ANALISE DE GRUPOS DE EXPERIMENT EM FAIXAS

SÔNIA MARIA DE STEFANO PIEDADE
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia, Área de Concentração em "Estatística e Experimentação Agronômica".

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Junho - 1987

Aos meus pais,
que fizeram de suas vidas um
exemplo para a minha

AGRADEÇO

Ao Miguel,
pelo apoio e compreensão

DEDICO

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao Professor Dr. Humberto de Campos pela orientação segura na execução deste trabalho e acima de tudo pela amizade.
- À Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo - FAPESP, pela bolsa de estudo concedida.
- Ao Programa Nacional de Melhoramento da Cana-de-Açúcar - PLANALSUCAR, pela oportunidade oferecida para conclusão do estudo.
- À Seção de Mecanização da Estação Regional Leste do PLANALSUCAR pelos dados experimentais utilizados neste trabalho.
- Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, de modo especial, Dr. Antonio Francisco Iemma e Dr. Décio Barbin pelo apoio e sugestões apresentadas.
- À Eng.^a Agr.^a Maria Angela de Cillos Chalita, pelos incentivos e profunda amizade.
- Aos Colegas do Curso de Pós-Graduação pela convivência.
- À Srta. Giovana Regina de Moraes pela dedicação e boa vontade para os trabalhos de datilografia.
- Aos demais funcionários do Departamento de Matemática e Estatística pela excelente acolhida.
- A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Continuação.

Pág.

3.1.3.4. Entre duas médias de tratamentos (B) num mesmo nível de (A)	63
3.1.4. Correções das Somas de Quadrados	65
3.2. Análise Conjunta	77
3.2.1. Modelo Matemático	77
3.2.2. Análise de Variância	79
3.2.2.1. Sistema de equações normais ...	79
3.2.2.2. Somas de quadrados	81
3.2.2.3. Esperanças matemáticas dos quadrados médios	83
3.2.2.4. Testes de hipóteses	98
3.2.2.5. Variâncias de contrastes de médias	101
3.2.2.5.1. Entre duas médias de tratamentos (A)	102
3.2.2.5.2. Entre duas médias de tratamentos (B)	103
3.2.2.5.3. Entre duas médias de experimentos	105
3.2.2.5.4. Entre duas médias de tratamentos (A), num mesmo nível de (B)	107

Continuação.

Pág.

3.2.2.5.5. Entre duas médias de tratamentos (B), num mesmo nível de (A)	109
3.2.2.5.6. Entre duas médias de experimentos num mes mo nível de (A)	110
3.2.2.5.7. Entre duas médias de experimentos num mes mo nível de (B)	112
3.2.2.5.8. Entre duas médias de experimentos num mes mo nível de (A) e num mesmo nível de (B)	114
3.2.2.5.9. Entre duas médias de tratamentos (A), em diferentes níveis de (B)	116
3.2.2.5.10. Entre duas médias de tratamentos (A) em diferentes experimen tos	117

Continuação.

Pág.

3.2.2.5.11. Entre duas médias de tratamentos (B) em diferentes experimen <u>t</u> tos	119
3.2.2.5.12. Entre duas médias de tratamentos (A), num mesmo nível de (B) em diferentes experi <u>m</u> entos	120
3.2.2.5.13. Entre duas médias de tratamentos (B), num mesmo nível de (A), em diferentes experi <u>m</u> entos	122
3.2.2.5.14. Entre duas médias de tratamentos (A), em diferentes níveis de (B), em diferentes experimentos	124
4. EXEMPLO ILUSTRATIVO	126
5. CONCLUSÕES	138
6. LITERATURA CITADA	146

ANÁLISE DE GRUPOS DE EXPERIMENTOS EM FAIXAS

Autor: SÔNIA MARIA DE STEFANO PIEDADE

Orientador: PROF. DR. HUMBERTO DE CAMPOS

R E S U M O

O presente estudo teve por objetivo estruturar as análises de variância individuais e conjunta e os métodos de comparações múltiplas de grupos de ensaios em faixas.

Para as análises individuais adotou-se o seguinte modelo linear:

$$Y_{ikj} = m + \alpha_i + b_j + (\alpha b)_{ij} + \beta_k + (\beta b)_{kj} + (\alpha \beta)_{ik} + e_{ikj} ,$$

onde:

Y_{ikj} = valor observado do i-ésimo nível do tratamento (A), no k-ésimo nível do tratamento (B), no j-ésimo bloco;

m = média geral;

α_i = efeito do i-ésimo nível do tratamento (A);

b_j = efeito aleatório do j-ésimo bloco;

$(\alpha b)_{ij}$ = efeito aleatório da interação do i-ésimo nível do tratamento (A) com o j-ésimo bloco;

β_k = efeito do k-ésimo nível do tratamento (B);

$(\beta b)_{kj}$ = efeito aleatório da interação do k-ésimo nível do tratamento (B) com o j-ésimo bloco;

$(\alpha\beta)_{ik}$ = efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento (A) com o k-ésimo nível do tratamento (B);

e_{ikj} = efeito aleatório da interação do i-ésimo nível do tratamento (A), com o k-ésimo nível do tratamento (B), no j-ésimo bloco.

Para a análise conjunta, reunindo R experimentos, o modelo adotado foi:

$$Y_{ikrj} = \left\{ \begin{array}{l} m + \alpha_i + b_{j/r} + \delta_r + (\alpha\delta)_{ir} + (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \beta_k + (\beta\delta)_{kr} + \\ + (\beta\delta b)_{(kr)j} + (\alpha\beta)_{ik} + (\alpha\beta\delta)_{ikr} + e_{(ikr)j} \end{array} \right\},$$

onde:

$b_{j/r}$ = efeito aleatório do j-ésimo bloco no r-ésimo experimento;

δ_r = efeito aleatório do r-ésimo experimento;

$(\alpha\delta)_{ir}$ = efeito aleatório do i-ésimo nível do tratamento (A) no r-ésimo experimento;

$(\alpha\delta b)_{(ir)j}$ = efeito aleatório da interação do i-ésimo nível do tratamento (A), com o r-ésimo experimento no j-ésimo bloco;

- $(\beta\delta)_{kr}$ = efeito aleatório do k-ésimo nível do tratamento (B) no r-ésimo experimento;
- $(\beta\delta b)_{(kr)j}$ = efeito aleatório da interação do k-ésimo nível do tratamento (B), com o r-ésimo experimento no j-ésimo bloco;
- $(\alpha\beta\delta)_{ikr}$ = efeito aleatório da interação do i-ésimo nível do tratamento (A), com o k-ésimo nível do tratamento (B) no r-ésimo experimento;
- $e_{(ikr)j}$ = efeito aleatório da interação do i-ésimo nível do tratamento (A), com o k-ésimo nível do tratamento (B), no r-ésimo experimento e no j-ésimo bloco.

Para a análise conjunta foram deduzidas as somas de quadrados e as esperanças dos quadrados médios e obtidos os critérios para os testes de hipóteses e comparações múltiplas.

Discutiu-se também, a estrutura das análises individuais com perda de uma observação.

Apresentou-se um exemplo ilustrativo com dados de pol % cana.

Também neste trabalho, obtiveram-se resultados para os estimadores das variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias nas análises individuais, envolvendo a perda de uma observação.

Para a análise conjunta dos R experimentos, obtiveram-se as variâncias de contrastes de interesse.

ANALYSES OF GROUPS OF EXPERIMENTS IN STRIPS

Author: SÔNIA MARIA DE STEFANO PIEDADE

Adviser: PROF. DR. HUMBERTO DE CAMPOS

S U M M A R Y

The present study aimed at structuring the individual and joint analyses of variance and methods of multiple comparisons of groups of experiments in strips.

For the single analyses the following linear model was adopted:

$$Y_{ikj} = m + \alpha_i + b_j + (\alpha b)_{ij} + \beta_k + (\beta b)_{kj} + (\alpha\beta)_{ik} + e_{ikj} ,$$

where:

Y_{ikj} = observed value of the i^{th} level of treatment (A), in the k^{th} level of treatment (B), in the j^{th} block;

m = general mean;

α_i = effect of the i^{th} level of treatment (A);

b_j = randomized effect of the j^{th} block;

$(\alpha b)_{ij}$ = randomized effect of the interaction of the i^{th} level of treatment (A) x j^{th} block;

- β_k = effect of the k^{th} level of treatment (B);
 $(\beta b)_{kj}$ = randomized effect of the interaction of the k^{th} level of treatment (B) x j^{th} block;
 $(\alpha\beta)_{ik}$ = effect of the interaction of the i^{th} level of treatment (A) x k^{th} level of treatment (B);
 e_{ikj} = randomized effect of the i^{th} level of treatment (A) x k^{th} level of treatment (B) in the j^{th} block.

For the joint analysis assembling R experiments, the adopted model was:

$$Y_{ikrj} = \left\{ \begin{aligned} &m + \alpha_i + b_{j/r} + \delta_r + (\alpha\delta)_{ir} + (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \beta_k + (\beta\delta)_{kr} + \\ &+ (\beta\delta b)_{(kr)j} + (\alpha\beta)_{ik} + (\alpha\beta\delta)_{ikr} + e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\},$$

where:

- $b_{j/r}$ = randomized effect of the j^{th} block in the r^{th} experiment;
 δ_r = randomized effect of the r^{th} experiment;
 $(\alpha\delta)_{ir}$ = randomized effect of the i^{th} level of treatment (A) in the r^{th} experiment;
 $(\alpha\delta b)_{(ir)j}$ = randomized effect of the interaction of the i^{th} level of treatment (A) x r^{th} experiment in the j^{th} block;

$(\beta\delta)_{kr}$ = randomized effect of the k^{th} level of treatment (B) in the r^{th} experiment;

$(\beta\delta b)_{(kr)j}$ = randomized effect of the interaction of the k^{th} level of treatment (B) x r^{th} experiment in the j^{th} block;

$(\alpha\beta\delta)_{ikr}$ = randomized effect of the interaction of the i^{th} level of treatment (A) x k^{th} level of treatment (B), in the r^{th} experiment;

$e_{(ikr)j}$ = randomized effect of the interaction of the i^{th} level of treatment (A) x k^{th} level of treatment (B) in the r^{th} experiment in the j^{th} block.

For the joint analysis the sums of squares and the expected means squares were deducted and criteria for hypothesis tests and multiple comparisons were achieved.

It was also discussed the structures of single analyses with a missing observation.

An illustrative example with data of pol % cane was presented.

In this work, results were achieved for the estimators of estimations of contrast variances between two means in the single analyses involving a missing observation.

And for the series analysis of R experiments the contrast variances of interest were achieved.

1. INTRODUÇÃO

Os experimentos em parcelas subdivididas são frequentemente utilizados na experimentação agrônômica quando, num delineamento de tratamentos do tipo fatorial, o material experimental ou a própria condução do experimento não permite uma completa casualização de todas as combinações dos fatores.

Uma variação dos experimentos em parcelas subdivididas é caracterizada quando, por várias razões, embora se estructurem as subparcelas não há viabilidade de uma total casualização destas nas parcelas. Neste caso, as subunidades relativas a cada tratamento se posicionam em faixas, tanto nas linhas como nas colunas.

Em cada nível de (A) tem-se os níveis de (B) como subparcelas e vice-versa. Assim sendo, tanto os níveis de (A) como os de (B) são considerados parcelas principais, enquanto que a interação (A x B) em cada um dos seus níveis A_i B_k constitui as subparcelas.

Na experimentação agrícola várias situações podem ainda ser caracterizadas, onde a solução prática são os experimentos em faixas. Dentre estas situações, podemos citar os ensaios com épocas de colheita, quando esta é mecanizada; tipos de preparo de solo; níveis de irrigação; aplicação mecânica de adubos, corretivos, inseticidas, etc.

Num ensaio com dois tratamentos A e B, em três e quatro níveis respectivamente, cada bloco poderia ser dividido em faixas horizontais A_i e em faixas verticais B_k , resultando para um bloco qualquer, como exemplo, o seguinte esquema:

	B_2	B_4	B_1	B_3
A_3	$A_3 B_2$	$A_3 B_4$	$A_3 B_1$	$A_3 B_3$
A_1	$A_1 B_2$	$A_1 B_4$	$A_1 B_1$	$A_1 B_3$
A_2	$A_2 B_2$	$A_2 B_4$	$A_2 B_1$	$A_2 B_3$

e de modo análogo para os demais blocos, os quais diferem entre si apenas quanto à casualização.

O presente trabalho, teve por objetivo estruturar as análises de grupos de experimentos em faixas e apresentar uma abordagem das análises individuais, envolvendo perda de uma observação.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Embora seja vasta a bibliografia sobre os experimentos em parcelas subdivididas, ela se escasseia quando se enfoca o caso dos experimentos em faixas. Além da escassez é de se notar que a grande maioria dos autores que tratam do assunto fazem abordagens teóricas e poucos deles procuram dar um enfoque prático sobre os experimentos em parcelas subdivididas, com as subparcelas dispostas em faixas.

ANDERSON e BANCROFT (1952), KEMPTHORNE (1952), COCHRAN e COX (1957), STEEL e TORRIE (1960), dentre outros caracterizam experimento em parcelas subdivididas como uma variação do experimento fatorial em T e T' tratamentos, onde os tratamentos T das parcelas são dispostos em qualquer tipo de delineamento, sendo mais usados os em blocos casualizados e em quadrado latino, e os tratamentos T' das subparcelas, dispostos ao acaso dentro de cada parcela.

COCHRAN e COX (1957) apresentam considerações sobre o experimento em parcelas subdivididas e mostram ser

vantajosa a sua aplicação, se os efeitos de T' e da interação $T \times T'$ são de maior interesse que os efeitos de T ; afirmando também que o aumento da precisão de T' e da interação $T \times T'$ se obtém mediante a redução da precisão de T .

Distinguindo os experimentos em faixas dos normais em parcelas subdivididas COCHRAN e COX (1957), LITTLE e HILLS (1978) e PIMENTEL GOMES (1978), dentre outros, são unânimes em afirmar que nos ensaios em parcelas subdivididas os tratamentos se distribuem inteiramente ao acaso dentro de cada bloco, enquanto que nos experimentos em faixas eles se dispõem, como sugere o próprio nome, de modo a formarem faixas.

Existe um consenso entre os autores em ressaltar a utilidade dos ensaios em faixas, nos casos em que se deseja avaliar dois tipos de tratamentos dispostos em parcelas relativamente grandes.

Além do tamanho das parcelas, para FEDERER (1955), LOMA (1966) e PIMENTEL GOMES (1978), dentre outros, existem ainda outros fatores associados direta ou indiretamente ao experimento, tais como, processos de mecanização, níveis de irrigação, etc., que podem levar à utilização dos ensaios em faixas.

O uso dos ensaios em faixas é indicado por FEDERER (1955), quando os efeitos individuais dos tratamentos são relativamente pequenos em relação ao efeito da interação dos mesmos, citando como vantagens deste delineamento:

- as subparcelas podem ser relativamente pequenas enquanto as parcelas podem ter grandes dimensões;

- maior precisão na informação obtida para a interação dupla entre os tratamentos;

e mostra serem suas principais desvantagens:

- as informações obtidas para os tratamentos são menos precisas do que as obtidas em blocos casualizados.

- a análise é mais complexa que no caso de blocos casualizados, principalmente para situações não ortogonais e análise de covariância.

Por sua vez LOMA (1966) concorda com KEMPTHORNE (1952) e FEDERER (1955), dentre outros, ao mostrar as vantagens desses experimentos no tocante a sua casualização, quando comparado a outros delineamentos.

2.1. Modelo Matemático

Para KEMPTHORNE (1952), o modelo adequado para ensaios em faixas, com dois tratamentos é:

$$Y_{ijk} = \mu + r_i + a_j + (ra)_{ij} + b_k + (rb)_{ik} + (ab)_{jk} + (rab)_{ijk} ,$$

onde:

Y_{ijk} = valor da parcela que recebeu o k-ésimo tratamento B e o j-ésimo tratamento A, na i-ésima repetição;

μ = média geral;

r_i = efeito da i-ésima repetição (bloco);

a_j = efeito do j-ésimo tratamento A;

$(ra)_{ij}$ = efeito da interação entre a i-ésima repetição e o j-ésimo tratamento A, ou seja, erro experimental associado ao tratamento A;

b_k = efeito do k-ésimo tratamento B;

$(rb)_{ik}$ = efeito da interação entre a i-ésima repetição e o k-ésimo tratamento B, ou seja, erro experimental associado ao tratamento B;

$(ab)_{jk}$ = efeito da interação entre os tratamentos A e B;

$(rab)_{ijk}$ = erro experimental associado à interação A x B.

e $(ra)_{ij}$, $(rb)_{ik}$ e $(rab)_{ijk}$ são considerados erros experimentais para os tratamentos A, B e para a interação A x B, normal e independentemente distribuídos, com média zero e variâncias σ_r^2 , σ_c^2 e σ_s^2 respectivamente.

Para os ensaios em parcelas subdivididas, com as subparcelas dispostas em faixas, CHAKRABARTI (1962) apresenta o seguinte modelo:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + \tau_k + \delta_{jk} + \epsilon_{ijk}$$

$$(i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, \alpha; k = 1, 2, \dots, \beta) \quad ,$$

onde:

Y_{ijk} = valor observado da parcela que recebeu o k-ésimo subtratamento e o j-ésimo tratamento na i-ésima repetição;

μ = média geral;

α_i = efeito do i-ésimo bloco;

γ_j = efeito do j-ésimo tratamento γ ;

τ_k = efeito do k-ésimo tratamento τ ;

δ_{jk} = efeito da interação da i-ésima repetição com o k-ésimo subtratamento;

ϵ_{ijk} = erro experimental;

considerando ainda as observações Y_{ijk} , $Y_{i'jk}$ e Y_{ijk} , $Y_{ijk'}$ correlacionadas, resultando:

$$E(\epsilon_{ijk}) = 0, \quad V(\epsilon_{ijk}) = \sigma^2$$

e

$$\text{Cov}(\epsilon_{ijk}, \epsilon_{i'j'k'}) = \begin{cases} \rho_1 \sigma^2 & \text{se } i = i', j = j' \text{ e } k \neq k' \\ \rho_2 \sigma^2 & \text{se } i = i', j \neq j' \text{ e } k = k' \\ 0 & \text{em outros casos} \end{cases} .$$

ZIMMERMANN (1973) empregou o delineamento em blocos casualizados, no esquema em faixas, com duas repetições, sendo aplicados nas parcelas horizontais níveis de calcário e nas verticais níveis de adubação completa NPK em milho. O modelo para cada período de 1963/64 a 1970/71, foi:

$$Y_{ijk} = m + \rho_j + a_i + \alpha_{ij} + b_k + \beta_{jk} + (ab)_{ik} + \epsilon_{ijk} \quad ,$$

onde:

Y_{ijk} = observação da ik-ésima parcela no j-ésimo bloco;

m = média geral da população;

ρ_j = efeito aleatório do j-ésimo bloco;

a_i = efeito do i-ésimo nível de tratamento A;

α_{ij} = efeito aleatório associado à ij-ésima observação;

b_k = efeito do k-ésimo nível do tratamento B;

β_{jk} = efeito aleatório associado à kj-ésima observação;

$(ab)_{ik}$ = efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento A, com o k-ésimo nível do tratamento B;

ϵ_{ijk} = erro experimental

FARIA (1984) desenvolveu seu trabalho em análise de experimentos em faixas com subparcelas subdivididas considerando I tratamentos T, K tratamentos T', dispostos nas parcelas principais em faixas; L tratamentos T*, dispostos em cada subparcela resultante das combinações TT' e J blocos. Considerou o seguinte modelo linear:

$$Y_{iklj} = \left\{ \begin{aligned} &\mu + t_i + b_j + (tb)_{ij} + t'_k + (t'b)_{kj} + tt'_{ik} + \\ &+ (tt'b)_{ikj} + t^*_\ell + tt^*_{i\ell} + t't^*_{k\ell} + tt't^*_{ik\ell} + e_{iklj} \end{aligned} \right\}$$

com $i = 1, 2, \dots, I$; $j = 1, 2, \dots, J$; $k = 1, 2, \dots, K$; $\ell = 1, 2, \dots, L$;

onde:

Y_{iklj} = valor observado da ikl -ésima subparcela no j -ésimo bloco;

μ = média geral;

t_i = efeito do i -ésimo tratamento T ;

b_j = efeito aleatório do j -ésimo bloco, onde se supõe $b_j \sim N(0, \sigma_b^2)$;

$(tb)_{ij}$ = componente aleatório da interação entre o i -ésimo tratamento T e o j -ésimo bloco, onde se supõe $(tb)_{ij} \sim N(0, \sigma_{tb}^2)$;

t'_k = efeito do k -ésimo tratamento T' ;

$(t'b)_{kj}$ = componente aleatório da interação entre o k -ésimo tratamento T' e o j -ésimo bloco, onde se supõe $(t'b)_{kj} \sim N(0, \sigma_{t'b}^2)$;

tt'_{ik} = efeito da interação do i -ésimo tratamento T com o k -ésimo tratamento T' ;

$(tt'b)_{ikj}$ = componente aleatório da interação entre o i -ésimo tratamento T e o k -ésimo tratamento T' no j -ésimo bloco, onde se supõe $(tt'b)_{ikj} \sim N(0, \sigma_{tt'b}^2)$;

t_{ℓ}^* = efeito do ℓ -ésimo tratamento T^* ;

$tt_{i\ell}^*$ = efeito da interação do i -ésimo tratamento T com o ℓ -ésimo tratamento T^* ;

$t't_{k\ell}^*$ = efeito da interação do k -ésimo tratamento T' com o ℓ -ésimo tratamento T^* ;

$tt't_{ik\ell}^*$ = efeito da interação do i -ésimo tratamento T com o k -ésimo tratamento T' , no ℓ -ésimo tratamento T^* ;

$e_{ik\ell j}$ = erro associado à $ik\ell j$ -ésima observação, onde se supõe $e_{ik\ell j} \sim N(0, \sigma^2)$.

A maioria dos autores mostra os experimentos em faixas ou como uma extensão dos experimentos fatoriais, no caso FEDERER (1955) e LOMA (1966), ou como um caso particular de parcelas subdivididas, como GOULDEN (1939), KEMPTHORNE (1952), COCHRAN e COX (1957) e PIMENTEL GOMES (1978). Assim sendo estes autores não se preocuparam em especificar a estrutura das análises estatísticas para este delineamento, as somas de quadrados, suas esperanças matemáticas, as comparações múltiplas e muito menos a perda de observações. Salientam-se entretanto as exceções feitas por CHAKRABARTI (1962) e ZIMMERMANN (1973), conforme apresentado anteriormente.

2.2. Análise de Variância

NAIR (1944), embora não apresentando o modelo

matemático, considera um ensaio de dois fatores com p níveis de um fator A e q níveis de um fator B em todas as combinações, cada um repetido em r blocos. Cada bloco foi dividido em p faixas de coluna, designadas $a_1, a_2, \dots, a_p$, aleatoriamente e em q faixas de linhas, às quais são designadas $b_1, b_2, \dots, b_q$, aleatoriamente. Salientando sempre a ausência de casualização livre para cada combinação $a_i b_j$ dentro de cada bloco.

