TESTES DE HIPÓTESES EM MODELOS LINEARES
COM DADOS DESBALANCEADOS E CASELAS VAZIAS

JOMAR ANTONIO CAMARINHA FILHO
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

Dissertação apresentada à Escola
Superior de Agricultura "Luiz de
Queiroz", da Universidade de São
Paulo, para obtenção do título
de Mestre em Agronomia, Área de
Concentração: Estatística e
Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Janeiro - 1995

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Livros da
Divisão de Biblioteca e Documentação - PCLQ/USP

Camarinha Filho, Jomar Antonio

C172t Testes de hipóteses em modelos lineares com dados
desbalanceados e caselas vazias. Piracicaba, 1995.
142p. ilus.

Diss.(Mestre) - ESALQ
Bibliografia.

1. Análise de variância 2. Hipótese estatística 3.
Modelo linear I. Escola Superior de Agricultura Luiz
de Queiroz, Piracicaba

CDD 519.56

TESTES DE HIPÓTESES EM MODELOS LINEARES
COM DADOS DESBALANCEADOS E CASELAS VAZIAS

JOMAR ANTONIO CAMARINHA FILHO

Aprovado em: 02. 03. 95

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

ESALQ/USP

Prof. Dr. Décio Barbin

ESALQ/USP

Prof^a. Dr^a. Marinéia de Lara Haddad

ESALQ/USP

Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA
Orientador

iv.

À Adriana
e aos meus pais

AGRADECIMENTO

Ao Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma, pela orientação no decorrer deste trabalho e, principalmente, pela confiança.

À CAPES, pela bolsa de estudos concedida.

Aos amigos do Departamento de Estatística da Universidade Federal do Paraná.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ. Especialmente, aos professores doutores: Clarice Garcia Borges Demétrio, Décio Barbin e Roberto Simionato Moraes.

SUMÁRIO

RESUMO	viii
SUMMARY	x
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. MATERIAL E MÉTODOS	32
3.1. Material	32
3.1.1. Conjunto A	32
3.1.2. Conjunto B	34
3.1.3. Pacotes Estatísticos	37
3.2. Métodos	38
3.2.1. Modelo Linear	38
3.2.1.1. Modelo com Interação	38
3.2.1.2. Modelo sem Interação	40
3.2.2. Solução de Mínimos Quadrados	40
3.2.2.1. Modelo com Interação	40
3.2.2.2. Modelo sem Interação	41
3.2.3. Somas de Quadrados	41
3.2.4. Hipóteses Estatísticas	42
3.2.4.1. Modelo com Interação	43
3.2.4.2. Modelo sem Interação	44
3.2.5. Construção das Matrizes	45
3.2.5.1. Modelo com Interação	46
3.2.5.2. Modelo sem Interação	49

3.2.6. Quadro da Análise de Variância	51
3.2.7. Projetores Ortogonais	52
3.2.8. Notação $RC \rangle$	53
3.2.9. Pacotes Estatísticos	55
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	59
4.1 Exemplo 1	59
4.1.1. Caso A1	60
4.1.2. Caso A2	71
4.1.3. Caso A3	79
4.1.4. Caso A4	87
4.1.5. Caso A5	91
4.2. Exemplo 2	95
4.2.1. Caso B1	95
4.2.2. Caso B2	102
4.2.3. Caso B3	108
4.2.4. Caso B4	113
4.2.5. Caso B5	120
4.2.6. Caso B6	125
4.2.7. Caso B7	129
5. CONCLUSÕES	132
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	136

TESTES DE HIPÓTESES EM MODELOS LINEARES
COM DADOS DESBALANCEADOS E CASELAS VAZIAS

Autor: JOMAR ANTONIO CAMARINHA FILHO

Orientador: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

RESUMO

Os usuários de sistemas computacionais para estatística (pacotes estatísticos), especialmente os pesquisadores de ciências aplicadas, são, em geral, vulneráveis no tocante à interpretação das hipóteses testadas através das somas de quadrados por eles fornecidas. Queremos crer que isso ocorra devido à facilidade de acesso e manuseio, muitas vezes inadequado, desses programas. De fato, o acesso imediato aos pacotes estatísticos e a escassez de profissionais da estatística, têm motivado os pesquisadores das áreas aplicadas a planejar e analisar suas próprias pesquisas. Naturalmente, nesses casos, o processo é agilizado e os resultados são obtidos rapidamente. No entanto, a documentação insuficiente, inerente a alguns pacotes, e a ausência do profissional especializado em análise de dados, pode levar,

em geral, a erros de interpretação, que podem comprometer os resultados obtidos a altos custos e após vários anos de experimentação.

Com o objetivo de amenizar essa deficiência e visando iniciar o pesquisador nas idéias sobre interpretação das hipóteses testadas, no presente trabalho foram utilizados dois pacotes estatísticos, o SAS (Statistical Analyses System) e o STATGRAPHICS (Statistical Graphics System). Essa escolha se deveu ao fato de que o primeiro apresenta quatro tipos de somas de quadrados e, portanto, quatro tipos de hipóteses; o segundo, duas delas. Naturalmente, ambos são universalmente adotados.

Foram tomados dois exemplos práticos, a fim de auxiliar na escolha das hipóteses mais adequadas para as diversas caracterizações impostas ao modelo linear proposto, ou seja, experimentos balanceados e desbalanceados, com e sem caselas vazias.

Nesse contexto, foi possível mostrar que as hipóteses para dados balanceados não apresentaram diferenças, isto é, as quatro hipóteses do SAS e as duas do STATGRAPHICS foram idênticas. Já para dados desbalanceados, as diferenças entre as hipóteses tornaram-se evidentes. Para o caso de caselas vazias, o problema agravou-se severamente, a construção das hipóteses tornou-se difícil e sua interpretação extremamente complexa.

TESTS OF HYPOTHESIS IN LINEAR MODELS
WITH UNBALANCED DATA AND MISSING CELLS

Author: Jomar Antonio Camarinha Filho

Adviser: PROF. DR. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

SUMMARY

The users of statistical packages, specially the searchers of practical sciences are generally vulnerable relating to the interpretation of the tested hypothesis through the sum of squares provided by them. We want to believe that this occur due to the facility of access and handling, inadequated many times, of these programs. In fact, the immediate access to the statistical packages and the lack of statistical professionals have motivated the searchers of the practical areas to plan and analyze their own searches. Naturally, in these cases, the procedure is rapid and the results are achieved rapidly. But the insufficient documentation inherent to some packages and the lack of the specialized professional in data analysis, may lead, generrally, to interpretation mistakes wich can promise the results achieved at a high effort and after

many years of experimentation.

On the purpose of easing this lack and seeking to initiate the searcher in these ideas about interpretation of the tested hypothesis, the present production made use of two statistical packages, the SAS (Statistical Analyses System) and the STATGRAPHICS (Statistical Graphics System). This choice occurred by the fact of the first one presents four kinds of sum of squares and therefore, four kinds of hypothesis and the second one, two of them. Naturally, both are adapted universally.

Two practical examples were taken, so that they help in the suitable choices of hypothesis to the several characterizations imposed to the linear model proposed, that is, balanced and unbalanced experiments, with or without missing cells.

In this respect, it was possible to show that the hypothesis for balanced data didn't present differences, that is, the four hypothesis of the SAS and the both of STATGRAPHICS were exactly the same. But for unbalanced data the differences among the hypothesis became evident. To the case of missing cells, the problem grew very worse and the construction of the hypothesis became hard and its interpretation extremely complex.

1. INTRODUÇÃO

Testes de hipóteses têm sido amplamente utilizados, como alternativa para se concluir a respeito da influência das fontes de variação em modelos lineares. Para tanto, é comum a utilização de pacotes estatísticos que fornecem análises de variância, baseadas em testes F de Snedecor, para a tomada de decisões.

Como é bem sabido, na análise de variância obtém-se uma soma de quadrados para cada efeito do modelo linear que, por sua vez, está intimamente ligada à hipótese a ser testada sobre o referido efeito. Em contrapartida, os quadros convencionais apresentados por muitos pacotes estatísticos estão, na verdade, sendo utilizados para o teste de funções lineares paramétricas, muitas vezes, de pouco interesse do pesquisador. Na verdade, não haveria problema algum se ele soubesse disso.

De fato, esta situação pode ocorrer com uma frequência considerável.

Grande parte deste problema poderia ser resolvida se os pacotes existentes mostrassem, de maneira explícita, que hipóteses estão sendo testadas. Dessa forma, os pesquisadores, principalmente os que não conhecem profundamente a estatística, teriam condições de avaliar o grau de adequação ou não, aos objetivos de sua pesquisa, da hipótese que está sendo testada. Infelizmente, isso, em

geral, não ocorre.

Devido à facilidade de manuseio dos diversos pacotes estatísticos, um considerável número de usuários costuma cometer erros de interpretação de hipóteses. Nesse contexto, um dos objetivos deste trabalho está na necessidade de se criar, com base em situações práticas, subsídios para alertar a esses pesquisadores.

Foram criados, portanto, dois exemplos com várias situações procurando evidenciar, exatamente, o que se testa e como cada um deles obtém a estatística F. O modelo usado para o exemplo é o de classificação dupla cruzada, com e sem interação, tanto para dados balanceados quanto para dados desbalanceados. Ademais, acrescentou-se o caso onde ocorrem perdas totais de observações, ocasionando um problema ainda maior: o de caselas vazias.

Para auxiliar nessas interpretações, utilizaram-se dois pacotes estatísticos de ampla aplicação, o SAS (Statistical Analyses System) e o STATGRAPHICS (Statistical Graphics System), tendo como enfoque principal as somas de quadrados fornecidas pelo Procedimento GLM (General Linear Models Procedure) do SAS, que são as somas de quadrados dos tipos I, II, III e IV.

2. REVISÃO DE LITERATURA

YATES (1934) comentou que o método estatístico apropriado para o caso de dados balanceados é simples e muito desenvolvido em associação com experimentos de campo na agricultura. O método é um caso específico do método conhecido como análise de variância, que foi introduzido por R.A.Fisher. Alertou, no entanto, que na presença de dados desbalanceados, a análise necessita de consideráveis modificações. Nesse trabalho, o autor relatou a análise de ensaios fatoriais com dados desbalanceados e apresentou quatro métodos para solucionar o problema. Tais métodos, segundo HERR (1986), estão relacionados com os principais métodos utilizados nos dias de hoje. Os métodos são:

a) Quadrado de médias ponderadas de Yates que, incorporado pelo SAS, fornece as Somas de Quadrados do tipo III e testa hipóteses sobre médias não ponderadas de linhas (IEMMA, 1991, médias não ponderadas). Todos podendo ser descritos pela notação $RC(\gamma)$ de Searle (ver SEARLE, 1971 ou IEMMA, 1991) pela forma: $R(\alpha|\mu, \beta, \gamma)$;

b) Tamanhos proporcionais de caselas de Yates que, incorporado pelo SAS, fornece as Somas de Quadrados do tipo I e testa hipóteses sobre médias ponderadas de linhas (IEMMA, 1991, médias ponderadas), ou $R(\alpha|\mu)$ de Searle;

c) Ajustamento de constantes de Yates que, incorporado pelo SAS, fornece as Somas de Quadrados do tipo

II e testa hipóteses sobre médias ponderadas de linhas ajustadas para colunas (IEMMA, 1991, médias ponderadas), ou $R(\alpha|\mu, \beta)$ de Searle; o qual se utiliza de parametrização sucessiva;

d) O quarto método não é de interesse ao trabalho, pois não está incorporado ao PROC GLM.

YATES (1934) alertou que os métodos diferem de acordo com a suposição de existência de interação. Disse ainda que, se suposições são feitas, o método de ajuste de constantes fornece estimativas e testes de hipóteses eficientes. Caso contrário, as médias das caselas fornecem estimativas eficientes, e o método dos quadrados de médias ponderadas, eficientes testes de significância. No caso do fatorial 2^k a análise pode ser feita de forma simples, com ou sem interação. O autor considerou que, no resultado da análise com um fator, a soma de quadrados total ajustada pode ser decomposta em soma de quadrados do resíduo e soma de quadrados do modelo. Notou, ainda, que a soma de quadrados do modelo dividida pelos graus de liberdade (g.l.) forneceu uma estimativa eficiente da variância das observações individuais, quando a hipótese de não diferença entre os efeitos principais foi verdadeira. Deixou claro que, usando-se "boas" estimativas ter-se-iam "bons" testes. Uma visão extremamente lúcida do artigo, principalmente para a época em que foi escrito, foi a preocupação em descrever "como" os cálculos deveriam ser realizados e,

também, "o que" se estava calculando.

YATES (1933) desenvolveu explicitamente o que ele pretendia para o efeito de médias de caselas. Ele distinguiu, claramente, o modelo aditivo (sem interação) e o modelo superparametrizado. Declarou ser o método tipo II o preferido se o modelo é aditivo, caso contrário, tipo III. Porém, para se provar essa afirmação de Yates, esperou-se mais 40 anos, comentam BURDICK & HERR (1980).

Segundo HERR (1986), no mesmo volume da JASA (Journal of the American Statistical Association), Snedecor (1934) sugeriu outro modo para se contornar o problema, através de um teste de χ^2 . Mais tarde, Snedecor & Cox (1935) resumiram os métodos, apresentados até aquele momento, para dados desbalanceados.

KRAMER (1955) ponderou que a principal dificuldade resultava em se determinar a correta soma de quadrado para os efeitos do modelo. Ele preferiu identificar "o que" estava sendo calculado, ou testado, e não "como" calcular. Ressaltou que a soma de quadrados do tipo II é ótima se a suposição de não interação for feita, caso contrário, deu preferência a do tipo III, concordando

SNEDECOR, G.W., "The Method of Expected Number for Tables of Multiple Classification With Disproportionate Subclasses Numbers". Journal of The American Statistical Association. 29, 989-99. 1934.

SNEDECOR, G.W. & COX, G., "Disproportionate Subclass Numbers in Tables of Multiple Classification". Iowa State Agriculture Experiment Station Research Bulletin 180. 1935.

com YATES (1934). Sua visão foi que a soma de quadrados do tipo III era mais fácil de se calcular, mas não era tão boa se o modelo fosse aditivo. Trabalhando com um exemplo com dois fatores, relembrou o método de quadrados de médias ponderadas de YATES (1934) e notou que o número desigual de elementos em cada subclasse implica em falta de ortogonalidade entre os efeitos principais e as interações.

DITCHBURNE (1955), trabalhando com um experimento com dois fatores, afirmou que, quando cada fator é testado em todos os níveis do outro fator, e o número de observações nas caselas é igual ou proporcional, verifica-se que as estimativas dos efeitos de cada fator são facilmente obtidas, a análise de variância dos dados é simples e a interpretação dos resultados é livre de dificuldades, pois os dados são ortogonais. Porém, se há desbalanceamento, ou se todos os níveis de um fator não são testados para todos níveis do outro (de maneira que algumas caselas são vazias), os dados podem ser não-ortogonais, e um método de análise deve ser encontrado para satisfazer o delineamento do experimento particular. Porém, seu trabalho tratou de uma forma muito específica o problema de casela vazia, através de tabelas triangulares.

SCHEFFÉ (1959) propôs que se fizesse a análise, desconsiderando que as caselas são vazias, ou que os efeitos principais não são estimáveis.

ELSTON & BUSH (1964) lembraram que, quando se

testam hipóteses sobre parâmetros de um modelo, certas somas de quadrados são calculadas e servem de base para a análise de variância. Disseram ainda que, se interações são assumidas no modelo, as somas de quadrados apropriadas para testar os efeitos principais dependem de como esses efeitos são definidos. Procuraram deixar claro a respeito do que as hipóteses sobre efeitos principais podiam testar, e ilustraram um método conveniente para se obter as somas de quadrados correspondentes, especialmente para casos onde ocorriam caselas vazias. Enfatizaram que, em experimentação biológica, isto era freqüente. Além disso, comentaram que o caso de caselas vazias não tem sido adequadamente discutido na literatura e forneceram estímulos para que programadores de pacotes construam métodos corretos para análise de dados. O método se resume em: o modelo básico em notação matricial dado por $E(Y) = A\zeta$, onde y é um vetor coluna de observações, A é uma matriz delineamento e ζ é um vetor coluna de parâmetros da forma, para o exemplo,

$$\zeta' = (\mu \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{13} \gamma_{21} \gamma_{22} \gamma_{23})$$

sendo que A é uma matriz quadrada de ordem doze cujos elementos são "uns" e "zeros". Rearranjando os vetores colunas de A como $E(Y) = A\zeta = [A_1 | A_2] \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2$, onde os vetores colunas em A_1 são escolhidos para serem qualquer conjunto de vetores independentes ocorrendo em A formando uma base para todos os vetores colunas de A . Assim, pode-se escolher A_1 e A_2 de maneira que:

$\zeta'_1 = (\mu \ \alpha_1 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \gamma_{11} \ \gamma_{12})$ e $\zeta'_2 = (\alpha_2 \ \beta_3 \ \gamma_{13} \ \gamma_{21} \ \gamma_{22} \ \gamma_{23})$ e

a hipótese testada pode ser escrita por:

$H_0: C\zeta = 0$, isto é, $[C_1 | C_2] \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = 0$, onde a partição de C corresponde àquela de ζ , e onde os vetores linhas de C são mutuamente independentes. Então a condição necessária e suficiente para a testabilidade é $C_2 = C_1(A_1'A_1)^{-1}A_1'A_2$, e contando que a hipótese é testável a soma de quadrados apropriada é

$\hat{\zeta}'_1 C'_1 [C_1(A_1'A_1)^{-1}C_1]^{-1}C_1\hat{\zeta}_1$, onde $\zeta_1 = (A_1'A_1)^{-1}A_1'y$.

ELSTON & BUSH (1964) utilizaram o modelo em que todos os efeitos, exceto o erro, são assumidos fixos. Em detalhe, foram considerados apenas dois fatores, A e B, com a e b níveis, respectivamente, mas o princípio para uma classificação maior é exatamente o mesmo. Comentaram que nesse modelo, sempre é possível desenvolver um teste para cada fator, com (a-1) e (b-1) g.l., contanto que o delineamento seja conexo (IEMMA, 1991, p.52). Porém, o teste pode não ser de interesse prático. O teste para interação sem casela vazia pode ser feito sem dificuldades com (a-1)(b-1) g.l.. Porém, se há t caselas vazias, a interação deve ser testada com (a-1)(b-1)-t g.l. e, obviamente, não testa todas as interações, mas somente aquelas que envolvam médias estimáveis. Utilizaram, também, o conceito de funções estimáveis, relacionando-o com as hipóteses testáveis, ou seja, uma hipótese só é testável se sua função linear paramétrica correspondente for estimável

(ver IEMMA, 1987 e 1991). Apresentaram uma forma geral para as hipóteses testáveis, sobre cada um dos efeitos do quadro da análise de variância. Nesse artigo, os autores trabalharam com um "novo" modelo para o tratamento dos dados: o modelo de médias de caselas. Todas as hipóteses testadas foram descritas por esse modelo.

Muitos pesquisadores, depois do trabalho de ELSTON & BUSH (1964), começaram a utilizar o modelo de médias de caselas. Dentre eles, URQUHART, WEEKS & HENDERSON (1973), KUTNER (1974), SPEED & HOCKING (1976), SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978), FRANE (1980), SEARLE, SPEED & HENDERSON (1981), JENNINGS & WARD (1982) e IEMMA (1991), entre outros.

É comum notar que muitos artigos citam HOCKING & SPEED (1975) para a escolha do modelo de médias de caselas, embora o trabalho de ELSTON & BUSH (1964), além de proporcionar uma forte contribuição para a solução do problema, é um dos pioneiros na utilização desse modelo.

Na literatura existem algumas justificativas para a escolha do modelo de médias de caselas. Dentre essas, destacam-se:

"...o modelo permite minimizar muitas das origens da confusão, principalmente, a construção e o entendimento das hipóteses em função dos parâmetros do modelo." (SPEED, HOCKING & HACKNEY, 1978).

"...o modelo de médias de caselas é o mais

adequado para essa situação, pois dá ao pesquisador a flexibilidade de especificar, precisamente, as funções paramétricas relevantes, em termos das médias de caselas. Os parâmetros do modelo de médias têm clara relação no contexto experimental, e as médias amostrais correspondentes fornecem boas estimativas. Assim, qualquer função linear das médias pode ser estimada." (CURQUHART & WEEKS, 1978).

"... os modelos de médias apresentam, ainda, a vantagem de descrever hipóteses com grande simplicidade, em relação aos modelos superparametrizados." (IEMMA, 1991).

SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978) definem o modelo de médias ou modelo-M, como o modelo linear

$$y = W\mu + e$$

onde

W_k é uma matriz conhecida, μ_k é um vetor de médias das populações das quais são retiradas as amostras aleatórias que compõem as caselas, y_k é um vetor de observações e e_k é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis com estrutura de Gauss-Markov.

O conceito de Mínimos Quadrados emergiu por volta de 1800, na tentativa de se obter melhores estimativas para os parâmetros. Começou através de Gauss, ao redor de 1795, e o interesse continua até o presente, passando por Fisher, que introduziu esse conceito à análise de variância, nome proposto também por ele.

Segundo OVERALL & SPIEGEL (1969), o método de mínimos quadrados, quando aplicado a dados balanceados em delineamentos experimentais, uma análise de variância produz resultados idênticos, quando comparado ao método da análise de regressão. Porém, se aplicado em problemas mais complexos, como o desbalanceamento, os resultados são totalmente diferentes do esperado. Dentro desse contexto, os autores fazem a seguinte citação: "O problema é real e sério, pois programas de computador, para a análise de variância de mínimos quadrados, estão facilmente disponíveis e realizam diferentes tipos de análises, sendo que o método usado, geralmente, não é compreendido pelo usuário".

Na conclusão do artigo de OVERALL & SPIEGEL (1969) é enfatizada a grande contribuição que o avanço da informática pode proporcionar, facilitando na escolha do método mais adequado e, conseqüentemente, na interpretação dos resultados.

Nesse contexto, os autores apresentaram três métodos de mínimos quadrados para a análise de dados experimentais:

- o método de mínimos quadrados completos ou método do modelo linear geral (GRABILL, 1961; SHEFFÉ, 1959); que corresponde ao método (a) de YATES (1934).

- o método do delineamento experimental (SNEDECOR & COCHRAN, 1967); que corresponde ao método (c)

de YATES (1934).

- e o método da ordenação "a priori" (Cohen, 1968); que corresponde ao método (b) de YATES (1934).

Segundo IEMMA (1991), o PROC GLM incorporou em 1976 esses três métodos, e estão consagrados na literatura como sendo propostos por OVERALL & SPIEGEL (1969). Embora YATES (1934) e Henderson (1953) tivessem proposto anteriormente. Uma boa comparação entre os métodos pode ser vista, também, em IEMMA (1991).

Durante a década de 70, publicaram-se vários trabalhos sobre ensaios fatoriais com dados desbalanceados, devido à considerável confusão na análise de tais experimentos. Depois da entrada dos computadores, houve uma redescoberta dos artigos de YATES (1933-34), o que não ocorreu sem polêmica (HERR, 1986). Dentre eles podem ser vistos:

URQUHART, WEEKS & HENDERSON (1973) fizeram um relato histórico a respeito da utilização de modelos lineares, com a análise de conjuntos complexos de dados. O motivo principal para realização do trabalho veio com a dificuldade em se analisar e interpretar conjuntos de dados desbalanceados com grande número de caselas vazias.

De acordo com URQUHART, WEEKS & HENDERSON (1973), modelos lineares têm sido usados para descrever as

COHEN, J. Multiple Regression as a General Data - analytic System. Psychological Bulletin, 70, 426-49, 1968.

