	1	0
	3	0	1	1	0	1	1
	4	1	0	1	1	0	1
	5	1	1	0	1	1	0
	6	0	1	1	0	1	1

Considere-se perdidas as seguintes parcelas:
 (1,4), (2,2), (3,3), (3,5), (3,6), (5,2), (6,2), configuran-
 do a seguinte estrutura:

		FATOR B					
		1	2	3	4	5	6
FATOR A	1	1	0	1	0	0	1
	2	1	0	0	1	1	1
	3	0	1	0	0	0	0
	4	1	0	1	1	0	1
	5	1	0	0	1	1	0
	6	0	0	1	0	1	1

1) Aplicação do Processo R

Aplicando-se o Processo R nesta matriz, obtém-se a matriz final M:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se dois grupos conexos, o que determina que o delineamento é desconexo. Assim, o primeiro grupo é formado pelas parcelas unidas pela cadeia, e o segundo formado exclusivamente pela parcela (3,2).

Os contrastes do fator α é dado pelo triângulo contador em C_α :

		1	2	3	4	5
	2	1				
	3	0	0			
$C_\alpha =$	4	1	1	0		
	5	1	1	0	1	
	6	1	1	0	1	1

Assim, um grupo de contrastes estimáveis para o fator α é dado por $\bar{A} = \{\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_5, \alpha_4 - \alpha_6\}$ ou $\{\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_5, \alpha_5 - \alpha_6\}$.

2) Aplicação do Modelo Efetivo de Médias

A seguir aplica-se o Modelo Efetivo de Médias, obtendo-se o conveniente número de combinações das médias das parcelas em função do número de parcelas presentes no número máximo.

Assim, se $n=36$, $a=6$ e $b=6$, tem-se $36-6-6+1=25$ combinações, como segue:

$$\begin{aligned} \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{11} - \mu_{22} \\ \mu_{13} + \mu_{24} - \mu_{14} - \mu_{23} \\ \mu_{22} + \mu_{66} - \mu_{62} - \mu_{26} \\ \mu_{23} + \mu_{14} - \mu_{13} - \mu_{24} \end{aligned}$$

A matriz G fica assim configurada:

$$\begin{aligned}
 H_{31} &+ H_{14} - H_{11} - H_{34} \\
 H_{32} &+ H_{14} - H_{13} - H_{34} \\
 H_{34} &+ H_{16} - H_{14} - H_{36} \\
 H_{35} &+ H_{24} - H_{34} - H_{25} \\
 H_{36} &+ H_{25} - H_{35} - H_{26} \\
 H_{41} &+ H_{51} - H_{41} - H_{51} \\
 H_{42} &+ H_{51} - H_{41} - H_{52} \\
 H_{43} &+ H_{44} - H_{43} - H_{54} \\
 H_{44} &+ H_{44} - H_{44} - H_{54} \\
 H_{45} &+ H_{54} - H_{44} - H_{55} \\
 H_{46} &+ H_{54} - H_{44} - H_{56} \\
 H_{51} &+ H_{41} - H_{51} - H_{41} \\
 H_{52} &+ H_{41} - H_{51} - H_{42} \\
 H_{53} &+ H_{44} - H_{43} - H_{54} \\
 H_{54} &+ H_{44} - H_{44} - H_{54} \\
 H_{55} &+ H_{54} - H_{44} - H_{55} \\
 H_{56} &+ H_{25} - H_{35} - H_{26} \\
 H_{61} &+ H_{43} - H_{41} - H_{63} \\
 H_{62} &+ H_{43} - H_{42} - H_{63} \\
 H_{63} &+ H_{55} - H_{54} - H_{65} \\
 H_{64} &+ H_{55} - H_{54} - H_{65} \\
 H_{65} &+ H_{55} - H_{55} - H_{65} \\
 H_{66} &+ H_{55} - H_{55} - H_{65}
 \end{aligned}$$