O esquema da análise de variância obtido pelo autor é mostrado no Quadro 1.

Quadro 1 - Esquema de análise de variância para ensaios em faixas, segundo NAIR (1944).

Causas de Variação	G.L.
Blocos	$r-1$
Efeito A	$p-1$
Erro (1)	$(p-1)(r-1)$
Efeito B	$q-1$
Erro (2)	$(q-1)(r-1)$
Interação A x B	$(p-1)(q-1)$
Erro (3)	$(p-1)(q-1)(r-1)$
Total	$pqr-1$

Para KEMPTHORNE (1952) a análise de variância para os experimentos em faixas, com base no modelo citado anteriormente, juntamente com as esperanças dos quadrados médios está esquematizada no Quadro 2.

Quadro 2 - Esquema de análise de variância para experimentos em faixas, segundo KEMPTHORNE (1952).

Causas de Variação	G.L.	E(QM)
Repetições R	r-1	-
Tratamentos A	a-1	$\sigma_s^2 + b\sigma_r^2 + \frac{rb}{a-1} \sum_j a_j^2$
RxA	(r-1)(a-1)	$\sigma_s^2 + b\sigma_r^2$

Tratamentos B	b-1	$\sigma_s^2 + a\sigma_c^2 + \frac{ra}{b-1} \sum_k b_k^2$
RxB	(r-1)(b-1)	$\sigma_s^2 + a\sigma_c^2$

Interação AxB	(a-1)(b-1)	$\sigma_s^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)} \sum_{jk} (ab)_{jk}^2$
RxAxB	(r-1)(a-1)(b-1)	σ_s^2

Total	rab-1	-

FEDERER (1955) considerando quatro níveis de um tratamento A, três níveis de um tratamento B e três repeti-

ções no delineamento em faixas, sem apresentar referências sobre o modelo matemático, propõe o esquema dado no Quadro 3.

Quadro 3 - Esquema de análise de variância para experimentos em faixas, segundo FEDERER (1955).

Causas de Variação	G.L.
Repetição	2
A	3
Repetição x A = Erro (a)	6
B	2
Repetição x B = Erro (b)	4
AxB	6
Erro (c)	12
Total	35

A decomposição abordada no Quadro 3 é a mesma adotada pelos autores COCHRAN e COX (1957) e LOMA (1966), sem apresentarem deduções e é a mesma do Quadro 2 e de numerosos outros autores.

Dentre os autores que consideram como um ensaio em "split-plot" com tratamentos secundários em faixas, a análise de variância baseada no modelo citado pode ser efetuada

conforme o Quadro 4, onde são apresentados também as somas de quadrados de tratamentos obtidas por CHAKRABARTI.

Quadro 4 - Esquema de análise de variância para ensaios em faixas, segundo CHAKRABARTI (1962).

Causas de Variação	G.L.	S.Q.
Tratamento principal	$(\alpha-1)$	$r\beta E(Y_{.j.} - Y_{...})^2$
Erro (a)	$(r-1)(\alpha-1)$	$\beta EE(Y_{ij.} - Y_{i..} - Y_{.j.} + Y_{...})^2$
Subtratamento	$(\beta-1)$	$raE(Y_{..k} - Y_{...})^2$
Erro (b)	$(r-1)(\beta-1)$	$\alpha EE(Y_{i.k} - Y_{i..} - Y_{..k} + Y_{...})^2$
Interação	$(\alpha-1)(\beta-1)$	$rEE(Y_{.jk} - Y_{..k} - Y_{.j.} + Y_{...})^2$
Erro (c)	$(r-1)(\alpha-1)(\beta-1)$	$EEE(Y_{ijk} - Y_{i.k} - Y_{.jk} - Y_{ij.} + Y_{..k} + Y_{.j.} + Y_{i..} - Y_{...})^2$

Segundo ZIMMERMANN (1973), com base nos modelos já citados, a análise de variância para cada período é dado pelo esquema do Quadro 5, onde se encontram as esperanças dos quadrados médios, o qual se identifica ao esquema abordado no Quadro 2.

Quadro 5 - Esquema de análise de variância para cada período, segundo ZIMMERMANN (1973).

Causas de Variação	G.L.	E (QM)
Repetições	J-1	$\sigma^2 + K\sigma_{\alpha}^2 + I\sigma_{\beta}^2 + IK\sigma_{\rho}^2$
Tratamento A	I-1	$\sigma^2 + K\sigma_{\alpha}^2 + \frac{KJ}{I-1} \sum_i a_i^2$
Resíduo (a)	(I-1) (J-1)	$\sigma^2 + K\sigma_{\alpha}^2$
Tratamento B	K-1	$\sigma^2 + I\sigma_{\beta}^2 + \frac{IJ}{K-1} \sum_k b_k^2$
Resíduo (b)	(K-1) (J-1)	$\sigma^2 + I\sigma_{\beta}^2$
AxB	(I-1) (K-1)	$\sigma^2 + \frac{J}{(I-1) (K-1)} \sum_{ik} (ab)_{ik}^2$
Resíduo (c)	(I-1) (K-1) (J-1)	σ^2
Total	IKJ-1	-

Com a finalidade de obter uma idéia precisa dos efeitos dos fatores culturais sobre a produtividade de algumas linhagens selecionadas de arroz de diferentes hábitos de maturação, HEDAYETULLAH et alii (1944), trabalharam com uma série de ensaios repetidos durante cinco anos sucessivos, envolvendo três fatores a saber: data de plantio, linhagens de arroz e espaçamento. Assim, para três linhagens de arroz, seis datas de plantio e três espaçamentos, com três repetições, os

autores apresentam o esquema de análise do Quadro 6, acrescentando um quarto resíduo, aos casos já mencionados, mas sem quaisquer considerações teóricas sobre sua obtenção.

Observa-se que neste caso o espaçamento é sub-parcela de linhagens e de épocas de plantio, coincidindo com o caso abordado por FARIA (1984).

Quadro 6 - Esquema de análise de variância segundo HEDAYETULLAH et alii (1944).

Causas de Variação	G.L.
Blocos	2
Linhagens	2
Erro I	4
Épocas de plantio	5
Erro II	10
Linhagens x Épocas	10
Erro III	20
Espaçamentos	2
Espaçamentos x Épocas	10
Espaçamentos x Linhagens	4
Espaçamentos x Épocas x Linhagens	20
Erro IV	72
Total	161

FARIA (1984), estudando os ensaios em faixas com subparcelas subdivididas, de acordo com o modelo citado, obteve a análise de variância que consta do Quadro 7 com as respectivas esperanças dos quadrados médios.

Observa-se que os resultados encontrados por este autor se identificam com os abordados pelo Quadro 6.

Quadro 7 - Esquema de análise de variância, segundo FARIA (1984).

Causas de Variação	G.L.	E(Q.M.)
Tratamentos T	(I-1)	$\sigma^2 + L\sigma^2_{tt'b} + KLo^2_{tb} + \frac{JKL}{(I-1)} \sum_i t_i^2$
Blocos	(J-1)	$\sigma^2 + L\sigma^2_{tt'b} + KLo^2_{tb} + IL\sigma^2_{t'b} + IKLo^2_b$
Resíduo (a)	(I-1) (J-1)	$\sigma^2 + L\sigma^2_{tt'b} + KLo^2_{tb}$
Tratamentos T'	(K-1)	$\sigma^2 + L\sigma^2_{tt'b} + IL\sigma^2_{t'b} + \frac{IJL}{(K-1)} \sum_k t_k'^2$
Resíduo (b)	(K-1) (J-1)	$\sigma^2 + L\sigma^2_{tt'b} + IL\sigma^2_{t'b}$
Interação T x T'	(I-1) (K-1)	$\sigma^2 + L\sigma^2_{tt'b} + \frac{JL}{(I-1)(K-1)} \sum_{ik} (tt')^2_{ik}$
Resíduo (c)	(I-1) (K-1) (J-1)	$\sigma^2 + L\sigma^2_{tt'b}$
Tratamentos T*	(L-1)	$\sigma^2 + \frac{IJK}{(L-1)} \sum_l t_l^{*2}$
Interação T x T*	(I-1) (L-1)	$\sigma^2 + \frac{JK}{(I-1)(L-1)} \sum_{il} (tt^*)^2_{il}$
Interação T' x T*	(K-1) (L-1)	$\sigma^2 + \frac{IJ}{(K-1)(L-1)} \sum_{kl} (t't^*)^2_{kl}$
Interação T x T' x T*	(I-1) (K-1) (L-1)	$\sigma^2 + \frac{J}{(I-1)(K-1)(L-1)} \sum_{ikl} (tt't^*)^2_{ikl}$
Resíduo (d)	IK(J-1) (L-1)	σ^2
Total	IJKL-1	-

2.3. Comparações Múltiplas

A fim de estruturar as comparações múltiplas, FEDERER (1955), COCHRAN e COX (1957) e CHAKRABARTI (1962) obtiveram os mesmos resultados apresentando diferentes notações.

Segundo a notação de COCHRAN e COX (1957), as fórmulas para os estimadores das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias considerando r repetições, α níveis do tratamento A e β níveis do tratamento B, são:

- Contraste entre duas médias de tratamento A:

$$\hat{Y}_i = a_1 - a_0 ;$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2E_a}{r\beta} .$$

- Contraste entre duas médias de tratamentos B:

$$\hat{Y}_k = b_1 - b_0 ;$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2E_b}{r\alpha} .$$

- Contraste entre duas médias de tratamentos A dentro de um mesmo nível de B: $\hat{Y}_{i/k} = (a_1 b_1 - a_0 b_1) ;$

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2 \left[(\beta-1)E_c + E_a \right]}{r\beta} .$$

- Contraste entre duas médias de tratamentos B dentro de um mesmo nível de A: $\hat{\gamma}_{k/i} = (a_i b_1 - a_i b_0)$;

$$\hat{V}(\hat{\gamma}_{k/i}) = \frac{2 \left[(\alpha-1)E_c + E_b \right]}{r\alpha} .$$

Conforme o modelo proposto por ZIMMERMANN (1973), as comparações entre duas médias, para cada período, com os respectivos estimadores das variâncias das estimativas dos contrastes são:

$$\hat{\gamma}_i = \bar{A}_i - \bar{A}_1, \quad \Rightarrow \quad \hat{V}(\hat{\gamma}_i) = \frac{2}{JK} \left[\text{QMRes}(a) \right] ;$$

$$\hat{\gamma}_k = \bar{B}_k - \bar{B}_1, \quad \Rightarrow \quad \hat{V}(\hat{\gamma}_k) = \frac{2}{IJ} \left[\text{QMRes}(b) \right] ;$$

$$\hat{\gamma}_{i/k} = \bar{A}_i \bar{B}_k - \bar{A}_i \bar{B}_1 \Rightarrow \hat{V}(\hat{\gamma}_{i/k}) = \frac{2}{JK} \left[\text{QMRes}(a) + (K-1)\text{QMRes}(c) \right] ;$$

$$\hat{\gamma}_{k/i} = \bar{A}_i \bar{B}_k - \bar{A}_1 \bar{B}_k, \Rightarrow \hat{V}(\hat{\gamma}_{k/i}) = \frac{2}{IJ} \left[\text{QMRes}(b) + (I-1)\text{QMRes}(c) \right] ;$$

$$\hat{\gamma}_{ik} = \bar{A}_i \bar{B}_k - \bar{A}_1 \bar{B}_k, \Rightarrow \hat{V}(\hat{\gamma}_{ik}) = \frac{2}{IJK} \left[I \text{ QMRes}(a) + K \text{ QMRes}(b) + (IK-I-K)\text{QMRes}(c) \right] .$$

Os estimadores das variâncias das diferenças entre duas médias de tratamentos obtidos por FARIA (1984), admitindo a estrutura do Quadro 7, são:

- Diferença entre duas médias de tratamentos T:

$$\hat{Y}_i = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}, \quad ;$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKL} [QMRes(a)] \quad .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T':

$$\hat{Y}_k = \hat{m}_k - \hat{m}_{k'}, \quad ;$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJL} [QMRes(b)] \quad .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T*:

$$\hat{Y}_\ell = \hat{m}_\ell - \hat{m}_{\ell'}, \quad ;$$

$$\hat{V}(\hat{Y}_\ell) = \frac{2}{IJK} [QMRes(d)] \quad .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T, dentro de um mesmo nível de T': $\hat{Y}_{i/k} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i'k}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKL} [QMRes(a) + (K-1)QMRes(c)] \quad .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T', dentro de um mesmo nível de T: $\hat{Y}_{k/i} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{ik'}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{IJL} [QMRes(b) + (I-1)QMRes(c)] \quad .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T, dentro de um mesmo nível de T*: $\hat{Y}_{i/\ell} = \hat{m}_{i\ell} - \hat{m}_{i'\ell}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/\ell}) = \frac{2}{JKL} \left[\text{QMRes}(a) + (L-1)\text{QMRes}(d) \right] .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T* dentro de um mesmo nível de T: $\hat{Y}_{\ell/i} = \hat{m}_{i\ell} - \hat{m}_{i'\ell}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{2}{JK} \left[\text{QMRes}(d) \right] .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T', dentro de um mesmo nível de T*: $\hat{Y}_{k/\ell} = \hat{m}_{k\ell} - \hat{m}_{k'\ell}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/\ell}) = \frac{2}{IJL} \left[\text{QMRes}(b) + (L-1)\text{QMRes}(d) \right] .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T*, dentro de um mesmo nível de T': $\hat{Y}_{\ell/k} = \hat{m}_{k\ell} - \hat{m}_{k'\ell}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/k}) = \frac{2}{IJ} \left[\text{QMRes}(d) \right] .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T, dentro de uma mesma combinação T'T*: $\hat{Y}_{i/k\ell} = \hat{m}_{ik\ell} - \hat{m}_{i'k\ell}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k\ell}) = \frac{2}{JKL} \left[\text{QMRes}(a) + (K-1)\text{QMRes}(c) + K(L-1)\text{QMRes}(d) \right] .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T' , dentro de uma mesma combinação TT^* : $\hat{Y}_{k/il} = \hat{m}_{ikl} - \hat{m}_{ik'l}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/il}) = \frac{2}{IJL} [QMRes(b) + (I-1)QMRes(c) + I(L-1)QMRes(d)] .$$

- Diferença entre duas médias de tratamentos T^* , dentro de uma mesma combinação TT' : $\hat{Y}_{l/ik} = \hat{m}_{ikl} - \hat{m}_{ikl'}$;

$$\hat{V}(\hat{Y}_{l/ik}) = \frac{2}{J} [QMRes(d)] .$$

2.4. Perda de Observações

O conceito de parcela perdida foi emitido por vários autores, não havendo discordância de opinião; dentre eles ALLAN e WISHART (1930) conceituam como parcela perdida, aquela cujo dado registrado é imperfeito devido a causas não controladas pelo experimentador. Estes autores foram os primeiros a publicarem trabalho relativo a determinação de valores para as unidades perdidas, no qual deduzem fórmulas e ilustram seu uso para uma única unidade perdida em experimentos em blocos casualizados e em quadrado latino.

Os métodos desenvolvidos por ALLAN e WISHART (1930) foram utilizados por YATES (1933) para a determinação de várias observações perdidas, baseado no método dos mínimos quadrados, substituindo os dados perdidos por incógnitas e

procurando tornar mínima a soma de quadrados do resíduo.

Para ANDERSON (1946), parcela perdida é aquela cujo dado é perdido ou rejeitado por causa de condições alheias ao controle do experimentador e recomenda que uma parcela seja rejeitada na análise dos resultados, somente em casos extremos, quando comprovado que o tratamento em questão não é o responsável pelas aparentes anomalias de resultados.

O mesmo autor apresenta uma revisão bibliográfica sobre observações perdidas, considerando vários tipos de delineamentos e as respectivas fórmulas até então deduzidas para suas estimativas. Além dos casos de parcelas perdidas em blocos casualizados e quadrado latino, estuda o assunto para lâtes, fatoriais 2^n e 3^n e também para parcelas subdivididas, através da minimização da variância do erro.

CAMPOS (1964) determina os estimadores das unidades perdidas e das variâncias de contrastes de médias em ensaios em blocos casualizados, quadrado latino e períodos sucessivos.

As fórmulas para a estimativa de uma e duas subparcelas perdidas em delineamentos em parcelas subdivididas e uma e duas sub-subparcelas perdidas em delineamentos em parcelas sub-subdivididas; são deduzidas por PINHO (1973), considerando as diversas localizações das observações perdidas. A autora determina as somas de quadrados corrigidas através do método do resíduo condicional.

PINHO (1975) continuando seus estudos sobre parcelas perdidas estrutura os componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas com uma observação perdida.

O trabalho de LAVORENTI (1985) tem por objetivo a obtenção dos estimadores de variâncias de contrastes envolvendo uma sub-subparcela perdida nos ensaios em parcelas sub-subdivididas.

2.5. Grupos de Experimentos

As análises de grupos de experimentos são estudadas por diversos autores, dentre eles KEMPTHORNE (1952), COCHRAN e COX (1957), PIMENTEL GOMES (1978) e CAMPOS (1984).

COCHRAN e COX (1957) ao estudarem as repetições no espaço e no tempo introduziram apenas o caso mais simples de ensaios em cada um dos p locais por y anos, tomando em cada local ensaios independentes.

Ensaio conduzidos no mesmo local, por anos sucessivos, são considerados por STEEL e TORRIE (1960), PIMENTEL GOMES (1978), dentre outros autores, como ensaios com parcelas subdivididas, apresentando o conceito de parcelas subdivididas no espaço e no tempo.

A referência de ZIMMERMANN (1973) à análise conjunta de ensaios em faixas, apresenta o seguinte modelo para análise de um experimento de adubação e calagem na cultura de

milho, durante oito anos em um mesmo local:

$$Y_{ijkm} = \left\{ \begin{array}{l} m + \rho_j + a_i + \alpha_{ij} + c_m + (\rho c)_{jm} + (ac)_{im} + \beta_{ijm} + \\ + b_k + \gamma_{jk} + (bc)_{km} + \delta_{jkm} + (ab)_{ik} + \theta_{ijk} + \\ + (abc)_{ikm} + \epsilon_{ijkm} \end{array} \right\},$$

onde:

Y_{ijkm} = produção da ijk -ésima parcela, no m -ésimo ano;

m = média geral da população;

ρ_j = efeito aleatório do j -ésimo bloco;

a_i = efeito do i -ésimo nível do tratamento A;

α_{ij} = efeito aleatório associado à ij -ésima observação;

c_m = efeito do m -ésimo ano;

$(\rho c)_{jm}$ = efeito do j -ésimo bloco, no m -ésimo ano;

$(ac)_{im}$ = efeito interado do i -ésimo nível do tratamento A com o m -ésimo ano;

β_{ijm} = efeito aleatório da ijm -ésima observação;

b_k = efeito do k -ésimo nível do tratamento B;

γ_{jk} = efeito aleatório associado a jk -ésima observação;

$(bc)_{km}$ = efeito interado do k -ésimo nível do tratamento B, com o m -ésimo ano;

δ_{jkm} = efeito aleatório associado à jkm-ésima observação;

$(ab)_{ik}$ = efeito interado do i-ésimo nível do tratamento A com o k-ésimo nível do tratamento B;

θ_{ijk} = efeito aleatório associado à interação do i-ésimo nível de A com o k-ésimo nível do tratamento B, no j-ésimo bloco;

$(abc)_{ikm}$ = efeito interado do i-ésimo nível do tratamento A com o k-ésimo nível do tratamento B, no m-ésimo ano;

ϵ_{ijkm} = efeito aleatório ou influência do acaso;

Com base neste modelo, o esquema da análise de variância proposto é o que consta do Quadro 8.

Quadro 8 - Esquema de análise de variância conjunta para o de
lineamento em faixas durante m anos no mesmo lo-
cal, segundo ZIMMERMANN (1973).