HENDERSON, C.R., "Estimation of Variance and Covariance Components. Biometrics, 9: 226-52. 1953.

características de interesse do experimento, exercendo, assim, efeito substancial na própria análise. Alguns modelos têm sido superparametrizados, no sentido que contêm mais parâmetros que necessitam para descrever o contexto experimental. Assim, o experimento não suportará essas estimações. A idéia de estimabilidade de Rao (1945) foi introduzida para evitar esse problema, conjuntamente com o modelo de posto completo. Relataram, ainda, o porquê de se utilizar o método de mínimos quadrados para se obter uma solução para o vetor de parâmetros, tanto para o modelo restrito, quanto para o irrestrito. Dois exemplos, um fatorial 2×3 e um 3×3 , ilustram os conceitos descritos. Comentaram ainda que com um modelo já escolhido para o delineamento experimental, "a seleção de um conjunto experimental interessante, descrito por funções lineares, baseadas em um vetor de médias, conduz a um grande problema para o estatístico e para o pesquisador."

FRANCIS (1973) teceu uma consideração sobre alguns programas que fornecem o quadro da análise de variância, entre eles, o SAS. Essa comparação é feita através de um exemplo de um ensaio fatorial com dois fatores, na presença de desbalanceamento. Nesse exemplo, foi encontrada uma soma de quadrados negativa para a interação, o que fez aumentar a discussão e certas

indagações, como: "Quantas análises são realizadas e publicadas, usando cálculos computacionais totalmente falsos?", ou: "Nenhuma documentação para a análise de variância, nem mesmo mensagens escritas, sugerem a causa do problema?". O pesquisador ressalta que um programa sem uma documentação adequada pode ser perigoso, além do que, o usuário pode se enganar.

Na tentativa de esclarecer o problema, FRANCIS (1973) utilizou três programas. Porém, apenas o BMDX64 esclareceu, através de seu manual, como os cálculos para as somas de quadrados são obtidas, possibilitando que um estatístico ou até mesmo qualquer usuário, decifre os resultados e, conseqüentemente, faça um melhor uso do programa. Considerou que o erro do SAS é devido à não-ortogonalidade entre os efeitos. Assim, a soma de quadrados da interação não pode ser obtida por subtração.

De acordo com KUTNER (1974), os resultados de uma análise de dados balanceados são, freqüentemente, resumidos por um quadro de análise de variância. Cada soma de quadrados da análise de variância está associada a uma hipótese particular do modelo linear. Essas hipóteses são bem conhecidas e não causam confusão a respeito do que se está testando. Porém, as hipóteses para a análise de variância com dados desbalanceados não são tão simples e, portanto, estatísticos se confundem sobre o que se está testando. Inclusive, o teste pode não ser de seu interesse.

Algo muito semelhante foi dito por DITCHBURNE (1955), ELSTON & BUSH (1964) e IEMMA (1991).

Um ensaio fatorial com dois fatores (Droga x Doença) foi desenvolvido para ilustrar as idéias de KUTNER (1974). Utilizou o modelo de médias de posto completo. Apresentou as hipóteses adequadas a cada caso, e forneceu, em duas tabelas, as somas de quadrados correspondentes. Mas não esclareceu, explicitamente, como construir matricialmente as hipóteses que estão sendo testadas. Apenas forneceu a fórmula para o cálculo das somas de quadrados de maneira matricial. O teste de hipóteses assumindo o modelo-M e a soma de quadrados para testar

$$H_0: H'\mu = h$$

onde H' é uma matriz ($s \times ab$) de constantes conhecidas de posto linha completo, s ($s < ab$), e h é um vetor ($s \times 1$) de constantes conhecidas, é dada pela expressão

$$SQH_0 = (H'\hat{\mu} - h)'[H'(W'W)^{-1}H]^{-1}(H'\hat{\mu} - h)$$

e $\hat{\mu} = (W'W)^{-1}W'y$. Em relação à hipótese testada, H_0 , a relação SQH_0/σ^2 tem distribuição de χ^2 central com s graus de liberdade. O quadrado médio do resíduo (QM_{res}) é uma estimativa não-viesada de σ^2 e a estatística

$$(SQH_0/s)/QM_{res} \text{ tem distribuição } F(s, \sum(n_{ij}-1))$$

Ver SEARLE (1971, p. 112) para maiores detalhes.

SPEED & HOCKING (1976) mencionaram que as somas de quadrados dadas pelas tabelas de análise de variância podem ser escritas de forma mais simples, através da notação RC), visto que essa notação pode ser aplicada

em dois modelos lineares distintos, um de posto incompleto (SEARLE, 1971), outro de posto completo (CARLSON & TIMM, 1974). Mostraram também onde as duas notações são equivalentes. Infelizmente, a notação não indica a hipótese testada no quadro da análise de variância. Então, é provável a ocorrência de erros nas interpretações das hipóteses. Quando se utiliza a notação $R(\)$ em modelos de posto completo reparametrizado, observa-se que as somas de quadrados obtidas pela imposição de condições não estimáveis, do tipo $\alpha. = \beta. = \gamma_{1.} = \gamma_{.j} = 0$, no modelo superparametrizado, são idênticas às aquelas sugeridas por YATES (1934). Searle (1972) já advertia que essas hipóteses não são de forma simples, quando se trabalha com dados desbalanceados, e a notação $R(\)$ é de pequeno auxílio na identificação das diferentes hipóteses.

Nesse contexto, SPEED & HOCKING (1976), comentaram que a notação $R(\)$ é limitada para gerar somas de quadrados na análise de dados, ou seja, nem todos os contrastes de interesse são possíveis de serem descritos por essa notação. Portanto, a notação $R(\)$ não deve ser usada para descrever quais as hipóteses testadas. Mas, uma vez decidida a hipótese, essa notação é um algoritmo eficiente para se determinar as somas de quadrados.

SEARLE, S. R., "Using the $R(\)$ Notation for Reduction in Sums of Squares when Fitting Linear Models. Presented at the Spring Regional Meetings of ENAR. Ames, Iowa. 1972.

URQUHART & WEEKS (1978) denotaram por dados "messy" aqueles com classificação cruzada e desigual número de repetições, contendo, talvez, caselas vazias.

SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978), em sua pesquisa, afirmaram: "... as hipóteses de interesse não são tão fáceis de se construir e, nem tampouco, de se interpretar...". Segundo os autores, quando se optou em fazer a análise para dados "messy", baseada em conhecimentos já sólidos da análise de dados balanceados, muitos pesquisadores criaram métodos diferentes, proporcionando resultados distintos e, assim, muita confusão. Nesse contexto, HERR (1986) comentou que o primeiro pesquisador a se deparar com problema de dados "messy" foi Fisher, em 1925, propondo uma solução sem maiores detalhes. Já em 1931, descreveu a aplicação do método de mínimos quadrados para o problema da análise com dados desbalanceados e com dois fatores.

SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978) examinaram vários métodos propostos na literatura e fizeram uma associação desses métodos com os pacotes estatísticos da época. Concluíram, portanto, que o critério natural de seleção de qual método utilizar é a hipótese a ser testada. Para descrever e comparar os métodos, empregaram o modelo de médias de caselas. O trabalho também discute, brevemente, sobre o problema de caselas vazias. Propuseram nove hipóteses para a comparação entre os métodos. Nessa

apresentação, comentaram que através de alguns deles pode-se realizar análises com caselas vazias, impondo-se alguma restrição ou observando-se a posição da casela vazia.

A tabela contendo as nove hipóteses foi descrita da seguinte forma:

Tabela 1 - Hipóteses no modelo linear com dois fatores

EFEITOS	
LINHAS	
H1:	$\bar{\mu}_{i.} = \bar{\mu}_{i..}$
H2:	$\sum_j n_{ij} \mu_{ij} / n_{i.} = \sum_j n_{i.j} \mu_{i.j} / n_{i..}$
H3:	$\sum_j (n_{ij}) \mu_{ij} = \sum_i \sum_j n_{ij} n_{i.j} \mu_{i.j} / n_{.j}$
H4:	$\mu_{ij} = \mu_{i.j}$
COLUNAS	
H5:	$\bar{\mu}_{.j} = \bar{\mu}_{.j.}$
H6:	$\sum_i n_{ij} \mu_{ij} / n_{.j} = \sum_i n_{i.j} \mu_{i.j} / n_{.j.}$
H7:	$\sum_i (n_{ij}) \mu_{ij} = \sum_j \sum_i n_{ij} n_{i.j} \mu_{i.j} / n_{i.}$
H8:	$\mu_{ij} = \mu_{i.j}$
INTERAÇÃO	
H9:	$\mu_{ij} - \mu_{i.j} - \mu_{i.j.} + \mu_{i..} = 0$

BURDICK (1979) analisou três hipóteses dadas em um modelo com dois fatores de efeitos fixos, e descreveu as situações onde tais hipóteses são equivalentes. Essas hipóteses são as mesmas fornecidas pelo PROC GLM. Provou,

através de exposição geométrica, que a hipótese do tipo I e a hipótese do tipo III do PROC GLM, para linhas, são ditas equivalentes, se a média harmônica para cada coluna for a mesma, no caso de apenas duas linhas e, também, quando o tamanho das caselas é independente das colunas, no caso de mais de duas linhas.

SPEED & MONLEZUN (1979) propuseram que a análise de um ensaio fatorial do tipo 2^k , com dados desbalanceados, seja feita pelo método de médias não ponderadas. Isto porque não necessita inversão de matriz e pode ser realizado usando pacotes feitos para análise de dados balanceados. Além disso, proporciona testes exatos, no sentido de que todos os quadrados médios do numerador têm distribuição de Qui-Quadrado com 1 grau de liberdade, tanto para os efeitos principais quanto para o efeito da interação. YATES (1934) já havia feito referências a esse fato. Através de um exemplo, comparou o método de médias não ponderadas com o método de mínimos quadrados, mostrando que a escolha de qual se utilizar está nas hipóteses de interesse.

Um dos primeiros artigos encontrados na literatura, que trata especificamente do problema de casela vazia, é visto em FREUND (1980). Nesse artigo o autor reconheceu que o problema tem sido relatado durante muitos anos, mas pouco se tem feito para solucioná-lo. Comentou, ainda, que os pacotes disponíveis para dados desbalanceados

fornecem respostas satisfatórias para o caso de caselas vazias. Porém, quando as médias dessas caselas são não-estimáveis (SEARLE, 1971), as estimativas específicas obtidas por tais programas resultam da imposição de restrições ou suposições. Além disso, os pacotes não informam quais são essas suposições, embora possam fornecer mensagens de que os resultados não são, necessariamente, corretos ou únicos.

Segundo FREUND (1980), o PROC GLM usa a metodologia das funções estimáveis, para verificar as bases para as estimativas obtidas. O método das funções estimáveis é mais difícil de se utilizar. Por outro lado, além de fornecer uma estimativa particular de uma função específica em relação a outros parâmetros, possibilita a construção de testes de hipóteses baseados nos contrastes paramétricos e ainda afirmou: " Não há pretensão de que o PROC GLM tenha a solução "correta" para tais situações, entretanto, fornece informações sobre a natureza das possíveis estimativas e, portanto, permite aos pesquisadores decidirem se os resultados têm algum sentido prático. "

O objetivo de FREUND (1980) foi mostrar, através de um exemplo, os tipos de resultados que o PROC GLM oferece, e compará-los com um programa que usa reparametrização. Para tanto, dois métodos para obtenção de solução dos parâmetros foram descritos: a reparametrização

e o uso de funções estimáveis.

Nesse contexto, considerou-se que a análise com dados desbalanceados é mais complicada, pelo fato de que as estimativas e os testes sobre alguns parâmetros podem conter contribuições de outros, como pode ser visto em SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978).

FREUND (1980) trabalhou apenas com duas das quatro funções estimáveis do GLM (tipo III e IV) e comentou sobre as diferenças existentes entre as duas, quando há caselas vazias.

HOCKING, SPEED & COLEMAN (1980) mostraram duas formas de se tratar o problema de casela vazia. A mais conveniente é aquela que constrói as hipóteses, baseando-se nas funções estimáveis do GLM. O estímulo para escreverem o artigo, provavelmente, veio da preocupação mostrada na introdução do mesmo. Comentam que o usuário do melhor pacote estatístico pode gerar muitos quadros de análise de variância, o que, por sua vez, tem deixado a maioria dos usuários confusos, na escolha das somas de quadrados apropriadas para se proceder ao teste paramétrico desejado. Para tentar dar uma contribuição ao problema, são feitos três exemplos. Discute-se quais são as hipóteses "eficazes" quando ocorrem caselas vazias, fazendo-se algumas recomendações: a) no caso de experimento sem caselas vazias, dá-se preferência às mesmas hipóteses que são testadas, se todas as caselas têm a mesma frequência; b) se

há casela vazia, escolhem-se as hipóteses através das funções paramétricas de interesse do pesquisador; um algoritmo é providenciado para encontrar tais funções.

BRYCE (1980), assim como IEMMA (1991), citou o trabalho de SPEED, HOCKING & HACKNEY (1978) para a escolha do modelo de médias, deixando de lado o modelo superparametrizado. Comentou, também, que o estatístico deve mostrar ao pesquisador como testar hipóteses. Mas a responsabilidade da escolha de quais as hipóteses a serem testadas, deve ser do pesquisador. Forneceu uma boa discussão sobre contrastes "constraints" (SEARLE, 1971, p.209).

FRANE (1980) discutiu casos particulares onde o pacote estatístico BMDP fornece análises coerentes em relação a dados "messy". Um exemplo foi criado para a ilustração. Comentou-se, ainda, que o BMD10V foi o primeiro programa a tratar a análise com dados desbalanceados, de uma forma conveniente, por volta de 1960. O exemplo foi um fatorial 2×3 (modelo com efeitos fixos). As hipóteses usuais (para dados balanceados) para cada efeito do modelo foram descritas pelo modelo de médias de caselas. No caso de casela vazia, essas hipóteses, denotadas por subhipóteses, ficam restritas a algumas caselas (parecidas com a hipótese do tipo III e a hipótese do tipo IV, do PROC GLM).

GOODNIGHT (1978) usou o conceito de

estimabilidade para construir testes de hipóteses em modelos lineares nos ensaios fatoriais com efeitos fixos, sem recorrer às suposições usuais. Três tipos de funções estimáveis são definidas (equivalentes àsquelas do SAS, tipos I, II e III) e comenta-se que existem várias, dentre elas, uma quarta para o caso de caselas vazias (tipo IV).

SEARLE (1980) enfatizou que muitos pesquisadores trabalham com os pacotes estatísticos de modo a, primeiramente, obter a estatística F da análise de variância, sem antes formular as hipóteses testadas. Portanto, colocam-se na posição de primeiro calcular F e, então, tentar entender o que se está testando. Mostrou ainda como as funções estimáveis, dadas pelo PROC GLM, derivam das hipóteses testadas pelo modo tradicional. Em sua explanação, descreveu o estimador não viesado de σ^2 e, também, as formas das hipóteses testáveis e das somas de quadrados correspondentes. Uma relação entre essas descrições fornece a estatística F, que tem distribuição de Snedecor. Através dessa estatística é possível concluir a respeito da hipótese testada. Nesse contexto, de acordo com SEARLE (1980), o procedimento correto para se efetuar um teste de hipótese está, inicialmente, na formulação da hipótese. Só então, deve-se testá-la pelo uso da estatística F.

HEMMERLE (1980) considera situações, onde dados desbalanceados podem ser tratados pela substituição

de dados balanceados, para resolução de problemas em modelos lineares. Uma simples reestruturação de frequências nas caselas é aplicada.

BURDICK & HERR (1980) apresentaram as hipóteses mais comuns sobre linhas e colunas através de notação geométrica, baseando-se no modelo de médias de caselas. Porém, com certo cuidado, nota-se que as hipóteses apresentadas são idênticas às fornecidas pelo PROC GLM do SAS (tipos I, II e III). Dois métodos para a análise são providenciados: o método paramétrico, que se concentra nas interpretações paramétricas das hipóteses principais, e o método do modelo de comparação, que é visto como uma comparação entre o modelo de posto completo e o reduzido quando este não é completo. O problema do método paramétrico com dados desbalanceados é a não-ortogonalidade. Como consequência, a soma de quadrado da hipótese não "completa" a soma de quadrado total, e há a possibilidade de que efeitos sejam significativos, quando não o são. Já a maior desvantagem do método de comparação, está no fato de que as interpretações paramétricas dependem do tamanho das caselas, quando se testam as hipóteses dos tipos I e II. Mesmo assim, raramente se recomenda a hipótese do tipo III para o teste de dados desbalanceados.

O artigo de SEARLE, SPEED & HENDERSON (1981) tem como objetivo relacionar métodos para calcular as somas de quadrados para dados desbalanceados. Três métodos são

avaliados. Um impõe restrições no modelo superparametrizado, tornando-o de posto completo. Outro envolve a inversa de parte da inversa da matriz $X'X$ (Tipo III do SAS). O último é o método dos quadrados de médias ponderadas. Para se utilizar desses métodos, é necessário se basear em funções estimáveis. Diferenças entre os níveis de um fator, por exemplo, não são estimáveis em modelos com interação e caselas vazias. Portanto, a hipótese correspondente não será testável (ver IEMMA, 1991, p. 14 e 54). Utilizaram-se o modelo de médias de caselas para se contornar a situação, pois apresenta menos problemas com estimabilidade. Assim, com as técnicas de modelos lineares, é possível testar algumas hipóteses de interesse do pesquisador. Analisaram-se quatro pacotes estatísticos, especialmente, para o caso da análise com dados desbalanceados. Dentre os quatro, o SAS. Comenta-se o uso de restrições do tipo Σ (IEMMA, 1991) para o cálculo das somas de quadrados do tipo III. Somas de quadrados do tipo I e II são representadas pela notação RC), e a soma de quadrados do tipo IV são geradas como numeradores de estatísticas F, para testar hipóteses específicas.

O artigo de JENNINGS & WARD (1982) é o outro trabalho pioneiro para o caso de caselas vazias, encontrado na literatura. Trata-se da identificação de hipóteses no caso de caselas vazias. Com base no trabalho de FREUND (1980), eles provaram que muitas das dificuldades em se

entender os problemas quando se trabalha com caselas vazias, estão no uso do modelo superparametrizado. Neste contexto, SMITH & MURRAY (1983) citam Graybill (1976), ao afirmar que, geralmente, quando se faz a estimação de mínimos quadrados com um modelo de posto incompleto para dados desbalanceados, há confusão.

JENNING & WARD (1982), a partir do exemplo de FREUND (1980), buscaram identificar as hipóteses testadas pelo PROC GLM do SAS. Porém, não esclareceram como tais hipóteses são construídas, nem como são calculadas as somas de quadrados correspondentes. CAMARINHA FILHO & IEMMA (1991) esclarecem esse ponto.

HERR (1986) reconheceu que, para o caso de tamanho de caselas proporcionais, as análises com tipo I e II são iguais, se a interação está presente. Não há, portanto, diferença entre as hipóteses testadas nesses dois casos. Ainda HERR (1986) comentou que Snedecor & Cox (1935) providenciaram sugestões para a utilização de cinco métodos de análises, dentre eles, três foram incorporados pelo SAS:

- Somas de Quadrados do Tipo I:

a) em aproximações grosseiras, onde somente informações sobre efeitos principais são desejadas;

b) para exame dos efeitos principais, onde o número de classes desproporcionais é representativo de uma população em que exista interação.

- Somas de quadrados do Tipo II:

a) para os casos nos quais assume-se que a interação não existe e um resultado mais confiável é desejado;

b) em casos onde alguns dados são perdidos dentro das caselas.

- Somas de quadrados do Tipo III:

a) em tabelas 2xs, em que interações são assumidas;

b) em outras tabelas de classificação dupla, em que não se desejam informações sobre a interação.

HERR (1986) ainda propõe que, se o artigo de Snedecor & Cox (1935) fosse mais esclarecedor, proporcionaria uma maior curiosidade sobre o assunto, o que levaria a mais artigos tentando uma solução para o problema.

O uso do modelo de médias de caselas modificado (MURRAY, 1986), embora seja um modelo interessante, não é tão apropriado quanto o modelo de médias de caselas convencional. Esse parece ser de maior entendimento, tanto para a estimação de parâmetros, quanto para a obtenção das somas de quadrados, associadas às hipóteses de interesse. Sobretudo, em relação a pesquisadores de ciências aplicadas.

O modelo proposto por MURRAY (1986), trabalha

com partições de matrizes, de forma que se obtém a solução de mínimos quadrados e testes de hipóteses de interesse, em relação aos parâmetros do vetor de médias de caselas. Seja o modelo definido como:

$$y = W\mu + e \text{ sujeito a } G\mu = 0, \quad (I)$$

onde G é uma matriz de constantes conhecidas de posto s , tipicamente especificando contrastes de não-interação. Se não há casela vazia, W é de posto completo, caso contrário, W tem uma coluna de "zeros" para cada casela vazia, e μ fica da mesma forma como se todas as caselas fossem ocupadas. O modelo modificado é mais útil que (I) se há caselas vazias e é obtido por subtração do contraste diretamente do modelo, por meio disso se reduz a dimensão do modelo. Isso é feito reordenando as colunas de G , assim, $G\mu=0$ implica em $\mu_2 = -G_2^{-1}G_1\mu_1$. Agora reordenando as colunas de W similarmente a G e substituindo-se em μ_2 , tem-se o modelo modificado

$y = V\mu_1 + e$, onde $\hat{\mu} = (V'V)^{-1}V'y$ e se V tem posto coluna completo, então os estimadores de mínimos quadrados para μ_1 e μ_2 , existem.

MURRAY (1986) forneceu meios para se estimar caselas vazias. Criou dois exemplos, um para blocos casualizados, outro para quadrado latino e observou o caso dos modelos conexo e desconexo. Se o modelo é conexo, a correta hipótese pode ser obtida sem estimar as caselas vazias. Caso contrário, HOCHING, SPEED & COLEMAN (1980) sugerem as hipóteses "eficazes".

IEMMA (1991) discute o problema em se fazer uma análise na presença de desbalanceamento e, também, fornece algumas idéias sobre caselas vazias.

Dentre as indagações de IEMMA (1991), podem ser citadas: "Como esperar que um pesquisador faça uma boa interpretação da hipótese que está sendo testada por uma das quatro somas de quadrados fornecidas pelo SAS?" ; "Como esperar que ele possa fazer uma comparação sensata de seus resultados com os resultados de outros pesquisadores que utilizaram outros pacotes estatísticos, para a análise de seus dados?"

IEMMA (1991) analisou, criteriosamente, todas as somas de quadrados obtidas pelas tabelas de análise de variância, através de diversos métodos de análise de dados encontrados na literatura, desde YATES (1934), até os quatro tipos de somas de quadrados fornecidas pelo PROC GLM do SAS. Posteriormente, apresentou as relações entre os métodos de YATES (1934), de OVERALL & SPIEGEL (1969), de Henderson (1953) e do PROC GLM do SAS. Sem dúvida, esse é o trabalho que mais esclarece o problema. Pois, além de se obter as somas de quadrados para cada fonte de variação, é mostrado "como" cada uma das hipóteses associadas a essas somas de quadrados, é construída. O autor, assim, possibilita que o pesquisador escolha a hipótese correta, de acordo com seu interesse, dentre as quatro fornecidas pelo PROC GLM.

IEMMA (1993), relacionou alguns problemas

ocasionados pela presença de caselas vazias, são eles:

- a) Podem ocorrer desconexões;
- b) O teste da interação, em geral, testa que somente algumas interações são nulas;
- c) As hipóteses sobre médias não ponderadas de linhas e colunas, em geral, têm uma interpretação bastante diferente daquelas sem caselas vazias;
- d) Os graus de liberdade da interação devem ser escolhidos com cautela.

ITEMMA, PALM & CLAUSTRIAUX (1993) através de maneira simples mostram como obter o projetor ortogonal associado à hipótese H_0 para qualquer nível de desbalanceamento. Fundamentam-se na definição de funções estimáveis e obtêm a soma de quadrados da hipótese por $SQ_{H_0} = y'a(a'a)^{-1}a'y = y'PH_0y$, onde y é o vetor de observações; a é o vetor de coeficientes da combinação linear dos componentes do vetor y ; e $a(a'a)^{-1}a' = PH_0$ é o projetor ortogonal associado a H_0 .