	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{14}	μ_{15}	μ_{16}	μ_{17}	μ_{18}	μ_{19}	μ_{20}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{24}	μ_{25}	μ_{26}	μ_{27}	μ_{28}	μ_{29}	μ_{30}	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}	μ_{34}	μ_{35}	μ_{36}	μ_{37}	μ_{38}	μ_{39}	μ_{40}
μ_{11}	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{12}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{13}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{14}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{15}	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{16}	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{17}	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{18}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{21}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{23}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{24}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{25}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{26}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{27}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{28}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{29}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{30}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{31}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_{33}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
μ_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
μ_{35}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
μ_{36}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
μ_{37}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
μ_{38}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
μ_{39}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
μ_{40}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fazendo o conveniente arranjo nas linhas, fica:

Discussão

No exemplo apresentado nesta seção, numa primeira análise, ao aplicar-se o Processo R obteve-se, através do triângulo contador, os seguintes contrastes estimáveis $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_4$, $\alpha_4 - \alpha_5$ e $\alpha_4 - \alpha_6$ não podendo-se estabelecer contrastes unicamente com o nível 3 do fator α , determinando-se que estes contrastes não são estimáveis.

Da aplicação do Modelo Efetivo de Médias, neste exemplo, na correspondente submatriz de restrição efetiva G_E , observa-se que a coluna correspondente à média da parcela μ_{32} é vazia, o que implica que o nível 3 da média desta parcela não está relacionado com outros níveis das médias do fator α .

Esta situação determina que o delineamento é desconexo, pois a estrutura da submatriz G_{mm} não tem posto linha completo, confirmando-se a validade dos resultados obtidos pelo Processo R.

5. CONCLUSÕES

- 1) A perda de parcelas determina o grau de estimabilidade dos parâmetros, condicionando a formulação de testes de hipóteses que envolvem os parâmetros mencionados.
- 2) Uma propriedade de dados desconexos é que eles ao serem separados em dois ou mais conjuntos conexos podem ser analisados separadamente.
- 3) Nos delineamentos de blocos incompletos com dois fatores, uma alternativa muito eficiente de se estimar perda de parcelas consiste no estabelecimento de contrastes ortogonais entre os níveis de cada fator, prestando uma valiosa contribuição na análise de variância proporcionando os graus de liberdade para cada efeito.
- 4) Na situação em que a matriz de delineamento no modelo de médias seja de posto coluna completo e justificável o uso do modelo restrito para detectar estimabilidade.

- 5) Nos casos de desconexão no modelo efetivo de médias é possível determinar funções paramétricas estimáveis mediante os contrastes das médias não observadas em função das médias observadas.
- 6) O modelo efetivo de médias permite obter a estrutura de conexão do delineamento de forma transparente contribuindo na compreensão dos problemas de conexão e estimabilidade de funções estimáveis, essa metodologia poderá ser utilizada com finalidade didática.
- 7) No modelo aditivo de dois fatores ou modelo de DODGE (1985) a obtenção da matriz final M permite obter quais das esperanças das parcelas perdidas são estimáveis. Do mesmo modo, é possível obter os grupos conexos da matriz X de delineamento.
- 8) A determinação do triângulo contador de cada um dos fatores gera os contrastes entre os diferentes níveis do fator α e do fator β , que constituem uma base para o espaço vetorial de α e β , respectivamente. A dimensão do espaço vetorial de α e β , é dada pela adição de suas bases e permite obter o posto da matriz de delineamento X .
- 9) O processo R é mais operativo e funcional, o que permite atuar com sucesso nos casos de grande quantidade

de dados o que não acontece com o modelo efetivo de médias, pois este algoritmo emprega maior número de passos e tempo de operação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AITKEN, A. On least squares and linear combination of observations. Proc. Roy. Soc., Edimburgo, Série A, 55: 42-48, 1935.
- ARTHANARI, T. & DODGE, Y. Mathematical Programming in Statistical, New York, John Wiley, 1981.
- BARTLETT, M.S. Some examples of Statistical Methods of Research in Agriculture and applied biology. Journal of the Royal Statistics Society, London, 4: 137-83, 1937.
- BIRKES, D. DODGE & SEELY, J. Spanning Sets for Estimable Contrasts. The Annals of Statistics, Hayward, 4(1): 86-107, 1976.
- BOSE, R. & NAIR, K. Partially balanced incomplete block designs. Sankhyā, Calcutta, 4: 337-72, 1939.
- BOSE, R. Least square aspects of the analysis of variance, Nort Carolina, Chapel Hill, 1949. Série 9, 120p.
- BOSE, R.C. Combinatorial properties of partially balanced designs and association schemes. Sankhyā, Calcutta, Serie A, 25(2). 1963.
- CHAKRABARTI, M.C. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. London. ASIA PUBLISHING HOUSE. 1962. 120p.