Causas de Variação	G.L.	E(Q.M.)
Repetição (R)	J-1	$\sigma^2 + K\sigma_\alpha^2 + K\sigma_\beta^2 + I\sigma_\gamma^2 + I\sigma_\delta^2 + M\sigma_\theta^2 + IK\sigma_{\rho C}^2 + IKM\sigma_\rho^2$
Tratamento A	I-1	$\sigma^2 + K\sigma_\alpha^2 + K\sigma_\beta^2 + M\sigma_\theta^2 + \frac{JK}{I-1} \sum_i a_i^2$
Resíduo (a)	(I-1) (J-1)	$\sigma^2 + K\sigma_\alpha^2 + K\sigma_\beta^2 + M\sigma_\theta^2$
Subtotal I	IJ-1	-
Tratamento C (anos)	M-1	$\sigma^2 + K\sigma_\beta^2 + I\sigma_\delta^2 + IK\sigma_{\rho C}^2 + \frac{LJK}{M-1} \sum_m c_m^2$
R x C	(J-1) (M-1)	$\sigma^2 + K\sigma_\beta^2 + I\sigma_\delta^2 + IK\sigma_{\rho C}^2$
A x C	(I-1) (M-1)	$\sigma^2 + K\sigma_\beta^2 + \frac{JK}{(I-1)(M-1)} \sum_{im} (ac)_{im}^2$
Resíduo (b)	(I-1) (J-1) (M-1)	$\sigma^2 + K\sigma_\beta^2$
Subtotal II	IJM-1	-
Tratamento B	K-1	$\sigma^2 + I\sigma_\delta^2 + M\sigma_\theta^2 + IM\sigma_\gamma^2 + \frac{IJM}{K-1} \sum_k b_k^2$
Resíduo (c)	(K-1) (J-1)	$\sigma^2 + I\sigma_\delta^2 + M\sigma_\theta^2 + IM\sigma_\gamma^2$
Subtotal III	JK-1	-
B x C	(K-1) (M-1)	$\sigma^2 + I\sigma_\delta^2 + \frac{IJ}{(K-1)(M-1)} \sum_{km} (bc)_{km}^2$
Resíduo (d)	(K-1) (J-1) (M-1)	$\sigma^2 + I\sigma_\delta^2$
Subtotal IV	JKM-1	-
A x B	(I-1) (K-1)	$\sigma^2 + M\sigma_\theta^2 + \frac{JM}{(I-1)(K-1)} \sum_{ik} (ab)_{ik}^2$
Resíduo (e)	(I-1) (K-1) (J-1)	$\sigma^2 + M\sigma_\theta^2$
Subtotal V	IJK-1	-
A x B x C	(I-1) (K-1) (M-1)	$\sigma^2 + \frac{J}{(I-1)(K-1)(M-1)} \sum_{ikm} (abc)_{ikm}^2$
Resíduo (f)	(I-1) (K-1) (J-1) (M-1)	σ^2
Total	IJKM-1	-

O autor apresenta os seguintes estimadores das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias de tratamentos:

$$\hat{Y}_i = \bar{A}_i - \bar{A}_i, \quad \Rightarrow \quad \hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKM} [QMR_{\text{Res}}(a)] ;$$

$$\hat{Y}_k = \bar{B}_k - \bar{B}_k, \quad \Rightarrow \quad \hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJM} [QMR_{\text{Res}}(c)] ;$$

$$\hat{Y}_m = \bar{C}_m - \bar{C}_m, \quad \Rightarrow \quad \hat{V}(\hat{Y}_m) = \frac{2}{IJK} [QMR_{\text{Res}}(b)] ;$$

$$\hat{Y}_{i/k} = \bar{A}_i \bar{B}_k - \bar{A}_i, \bar{B}_k \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKM} [QMR_{\text{Res}}(a) + (K-1)QMR_{\text{Res}}(e)] ;$$

$$\hat{Y}_{k/i} = \bar{A}_i \bar{B}_k - \bar{A}_i, \bar{B}_k, \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{IJM} [QMR_{\text{Res}}(c) + (I-1)QMR_{\text{Res}}(e)] ;$$

$$\hat{Y}_{ik} = \bar{A}_i \bar{B}_k - \bar{A}_i, \bar{B}_k, \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{ik}) = \frac{2}{IJKM} [I QMR_{\text{Res}}(a) + K QMR_{\text{Res}}(c) + (IK-I-K)QMR_{\text{Res}}(e)] ;$$

$$\hat{Y}_{i/m} = \bar{A}_i \bar{C}_m - \bar{A}_i, \bar{C}_m \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{i/m}) = \frac{2}{JKM} [QMR_{\text{Res}}(a) + (M-1)QMR_{\text{Res}}(b)] ;$$

$$\hat{Y}_{m/i} = \bar{A}_i \bar{C}_m - \bar{A}_i, \bar{C}_m, \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{m/i}) = \frac{2}{IJK} [QMR_{\text{Res}}(b) + (I-1)QMR_{\text{Res}}(b)] ;$$

$$\hat{Y}_{im} = \bar{A}_i \bar{C}_m - \bar{A}_i, \bar{C}_m, \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{im}) = \frac{2}{IJKM} [I QMR_{\text{Res}}(a) + M QMR_{\text{Res}}(b) + (IM-I-M)QMR_{\text{Res}}(b)] ;$$

$$\hat{Y}_{k/m} = \overline{B_k C_m} - \overline{B_k', C_m} \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{k/m}) = \frac{2}{IJM} \left[QMRes(c) + (M-1)QMRes(d) \right] ;$$

$$\hat{Y}_{m/k} = \overline{B_k C_m} - \overline{B_k', C_m}, \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{m/k}) = \frac{2}{IJK} \left[QMRxC + (K-1)QMRes(d) \right] ;$$

$$\hat{Y}_{km} = \overline{B_k C_m} - \overline{B_k', C_m}, \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{km}) = \frac{2}{IJKM} \left[M QMRxC + K QMRes(c) + \right. \\ \left. + (KM-K-M)QMRes(d) \right] ;$$

$$\hat{Y}_{i/km} = \overline{A_i B_k C_m} - \overline{A_i', B_k C_m} \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{i/km}) = \frac{2}{JKM} \left[QMRes(a) + (M-1)QMRes(b) + \right. \\ \left. + (K-1)QMRes(e) + (K-1)(M-1)QMRes(f) \right] ;$$

$$\hat{Y}_{k/im} = \overline{A_i B_k C_m} - \overline{A_i B_k', C_m} \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{k/im}) = \frac{2}{IJM} \left[QMRes(c) + (M-1)QMRes(d) + \right. \\ \left. + (I-1)QMRes(e) + (I-1)(M-1)QMRes(f) \right] ;$$

$$\hat{Y}_{m/ik} = \overline{A_i B_k C_m} - \overline{A_i B_k', C_m}, \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{m/ik}) = \frac{2}{IJK} \left[QMRxC + (I-1)QMRes(b) + \right. \\ \left. + (K-1)QMRes(d) + (I-1)(K-1)QMRes(f) \right] ;$$

$$\hat{Y}_{im/k} = \overline{A_i B_k C_m} - \overline{A_i', B_k C_m}, \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{im/k}) = \frac{2}{IJKM} \left[I QMRes(a) + M QMRxC + \right. \\ \left. + (IM-I-M)QMRes(b) + M(K-1)QMRes(d) + \right. \\ \left. + I(K-1)QMRes(e) + (K-1)(IM-I-M)QMRes(f) \right]$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{ik/m} = \overline{A_i B_k C_m} - \overline{A_i B_k C_m} \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{ik/m}) &= \frac{2}{IJKM} \left[I \text{ QMRes}(a) + I(M-1) \text{ QMRes}(b) + \right. \\ &+ K \text{ QMRes}(c) + K(M-1) \text{ QMRes}(d) + \\ &+ (IK-I-K) \text{ QMRes}(e) + \\ &\left. + (M-1)(IK-I-K) \text{ QMRes}(f) \right] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{km/i} = \overline{A_i B_k C_m} - \overline{A_i B_k C_m} \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{km/i}) &= \frac{2}{IJKM} \left[M \text{ QMRxC} + M(I-1) \text{ QMRes}(b) + \right. \\ &+ K \text{ QMRes}(c) + (KM-K-M) \text{ QMRes}(d) + \\ &+ K(I-1) \text{ QMRes}(e) + \\ &\left. + (I-1)(KM-K-M) \text{ QMRes}(f) \right] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{ikm} = \overline{A_i B_k C_m} - \overline{A_i B_k C_m} \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_{ikm}) &= \frac{2}{IJKM} \left[I \text{ QMRes}(a) + M \text{ QMRxC} + \right. \\ &+ K \text{ QMRes}(c) + (IM-I-M) \text{ QMRes}(b) + \\ &+ (KM-K-M) \text{ QMRes}(d) + \\ &+ (IK-I-K) \text{ QMRes}(e) + \\ &\left. + (IKM-IK-IM-KM+I+K+M) \text{ QMRes}(f) \right] . \end{aligned}$$

Segundo CAMPOS (1984) não muito raro ocorre a instalação de grupos de experimentos, em locais distintos, visando a uma maior abrangência das conclusões obtidas. O agrupamento dos ensaios deve obedecer a diferentes critérios, dentre os quais cita:

- por setores geográficos
- por ano agrícola
- por afinidade quanto a alguma característica de interesse
- pela grandeza dos quadrados médios dos resíduos das análises individuais.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Supondo-se um grupo de R experimentos em parcelas subdivididas onde cada ensaio é constituído de I níveis de um tratamento (A), K níveis de um tratamento (B), onde tanto (A) como (B) estão dispostos em faixas, em J blocos.

Para cada um dos R experimentos, tem-se o seguinte modelo matemático misto, adotado por ANDERSON e BANCROFT (1952) e FEDERER (1955):

$$Y_{ikj} = m + \alpha_i + b_j + (\alpha b)_{ij} + \beta_k + (\beta b)_{kj} + (\alpha\beta)_{ik} + e_{ikj}$$

$$(i = 1, 2, \dots, I; k = 1, 2, \dots, K; j = 1, 2, \dots, J) ;$$

onde:

Y_{ikj} = valor observado do i-ésimo nível do tratamento (A), no k-ésimo nível do tratamento (B), no j-ésimo bloco;

m = média geral;

α_i = efeito do i -ésimo nível do tratamento (A);

b_j = efeito aleatório do j -ésimo bloco, onde se supõe

$$b_j \sim N(0; \sigma_b^2);$$

$(\alpha b)_{ij}$ = efeito aleatório que constitui o resíduo para o tratamento (A); ou seja, é o efeito da interação do i -ésimo nível do tratamento (A), com o j -ésimo bloco, onde se supõe $(\alpha b)_{ij} \sim N(0; \sigma_{\alpha b}^2)$;

β_k = efeito do k -ésimo nível do tratamento (B);

$(\beta b)_{kj}$ = efeito aleatório que constitui o resíduo para o tratamento (B), ou seja, é o efeito da interação do k -ésimo nível do tratamento (B) com o j -ésimo bloco, onde se supõe $(\beta b)_{kj} \sim N(0; \sigma_{\beta b}^2)$;

$(\alpha\beta)_{ik}$ = efeito da interação do i -ésimo nível do tratamento (A) com o k -ésimo nível do tratamento (B);

e_{ikj} = efeito aleatório que constitui o resíduo para a interação tratamento (A) x tratamento (B), ou seja, é o efeito da interação do i -ésimo nível do tratamento (A), com o k -ésimo nível do tratamento (B), no j -ésimo bloco, onde se supõe $e_{ikj} \sim N(0; \sigma^2)$.

Considerando $e_{ikj} \sim N(0; \sigma^2)$ e impondo as restrições:

$$\begin{aligned} \sum_i \hat{\alpha}_i &= \sum_j \hat{b}_j = \sum_k \hat{\beta}_k = \sum_i (\hat{\alpha b})_{ij} = \sum_j (\hat{\alpha b})_{ij} = \sum_k (\hat{\beta b})_{kj} = \sum_j (\hat{\beta b})_{kj} = \\ &= \sum_i (\hat{\alpha\beta})_{ik} = \sum_k (\hat{\alpha\beta})_{ik} = 0, \end{aligned}$$

chegou-se, através do método dos quadrados mínimos, ao sistema de equações normais o qual tem como solução os estimadores dos parâmetros, dados por:

$$\hat{m} = \frac{G}{IKJ} ;$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{T_i}{KJ} - \hat{m} ; \quad \hat{\beta}_k = \frac{T'_k}{IJ} - \hat{m} ; \quad \hat{b}_j = \frac{B_j}{IK} - \hat{m} ;$$

$$(\hat{\alpha\beta})_{ij} = \frac{TB_{ij}}{K} - \hat{m} - \hat{\alpha}_i - \hat{b}_j ; \quad (\hat{\beta b})_{kj} = \frac{T'B_{kj}}{I} - \hat{m} - \hat{\beta}_k - \hat{b}_j ;$$

$$(\hat{\alpha\beta})_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{J} - \hat{m} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_k ,$$

onde:

G = total geral;

T_i = total do i -ésimo nível do tratamento (A);

B_j = total do j -ésimo bloco;

T'_k = total do k -ésimo nível do tratamento (B);

TB_{ij} = total do i -ésimo nível do tratamento (A) no j -ésimo bloco;

$T'B_{kj}$ = total do k -ésimo nível do tratamento (B) no j -ésimo bloco;

TT'_{ik} = total do i -ésimo nível do tratamento (A) no k -ésimo nível do tratamento (B);

As somas de quadrados obtidas, são:

$$SQ_{Total} = \sum_{ikj} Y_{ikj}^2 - C \quad , \text{ onde } C = \frac{1}{IKJ} \left[\sum_{ikj} Y_{ikj} \right]^2 ;$$

$$SQ_{Trat(A)} = \frac{1}{KJ} \sum_i T_i^2 - C \quad ; SQ_{Trat(B)} = \frac{1}{IJ} \sum_k T_k'^2 - C ;$$

$$SQ_{Blocos} = \frac{1}{IK} \sum_j B_j^2 - C ;$$

$$SQ_{Res(a)} = \left[\frac{1}{K} \sum_{ij} TB_{ij}^2 - C \right] - SQ_{Trat(A)} - SQ_{Blocos} ;$$

$$SQ_{Res(b)} = \left[\frac{1}{I} \sum_{kj} T'B_{kj}^2 - C \right] - SQ_{Trat(B)} - SQ_{Blocos} ;$$

$$SQ_{Trat(A) \times Trat(B)} = \left[\frac{1}{J} \sum_{ik} TT_{ik}'^2 - C \right] - SQ_{Trat(A)} - SQ_{Trat(B)} ;$$

e

$$SQ_{Res(c)} = \left\{ \begin{array}{l} SQ_{Total} - SQ_{Blocos} - SQ_{Trat(A)} - SQ_{Res(a)} - \\ - SQ_{Trat(B)} - SQ_{Res(b)} - SQ_{Trat(A) \times Trat(B)} \end{array} \right\} .$$

O esquema da análise de variância com as esperanças matemáticas dos quadrados médios está esquematizado no Quadro 9.

Quadro 9 - Esquema de análise de variância e esperanças matemáticas dos quadrados médios nos ensaios em faixas.

Causas de Variação	G.L.	E(Q.M.)
Blocos	J-1	$\sigma^2 + K\sigma_{\alpha b}^2 + I\sigma_{\beta b}^2 + IK\sigma_b^2$
Tratamentos (A)	I-1	$\sigma^2 + K\sigma_{\alpha b}^2 + KJ\phi_{\alpha}$
Resíduo (a)	(I-1) (J-1)	$\sigma^2 + K\sigma_{\alpha b}^2$
Tratamentos (B)	K-1	$\sigma^2 + I\sigma_{\beta b}^2 + IJ\phi_{\beta}$
Resíduo (b)	(K-1) (J-1)	$\sigma^2 + I\sigma_{\beta b}^2$
Trat (A) x Trat (B)	(I-1) (K-1)	$\sigma^2 + J\phi_{\alpha\beta}$
Resíduo (c)	(I-1) (K-1) (J-1)	σ^2
Total	IKJ-1	-

$$\text{onde: } \phi_{\alpha} = \frac{\sum_i \alpha_i^2}{(I-1)} ; \phi_{\beta} = \frac{\sum_k \beta_k^2}{(K-1)} \text{ e } \phi_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2}{(I-1)(K-1)} .$$

A partir do Quadro 9 pode-se estruturar o teste F para as 3 hipóteses de nulidade dadas por KEMPTHORNE (1952), CHAKRABARTI (1962), ZIMMERMANN (1973) e PIMENTEL GOMES (1978), respectivamente, para os efeitos do Tratamento (A), Tratamento (B) e para a interação Tratamento (A) x Tratamento (B), con

forme consta no Quadro 10.

Quadro 10 - Critérios para os testes de hipóteses.

Hipóteses	G.L.	F
$H_0(1): \alpha_i = 0$	$(I-1); (I-1)(J-1)$	$QM_{Trat(A)} / QM_{Res(a)}$
$H_0(2): \beta_k = 0$	$(K-1); (K-1)(J-1)$	$QM_{Trat(B)} / QM_{Res(b)}$
$H_0(3): (\alpha\beta)_{jk} = 0$	$(I-1)(K-1); (I-1)(K-1)(J-1)$	$QM_{Trat(A) \times Trat(B)} / QM_{Res(c)}$

A fim de comparar duas médias quaisquer tem-se os estimadores das variâncias das estimativas dos contrastes entre estas médias apresentadas por ZIMMERMANN (1973), conforme citado no item 2.3.

3.1. Caso de Perda de Uma Observação

Embora não seja o propósito abordar a análise individual, abordou-se o caso em que ocorre a perda de uma observação

Admitindo que em um dos R experimentos em parcelas subdivididas com I níveis de um tratamento (A), K níveis de um tratamento (B), onde tanto (A) como (B) estão dispostos em faixas, em J blocos, tenha ocorrido a perda de uma observação (x), que recebeu os tratamentos T_i , T'_k no bloco B_j .

Procedendo a análise usual tem-se as seguintes somas de quadrados, incluindo o valor de x:

$$SQ_{Total} = x^2 + M - C \quad , \quad \text{onde: } C = \frac{(x + G)^2}{IKJ} \quad ;$$

$$SQ_{Blocos} = \frac{1}{IK} \left[(B + x)^2 + N \right] - C \quad ;$$

$$SQ_{Trat(A)} = \frac{1}{KJ} \left[(T + x)^2 + 0 \right] - C \quad ;$$

$$SQ_{Trat(B)} = \frac{1}{IJ} \left[(T' + x)^2 + P \right] - C \quad ;$$

$$SQ_{Trat(A) \times Trat(B)} = \left\{ \frac{1}{J} \left[(TT' + x)^2 + Q \right] - C - SQ_{Trat(A)} - \right. \\ \left. - SQ_{Trat(B)} \right\} \quad ;$$

$$SQRes(a) = \frac{1}{K} \left[(TB + x)^2 + H \right] - C - SQBlocos - SQTrat(A) ;$$

$$SQRes(b) = \frac{1}{I} \left[(T'B + x)^2 + S \right] - C - SQBlocos - SQTrat(B)$$

e

$$SQRes(c) = \left[SQTotal - SQBlocos - SQTrat(A) - SQTrat(B) - \right. \\ \left. - SQRes(a) - SQRes(b) - SQTrat(A) \times Trat(B) \right] ,$$

onde:

B = soma das demais parcelas do bloco J, onde ocorreu a perda da observação;

T = soma das demais parcelas do tratamento A_i associado a unidade perdida;

T' = soma das demais parcelas do tratamento B_k onde houve a perda;

TT' = soma das demais parcelas da combinação $A_i B_k$, onde ocorreu a perda;

TB = soma das demais parcelas do tratamento A_i , no bloco J que contém x;

T'B = soma das demais parcelas do tratamento B_k , no bloco J onde houve a perda;

G = soma de todas as parcelas restantes no ensaio;

M = soma dos quadrados de todas as parcelas restantes no ensaio;

N = soma dos quadrados dos totais dos (J-1) blocos que não perderam parcela;

- O = soma dos quadrados dos totais dos $(I-1)$ tratamentos A_i em que não ocorreram perda de observação;
 P = soma dos quadrados dos totais dos $(K-1)$ tratamentos B_k em que não houve perda;
 Q = soma dos quadrados dos $(IK-1)$ totais de cada combinação $A_i B_k$ que não perdeu parcela;
 H = soma dos quadrados dos $(IJ-1)$ totais de cada tratamento A_i nos J blocos;
 S = soma dos quadrados dos $(KJ-1)$ totais de cada tratamento B_k nos J blocos.

Minimizando a soma de quadrados do resíduo (c), obteve-se o estimador da unidade perdida, dada por:

$$x = \frac{IJ(TB) + KJ(T'B) - JB + IK(TT') - IT - KT' + G}{(I-1)(K-1)(J-1)} .$$

3.1.1. Componentes de Variância das Somas de Quadrados Não Corrigidas

Baseado nas expressões das somas de quadrados a apresentadas no item 3.1., pode-se estruturar as esperanças matemáticas conforme se segue.

Observa-se que nas deduções apresentadas, não

foram levados em conta a média e os duplos produtos, uma vez que seriam canceladas, não interferindo nos resultados finais.

Substituindo na expressão:

$$x = \frac{IJ(TB) + KJ(T'B) - JB + IK(TT') - IT - KT' + G}{(I-1)(K-1)(J-1)} ;$$

cada termo em função do modelo matemático já referido no item 3., obteve-se:

$$x = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + b_j + (\alpha b)_{ij} + \frac{1}{(K-1)} \sum_k' e_{ikj} + \beta_k + (\beta b)_{kj} + \\ & + \frac{1}{(I-1)} \sum_i' e_{ikj} + (\alpha \beta)_{ik} + \frac{1}{(J-1)} \sum_j' e_{ikj} - \\ & - \frac{1}{(K-1)(J-1)} \sum_{kj}'' e_{ikj} - \frac{1}{(I-1)(J-1)} \sum_{ij}'' e_{ikj} - \\ & - \frac{1}{(I-1)(K-1)} \sum_{ik}'' e_{ikj} + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{ikj}''' e_{ikj} \end{aligned} \right\} ,$$

onde:

$\sum_k' e_{ikj}$ = soma dos (K-1) erros associados ao tratamento (A) e ao bloco correspondente à observação perdida;

$\sum_i' e_{ikj}$ = soma dos (I-1) erros associados ao tratamento (B) e ao bloco correspondente à observação perdida;

$\sum_j' e_{ikj}$ = soma dos (J-1) erros associados aos tratamen-

tos (A) e (B) correspondente à observação perdida;

$\sum_{kj}'' e_{ikj}$ = soma dos (K-1) (J-1) erros associados ao tratamento (A) correspondente à observação perdida;

$\sum_{ij}'' e_{ikj}$ = soma dos (I-1) (J-1) erros associados ao tratamento (B) correspondente à observação perdida;

$\sum_{ik}'' e_{ikj}$ = soma dos (I-1) (K-1) erros associados ao bloco correspondente à observação perdida;

$\sum_{ikj}''' e_{ikj}$ = soma dos (I-1) (K-1) (J-1) erros correspondente à observação perdida.

a) Soma de Quadrados Total

Visto que:

$$SQ_{Total} = x^2 + M - C ;$$

consequentemente:

$$E [SQ_{Total}] = E [x^2] + E [M] - E [C] ;$$

onde:

$$E [M] = E \left[\sum_{ikj}' Y_{ikj}^2 \right] = \sum_{ikj}' \left\{ E \left[\alpha_i + b_j + (\alpha b)_{ij} + \beta_k + (\beta b)_{kj} + (\alpha \beta)_{ik} + e_{ikj} \right]^2 \right\} ;$$

portanto:

43.

$$E [M] = \left\{ \begin{aligned} & KJ \sum_i \alpha_i^2 - \alpha_i^2 + IKJ \sigma_b^2 - \sigma_b^2 + IKJ \sigma_{\alpha b}^2 - \sigma_{\alpha b}^2 + \\ & + IJ \sum_k \beta_k^2 - \beta_k^2 + IKJ \sigma_{\beta b}^2 - \sigma_{\beta b}^2 + J \sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2 - (\alpha\beta)_{ik}^2 + \\ & + IKJ \sigma^2 - \sigma^2 \end{aligned} \right\} ;$$

$$E [x^2] = \left[\begin{aligned} & \alpha_i^2 + \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 + \beta_k^2 + \sigma_{\beta b}^2 + (\alpha\beta)_{ik}^2 + \\ & + \frac{(IK + IJ + KJ - I - K - J + 1) \sigma^2}{(I-1)(K-1)(J-1)} \end{aligned} \right] ;$$

$$E [C] = E \left[\left(\sum_{ikj} Y_{ikj} + x \right)^2 \right] = E \left[(G + x)^2 \right] ;$$

ou seja:

$$E [C] = E \left\{ \begin{aligned} & IK \sum_j b_j^2 + K \sum_{ij} (\alpha\beta)_{ij}^2 + I \sum_{kj} (\beta b)_{kj}^2 + \frac{I}{(I-1)} \sum_i e_{ikj} + \\ & + \frac{K}{(K-1)} \sum_k e_{ikj} + \frac{J}{(J-1)} \sum_j e_{ikj} + \frac{(IK-I-K)}{(I-1)(K-1)} \sum_{ik} e_{ikj} + \\ & + \frac{(IJ-I-J)}{(I-1)(J-1)} \sum_{ij} e_{ikj} + \frac{(KJ-K-J)}{(K-1)(J-1)} \sum_{kj} e_{ikj} + \\ & + \frac{(IKJ-IK-IJ-KJ+I+K+J)}{(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{ikj} e_{ikj} \end{aligned} \right\}^2$$