SANTOS (1994) comparou vários pacotes estatísticos em relação às hipóteses fornecidas por estes.

SEARLE (1994) analisou o artigo de Dallal (1992), onde este apresentou, através de um exemplo, a dificuldade de entendimento das hipóteses fornecidas por dois pacotes estatísticos: o SAS, usando o PROC GLM (mais especificamente a hipótese do tipo III) e o SPSS MANOVA,

que fornece a hipótese convencional, observou que as somas de quadrados deram resultados distintos.

SEARLE (1994) discutiu vários aspectos da disparidade, quando se usa o PROC GLM para o exemplo Dallal (1992). Ou seja, um delineamento com dados desbalanceados de efeitos fixos e fatores "nested". São apresentadas as hipóteses ligadas às somas de quadrados do tipo III, tanto para o modelo superparametrizado com restrições Σ , quanto para o modelo de médias de caselas. Um modelo denominado Modelo C foi providenciado para tratar o efeito "nested". Vê-se que as hipóteses diferem para os dois modelos, o de médias de caselas e o modelo C. Conclui-se que a diferença se deve à presença de desbalanceamento dentro de um dos fatores. No modelo C, as observações dentro de cada casela A*B é rotulado, assim, tem-se três níveis em cada casela de A1 e seis níveis em cada casela de A2 e todo nível de C dentro de A*B terá uma observação a menos. Portanto, o modelo C tem a forma $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_{ijk}$. Note que o termo erro não está presente, pois em cada nível de C, que é "nested" dentro de A*B, há apenas uma observação.

Finalizando, o autor declarou, veementemente, que "softwares" caseiros precisam fornecer, claramente, mais detalhes e, especialmente, mais descrições do que se está calculando. E acrescenta: "...qualquer coisa que se fizer para evitar certos usos ridículos de pacotes estatísticos, valerá a pena."

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. MATERIAL

Visando ilustrar as idéias centrais postas neste estudo foram utilizados dois conjuntos de dados para auxiliar nas discussões dos problemas.

3.1.1. CONJUNTO A

O primeiro conjunto foi obtido de um experimento fatorial 2x3 delineado inteiramente ao acaso, para testar os efeitos de 3 recipientes (COLUNAS) para produção de mudas, e 2 espécies (LINHAS) de eucaliptos, quanto ao desenvolvimento das mudas (BANZATTO & KRONKA, 1989, p.132).

Os recipientes e as espécies testadas foram:

L1 : <i>Eucalyptus citriodora</i>	C1 : saco plástico pequeno
L2 : <i>Eucalyptus grandis</i>	C2 : saco plástico grande
	C3 : laminado

Os dados das alturas médias das mudas, em cm, aos 80 dias de idade, constam do Quadro A1.

Quadro A1 - Alturas médias das mudas, em cm, aos 80 dias.

		RECIPIENTE		
		1	2	3
ESPÉCIE	1	26,2; 26,0	25,7; 26,3	22,8; 19,4
		25,0; 25,4	25,1; 26,4	18,8; 19,2
	2	24,8; 24,6	19,6; 21,1	19,8; 21,4
		26,7; 25,2	19,0; 18,6	22,8; 21,3

Fonte: BANZATTO & KRONKA (1989)

De maneira geral, pode-se escrever como no

Quadro A.

Quadro A - Dados genéricos

ESPÉCIE	RECIPIENTE		
	1	2	3
1	$y_{111}; y_{112}$	$y_{121}; y_{122}$	$y_{131}; y_{132}$
	$y_{113}; y_{114}$	$y_{123}; y_{124}$	$y_{133}; y_{134}$
2	$y_{211}; y_{212}$	$y_{221}; y_{222}$	$y_{231}; y_{232}$
	$y_{213}; y_{214}$	$y_{223}; y_{224}$	$y_{233}; y_{234}$

Note que cada casela contém 4 observações, ou seja, $n_{ij} = 4$ para quaisquer valores de i e j .

Com base nesse exemplo, criaram-se, aleatoriamente, cinco situações, desde o caso original com dados balanceados, até o caso onde ocorre desbalanceamento, na presença de caselas vazias. As situações são as seguintes (todos os modelos criados contêm interação):

1) dados balanceados sem casela vazia, como no Quadro A1;

2) dados desbalanceados sem casela vazia;

as posições das observações perdidas são: 131, 132, 211,

213, 214, 222, 231, 234; ou seja: $n_{11} = n_{12} = 4$; $n_{13} = n_{23} = 2$;

$n_{21} = 1$ e $n_{22} = 3$, como no Quadro A2;

3) uma casela vazia ($n_{11} = 0$); e demais dados balanceados ($n_{ij} = 4$); como no Quadro A3;

4) dados desbalanceados com uma casela vazia ($n_{11} = 0$), como no Quadro A4;

5) dados desbalanceados com duas caselas vazias

($n_{11} = n_{23} = 0$), como no Quadro A5;

Os quadros referentes ao conjunto A são vistos a seguir.

Quadro A2 - Alturas médias das mudas, em cm, aos 80 dias.

		RECIPIENTE		
		1	2	3
ESPÉCIE	1	26,2; 26,0	25,7; 26,3	
		25,0; 25,4	25,1; 26,4	18,8; 19,2
	2	; 24,6	19,6;	21,4
			19,0; 18,6	22,8

Quadro A3 - Alturas médias das mudas, em cm, aos 80 dias.

		RECIPIENTE		
		1	2	3
ESPÉCIE	1		25,7; 26,3	22,8; 19,4
			25,1; 26,4	18,8; 19,2
	2	24,8; 24,6	19,6; 21,1	19,8; 21,4
		26,7; 25,2	19,0; 18,6	22,8; 21,3

Quadro A4 - Alturas médias das mudas, em cm, aos 80 dias.

		RECIPIENTE		
		1	2	3
ESPÉCIE	1		25,7; 26,3	
			25,1; 26,4	18,8; 19,2
	2	; 24,6	19,6;	21,4
			19,0; 18,6	22,8

Quadro A5 - Alturas médias das mudas, em cm, aos 80 dias.

		RECIPIENTE		
		1	2	3
ESPÉCIE	1		25,7; 26,3	
			25,1; 26,4	18,8; 19,2
	2	; 24,6	19,6;	
			19,0; 18,6	

3.1.2. CONJUNTO B

O segundo conjunto é fictício. Trata-se de um ensaio fatorial 4x3. O primeiro fator (solo) e o segundo (variedade de cana-de-açúcar) têm a seguinte descrição para seus níveis:

Variedades (V):	Solos (S):
V ₁ : SP71-1143	S ₁ : LVA, fase argilosa
V ₂ : SP71-799	S ₂ : Latossolo Roxo
V ₃ : RB79-454	S ₃ : LVA, fase arenosa
	S ₄ : Podzólico

Os dados constam do Quadro B1.

Quadro B1 - Produtividade média, em t/ha, de três variedades de cana-de-açúcar em quatro solos.

		VARIEDADES		
		1	2	3
S O L O S	1	70; 71 73; 78	67; 66 65	102; 110
	2	76; 74 78	69	106; 116
	3	66; 64	62	94; 101 102
	4	65; 64 63	58; 52 61	91; 97

Fonte: Dados fictícios

Algumas situações também foram criadas. São elas:

- 1) com interação, sem casela vazia; como no Quadro B1;
- 2) sem interação, sem casela vazia; como no Quadro B1;

- 3) com interação, com uma casela vazia ($n_{12} = 0$); como no Quadro B2;
- 4) sem interação, com uma casela vazia ($n_{12} = 0$); como no Quadro B2;
- 5) com interação, com duas caselas vazias ($n_{12} = n_{33} = 0$); como no Quadro B3;
- 6) sem interação, com duas caselas vazias ($n_{12} = n_{33} = 0$); como no Quadro B3;
- 7) sem interação, com três caselas vazias ($n_{12} = n_{33} = n_{41} = 0$); como no Quadro B4.

Os quadros para conjunto B são dados a seguir.

Quadro B2 - Produtividade média, em t/ha, de três variedades de cana-de-açúcar em quatro solos.

		VARIÉDADES		
		1	2	3
S O L O S	1	70; 71		102; 110
		73; 78		
	2	76; 74	69	106; 116
		78		
	3	66; 64	62	94; 101
				102
	4	65; 64	58; 52	91; 97
		63	61	

Quadro B3 - Produtividade média, em t/ha, de três variedades de cana-de-açúcar em quatro solos.

		VARIEDADES		
		1	2	3
S O L O S	1	70; 71 73; 78		102; 110
	2	76; 74 78	69	106; 116
	3	66; 64	62	
	4	65; 64 63	58; 52 61	91; 97

Quadro B4 - Produtividade média, em t/ha, de três variedades de cana-de-açúcar em quatro solos.

		VARIEDADES		
		1	2	3
S O L O S	1	70; 71 73; 78		102; 110
	2	76; 74 78	69	106; 116
	3	66; 64	62	
	4		58; 52 61	91; 97

3.1.3. PACOTES ESTATÍSTICOS

Dois pacotes estatísticos fornecem os resultados para os dados apresentados. São eles:

- SAS (Statistical Analyses System)
- STATGRAPHICS (Statistical Graphics System)

3.2. MÉTODOS

3.2.1. MODELO LINEAR

O modelo linear de efeitos fixos, com ou sem interação, dependendo do exemplo, é escolhido para a análise dos dados. A caracterização do modelo é feita através das médias populacionais das subclasses, denotado por Modelo - M (IEMMA, 1991) ou Modelo de Médias de Caselas.

3.2.1.1. MODELO COM INTERAÇÃO

Considere o modelo linear com dois fatores (A e B) e interação. As observações y_{ijk} são independentes e normalmente distribuídas, com médias populacionais μ_{ij} e variância comum σ^2 .

Sua caracterização pode ser dada por:

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk} \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, a ; j = 1, 2, \dots, b ; k = 1, 2, \dots, n_{ij}$$

onde a e b são os números de níveis dos fatores A e B, respectivamente, e n_{ij} o número de observações na subclasse ou casela (i,j) , com $E[Y_{ijk}] = \mu_{ij}$ e $V[Y_{ijk}] = \sigma^2$. Além disso, o número total de observações é n , isto é, $\sum_{i,j} n_{ij} = n$.

O modelo linear caracterizado dessa forma é denotado Modelo de Médias de Caselas.

Pode-se escrever (1) na forma matricial, como:

$$y = W \mu + e \quad (2)$$

onde y é um vetor $(n \times 1)$ de observações, W é uma matriz $(n \times ab)$ de "uns" e "zeros", μ é um vetor de parâmetros das

médias populacionais, e $\underline{e}$ é um vetor ($n \times 1$) de variáveis aleatórias não observáveis tais que $\underline{e} \sim N(0; I\sigma^2)$. Mais detalhes podem ser encontrados em ELSTON & BUSH (1964) e IEMMA (1991).

Alguns autores, por exemplo, GRAYBILL (1961), SNEDECOR & COCHRAN (1967) e SEARLE (1971), preferem trabalhar com o modelo Superparametrizado ou modelo - S

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk} \quad (3)$$

ou matricialmente

$$y = X\theta + e \quad (4)$$

para descrever as observações. Entretanto, como os dois modelos são estatisticamente equivalentes (ver SPEED (1969) ou URQUHART, WEEKS & HENDERSON (1973)), dá-se preferência ao modelo de médias de caselas neste trabalho. Porém, é bom lembrar que o PROC GLM trabalha com o modelo superparametrizado, tanto na apresentação de suas funções estimáveis quanto para as estimativas de cada um dos parâmetros do modelo linear.

Nesse contexto,

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

onde: μ é uma constante inerente a todas as observações (usualmente igual a média geral, desde que se imponham restrições paramétricas convenientes), ver IEMMA (1987, pg. 182)

α_i é o efeito do fator A;

β_j é o efeito do fator B;

γ_{ij} é o efeito da interação entre o i-ésimo nível do fator A e o j-ésimo nível do fator B.

3.2.1.2. MODELO SEM INTERAÇÃO

O caso em questão necessita de uma nova caracterização para o modelo de médias, pois a interação não está presente. Assim, o novo modelo pode ser descrito por:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij} \quad (5)$$

com $\mu + \alpha_i = \mu_i$. Então,

$$y_{ij} = \mu_i + \beta_j + e_{ij} \quad (6)$$

E conforme (2) matricialmente por:

$$y = W\mu + e$$

A comparação entre os dois modelos, modelo-S e modelo-M, no momento da construção e interpretação das hipóteses é fundamental para uma boa compreensão do leitor, visto que o modelo-M facilita na construção das hipóteses, mas o modelo - S deixa claro quais os os efeitos do modelo linear envolvidos na referida hipótese, facilitando sua interpretação.

3.2.2. SOLUÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS

3.2.2.1. MODELO COM INTERAÇÃO

Usa-se nesse trabalho o modelo de médias de caselas pelos motivos já mencionados no capítulo anterior, além de proporcionar solução único do vetor de médias, μ , pois, a matriz W tem posto coluna completo (ab). Assim, a

matriz quadrada $W'W$ de ordem ab , tem posto completo e tem inversa clássica.

Assim, a solução de mínimos quadrados coincide com o estimador de mínimos quadrados para μ e é dada por

$$\hat{\mu} = (W'W)^{-1} W'y \quad (7)$$

que também é o B.L.U.E (Best Linear Unbiased Estimator) de μ . Pode ser mostrado que o BLUE de μ_{ij} é a média amostral da casela (i,j) : $\hat{\mu}_{ij} = \bar{y}_{i.}$

3.2.2.2. MODELO SEM INTERAÇÃO

As soluções de mínimos quadrados para μ são dadas por

$$\hat{\mu} = (W'W)^G W'y \quad (8)$$

onde $(W'W)^G$ é qualquer inversa generalizada de $W'W$. Note que a matriz $W'W$ é singular, ou seja, não tem posto coluna completo como no modelo com interação visto neste trabalho. O posto de $W'W$ será $a+b-1$.

A obtenção de $(W'W)^{-1}$ e $(W'W)^G$, nesse modelo, é trivial e portanto, não será discutida com detalhes nesse trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados em SEARLE (1982) e IEMMA (1990).

3.2.3. SOMAS DE QUADRADOS

Sabe-se que as somas de quadrados fornecidas nos quadros de análise de variância estão estreitamente

relacionadas com as hipóteses testadas para cada efeito do modelo considerado.

Assim, a soma de quadrado para um teste de

$$H_0: B'\mu = h \text{ versus } H_1: B'\mu \neq h$$

onde B' é uma matriz ($r \times ab$) de constantes conhecidas de posto linha completo r , é dada por

$$SQH_0 = (\hat{B'\mu} - h)' [B'(W'W)^{-1}B]^{-1} (\hat{B'\mu} - h).$$

Como na análise de variância, geralmente, $h = 0$, a SQH_0 fica:

$$SQH_0 = (\hat{B'\mu})' [B'(W'W)^{-1}B]^{-1} (\hat{B'\mu}) \quad (9)$$

A relação SQH_0/σ^2 tem distribuição de Qui-Quadrado central com r graus de liberdade, onde o quadrado médio do resíduo (QM_{res}) é um estimador não viciado de σ^2 e a estatística

$$(SQH_0/r)/QM_{res} \sim F(r, \sum \sum n_{ij} - 1)$$

pode ser utilizada para proceder ao teste da hipótese H_0

Mais detalhes encontram-se em SEARLE (1971, p.112) e IEMMA (1987, p.97; 1991, p.18).

3.2.4. HIPÓTESES ESTATÍSTICAS

Visando-se a discussão de certos aspectos do PROC GLM, estudam-se neste trabalho quatro hipóteses para cada um dos efeitos principais, A (LINHAS) e B (COLUNAS), chamadas de hipóteses mais comuns sobre linhas e colunas

(CIEMMA, 1991, p. 34) e uma hipótese sobre a interação (AB).

Essas hipóteses são parte integrante do PROC GLM e são denotadas por hipóteses tipo I, II, III e IV, além da hipótese sobre a interação. Já o STATGRAPHICS fornece, em sua versão mais recente, 7.0, as do tipo I e III e sobre a interação.

A seguir, são apresentadas as hipóteses mais comuns sobre linhas e sobre a interação. As hipóteses sobre colunas são análogas às hipóteses sobre linhas, portanto, serão vistas conjuntamente com os exemplos. Posteriormente, são vistas as hipóteses mais comuns no modelo linear sem interação.

3.2.4.1. MODELO COM INTERAÇÃO

(A) Hipóteses sobre as médias ponderadas de linhas, ou Hipóteses do Tipo I

$$H_0^{(1)}: \frac{\sum_j n_{1j} \mu_{1j}}{n_{1.}} = \frac{\sum_j n_{2j} \mu_{2j}}{n_{2.}} = \dots = \frac{\sum_j n_{aj} \mu_{aj}}{n_{a.}}$$

onde $n_{i.} = \sum_j^b n_{ij}$

(B) Hipóteses sobre as médias ponderadas de linhas ajustadas para colunas, ou Hipóteses do Tipo II

$$H_0^{(2)}: \sum_j^b n_{ij} \mu_{ij} = \sum_{i'} \sum_j \frac{n_{ij} n_{i'.j} \mu_{i'.j}}{n_{.j}} \quad (i \neq i')$$

(C) Hipóteses sobre as médias não ponderadas de linhas, ou Hipóteses do Tipo III

$$H_0^{(3)}: \bar{\mu}_{1.} = \bar{\mu}_{2.} = \dots = \bar{\mu}_{a.}$$

onde $\bar{\mu}_{i.} = \sum_j^b \mu_{ij} / b$

(D) Tipo IV (são hipóteses mais específicas, ligadas à casela vazia).

Na verdade, essa hipótese é equivalente à hipótese do tipo III. Caso se dê alguma diferença, esta estará ligada à ocorrência de casela vazia. Assim, a forma desta hipótese poderá ser vista através do caso A3, do item 4.1, dentre outros.

(E) Hipótese sobre a interação

$$H^{(5)}: \mu_{ij} + \mu_{i'j'} - \mu_{i'j} - \mu_{ij'} = 0, \quad \forall (i \neq i' \text{ e } j \neq j')$$

3.2.4.2. MODELO SEM INTERAÇÃO

(A) Hipóteses sobre as médias ponderadas de linhas, ou Hipóteses do Tipo I

$$H_0^{(1)}: \mu_i + \sum \frac{n_{ij} \beta_j}{n_{i.}} = \mu_{i'} + \sum \frac{n_{i'j} \beta_j}{n_{i'.}}, \text{ assim,}$$

(B) Hipóteses sobre as médias ponderadas de linhas ajustadas para colunas, ou Hipóteses do Tipo II

$$H_0^{(2)}: \mu_i + \sum \frac{n_{ij} \beta_j}{n_{i.}} = \sum \frac{n_{ij} \bar{C}_j}{n_{i.}},$$

onde $\bar{C}_j$ é a média ponderada da coluna j.

(C) Hipóteses sobre as médias não ponderadas de linhas, ou Hipóteses do Tipo III

$$H_0^{(3)}: \mu_i + \sum \frac{n_{ij} \beta_j}{n_{i.}} = \sum \frac{n_{ij} C_j}{n_{i.}},$$

onde C_j é a média aritmética simples dentro da casela j .

Porém, convém destacar que, no modelo sem interação, as hipóteses do tipo II e III, serão sempre equivalentes e como em (D):

(D) Hipóteses do tipo IV

$H_0: \mu_i = \mu_{i'} (i \neq i')$ pelo modelo-M e

$H_0: \alpha_i = \alpha_{i'} (i \neq i')$ pelo modelo-S

(E) Hipótese sobre a interação

$H_0^{(5)}: \mu_{ij} + \mu_{i'j'} - \mu_{ij'} - \mu_{i'j} = 0, \forall (i \neq i' \text{ e } j \neq j')$

3.2.5. CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES

Seja um exemplo genérico com dois fatores resumido no Quadro 1.

Quadro 1 - Esquema geral de um Fatorial $a \times b$.

		FATOR B			
		COLUNAS			
F A T O R A	L I N H A S	1	2	...	b
		y_{111}	y_{121}		y_{1b1}
		y_{112}	y_{122}		y_{1b2}
		...	...		...
		$y_{11n_{11}}$	$y_{12n_{12}}$		$y_{1bn_{1b}}$
		y_{211}	y_{221}		y_{2b1}
		y_{212}	y_{222}		y_{2b2}
		...	...		...
		$y_{21n_{21}}$	$y_{22n_{22}}$		$y_{2bn_{2b}}$
		.	.		.
a	2	y_{a11}	y_{a21}		y_{ab1}
		y_{a12}	y_{a22}		y_{ab2}
		...	...		...
		$y_{a1n_{a1}}$	$y_{a2n_{a2}}$		$y_{abn_{ab}}$

3.2.5.1. MODELO COM INTERAÇÃO

Um quadro similar pode ser construído através das médias de caselas. Então:

Quadro 2 - Esquema geral de um fatorial $a \times b$, em relação ao modelo de médias de caselas com interação.

		FATOR B				
		COLUNAS				
		1	2	...	b	
FATOR A	LINHAS	1	$\begin{matrix} (n_{11}) \\ \mu_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} (n_{12}) \\ \mu_{12} \end{matrix}$	. . .	$\begin{matrix} (n_{1b}) \\ \mu_{1b} \end{matrix}$
		2	$\begin{matrix} (n_{21}) \\ \mu_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} (n_{22}) \\ \mu_{22} \end{matrix}$	. . .	$\begin{matrix} (n_{2b}) \\ \mu_{2b} \end{matrix}$
				.	.	.
		a	$\begin{matrix} (n_{a1}) \\ \mu_{a1} \end{matrix}$	$\begin{matrix} (n_{a2}) \\ \mu_{a2} \end{matrix}$	. . .	$\begin{matrix} (n_{ab}) \\ \mu_{ab} \end{matrix}$

Em função do modelo de médias de caselas, $y = W\mu + e$, as matrizes, W , $W'W$, $(W'W)^{-1}$, e , y , μ e B' , ficam da forma:

$${}_n y_1 = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \dots \\ y_{11n_{11}} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ \dots \\ y_{12n_{12}} \\ \vdots \\ y_{abn_{ab}} \end{bmatrix} ; {}_n e_1 = \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ \dots \\ e_{11n_{11}} \\ e_{121} \\ e_{122} \\ \dots \\ e_{12n_{12}} \\ \vdots \\ e_{abn_{ab}} \end{bmatrix} ; {}_{ab} \mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \dots \\ \mu_{1b} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{ab} \end{bmatrix}$$

$$W_{ab} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & J_3 & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & J_{ab} \end{bmatrix}$$

onde J_q é um vetor $(n_{ij} \times 1)$ de "uns" e 0 uma matriz de "zeros".