- CHAKRABARTI, M. On the C Matrix design of Experiments. *Sankhyā*, Calcutta, 1: 8-23, 1963.
- COCHRAN, W.G. & COX, G.M. *Experimental Designs*, New York, John Wiley & Sons. 1957. 661p.
- CORNISH, E. The estimation of missing values in incomplete randomized block experiments. *Annals of Eugenics*, London 10: 112-18. 1940.
- CORNISH, E. The estimation of missing values in quase-factorial designs. *Annals of Eugenics*, London, 10: 137-143, 1940.
- CRAIG RIDELL, W.M. Prediction in Generalized Least Squares. *The American Statistician*, Washington, 31(2): 88-90, 1977.
- DAS, M.N. & GHOSH, D.K. Balancing Incomplet Block Designs *Sankhyā*. Calcutta. 47: 67-77. 1985.
- DODGE, Y. On the Connectedness of Designs. *Sankhyā*, Calcutta, p.284-287. 1977.
- DODGE, Y. *Analysis of Experiments whit Missing Data*. New York, John Wiley, 1985. 499p.
- ECCLESTON, J. & HEDAYAT, A. On the Theory of Concepts Designs Characterization and Optimaty. *American of Statistics*. Alexandria, 2: 1238-1255, 1974.
- ECCLESTON. J. & RUSSEL, K. Connectedness and Ortogonality in Multifactor Designs. *Biometrika*, London, 62(3): 341-345. 1975.

- FEDERER, W. Experimental Design Theory and Application. Canada, Macmillan, 1955. 544p.
- FERREIRA de CARVALHO, J. Modelos Lineares e sua Avaliação. 1982. 95p. (Tese de Livre Docência - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos/USP).
- FISHER, R. On the mathematical foundations of theoretical statistical Philosophy. Transactions of the Royal Society, London, 222: 309. 1922.
- FISHER, R. An examination of the different possible solutions of a problem in Incomplete Blocks. Annals of Eugenics, London, p. 52-75, 1940.
- FOX, J. Linear Statistical Models and Related Methods with applications to social research, New York, John Wiley & Sons, 1984.
- FRASSER, D. Fundamentos y Técnicas de la Inferencia Estadística, Mexico, Edit. Limusa, 1976. 404p.
- GOODNIGHT, J. The sweep operator: Its importance in statistical computing SAS TECHNICAL report R-106 Raleigh: SAS INSTITUTE, 1978. 40p.
- GRAYBILL, F. An Introduction to Linear Statistics Models. New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1961. vol. 1, 463p.
- GRAYBILL, F. Theory and Application of the Linear Models. California. Duxbury Press. 1976. 704p.
- GUPTA, S.C. A basic lemma and the analysis of block and Kronecker product designs. Journal of Statistical Planning and Inference, Amsterdam, 7: 407-416, 1983.

- HARTLEY, H. A plan for programming analysis of variance for general purpose computers. *Biometrics*, Alexandria, 12: 110-122, 1956.
- HASEMAN, J. & GAYLOR, D. An Algorithm for non-iterative estimation of multiple missing values for crossed classifications. *Technometrics*, Alexandria, 15: 631-636. 1973.
- HEALY, M. & WETSMACOTT, M. Missing values in experiments analysed on automatic computers. *Appl. Statistics*, London, 5: 203-206, 1956.
- HOCKING, R.R. *The Analysis of Linear Models*. Monterey. California Brooks/Cole Publishing. 1985. 384p.
- HOCKING, R.R.; SPEED, F.M. & COLEMAN, A.T. Hypotheses to be tested Whit Unbalanced Data. *Communications An Statistics Theory and Madison*, A9(2): 117-129. 1980.
- HOFFMANN, R. & VIEIRA, S. *Análise de Regressão: Uma Introdução à Econometria*. 2^a edição, São Paulo, Ed. Hucitec, 1983. 379p.
- IEMMA, A.F. *Modelos Lineares: uma Introdução para Profissionais da Pesquisa Agropecuária*. Londrina. FUEL/Depto. de Matemática Aplicada. 1987. 263p.
- IEMMA. A.F. *Uma introdução algebra de Matrizes*. Piracicaba, ESALQ/USP, 1989. 118p.
- JOHN, J.A. & QUENOUILLE, M.H. *Experiments: Designs and Analysis*. 2 ed. London. Charles Griffin & Company. 1977. 296p.
- JOHN, P.W. *Statistics Designs and Analysis of Experiments*. Mac Millan. 1971. 355p.