Através de procedimentos usuais, chegou-se à expressão:

$$E [C] = IK \sigma_b^2 + K \sigma_{\alpha b}^2 + I \sigma_{\beta b}^2 + \frac{(I-1)(K-1)(J-1) + 1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \sigma^2 ,$$

portanto

$$E [SQTtotal] = \left\{ \begin{aligned} & KJ \sum_i \alpha_i^2 + IK(J-1) \sigma_b^2 + K(IJ-1) \sigma_{\alpha b}^2 + IJ \sum_k \beta_k^2 + \\ & + I(KJ-1) \sigma_{\beta b}^2 + J \sum_{ik} (\alpha \beta)_{ik}^2 + \\ & + \left[(IKJ-3) + \frac{IKJ-1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 \end{aligned} \right\} .$$

b) Soma de Quadrados de Tratamentos (A)

$$\text{Considerando } SQTrat(A) = \frac{1}{KJ} \left[(T + x)^2 + 0 \right] - C ;$$

virá:

$$E [SQTrat(A)] = E \left[\frac{0}{KJ} \right] + E \left[\frac{(T + x)^2}{KJ} \right] - E [C] .$$

$$\text{Como } T_i = KJ\alpha_i + K \sum_j b_j + K \sum_j (\alpha b)_{ij} + \sum_{kj} (\beta b)_{kj} + \sum_{kj} e_{ikj}$$

$$\text{e considerando } \sum_{kj} e_{ikj} = \sum_k e_{ikj} + \sum_j e_{ikj} + \sum_{kj} e_{ikj} ,$$

$$\begin{aligned} \text{tem-se } E \left[\frac{0}{KJ} \right] &= E \left[\frac{\sum_i T_i^2}{KJ} \right] = \left[KJ \sum_i \alpha_i^2 - KJ \alpha_i^2 + IK \sigma_b^2 - K \sigma_b^2 + \right. \\ &+ IK \sigma_{\alpha b}^2 - K \sigma_{\alpha b}^2 + I \sigma_{\beta b}^2 - \sigma_{\beta b}^2 + \\ &\left. + I \sigma^2 - \sigma^2 \right] , \end{aligned}$$

$$E \left[\frac{(T + x)^2}{KJ} \right] = KJ\alpha_i^2 + K\sigma_b^2 + K\sigma_{\alpha b}^2 + \sigma_{\beta b}^2 + \left[1 + \frac{I}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 .$$

Portanto,

$$E [SQTrat(A)] = KJ\sum_i \alpha_i^2 + K(I-1)\sigma_{\alpha b}^2 + \left[(I-1) + \frac{(I-1)}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 ;$$

$$\text{mas } E [QMTrat(A)] = \frac{E [SQTrat(A)]}{(I-1)} ;$$

$$\text{logo } E [QMTrat(A)] = KJ\phi_{\alpha} + K\sigma_{\alpha b}^2 + \left[1 + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 ,$$

$$\text{onde: } \phi_{\alpha} = \frac{\sum_i \alpha_i^2}{(I-1)} .$$

c) Soma de Quadrados de Tratamentos (B)

Desde que:

$$SQTrat(B) = \frac{1}{IJ} \left[(T' + x)^2 + P \right] - C ;$$

tem-se:

$$E [SQTrat(B)] = E \left[\frac{P}{IJ} \right] + E \left[\frac{(T' + x)^2}{IJ} \right] - E [C] ;$$

$$\text{como } T'_k = I\sum_j \alpha_j b_j + \sum_{ij} (\alpha b)_{ij} + IJ\beta_k + I\sum_j (\beta b)_{kj} + \sum_{ij} e_{ikj}$$

$$\text{e considerando } \sum_{ij} e_{ikj} = \sum_j e_{ikj} + \sum_i e_{ikj} + \sum_{ij} e_{ikj} ;$$

$$\text{tem-se: } E \left[\frac{P}{IJ} \right] = E \left[\frac{\sum_k T_k'^2}{IJ} \right] = \left[IK\sigma_b^2 - I\sigma_b^2 + K\sigma_{ab}^2 - \sigma_{ab}^2 + \right. \\ \left. + IJ\sum_k \beta_k^2 - IJ\beta_k^2 + IK\sigma_{\beta b}^2 - \right. \\ \left. - I\sigma_{\beta b}^2 + K\sigma^2 - \sigma^2 \right] ;$$

$$E \left[\frac{(T' + x)^2}{IJ} \right] = I\sigma_b^2 + \sigma_{ab}^2 + IJ\beta_k^2 + I\sigma_{\beta b}^2 + \left[1 + \frac{K}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 .$$

Portanto

$$E \left[\text{SQTrat}(B) \right] = IJ\sum_k \beta_k^2 + I(K-1)\sigma_{\beta b}^2 + \left[(K-1) + \frac{(K-1)}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 ;$$

de modo análogo ao tratamento (A),

$$E \left[\text{QMTrat}(B) \right] = IJ\phi_{\beta} + I\sigma_{\beta b}^2 + \left[1 + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 ,$$

$$\text{onde: } \phi_{\beta} = \frac{\sum_k \beta_k^2}{(K-1)} .$$

d) Soma de Quadrados de Blocos

Tomando:

$$\text{SQBlocos} = \frac{1}{IK} \left[(B + x)^2 + N \right] - C ;$$

obteve-se:

$$E \left[\text{SQBlocos} \right] = E \left[\frac{N}{IK} \right] + E \left[\frac{(B + x)^2}{IK} \right] - E \left[C \right] .$$

$$\text{Como: } B_j = IKb_j + K \sum_i (\alpha b)_{ij} + I \sum_k (\beta b)_{kj} + \sum_{ik} e_{ikj}$$

$$\text{e considerando } \sum'_{ik} e_{ikj} = \sum'_i e_{ikj} + \sum'_k e_{ikj} + \sum''_{ik} e_{ikj} ;$$

$$\begin{aligned} \text{tem-se: } E \left[\frac{N}{IK} \right] &= E \left[\frac{\sum'_j B_j^2}{IJ} \right] = \left[IKJ\sigma_b^2 - IK\sigma_b^2 + KJ\sigma_{\alpha b}^2 - K\sigma_{\alpha b}^2 + \right. \\ &\quad \left. + IJ\sigma_{\beta b}^2 - I\sigma_{\beta b}^2 + J\sigma^2 - \sigma^2 \right] ; \end{aligned}$$

$$E \left[\frac{(B + x)^2}{IK} \right] = IK\sigma_b^2 + K\sigma_{\alpha b}^2 + I\sigma_{\beta b}^2 + \left[1 + \frac{J}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E \left[\text{SQBlocos} \right] &= \left\{ IK(J-1)\sigma_b^2 + K(J-1)\sigma_{\alpha b}^2 + I(J-1)\sigma_{\beta b}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[(J-1) + \frac{(J-1)}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 \right\} ; \end{aligned}$$

de modo análogo

$$E \left[\text{QMBlocos} \right] = IK\sigma_b^2 + K\sigma_{\alpha b}^2 + I\sigma_{\beta b}^2 + \left[1 + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 .$$

e) Soma de Quadrados da Interação Tratamento (A) x Tratamentos (B)

Conforme já visto:

$$SQ_{\text{Trat(A) x Trat(B)}} = \left\{ \frac{1}{J} \left[(TT' + x)^2 + Q \right] - C - SQ_{\text{Trat(A)}} - \right. \\ \left. - SQ_{\text{Trat(B)}} \right\} ;$$

então:

$$E \left[SQ_{\text{Trat(A) x Trat(B)}} \right] = \left\{ E \left[\frac{Q}{J} \right] + E \left[\frac{(TT' + x)^2}{J} \right] - \right. \\ - E [C] - E [SQ_{\text{Trat(A)}}] - \\ \left. - E [SQ_{\text{Trat(B)}}] \right\} .$$

$$\text{Como } TT'_{ik} = \left[J\alpha_i + \sum_j b_j + \sum_j (\alpha b)_{ij} + J\beta_k + \right. \\ \left. \sum_j (\beta b)_{kj} + J(\alpha\beta)_{ik} + \sum_j e_{ikj} \right] ;$$

tem-se:

$$E \left[\frac{Q}{J} \right] = E \left[\frac{\sum_{ik} TT'^2_{ik}}{J} \right] = \left[KJ \sum_i \alpha_i^2 - J \alpha_i^2 + IK \sigma_b^2 - \sigma_b^2 + IK \sigma_{ab}^2 - \right. \\ \left. - \sigma_{ab}^2 + IJ \sum_k \beta_k^2 - J \beta_k^2 + IK \sigma_{\beta b}^2 - \right. \\ \left. - \sigma_{\beta b}^2 + J \sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2 - J (\alpha\beta)_{ik}^2 + \right. \\ \left. + IK \sigma^2 - \sigma^2 \right] ;$$

$$E \left[\frac{(TT' + x)^2}{J} \right] = \left\{ J \alpha_i^2 + \sigma_b^2 + \sigma_{ab}^2 + J \beta_k^2 + \sigma_{\beta b}^2 + J (\alpha\beta)_{ik}^2 + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{IK}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 \right\} .$$

Portanto,

$$E \left[SQTrat(A) x Trat(B) \right] = \left\{ J \sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2 + \right. \\ \left. + \left[(I-1)(K-1) + \frac{(I-1)(K-1)}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 \right\} ;$$

de modo análogo

$$E \left[QMTrat(A) x Trat(B) \right] = J \phi_{\alpha\beta} + \left[1 + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 ,$$

$$\text{onde: } \Phi_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2}{(I-1)(K-1)} .$$

f) Soma de Quadrados do Resíduo (a)

Admitindo:

$$SQRes(a) = \frac{1}{K} \left[(TB + x)^2 + H \right] - C - SQBlocos - SQTrat(A) ;$$

virá:

$$E [SQRes(a)] = \left\{ E \left[\frac{H}{K} \right] + E \left[\frac{(TB + x)^2}{K} \right] - E [C] - \right. \\ \left. - E [SQTrat(A)] - E [SQBlocos] \right\} .$$

$$\text{Como } TB_{ij} = K\alpha_i + Kb_j + K(\alpha\beta)_{ij} + \sum_k (\beta b)_{kj} + \sum_k e_{ikj} ,$$

tem-se:

$$E \left[\frac{H}{K} \right] = E \left[\frac{\sum_{ij} TB_{ij}^2}{K} \right] = \left[KJ \sum_i \alpha_i^2 - K\alpha_i^2 + IKJ\sigma_b^2 - K\sigma_b^2 + \right. \\ \left. + IKJ\sigma_{\alpha b}^2 - K\sigma_{\alpha b}^2 + IJ\sigma_{\beta b}^2 - \sigma_{\beta b}^2 + \right. \\ \left. + IJ\sigma^2 - \sigma^2 \right] ;$$

$$E \left[\frac{(TB + x)^2}{K} \right] = \left\{ K\alpha_i^2 + K\sigma_b^2 + K\sigma_{\alpha b}^2 + \sigma_{\beta b}^2 + \left[1 + \frac{IJ}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 \right\} .$$

Portanto,

$$E \left[\text{SQRes}(a) \right] = K(I-1)(J-1)\sigma_{\alpha b}^2 + \left[(I-1)(J-1) + \frac{(I-1)(J-1)}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2$$

adotando o mesmo procedimento anteriormente usado:

$$E \left[\text{QMRes}(a) \right] = K\sigma_{\alpha b}^2 + \left[1 + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 .$$

g) Soma de Quadrados do Resíduo (b)

Uma vez que:

$$\text{SQRes}(b) = \frac{1}{I} \left[(T'B + x)^2 + S \right] - C - \text{SQBlocos} - \text{SQTrat}(B);$$

tem-se:

$$E \left[\text{SQRes}(b) \right] = \left\{ E \left[\frac{S}{I} \right] + E \left[\frac{(T'B + x)^2}{I} \right] - E \left[C \right] - E \left[\text{SQTrat}(B) \right] - E \left[\text{SQBlocos} \right] \right\} .$$

$$\text{Como: } T'B = Ib_j + \sum_i (\alpha b)_{ij} + I\beta_k + I(\beta b)_{kj} + \sum_i e_{ikj} ,$$

tem-se:

$$E \left[\frac{S}{I} \right] = E \left[\frac{\sum_{kj} T' B^2}{I} \right] = \left[IKJ\sigma_b^2 - I\sigma_b^2 + KJ\sigma_{\alpha b}^2 - \sigma_{\alpha b}^2 + IJ\sum_k \beta_k^2 - \right. \\ \left. - I\beta_k^2 + IKJ\sigma_{\beta b}^2 - I\sigma_{\beta b}^2 + KJ\sigma^2 - \sigma^2 \right] ;$$

$$E \left[\frac{(T'B + x)^2}{I} \right] = I\sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 + I\beta_k^2 + I\sigma_{\beta b}^2 + \left[1 + \frac{KJ}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 .$$

Portanto,

$$E \left[\text{SQRes}(b) \right] = \left\{ I(K-1)(J-1)\sigma_{\beta b}^2 + \left[(K-1)(J-1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(K-1)(J-1)}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 \right\} ,$$

de modo análogo, tem-se:

$$E \left[\text{QMRes}(b) \right] = I\sigma_{\beta b}^2 + \left[1 + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 .$$

h) Soma de Quadrados do Resíduo (c)

Partindo de

$$\text{SQRes}(c) = [\text{SQTotal} - \text{SQBlocos} - \text{SQTrat}(A) - \text{SQRes}(a) - \\ - \text{SQTrat}(B) - \text{SQRes}(b) - \text{SQTrat}(A) \times \text{Trat}(B)] ;$$

obteve-se:

$$E [SQRes(c)] = \left\{ E [SQTotal] - E [SQTrat(A)] - E [SQBlocos] - \right. \\ \left. - E [SQRes(a)] - E [SQTrat(B)] - \right. \\ \left. - E [SQRes(b)] - E [SQTrat(A) \times Trat(B)] \right\} ;$$

substituindo, tem-se:

$$E [SQRes(c)] = [(I-1) (K-1) (J-1) - 1] \sigma^2 ,$$

portanto

$$E [QMRes(c)] = \sigma^2 .$$

3.1.2. Análise de Variância

Com base nos resultados do item anterior, viabilizou-se a estruturação do Quadro 11:

Quadro 11 - Esquema da análise de variância e esperanças matemáticas dos quadrados médios para um ensaio em faixas com perda de uma observação.

Causas de Variação	G.L.	E(QM)
Blocos	(J-1)	$W\sigma^2 + K\sigma_{\alpha b}^2 + I\sigma_{\beta b}^2 + IK\sigma_b^2$
Tratamentos (A)	(I-1)	$W\sigma^2 + K\sigma_{\alpha b}^2 + KJ\phi_{\alpha}$
Resíduo (a)	(I-1) (J-1)	$W\sigma^2 + K\sigma_{\alpha b}^2$
Tratamentos (B)	(K-1)	$W\sigma^2 + I\sigma_{\beta b}^2 + IJ\phi_{\beta}$
Resíduo (b)	(K-1) (J-1)	$W\sigma^2 + I\sigma_{\beta b}^2$
Trat (A) x Trat (B)	(I-1) (K-1)	$W\sigma^2 + J\phi_{\alpha\beta}$
Resíduo (c)	(I-1) (K-1) (J-1) - 1	σ^2
Total	IKJ-2	—

onde:

$$W = \left[1 + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] ;$$

$$\phi_{\alpha} = \frac{\sum_i \alpha_i^2}{(I-1)} ; \quad \phi_{\beta} = \frac{\sum_k \beta_k^2}{(K-1)} \quad e \quad \phi_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2}{(I-1)(K-1)} .$$

Examinando o quadro de análise, observa-se que os tratamentos (A) e (B) são testados pelos resíduos (a) e (b), respectivamente.

Por outro lado, não existe um teste direto para a interação (A) x (B) e um dos procedimentos que poderia ser adotado, seria admitir como testador o resíduo (c) multiplicado pelo fator W.

3.1.3. Variância de Contrastes de Médias

Analogamente ao procedimento usual das análises individuais sem perda de observações, apresentaram-se as deduções das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias de tratamentos bem como de seus estimadores.

Dos 5 casos distintos de contrastes entre médias de tratamentos, foram isolados apenas os 4 de maior interesse, estruturados a seguir:

3.1.3.1. Entre duas médias de tratamentos (A)

Considerando $\hat{m}_{i'} = \frac{T + x}{KJ}$ e $\hat{m}_i = \frac{T_i}{KJ}$,

ou ainda

$$\hat{m}_{i'} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha b)_{i'j} + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} (\beta b)_{kj} + \\ & + \frac{1}{KJ(I-1)} \sum_{i'} e_{i'kj} + \frac{1}{J(K-1)} \sum_k e_{i'kj} + \\ & + \frac{1}{K(J-1)} \sum_j e_{i'kj} - \frac{1}{KJ(I-1)(K-1)} \sum_{i'k} e_{i'kj} - \\ & - \frac{1}{KJ(I-1)(J-1)} \sum_{i'j} e_{i'kj} - \frac{(KJ-K-J)}{KJ(K-1)(J-1)} \sum_{kj} e_{i'kj} + \\ & + \frac{1}{KJ(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{i'kj} e_{i'kj} \end{aligned} \right\}$$

e

$$\hat{m}_i = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha b)_{ij} + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} (\beta b)_{kj} + \\ & + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} e_{ikj} \end{aligned} \right\}$$

e o contraste $\hat{Y}_i = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$, ou seja:

$$\hat{\gamma}_i = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i - \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j \left[(\alpha b)_{ij} - (\alpha b)_{i'j} \right] + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} e_{ikj} - \\ & - \frac{1}{KJ(I-1)} \sum_{i'} e_{i'kj} - \frac{1}{J(K-1)} \sum_k e_{i'kj} - \frac{1}{K(J-1)} \sum_j e_{i'kj} + \\ & + \frac{1}{KJ(I-1)(K-1)} \sum_{i'k} e_{i'kj} + \frac{1}{KJ(I-1)(J-1)} \sum_{i'j} e_{i'kj} + \\ & + \frac{(KJ-K-J)}{KJ(K-1)(J-1)} \sum_{kj} e_{i'kj} - \frac{1}{KJ(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{i'kj} e_{i'kj} \end{aligned} \right\} .$$

Aplicando a esperança matemática e levando em consideração a aleatoriedade dos efeitos, virá:

$$E(\hat{\gamma}_i) = \alpha_i - \alpha_{i'}$$

$$\text{Por definição: } V(\hat{\gamma}_i) = E \left[\hat{\gamma}_i - E(\hat{\gamma}_i) \right]^2 .$$

Desenvolvendo e simplificando, obteve-se a variância:

$$V(\hat{\gamma}_i) = \frac{2}{J} \sigma_{\alpha b}^2 + \left[\frac{2}{KJ} + \frac{I}{KJ(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{\gamma}_i) = \frac{2}{KJ} \left[\text{QMRes}(a) + \frac{(I-2)}{2(I-1)(K-1)(J-1)} \text{QMRes}(c) \right] .$$

Considerando:

$$E_a = \text{QMRes}(a) ;$$

$$E_b = \text{QMRes}(b) ;$$

$$E_c = \text{QMRes}(c) ;$$

e ainda:
$$f = \frac{1}{2(I-1)(K-1)(J-1)} ;$$

tem-se:
$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{KJ} [E_a + f(I-2)E_c] .$$

A este estimador estão associados n'_1 graus de liberdade, o qual pode ser obtido através da fórmula de SATTERTHWAIT (1946), ou seja:

$$n'_1 = \frac{[E_a + f(I-2)E_c]^2}{\frac{E_a^2}{n_a} + \frac{f^2(I-2)^2 E_c^2}{n_c}} ,$$

onde: $n_a \Rightarrow$ número de graus de liberdade associado ao resíduo (a)

$n_c \Rightarrow$ número de graus de liberdade associado ao resíduo (c).

3.1.3.2. Entre duas médias de tratamentos (B)

Analogamente ao item anterior, considerando:

$$\hat{m}_{k'} = \frac{T' + x}{IJ} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (\alpha b)_{ij} + \beta_{k'} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta b)_{k'j} + \\ & + \frac{1}{J(I-1)} \sum_i e_{ik'j} + \frac{1}{IJ(K-1)} \sum_{k'} e_{ik'j} + \\ & + \frac{1}{I(J-1)} \sum_j e_{ik'j} - \frac{1}{IJ(I-1)(K-1)} \sum_{ik'} e_{ik'j} - \\ & - \frac{(IJ-I-J)}{IJ(I-1)(J-1)} \sum_{ij} e_{ik'j} - \frac{1}{IJ(K-1)(J-1)} \sum_{k'j} e_{ik'j} + \\ & + \frac{1}{IJ(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{ik'j} e_{ik'j} \end{aligned} \right.$$

e

$$\hat{m}_k = \frac{T'_k}{IJ} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (\alpha b)_{ij} + \beta_k + \frac{1}{J} \sum_j (\beta b)_{kj} + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} e_{ikj} \end{aligned} \right\} ;$$

portanto o contraste $\hat{Y}_k = \hat{m}_k - \hat{m}_{k'}$, é dado por:

$$\hat{Y}_k = \left\{ \begin{aligned} & \beta_k - \beta_{k'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\beta b)_{kj} - (\beta b)_{k'j}] + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} e_{ikj} - \\ & - \frac{1}{J(I-1)} \sum_i e_{ik'j} - \frac{1}{IJ(K-1)} \sum_{k'} e_{ik'j} - \\ & - \frac{1}{I(J-1)} \sum_j e_{ik'j} + \frac{1}{IJ(I-1)(K-1)} \sum_{ik'} e_{ik'j} + \\ & + \frac{(IJ-I-J)}{IJ(I-1)(J-1)} \sum_{ij} e_{ik'j} + \frac{1}{IJ(K-1)(J-1)} \sum_{k'j} e_{ik'j} - \\ & - \frac{1}{IJ(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{ik'j} e_{ik'j} \end{aligned} \right\} .$$

Aplicando a esperança matemática, obteve-se:

$$E(\hat{Y}_k) = \beta_k - \beta_{k'}$$

e como $V(\hat{Y}_k) = E \left[\hat{Y}_k - E(\hat{Y}_k) \right]^2$; chegou-se a expressão:

$$V(\hat{Y}_k) = \frac{2}{J} \sigma_{\beta b}^2 + \left[\frac{2}{IJ} + \frac{K}{IJ(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2 .$$

O estimador da variância da estimativa do contraste Y_k é dada por:

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJ} \left[E_b - f(K-2)E_c \right]$$

e os graus de liberdade associados a ele são dados por
SATTERTHWAITE (1946), ou seja:

$$n'_2 = \frac{[E_b + f(K-2)E_c]^2}{\frac{E_b^2}{n_b} + \frac{f^2(K-2)^2 E_c^2}{n_c}},$$

onde: $n_b \Rightarrow$ número de graus de liberdade associado ao resíduo (b).