Desta forma, $W'W$ e $(W'W)^{-1}$ são fáceis de serem obtidas.

$$W'W_{ab} = \begin{bmatrix} n_{11} & & & \\ & n_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_{ab} \end{bmatrix}; (W'W)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/n_{11} & & & \\ & 1/n_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/n_{ab} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Assim, a solução de mínimos quadrados para o vetor de parâmetros, μ , fica:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 1/n_{11} & & & \\ & 1/n_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/n_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'_1 & & & \\ & J'_2 & & \\ & & J'_3 & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & J'_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \dots \\ y_{11n_{11}} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ \dots \\ y_{12n_{12}} \\ \vdots \\ y_{abn_{ab}} \end{bmatrix}$$

portanto, $\hat{\mu}$, como dito no item 3.2.2.1., fica:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} y_{11.} / n_{11} \\ y_{12.} / n_{12} \\ \vdots \\ y_{ab.} / n_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{11.} \\ \bar{y}_{12.} \\ \vdots \\ \bar{y}_{ab.} \end{bmatrix} \quad (11)$$

A matriz B' , será denotada nesse trabalho por "Matriz Hipótese", que dependerá da hipótese testada, por exemplo:

a) Tipo I:

$$B'_1 = \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{1.}} & \frac{n_{12}}{n_{1.}} & \dots & \frac{n_{1b}}{n_{1.}} & - & \frac{n_{21}}{n_{2.}} & \dots & - & \frac{n_{2b}}{n_{2.}} \\ \frac{n_{11}}{n_{1.}} & \frac{n_{12}}{n_{1.}} & \dots & \frac{n_{1b}}{n_{1.}} & - & \frac{n_{31}}{n_{3.}} & \dots & - & \frac{n_{3b}}{n_{3.}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{n_{11}}{n_{1.}} & \frac{n_{12}}{n_{1.}} & \dots & \frac{n_{1b}}{n_{1.}} & - & \frac{n_{a1}}{n_{a.}} & \dots & - & \frac{n_{ab}}{n_{a.}} \end{bmatrix}$$

b) Tipo II

$$B'_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{n_{11}^2}{n_{1.}} & \frac{n_{12}^2}{n_{1.}} & \dots & \frac{n_{1b}^2}{n_{1.}} & - & \frac{n_{11}n_{21}}{n_{1.}} & - & \frac{n_{12}n_{22}}{n_{1.}} & \dots & - & \frac{n_{1b}n_{2b}}{n_{1.}} & - & \frac{n_{11}n_{31}}{n_{1.}} & - & \frac{n_{12}n_{32}}{n_{1.}} & \dots & - & \frac{n_{1b}n_{3b}}{n_{1.}} & - & \frac{n_{11}n_{ab}}{n_{1.}} \\ - & \frac{n_{21}n_{11}}{n_{2.}} & - & \frac{n_{22}n_{12}}{n_{2.}} & \dots & - & \frac{n_{2b}n_{1b}}{n_{2.}} & - & \frac{n_{21}^2}{n_{2.}} & - & \frac{n_{22}^2}{n_{2.}} & \dots & - & \frac{n_{2b}^2}{n_{2.}} & - & \frac{n_{21}n_{31}}{n_{2.}} & - & \frac{n_{22}n_{32}}{n_{2.}} & \dots & - & \frac{n_{2b}n_{3b}}{n_{2.}} & - & \frac{n_{21}n_{ab}}{n_{2.}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ - & \frac{n_{a1}n_{11}}{n_{a.}} & - & \frac{n_{a2}n_{12}}{n_{a.}} & \dots & - & \frac{n_{ab}n_{1b}}{n_{a.}} & - & \frac{n_{a1}n_{21}}{n_{a.}} & - & \frac{n_{a2}n_{22}}{n_{a.}} & \dots & - & \frac{n_{ab}n_{2b}}{n_{a.}} & - & \frac{n_{a1}n_{31}}{n_{a.}} & - & \frac{n_{a2}n_{32}}{n_{a.}} & \dots & - & \frac{n_{ab}n_{3b}}{n_{a.}} & - & \frac{n_{a1}n_{ab}}{n_{a.}} \end{bmatrix}$$

c) Tipo III

$$B'_g = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{1.}} & \frac{1}{n_{1.}} & \dots & \frac{1}{n_{1.}} & -\frac{1}{n_{2.}} & -\frac{1}{n_{2.}} & \dots & -\frac{1}{n_{2.}} \\ \frac{1}{n_{1.}} & \frac{1}{n_{1.}} & \dots & \frac{1}{n_{1.}} & -\frac{1}{n_{3.}} & -\frac{1}{n_{3.}} & \dots & -\frac{1}{n_{3.}} \\ & & & & & & & \\ \frac{1}{n_{1.}} & \frac{1}{n_{1.}} & \dots & \frac{1}{n_{1.}} & -\frac{1}{n_{b.}} & -\frac{1}{n_{b.}} & \dots & -\frac{1}{n_{b.}} \end{bmatrix}$$

d) Tipo IV

Por se tratar de um caso particular, B'_4 será vista conjuntamente com os exemplos.

e) Interação

A forma de B'_5 para a interação também será vista através dos exemplos.

É bom salientar que todas as matrizes apresentadas não resolvem o problema de casela vazia. O caso de caselas vazia terá um tratamento especial com o auxílio dos exemplos. Embora, seja suficiente eliminar dentro de cada matriz a linha ou coluna referente à casela vazia.

3.2.5.2. MODELO SEM INTERAÇÃO

O esquema para o modelo de médias é visto no Quadro 3.

Quadro 3 - Esquema geral de um fatorial $a \times b$, em relação ao modelo de médias de caselas sem interação.

		<u>COLUNAS</u>			
		1	2	...	b
L I N H A S	1	$\mu_1 + \beta_1^{(n_{11})}$	$\mu_1 + \beta_2^{(n_{12})}$	...	$\mu_1 + \beta_b^{(n_{1b})}$
	2	$\mu_2 + \beta_1^{(n_{21})}$	$\mu_2 + \beta_2^{(n_{22})}$	...	$\mu_2 + \beta_b^{(n_{2b})}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	a	$\mu_a + \beta_1^{(n_{a1})}$	$\mu_a + \beta_2^{(n_{a2})}$	...	$\mu_a + \beta_b^{(n_{ab})}$

A matriz W , de ordem $(n \times a+b)$ e o vetor μ de ordem $(a+b \times 1)$, são da forma:

$$W = \begin{bmatrix} J_{n_{1.}} & & J_{n_{11}} & & \emptyset & & \\ & & J_{n_{12}} & & \dots & & \\ \emptyset & & \vdots & & & & \\ & & & J_{n_{1b}} & & & \\ J_{n_{2.}} & \dots & J_{n_{21}} & & \dots & & \\ & & J_{n_{22}} & & & & \\ \emptyset & & \vdots & & & & \\ & & & J_{n_{2b}} & & & \\ & & J_{n_{a.}} & J_{n_{a1}} & \dots & & \\ & & & J_{n_{a2}} & & & \\ \emptyset & & & \vdots & & & \\ & & & & J_{n_{ab}} & & \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_a \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \end{bmatrix}$$

As matrizes, construídas dessa forma, são válidas caso não exista casela vazia, caso contrário, os elementos contendo caselas vazias devem ser eliminados. O

próximo capítulo tem o objetivo de esclarecer qualquer dúvida sobre as construções das hipóteses.

3.2.6. QUADRO DA ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Um esquema da análise de variância é obtido e pode ser visto no Quadro 4.

Quadro 4 - Análise de Variância do modelo com interação

C.V.	G.L.	S.Q.	F
LINHAS	$(a - 1)$	$S.Q. H_o^{(L)}$	$QM^{(L)}/QM_{RES}$
COLUNAS	$(b - 1)$	$S.Q. H_o^{(C)}$	$QM^{(C)}/QM_{RES}$
INTERAÇÃO	$(a-1)(b-1) - t$	$S.Q. H_o^{(I)}$	$QM^{(I)}/QM_{RES}$
RESÍDUO	Δ_1	Δ_2	
TOTAL	$n - 1$	$y'y - C$	

onde : a é o número de linhas da Quadro 2;

b é o número de colunas da Quadro 2;

t é o número de caselas vazias;

Δ_1 e Δ_2 são indicadores obtidos por diferença;

QM é o quadrado médio dado por $SQH_o/\text{posto de } B'$;

QM_{RES} é dado por Δ_2/Δ_1 ;

SQH_o representam as somas de quadrados associadas a cada hipótese já apresentada.

Evidentemente, se o modelo linear não contiver interação, a terceira linha do quadro 4 deve ser eliminada.

3.2.7. PROJETORES ORTOGONAIS

Dentro daquilo que já foi mencionado, IEMMA (1993) discute a relação entre a construção de projetores ortogonais e hipóteses mais comuns sobre linhas e colunas. Assim, tem-se resumidamente o enfoque principal dentro do contexto desse trabalho.

Seja um modelo linear $y = X\theta + e$, dado em (4). Nesse contexto, é bem sabido que o sistema de equações normais $X'X\theta = X'y$, sempre consistente, fornece soluções aproximadas de mínimos quadrados para $y = X\theta$, em geral inconsistente, dadas por $\hat{\theta} = (X'X)^{-1}X'y$. É bem sabido, também, que se X não tem posto coluna completo, então o sistema de equações normais é indeterminado e $\hat{\theta}$ não tem valor por si só, mas sim através de X , pois $\hat{y} = X\hat{\theta}$, invariante para qualquer $\hat{\theta}$ solução das equações normais, é a aproximação de mínimos quadrados para o vetor y das observações.

Por outro lado, é imediato verificar que $\hat{y} = X\hat{\theta} = Py$, onde $P = X(X'X)^{-1}X'$ é o projetor ortogonal de y sobre o espaço gerado pelas colunas de X . Assim, como pode ser observado na figura 1, o vetor $y \in R^n$ é decomposto na soma de dois vetores pertencentes a subespaços ortogonais: $\hat{y} = Py$ pertencente a $C(X)$ e $\hat{e} = y - \hat{y} = (I - P)y$ pertencente ao complemento ortogonal do espaço coluna de X , $C^\perp(X)$.

Figura 1 - Projeção ortogonal do vetor y sobre o espaço gerado pelas colunas de X .

Então, dada a ortogonalidade podemos utilizar o teorema de Pitágoras, obtendo a decomposição da análise de variância $||y||^2 = ||\hat{y}||^2 + ||\hat{e}||^2$, onde $||y||^2 = y'y = \Sigma y^2$ é a soma de quadrados total não corrigida; $||\hat{y}||^2 = ||Py||^2 = y'Py$ é a soma de quadrados dos parâmetros e $||\hat{e}||^2 = y'(I-P)y$ é a soma de quadrados do resíduo.

A obtenção de P é trivial pois X é a matriz conhecida do delineamento. Desse modo, a forma quadrática $y'Py$ que traduz a soma de quadrados dos parâmetros, em termos das observações, é facilmente determinada. Tal simplicidade, no entanto, não é verificada na obtenção de projetores ortogonais associados a hipóteses mais específicas como por exemplo hipóteses sobre linhas, colunas e interação, principalmente se existem caselas vazias.

3.2.8. NOTAÇÃO RC)

Tomando como base o trabalho de IEMMA (1991), é possível descrever sucintamente a notação RC). Para tanto, faz-se necessário descrever algumas caracterizações

que o modelo-S pode assumir, conforme o interesse do pesquisador. Assim, parametrizando sucessivamente desde o modelo mais simples até o modelo com dois fatores e interação, tem-se:

$$y_i = \mu + e_i \quad (12.1)$$

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad (12.2)$$

$$y_{ij} = \mu + \beta_j + e_{ij} \quad (12.3)$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk} \quad (12.4)$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk} \quad (12.5)$$

As somas de quadrados associadas aos modelos apresentados podem ser convenientemente descritas através da notação RC).

De modo geral, para o modelo $y = X\theta + e$, tem-se:

$$R(\theta) = \hat{\theta}'X'y = \text{S. Q. Parâmetros}$$

que é a soma de quadrados devida a todos os parâmetros do modelo adotado. Através de parametrizações sucessivas e de subtrações pode-se obter as somas de quadrados de interesse. Assim, por exemplo, para a caracterização (12.1), a soma de quadrados dos parâmetros do modelo pode ser obtida por:

$$R(\mu) = \hat{\theta}'_1 X'_1 y = \text{Correção} \quad (13)$$

onde X_1 é um vetor de "uns" referente à primeira coluna da matriz X (matriz delineamento), ou seja, a coluna associada

ao parâmetro μ . Agora, utilizando-se (12.2), tem-se:

$$R(\mu, \alpha) = \hat{\theta}_2' X_2' y \quad (14)$$

onde X_2 é uma matriz de ordem $(n \times a+1)$, que dentro deste trabalho se refere às colunas 1, 2, 3, ..., a+1 da matriz X , ou seja, as colunas associadas aos parâmetros μ e α .

Assim, com base em (13) e (14) pode-se obter a soma de quadrados de linhas, ajustada após μ , ignorando-se β e γ :

$$R(\alpha|\mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu) = \sum_i \frac{A_i^2}{n_i} - C$$

que é bem conhecida dos usuários de estatística.

De modo análogo obtém-se qualquer soma de quadrados de interesse, por exemplo:

$$R(\mu, \beta) = \hat{\theta}_3' X_3' y$$

$$R(\beta|\mu) = R(\mu, \beta) - R(\mu)$$

$$R(\mu, \alpha, \beta) = \hat{\theta}_4' X_4' y$$

$$R(\alpha|\mu, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \beta)$$

$$R(\beta|\mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \alpha)$$

$$R(\gamma|\mu, \alpha, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \beta)$$

e assim por diante.

3.2.9. PACOTES ESTATÍSTICOS

Os pacotes estatísticos utilizados para a análise de cada uma das situações criadas para os exemplos foram: o SAS (Statistical Analyses System), mais

especificamente o PROC GLM (General Linear Model Procedure), e o STATGRAPHICS (Statistical Graphics System). O uso de tais pacotes se justifica, pois ambos têm sido universalmente utilizados.

Para proceder a análise de dados através do PROC GLM é necessário que se faça um programa informando, além dos dados, o tipo de modelo a ser usado e o tipo de hipótese para criar o quadro da análise de variância. No caso do PROC GLM, têm-se quatro tipos de hipóteses (I, II, III e IV).

O STATGRAPHICS, versão 7.0, fornece apenas dois tipos de hipótese (I e III) e, ao contrário do GLM, não há necessidade de se programar. Todas as opções são apresentadas na tela.

Dentro desse contexto, as hipóteses do tipo III e IV são obtidas utilizando-se o modelo Σ . O modelo Σ é um modelo linear superparametrizado, com restrições do tipo "soma igual a zero" e pode ser representado por:

$$y = Z\theta + e \quad (15)$$

Assim, por exemplo, em relação ao modelo (12.5), tem-se:

$$y_{ijk} = \mu^{\circ} + \alpha_i^{\circ} + \beta_j^{\circ} + \gamma_{ij}^{\circ} + e_{ijk} \quad (15.1)$$

onde

$$\alpha_i^{\circ} = \alpha_i - \frac{\sum \alpha_i}{a} \Rightarrow \sum \alpha_i^{\circ} = 0;$$

$$\beta_j^\circ = \beta_j - \frac{\sum \beta_j}{b} \Rightarrow \sum \beta_j^\circ = 0;$$

$$\gamma_{ij}^\circ = \gamma_{ij} - \frac{\sum_i \gamma_{ij}}{a} - \frac{\sum_j \gamma_{ij}}{b} - \frac{\sum_{ij} \gamma_{ij}}{ab}$$

então,

$$\sum_i \gamma_{ij}^\circ = 0, \forall j \quad \text{e} \quad \sum_j \gamma_{ij}^\circ = 0, \forall i$$

Dessa forma, as hipóteses sobre linhas e colunas ficam:

$$H_0: \alpha_i^\circ = 0, \forall i \quad \text{e} \quad H_0: \beta_j^\circ = 0, \forall j$$

onde α° e β° são os parâmetros do modelo restrito, como em (15.1).

A importância do modelo Σ está na obtenção da soma de quadrados para um parâmetro ajustado para todos os outros, por exemplo, considerando um modelo com dois fatores e interação, tem-se:

$$R(\alpha^\circ | \mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ); R(\beta^\circ | \mu^\circ, \alpha^\circ, \gamma^\circ); R(\gamma^\circ | \mu^\circ, \alpha^\circ, \beta^\circ)$$

em lugar do ajuste sequencial, que pode ser utilizado para obtenção das hipóteses do tipo I e II, da forma como foi apresentada em 3.2.8.

Em resumo, os quadros de análise de variância fornecidos pelos dois pacotes podem ser apresentados como nos Quadros 5 a 7.

Quadro 5 - Quadro para a hipótese do tipo I

Fonte de Variação	RC)
Linha (não ajustada)	$RC(\alpha \mu)$
Coluna (ajustada)	$RC(\beta \mu, \alpha)$
Interação (L*C)	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$

Quadro 6 - Quadro para a hipótese do tipo II

Fonte de Variação	RC)
Linha (ajustada)	$RC(\alpha \mu, \beta)$
Coluna (ajustada)	$RC(\beta \mu, \alpha)$
Interação (L*C)	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$

Quadro 7 - Quadro para a hipótese do tipo III

Fonte de Variação	RC)
Linha	$RC(\alpha^{\circ} \mu^{\circ}, \beta^{\circ}, \gamma^{\circ})$
Coluna	$RC(\beta^{\circ} \mu^{\circ}, \alpha^{\circ}, \gamma^{\circ})$
Interação (L*C)	$RC(\gamma \mu, \alpha, \beta)$

Os quadros referentes ao modelo sem interação, na verdade, são idêntidos aos quadros acima, desprezando, logicamente, o efeito da interação. No próximo capítulo são esclarecidos outros detalhes sobre os pacotes aqui utilizados.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A apresentação dos resultados, fornecidos pelos pacotes estatísticos, é feita no quadro de análise de variância proposto por Fisher.

A solução para o vetor de parâmetros do modelo linear proposto é obtida através da solução de Mínimos Quadrados.

As Somas de Quadrados vistas nos quadros de análise de variância, são obtidas pela imposição das "matrizes hipóteses" B' , matrizes que esclarecem o tipo de hipótese testada.

Cada uma das hipóteses testadas está relacionada com os quatro tipos de Funções Estimáveis dadas pelo PROC GLM do SAS, ou seja, tipos I, II, III e IV.

Como já comentado no capítulo anterior, dois exemplos são utilizados para auxiliar na análise dos dados feita pelos dois pacotes estatísticos aqui estudados e criar condições de discernimento entre todos os tipos de hipóteses. Dessa forma, as peculiaridades de cada hipótese ficará evidenciada. A seguir temos os dois exemplos.

4.1. EXEMPLO 1

Conforme o item 3.1.1., no presente trabalho, os dados são adaptados e analisados desde um modelo balanceado até um modelo desbalanceado com caselas vazias,

todos na presença de interação. Apresentam-se, a seguir, cinco casos que podem ser encontrados em análises de experimentos.

4.1.1. CASO A1 - Dados balanceados

1. O MODELO LINEAR

O modelo de médias de caselas fica:

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$$

com $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$ e $k = 1, 2, \dots, n_{ij}$. Como os dados são balanceados, então $n_{11} = n_{12} = \dots = n_{23} = 4$.

Comparando-se com o modelo superparametrizado,

tem-se:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}, \text{ assim,}$$

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

Com base no Quadro 2, pode-se construir o Quadro 8 para o caso A1 que vem a seguir.

Quadro 8 - Quadro do modelo de médias - Caso A1

		COLUNAS		
		1	2	3
LINHAS	1	$\mu_{11}^{(4)}$	$\mu_{12}^{(4)}$	$\mu_{13}^{(4)}$
	2	$\mu_{21}^{(4)}$	$\mu_{22}^{(4)}$	$\mu_{23}^{(4)}$

2. AS MATRIZES

$${}_{24}y_1 = \begin{bmatrix} 26,2 \\ 26,0 \\ 25,0 \\ 25,4 \\ 25,7 \\ 26,3 \\ 25,1 \\ 26,4 \\ 22,8 \\ 19,4 \\ 18,8 \\ 19,2 \\ 24,8 \\ 24,6 \\ 26,7 \\ 25,2 \\ 19,6 \\ 21,1 \\ 19,0 \\ 18,6 \\ 19,8 \\ 21,4 \\ 22,8 \\ 21,3 \end{bmatrix}; \quad \sigma\mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$$

$${}_{24}W_\sigma = \begin{bmatrix} J_1 & & & & & \\ & J_2 & & & & \\ & & J_3 & & & \\ & & & J_4 & & \\ & & & & J_5 & \\ & & & & & J_6 \end{bmatrix}; \text{ onde}$$

$$J_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ para qualquer } p.$$

Assim, $(W'W)^{-1}$ tem a forma,

$$(W'W)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} I_{(6)}$$

Então, pode-se escrever a matriz $(W'W)^{-1}$ na forma

$$(W'W)^{-1} = \frac{1}{k} I_{(ab)}$$

onde k é o número de repetições por tratamento (para o exemplo de BANZATTO & KRONKAC(1987)) e $I_{(ab)}$ é uma matriz identidade de ordem (ab) , se o experimento é balanceado.

De acordo com (7) ou (11), tem-se,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 102,6 \\ 103,5 \\ 80,2 \\ 101,3 \\ 78,3 \\ 85,3 \end{bmatrix}$$

Agora, por (9), encontram-se as somas de quadrados para as hipóteses formuladas.

3. HIPÓTESES ESTATÍSTICAS

Cabe agora um lembrete que pode ser encontrado facilmente na literatura correlata, digamos, KUTNER (1974): ao se trabalhar com dados balanceados, a análise de dados é feita de forma simples e as hipóteses do tipo I, II, III e IV são equivalentes.

Através de uma simples exposição dessas hipóteses essas afirmações podem ser comprovadas, assim:

3.1. Hipóteses sobre Linhas ou Espécies

3.1.1. Tipo I

$$H_0^{(1)}: \frac{4\mu_{11} + 4\mu_{12} + 4\mu_{13}}{12} = \frac{4\mu_{21} + 4\mu_{22} + 4\mu_{23}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}$$

3.1.2. Tipo II

$$\begin{aligned}
 H_o^{(2)}: \frac{4\mu_{11} + 4\mu_{12} + 4\mu_{13}}{12} &= \frac{4\bar{C}_1 + 4\bar{C}_2 + 4\bar{C}_3}{12} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} &= \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3 = \frac{4\mu_{11} + 4\mu_{21}}{8} + \frac{4\mu_{12} + 4\mu_{22}}{8} + \\
 + \frac{4\mu_{13} + 4\mu_{23}}{8} &\Rightarrow \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23} = H_o^{(1)}
 \end{aligned}$$

3.1.3. Tipo III

$$\begin{aligned}
 H_o^{(3)} &= \frac{\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13}}{3} = \frac{\mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}}{3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} &= \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23} = H_o^{(3)} = H_o^{(2)} = H_o^{(1)}
 \end{aligned}$$

Na construção da matriz B' , há apenas 1 grau de liberdade, pois existem apenas duas espécies estudadas, ou B' tem apenas 1 linha linearmente independente (L.I.).

Cada coluna de B' está associada com os coeficientes dos parâmetros do modelo. Desta forma, a Matriz Hipótese, é:

$$\begin{array}{cccccc}
 \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 B'_L = [& 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 &] ; \text{ assim,}
 \end{array}$$

$$B'_L \hat{\mu} = \frac{1}{4} [21, 4]; \quad [B'_L (W'W)^{-1} B'_L]^{-1} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore SQ_{Linha} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 21 \\ 4 \end{bmatrix} \left(\frac{2}{3} \right) \frac{1}{4} [21, 4] = \frac{11449}{600} = 19,0817$$

3.2. Hipóteses sobre Colunas ou Recipientes

De modo análogo às hipóteses sobre Linhas, todas as hipóteses nesse caso serão da forma:

$$H_0^{(c)}: \frac{\mu_{11} + \mu_{21}}{2} = \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{2} = \frac{\mu_{13} + \mu_{23}}{2}$$

Neste caso, B' tem duas linhas L.I., pois há três recipientes. Então, há dois g.l..

$$\text{Matriz Hipótese: } B'_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ ou}$$

$$B'_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ ou}$$

$$B'_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

e há outras que levam a hipóteses equivalentes.

Logicamente, as três matrizes testam a mesma hipótese, ou seja, a hipótese de diferença significativa entre os três recipientes. Em outras palavras, as hipóteses são equivalentes, fornecendo, portanto, a mesma soma de quadrados.