- JOHN, P.W. Incomplete Block Designs. New York, Marcel Deckker Inc. 1980. 101p.
- KAGEYAMA, S. Connectedness of two Associate PBIB Designs. Journal of Statistical Planning and Inference, Amsterdam, 7: 77-82, 1982.
- KAGEYAMA, S. A Note on A Efficiency of Connected designs. Journal of Statistical Planning and Inference, Amsterdam, 20: 221-224, 1988.
- KEMPTHORNE, O. The efficiency factor of an incomplete block design. Annals of Mathematic Statistic, Baltimore, 27: 846-849, 1956.
- KSHIRSAGAR, A. Linear Models. New York. Marcel Dekker. 1983. 421p.
- LI, C.C. Analysis of unbalanced data. A Pre-Program Introduction, New York, Cambridge University Press, 1982.
- MEDINA, V.M. & IEMMA, A.F. Estimabilidade de contrastes em delineamentos desconexos. In: Simpósio de Estatística Aplicada a Experimentação Agronômica, 3.; Reunião Anual da Região brasileira da Sociedade Internacional de Biometria, 34 Lavras, 1989. Resumos. Lavras, ESAL, 1989. p.31.
- MILLIKEN, G. & JOHNSON, D. Analysis Missing Data. New York, Van Nostrand Reinhold Company. 1984. 472p.
- MURRAY, L. & SMITH, D. Estimability Testability and Connectedness in the Cell Means Models. Comm. Statistic. Theory Methods, New York, 14(8): 1899-1917. 1985.

- MURRAY, L. Missing Cell Estimate in the Randomized Block Designs with Random Effects. American Statistical Association, Washington, 42(2): 134-136. 1988.
- MURRAY, L. A Note on Connectedness in Fixed Effects Manova and G Manova Models with Missing Cells. Comm. Statist. Theory Meth., New York, 18(7): 2527-31, 1989.
- NAIR, K. & RAO, C. A note on unbalanced incomplete block designs. Science and Culture, Calcutta, 7: 568-69, 1942.
- NELDER, J.A. A note on missing plot values. Biometrics, Raleigh, 10: 400-401, 1954.
- NETER, J. & WASSERMAN, W. Applied Linear Statistical Models. Richard v. Irwin Inc. 1974. 481p.
- NEYMAN, J. & DAVID, F. Extension of the markoff theorem on least squares. Statistical Research Memoirs, London, 2: 105-116, 1938.
- NORTON, H. A further note on missing data. Biometrics, Raleigh, 11: 110. 1955.
- PARZEN, E. An approach to time series analysis. Ann. Math. Statistics, New York, 32: 951-989. 1961.
- PLACKETT, R.L. A historical note on the method of least squares. Biometrika, London, 36: 458-60, 1949.
- PLACKETT, R.L. Some theorems in least squares. Biometrics, London, 37: 149-157, 1950.
- RAGHAVARAO, D. Construction and Combinatorial Problems in Designs of Experiments. New York, John Wiley. 1971. 386p.