3.1.3.3. Entre duas médias de tratamentos (A)
num mesmo nível de (B)

Considerando $\hat{m}_{i'k} = \frac{TT' + x}{J}$ e $\hat{m}_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{J}$, ou

seja:

$$\hat{m}_{i'k} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha b)_{i'j} + \beta_k + \frac{1}{J} \sum_j (\beta b)_{kj} + \\ & + (\alpha \beta)_{i'k} + \frac{1}{(J-1)} \sum_j e_{i'kj} + \frac{1}{J(I-1)} \sum_{i'} e_{i'kj} + \\ & + \frac{1}{J(K-1)} \sum_k e_{i'kj} + \frac{1}{J(I-1)(K-1)} \sum_{i'k} e_{i'kj} - \\ & - \frac{1}{J(I-1)(J-1)} \sum_{i'j} e_{i'kj} - \frac{1}{J(K-1)(J-1)} \sum_{kj} e_{i'kj} + \\ & + \frac{1}{J(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{i'kj} e_{i'kj} \end{aligned} \right\}$$

e

$$\hat{m}_{ik} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha b)_{ij} + \beta_k + \frac{1}{J} \sum_j (\beta b)_{kj} + \\ & + (\alpha \beta)_{ik} + \frac{1}{J} \sum_j e_{ikj} \end{aligned} \right\} .$$

O contraste $\hat{Y}_{i/k} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i',k}$, será:

$$\hat{Y}_{i/k} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i - \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\alpha b)_{ij} - (\alpha b)_{i'j}] + (\alpha \beta)_{ik} - \\ & - (\alpha \beta)_{i'k} + \frac{1}{J} \sum_j e_{ikj} - \frac{1}{(J-1)} \sum_j e_{i'kj} - \\ & - \frac{1}{J(I-1)} \sum_{i'} e_{i'kj} - \frac{1}{J(K-1)} \sum_k e_{i'kj} + \\ & + \frac{1}{J(I-1)(K-1)} \sum_{ik} e_{i'kj} + \frac{1}{J(I-1)(J-1)} \sum_{i'j} e_{i'kj} + \\ & + \frac{1}{J(K-1)(J-1)} \sum_{kj} e_{i'kj} - \frac{1}{J(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{i'kj} e_{ikj} \end{aligned} \right\}$$

e sua esperança matemática:

$$E(\hat{Y}_{i/k}) = \alpha_i - \alpha_{i'} + (\alpha \beta)_{ik} - (\alpha \beta)_{i'k} .$$

Conforme a definição de variância da estimativa de um contraste, obteve-se:

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{J} \sigma_{\alpha b}^2 + \left[\frac{2}{J} + \frac{IK}{J(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{KJ} \left\{ E_a + \left[(K-1) + 2f(IK^2 - 2) \right] E_c \right\} ;$$

ao qual estão associados n'_3 graus de liberdade:

$$n'_3 = \frac{\left\{ E_a + [(K-1) + 2f(IK^2 - 2)] E_c \right\}^2}{\frac{E_a^2}{n_a} + \frac{[(K-1) + 2f(IK^2 - 2)]^2 E_c^2}{n_c}} .$$

3.1.3.4. Entre duas médias de tratamentos (B)
num mesmo nível de (A)

Analogamente aos itens anteriores

$$\hat{m}_{ik'} = \frac{TT' + x}{J} \quad \text{e} \quad \hat{m}_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{J} \quad , \quad \text{ou ainda:}$$

$$\hat{m}_{ik'} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha b)_{ij} + \beta_{k'} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta b)_{k'j} + \\ & + (\alpha \beta)_{ik'} + \frac{1}{J(I-1)} \sum_i e_{ik'j} + \frac{1}{J(K-1)} \sum_{k'} e_{ik'j} + \\ & + \frac{1}{(J-1)} \sum_j e_{ik'j} - \frac{1}{J(I-1)(K-1)} \sum_{ik'} e_{ik'j} - \\ & - \frac{1}{J(I-1)(J-1)} \sum_{ij} e_{ik'j} - \frac{1}{J(K-1)(J-1)} \sum_{k'j} e_{ik'j} + \\ & + \frac{1}{J(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{ik'j} e_{ik'j} \end{aligned} \right\}$$

e

$$\hat{m}_{ik} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_j + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\beta)_{ij} + \beta_k + \frac{1}{J} \sum_j (\beta b)_{kj} + \\ & + (\alpha\beta)_{ik} + \frac{1}{J} \sum_j e_{ikj} \end{aligned} \right\} .$$

Então, a estimativa do contraste será:

$$\hat{Y}_{k/i} = \left\{ \begin{aligned} & \beta_k - \beta_{k'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\beta b)_{kj} - (\beta b)_{k'j}] + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{ik'} + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j e_{ikj} - \frac{1}{J(I-1)} \sum_i e_{ik'j} - \frac{1}{J(K-1)} \sum_{k'} e_{ik'j} - \\ & - \frac{1}{(J-1)} \sum_j e_{ik'j} + \frac{1}{J(I-1)(K-1)} \sum_{ik'} e_{ik'j} + \\ & + \frac{1}{J(I-1)(J-1)} \sum_{ij} e_{ik'j} + \frac{1}{J(K-1)(J-1)} \sum_{k'j} e_{ik'j} - \\ & - \frac{1}{J(I-1)(K-1)(J-1)} \sum_{ik'j} e_{ik'j} \end{aligned} \right\}$$

$$e \quad E(\hat{Y}_{k/i}) = \beta_k - \beta_{k'} + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{ik'} .$$

$$\text{Por definição} \quad V(\hat{Y}_{k/i}) = E \left[\hat{Y}_{k/i} - E(\hat{Y}_{k/i}) \right]^2 ;$$

portanto:

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{J} \sigma_{\beta b}^2 + \left[\frac{2}{J} + \frac{IK}{J(I-1)(K-1)(J-1)} \right] \sigma^2$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{IJ} \left\{ E_b + [(I-1) + 2f(I^2K-2)] E_c \right\} .$$

Os n'_4 graus de liberdade associados a este estimador são dados por SATTERTHWAITTE (1946) através da expressão:

$$n'_4 = \frac{\left\{ E_b + [(I-1) + 2f(I^2K-2)] E_c \right\}^2}{\frac{E_b^2}{n_b} + \frac{[(I-1) + 2f(I^2K-2)]^2 E_c^2}{n_c}} .$$

3.1.4. Correções das Somas de Quadrados

A fim de se obter as verdadeiras somas de quadrados, utilizou-se o método do resíduo condicional, que se baseia no método dos mínimos quadrados.

Para facilitar o entendimento ao leitor, que não está acostumado com álgebra de matrizes, descreveu-se o método de duas maneiras distintas, ou seja:

- a) Determinação das somas de quadrados ajustadas por álgebra de matrizes

Supondo um ensaio em faixas onde cada parcela pode ser representada pelo modelo do item 3.:

$$Y_{ikj} = m + \alpha_i + b_j + (\alpha b)_{ij} + \beta_k + (\beta b)_{kj} + (\alpha \beta)_{ik} + e_{ikj} .$$

O conjunto das IKJ observações do modelo pode ser representado pelo sistema matricial:

$$Y = X\beta + \xi_1 ,$$

onde Y é a matriz das observações, X a dos coeficientes dos parâmetros do modelo, β o vetor dos parâmetros e ξ_1 o dos erros.

Supondo Z observações perdidas, as matrizes terão as dimensões:

$$Y: (IKJ-Z) \times 1 ;$$

$$X: (IKJ-Z) \times [(I+1)(K+1) + J(I+K+1)] ;$$

$$\beta: [(I+1)(K+1) + J(I+K+1)] \times 1 ;$$

$$\xi_1: (IKJ-Z) \times 1 ,$$

onde a matriz X pode ser decomposta em 7 submatrizes,

$$X = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7] ,$$

sendo X_1 , o vetor dos coeficientes relativo a média (m) de dimensões $(IKJ-Z) \times 1$ e $X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$, as matrizes compostas dos coeficientes de cada parâmetro do modelo, de dimensões $(IKJ-Z) \times I, (IKJ-Z) \times J, (IKJ-Z) \times IJ, (IKJ-Z) \times K, (IKJ-Z) \times KJ$ e $(IKJ-Z) \times IK$, respectivamente.

O vetor β pode ser decomposto em

$$\beta = \begin{bmatrix} m \\ R \\ A \\ RA \\ B \\ RB \\ AB \end{bmatrix}, \quad \text{onde: } R = \begin{bmatrix} b_{j,1} \end{bmatrix} ; \quad RA = \begin{bmatrix} (\alpha b)_{ij,1} \end{bmatrix} ;$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{i,1} \end{bmatrix} ; \quad RB = \begin{bmatrix} (\beta b)_{kj,1} \end{bmatrix} ;$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{k,1} \end{bmatrix} \text{ e } AB = \begin{bmatrix} (\alpha \beta)_{ik,1} \end{bmatrix} .$$

O modelo matricial pode ser escrito na forma

$$Y = X_1 m + X_2 R + X_3 A + X_4 RA + X_5 B + X_6 RB + X_7 AB + \xi_1 \quad (1) .$$

Tornando mínima a soma de quadrados de resíduo $(\xi_1' \xi_1)$, onde $\xi_1 = Y - X\beta$, a fim de se obter as estimativas dos parâmetros, obteve-se o sistema de equações normais

$$X' X \hat{\beta} = X' y .$$

Para a obtenção da solução única aplicou-se à matriz X as restrições necessárias, citadas em itens anteriores.

Resolvendo o sistema através de $\hat{\beta}'X'Y$ pode-se obter a soma de quadrados de parâmetros que denominou-se de SQP_1 .

Portanto, a soma de quadrados de resíduo (c) fica

$$SQRes(c) = Y'Y - SQP_1 .$$

Eliminando do modelo (1), os parâmetros relativos à interação Tratamentos (A) x Tratamentos (B), o modelo fica:

$$Y = X_1 \mu + X_2 R + X_3 A + X_4 RA + X_5 B + X_6 RB + \xi_2 . \quad (2)$$

Determinou-se a nova soma de quadrados de parâmetros (SQP_2), sendo a soma de quadrados da interação dada por:

$$SQTrat(A) \times Trat(B) = SQP_1 - SQP_2 .$$

Eliminando do modelo (2) os parâmetros relativos ao resíduo (b), fica:

$$Y = X_1 m + X_2 R + X_3 A + X_4 RA + X_5 B + \xi_3 \quad . \quad (3)$$

Obteve-se SQP_3 que é a soma de quadrados de parâmetros do modelo (3). Portanto,

$$SQRes(b) = SQP_2 - SQP_3 \quad .$$

De maneira análoga, tem-se:

$$Y = X_1 m + X_2 R + X_3 A + X_4 RA + \xi_4 \quad . \quad (4)$$

Resolvendo, obteve-se SQP_4 e conseqüentemente a soma de quadrados de tratamentos (B)

$$SQTrat(B) = SQP_3 - SQP_4 \quad .$$

Reduzindo o modelo (4), tem-se:

$$Y = X_1 m + X_2 R + X_3 A + \xi_5 \quad . \quad (5)$$

Obteve-se, de maneira análoga SQP_5 que é a soma de quadrados de parâmetros do modelo (5), sendo

$$SQRes(a) = SQP_4 - SQP_5 \quad .$$

De maneira análoga tem-se:

$$Y = X_1 m + X_2 R + \xi_6 \quad (6)$$

e obteve-se SQP_6 , sendo

$$SQTrat(A) = SQP_5 - SQP_6 .$$

E ainda

$$Y = X_1 m + \xi_7 . \quad (7)$$

Obteve-se SQP_7 , e

$$SQBlocos = SQP_6 - SQP_7$$

- b) Determinação das somas de quadrados ajustadas por álgebra comum

Seguindo o mesmo método apresentado no item 3.1.4.-a, pode-se obter as fórmulas para as correções das somas de quadrados, ou as verdadeiras somas de quadrados para experimentos em faixas com perda de uma observação.

Para as somas de quadrados corrigidas, utilizaram-se os mesmos termos definidos para as somas de quadrados, a-

companhados do índice c.

A expressão que dá a soma de quadrados do resíduo (c), é:

$$SQRes(c) = [SQTotal - SQBlocos - SQTrat(A) - SQRes(a) - SQTrat(B) - SQRes(b) - \\ - SQTrat(A) \times Trat(B)] .$$

Minimizando a $SQRes(c)$ obteve-se a estimativa x_1 , dada por

$$x_1 = \frac{IJ(TB) + KJ(T'B) - JB + IK(TT') - IT - KT' + G}{(I-1)(K-1)(J-1)} ,$$

para a parcela perdida, com a qual pode-se obter o verdadeiro valor da $SQRes(c)$, que denominou-se de SQR_1 .

Para determinar a verdadeira soma de quadrados da interação Tratamentos (A) x Tratamentos (B), ou seja, $SQ[Trat(A) \times Trat(B)]_c$, obteve-se um valor x_2 para a subparcela perdida, minimizando SQR_2 , sendo

$$SQR_2 = SQTotal - SQBlocos - SQTrat(A) - SQRes(a) - SQTrat(B) - SQRes(b)$$

$$e \quad x_2 = \frac{I(TB) + K(T'B) - B}{(I-1)(K-1)} ;$$

$$\text{portanto,} \quad SQ[Trat(A) \times Trat(B)]_c = SQR_2 - SQR_1$$

Obteve-se a correção U_{AB} para a $SQ\text{Trat}(A) \times \text{Trat}(B)$, pela diferença

$$U_{AB} = SQ\text{Trat}(A) \times \text{Trat}(B) - SQ[\text{Trat}(A) \times \text{Trat}(B)]_c ,$$

dada por:

$$U_{AB} = \frac{(x_1 - x_2)}{IK} \left[(I-1)(K-1)(x_1 + x_2) + 2B - 2I(TB) - 2K(T'B) \right] .$$

Minimizando SQR_3 , obteve-se um estimador x_3 para a subparcela perdida, sendo

$$SQR_3 = SQ\text{Total} - SQ\text{Blocos} - SQ\text{Trat}(A) - SQ\text{Res}(a) - SQ\text{Trat}(B)$$

$$e \quad x_3 = \frac{IJ(TB) + KT' - G}{(IJ-1)(K-1)} ,$$

$$\text{portanto,} \quad SQ\text{Res}(b)_c = SQR_3 - SQR_2$$

$$\text{Obteve-se a correção } U_{R(b)} = SQ\text{Res}(b) - SQ\text{Res}(b)_c ,$$

dada por:

$$U_{R(b)} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x_2 - x_3)}{K} \left[(K-1)(x_2 + x_3) - 2(TB) \right] + \\ & + \frac{(x_1 - x_2)}{IK} \left[(K-1)(x_1 + x_2) + 2K(T'B) - 2B \right] + \\ & + \frac{(x_1 - x_3)}{IKJ} \left[2G - 2KT' - (K-1)(x_1 + x_3) \right] \end{aligned} \right\} .$$

De maneira análoga, tem-se para Tratamentos (B):

$$SQR_4 = SQTotal - SQBlocos - SQTrat(A) - SQRes(a)$$

$$e, \quad x_4 = \frac{(TB)}{(K-1)} ,$$

$$\text{como} \quad SQTrat(B)_C = SQR_4 - SQR_3 ,$$

$$e \quad U_B = SQTrat(B) - SQTrat(B)_C ,$$

tem-se

$$U_B = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x_3 - x_4)}{K} \left[(K-1)(x_3 + x_4) - 2(TB) \right] + \\ & + \frac{(x_1 - x_3)}{IKJ} \left[(K-1)(x_1 + x_3) + 2KT' - 2G \right] \end{aligned} \right\} .$$

Para o resíduo (a):

$$SQR_5 = SQTotal - SQBlocos - SQTrat(A)$$

e o estimador da parcela perdida

$$x_5 = \frac{JB + IT - G}{J(IK-1) - (I-1)},$$

como $SQRes(a)_c = SQR_5 - SQR_4$ e

$$U_{R(a)} = SQRes(a) - SQRes(a)_c,$$

logo

$$U_{R(a)} = \left\{ \begin{aligned} & x_4^2 - x_5^2 + \frac{(x_1 - x_4)}{K} \left[(x_1 + x_4) + 2(TB) \right] + \\ & + \frac{(x_1 - x_5)}{IKJ} \left[(1-I-J)(x_1 + x_5) + 2G - 2JB - 2IT \right] \end{aligned} \right\}.$$

Analogamente para os tratamentos (A), tem-se:

$$SQR_6 = SQTotal - SQBlocos$$

e $x_6 = \frac{B}{(IK-1)},$

mas, $SQTrat(A)_C = SQR_6 - SQR_5$,

logo $U_A = SQTrat(A) - SQTrat(A)_C$, ou ainda

$$U_A = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x_5 - x_6)}{IK} \left[(IK-1)(x_5 + x_6) \right] - 2B + \\ & + \frac{(x_1 - x_5)}{IKJ} \left[(I-1)(x_1 + x_5) + 2IT - 2G \right] \end{aligned} \right\} .$$

E ainda a correção para blocos U_{Bl} , será:

$$SQR_7 = SQTotal \quad e$$

$$x_7 = \frac{G}{(IKJ-1)} ,$$

sabendo que $SQBlocos_C = SQR_7 - SQR_6$,

tem-se $U_{Bl} = SQBlocos - SQBlocos_C$

$$\text{ou } U_{Bl} = \left\{ \begin{aligned} & x_6^2 - x_7^2 + \frac{(x_1 - x_6)}{IK} \left[(x_1 + x_6) + 2B \right] - \\ & - \frac{(x_1 - x_7)}{IKJ} \left[(x_1 + x_7) + 2G \right] \end{aligned} \right\} .$$

No caso de duas ou mais unidades perdidas, o processo para determinar as somas de quadrados corrigidas é o

mesmo, sendo que CAMPOS (1984) apresenta o processo iterativo que consiste na aplicação ordenada e sucessiva da fórmula obtida no item 3.1., atribuindo inicialmente valores arbitrários a $(Z-1)$ das parcelas a serem estimadas. Este é um dos processos de estimação mais imediato.

O esquema da análise de variância, levando em consideração as correções das somas de quadrados é dado no Quadro 12.

Quadro 12 - Esquema da análise de variância, com as somas de quadrados corrigidas.

Causas de Variação	G.L.	SQ(corrigidos)
Blocos	J-1	$SQBlocos - U_{Bl}$
Tratamentos (A)	I-1	$SQTrat(A) - U_A$
Resíduo (a)	(I-1) (J-1)	$SQRes(a) - U_{R(a)}$
Tratamentos (B)	K-1	$SQTrat(B) - U_B$
Resíduo (b)	(K-1) (J-1)	$SQRes(b) - U_{R(b)}$
Trat. (A) x Trat. (B)	(I-1) (K-1)	$SQTrat(A) \times Trat(B) - U_{AB}$
Resíduo (c)	(I-1) (K-1) (J-1) - 1	$SQRes(c)$
Total	IKJ-2	$SQTotal$

3.2. Análise Conjunta

3.2.1. Modelo Matemático

Reunindo os R experimentos, tem-se, conforme já visto anteriormente, o modelo matemático:

$$Y_{ikrj} = \left\{ \begin{aligned} &m + \alpha_i + b_{j/r} + \delta_r + (\alpha\delta)_{ir} + (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \beta_k + (\beta\delta)_{kr} + \\ &+ (\beta\delta b)_{(kr)j} + (\alpha\beta)_{ik} + (\alpha\beta\delta)_{ikr} + e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\},$$

(i = 1, 2, ..., I; k = 1, 2, ..., K; j = 1, 2, ..., J; r = 1, 2, ..., R)

onde:

Y_{ikrj} = valor observado do i-ésimo nível do tratamento (A), no k-ésimo nível do tratamento (B), no j-ésimo bloco e no r-ésimo experimento;

m = média geral;

α_i = efeito do i-ésimo nível do tratamento (A);

$b_{j/r}$ = efeito aleatório do j-ésimo bloco no r-ésimo experimento, onde se supõe $b_{j/r} \sim N(0; \sigma_b^2)$;

δ_r = efeito aleatório do r-ésimo experimento, onde se supõe $\delta_r \sim N(0; \sigma_\delta^2)$;

$(\alpha\delta)_{ir}$ = efeito aleatório da interação do i-ésimo nível do tratamento (A), no r-ésimo experimento, onde

se supõe $(\alpha\delta)_{ir} \sim N(0; \sigma_{\alpha\delta}^2)$;

$(\alpha\delta b)_{(ir)j}$ = efeito aleatório que constitui o resíduo para o tratamento (A), ou seja, efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento (A), no r-ésimo experimento, no j-ésimo bloco, onde se supõe $(\alpha\delta b)_{(ir)j} \sim N(0; \sigma_{\alpha\delta b}^2)$;

β_k = efeito do k-ésimo nível do tratamento (B);

$(\beta\delta)_{kr}$ = efeito aleatório da interação do k-ésimo nível do tratamento (B) no r-ésimo experimento, onde se supõe $(\beta\delta)_{kr} \sim N(0; \sigma_{\beta\delta}^2)$;

$(\beta\delta b)_{(kr)j}$ = efeito aleatório que constitui o resíduo para o tratamento (B), ou seja, efeito da interação do k-ésimo nível do tratamento (B), no r-ésimo experimento, no j-ésimo bloco, onde se supõe $(\beta\delta b)_{(kr)j} \sim N(0; \sigma_{\beta\delta b}^2)$;

$(\alpha\beta)_{ik}$ = efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento (A) com o k-ésimo nível do tratamento (B);

$(\alpha\beta\delta)_{ikr}$ = efeito aleatório do i-ésimo nível do tratamento (A), com o k-ésimo nível do tratamento (B) no r-ésimo experimento, onde se supõe $(\alpha\beta\delta)_{ikr} \sim N(0; \sigma_{\alpha\beta\delta}^2)$;

$e_{(ikr)j}$ = efeito aleatório que constitui o resíduo para a interação tratamento (A) x tratamento (B), ou seja, efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento (A) com o k-ésimo nível do tratamen

to (B), no r-ésimo experimento, no j-ésimo bloco, onde se supõe $e_{(ikr)j} \sim N(0; \sigma^2)$.