Conforme (9) a soma de quadrados fica,

$$B'_c \hat{\mu} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 22,1 \\ 38,4 \end{bmatrix}; \quad [B'_c(W'W)^{-1}B'_c]^{-1} = \frac{4}{12} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$SQ_{\text{coluna}} = \frac{1}{4} [22,1 \quad 38,4] \frac{4}{12} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 22,1 \\ 38,4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQ_{\text{coluna}} = \frac{111433}{1200} = 92,8608$$

3.3. Hipótese sobre a interação

$$H_o^{(I)}: \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{22} = \mu_{12} + \mu_{21} \\ \mu_{11} + \mu_{23} = \mu_{13} + \mu_{21} \end{cases}, \text{ ou}$$

$$H_o^{(I)}: \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{22} = \mu_{12} + \mu_{21} \\ \mu_{12} + \mu_{23} = \mu_{13} + \mu_{22} \end{cases}, \text{ ou}$$

$$H_o^{(I)}: \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{23} = \mu_{13} + \mu_{21} \\ \mu_{12} + \mu_{23} = \mu_{13} + \mu_{22} \end{cases}$$

De modo análogo ao item anterior, apresentam-se para B' , dentre outras, três formas, ou seja, três hipóteses equivalentes que testam a significância do efeito da interação.

Veja que $H_o^{(I)}$ tem duas linhas, indicando dois g.l. para interação, o que concorda com o quadro da análise de variância mostrado anteriormente. Isto é, $(a-1)(b-1)-t = 1 \times 2 - 0 = 2$ (ver ELSTON & BUSH, 1964 e IEMMA, 1991).

A matriz B'_I pode ser da forma:

$$B'_I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ assim,}$$

$$B'_I \hat{\mu} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -23,9 \\ 6,4 \end{bmatrix}; \quad [B'_I (W'W)^{-1} B_I]^{-1} = \frac{4}{12} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(I)} = \frac{1}{4}[-23,9 \ 6,4] \frac{4}{12} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -23,9 \\ 6,4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\Rightarrow SQH_o^{(I)} = \frac{76513}{1200} = 63,7608$$

Pode-se agora montar o quadro da análise de variância para o Caso A1.

Quadro 1.A1 - Análise de Variância de acordo com o Caso A1

F.V.	G.L.	S.Q.	F
LINHAS	(a-1)=1	19,0816	14,88**
COLUNAS	(b-1)=2	92,8608	36,20**
INTERAÇÃO	(a-1)(b-1)-t=2	63,7608	24,85**
RESÍDUO	$\Delta_1 = 18$	23,0900	
	(n-1)=23	198,793	

Verifica-se que o teste F para a Interação LxC foi significativo, indicando existir uma dependência entre os fatores: Linhas (Espécies) e Colunas (Recipientes).

Assim, qualquer conclusão que se deseje colher do Quadro 1.A1, em relação aos efeitos principais, será mascarada pelo efeito da interação. Portanto, é necessário que se faça um desdobramento da interação, o que pode ser feito de duas maneiras. A primeira, estudando o comportamento das espécies dentro de cada recipiente, e a segunda, os recipientes dentro de cada espécie.

A fim de enfocar a necessidade de se escolher corretamente as "matrizes hipóteses", estuda-se, como ilustração, a segunda maneira. E os cálculos para uma correta análise são vistos agora:

A hipótese $H_0^{(1)}$: recipientes dentro da espécie *citriodora* (E1).

$$H_0^{(1)}: \begin{cases} \mu_{11} = \mu_{12} \\ \mu_{11} = \mu_{13} \end{cases} \Rightarrow B'_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ assim,}$$

$$B'_1 \hat{\mu} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -0,9 \\ 22,4 \end{bmatrix}; [B'_1(W'W)^{-1}B_1]^{-1} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(1)} = \frac{1}{4}[-0,9 \quad 22,4] \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -0,9 \\ 22,4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SQH_0 = \frac{52273}{600} = 87,121\bar{6}$$

A hipótese $H_0^{(2)}$: recipientes dentro da espécie *grandis* (E2).

$$H_0^{(2)}: \begin{cases} \mu_{21} = \mu_{22} \\ \mu_{21} = \mu_{23} \end{cases} \Rightarrow B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \text{ assim,}$$

$$B' \hat{\mu} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 23 \\ 16 \end{bmatrix}; [B'(W'W)^{-1}B]^{-1} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(2)} = \frac{1}{4}[23 \quad 16] \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 23 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SQH_0^{(2)} = \frac{41700}{600} = 69,50$$

O quadro da análise de variância é:

Quadro 2.A1 - Quadro do desdobramento da interação para estudar o comportamento dos recipientes dentro de cada espécie

	F. V.	G. L.	S. Q.	F
L	d. C ₁	2	87,121 $\bar{6}$	33,96**
L	d. C ₂	2	69,5000	27,09**

Portanto, conclui-se que os três recipientes têm efeitos diferentes sobre o desenvolvimento de mudas das duas espécies. Um teste de comparação múltipla poderia ser aplicado para a conclusão final.

Os resultados, através do PROC GLM podem ser obtidos como a seguir:

```
DATA;
INPUT L C y @@;
CARDS;
1 1 26.2
1 1 26.0
1 1 25.0
1 1 25.4
1 2 25.7
1 2 26.3
1 2 25.1
1 2 26.4
1 3 22.8
1 3 19.4
1 3 18.8
1 3 19.2
2 1 24.8
2 1 24.6
2 1 26.7
2 1 25.2
2 2 19.6
2 2 21.1
2 2 19.0
2 2 18.6
2 3 19.8
2 3 21.4
2 3 22.8
2 3 21.3
PROC GLM;
CLASS L C;
MODEL y = L C L*C/SOLUTION S1 S2 S3 S4;
RUN;
```

Apresentam-se, agora, as saídas do PROC GLM do SAS para os quatro tipos de Somas de Quadrados.

Quadro 3.A1 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	5	175.7033333	35.1406667	27.39
Error	18	23.0900000	1.2827778	
Total	23	198.7933333		

Quadro 4.A1 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	1	19.08166667	19.08166667	14.88
C	2	92.86083333	46.43041667	36.20
L*C	2	63.76083333	31.88041667	24.85

Quadro 5.A1 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	1	19.08166667	19.08166667	14.88
C	2	92.86083333	46.43041667	36.20
L*C	2	63.76083333	31.88041667	24.85

Quadro 6.A1 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	1	19.08166667	19.08166667	14.88
C	2	92.86083333	46.43041667	36.20
L*C	2	63.76083333	31.88041667	24.85

Quadro 7.A1 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	1	19.08166667	19.08166667	14.88
C	2	92.86083333	46.43041667	36.20
L*C	2	63.76083333	31.88041667	24.85

Como ilustração, a saída para o STATGRAPHICS, para as hipóteses dos tipos I e III é vista no Quadro 4.A1'. Note que há a informação do número de caselas vazias existentes.

Quadro 4.A1' - Quadro da Análise de variância para a hipótese do tipo I

Source of variation	Sum of Squares	d.f
MAIN EFFECTS		
L:Espécies	19.08167	1
C:Recipientes	92.86083	2
INTERACTIONS		
LC	63.76083	2
RESIDUAL	23.09000	18
TOTAL (CORRECTED)	198.79333	19

0 missing values have been excluded.

All F-ratios are based on the residual mean square error.

Através de uma simples observação, conclui-se que todas as somas de quadrados são idênticas. Isto ocorre, justamente, por se tratar de um conjunto de dados balanceados. Assim, a análise dos dados é de fácil obtenção e interpretação, como relataram vários pesquisadores, dentre eles, YATES, já em 1934.

É fundamental que se note, desde já, que se as somas de quadrados obtidas forem iguais, as "matrizes

hipóteses" B' são, também, idênticas. Portanto, as hipóteses testadas pelas somas de quadrados do tipo I, II, III e IV são equivalentes. Assim,

Para linhas

$$H_o^{(L)} = H_o^{(1)} = H_o^{(2)} = H_o^{(3)} = H_o^{(4)}: \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}$$

Para colunas

$$H_o^{(L)} = H_o^{(1)} = H_o^{(2)} = H_o^{(3)} = H_o^{(4)}: \mu_{11} + \mu_{21} = \mu_{12} + \mu_{22} = \mu_{13} + \mu_{23}$$

4.1.2. Caso A2 - Dados desbalanceados sem casela vazia

Quadro 9 - Esquema do modelo de médias para o Caso A2, conforme descrito no Quadro 2.

		COLUNAS		
		1	2	3
LINHAS	1	$\mu_{11}^{(4)}$	$\mu_{12}^{(4)}$	$\mu_{13}^{(2)}$
	2	$\mu_{21}^{(1)}$	$\mu_{22}^{(9)}$	$\mu_{23}^{(2)}$

As matrizes são da forma:

$$10^{-1} Y_1 = \begin{bmatrix} 26,2 \\ 26,0 \\ 25,0 \\ 25,4 \\ 25,7 \\ 26,3 \\ 25,1 \\ 26,4 \\ 18,8 \\ 19,2 \\ 24,6 \\ 19,6 \\ 19,0 \\ 18,6 \\ 21,4 \\ 22,8 \end{bmatrix}; \quad \sigma^2 \mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$$

Pelas expressões dadas em (6), tem-se:

$$W'W = \begin{bmatrix} 4 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 3 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}; (W'W)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & & & & \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/2 & & \\ & & & 1/1 & \\ 0 & & & & 1/3 \\ & & & & & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim como o Caso A1, o estimador de mínimos quadrados para μ é:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 102,6/4 \\ 103,5/4 \\ 38,0/2 \\ 24,6/1 \\ 57,2/3 \\ 44,2/2 \end{bmatrix}$$

Agora as somas de quadrados dadas por (9)

são:

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_0^{(1)}: \frac{4\mu_{11} + 4\mu_{12} + 2\mu_{13}}{10} = \frac{\mu_{21} + 3\mu_{22} + 2\mu_{23}}{6}, \text{ então,}$$

$$B'_1 = \left[\frac{4}{10} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{2}{10} \quad - \frac{1}{6} \quad - \frac{3}{6} \quad - \frac{2}{6} \right]$$

$$\therefore SQH_0^{(1)} = 43,6054 = R(\alpha|\mu)$$

Note que essa hipótese é de difícil interpretação. Os coeficientes de cada um dos parâmetros do modelo-M podem ser confusos para o usuário. Para ressaltar tal fato a hipótese através do modelo-S, modelo mais conhecido pelos pesquisadores, é também vista a seguir:

$$H_0^{(1)}: \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{7}{30}\beta_1 - \frac{1}{5}\beta_2 - \frac{2}{15}\beta_3 + \frac{2}{5}\gamma_{11} + \frac{2}{5}\gamma_{12} + \frac{1}{5}\gamma_{13} - \frac{1}{6}\gamma_{21} - \\ - \frac{1}{2}\gamma_{22} - \frac{1}{3}\gamma_{23} = 0 \end{cases}$$

Assim, fica claro para qualquer pesquisador que a hipótese testada não é aquela que alguns pesquisadores estão acostumados a testar, ou seja, $H_0: \alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Mesmo assim, para se testar uma hipótese próxima a esta é preciso que se imponham restrições paramétricas ao modelo linear.

Observando-se a expressão da hipótese $H_0^{(1)}$, verifica-se que as sugestões do trabalho de Snedecor & Cox (1935) eram, no mínimo, estranhas, pois ao contrário do que é dito no referido artigo, os dois efeitos principais estão envolvidos na hipótese formulada.

b) Tipo II

Pode-se utilizar $H_0^{(2)}$ mostrada em (B) do item 3.2.4.1. para construção da hipótese do tipo II. Assim,

$$\sum_j^3 n_{ij} \mu_{ij} = n_{i1} \mu_{i1} + n_{i2} \mu_{i2} + n_{i3} \mu_{i3}$$

$$\text{para } i = 1 \Rightarrow 4\mu_{11} + 4\mu_{12} + 2\mu_{13}$$

$$\text{para } i = 2 \Rightarrow \mu_{21} + 3\mu_{22} + 2\mu_{23}$$

$$\sum_{i,j}^2 \sum^3 \frac{n_{ij} n_{i \cdot j} \mu_{i \cdot j}}{n_{\cdot j}} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i \cdot}^2 \frac{n_{i1} n_{i \cdot 1} \mu_{i \cdot 1}}{n_{\cdot 1}} + \frac{n_{i2} n_{i \cdot 2} \mu_{i \cdot 2}}{n_{\cdot 2}} + \frac{n_{i3} n_{i \cdot 3} \mu_{i \cdot 3}}{n_{\cdot 3}} =$$

$$= \frac{n_{i1} (n_{11} \mu_{11} + n_{21} \mu_{21})}{n_{\cdot 1}} + \frac{n_{i2} (n_{12} \mu_{12} + n_{22} \mu_{22})}{n_{\cdot 2}} + \frac{n_{i3} (n_{13} \mu_{13} + n_{23} \mu_{23})}{n_{\cdot 3}}$$

$$\text{para } i = 1 \Rightarrow \frac{4(4\mu_{11} + \mu_{21})}{5} + \frac{4(4\mu_{12} + 3\mu_{22})}{7} + \frac{2(2\mu_{13} + 2\mu_{23})}{4}$$

$$\text{para } i = 2 \Rightarrow \frac{1(4\mu_{11} + \mu_{21})}{5} + \frac{3(4\mu_{12} + 3\mu_{22})}{7} + \frac{2(2\mu_{13} + 2\mu_{23})}{4}$$

Assim, igualando-se as expressões, por exemplo, para $i=1$, encontra-se:

$$H_0^{(2)}: \frac{4}{5} \mu_{11} + \frac{12}{7} \mu_{12} + \mu_{13} - \frac{4}{5} \mu_{21} - \frac{12}{7} \mu_{22} - \mu_{23} = 0$$

A matriz B'_2 pode ser escrita como:

$$B'_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{12}{7} & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{12}{7} & -1 \end{bmatrix}$$

Desta forma, pode-se obter $SQH_0^{(2)}$:

$$SQH_0^{(2)} = 25,2043 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

Existem outras hipóteses do tipo II, mas todas equivalentes à $H_0^{(2)}$. Uma delas pode ser construída fazendo, por exemplo, $i = 2$.

A construção de B'_2 a partir da hipótese $H_0^{(2)}$ não é tão simples. Um modo mais fácil e prático pode ser encontrado no trabalho de IEMMA (1991, p. 38), que consiste em:

i) tomar o 1º membro da igualdade de $H_0^{(1)}$ como o 1º membro de $H_0^{(2)}$.

ii) o 2º membro de $H_o^{(2)}$ é obtido pela substituição das médias ponderadas de colunas na posição correspondente do 1º membro.

Portanto, a "nova" $H_o^{(2)}$ será:

$$H_o^{(2)}: \frac{4\mu_{11} + 4\mu_{12} + 2\mu_{13}}{10} = \frac{4\bar{C}_1 + 4\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3}{10} \Rightarrow$$

onde $\bar{C}_j$ é a média ponderada da coluna j.

$$4\mu_{11} + 4\mu_{12} + 2\mu_{13} = 4 \cdot \frac{4\mu_{11} + \mu_{21}}{5} + 4 \cdot \frac{4\mu_{12} + 3\mu_{22}}{7} + 2 \cdot \frac{2\mu_{13} + 2\mu_{23}}{4}$$

Depois de simplificadas as expressões, encontra-se a mesma hipótese $H_o^{(2)}$, como era de se esperar.

Novamente, assim como para a hipótese do tipo I, a hipótese é de difícil entendimento. Veja para o modelo superparametrizado como fica a hipótese:

$$H_o^{(2)}: \frac{123}{35}\alpha_1 - \frac{123}{35}\alpha_2 + \frac{4}{5}\gamma_{11} + \frac{12}{7}\gamma_{12} + \gamma_{13} - \frac{4}{5}\gamma_{21} - \frac{12}{7}\gamma_{22} - \gamma_{23} = 0$$

Pelo simples exame da hipótese $H_o^{(2)}$, nota-se que a sugestão dada no trabalho de Snedecor & Cox (1935) é concordante, porém, ELSTON & BUSH (1964) especificam melhor a situação.

c) Tipo III

Usando-se (C) do item 3.2.4.1., a hipótese é:

$$H_o^{(3)}: \frac{\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13}}{3} = \frac{\mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}}{3} \text{ ou}$$

$$H_o^{(3)}: \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}, \text{ então,}$$

$$B'_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

$$\Rightarrow SQH_o^{(3)} = 7,9912 = R(\alpha^0 | \mu^0, \beta^0, \gamma^0)$$

Pelo modelo-S a hipótese fica assim caracterizada:

$$H_o^{(3)}: 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} - \gamma_{21} - \gamma_{22} - \gamma_{23} = 0$$

d) Tipo IV

Como foi discutido em (D) do item 3.2.4.1., espera-se nesse caso que $SQH_o^{(3)} = SQH_o^{(4)}$, pois não há casela vazia. Assim, $H_o^{(3)} = H_o^{(4)}$.

As saídas do SAS comprovam o fato, como pode ser visto nos Quadros 4.A2 e 5.A2. Para isso, a nova programação é igual a do caso A1, com a eliminação das observações perdidas. Assim:

```
DATA;
INPUT L C y @@;
CARDS;
1 1 26.2
1 1 26.0
1 1 25.0
1 1 25.4
1 2 25.7
1 2 26.3
1 2 25.1
1 2 26.4
1 3 18.8
1 3 19.2
2 1 24.6
2 2 19.6
2 2 19.0
2 2 18.6
2 3 21.4
2 3 22.8
PROC GLM;
CLASS L C;
MODEL y = L C L*C/SOLUTION S1 S2 S3 S4;
RUN;
```

Quadro 1.A2 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	5	143.4702083	28.6940417	80.51
Error	10	3.5641667	0.3564167	
Total	15	147.0343750		

Quadro 2.A2 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	1	43.60537500	43.60537500	122.34
C	2	35.11412195	17.55706098	49.26
L*C	2	64.75071138	32.37535569	90.84

Quadro 3.A2 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	1	25.20426481	25.20426481	70.72
C	2	35.11412195	17.55706098	49.26
L*C	2	64.75071138	32.37535569	90.84

Quadro 4.A2 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	1	7.99120098	7.99120098	22.42
C	2	37.25445122	18.62722561	52.26
L*C	2	64.75071138	32.37535569	90.84

Quadro 5.A2 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	1	7.99120098	7.99120098	22.42
C	2	37.25445122	18.62722561	52.26
L*C	2	64.75071138	32.37535569	90.84

Vê-se que para o caso A2, quando existe desbalanceamento, as somas de quadrados são distintas. Há uma equivalência entre as hipóteses dos tipos III e IV. Porém, as hipóteses dos tipos I, II e III não são equivalentes.

A ordem de entrada dos fatores é essencial para a análise. O caso em questão estuda a ordenação L, C e LxC. Dessa forma, as SQ dos quadros 2.A2 e 3.A2 para C são as mesmas, pois a hipótese associada é do tipo II. Isso sempre ocorre. Ou seja, a 2ª linha dos quadros de análise de variância para SQ tipo I e SQ tipo II, testam a mesma hipótese para o segundo fator na ordenação do modelo.

Devido ao avanço que se observa na informática, fica praticamente inaceitável que pacotes estatísticos não estabeleçam, claramente, meios para que seus usuários saibam qual a hipótese que realmente se está testando.

No caso do SAS, o indicativo de quais hipóteses estão sendo testadas é dado através da forma das funções estimáveis. Porém, estas não são de fácil entendimento, até mesmo para estatísticos, quanto mais, para os usuários esporádicos. Detalhes sobre o tema podem ser obtidos em MONDARDO (1994).

4.1.3. Caso A3 - Uma casela vazia e demais dados balanceados

Quadro 10 - Esquema do modelo de médias para o caso A3, conforme Quadro 2.

		COLUNAS		
		1	2	3
LINHAS	1	✓	$\mu_{12}^{(4)}$	$\mu_{13}^{(4)}$
	2	$\mu_{21}^{(4)}$	$\mu_{22}^{(4)}$	$\mu_{23}^{(4)}$

onde ✓ indica a ocorrência da casela vazia.

A construção das matrizes é análoga aos casos anteriores, exceto, pela coluna correspondente à casela vazia μ_{11} .

Deste modo, as matrizes ficam:

$${}_{20}Y_1 = \begin{bmatrix} 25,7 \\ 26,3 \\ 25,1 \\ 26,4 \\ \hline 22,8 \\ 19,4 \\ 18,8 \\ 19,2 \\ \hline 24,8 \\ 24,6 \\ 26,7 \\ 25,2 \\ \hline 19,6 \\ 21,1 \\ 19,0 \\ 18,6 \\ \hline 19,8 \\ 21,4 \\ 22,8 \\ 21,3 \end{bmatrix} ; \quad {}_5\mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$$

$$(W'W)^{-1} = \frac{1}{4}I_{(5)} \quad \hat{\mu} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 103,5 \\ 80,2 \\ 101,3 \\ 78,3 \\ 85,3 \end{bmatrix}$$

Como nos casos anteriores, obtêm-se as hipóteses para cada um dos efeitos do modelo:

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_o^{(1*)} : \frac{4\mu_{12} + 4\mu_{13}}{8} = \frac{4\mu_{21} + 4\mu_{22} + 4\mu_{23}}{12}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

$$\Rightarrow B'_{1*} = [1/2 \quad 1/2 \quad -1/3 \quad -1/3 \quad -1/3]$$

Para o modelo-S:

$$H_o^{(1*)} : 6\alpha_1 - 6\alpha_2 - 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 3\gamma_{12} + 3\gamma_{13} - 2\gamma_{21} - 2\gamma_{22} - 2\gamma_{23} = 0$$

$$\therefore SQH_o^{(1*)} = 3,78075 = R(\alpha|\mu)$$

O asterisco (*), a partir de agora, indica que se trata de hipóteses na presença de, pelo menos, uma casela vazia.

b) Tipo II

$$H_o^{(2*)} : \frac{4\mu_{12} + 4\mu_{13}}{8} = \frac{4\bar{C}_2 + 4\bar{C}_3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_{2*} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1]$$

Pelo modelo-S:

$$H_o^{(2*)} : 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \gamma_{12} + \gamma_{13} - \gamma_{22} - \gamma_{23} = 0$$

$$\therefore SQH_o^{(2*)} = 25,250625 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

c) Tipo III

Devido a dificuldade de se construir as hipóteses do tipo III, especialmente na presença de caselas vazias, um método simples e prático foi desenvolvido nesse trabalho para solucionar tal transtorno. Esse método serve para qualquer situação, inclusive quando aparecem caselas vazias. Dessa forma, a hipótese fica assim construída:

$$H_0^{(3*)}: \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\text{onde: } C_1 = \frac{\mu_{21}}{1}; C_2 = \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{2}; C_3 = \frac{\mu_{13} + \mu_{23}}{2}$$

ou seja, C_j é a média aritmética simples das médias populacionais das caselas da coluna j . Portanto, substituindo-se convenientemente os valores de C_j no segundo membro da expressão de $H_0^{(3*)}$, encontra-se:

$$H_0^{(3*)}: \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{22} + \mu_{23}$$

$$\text{e então: } B'_{3*} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1]$$

$$\therefore SQH_0^{(3*)} = 25,250625 = RC\alpha^\circ | \mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ$$

Veja que $B'_{2*} = B'_{3*}$. A igualdade só ocorre devido ao balanceamento. No caso A4 isso pode ser verificado.

d) Tipo IV

A hipótese do tipo IV para linhas é

construída da seguinte forma:

- 1) comparam-se as médias μ_{ij} dentro da mesma coluna, iniciando-se a comparação sempre pela última linha;
- 2) essa comparação deve formar um contraste entre os μ_{ij} , de maneira que este tenha um maior número de médias;
- 3) na construção dos contrastes, o fator limitante para um grande número de médias será a casela vazia.