- RAGHAVARAO, D. & FEDERER, W. On connectedness in two way elimination of Heterogeneity Designs. The Annals of Statistical. vol. 3 n°3. 1975. p. 730-735.
- RAO, C.R. Markoff's theorem with linear restrictions on parameters. Sankhyā, Calcutta, 7: 16-19, 1945.
- RAO, C.R. Generalization of markoff's theorem and tests of linear hypothesis. Sankhyā, Calcutta, 7: 9-16, 1945.
- RAO, C.R. On the linear combination of observations and the general theory of least squares. Sankhyā, Calcutta, 7(3): 237-249, 1945.
- RAO, C.R. A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistic. J. Royal Statist. Soc., 24: 152-158, 1962.
- RAO, C.R. Linear Statistical Inference and its Applications. 2^o ed., New York, John Wiley & Sons. 1973. 625p.
- RAO, C.R. A note on Balanced Designs. Annals of Mathematical of Estatistic, Hayward, 29: 290-294, 1958.
- RIBOLDI, J. A Decomposição da Soma de Quadrados de Tratamentos nos Delineamentos de Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados. Piracicaba, 1988. 165p. (Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).
- RUBIN, D. A non iterative algorithm for least squares estimation of missing values in any analysis of variance design. Applied Statistic, London, 21: 136-141. 1972.
- SARRIES, G.A. Sistema SABI: Manual do Usuário. Piracicaba, USP/PCP/CIAGRI, 1988a.

- SCHEFFÉ, H. The analysis of variance. New York, Wiley Publication in Statistic, 1959. 477p.
- SEARLE, S.R. Linear Models. New York, John Wiley. 1971. 532p.
- SEARLE, S.R. Matrix Algebra Useful for Statistics. New York, John Wiley & Sons. 1982. 438p.
- SEARLE, S.R. Linear Models for Unbalanced Data. New York, John Wiley, 1987. 536p.
- SEELEY, J. & BIRKES, D. Estimability in Partitioned Linear Models. The Annals of Statistics, 8(2): 399-406. 1980.
- SHAH, K.R. & DODGE, Y. On Connectedness of Designs. Sankhyā, Calcutta, 39: 284, 1977.
- SHRIKHANDE, S. & RAGHAVARAO, D. A method of construction of Incomplete block designs. Sankhyā, Calcutta, 25: 399-402, 1963.
- SIA, L. Some Properties of Connectedness in two-ways Designs. Comm. Statistics. Theory Methods. 6(12): 1165-1169. 1977.
- SPEED, F.; HOCKING, R. & HACKEY, P. Method of Analise on Balanced dates the Models Lineares. Journal of the American Statistical Association, Boston, 73(361) Sec. Teory and Methods: 105-111. 1978.
- STEMBERG, D.M. & HUNTER, W.G. Blocks of Designs. Technometrics, Alexandria, 26(2): 84-85. may, 1984.
- TAYLOR, J. Errors of treatment comparisons when observations are missing. Nature, London, 62: 262-263, 1948.

- THEIL, H. Principles of Econometrics. New York, John Wiley & Sons, 1971. 736p.
- THOMPSON, H. Extensions to missing plot techniques. *Biometrics*, Raleigh, 12: 241-249, 1956.
- TOCHER, K.D. The design and analysis of block experiments. *Journal of the Royal Statistical Society*, 14(1): 45-100, 1952.
- WEEKS, D.L. & WILLIAMS D.R. A note on the determination of connectedness in an n-way cross classification. *Technometrics*, Raleigh, 7: 281, 1964.
- WILKINSON G. Estimation of missing values for the analysis of incomplete data *Biometrics*. Raleigh 14 : 257, 286. 1958.
- WISHART, J. & SANDERS, M. Principles and practice of field: Experimentation. Commonwealth Agricultural Bureaux, Cambridge England, 125p. 1958.
- YATES, F. The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete. *Empire Journal Experiments Agriculture*, London, 1: 129-142, 1933.
- YATES, F. The analysis of multiple classifications with unequal number in the different classes. *American Statistical Association*, Washington, 2: 51-66, 1934.
- YATES, F. A new method of arranging variety trials involving a large number of varieties. *Journal Agricultural Science*, Cambridge, 26: 424-455, 1936.
- YATES, F. Experimental Design: Selected Papers of yates. Edit. Charles Greffin. 1970.

ZYSKIND, G. & MARTIN, F. On Best Linear estimation and a general Gauss Markov Theorem in Linear models with arbitrary non negative covariance structure. SIAM J. Appl. Math. 17(6): 1190-1202. 1969.