3.2.2. Análise de Variância

3.2.2.1. Sistema de equações normais

Partindo do modelo, através do método dos mínimos quadrados, considerando para efeito de dedução somente $e_{(ikr)j} \sim N(0; \sigma^2)$ aleatório e impondo as restrições:

$$\begin{aligned} \sum_i \hat{\alpha}_i &= \sum_j \hat{b}_{j/r} = \sum_r \hat{\delta}_r = \sum_i (\hat{\alpha\delta})_{ir} = \sum_r (\hat{\alpha\delta})_{ir} = \sum_i (\hat{\alpha\delta b})_{(ir)j} = \\ &= \sum_j (\hat{\alpha\delta b})_{(ir)j} = \sum_k \hat{\beta}_k = \sum_k (\hat{\beta\delta})_{kr} = \sum_r (\hat{\beta\delta})_{kr} = \sum_k (\hat{\beta\delta b})_{(kr)j} = \\ &= \sum_j (\hat{\beta\delta b})_{(kr)j} = \sum_i (\hat{\alpha\beta})_{ik} = \sum_k (\hat{\alpha\beta})_{ik} = \sum_i (\hat{\alpha\beta\delta})_{ikr} = \\ &= \sum_k (\hat{\alpha\beta\delta})_{ikr} = \sum_r (\hat{\alpha\beta\delta})_{ikr} = 0 \quad , \end{aligned}$$

chegou-se ao sistema de equações normais:

$$IKJ\hat{R}_m = G$$

$$KRJ\hat{m} + KRJ\hat{\alpha}_i = T_i$$

$$IK\hat{m} + IK\hat{b}_{j/r} + IK\hat{\delta}_r = B_{j/r}$$

$$IKJ\hat{m} + IKJ\hat{\delta}_r = E_r$$

$$K\hat{J}_m + K\hat{J}\alpha_i + K\hat{J}\delta_r + K\hat{J}(\hat{\alpha}\delta)_{ir} = TE_{ir}$$

$$K\hat{m} + K\hat{\alpha}_i + K\hat{b}_{j/r} + K\hat{\delta}_r + K(\hat{\alpha}\delta)_{ir} + K(\hat{\alpha}\delta b)_{(ir)j} = TEB_{irj}$$

$$IR\hat{J}_m + IR\hat{J}\beta_k = T'_k$$

$$IJ\hat{m} + IJ\hat{\delta}_r + IJ\hat{\beta}_k + IJ(\hat{\beta}\delta)_{kr} = T'E_{kr}$$

$$I\hat{m} + I\hat{b}_{j/r} + I\hat{\delta}_r + I\hat{\beta}_k + I(\hat{\beta}\delta)_{kr} + I(\hat{\beta}\delta b)_{(kr)j} = T'EB_{krj}$$

$$RJ\hat{m} + RJ\hat{\alpha}_i + RJ\hat{\beta}_k + RJ(\hat{\alpha}\beta)_{ik} = TT'_ik$$

$$J\hat{m} + J\hat{\alpha}_i + J\hat{\delta}_r + J(\hat{\alpha}\delta)_{ir} + J\hat{\beta}_k + J(\hat{\beta}\delta)_{kr} + J(\hat{\alpha}\beta)_{ik} + J(\hat{\alpha}\beta\delta)_{ikr} = TT'E_{ikr} ,$$

onde:

G = total geral;

T_i = total do i-ésimo nível do tratamento (A);

$B_{j/r}$ = total do j-ésimo bloco no r-ésimo experimento;

E_r = total do r-ésimo experimento;

TE_{ir} = total do i-ésimo nível do tratamento (A) no r-ésimo experimento;

TEB_{irj} = total do i-ésimo nível do tratamento (A) no r-ésimo experimento, no j-ésimo no bloco;

T'_k = total do k-ésimo nível do tratamento (B);

$T'E_{kr}$ = total do k-ésimo nível do tratamento (B) no r-ésimo experimento;

$T'EB_{krj}$ = total do k-ésimo nível do tratamento (B) no r-ésimo experimento, no j-ésimo bloco;

TT'_ik = total do i-ésimo nível do tratamento (A) no k-ésimo nível do tratamento (B);

$TT'E_{ikr}$ = total do i-ésimo nível do tratamento (A) no k-ésimo

no nível do tratamento (B), no r-ésimo experimento.

Com base nas equações normais, obtiveram-se os estimadores:

$$\hat{m} = \frac{G}{IKRJ} ; \quad \hat{\alpha}_i = \frac{T_i}{KRJ} - \hat{m} ; \quad \hat{\beta}_k = \frac{T'_k}{IRJ} - \hat{m} ;$$

$$\hat{\delta}_r = \frac{E_r}{IKJ} - \hat{m} ; \quad \hat{b}_{j/r} = \frac{B_{j/r}}{IK} - \hat{m} - \hat{\delta}_r ;$$

$$(\hat{\alpha\delta})_{ir} = \frac{TE_{ir}}{KJ} - \hat{m} - \hat{\alpha}_i - \hat{\delta}_r ; \quad (\hat{\beta\delta})_{kr} = \frac{T'E_{kr}}{IJ} - \hat{m} - \hat{\delta}_r - \hat{\beta}_k ;$$

$$(\hat{\alpha\delta b})_{(ir)j} = \frac{TEB_{irj}}{K} - \hat{m} - \hat{\alpha}_i - \hat{b}_{j/r} - \hat{\delta}_r - (\hat{\alpha\delta})_{ir} ;$$

$$(\hat{\beta\delta b})_{(kr)j} = \frac{T'EB_{krj}}{I} - \hat{m} - \hat{b}_{j/r} - \hat{\delta}_r - \hat{\beta}_k - (\hat{\beta\delta})_{kr} ;$$

$$(\hat{\alpha\beta})_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{RJ} - \hat{m} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_k ;$$

$$(\hat{\alpha\beta\delta})_{ikr} = \frac{TT'E_{ikr}}{J} - \hat{m} - \hat{\alpha}_i - \hat{\delta}_r - (\hat{\alpha\delta})_{ir} - \hat{\beta}_k - (\hat{\beta\delta})_{kr} - (\hat{\alpha\beta})_{ik} .$$

3.2.2.2. Somas de quadrados

Conforme o procedimento usual para a obtenção das somas de quadrados, virá:

$$SQ_{Total} = \sum_{ikrj} Y_{ikrj}^2 - C , \quad \text{onde: } C = \frac{1}{IKRJ} \left(\sum_{ikrj} Y_{ikrj} \right)^2 ;$$

$$SQTrat(A) = \frac{1}{KRJ} \sum_i T_i^2 - C \quad ; \quad SQtrat(B) = \frac{1}{IRJ} \sum_k T'_k{}^2 - C \quad ;$$

$$SQExp = \frac{1}{IKJ} \sum_r E_r^2 - C \quad ;$$

$$SQBlocos \text{ dentro de } Exp = SQBlocos - SQExp = \sum_r (SQBlocos)_r \quad ;$$

$$SQTrat(A) \times Exp = \frac{1}{KJ} \sum_{ir} TE_{ir}^2 - C - SQTrat(A) - SQExp. \quad ;$$

$$SQResíduo(a) = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{K} \sum_{irj} TEB_{irj}^2 - C - SQTrat(A) - SQBl.d.Exp - SQExp - \\ - SQTrat(A) \times Exp \end{array} \right] \quad ;$$

$$SQTrat(B) \times Exp = \frac{1}{IJ} \sum_{kr} T'E_{kr}^2 - C - SQTrat(B) - SQExp \quad ;$$

$$SQResíduo(b) = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{I} \sum_{krj} T'EB_{krj}^2 - C - SQTrat(B) - SQBl.d.Exp - SQExp - \\ - SQTrat(B) \times Exp \end{array} \right] \quad ;$$

$$SQTrat(A) \times Trat(B) = \frac{1}{RJ} \sum_{ik} TT'_{ik}{}^2 - C - SQTrat(A) - SQTrat(B) \quad ;$$

$$SQ \text{ Trat}(A) \times Trat(B) \times Exp = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{J} \sum_{ikr} TT'E_{ikr}^2 - C - SQExp - SQTrat(A) - \\ - SQTrat(A) \times Exp - SQTrat(B) - SQTrat(B) \times Exp. - \\ - SQTrat(A) \times Trat(B) \end{array} \right] \quad ;$$

e

$$SQResíduo(c) = \begin{bmatrix} SQTotal - SQBl.d.Exp - SQExp - SQTrat(A) - \\ - SQTrat(A) \times Exp - SQRes(a) - SQTrat(B) - \\ - SQTrat(B) \times Exp - SQRes(b) - \\ - SQTrat(A) \times Trat(B) - SQTrat(A) \times Trat(B) \times Exp \end{bmatrix}$$

$$= \sum_r [SQResíduo(c)]_r .$$

3.2.2.3. Esperanças matemáticas dos quadrados médios

Com base nas somas de quadrados obtidas em 3.2.2.2., no modelo linear proposto em 3.2.1. e através dos procedimentos usuais, as esperanças dos quadrados médios resultaram:

Dado que:

$$E[Correção] = E[C] = E \left[\frac{(\sum_{ikrj} Y_{ikrj})^2}{IKRJ} \right]$$

e ainda:

$$Y_{ikrj} = \left\{ \begin{aligned} & m + \alpha_i + b_{j/r} + \delta_r + (\alpha\delta)_{ir} + (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \beta_k + (\beta\delta)_{kr} + \\ & + (\beta\delta b)_{(kr)j} + (\alpha\beta)_{ik} + (\alpha\beta\delta)_{ikr} + e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\} .$$

Pelo fato de que no resultado final das diversas $E(SQ)$, a média não aparecer, pode-se suprimi-la em todos os cálculos, bem como os duplos produtos, facilitando as deduções.

Assim,

$$E\left(\sum_{ikrj} Y_{ikrj}\right)^2 = E \left[\begin{aligned} & IK \sum_{rj} b_{j/r} + IKJ \sum_r \delta_r + KJ \sum_{ir} (\alpha\delta)_{ir} + \\ & + K \sum_{irj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + IJ \sum_{kr} (\beta\delta)_{kr} + I \sum_{krj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + \\ & + J \sum_{ikr} (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_{ikrj} e_{(ikr)j} \end{aligned} \right]^2$$

$$= \left[\begin{aligned} & I^2 K^2 R J \sigma_b^2 + I^2 K^2 R J^2 \sigma_\delta^2 + IK^2 R J^2 \sigma_{\alpha\delta}^2 + IK^2 R J \sigma_{\alpha\delta b}^2 + \\ & + I^2 K R J^2 \sigma_{\beta\delta}^2 + I^2 K R J \sigma_{\beta\delta b}^2 + IK R J^2 \sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + IK R J \sigma^2 \end{aligned} \right] ;$$

portanto,

$$E[C] = IK \sigma_b^2 + IKJ \sigma_\delta^2 + KJ \sigma_{\alpha\delta}^2 + K \sigma_{\alpha\delta b}^2 + IJ \sigma_{\beta\delta}^2 + I \sigma_{\beta\delta b}^2 + J \sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 .$$

a) Soma de quadrados de tratamentos (A)

Sabe-se que:

$$E[SQTrat(A)] = E \left[\frac{\sum_i T_i^2}{KRJ} \right] - E[C] ,$$

onde:

$$T_i = \left[\begin{aligned} & KRJ \alpha_i + K \sum_{rj} b_{j/r} + KJ \sum_r \delta_r + KJ \sum_{ir} (\alpha\delta)_{ir} + K \sum_{rj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \\ & + J \sum_{kr} (\beta\delta)_{kr} + \sum_{krj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + J \sum_{kr} (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_{krj} e_{(ikr)j} \end{aligned} \right] ,$$

consequentemente:

$$E \left[\frac{\sum_i T_i^2}{KRJ} \right] = \left[\begin{array}{l} KRJ \sum_i \alpha_i^2 + IK\sigma_b^2 + IKJ\sigma_\delta^2 + IKJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + IK\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IJ\sigma_{\beta\delta}^2 + \\ + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + IJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + I\sigma^2 \end{array} \right] .$$

Subtraindo $E [C]$, tem-se:

$$E[SQTrat(A)] = \left[\begin{array}{l} KRJ \sum_i \alpha_i^2 + KJ(I-1)\sigma_{\alpha\delta}^2 + K(I-1)\sigma_{\alpha\delta b}^2 + J(I-1)\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \\ + (I-1)\sigma^2 \end{array} \right] ,$$

mas:

$$QMTrat(A) = \frac{SQTrat(A)}{(I-1)} ;$$

$$\therefore E[QMTrat(A)] = \frac{E[SQTrat(A)]}{(I-1)} = KRJ\phi_\alpha + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 ,$$

onde:

$$\phi_\alpha = \frac{\sum_i \alpha_i^2}{(I-1)} .$$

b) Soma de quadrados de experimentos

Considerando que:

$$E[\text{SQExperimentos}] = E\left[\frac{\sum E_r^2}{IKJ}\right] - E[C] ,$$

onde, analogamente aos casos anteriores:

$$E_r = \left[\begin{array}{l} IK \sum_j b_{j/r} + IKJ \delta_r + KJ \sum_i (\alpha \delta)_i r + K \sum_{ij} (\alpha \delta b)_{(ir)j} + IJ \sum_k (\beta \delta)_{kr} + \\ + I \sum_{kj} (\beta \delta b)_{(kr)j} + J \sum_{ik} (\alpha \beta \delta)_{ikr} + \sum_{ikj} e_{(ikr)j} \end{array} \right] .$$

Virá:

$$E\left[\frac{\sum E_r^2}{IKJ}\right] = \left[\begin{array}{l} IKR \sigma_b^2 + IKRJ \sigma_\delta^2 + KRJ \sigma_{\alpha\delta}^2 + KR \sigma_{\alpha\delta b}^2 + IRJ \sigma_{\beta\delta}^2 + IR \sigma_{\beta\delta b}^2 + \\ + RJ \sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + R \sigma^2 \end{array} \right] .$$

Subtraindo $E[C]$, tem-se:

$$E[\text{SQExp}] = \left[\begin{array}{l} IK(R-1) \sigma_b^2 + IKJ(R-1) \sigma_\delta^2 + KJ(R-1) \sigma_{\alpha\delta}^2 + K(R-1) \sigma_{\alpha\delta b}^2 + IJ(R-1) \sigma_{\beta\delta}^2 + \\ + I(R-1) \sigma_{\beta\delta b}^2 + J(R-1) \sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + (R-1) \sigma^2 \end{array} \right]$$

Como:

$$QMExp = \frac{SQExp}{(R-1)} ,$$

tem-se:

$$E[QMExp] = \frac{E[SQExp]}{(R-1)} = \left[\begin{aligned} &IK\sigma_b^2 + IKJ\sigma_\delta^2 + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IJ\sigma_{\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + \\ &+ J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 \end{aligned} \right] .$$

c) Soma de quadrados de blocos dentro de experimentos

Desde que:

$$E[SQBlocos dentro Experimentos] = E\left[\frac{\sum_j B_{j/r}^2}{IK}\right] - E[C] - E[SQExperimentos] ,$$

onde:

$$B_{j/r} = \left[\begin{aligned} &IKb_{j/r} + IK\delta_r + K\sum_i (\alpha\delta)_i i_r + K\sum_i (\alpha\delta b)_i (ir)_j + I\sum_k (\beta\delta)_k kr + \\ &+ I\sum_k (\beta\delta b)_k (kr)_j + \sum_{ik} (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_{ik} e_{(ikr)_j} \end{aligned} \right] ,$$

virá:

$$E\left[\frac{\sum_j B_{j/r}^2}{IK}\right] = \left[\begin{aligned} &IKRJ\sigma_b^2 + IKRJ\sigma_\delta^2 + KRJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + KRJ\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IRJ\sigma_{\beta\delta}^2 + \\ &+ IRJ\sigma_{\beta\delta b}^2 + RJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + RJ\sigma^2 \end{aligned} \right] .$$

Subtraindo $E[C]$ e $E[SQExp]$, tem-se:

$$E[SQB1.d.Exp] = IKR(J-1)\sigma_b^2 + KR(J-1)\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IR(J-1)\sigma_{\beta\delta b}^2 + R(J-1)\sigma^2 .$$

$$QMB1.d.Exp = \frac{SQB1.d.Exp}{R(J-1)} ,$$

obteve-se:

$$E[QMB1.d.Exp] = \frac{E[SQB1.d.Exp]}{R(J-1)} = IK\sigma_b^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + \sigma^2 .$$

d) Soma de quadrados de tratamentos (B)

Dado que:

$$E[SQTrat(B)] = E\left[\frac{\sum_k T_k'^2}{IRJ}\right] - E[C] ,$$

onde, de modo análogo:

$$T_k' = \left[\begin{array}{l} I \sum_{rj} b_{j/r} + IJ \sum_r \delta_r + J \sum_{ir} (\alpha\delta)_{ir} + \sum_{irj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + IRJ\beta_k + \\ + IJ \sum_r (\beta\delta)_r + I \sum_{rj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + J \sum_{ir} (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_{irj} e_{(ikr)j} \end{array} \right] ,$$

então, virá:

$$E \left[\frac{\sum_k T_k'^2}{IRJ} \right] = \left[\begin{aligned} &IK\sigma_b^2 + IKJ\sigma_\delta^2 + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IRJ\sum_k \beta_k^2 + IKJ\sigma_{\beta\delta}^2 + \\ &+ IK\sigma_{\beta\delta b}^2 + KJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + K\sigma^2 \end{aligned} \right] .$$

Subtraindo $E [C]$, tem-se:

$$E[SQTrat(B)] = IRJ\sum_k \beta_k^2 + IJ(K-1)\sigma_{\beta\delta}^2 + I(K-1)\sigma_{\beta\delta b}^2 + J(K-1)\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + (K-1)\sigma^2$$

mas:

$$QMTrat(B) = \frac{SQTrat(B)}{(K-1)} ,$$

$$\therefore E[QMTrat(B)] = \frac{E[SQTrat(B)]}{(K-1)} = IRJ\phi_\beta + IJ\sigma_{\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2$$

onde:

$$\phi_\beta = \frac{\sum_k \beta_k^2}{(k-1)} .$$

e) Soma de quadrados da interação tratamento (A) x experimentos

Tomando:

$$E[SQTrat(A) \times Exp] = E\left[\frac{\sum_{ir} TE_{ir}^2}{KJ}\right] - E[C] - E[SQtrat(A)] - E[SQExp] ,$$

onde:

$$TE_{ir} = \left[\begin{array}{l} KJ\alpha_i + K\sum_j b_j/r + KJ\delta_r + KJ(\alpha\delta)_{ir} + K\sum_j (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \\ + J\sum_k (\beta\delta)_{kr} + \sum_{kj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + J\sum_k (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_{kj} e_{(ikr)j} \end{array} \right] ,$$

obteve-se:

$$E\left[\frac{\sum_{ir} TE_{ir}^2}{KJ}\right] = \left[\begin{array}{l} KRJ\sum_i \alpha_i^2 + IKR\sigma_b^2 + IKRJ\sigma_\delta^2 + IKRJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + IKR\sigma_{\alpha\delta b}^2 + \\ + IRJ\sigma_{\beta\delta}^2 + IR\sigma_{\beta\delta b}^2 + IRJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + IR\sigma^2 \end{array} \right] .$$

Subtraindo $E[C]$, $E[SQTrat(A)]$ e $E[SQExp]$, tem-se:

$$E[SQTrat(A) \times Exp] = \left[\begin{array}{l} KJ(I-1)(R-1)\sigma_{\alpha\delta}^2 + K(I-1)(R-1)\sigma_{\alpha\delta b}^2 + J(I-1)(R-1)\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \\ + (I-1)(R-1)\sigma^2 \end{array} \right] .$$

Como:

$$QMTrat(A) \times Exp = \frac{SQTrat(A) \times Exp}{(I-1)(R-1)} ,$$

tem-se:

91.

$$E[QMTrat(A) \times Exp] = \frac{E[SQTrat(A) \times Exp]}{(I-1)(R-1)} = KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2.$$

f) Soma de quadrados do resíduo (a)

Conforme já visto:

$$E[SQResíduo(a)] = \left\{ \begin{aligned} & E \left[\frac{\sum_{irj} TEB_{irj}^2}{K} \right] - E[C] - E[SQTrat(A)] - \\ & - E[SQB1.d.Exp] - E[SQExp] - E[SQTrat(A) \times Exp] \end{aligned} \right\},$$

onde:

$$TEB_{irj} = \left[\begin{aligned} & K\alpha_i + Kb_{j/r} + K\delta_r + K(\alpha\delta)_{ir} + K(\alpha\delta b)_{(ir)j} + \sum_k (\beta\delta)_{kr} + \\ & + \sum_k (\beta\delta b)_{(kr)j} + \sum_k (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_k e_{(ikr)j} \end{aligned} \right],$$

então:

$$E \left[\frac{\sum_{irj} TEB_{irj}^2}{K} \right] = \left[\begin{aligned} & KRJ\sum_i \alpha_i^2 + IKRJ\sigma_b^2 + IKRJ\sigma_\delta^2 + IKRJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + IKRJ\sigma_{\alpha\delta b}^2 + \\ & + IRJ\sigma_{\beta\delta}^2 + IRJ\sigma_{\beta\delta b}^2 + IRJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + IRJ\sigma^2 \end{aligned} \right].$$

Subtraindo $E[C]$, $E[SQTrat(A)]$, $E[SQB1.d.Exp]$,

$E[SQExp]$ e $E[SQTrat(A) \times Exp]$, tem-se:

$$E[SQRes(a)] = KR(I-1)(J-1)\sigma_{\alpha\delta b}^2 + R(I-1)(J-1)\sigma^2,$$

mas:

$$QMRes(a) = \frac{SQRes(a)}{R(I-1)(J-1)} ;$$

$$\therefore E[QMRes(a)] = \frac{E[SQRes(a)]}{R(I-1)(J-1)} = K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + \sigma^2$$

g) Soma de quadrados da interação tratamentos (B) x expe
rimentos

Conforme já visto:

$$E[SQTrat(B) \times Exp] = E\left[\frac{\sum_{kr} T'E_{kr}^2}{IJ}\right] - E[C] - E[SQTrat(B)] - E[SQExp] ,$$

onde:

$$T'E_{kr} = \left[\begin{array}{l} I\sum_j b_j/r + IJ\delta_r + J\sum_i (\alpha\delta)_{ir} + \sum_{ij} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + IJ\beta_k + IJ(\beta\delta)_{kr} + \\ + I\sum_j (\beta\delta b)_{(kr)j} + J\sum_i (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_{ij} e_{(ikr)j} \end{array} \right]$$

então:

$$E\left[\frac{\sum_{kr} T'E_{kr}^2}{IJ}\right] = \left[\begin{array}{l} IKR\sigma_b^2 + IKRJ\sigma_\delta^2 + KRJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + KR\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IRJ\sum_k \beta_k^2 + \\ + IKRJ\sigma_{\beta\delta}^2 + IKR\sigma_{\beta\delta b}^2 + KRJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + KR\sigma^2 \end{array} \right] .$$

Subtraindo $E[C]$, $E[SQTrat(B)]$ e $E[SQExp]$, tem-se:

$$E[SQTrat(B) \times Exp] = \left[IJ(K-1)(R-1)\sigma_{\beta\delta}^2 + I(K-1)(R-1)\sigma_{\beta\delta b}^2 + J(K-1)(R-1)\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + (K-1)(R-1)\sigma^2 \right] .$$

Como:

$$QMTrat(B) \times Exp = \frac{SQTrat(B) \times Exp}{(K-1)(R-1)} ,$$

tem-se:

$$E[QMTrat(B) \times Exp] = \frac{E[SQTrat(B) \times Exp]}{(K-1)(R-1)} = IJ\sigma_{\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 .$$

h) Soma de quadrados do resíduo (b)

Admitindo:

$$E[SQres(b)] = \left\{ E\left[\frac{\sum_{krj} T'EB_{krj}^2}{I} \right] - E[C] - E[SQTrat(B)] - E[SQBl.d.Exp] - \right. \\ \left. - E[SQExp] - E[SQtrat(B) \times Exp] \right\}$$

onde:

$$T'EB_{krj} = \left[Ib_{j/r} + I\delta_r + \sum_i (\alpha\delta)_{ir} + \sum_i (\alpha\delta b)_{(ir)j} + I\beta_k + I(\beta\delta)_{kr} + \right. \\ \left. + I(\beta\delta b)_{(kr)j} + \sum_i (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_i e_{(ikr)j} \right] ,$$

virá:

$$E \left[\frac{\sum_{krj} T' E B_{krj}^2}{I} \right] = \left[\begin{array}{l} IKRJ\sigma_b^2 + IKRJ\sigma_\delta^2 + KRJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + KRJ\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IRJ\sum_k \beta_k^2 + \\ + IKRJ\sigma_{\beta\delta}^2 + IKRJ\sigma_{\beta\delta b}^2 + KRJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + KRJ\sigma^2 \end{array} \right]$$