Assim, no exemplo, a hipótese do tipo IV para linhas fica idêntica a do tipo III. Pois,

$$\begin{array}{c} \text{início} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cc} \gamma & \begin{array}{|c|c|} \hline \mu_{12} & \mu_{13} \\ \hline \uparrow & \uparrow \end{array} \\ \hline \mu_{21} & \begin{array}{|c|c|} \hline \mu_{22} & \mu_{23} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \Rightarrow B'_{4*} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1] \end{array}$$

Veja, que no exemplo em questão, as hipóteses dos tipos II, III e IV não contêm μ_{21} . Ou seja, a espécie *grandis* plantada no saco pequeno não está sendo comparada com os demais tratamentos. Essa seria a diferença principal entre os tipos de hipóteses que o GLM (tipo IV) e o STATGRAPHICS (tipo III) fornecem, quando há casela vazia. Mas o STATGRAPHICS não executa a análise, se o modelo contém interação e casela vazia, conjuntamente.

É bom salientar que a ausência de casela μ_{21} no contraste da hipótese do tipo III não é regra geral. Ou melhor, a hipótese tipo III não "discrimina" necessariamente as caselas que estão na mesma coluna (ou linha) de uma casela vazia. Isto só ocorreu porque há

apenas dois níveis para o primeiro fator.

O manual do STATGRAPHICS, por sua vez, não comenta claramente as diferenças entre a SQ I e a SQ III. Além disso, não resolve qualquer caso onde envolva, conjuntamente, caselas vazias e interação.

Uma observação interessante é que uma versão anterior, versão 2.6, utilizava, apenas as hipóteses do tipo II e seu manual não comentava este fato. Além disso, executava, para algumas situações, a análise contendo interação com caselas vazias. E, quanto à mudança da hipótese do tipo II para as opções de hipóteses dos tipos I e III da atual versão, não se encontra nenhuma justificativa no atual manual.

Para o caso das hipóteses sobre colunas, nota-se que a única diferença está na hipótese do tipo IV, sendo, portanto, $SQH_o^{(1*)} = SQH_o^{(2*)} = SQH_o^{(3*)}$, pois as hipóteses são equivalentes e podem ser contruídas através de B'_{2*} .

$$B'_{2*} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Efetuando-se os cálculos, obtém-se a $SQH_o^{(2*)}$ para colunas, de modo similar a soma de quadrados para linhas.

$$\therefore SQH_o^{(1*)} = SQH_o^{(2*)} = SQH_o^{(3*)} = 79,980625$$

Já a $SQH_o^{(4*)}$ é obtida com o auxílio da matriz

B'_{4*} dada por:

$$B'_{4*} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \text{ pois}$$

$$\therefore SQH_0^{(4*)} = 36,9207$$

Convém lembrar que a matriz hipótese ligada à interação B'_{5*} tem, agora, apenas uma linha, ao invés de duas, como no caso anterior. Isso se deve à casela vazia, pois, tem-se para a interação $(a-1)(b-1)-t = (2-1)(3-1)-1 = 1$ g.l..

Pelo esquema de médias populacionais, fica evidente a única interação que é estimável nesse exemplo. Então:

γ	μ_{12}	μ_{13}	$\Rightarrow B'_{5*} = [1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$
μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	

$$\therefore SQ_{\text{interação}} = 57,380625 = R(\gamma | \mu, \alpha, \beta)$$

Apresentam-se, a seguir, os resultados fornecidos pelo PROC GLM para o caso A3.

Quadro 1.A3 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	4	141.1420000	35.2855000	23.86
Error	15	22.1800000	1.4786667	
Total	19	163.3220000		

Quadro 2.A3 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	1	3.78075000	3.78075000	2.56
C	2	79.98062500	39.99031250	27.04
L*C	1	57.38062500	57.38062500	38.81

Quadro 3.A3 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	1	25.25062500	25.25062500	17.08
C	2	79.98062500	39.99031250	27.04
L*C	1	57.38062500	57.38062500	38.81

Quadro 4.A3 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	1	25.25062500	25.25062500	17.08
C	2	79.98062500	39.99031250	27.04
L*C	1	57.38062500	57.38062500	38.81

Quadro 5.A3 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	1*	25.25062500	25.25062500	17.08
C	2*	36.92071429	18.46035714	12.48
L*C	1	57.38062500	57.38062500	38.81

Note que a saída do PROC GLM para os quadros de análise de variância não indicam se há casela vazia. É preciso que o usuário esteja atento aos g.l. da interação. Mesmo assim, é impossível afirmar qual a casela vazia. Já o STATGRAPHICS comenta, abaixo do quadro de análise de variância, o número de caselas vazias e também não indica quais são. Para tanto, é necessário que as observações ausentes sejam informadas pelo código de "missing" que é igual a -32768. Porém, a saída do STATGRAPHICS, para esse exemplo, não ocorre devido a presença da casela vazia. A tela do computador informa a seguinte mensagem de erro:

Multifactor Analysis of Variance

Data: MUDAS

Factors: A: EUCAL
 B: RECIP
 C:
 D:
 E:
 F:
 G:
 H:
 I:
 J:

Covariates:
 (optional)

Means plot: LSD Confidence level: 95 Range test: LSD
 Ignore interactions higher than order:2 Sum of squares: Type I

ERROR: AB is confounded with other effects.

1Help 2Edit 3Savscr 4Prtscr 5Opts 6Go 7Vars 8Cmd 9Device 10Quit
 INPUT STATGRAPHICS Vers.7.0 Display ANOVA

4.1.4. Caso A4 - Dados desbalanceados com uma casela vazia

Quadro 11 - Esquema do modelo de médias para o caso A4, conforme o Quadro 2.

		COLUNAS		
		1	2	3
LINHAS	1	γ	$\mu_{12}^{(4)}$	$\mu_{13}^{(2)}$
	2	$\mu_{21}^{(1)}$	$\mu_{22}^{(3)}$	$\mu_{23}^{(2)}$

onde γ indica a casela vazia.

Pode-se, a seguir, construir as matrizes analogamente ao caso A3:

$${}_{12}Y_1 = \begin{bmatrix} 25,7 \\ 26,3 \\ 25,1 \\ 26,4 \\ \hline 18,8 \\ 19,2 \\ 24,6 \\ \hline 19,6 \\ 19,0 \\ 18,6 \\ \hline 21,4 \\ 22,8 \end{bmatrix} ;$$

A matriz W e o vetor μ deste caso são idênticos ao do caso A3. A única diferença se encontra no desbalanceamento. Portanto, a solução de mínimos quadrados do vetor de médias é:

$$\hat{{}_5\mu_1} = \begin{bmatrix} 103,5/4 \\ 38/2 \\ 24,6/1 \\ 57,2/3 \\ 44,2/2 \end{bmatrix}$$

Em seguida, apresentam-se as hipóteses:

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_o^{(1*)} : \frac{4\mu_{12} + 2\mu_{13}}{6} = \frac{\mu_{21} + 3\mu_{22} + 2\mu_{23}}{6} \Rightarrow$$

$$\mu_{21}$$

$$\Rightarrow B'_{1*} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(1*)} = 20,0208\bar{3} = R(\alpha|\mu)$$

Observe que essa hipótese leva em consideração a casela μ_{21} . Nos demais tipos, isso não acontece. Como pode ser visto a seguir.

b) Tipo II

$$H_o^{(2*)} : \frac{4\mu_{12} + 2\mu_{13}}{6} = \frac{4\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3}{6} \Rightarrow$$

$$\mu_{21}$$

$$\downarrow$$

$$\Rightarrow B'_{2*} = \begin{bmatrix} 6/7 & 1/2 & 0 & -6/7 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(2*)} = 27,067669 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

c) Tipo III

$$H_o^{(3*)} : \frac{\mu_{12} + \mu_{13}}{2} = \frac{\mu_{22} + \mu_{23}}{2} \Rightarrow$$

$$\mu_{21}$$

$$\downarrow$$

$$\Rightarrow B'_{3*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(3*)} = 8,6853 = R(\alpha^\circ | \mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ)$$

d) Tipo IV

É equivalente à $H_o^{(3*)}$.

Lembrando-se do caso A3, foi dito que as somas de quadrados tipos II e III eram iguais, pois, exceto pela casela vazia, os dados eram balanceados. Porém, vê-se que, para o caso em estudo, as somas de quadrados diferem. Daí, reforça-se a importância que deve ser dada à escolha do tipo de hipótese, no procedimento de um teste estatístico.

As hipóteses para colunas fornecidas pelo PROC GLM são obtidas como segue.

a) Para os quadros 1.A4 e 2.A4

$$H_0^{(2*)}: \begin{cases} \frac{4\mu_{12} + 3\mu_{22}}{7} = \frac{4\bar{L}_1 + 3\bar{L}_2}{7} \Rightarrow \\ \mu_{21} = \bar{L}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_{2*} = \begin{bmatrix} 4/3 & -4/3 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(2*)} = 27,6088 = R(\beta | \mu, \alpha)$$

b) Para o quadro 3.A4

$$H_0^{(3*)}: \begin{cases} \mu_{12} + \mu_{22} = \mu_{13} + \mu_{23} \\ \mu_{22} + \mu_{23} = 2\mu_{21} \end{cases} \text{ ou}$$

$$H_0^{(3*)}: \begin{cases} \mu_{12} + \mu_{22} = L_1 + L_2 \\ \mu_{22} + \mu_{23} = L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_{3*} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(3*)} = 21,4065 = R(\beta^\circ | \mu^\circ, \alpha^\circ, \gamma^\circ)$$

c) Para o quadro 4.A4

$$H_0^{(4*)}: \begin{cases} \mu_{12} + \mu_{22} = \mu_{13} + \mu_{23} \\ \mu_{23} = \mu_{21} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_{4*} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(4*)} = 10,5549$$

Finalmente, a soma de quadrados para interação é obtida de maneira idêntica ao caso anterior. Então, ainda se tem 1 g.l. para a interação. E

$B'_{5*} = [1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$. Assim,

$$\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}$$

$\Rightarrow SQ_{interação} = 62,0053$; para quaisquer dos quadros de análise de variância.

Os quadros do GLM vêm a seguir.

Quadro 1.A4 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	4	109.6350000	27.4087500	72.29
Error	7	2.6541667	0.3791667	
Total	11	112.2891667		

Quadro 2.A4 - Quadro da análise de variância para a

hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	1	20.02083333	20.02083333	52.80
C	2	27.60885965	13.80442982	36.41
L*C	1	62.00530702	62.00530702	163.53

Quadro 3.A4 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	1	27.06766917	27.06766917	71.39
C	2	27.60885965	13.80442982	36.41
L*C	1	62.00530702	62.00530702	163.53

Quadro 4.A4 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	1	8.68530702	8.68530702	22.91
C	2	21.40651639	10.70325820	28.23
L*C	1	62.00530702	62.00530702	163.53

Quadro 5.A4 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	1*	8.68530702	8.68530702	22.91
C	2*	10.55495098	5.27747549	13.92
L*C	1	62.00530702	62.00530702	163.53

4.1.5. Caso A5 - Dados desbalanceados com duas caselas vazias

Quadro 12 - Esquema do modelo de médias para o caso A5, conforme o Quadro 2.

		COLUNAS		
		1	2	3
LINHAS	1	✓	$\mu_{12}^{(4)}$	$\mu_{13}^{(2)}$
	2	$\mu_{21}^{(1)}$	$\mu_{22}^{(3)}$	✓

onde ✓ indica a ocorrência da casela vazia.

Eliminando-se, coerentemente, as caselas vazias μ_{11} e μ_{23} , podem-se construir as matrizes para a obtenção das somas de quadrados. As matrizes ficam:

$$10 W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (W'W)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/3 \end{bmatrix}$$

$${}_4\mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad {}_4\hat{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 109,5/4 \\ 98/2 \\ 24,6/1 \\ 57,2/3 \end{bmatrix}$$

As hipóteses são dadas a seguir.

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_o^{(1*)} : \frac{4\mu_{12} + 2\mu_{13}}{6} = \frac{\mu_{21} + 3\mu_{22}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_{1*} = [4/3 \quad 2/3 \quad -1/2 \quad -3/2]$$

$$\therefore SQH_o^{(1*)} = 23,562\bar{6} = R(\alpha|\mu)$$

b) Tipo II

$$H_o^{(2*)} : \frac{4\mu_{12} + 2\mu_{13}}{6} = \frac{4\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_{2*} = [12/7 \quad 0 \quad 0 \quad -12/7]$$

$$\therefore SQH_o^{(2*)} = 79,462976 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

c) Tipo III

$$H_o^{(3*)} : \mu_{21} + \mu_{22} = C_1 + C_2$$

$$H_o^{(3*)} : \mu_{12} = \mu_{22} \Rightarrow B'_{3*} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1]$$

$$\therefore SQH_o^{(3*)} = 79,462976$$

d) Tipo IV

$$H_o^{(4*)} = H_o^{(3*)}$$

Vê-se que a hipótese tipo I é a única que compara, conjuntamente, todos os tratamentos (caselas) existentes, ao contrário das demais hipóteses, que não assumem em seus contrastes os tratamentos que pertencem a colunas contendo caselas vazias.

PARA COLUNAS

Todos os quadros de análise de variância fornecem as mesmas somas de quadrados para colunas, isso devido à posição em que se encontram as duas caselas vazias.

A soma de quadrados corresponde à hipótese:

$$H_0^{(2*)}: \begin{cases} \frac{4\mu_{12} + 3\mu_{22}}{7} = \frac{4\bar{L}_1 + 3\bar{L}_2}{7} \Rightarrow \\ \mu_{13} = \bar{L}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_{2*} = \begin{bmatrix} 4/3 & -4/3 & -3/4 & 3/4 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(2*)} = 85,9841\bar{6} = R(\beta|\mu, \alpha)$$

Surge agora uma situação interessante. Pois, é impossível encontrar ao menos um contraste para a interação que relacione as médias de caselas, o que concorda com o número de g.l., dado por $(2-1)(3-2)-2 = 0$. Conclui-se, portanto, que o efeito da interação não pode ser medido. Convém ressaltar que a ausência do teste para interação não deve ser utilizada como um critério de escolha entre um modelo com e um modelo sem interação. Pois, não há, no caso, funções estimáveis e, portanto,

testáveis sobre qualquer componente da interação.

Os resultados podem ser vistos a seguir.

Quadro 1.A5 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	3	109.5468333	36.5156111	130.87
Error	6	1.6741667	0.2790278	
Total	9	111.2210000		

Quadro 2.A5 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	1	23.56266667	23.56266667	84.45
C	2	85.98416667	42.99208333	154.08
L×C	0	0.00000000		

Quadro 3.A5 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	1	79.46297619	79.46297619	284.79
C	2	85.98416667	42.99208333	154.08
L×C	0	0.00000000		

Quadro 4.A5 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	1	79.46297619	79.46297619	284.79
C	2	85.98416667	42.99208333	154.08
L×C	0	0.00000000		

Quadro 5.A5 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	1	79.46297619	79.46297619	284.79
C	2	85.98416667	42.99208333	154.08
L×C	0	0.00000000		

4.2. EXEMPLO 2

Conforme o item 3.1.2., este exemplo é criado para se evitarem casos particulares. Pois, acredita-se que tais casos não são de relevante importância. Artigos como de OVERALL & SPIEGEL (1969), e BURDICK (1979), tratam da equivalência entre algumas hipóteses em casos particulares, como a proporcionalidade entre os níveis dos fatores. Porém, é evidente que, se um pesquisador sabe o que se está testando, de maneira geral, saberá também o que se está testando nesses casos particulares. Desse modo, qualquer informação a mais julga-se ser irrelevante.

Os sete casos criados nessa seção têm, como objetivo principal, proporcionar ao leitor condições para que ele possa, de forma fácil e prática, construir as hipóteses relacionadas a cada uma daquelas fornecidas pelo PROC GLM. E assim, conseqüentemente, poder escolher, convenientemente, a melhor para seu interesse.

4.2.1. Caso B1 - Com interação sem casela vazia

Pelo Quadro 2, tem-se:

Quadro 13 - Esquema do modelo de médias para o caso B1, conforme o Quadro 2.

		COLUNAS		
		1	2	3
L I N H A S	1	$\mu_{11}^{(4)}$	$\mu_{12}^{(3)}$	$\mu_{13}^{(2)}$
	2	$\mu_{21}^{(3)}$	$\mu_{22}^{(1)}$	$\mu_{23}^{(2)}$
	3	$\mu_{31}^{(2)}$	$\mu_{32}^{(1)}$	$\mu_{33}^{(3)}$
	4	$\mu_{41}^{(3)}$	$\mu_{42}^{(3)}$	$\mu_{43}^{(2)}$

De maneira análoga ao caso A1, pode-se encontrar a solução de mínimos quadrados para o vetor de parâmetros por (7).

$$\hat{\mu}_{12} = \begin{bmatrix} 73 \\ 66 \\ 106 \\ 76 \\ 69 \\ 111 \\ 65 \\ 62 \\ 99 \\ 64 \\ 57 \\ 94 \end{bmatrix}$$

Agora por (9), obtém-se:

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_0^{(1)}: \begin{cases} \frac{3\mu_{21} + \mu_{22} + 2\mu_{23}}{9} = \frac{2\mu_{31} + \mu_{32} + 3\mu_{33}}{6} \\ \frac{3\mu_{21} + \mu_{22} + 2\mu_{23}}{9} = \frac{3\mu_{41} + 3\mu_{42} + 2\mu_{43}}{8} \\ \frac{3\mu_{21} + \mu_{22} + 2\mu_{23}}{9} = \frac{4\mu_{11} + 3\mu_{12} + 2\mu_{13}}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_1 = \begin{bmatrix} 4/3 & 1 & 2/3 & -3/2 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & -2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & -3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQHo^{(1)} = 1173,090517 = R(\alpha|\mu)$$

Pelo modelo-S:

$$Ho: \begin{cases} 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - \frac{1}{6}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{3}\beta_3 + \frac{4}{3}\gamma_{11} + \gamma_{12} + \frac{2}{3}\gamma_{13} - \frac{3}{2}\gamma_{21} - \frac{1}{2}\gamma_{22} - \gamma_{23} = 0 \\ 6\alpha_2 - 6\alpha_3 + \beta_1 - \beta_3 + 3\gamma_{21} + \gamma_{22} + 2\gamma_{23} - 2\gamma_{31} - \gamma_{32} - 3\gamma_{33} = 0 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_4 + \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{2}{3}\beta_2 + \frac{1}{6}\beta_3 + \gamma_{21} + \frac{1}{3}\gamma_{22} + \frac{2}{3}\gamma_{23} - \frac{3}{4}\gamma_{41} - \frac{3}{4}\gamma_{42} - \frac{1}{2}\gamma_{43} = 0 \end{cases}$$

Note a dificuldade de entendimento da hipótese mostrada pelo modelo-S. Porém, é bom ficar atento que o problema principal não está, na verdade, na interpretação da hipótese, mas sim que vários usuários desses pacotes nem imaginam o que estão testando.

b) Tipo II

$$Ho^{(2)} : \begin{cases} 4\mu_{11} + 3\mu_{12} + 2\mu_{13} = 4\bar{C}_1 + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 \\ 3\mu_{21} + \mu_{22} + 2\mu_{23} = 3\bar{C}_1 + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 \\ 2\mu_{31} + \mu_{32} + 3\mu_{33} = 2\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 3\bar{C}_3 \end{cases}$$

$$B'_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 8/3 & 15/8 & 14/9 & -1 & -3/8 & -4/9 & -2/3 & -3/8 & -2/3 & -1 & -9/8 & -4/9 \\ -1 & -3/8 & -4/9 & 9/4 & 7/8 & 14/9 & -1/2 & -1/8 & -2/3 & -3/4 & -3/8 & -4/9 \\ -2/3 & -3/8 & -2/3 & -1/2 & -1/8 & -2/3 & 5/3 & 7/8 & 2 & -1/2 & -3/8 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQHo^{(2)} = 794,4675 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

Pelo modelo-S:

$$H_0: \begin{cases} \frac{439}{72}\alpha_1 - \frac{131}{72}\alpha_2 - \frac{123}{72}\alpha_3 - \frac{185}{72}\alpha_4 + \frac{8}{3}\gamma_{11} + \frac{15}{8}\gamma_{12} + \frac{14}{9}\gamma_{13} - \gamma_{21} - \\ - \frac{3}{8}\gamma_{22} - \frac{4}{9}\gamma_{23} - \frac{2}{3}\gamma_{31} - \frac{3}{8}\gamma_{32} - \frac{2}{3}\gamma_{33} - \gamma_{41} - \frac{9}{8}\gamma_{42} - \frac{4}{9}\gamma_{43} = 0 \\ -\frac{131}{72}\alpha_1 + \frac{337}{72}\alpha_2 - \frac{93}{72}\alpha_3 - \frac{113}{72}\alpha_4 - \gamma_{11} - \frac{3}{8}\gamma_{12} - \frac{4}{9}\gamma_{13} + \frac{9}{4}\gamma_{21} + \\ + \frac{7}{8}\gamma_{22} + \frac{14}{9}\gamma_{23} - \frac{1}{2}\gamma_{31} - \frac{1}{8}\gamma_{32} - \frac{2}{3}\gamma_{33} - \frac{3}{4}\gamma_{41} - \frac{3}{8}\gamma_{42} - \frac{4}{9}\gamma_{43} = 0 \\ -\frac{123}{72}\alpha_1 - \frac{93}{72}\alpha_2 + \frac{327}{72}\alpha_3 - \frac{111}{72}\alpha_4 - \frac{2}{3}\gamma_{11} - \frac{3}{8}\gamma_{12} - \frac{2}{3}\gamma_{13} - \frac{1}{2}\gamma_{21} - \\ - \frac{1}{8}\gamma_{22} - \frac{2}{3}\gamma_{23} + \frac{5}{3}\gamma_{31} + \frac{7}{8}\gamma_{32} + 2\gamma_{33} - \frac{1}{2}\gamma_{41} - \frac{3}{8}\gamma_{42} - \frac{2}{3}\gamma_{43} = 0 \end{cases}$$

Pela observação da hipótese H_0 , fica difícil esperar que um pesquisador não iniciado em estatística possa interpretar corretamente esta hipótese.

c) Tipo III

$$H_0^{(9)}: \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23} \\ \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{31} + \mu_{32} + \mu_{33} \\ \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = \mu_{41} + \mu_{42} + \mu_{43} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pelo modelo-S:

$$H_0: \begin{cases} 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} - \gamma_{21} - \gamma_{22} - \gamma_{23} = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_3 + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} - \gamma_{31} - \gamma_{32} - \gamma_{33} = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_4 + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} - \gamma_{41} - \gamma_{42} - \gamma_{43} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore SQH_0^{(3)} = 719,241602 = SQH_0^{(4)} = R(\alpha^\circ | \mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ)$$

Essa igualdade ocorre, novamente, pois não há casela vazia.

PARA COLUNAS

Usando o mesmo raciocínio dos casos anteriores.

a) Para os quadros 1.B1 e 2.B1

$$H_0^{(2)} : \begin{cases} 3\mu_{12} + \mu_{22} + \mu_{32} + 3\mu_{42} = 3\bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \bar{L}_3 + 3\bar{L}_4 \\ 2\mu_{13} + 2\mu_{23} + 3\mu_{33} + 2\mu_{43} = 2\bar{L}_1 + 2\bar{L}_2 + 3\bar{L}_3 + 2\bar{L}_4 \end{cases}$$

$$B'_2 =$$

$$\begin{bmatrix} -4/3 & 2 & -2/3 & -1/2 & 5/6 & -1/3 & -1/3 & 5/6 & -1/2 & -9/8 & 15/8 & -6/8 \\ -8/9 & -2/3 & 14/9 & -1 & -1/3 & 4/3 & -1 & -1/2 & 3/2 & -3/4 & -3/4 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(2)} = 7511,787014 = R(\beta | \mu, \alpha)$$

Pelo modelo-S:

$$H_0 : \begin{cases} -\frac{79}{24}\beta_1 + \frac{133}{24}\beta_2 - \frac{54}{24}\beta_3 - \frac{4}{3}\gamma_{11} + 2\gamma_{12} - \frac{2}{3}\gamma_{13} - \frac{1}{2}\gamma_{21} + \frac{5}{6}\gamma_{22} - \frac{1}{3}\gamma_{23} - \\ - \frac{1}{3}\gamma_{31} + \frac{5}{6}\gamma_{32} - \frac{1}{2}\gamma_{33} - \frac{9}{8}\gamma_{41} + \frac{15}{8}\gamma_{42} - \frac{6}{8}\gamma_{43} = 0 \\ -\frac{131}{36}\beta_1 - \frac{81}{36}\beta_2 + \frac{212}{36}\beta_3 - \frac{8}{9}\gamma_{11} - \frac{2}{3}\gamma_{12} + \frac{14}{9}\gamma_{13} - \gamma_{21} - \frac{1}{3}\gamma_{22} + \frac{4}{3}\gamma_{23} - \\ - \gamma_{31} - \frac{1}{2}\gamma_{32} + \frac{3}{2}\gamma_{33} - \frac{3}{4}\gamma_{41} - \frac{3}{4}\gamma_{42} + \frac{3}{2}\gamma_{43} = 0 \end{cases}$$

Novamente, note a dificuldade de se interpretar a hipótese.

b) Para os quadros 3.B1 e 4.B1

$$H_o^{(3)}: \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{21} + \mu_{31} + \mu_{41} = \mu_{12} + \mu_{22} + \mu_{32} + \mu_{42} \\ \mu_{11} + \mu_{21} + \mu_{31} + \mu_{41} = \mu_{13} + \mu_{23} + \mu_{33} + \mu_{43} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore SQH_o^{(3)} = 7279,546239 = SQH_o^{(4)} = R(\alpha^\circ | \mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ)$
ou pelo modelo-S:

$$H_o: \begin{cases} 4\beta_1 - 4\beta_2 + \gamma_{11} - \gamma_{12} + \gamma_{21} - \gamma_{22} + \gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{41} - \gamma_{42} = 0 \\ 4\beta_1 - 3\beta_3 + \gamma_{11} - \gamma_{13} + \gamma_{21} - \gamma_{23} + \gamma_{31} - \gamma_{33} + \gamma_{41} - \gamma_{43} = 0 \end{cases}$$

Verifica-se que a dificuldade de interpretação das hipóteses é visível. Os coeficientes dos parâmetros do modelo são extremamente confusos e as ponderações existentes também criam um obstáculo para uma melhor compreensão da hipótese. Novamente, ressalta-se aqui que o grande problema consiste no fato de que o pesquisador desconhece a hipótese que está sendo testada.

PARA INTERAÇÃO

Como a interação possui $3 \times 2 = 6$ g.l., a matriz hipótese tem 6 linhas L.I., da forma:

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As saídas do PROC GLM são como seguem:

Quadro 1.B1 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	11	8710.965517	791.905956	58.03
Error	17	232.000000	13.647059	
Total	28	8942.965517		

Quadro 2.B1 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	3	1173.090517	391.030172	28.65
C	2	7511.787014	3755.893507	275.22
L*C	6	26.087986	4.347998	0.32

Quadro 3.B1 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	3	794.467570	264.822523	19.41
C	2	7511.787014	3755.893507	275.22
L*C	6	26.087986	4.347998	0.32

Quadro 4.B1 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	3	719.241602	239.747201	17.57
C	2	7279.546239	3639.773120	266.71
L*C	6	26.087986	4.347998	0.32

Quadro 5.B1 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	3	719.241602	239.747201	17.57
C	2	7279.546239	3639.773120	266.71
L*C	6	26.087986	4.347998	0.32

4.2.2. Caso B2 - Sem interação sem casela vazia

Quadro 14 - Esquema do modelo de médias para o caso B2, conforme Quadro 3.

		<u>COLUNAS</u>		
		1	2	3
L I N H A S	1	$\mu_1 + \beta_1^{(4)}$	$\mu_1 + \beta_2^{(3)}$	$\mu_1 + \beta_3^{(2)}$
	2	$\mu_2 + \beta_1^{(3)}$	$\mu_2 + \beta_2^{(1)}$	$\mu_2 + \beta_3^{(2)}$
	3	$\mu_3 + \beta_1^{(2)}$	$\mu_3 + \beta_2^{(1)}$	$\mu_3 + \beta_3^{(3)}$
	4	$\mu_4 + \beta_1^{(3)}$	$\mu_4 + \beta_2^{(3)}$	$\mu_4 + \beta_3^{(2)}$

As matrizes são da forma:

$${}_{29}W_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; {}_7\mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{{}_7\mu_1} = \begin{bmatrix} 515,1958 \\ 519,0000 \\ 508,5181 \\ 505,4174 \\ -442,4226 \\ -448,6697 \\ -409,5312 \end{bmatrix}$$

As matrizes, construídas dessa forma, são válidas caso não exista casela vazia. Como no exemplo 1, os elementos contendo caselas vazias devem ser eliminados.

Agora, as somas de quadrados podem ser obtidas de maneira usual por (9) e as hipóteses são:

PARA LINHAS

a) Tipo I

Genericamente, a hipótese é da forma,

$$H_0^{(1)} : \mu_i + \sum \frac{n_{ij} \beta_j}{n_{i.}} = \mu_{i'} + \sum \frac{n_{i'j} \beta_j}{n_{i'.}}, \text{ assim,}$$

$$H_0^{(1)} : \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 + \frac{4\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3}{9} = \mu_2 + \frac{3\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3}{6} \\ \mu_3 + \frac{2\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3}{6} = \mu_2 + \frac{3\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3}{6} \\ \mu_4 + \frac{3\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3}{8} = \mu_2 + \frac{3\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3}{6} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow B_1' = \begin{array}{ccccccc} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1/18 & -1/6 & 1/9 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/8 & -5/24 & 1/12 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\therefore SQH_0^{(1)} = 1173,090517 = R(\alpha|\mu)$$

Note que o contraste possui os dois efeitos (variedade e solo). Assim, essa hipótese deve ser vista com cautela para testar os efeitos principais isoladamente. Isso é válido para qualquer caso onde a análise é feita pela soma de quadrados tipo I, pois, sendo esta

não-ajustada para colunas (variedade), os efeitos de linhas (solo) sempre estarão presentes.

b) Tipo II

A hipótese tipo II pode ser escrita por,

$$H_o^{(2)}: \mu_i + \sum \frac{n_{ij} \beta_j}{n_{i.}} = \sum \frac{n_{ij} \bar{C}_j}{n_{i.}},$$

e pode ser mostrado, algebricamente, que essa hipótese sempre recai na seguinte hipótese:

$$H_o^{(2)}: \mu_i = \mu_{i'}, \text{ portanto,}$$

$$H_o^{(2)}: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \Rightarrow H_o^{(2)}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

$$B'_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(2)} = 794,46757 = SQH_o^{(3)} = SQH_o^{(4)} = RC\alpha|\mu, \beta$$

Por meio de simples observação, as três últimas colunas da matriz hipótese são nulas, devido ao ajuste, indicando a não "interferência" do efeito das variedades. Assim, com o modelo não contém interação e não há casela vazia, o efeito de solos pode ser testado isoladamente. Isto também pode ser visto nos casos B6 e B7.

Se o modelo utilizado não contiver interação, a soma de quadrados tipo II sempre será idêntica às somas de quadrados dos tipos III e IV, independentemente da quantidade e da posição das caselas vazias. Isso pode ser observado através dos casos deste exemplo.

PARA COLUNAS

Como já foi comentado anteriormente, as somas de quadrados do segundo fator da ordenação A,B são iguais para os tipos I e II. Porém, agora, como a hipótese tipo II é equivalente às dos tipos III e IV, todas as hipóteses fornecidas pelo PROC GLM serão idênticas. E são da forma:

$$H_0^{(2)}: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \Rightarrow B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(2)} = 7511,787014 = SQH_0^{(1)} = SQH_0^{(3)} = SQH_0^{(4)}$$

Os resultados do PROC GLM comprovam os comentários:

Quadro 1.B2 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	5	8684.877531	1736.975506	154.79
Error	23	258.087986	11.221217	
Total	28	8942.965517		

Quadro 2.B2 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	3	1173.090517	391.030172	34.85
C	2	7511.787014	3755.893507	334.71

Quadro 3.B2 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	3	794.467570	264.822523	23.60
C	2	7511.787014	3755.893507	334.71

Quadro 4.B2 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	3	794.467570	264.822523	23.60
C	2	7511.787014	3755.893507	334.71

Quadro 5.B2 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	3	794.467570	264.822523	23.60
C	2	7511.787014	3755.893507	334.71

4.2.3. Caso B3 - Com interação e uma casela vazia

Quadro 15 - Esquema do modelo de médias para o caso B3, conforme o Quadro 2.

		COLUNAS		
		1	2	3
L I N H A S	1	$\mu_{11}^{(4)}$	$\mu_{12}^{(3)}$	$\mu_{13}^{(2)}$
	2	$\mu_{21}^{(3)}$	✓	$\mu_{23}^{(2)}$
	3	$\mu_{31}^{(2)}$	$\mu_{32}^{(1)}$	$\mu_{33}^{(3)}$
	4	$\mu_{41}^{(3)}$	$\mu_{42}^{(3)}$	$\mu_{43}^{(2)}$

onde ✓ indica a presença da casela vazia.

As hipóteses, então são:

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_0^{(1*)}: \left\{ \begin{array}{l} \frac{3\mu_{21} + 2\mu_{23}}{5} = \frac{4\mu_{11} + 3\mu_{12} + 2\mu_{13}}{9} \\ \frac{3\mu_{21} + 2\mu_{23}}{5} = \frac{2\mu_{31} + \mu_{32} + 3\mu_{33}}{8} \\ \frac{3\mu_{21} + 2\mu_{23}}{5} = \frac{3\mu_{41} + 3\mu_{42} + 2\mu_{43}}{8} \end{array} \right. \rightarrow$$

$$B_{1*}' = \begin{bmatrix} -4/9 & -1/3 & -2/9 & 3/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & -1/3 & -1/6 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 & -3/8 & -3/8 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(1*)} = 1467,275397 = R(\alpha|\mu)$$

Imaginando-se essa mesma hipótese para o modelo-S, a dificuldade de entendimento é ainda maior.

b) Tipo II

$$H_o^{(2*)}: \begin{cases} 3\mu_{21} + 2\mu_{23} = 3\bar{C}_1 + 2\bar{C}_3 \\ 2\mu_{31} + \mu_{32} + 3\mu_{33} = 2\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 3\bar{C}_3 \\ 3\mu_{41} + 3\mu_{42} + 2\mu_{43} = 3\bar{C}_1 + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 \end{cases}$$

$$B'_{2*} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -4/9 & 9/4 & 14/9 & -1/2 & 0 & -2/3 & -3/4 & 0 & -4/9 \\ -2/3 & -3/7 & -2/3 & -1/2 & -2/3 & 5/3 & 6/7 & 2 & -1/2 & -3/7 & -2/3 \\ -1 & -9/7 & -4/9 & -3/4 & -4/9 & -1/2 & -3/7 & -2/3 & 9/4 & 12/7 & 14/9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(2*)} = 1015,455769 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

c) Tipo III

$$H_o^{(3*)}: \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} = C_1 + C_2 + C_3 \\ \mu_{21} + \mu_{23} = C_1 + C_3 \\ \mu_{31} + \mu_{32} + \mu_{33} = C_1 + C_2 + C_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_{3*} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 9 & -3 & -3 & -3 & -4 & -3 & -3 & -4 & -3 \\ -3 & -4 & -3 & -3 & -3 & 9 & 8 & 9 & -3 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 9 & 9 & -3 & 0 & -3 & -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(3*)} = 1088,762780 = R(\alpha^\circ|\mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ)$$

d) Tipo IV

$$H_o^{(4*)}: \begin{cases} \mu_{41} + \mu_{42} + \mu_{43} = \mu_{31} + \mu_{32} + \mu_{33} \\ \mu_{41} + \mu_{43} = \mu_{21} + \mu_{23} \\ \mu_{41} + \mu_{42} + \mu_{43} = \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_{4*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(4*)} = 993,945202$$

PARA COLUNAS

a) Quadros 2.B3 e 3.B3

$$H_o^{(2*)}: \begin{cases} 3\mu_{12} + \mu_{32} + 3\mu_{42} = 3\bar{L}_1 + \bar{L}_3 + 3\bar{L}_4 \\ 4\mu_{11} + 3\mu_{21} + 2\mu_{31} + 3\mu_{41} = 4\bar{L}_1 + 3\bar{L}_2 + 2\bar{L}_3 + 3\bar{L}_4 \end{cases}$$

$$B'_{2*} =$$

$$\begin{bmatrix} -4/3 & 2 & -2/3 & 0 & 0 & -1/3 & 5/6 & -1/2 & -9/8 & 15/8 & -3/4 \\ 20/9 & -4/3 & -8/9 & 6/5 & -6/5 & 4/3 & -1/3 & -1 & 15/8 & -9/8 & -3/4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(2*)} = 5635,624816 = R(\beta|\mu, \alpha)$$

b) Quadro 4.B3

$$H_o^{(3*)}: \begin{cases} \mu_{12} + \mu_{32} + \mu_{42} = L_1 + L_3 + L_4 \\ \mu_{11} + \mu_{21} + \mu_{31} + \mu_{41} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \end{cases}$$

$$B'_{3*} =$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 1/2 & -1/2 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(3*)} = 5522,290036 = R(\alpha^\circ | \mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ)$$

c) Quadro 5.B3

$$H_o^{(4*)}: \begin{cases} \mu_{13} + \mu_{33} + \mu_{43} = \mu_{12} + \mu_{32} + \mu_{42} \\ \mu_{13} + \mu_{23} + \mu_{33} + \mu_{43} = \mu_{11} + \mu_{21} + \mu_{31} + \mu_{41} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_{4*} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(4*)} = 5345,866434$$

Os quadros do SAS ficam:

Quadro 1.B3 - Quadro de análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	10	7413.630952	741.363095	82.19
Error	17	153.333333	9.019608	
Total	27	7566.964286		

Quadro 2.B3 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	3	1467.275397	489.091799	54.23
C	2	5635.624816	2817.812408	312.41
L*C	5	310.730739	62.146148	6.89

Quadro 3.B3 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	3	1015.455769	338.485256	37.53
C	2	5635.624816	2817.812408	312.41
L*C	5	310.730739	62.146148	6.89

Quadro 4.B3 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	3	1088.762780	362.920927	40.24
C	2	5522.290036	2761.145018	306.13
L*C	5	310.730739	62.146148	6.89

Quadro 5.B3 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	3*	993.945202	331.315067	36.73
C	2*	5345.866434	2672.933217	296.35
L*C	5	310.730739	62.146148	6.89

4.2.4. Caso B4 - Sem interação com uma casela vazia

Quadro 16 - Esquema do modelo de médias para o caso B4, conforme o Quadro 3.

		COLUNAS		
		1	2	3
L I N H A S	1	$\mu_1 + \beta_1^{(4)}$	$\mu_1 + \beta_2^{(3)}$	$\mu_1 + \beta_3^{(2)}$
	2	$\mu_2 + \beta_1^{(3)}$	✓	$\mu_2 + \beta_3^{(2)}$
	3	$\mu_3 + \beta_1^{(2)}$	$\mu_3 + \beta_2^{(1)}$	$\mu_3 + \beta_3^{(3)}$
	4	$\mu_4 + \beta_1^{(3)}$	$\mu_4 + \beta_2^{(3)}$	$\mu_4 + \beta_3^{(2)}$

onde ✓ indica a casela vazia.

Para se obter a matriz W' , basta eliminar a coluna da matriz W' do caso B2, que contenha as observações da casela (2, 2), ou seja, a coluna 13. Como a coluna 13 contém apenas uma observação, então W' tem ordem 7×28 .

Já para o vetor y , o procedimento é análogo. Retira-se a linha 13. Daí, y tem ordem 28×1 .

Diante dessas informações, é possível determinar o vetor de solução de mínimos quadrados. Então,

$$\hat{\mu}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \\ \hat{\mu}_4 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\mu} = \begin{bmatrix} 445,8356 \\ 450,0000 \\ 439,2046 \\ 436,0454 \\ -373,1573 \\ -379,1211 \\ -340,2640 \end{bmatrix}$$

Assim, as hipóteses ficam:

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_0^{(1*)} : \begin{cases} \mu_1 + \frac{4\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3}{9} = \mu_2 + \frac{3\beta_1 + 2\beta_3}{5} \\ \mu_3 + \frac{2\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3}{6} = \mu_2 + \frac{3\beta_1 + 2\beta_3}{5} \\ \mu_4 + \frac{3\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3}{8} = \mu_2 + \frac{3\beta_1 + 2\beta_3}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_{1*} = \begin{matrix} \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 7/45 & -1/3 & 8/45 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4/15 & -1/6 & -1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 9/40 & -3/8 & 3/20 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$H_0^{(1*)} : \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{7}{45}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{8}{45}\beta_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \frac{4}{15}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 - \frac{1}{10}\beta_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 + \frac{9}{40}\beta_1 - \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{3}{20}\beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore SQH_0^{(1*)} = 1457,339286 = R(\alpha|\mu)$$

b) Tipo II

Como comentado no caso B2, a hipótese tipo II sempre será, no modelo sem interação, equivalente às hipóteses do tipo III e IV. Porém, para reforçar essa idéia, providenciam-se os cálculos algébricos para se chegar a essa afirmação. Notar-se-á que essa igualdade é

válida, até para um grande número de caselas vazias.

$$H_0^{(2*)} : \begin{cases} \mu_1 + \frac{4\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3}{9} = \frac{4\bar{C}_1 + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3}{9} \\ \mu_2 + \frac{3\beta_1}{5} + \frac{2\beta_3}{5} = \frac{3\bar{C}_1}{5} + \frac{2\bar{C}_3}{5} \\ \mu_3 + \frac{2\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3}{6} = \frac{2\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 3\bar{C}_3}{6} \end{cases}$$

$$\text{onde: } \bar{C}_1 = \frac{4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4 + 12\beta_1}{12}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{3\mu_1 + \mu_3 + 3\mu_4 + 7\beta_2}{7}$$

$$\bar{C}_3 = \frac{2\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4 + 9\beta_3}{9}$$

Assim,

1.ª linha da hipótese:

$$9\mu_1 + 4\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3 = 4\bar{C}_1 + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 =$$

$$= \frac{193\mu_1 + 91\mu_2 + 111\mu_3 + 173\mu_4 + 252\beta_1 + 189\beta_2 + 126\beta_3}{63} \Rightarrow$$

$$567\mu_1 + 252\beta_1 + 189\beta_2 + 126\beta_3 =$$

$$= 193\mu_1 + 91\mu_2 + 111\mu_3 + 173\mu_4 + 252\beta_1 + 189\beta_2 + 126\beta_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -374\mu_1 + 91\mu_2 + 111\mu_3 + 173\mu_4 = 0$$

Portanto, a 1.ª linha da matriz hipótese fica:

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ [-374 & 91 & 111 & 173 & 0 & 0 & 0] \end{array}$$

De maneira similar, pode-se obter as duas linhas restantes. Assim, a matriz hipótese tem a forma:

$$\Rightarrow B'_{1*} = \begin{array}{ccccccc} & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & -374 & 91 & 111 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ \Rightarrow B'_{1*} = & \left[\begin{array}{ccccccc} 52 & -137 & 42 & 43 & 0 & 0 & 0 \\ 74 & 49 & -190 & 67 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\therefore SQHo^{(2*)} = 748,681312 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

c) Tipo III

Utilizando-se o método desenvolvido neste trabalho, a hipótese do tipo III fica:

$$Ho^{(3*)} : \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 + \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3} \\ \mu_2 + \frac{\beta_1 + \beta_3}{2} = \frac{C_1 + C_3}{2} \\ \mu_3 + \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{onde: } C_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + 4\beta_1}{4}$$

$$C_2 = \frac{\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + 3\beta_2}{3}$$

$$C_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + 4\beta_3}{4}$$

$$B'_{3*} = \begin{bmatrix} -13 & 3 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -13 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Tipo IV

Pelo mesmo raciocínio de B3, a hipótese tipo IV, agora, é:

$$H_0^{(4*)} : \begin{cases} \mu_4 = \mu_3 \\ \mu_4 = \mu_2 \\ \mu_4 = \mu_1 \end{cases} \Rightarrow B'_{4*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efetuada-se os cálculos para a obtenção das respectivas somas de quadrados, verifica-se, mais uma vez, que os resultados são os mesmos.

É fundamental perceber que as hipóteses para o efeito A (Solos) não contém os efeitos de B (Variedades), portanto, há uma diferença das três últimas hipóteses em relação à primeira, do tipo I, pois, essa contém os efeitos de colunas, ou seja, o efeito das variedades.

PARA COLUNAS

Verifica-se, também, que todas as hipóteses são equivalentes em relação ao fator variedades. Deste modo, apresenta-se a hipótese do tipo IV, pois acredita-se que seja a de maior facilidade de compreensão. Ou seja,

$$H_0^{(4*)} : \begin{cases} \beta_1 = \beta_2 \\ \beta_1 = \beta_3 \end{cases} \Rightarrow B'_{4*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0^{(4*)} = 7146,786471$$

Observa-se, então, que se o modelo proposto não considera a interação, as hipóteses dos tipos II, III e IV são equivalentes, conseqüentemente, o objetivo do teste é o mesmo. Dentro desse contexto, comparando-se o caso B3 com o presente, a única diferença está justamente na escolha do modelo: o primeiro, com interação e o segundo, sem.

Assim, vê-se que o caso B3, modelo com interação, não testa isoladamente, nem o efeito do fator Solo, muito menos o efeito do fator Variedade. Isto é, não é um modelo apropriado para tomada de decisões sobre efeitos principais. Já o segundo modelo permite essa tomada de decisão, devido à ausência de interação.

Os resultados fornecidos pelo PROC GLM são da forma:

Quadro 1.B4 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	5	8604.125756	1720.825151	148.12
Error	22	255.588529	11.617660	
Total	27	8859.714286		

Quadro 2.B4 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	3	1457.339286	485.779762	41.81
C	2	7146.786471	3573.393235	307.58

Quadro 3.B4 - Quadro da análise de variância para a
hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	3	748.681312	249.560437	21.48
C	2	7146.786471	3573.393235	307.58

Quadro 4.B4 - Quadro da análise de variância para a
hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	3	748.681312	249.560437	21.48
C	2	7146.786471	3573.393235	307.58

Quadro 5.B4 - Quadro da análise de variância para a
hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	3	748.681312	249.560437	21.48
C	2	7146.786471	3573.393235	307.58

A saída do STATGRAPHICS, por exemplo, para as hipóteses dos tipos I e III, que correspondem aos quadros 2.B4 e 4.B4, são apresentadas nos quadros 2.B4' e 4.B4'.

Quadro 2.B4' - Quadro da análise de variância para a
hipótese do tipo I

Source of variation	Sum of square	d.f
MAIN EFFETCS		
L: LINHAS	1457.33929	3
C: COLUNAS	7146.78647	2
RESIDUAL	255.58853	22
TOTAL (CORRECTED)	8859.71429	27

1 missing values have been excluded.

All F-ratios are based on the residual mean square error.

Quadro 4.B4' - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source of variation	Sum of square	d.f
MAIN EFFECTS		
L: LINHAS	748.68131	3
C: COLUNAS	7146.78647	2
RESIDUAL	255.58853	22
TOTAL (CORRECTED)	8859.71429	27

1 missing values have been excluded.

All F-ratios are based on the residual mean square error.

Observe, como já comentado anteriormente, que o STATGRAPHICS fornece abaixo dos quadros o número de caselas vazias existentes.

4.2.5. Caso B5 - Com interação e com duas caselas vazias

Quadro 17 - Esquema do modelo de médias para o caso B5, conforme o Quadro 2.