Subtraindo $E[C]$, $E[SQTrat(B)]$, $E[SQBl.d.Exp]$, $E[SQExp]$ e $E[SQTrat(B) \times Exp]$, tem-se:

$$E[SQRes(b)] = IR(K-1)(J-1)\sigma_{\beta\delta b}^2 + R(K-1)(J-1)\sigma^2,$$

mas:

$$QMRes(b) = \frac{SQRes(b)}{R(K-1)(J-1)};$$

$$\therefore E[QMRes(b)] = \frac{E[SQRes(b)]}{R(K-1)(J-1)} = I\sigma_{\beta\delta b}^2 + \sigma^2.$$

i) Soma de quadrados da interação tratamentos (A) x tratamentos (B)

Uma vez que:

$$E[SQTrat(A) \times Trat(B)] = E \left[\frac{\sum_{ik} TT_{ik}^2}{RJ} \right] - E[C] - E[SQTrat(A)] - E[SQTrat(B)],$$

onde:

$$TT'_{ik} = \left[\begin{array}{l} RJ\alpha_i + \sum_{rj} b_{j/r} + J\sum_r \delta_r + J\sum_r (\alpha\delta)_{ir} + \sum_{rj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + RJ\beta_k + \\ + J\sum_r (\beta\delta)_{kr} + \sum_{rj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + RJ(\alpha\beta)_{ik} + J\sum_r (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \\ + \sum_{rj} e_{(ikr)j} \end{array} \right] ;$$

∴ tem-se:

$$E \left[\frac{\sum_{ik} TT'^2_{ik}}{RJ} \right] = \left[\begin{array}{l} KRJ\sum_i \alpha_i^2 + IK\sigma_b^2 + IKJ\sigma_\delta^2 + IKJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + IK\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IRJ\sum_k \beta_k^2 + \\ + IKJ\sigma_{\beta\delta}^2 + IK\sigma_{\beta\delta b}^2 + RJ\sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2 + IKJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + IK\sigma^2 \end{array} \right] .$$

Subtraindo $E[C]$, $E[SQTrat(A)]$ e $E[SQTrat(B)]$, tem-se:

$$E[SQTrat(A) \times Trat(B)] = RJ \sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2 + J(I-1)(K-1)\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + (I-1)(K-1)\sigma^2 ,$$

mas,

$$QMTrat(A) \times Trat(B) = \frac{SQTrat(A) \times Trat(B)}{(I-1)(K-1)} ;$$

$$\therefore E[QMTrat(A) \times Trat(B)] = \frac{E[SQTrat(A) \times Trat(B)]}{(I-1)(K-1)} = RJ\phi_{\alpha\beta} + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 ,$$

onde:

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2}{(I-1)(K-1)} .$$

j) Soma de quadrados da interação tratamentos (A) x tratamentos (B) x experimentos

Partindo de:

$$E[SQTrat(A) \times Trat(B) \times Exp] = \left\{ \begin{aligned} & E \left[\frac{\sum TT'E_{ikr}^2}{J} \right] - E[C] - E[SQTrat(A)] - \\ & - E[SQTrat(B)] - E[SQExp] - E[SQTrat(A) \times Trat(B)] - \\ & - E[SQTrat(A) \times Exp] - E[SQTrat(B) \times Exp] \end{aligned} \right\} ,$$

onde:

$$TT'E_{ikr} = \left[\begin{aligned} & J\alpha_i + \sum_j b_{j/r} + J\delta_r + J(\alpha\delta)_{ir} + \sum_j (\alpha\delta b)_{(ir)j} + J\beta_k + J(\beta\delta)_{kr} + \\ & + \sum_j (\beta\delta b)_{(kr)j} + J(\alpha\beta)_{ik} + J(\alpha\beta\delta)_{ikr} + \sum_j e_{(ikr)j} \end{aligned} \right] ,$$

obteve-se

$$E \left[\frac{\sum TT'E_{ikr}^2}{J} \right] = \left[\begin{aligned} & KRJ \sum_i \alpha_i^2 + IKR\sigma_b^2 + IKRJ\sigma_\delta^2 + IKRJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + IKR\sigma_{\alpha\delta b}^2 + \\ & + IRJ \sum_k \beta_k^2 + IKRJ\sigma_{\beta\delta}^2 + IKR\sigma_{\beta\delta b}^2 + RJ \sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2 + \\ & + IKRJ\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + IKR\sigma^2 \end{aligned} \right] .$$

Analogamente aos casos anteriores, ou seja, subtraindo
 $E[C]$, $E[SQTrat(A)]$, $E[SQTrat(B)]$, $E[SQExp]$, $E[SQTrat(A) \times Trat(B)]$,
 $E[SQTrat(A) \times Exp]$ e $E[SQTrat(B) \times Exp]$, tem-se:

$$E[SQTrat(A) \times Trat(B) \times Exp] = J(I-1)(K-1)(R-1)\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + (I-1)(K-1)(R-1)\sigma^2 .$$

Como:

$$QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp = \frac{SQTrat(A) \times Trat(B) \times Exp}{(I-1)(K-1)(R-1)} ;$$

$$\therefore E[QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp] = \frac{E[SQTrat(A) \times Trat(B) \times Exp]}{(I-1)(K-1)(R-1)} = J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 .$$

k) Soma de quadrados do resíduo (c)

Admitindo que:

$$E[SQRes(c)] = \left\{ \begin{array}{l} E\left[\sum_{ikrj} Y_{ikrj}^2\right] - E[C] - E[SQTrat(A)] - E[SQB1.d.Exp] - \\ - E[SQRes(a)] - E[SQExp] - E[SQTrat(A) \times Exp] - \\ - E[SQTrat(B)] - E[SQTrat(B) \times Exp] - E[SQRes(b)] - \\ - E[SQTrat(A) \times Trat(B)] - E[SQTrat(A) \times Trat(B) \times Exp] \end{array} \right\}$$

onde Y_{ikrj} foi dado anteriormente, portanto:

$$E \left[\sum_{ikrj} Y_{ikrj}^2 \right] = \left[\begin{array}{l} KRJ \sum_i \alpha_i^2 + IKRJ \sigma_b^2 + IKRJ \sigma_\delta^2 + IKRJ \sigma_{\alpha\delta}^2 + IKRJ \sigma_{\alpha\delta b}^2 + \\ + IRJ \sum_k \beta_k^2 + IKRJ \sigma_{\beta\delta}^2 + IKRJ \sigma_{\beta\delta b}^2 + RJ \sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2 + \\ + IKRJ \sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + IKRJ \sigma^2 \end{array} \right] .$$

Subtraindo as esperanças matemáticas das demais somas de quadrados, já obtidas, além da correção, tem-se:

$$E[SQRes(c)] = R(I-1)(K-1)(J-1)\sigma^2 ,$$

mas:

$$QMRes(c) = \frac{SQRes(c)}{R(I-1)(K-1)(J-1)} ;$$

$$\therefore E[QMRes(c)] = \frac{E[SQRes(c)]}{R(I-1)(K-1)(J-1)} = \sigma^2 .$$

3.2.2.4. Testes de hipóteses

Baseados nas esperanças dos quadrados médios apresentadas no Quadro 13.

Quadro 13. Esquema da análise de variância e esperanças matemáticas dos quadrados médios para um grupo de R ensaios em faixas

Causas de variação	G.L.	E (QM)
Blocos dentro de Experimentos	R(J-1)	$\sigma^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IK\sigma_b^2$
Experimentos	(R-1)	$\sigma^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + LJ\sigma_{\beta\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + IKJ\sigma_{\delta}^2 + IK\sigma_b^2$
Tratamentos (A)	(I-1)	$\sigma^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + KRJ\sigma_{\alpha}^2$
Trat. (A) x Experimentos	(I-1) (R-1)	$\sigma^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2$
Resíduo (a)	R(I-1) (J-1)	$\sigma^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2$
Tratamentos (B)	(K-1)	$\sigma^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + LJ\sigma_{\beta\delta}^2 + IRJ\sigma_{\beta}^2$
Trat. (B) x Experimentos	(K-1) (R-1)	$\sigma^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + LJ\sigma_{\beta\delta}^2$
Resíduo (b)	R(K-1) (J-1)	$\sigma^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2$
Trat. (A) x Trat. (B)	(I-1) (K-1)	$\sigma^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + RJ\sigma_{\alpha\beta}^2$
Trat. (A) x Trat. (B) x Experimentos	(I-1) (K-1) (R-1)	$\sigma^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2$
Resíduo (c)	R(I-1) (K-1) (J-1)	σ^2
Total	IKRJ-1	-

onde:

$$\phi_{\alpha} = \frac{\sum_i \alpha_i^2}{(I-1)} ; \quad \phi_{\beta} = \frac{\sum_k \beta_k^2}{(K-1)} \quad e \quad \phi_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{ik} (\alpha\beta)_{ik}^2}{(I-1)(K-1)}$$

e considerando as hipóteses:

$H_0(1): \alpha_i = 0 \Rightarrow$ associada à Tratamento (A);

$H_0(2): \beta_k = 0 \Rightarrow$ associada à Tratamento (B);

$H_0(3): \delta_r = 0 \Rightarrow$ associada à Experimento;

$H_0(4): (\alpha\beta)_{ik} = 0 \Rightarrow$ associada à interação Tratamento (A) x Tratamento (B);

$H_0(5): (\alpha\delta)_{ir} = 0 \Rightarrow$ associada à interação Tratamento (A) x Experimento;

$H_0(6): (\beta\delta)_{kr} = 0 \Rightarrow$ associada à interação Tratamento (B) x Experimento;

$H_0(7): (\alpha\beta\delta)_{ikr} = 0 \Rightarrow$ associada à interação Trat (A) x Trat (B) x Experimento;

foi possível estruturar os testes de hipóteses, conforme consta do Quadro 14.

Quadro 14. Critérios para os testes de hipóteses.

Hipóteses	G.L.	F
$H_0(1)$	$(I-1); (I-1) (R-1)$	$QM_{Trat(A)} / QM_{Trat(A) \times Exp}$
$H_0(2)$	$(K-1); (K-1) (R-1)$	$QM_{Trat(B)} / QM_{Trat(B) \times Exp}$
$H_0(3)$	$n_1; n_2$	$[QM_{Exp} + QM_{Res(a)} + QM_{Res(b)} + QM_{Trat(A) \times Trat(B) \times Exp}] / [QM_{Trat(A) \times Exp} + QM_{Trat(B) \times Exp} + QM_{B1.G. Exp} + QM_{Res(c)}]$
$H_0(4)$	$(I-1) (K-1); (I-1) (K-1) (R-1)$	$QM_{Trat(A) \times Trat(B)} / QM_{Trat(A) \times Trat(B) \times Exp}$
$H_0(5)$	$n_3; n_4$	$[QM_{Trat(A) \times Exp} + QM_{Res(c)}] / [QM_{Res(a)} + QM_{Trat(A) \times Trat(B) \times Exp}]$
$H_0(6)$	$n_5; n_6$	$[QM_{Trat(B) \times Exp} + QM_{Res(c)}] / [QM_{Res(b)} + QM_{Trat(A) \times Trat(B) \times Exp}]$
$H_0(7)$	$(I-1) (K-1) (R-1); R(I-1) (K-1) (J-1)$	$QM_{Trat(A) \times Trat(B) \times Exp} / QM_{Res(c)}$

Onde, por SATTERTHWAITE (1946):

$$n_1 = \frac{[QME_{\text{Exp}} + QMRes(a) + QMRes(b) + QMTrat(A) \times Trat(B) \times \text{Exp}]^2}{\frac{[QME_{\text{Exp}}]^2}{(R-1)} + \frac{[QMRes(a)]^2}{R(I-1)(J-1)} + \frac{[QMRes(b)]^2}{R(K-1)(J-1)} + \frac{[QMTrat(A) \times Trat(B) \times \text{Exp}]^2}{(I-1)(K-1)(R-1)}}; \quad ;$$

$$n_2 = \frac{[QMTrat(A) \times \text{Exp} + QMTrat(B) \times \text{Exp} + QMB1.d. \text{Exp} + QMRes(c)]^2}{\frac{[QMTrat(A) \times \text{Exp}]^2}{(I-1)(R-1)} + \frac{[QMTrat(B) \times \text{Exp}]^2}{(K-1)(R-1)} + \frac{[QMB1.d. \text{Exp}]^2}{R(J-1)} + \frac{[QMRes(c)]^2}{R(I-1)(K-1)(J-1)}}; \quad ;$$

$$n_3 = \frac{[QMTrat(A) \times \text{Exp} + QMRes(c)]^2}{\frac{[QMTrat(A) \times \text{Exp}]^2}{(I-1)(R-1)} + \frac{[QMRes(c)]^2}{R(I-1)(K-1)(J-1)}}; \quad ;$$

$$n_4 = \frac{[QMRes(a) + QMTrat(A) \times Trat(B) \times \text{Exp}]^2}{\frac{[QMRes(a)]^2}{R(I-1)(J-1)} + \frac{[QMTrat(A) \times Trat(B) \times \text{Exp}]^2}{(I-1)(K-1)(R-1)}}; \quad ;$$

$$n_5 = \frac{[QMTrat(B) \times \text{Exp} + QMRes(c)]^2}{\frac{[QMTrat(B) \times \text{Exp}]^2}{(K-1)(R-1)} + \frac{[QMRes(c)]^2}{R(I-1)(K-1)(J-1)}}; \quad ;$$

$$n_6 = \frac{[QMRes(b) + QMTrat(A) \times Trat(B) \times \text{Exp}]^2}{\frac{[QMRes(b)]^2}{R(K-1)(J-1)} + \frac{[QMTrat(A) \times Trat(B) \times \text{Exp}]^2}{(I-1)(K-1)(R-1)}}.$$

3.2.2.5. Variâncias de contrastes entre médias

Com procedimento análogo aos das análises individuais, obtiveram-se os estimadores das variâncias das estimativas

dos contrastes de interesse:

3.2.2.5.1. Entre duas médias de tratamentos (A)

Considerando:

$$\hat{Y}_i = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$$

e dado que $T_i = \sum_{krj} Y_{ikrj}$, tem-se, aplicando as restrições referidas anteriormente:

$$\hat{m}_i = \frac{T_i}{KRJ} = \left\{ \begin{aligned} &\alpha_i + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} b_{j/r} + \frac{1}{R} \sum_r \delta_r + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\delta)_{ir} + \\ &+ \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \frac{1}{KR} \sum_{kr} (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{KRJ} \sum_{krj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + \\ &+ \frac{1}{KR} \sum_{kr} (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \frac{1}{KRJ} \sum_{krj} e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\} .$$

Por analogia:

$$\hat{m}_{i'} = \frac{T_{i'}}{KRJ} = \left\{ \begin{aligned} &\alpha_{i'} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} b_{j/r} + \frac{1}{R} \sum_r \delta_r + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\delta)_{i'r} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\alpha\delta b)_{(i'r)j} + \\ &+ \frac{1}{KR} \sum_{kr} (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{KRJ} \sum_{krj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + \frac{1}{KR} \sum_{kr} (\alpha\beta\delta)_{i'kr} + \\ &+ \frac{1}{KRJ} \sum_{krj} e_{(i'kr)j} \end{aligned} \right\} ,$$

portanto

$$\hat{Y}_i = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i - \alpha_{i'} + \frac{1}{R} \sum_r [(\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{i'r}] + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(i'r)j}] + \\ & + \frac{1}{KR} \sum_{kr} [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - (\alpha\beta\delta)_{i'kr}] + \frac{1}{KRJ} \sum_{krj} [e_{(ikr)j} - e_{(i'kr)j}] \end{aligned} \right\} .$$

Por definição $V(\hat{Y}_i) = E \left[\hat{Y}_i - E(\hat{Y}_i) \right]^2$

e ainda $E(\hat{Y}_i) = \alpha_i - \alpha_{i'} .$

Por substituição, obteve-se a variância:

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{2}{KRJ} \left[KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 \right] ,$$

logo, seu estimador será:

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{KRJ} \left[QMTrat(A) \times Exp \right] .$$

3.2.2.5.2. Entre duas médias de tratamentos (B)

Seja:

$$\hat{Y}_k = \hat{m}_k - \hat{m}_{k'} ,$$

e dado que $T_{k'} = \sum_{irj} Y_{ikrj}$, tem-se de maneira análoga $\hat{m}_k = \frac{T'_k}{IRJ}$ e

$$\hat{m}_{k'} = \frac{T_{k'}}{IRJ}, \text{ ou seja:}$$

$$\hat{m}_k = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{RJ} \sum_{rj} b_{j/r} + \frac{1}{R} \sum_r \delta_r + \frac{1}{IR} \sum_{ir} (\alpha\delta)_{ir} + \frac{1}{IRJ} \sum_{irj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \\ & + \beta_k + \frac{1}{R} \sum_r (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + \frac{1}{IR} \sum_{ir} (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \\ & + \frac{1}{IRJ} \sum_{irj} e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\}$$

e

$$\hat{m}_{k'} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{RJ} \sum_{rj} b_{j/r} + \frac{1}{R} \sum_r \delta_r + \frac{1}{IR} \sum_{ir} (\alpha\delta)_{ir} + \frac{1}{IRJ} \sum_{irj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \\ & + \beta_{k'} + \frac{1}{R} \sum_r (\beta\delta)_{k'r} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\beta\delta b)_{(k'r)j} + \frac{1}{IR} \sum_{ir} (\alpha\beta\delta)_{ik'r} + \\ & + \frac{1}{IRJ} \sum_{irj} e_{(ik'r)j} \end{aligned} \right\};$$

então:

$$\hat{y}_k = \left\{ \begin{aligned} & \beta_k - \beta_{k'} + \frac{1}{R} \sum_r [(\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{k'r}] + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [(\beta\delta b)_{(kr)j} - \\ & - (\beta\delta b)_{(k'r)j}] + \frac{1}{IR} \sum_{ir} [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - (\alpha\beta\delta)_{ik'r}] + \frac{1}{IRJ} \sum_{irj} [e_{(ikr)j} - e_{(ik'r)j}] \end{aligned} \right\}$$

Como $V(\hat{Y}_k) = E[\hat{Y}_k - E(\hat{Y}_k)]^2$ e $E(\hat{Y}_k) = \beta_k - \beta_{k'}$,

obteve-se: $V(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IRJ} [IJ\sigma_{\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2]$,

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IRJ} [QMTreat(B) \times Exp] .$$

3.2.2.5.3. Entre duas médias de experimentos

Dado:

$$\hat{Y}_r = \hat{m}_r - \hat{m}_{r'},$$

sendo que $E_r = \sum_{ikj} Y_{ikrj}$, tem-se $\hat{m}_r = \frac{E_r}{IKJ}$ e $\hat{m}_{r'} = \frac{E_{r'}}{IKJ}$ dadas

por:

$$\hat{m}_r = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r} + \delta_r + \frac{1}{I} \sum_i (\alpha\delta)_{ir} + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \\ & + \frac{1}{K} \sum_k (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + \frac{1}{IK} \sum_{ik} (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \\ & + \frac{1}{IKJ} \sum_{ikj} e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\}$$

e

$$\hat{m}_{r'} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + \frac{1}{I} \sum_i (\alpha\delta)_{ir'} + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (\alpha\delta b)_{(ir')j} + \\ & + \frac{1}{K} \sum_k (\beta\delta)_{kr'} + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} (\beta\delta b)_{(kr')j} + \frac{1}{IK} \sum_{ik} (\alpha\beta\delta)_{ikr'} + \\ & + \frac{1}{IKJ} \sum_{ikj} e_{(ikr')j} \end{aligned} \right\} ,$$

então, tem-se:

$$\hat{Y}_r = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + \frac{1}{I} \sum_i [(\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{ir'}] + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(ir')j}] + \frac{1}{K} \sum_k [(\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{kr'}] + \\ & + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} [(\beta\delta b)_{(kr)j} - (\beta\delta b)_{(kr')j}] + \frac{1}{IK} \sum_{ik} [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - \\ & - (\alpha\beta\delta)_{ikr'}] + \frac{1}{IKJ} \sum_{ikj} [e_{(ikr)j} - e_{(ikr')j}] \end{aligned} \right\} .$$

$$\text{Por definição: } V(\hat{Y}_r) = E[\hat{Y}_r - E(\hat{Y}_r)]^2 ,$$

$$\text{mas: } E(\hat{Y}_r) = 0 .$$

Portanto:

$$V(\hat{Y}_r) = \frac{2}{IKJ} [IK\sigma_b^2 + IKJ\sigma_\delta^2 + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + IJ\sigma_{\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2]$$

e seu estimador, será:

$$\hat{V}(\hat{Y}_r) = \frac{2}{IKJ} [QME_{\text{Exp}}] \quad .$$

3.2.2.5.4. Entre duas médias de tratamentos(A), num mesmo nível de (B)

Como:

$$\hat{Y}_{i/k} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i'k}$$

é dado que $TT'_{ik} = \sum_{rj} Y_{ikrj}$, tem-se $\hat{m}_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{RJ}$ e de modo análogo

$$\hat{m}_{i'k} = \frac{TT'_{i'k}}{RJ}, \text{ ou seja:}$$

$$\hat{m}_{ik} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} b_{j/r} + \frac{1}{R} \sum_r \delta_r + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\delta)_{ir} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \\ & + \beta_k + \frac{1}{R} \sum_r (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + (\alpha\beta)_{ik} + \\ & + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\}$$

e

$$\hat{m}_{i'k} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_{i'} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} b_{j/r} + \frac{1}{R} \sum_r \delta_r + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\delta)_{i'r} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\alpha\delta b)_{(i'r)j} + \\ & + \beta_k + \frac{1}{R} \sum_r (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + (\alpha\beta)_{i'k} + \\ & + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\beta\delta)_{i'kr} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} e_{(i'kr)j} \end{aligned} \right\} ,$$

então tem-se

$$\hat{Y}_{i/k} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i - \alpha_{i'} + \frac{1}{R} \sum_r [(\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{i'r}] + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - \\ & - (\alpha\delta b)_{(i'r)j}] + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{i'k} + \frac{1}{R} \sum_r [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - \\ & - (\alpha\beta\delta)_{i'kr}] + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [e_{(ikr)j} - e_{(i'kr)j}] \end{aligned} \right\} .$$

$$\text{Por definição: } V(\hat{Y}_{i/k}) = E[\hat{Y}_{i/k} - E(\hat{Y}_{i/k})]^2 ,$$

$$\text{mas: } E(\hat{Y}_{i/k}) = \alpha_i - \alpha_{i'} + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{i'k} ;$$

$$\text{portanto: } V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{RJ} [J\sigma_{\alpha\delta}^2 + \sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{RJ} \left[\frac{QMTrat(A) \times \text{Exp} + (K-1) QMTrat(A) \times \text{Trat}(B) \times \text{Exp}}{K} \right] .$$