		COLUNAS		
		1	2	3
L I N H A S	1	$\mu_{11}^{(4)}$	$\mu_{12}^{(3)}$	$\mu_{13}^{(2)}$
	2	$\mu_{21}^{(3)}$	✓	$\mu_{23}^{(2)}$
	3	$\mu_{31}^{(2)}$	$\mu_{32}^{(1)}$	✓
	4	$\mu_{41}^{(3)}$	$\mu_{42}^{(3)}$	$\mu_{43}^{(2)}$

onde ✓ indica a casela vazia.

As hipóteses, então são:

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_o^{(1*)}: \begin{cases} \frac{2\mu_{31} + \mu_{32}}{3} = \frac{3\mu_{21} + 2\mu_{23}}{5} \\ \frac{2\mu_{31} + \mu_{32}}{3} = \frac{3\mu_{41} + 3\mu_{42} + 2\mu_{43}}{8} \\ \frac{2\mu_{31} + \mu_{32}}{3} = \frac{4\mu_{11} + 3\mu_{12} + 2\mu_{13}}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$B'_{1*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3/5 & -2/5 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & -3/8 & -3/8 & -1/4 \\ -4/9 & -1/3 & -2/9 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(1*)} = 1853,1250 = R(\alpha|\mu)$$

b) Tipo II

$$H_o^{(2*)}: \begin{cases} 3\mu_{21} + 2\mu_{23} = 3\bar{C}_1 + 2\bar{C}_3 \\ 2\mu_{31} + \mu_{32} = 2\bar{C}_1 + \bar{C}_2 \\ 3\mu_{41} + 3\mu_{42} + 2\mu_{43} = 3\bar{C}_1 + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 \end{cases}$$

$$B'_{2*} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2/3 & 9/4 & 4/3 & -1/2 & 0 & -3/4 & 0 & -2/3 \\ -2/3 & -3/7 & 0 & -1/2 & 0 & 5/3 & 6/7 & -1/2 & -3/7 & 0 \\ -1 & -9/7 & -2/3 & -3/4 & -2/3 & -1/2 & -3/7 & 9/4 & 12/7 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(2*)} = 705,154358 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

c) Tipo III

$$H_o^{(3*)}: \begin{cases} \mu_{21} + \mu_{23} = C_1 + C_3 \\ \mu_{31} + \mu_{32} = C_1 + C_2 \\ \mu_{41} + \mu_{42} + \mu_{43} = C_1 + C_2 + C_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_{3*} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 & 9 & 8 & -3 & 0 & -3 & 0 & -4 \\ -3 & -4 & 0 & -3 & 0 & 9 & 8 & -3 & -4 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & -3 & -4 & -3 & -4 & 9 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(3*)} = 715,710684 = RC\alpha^\circ | \mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ$$

Veja que ao contrário do exemplo 1, todos os parâmetros do modelo estão presentes na hipótese $H_o^{(3*)}$, concordando dessa forma com o comentário feito para o caso A3.

d) Tipo IV

$$H_o^{(4*)}: \begin{cases} \mu_{41} + \mu_{42} = \mu_{31} + \mu_{32} \\ \mu_{41} + \mu_{43} = \mu_{21} + \mu_{23} \\ \mu_{41} + \mu_{42} + \mu_{43} = \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'_{4*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(4*)} = 643,905093$$

PARA COLUNAS

a) Quadros 2.B5 e 3.B5

$$H_o^{(2*)}: \begin{cases} 3\mu_{12} + \mu_{32} + 3\mu_{42} = 3\bar{L}_1 + \bar{L}_3 + 3\bar{L}_4 \\ 2\mu_{19} + 2\mu_{29} + 2\mu_{49} = 2\bar{L}_1 + 2\bar{L}_2 + 2\bar{L}_4 \end{cases}$$

$$B'_{2*} = \begin{bmatrix} -4/3 & 2 & -2/3 & 0 & 0 & -2/3 & -2/3 & -9/8 & 15/8 & -3/4 \\ -4/9 & -1/3 & -7/9 & -3/5 & 3/5 & 0 & 0 & -3/8 & -3/8 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(2*)} = 5309,315073 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

b) Quadro 4.B5

$$H_o^{(3*)}: \begin{cases} \mu_{12} + \mu_{32} + \mu_{42} = L_1 + L_3 + L_4 \\ \mu_{19} + \mu_{29} + \mu_{49} = L_1 + L_2 + L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_{3*} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(3*)} = 5269,363181 = R(\alpha^\circ|\mu^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ)$$

c) Quadro 5.B5

$$H_o^{(4*)}: \begin{cases} \mu_{19} + \mu_{49} = \mu_{12} + \mu_{42} \\ \mu_{19} + \mu_{29} + \mu_{49} = \mu_{11} + \mu_{21} + \mu_{41} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_{4*} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_o^{(4*)} = 5034,412844$$

INTERAÇÃO

Tem-se, nesse caso, 4 g.l. para interação.

$$B'_{5*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQHo^{(5*)} = 23,559927 = R(\gamma|\mu, \alpha, \beta)$$

Apresentam-se, abaixo, as saídas do SAS.

Quadro 1.B5 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	9	7186.000000	798.444444	61.74
Error	15	194.000000	12.933333	
Total	24	7380.000000		

Quadro 2.B5 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	3	1853.125000	617.708333	47.76
C	2	5309.315073	2654.657536	205.26
L*C	4	23.559927	5.889982	0.46

Quadro 3.B5 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	3	705.154358	235.051453	18.17
C	2	5309.315073	2654.657536	205.26
L*C	4	23.559927	5.889982	0.46

Quadro 4.B5 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	3	715.710684	238.570228	18.45
C	2	5269.363181	2634.681590	203.71
L*C	4	23.559927	5.889982	0.46

Quadro 5.B5 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	3*	643.905093	214.635031	16.60
C	2*	5034.412844	2517.206422	194.63
L*C	4	23.559927	5.889982	0.46

4.2.6. Caso B6 - Sem interação com duas caselas vazias

O caso em questão é similar ao anterior, desprezando-se a interação.

Concordando com os casos B2 e B4, as matrizes para esse caso são apresentadas.

Para a construção de W e y , é suficiente retirar as as linhas que contêm as observações dentro das caselas vazias, isto é, as linhas 13, 19, 20 e 21, totalizando 4 observações. Assim, W fica com ordem (25×7) e y (25×1) .

Novamente, usando-se (8), tem-se:

$$\hat{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 198,6997 \\ 202,8715 \\ 192,0000 \\ 188,9106 \\ -126,0121 \\ -131,9758 \\ -93,1606 \end{bmatrix}$$

Com a obtenção de $\hat{\mu}$, agora é possível determinar as somas de quadrados apropriadas para cada situação.

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_0^{(1*)}: \begin{cases} \mu_2 + \frac{3\beta_1}{5} + 2\beta_3 = \mu_3 + \frac{2\beta_1 + \beta_2}{3} \\ \mu_2 + \frac{3\beta_1}{5} + 2\beta_3 = \mu_4 + \frac{3\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3}{8} \\ \mu_2 + \frac{3\beta_1}{5} + 2\beta_3 = \mu_1 + \frac{4\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_{1*}' = \begin{array}{ccccccc} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1/15 & -1/3 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 9/40 & -3/8 & 3/20 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 7/45 & -1/3 & 8/45 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$H_0^{(1*)}: \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_3 - \frac{1}{15}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{5}\beta_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 + \frac{9}{40}\beta_1 - \frac{3}{8}\beta_2 + \frac{3}{20}\beta_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{7}{45}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{8}{45}\beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore SQH_0^{(1*)} = 1853,1250 = R(\alpha|\mu)$$

b) Tipo II

Com já se discutiu, as hipóteses, a partir de agora, são equivalentes e sempre com a seguinte caracterização:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \Rightarrow H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

Portanto, as matrizes hipóteses são iguais àquela construída para o caso B4. Assim,

$$B'_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0 = 705,154358 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

PARA COLUNAS

De modo análogo, ao caso B4 a matriz hipótese para as análises é:

$$B'_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore SQH_0 = 5309,315073 = R(\beta|\mu, \alpha)$$

As saídas do GLM comprovam as igualdades.

Quadro 1.B6 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	5	7162.440073	1432.488015	125.10
Error	19	217.559927	11.450522	
Total	24	7380.000000		

Quadro 2.B6 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	3	1853.125000	617.708333	53.95
C	2	5309.315073	2654.657536	231.84

Quadro 3.B6 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	3	705.154358	235.051453	20.53
C	2	5309.315073	2654.657536	231.84

Quadro 4.B6 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	3	705.154358	235.051453	20.53
C	2	5309.315073	2654.657536	231.84

Quadro 5.B6 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	3	705.154358	235.051453	20.53
C	2	5309.315073	2654.657536	231.84

4.2.7. Caso B7 - Sem interação e com três caselas vazias

Quadro 18 - Esquema do modelo de médias para o caso B7, conforme o Quadro 3.

		COLUNAS		
		1	2	3
L I N H A S	1	$\mu_1 + \beta_1^{(4)}$	$\mu_1 + \beta_2^{(3)}$	$\mu_1 + \beta_3^{(2)}$
	2	$\mu_2 + \beta_1^{(3)}$	✓	$\mu_2 + \beta_3^{(2)}$
	3	$\mu_3 + \beta_1^{(2)}$	$\mu_3 + \beta_2^{(1)}$	✓
	4	✓	$\mu_4 + \beta_2^{(3)}$	$\mu_4 + \beta_3^{(2)}$

onde ✓ indica a casela vazia.

Da mesma forma que o caso B6 as linhas eliminadas aqui devem ser: 13, 19, 20, 21, 22, 23 e 24, para a obtenção de W e y. Assim, a solução de mínimos quadrados para μ fica:

$$\hat{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 198,5339 \\ 202,8640 \\ 192,0000 \\ 187,7185 \\ -126,3031 \\ -131,3939 \\ -92,7055 \end{bmatrix}$$

E as somas de quadrados são assim obtidas:

PARA LINHAS

a) Tipo I

$$H_0^{(1*)}: \begin{cases} \mu_2 + \frac{3\beta_1}{5} + 2\beta_3 = \mu_3 + \frac{2\beta_1 + \beta_2}{3} \\ \mu_2 + \frac{3\beta_1}{5} + 2\beta_3 = \mu_4 + \frac{3\beta_2 + 2\beta_3}{5} \\ \mu_2 + \frac{3\beta_1}{5} + 2\beta_3 = \mu_1 + \frac{4\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'_{1*} = \begin{matrix} & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1/15 & -1/3 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/5 & -3/5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 7/45 & -1/3 & 8/45 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$H_0^{(1*)}: \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_3 - \frac{1}{15}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 - \frac{2}{5}\beta_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 + \frac{3}{5}\beta_1 - \frac{3}{5}\beta_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{7}{45}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{8}{45}\beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore SQH_0^{(1*)} = 1492,518182 = R(\alpha|\mu)$$

b) Tipo II

$$\text{Mais uma vez, tem-se } SQH_0^{(2*)} = SQH_0^{(3*)} = SQH_0^{(4*)}.$$

E a matriz hipótese é descrita de forma idêntica às dos casos que trabalham com o modelo sem interação. Portanto,

$$SQH_0^{(2*)} = 561,583606 = R(\alpha|\mu, \beta)$$

Os resultados são resumidos através das saídas do SAS, que podem ser encontrados na sequência.

Quadro 1.B7 - Quadro da análise de variância preliminar

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value
Model	5	6696.298613	1339.259723	103.51
Error	16	207.019568	12.938723	
Total	21	6903.318182		

Quadro 2.B7 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo I

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value
L	3	1492.518182	497.506061	38.45
C	2	5203.780432	2601.890216	201.09

Quadro 3.B7 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo II

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value
L	3	561.583606	187.194535	14.47
C	2	5203.780432	2601.890216	201.09

Quadro 4.B7 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo III

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value
L	3	561.583606	187.194535	14.47
C	2	5203.780432	2601.890216	201.09

Quadro 5.B7 - Quadro da análise de variância para a hipótese do tipo IV

Source	DF	Type IV SS	Mean Square	F Value
L	3	561.583606	187.194535	14.47
C	2	5203.780432	2601.890216	201.09

5. CONCLUSÕES

Face aos resultados obtidos, concluiu-se que o problema inerente à interpretação das hipóteses estatísticas na análise de dados desbalanceados, com ou sem caselas vazias, não é trivial e pode acarretar graves falácias aos usuários de pacotes estatísticos.

Sentiu-se, com clareza, que um primeiro passo para a minimização do problema pode ser a escolha adequada do modelo a ser utilizado na análise dos dados: o modelo com ou sem interação. Daí, algumas diferenças podem ser observadas:

1) Modelo com interação:

a) dados balanceados

Evidentemente, todas as hipóteses fornecidas pelos dois pacotes (SAS e STATGRAPHICS) são equivalentes. Ou seja, a escolha de qualquer quadro de análise de variância fornecido pelos dois pacotes, permite chegar a mesma tomada de decisão na análise estatística.

b) uma casela vazia e demais dados balanceados

A hipótese do tipo I difere das demais que são iguais entre si.

c) dados desbalanceados sem casela vazia:

$$H_0 \text{ tipo III} = H_0 \text{ tipo IV}$$

Há situações nas quais H_0 tipo II = H_0 tipo III, mas, em geral, isto ocorre para casos muito particulares, como por exemplo em número de observações proporcionais por casela.

d) dados desbalanceados com casela vazia:

d.1 - Primeiro exemplo:

$$H_0 \text{ tipo III} = H_0 \text{ tipo IV}$$

O caso do fatorial $2 \times b$ pode indicar uma conclusão errônea a respeito da igualdade entre as hipóteses do tipo III e IV. Ou seja, elas sempre serão equivalentes para o primeiro fator (com dois níveis) da ordenação. Isso ocorre pois a matriz hipótese possui somente uma linha (um g.l.) para o primeiro fator. Assim, as hipóteses são equivalentes devido à estrutura dos dados. Não se pode perder de vista que se não há casela vazia as duas hipóteses sempre serão equivalentes.

d.2 - Segundo exemplo:

$$H_0 \text{ tipo I} \neq H_0 \text{ tipo II} \neq H_0 \text{ tipo III} \neq H_0 \text{ tipo IV}$$

2) Modelo sem interação:

a) dados balanceados:

Como já é de amplo conhecimento, todas as hipóteses são equivalentes, assim como no item 1.a.

b) dados desbalanceados sem casela vazia:

Nesse caso tem-se:

$$H_0 \text{ tipo I} \neq H_0 \text{ tipo II} = H_0 \text{ tipo III} = H_0 \text{ tipo IV}$$

c) dados desbalanceados com casela vazia:

$$H_0 \text{ tipo I} \neq H_0 \text{ tipo II} = H_0 \text{ tipo III} = H_0 \text{ tipo IV}$$

Vê-se, até mesmo, que a posição e a quantidade das caselas vazias não interferem na forma citada.

Nesse contexto, considerando-se que os modelos estudados não contêm restrições paramétricas, ficou evidente que o modelo com interação, fundamentalmente, testa interações. Qualquer hipótese sobre efeitos principais sempre terá, em sua expressão, outros efeitos: ou o efeito do outro fator mais a interação (SQ tipo I), ou os efeitos cruzados (as interações) para as demais hipóteses.

No modelo sem interação, a única diferença existente está na hipótese do tipo I, em relação às demais hipóteses. Sendo que a hipótese tipo I "carrega", em seus contrastes, mais de um efeito do modelo aditivo, e as demais não. Assim, as somas de quadrados dos tipos II, III e IV podem testar hipóteses sobre os efeitos principais

individualmente, ou seja, sem a presença dos demais fatores, que não sejam, naquele instante, interessantes ao pesquisador.

A construção das hipóteses do tipo III não é tão fácil. É necessário que as funções estimáveis fornecidas pelo PROC GLM auxiliem na obtenção da mesma. Por isso, acredita-se que o método criado neste trabalho pode ser visto como uma boa alternativa para a construção dessas hipóteses.

Ademais, parece ser evidente que, por mais experiente que seja um pesquisador das ciências aplicadas, é necessário que seu trabalho de pesquisa tenha a orientação de um conhecedor de pacotes estatísticos, possibilitando, assim, uma discussão que oriente na escolha da análise de dados mais apropriada para a situação experimental.

Por fim, entende-se que é indispensável que os manuais dos pacotes estatísticos sejam mais esclarecedores, minimizando os erros de interpretações de hipóteses em análises de dados.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANZATTO, D.A. & KRONKA, S.N. Experimentação Agrícola. Jaboticabal, 1989. 247p.
- BRYCE, G.R.; SCOTT, D.T.; CARTER, M.W. Estimation and hypotheses testing in a reparameterization approach to the cell means model. Commun. Statist. - Theor. Meth., A9(2), 131-150. 1980.
- BURDICK, D.S. Rows adjusted for columns versus simple row means in two-Way ANOVA: when are the two hypotheses equivalent?" Journal of the American Statistical Association, 74: 457-8, 1979.
- BURDICK, D.S. & HERR, D.G. Counterexamples in unbalanced two-way analysis of variance Commun. Statist. - Theor. Meth., A9(2): 231-41, 1980.
- CAMARINHA FILHO, J.A. & IEMMA, A.F. Identificação de Hipóteses no Caso de Caselas Vazias. V-Congresso de Iniciação Científica, ESALQ-USP, 1991.
- CARLSON, J.E. & TIMM, N.H. Analysis of nonorthogonal fixed-effects designs. Psychological Bulletin, 81: 563-70, 1974.
- DITCHBURN, N. A method of analysis for a double classification arranged in a triangular table. Biometrics, 453-64, 1955.

ELSTON, R.C. & BUSH, N. The hypotheses that can be tested when there are interactions in an analysis of variance model. Biometrics, 681-98, 1964.

FRANCIS, I. A comparison of several analysis of variance programs. Journal of the American Statistical Association, 68: 860-5, 1973.

FRANE, J.W. Some computing methods for unbalanced analysis of variance and covariance. Commun. Statist. - Theor. Meth., A9(2): 151-66, 1980.

FREUND, R.J. The case of missing cell. The American Statistician, 34(2): 94-8, 1980.

FREUND, R.J.; LITTELL, R.C.; SPECTOR, P.C. SAS system for linear models. Cary, SAS Institute inc, 1986.

GOODNIGHT, J.R. Tests of hypotheses in fixed effects linear models. Cary, SAS Institute, 1978. (SAS Technical Report R-101)

GOODNIGHT, J.R. Arbitrary hypotheses in linear models with unbalanced data. Commun. Statist.-Theor. Meth. A9(2): 181-200, 1980.

GRAYBILL, F.A. An introduction to linear statistical models. New York, McGraw-Hill, 1961, 461p.

- HEMMERLE, J.W. Recognizing balance with unbalanced data. Commun. Statist. - Theor. Meth., A9(2): 201-11, 1980.
- HERR, D. On the history of ANOVA in unbalanced, factorial designs: the first 30 years. The American Statistician, 40: 265-70, 1986.
- HOCKING, R.R. & SPEED, F.M. A full rank analysis of some linear model problems Journal of the American Statistical Association, 70: 706-12, 1975.
- HOCKING, R.R.; SPEED, F.M.; COLEMAN, A.T. Hypotheses to be tested with unbalanced data. Commun. Statist. - Theor. Meth., A9(2): 117-29, 1980.
- IEMMA, A.F. Modelos lineares: uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária. Imprensa Oficial Est. Paraná, Londrina, 1987. 263p.
- IEMMA, A.F. Álgebra de matrizes com aplicações em estatística, ESALQ-USP, 1990, 411p.
- IEMMA, A.F. Testes de hipóteses em modelos com amostras desequilibradas. Gembloux, F.S.A, 1991, 101p.
- IEMMA, A. F. & PALM, R. Les matrices inverses généralisées et leur utilisation dans le modèle lineaire, Gembloux, 1991/92, 25p.

- IEMMA, A.F. Análisis de varianza de experimentos con celdas Vácias. Córdoba, φ σ ρ publicações, 1993. 102p.
- IEMMA, A.F.; PALM, R.; CLAUSTRIAUX, J.J. Sobre a construção de projetores ortogonais. Rev. Mat. Estat., São Paulo, 11: 133-42, 1993.
- JENNINGS, E. & WARD, J.H. Hypothesis identification in the case of the missing cell. The American Statistician, 36: 25-7, 1982.
- KRAMER, C.Y. On the analysis of variance of a two-way classification with unequal sub-class numbers. Biometrics, 441-52, 1955.
- KUTNER, M.H. Hypothesis testing in linear models (Eisenhart model I). The American Statistician. 28: 98-100, 1974.
- MONDARDO, M. Estimabilidade de funções paramétricas com dados desbalanceados através do PROC GLM do SAS: Aplicações à Pesquisa Agropecuária, Dissertação de Mestrado - ESALQ/USP, 1994.
- MONLEZUN, C.J. & SPEED, F.M. The geometry of estimation and hypothesis testing in the constrained linear model - the full rank case. Commun. Statist. - Theor. Meth., A9(2): 213-30, 1980.

- MURRAY, L.W. Estimation of missing cells in randomized block and latin square designs. The American Statistician, 40: 289-93, 1986.
- OVERALL, J.E. & SPIEGEL, D.K. Concerning least squares analysis of experimental data. Psychological Bulletin, 72: 311-22, 1969.
- RAO, C.R., Linear statistical inference and its applications. New York, John Wiley & Sons, 1965. 522p.
- SANTOS, E.S. Utilização de "Softwares" estatísticos na interpretação de hipóteses com dados desbalanceados. Tese, ESALQ-USP, 1994.
- SCHEFFÉ, H., The analysis of variance. New York, John Wiley & Sons, 1959. 477p.
- SEARLE, S.R. Linear models. New York, John Wiley & Sons, 1971. 532p.
- SEARLE, S.R. Variance components. New York, John Wiley & Sons, 1992. 501p.
- SEARLE, S.R. Arbitrary in linear models with unbalanced data. Commun. Statist. - Theor. Meth., A9(2): 181-200, 1980.

- SEARLE, S.R.; SPEED, F.M.; HENDERSON, H.V. Some computational and model equivalences in analyses of variance of unequal-subclass-numbers data. The American Statistician, 35: 16-33, 1981.
- SEARLE, S.R. Analysis of variance computing package output for unbalanced data from fixed-effects models with nested factor. The American Statistician, 48: 148-53. 1994.
- SIMÕES, J.W. Métodos de Produção de Mudras de Eucalipto IPEF, 1: 101-16, 1970.
- SMITH, D.W. & MURRAY, L.W. A simplified treatment of the estimation of parameters and tests of hypotheses in constrained design models with unbalanced data. The American Statistician, 37: 156-58, 1983.
- SNEDECOR, G.W. & COCHRAN, W.G. Statistical methods. Ames, 1967. 593p.
- SPEED, F.M. & HOCKING, R.R. The use of the RC) - notation with unbalanced. The American Statistician, 30: 30-33, 1976.
- SPEED, F.M.; HOCKING, R.R.; HACKNEY, O.P. Methods of analysis of linear models with unbalanced data. Journal of the American Statistical Association, 72: 105-112, 1978.

SPEED, F.M. & MONLEZUN, C.J. Exact F Tests for the method of unweighted means in a 2^k experiment. The American Statistician, 33: 15-8, 1979.

SPJØTVOLL, E. & STOLINE, M.R. An extension of the T-method of multiple comparison to include the cases with unequal sample sizes. Journal of the American Statistical Association, 68: 975-78, 1973.

URQUHART, N.S.; WEEKS, D.L.; HENDERSON, C.R. Estimation associated with linear models: a revisitation. Communications in Statistics, 1: 303-330, 1973.

URQUHART, N.S. & WEEKS, D.L. Linear model in messy data: some problems and alternatives. Biometrics, 34: 696-705, 1978.

YATES, F. The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete. Empire Journal of Experimental Agriculture, 1: 129-142, 1933.

YATES, F. The analysis of multiple classifications with unequal numbers in the different classes. Journal of the American Statistical Association, 29: 51-66, 1934.