3.2.2.5.5. Entre duas médias de tratamentos (B), num mesmo nível de (A)

Considerando:

$$\hat{Y}_{k/i} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{ik'}$$

e conforme o valor de $\hat{m}_{ik}$ dado no item anterior e:

$$\hat{m}_{ik'} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} b_{j/r} + \frac{1}{R} \sum_r \delta_r + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\delta)_{ir} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \beta_{k'} + \\ & + \frac{1}{R} \sum_r (\beta\delta)_{k'r} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\beta\delta b)_{(k'r)j} + (\alpha\beta)_{ik'} + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\beta\delta)_{ik'r} + \\ & + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} e_{(ik'r)j} \end{aligned} \right\} ,$$

tem-se:

$$\hat{Y}_{k/i} = \left\{ \begin{aligned} & \beta_k - \beta_{k'} + \frac{1}{R} \sum_r [(\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{k'r}] + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [(\beta\delta b)_{(kr)j} - \\ & - (\beta\delta b)_{(k'r)j}] + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{ik'} + \frac{1}{R} \sum_r [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - \\ & - (\alpha\beta\delta)_{ik'r}] + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [e_{(ikr)j} - e_{(ik'r)j}] \end{aligned} \right\} .$$

Analogamente, por definição:

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = E[\hat{Y}_{k/i} - E(\hat{Y}_{k/i})]^2$$

$$\text{e ainda: } E(\hat{Y}_{k/i}) = \beta_k - \beta_{k'} + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{ik'} .$$

Portanto:

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{RJ} \left[J\sigma_{\beta\delta}^2 + \sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 \right]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{RJ} \left[\frac{QMTrat(B) \times Exp + (I-1) QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp}{I} \right] .$$

3.2.2.5.6. Entre duas médias de experimentos num mesmo nível de (A)

Partindo de:

$$\hat{Y}_{r/i} = \hat{m}_{ir} - \hat{m}_{ir'}$$

e sendo $TE_{ir} = \sum_{kj} Y_{ikrj}$, tem-se $\hat{m}_{ir} = \frac{TE_{ir}}{KJ}$ e $\hat{m}_{ir'} = \frac{TE_{ir'}}{KJ}$ da-

das por:

$$\hat{m}_{ir} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r} + \delta_r + (\alpha\delta)_{ir} + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \\ & + \frac{1}{K} \sum_k (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} (\beta\delta b)_{(kr)j} + \frac{1}{K} \sum_k (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \\ & + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\}$$

e

$$\hat{m}_{ir'} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir'} + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\delta b)_{(ir')j} + \\ & + \frac{1}{K} \sum_k (\beta\delta)_{kr'} + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} (\beta\delta b)_{(kr')j} + \frac{1}{K} \sum_k (\alpha\beta\delta)_{ikr'} + \\ & + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} e_{(ikr')j} \end{aligned} \right\} ,$$

então, tem-se:

$$\hat{Y}_{r/i} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{ir'} + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(ir')j}] + \frac{1}{K} \sum_k [(\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{kr'}] + \\ & + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} [(\beta\delta b)_{(kr)j} - (\beta\delta b)_{(kr')j}] + \frac{1}{K} \sum_k [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - \\ & - (\alpha\beta\delta)_{ikr'}] + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} [e_{(ikr)j} - e_{(ikr')j}] \end{aligned} \right\} .$$

$$\text{Como: } V(\hat{Y}_{r/i}) = E[\hat{Y}_{r/i} - E(\hat{Y}_{r/i})]^2 \quad \text{e} \quad E(\hat{Y}_{r/i}) = 0 ,$$

então:

$$V(\hat{Y}_{r/i}) = \frac{2}{KJ} \left[K\sigma_b^2 + KJ\sigma_\delta^2 + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\beta\delta}^2 + \sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 \right]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{r/i}) = \frac{2}{KJ} \left[\frac{QMExp + (I-1) QMTrat(A) \times Exp}{I} \right] .$$

3.2.2.5.7. Entre duas médias de experimentos num mesmo nível de (B)

Como:

$$\hat{Y}_{r/k} = \hat{m}_{kr} - \hat{m}_{kr'}$$

$$\text{e dado que } T'E_{kr} = \sum_{ij} Y_{ikrj}, \text{ tem-se } \hat{m}_{kr} = \frac{T'E_{kr}}{IJ} \text{ e } \hat{m}_{kr'} = \frac{T'E_{kr'}}{IJ}$$

dadas por:

$$\hat{m}_{kr} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r} + \delta_r + \frac{1}{I} \sum_i (\alpha\delta)_{ir} + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \beta_k + \\ + (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta\delta b)_{(kr)j} + \frac{1}{I} \sum_i (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} e_{(ikr)j} \end{array} \right\}$$

e

$$\hat{m}_{kr'} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + \frac{1}{I} \sum_i (\alpha\delta)_{ir'} + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (\alpha\delta b)_{(ir')j} + \\ + \beta_k + (\beta\delta)_{kr'} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta\delta b)_{(kr')j} + \frac{1}{I} \sum_i (\alpha\beta\delta)_{ikr'} + \\ + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} e_{(ikr')j} \end{array} \right\} .$$

Então:

$$\hat{Y}_{r/k} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + \frac{1}{I} \sum_i [(\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{ir'}] + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(ir')j}] + (\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{kr'} + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j [(\beta\delta b)_{(kr)j} - (\beta\delta b)_{(kr')j}] + \frac{1}{I} \sum_i [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - \\ & - (\alpha\beta\delta)_{ikr'}] + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} [e_{(ikr)j} - e_{(ikr')j}] \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Como: } V(\hat{Y}_{r/k}) = E[\hat{Y}_{r/k} - E(\hat{Y}_{r/k})]^2 \text{ e } E(\hat{Y}_{r/k}) = 0,$$

tem-se:

$$V(\hat{Y}_{r/k}) = \frac{2}{IJ} [I\sigma_b^2 + IJ\sigma_\delta^2 + J\sigma_{\alpha\delta}^2 + \sigma_{\alpha\delta b}^2 + IJ\sigma_{\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{r/k}) = \frac{2}{IJ} \left[\frac{QME_{\text{Exp}} + (K-1) \cdot QMT_{\text{Trat}}(B) \cdot x_{\text{Exp}}}{K} \right]$$

3.2.2.5.8. Entre duas médias de experimentos, num mesmo nível de (A) e num mesmo nível de (B)

Sendo:

$$\bar{Y}_{r/ik} = \hat{m}_{ikr} - \hat{m}_{ikr'}$$

e dado que $TT'E = \sum_j Y_{ikrj}$, tem-se $\hat{m}_{ikr} = \frac{TT'E_{ikr}}{J}$ e

$$\hat{m}_{ikr'} = \frac{TT'E_{ikr'}}{J} \quad \text{ou ainda:}$$

$$\hat{m}_{ikr} = \left\{ \begin{aligned} &\alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r} + \delta_r + (\alpha\delta)_{ir} + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\delta b)_{(ir)j} + \beta_k + \\ &+ (\beta\delta)_{kr} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta\delta b)_{(kr)j} + (\alpha\beta)_{ik} + (\alpha\beta\delta)_{ikr} + \frac{1}{J} \sum_j e_{(ikr)j} \end{aligned} \right\}$$

e

$$\hat{m}_{ikr'} = \left\{ \begin{aligned} &\alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir'} + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\delta b)_{(ir')j} + \beta_k + \\ &+ (\beta\delta)_{kr'} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta\delta b)_{(kr')j} + (\alpha\beta)_{ik} + (\alpha\beta\delta)_{ikr'} + \\ &+ \frac{1}{J} \sum_j e_{(ikr')j} \end{aligned} \right\}$$

Portanto:

$$\hat{Y}_{r/ik} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{ir'} + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(ir')j}] + (\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{kr'} + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j [(\beta\delta b)_{(kr)j} - (\beta\delta b)_{(kr')j}] + (\alpha\beta\delta)_{ikr} - (\alpha\beta\delta)_{ikr'} + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j [e_{(ikr)j} - e_{(ikr')j}] \end{aligned} \right\}$$

mas por definição: $V(\hat{Y}_{r/ik}) = E[\hat{Y}_{r/ik} - E(\hat{Y}_{r/ik})]^2$,

e como $E(\hat{Y}_{r/ik}) = 0$, tem-se:

$$V(\hat{Y}_{r/ik}) = \frac{2}{J} [\alpha_b^2 + J\alpha_\delta^2 + J\alpha_{\alpha\delta}^2 + \sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\beta\delta}^2 + J\alpha_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma_{\beta\delta b}^2 + \sigma^2]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{r/ik}) = \frac{2}{IKJ} \left[\begin{aligned} & QMExp + (I-1)QMTrat(A)xExp + (K-1)QMTrat(B)xExp + \\ & + (I-1)(K-1)QMTrat(A)xTrat(B)xExp \end{aligned} \right]$$

3.2.2.5.9. Entre duas médias de tratamentos(A) em diferentes níveis de (B)

Seja:

$$\hat{y}_{ik} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i'k'}$$

e conforme $\hat{m}_{ik}$ apresentada no item 3.2.2.5.4. e

$$\hat{m}_{i'k'} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_{i'} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} b_{j/r} + \frac{1}{R} \sum_r \delta_r + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\delta)_{i'r} + \\ & + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\alpha\delta b)_{(i'r)j} + \beta_{k'} + \frac{1}{R} \sum_r (\beta\delta)_{k'r} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} (\beta\delta b)_{(k'r)j} + \\ & + (\alpha\beta)_{i'k'} + \frac{1}{R} \sum_r (\alpha\beta\delta)_{i'k'r} + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} e_{(i'k'r)j} \end{aligned} \right\}$$

tem-se:

$$\hat{y}_{ik} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i - \alpha_{i'} + \frac{1}{R} \sum_r [(\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{i'r}] + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - \\ & - (\alpha\delta b)_{(i'r)j}] + \beta_k - \beta_{k'} + \frac{1}{R} \sum_r [(\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{k'r}] + \\ & + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [(\beta\delta b)_{(kr)j} - (\beta\delta b)_{(k'r)j}] + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{i'k'} + \\ & + \frac{1}{R} \sum_r [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - (\alpha\beta\delta)_{i'k'r}] + \frac{1}{RJ} \sum_{rj} [e_{(ikr)j} - e_{(i'k'r)j}] \end{aligned} \right\}$$

Como, por definição: $V(\hat{Y}_{ik}) = E[\hat{Y}_{ik} - E(\hat{Y}_{ik})]^2$

e ainda: $E(\hat{Y}_{ik}) = \alpha_i - \alpha_{i'} + \beta_k - \beta_{k'} + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{i'k'}$,

tem-se:

$$V(\hat{Y}_{ik}) = \frac{2}{RJ} \left[J\sigma_{\alpha\delta}^2 + \sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\beta\delta}^2 + \sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 \right]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{ik}) = \frac{2}{IKRJ} \left[I \text{ QMTrat}(A) \times \text{Exp} + K \text{ QMTrat}(B) \times \text{Exp} + \right. \\ \left. + (I-1)(K-1) \text{ QMTrat}(A) \times \text{Trat}(B) \times \text{Exp} \right]$$

3.2.2.5.10. Entre duas médias de tratamentos (A) em diferentes experimentos

Partindo de:

$$\hat{Y}_{ir} = \hat{m}_{ir} - \hat{m}_{i'r'}$$

analogamente ao item 3.2.2.5.6. para $\hat{m}_{ir}$ e com:

$$\hat{m}_{i'r'} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{i'r} + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\delta b)_{(i'r')j} + \\ & + \frac{1}{K} \sum_k (\beta\delta)_{kr'} + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} (\beta\delta b)_{(kr')j} + \frac{1}{K} \sum_k (\alpha\beta\delta)_{i'kr'} + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} e_{(i'kr')j} \end{aligned} \right\}$$

tem-se:

$$\hat{Y}_{ir} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i - \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir} - \\ & - (\alpha\delta)_{i'r'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(i'r')j}] + \\ & + \frac{1}{K} \sum_k [(\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{kr'}] + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} [(\beta\delta b)_{(kr)j} - \\ & - (\beta\delta b)_{(kr')j}] + \frac{1}{K} \sum_k [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - (\alpha\beta\delta)_{i'kr'}] + \\ & + \frac{1}{KJ} \sum_{kj} [e_{(ikr)j} - e_{(i'kr')j}] \end{aligned} \right\} .$$

Por definição $V(\hat{Y}_{ir}) = E[\hat{Y}_{ir} - E(\hat{Y}_{ir})]^2$ e

como: $E(\hat{Y}_{ir}) = \alpha_i - \alpha_{i'}$, tem-se:

$$V(\hat{Y}_{ir}) = \frac{2}{KJ} [K\sigma_b^2 + KJ\sigma_\delta^2 + KJ\sigma_{\alpha\delta}^2 + K\sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\beta\delta}^2 + \sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2]$$

e seu estimador:

$$V(\hat{Y}_{ir}) = \frac{2}{KJ} \left[\frac{QMExp + (I-1)QMTrat(A) \times Exp}{I} \right] .$$

3.2.2.5.11. Entre duas médias de tratamentos(B) em diferentes experimentos

Como:

$$\hat{Y}_{kr} = \hat{m}_{kr} - \hat{m}_{k'r'} \quad ,$$

conforme o item 3.2.2.5.7. para $\hat{m}_{kr}$ e

$$\hat{m}_{k'r'} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + \frac{1}{I} \sum_i (\alpha\delta)_{ir'} + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} (\alpha\delta b)_{(ir')j} + \\ & + \beta_{k'} + (\beta\delta)_{k'r'} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta\delta b)_{(k'r')j} + \frac{1}{I} \sum_i (\alpha\beta\delta)_{ik'r'} + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} e_{(ik'r')j} \end{aligned} \right\} \quad ,$$

tem-se:

$$\hat{Y}_{kr} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + \frac{1}{I} \sum_i [(\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{ir'}] + \\ & + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(ir')j}] + \beta_k - \beta_{k'} + (\beta\delta)_{kr} - \\ & - (\beta\delta)_{k'r'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\beta\delta b)_{(kr)j} - (\beta\delta b)_{(k'r')j}] + \\ & + \frac{1}{I} \sum_i [(\alpha\beta\delta)_{ikr} - (\alpha\beta\delta)_{ik'r'}] + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} [e_{(ikr)j} - e_{(ik'r')j}] \end{aligned} \right\}$$

Mas, por definição: $V(\hat{Y}_{kr}) = E[\hat{Y}_{kr} - E(\hat{Y}_{kr})]^2$

e ainda: $E(\hat{Y}_{kr}) = \beta_k - \beta_{k'}$.

Portanto:

$$V(\hat{Y}_{kr}) = \frac{2}{IJ} \left[I\sigma_b^2 + IJ\sigma_\delta^2 + J\sigma_{\alpha\delta}^2 + \sigma_{\alpha\delta b}^2 + IJ\sigma_{\beta\delta}^2 + I\sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 \right]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{kr}) = \frac{2}{IJ} \left[\frac{QMExp + (K-1)QMTrat(B)xExp}{K} \right] .$$

3.2.2.5.12. Entre duas médias de tratamentos(A), num mesmo nível de (B) em diferentes experimentos

Seja:

$$\hat{Y}_{ir/k} = \hat{m}_{ikr} - \hat{m}_{i'kr} ,$$

conforme o item 3.2.2.5.8. para $\hat{m}_{ikr}$ e

$$\hat{m}_{i'kr'} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{i'r'} + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\delta b)_{(i'r')j} + \\ & + \beta_k + (\beta\delta)_{kr'} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta\delta b)_{(kr')j} + (\alpha\beta)_{i'k} + (\alpha\beta\delta)_{i'kr'} + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j e_{(i'kr')j} \end{aligned} \right\} ,$$

tem-se:

$$\hat{Y}_{ir/k} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i - \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir} - \\ & - (\alpha\delta)_{i'r'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(i'r')j}] + \beta\delta_{kr} - \\ & - \beta\delta_{kr'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\beta\delta b)_{(kr)j} - (\beta\delta b)_{(kr')j}] + (\alpha\beta)_{ik} - \\ & - (\alpha\beta)_{i'k} + (\alpha\beta\delta)_{ikr} - (\alpha\beta\delta)_{i'kr'} + \frac{1}{J} \sum_j [e_{(ikr)j} - \\ & - e_{(i'kr')j}] \end{aligned} \right\} .$$

Por definição: $V(\hat{Y}_{ir/k}) = E [\hat{Y}_{ir/k} - E(\hat{Y}_{ir/k})]^2$, mas

$$E(\hat{Y}_{ir/k}) = \alpha_i - \alpha_{i'} + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{i'k} ,$$

portanto, tem-se:

$$V(\hat{Y}_{ir/k}) = \frac{2}{J} [\sigma_b^2 + J\sigma_\delta^2 + J\sigma_{\alpha\delta}^2 + \sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\beta\delta}^2 + \sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{ir/k}) = \frac{2}{IKJ} \left[\begin{aligned} & QMExp + (I-1)QMTrat(A) \times Exp + (K-1)QMTrat(B) \times Exp + \\ & + (I-1)(K-1)QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp \end{aligned} \right]$$

3.2.2.5.13. Entre duas médias de tratamentos (B), num mesmo nível de (A) em diferentes experimentos

Sendo:

$$\hat{Y}_{kr/i} = \hat{m}_{ikr} - \hat{m}_{ik'r'}$$

e analogamente ao item anterior, para $\hat{m}_{ikr}$ e

$$\hat{m}_{ik'r'} = \left\{ \begin{aligned} & \alpha_i + \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir'} + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\delta b)_{(ir')j} + \\ & + \beta_{k'} + (\beta\delta)_{k'r'} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta\delta b)_{(k'r')j} + (\alpha\beta)_{ik'} + \\ & + (\alpha\beta\delta)_{ik'r'} + \frac{1}{J} \sum_j e_{(ik'r')j} \end{aligned} \right\}$$

tem-se:

$$\hat{Y}_{kr/i} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir} - (\alpha\delta)_{ir'} + \\ & + \frac{1}{J} \sum_j [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(ir')j}] + \beta_k - \beta_{k'} + (\beta\delta)_{kr} - \\ & - (\beta\delta)_{k'r'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\beta\delta b)_{(kr)j} - (\beta\delta b)_{(k'r')j}] + (\alpha\beta)_{ik} - \\ & - (\alpha\beta)_{ik'} + (\alpha\beta\delta)_{ikr} - (\alpha\beta\delta)_{ik'r'} - \frac{1}{J} \sum_j [e_{(ikr)j} - \\ & - e_{(ik'r')j}] \end{aligned} \right\}.$$

Por definição: $V(\hat{Y}_{kr/i}) = E [\hat{Y}_{kr/i} - E(\hat{Y}_{kr/i})]^2$ e como:

$$E(\hat{Y}_{kr/i}) = \beta_k - \beta_{k'} + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{ik'}, \quad \text{tem-se:}$$

$$V(\hat{Y}_{kr/i}) = \frac{2}{J} \left[\sigma_b^2 + J\sigma_\delta^2 + J\sigma_{\alpha\delta}^2 + \alpha_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\beta\delta}^2 + \sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 \right]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{kr/i}) = \frac{2}{IKJ} \left[\begin{aligned} & QMExp + (I-1)QMTrat(A)xExp + (K-1)QMTrat(B)xExp + \\ & + (I-1)(K-1)QMTrat(A)xTrat(B)xExp \end{aligned} \right]$$

3.2.2.5.14. Entre duas médias de tratamentos (A), em diferentes níveis de (B), em diferentes experimentos

Considerando:

$$\hat{Y}_{ikr} = \hat{m}_{ikr} - \hat{m}_{i'k'r'}$$

e conforme os itens anteriores para $\hat{m}_{ikr}$, e

$$\hat{m}_{i'k'r'} = \left\{ \begin{aligned} &\alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j b_{j/r'} + \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{i'r'} + \frac{1}{J} \sum_j (\alpha\delta b)_{(i'r')j} + \\ &+ \beta_{k'} + (\beta\delta)_{k'r'} + \frac{1}{J} \sum_j (\beta\delta b)_{(k'r')j} + (\alpha\beta)_{i'k'} + \\ &+ (\alpha\beta\delta)_{i'k'r'} + \frac{1}{J} \sum_j e_{(i'k'r')j} \end{aligned} \right\}$$

tem-se:

$$\hat{Y}_{ikr} = \left\{ \begin{aligned} &\alpha_i - \alpha_{i'} + \frac{1}{J} \sum_j [b_{j/r} - b_{j/r'}] + \delta_r - \delta_{r'} + (\alpha\delta)_{ir} - \\ &- (\alpha\delta)_{i'r'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\alpha\delta b)_{(ir)j} - (\alpha\delta b)_{(i'r')j}] + \beta_k - \\ &- \beta_{k'} + (\beta\delta)_{kr} - (\beta\delta)_{k'r'} + \frac{1}{J} \sum_j [(\beta\delta b)_{(kr)j} - \\ &- (\beta\delta b)_{(k'r')j}] + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{i'k'} + (\alpha\beta\delta)_{ikr} - \\ &- (\alpha\beta\delta)_{i'k'r'} + \frac{1}{J} \sum_j [e_{(ikr)j} - e_{(i'k'r')j}] \end{aligned} \right\}$$

Por definição: $V(\hat{Y}_{ikr}) = E \left[\hat{Y}_{ikr} - E(\hat{Y}_{ikr}) \right]^2$

e ainda $E(\hat{Y}_{ikr}) = \alpha_i - \alpha_{i'} + \beta_k - \beta_{k'} + (\alpha\beta)_{ik} - (\alpha\beta)_{i'k'}$,

portanto, tem-se:

$$V(\hat{Y}_{ikr}) = \frac{2}{J} \left[\sigma_b^2 + J\sigma_\delta^2 + J\sigma_{\alpha\delta}^2 + \sigma_{\alpha\delta b}^2 + J\sigma_{\beta\delta}^2 + \sigma_{\beta\delta b}^2 + J\sigma_{\alpha\beta\delta}^2 + \sigma^2 \right]$$

e seu estimador:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{ikr}) = \frac{2}{IKJ} \left[\begin{aligned} & QMExp + (I-1)QMTrat(A)xExp + (K-1)QMTrat(B)xExp + \\ & + (I-1)(K-1)QMTrat(A)xTrat(B)xExp \end{aligned} \right]$$

Atenta-se para o fato de que os contrastes que não foram aqui apresentados são melhor testados nas análises individuais.

4. EXEMPLO ILUSTRATIVO

Com o objetivo de ilustrar os resultados obtidos no desenvolvimento teórico, apresentou-se um exemplo prático considerando os dados de pol % cana, obtidos do experimento: Tipos de Sulcos x Espaçamentos x Densidades de Plantio instalado em três usinas da região de Campos no Estado do Rio de Janeiro.

Os dados foram coletados pela Seção de Mecanização Agrícola da Coordenadoria Regional Leste do IAA/PLANALSUCAR.

Constam do ensaio, os seguintes tratamentos (A):

$A_1 \Rightarrow$ sulco simples e espaçamento de 1,40 m

$A_2 \Rightarrow$ sulco duplo e espaçamento de 1,40 m x
0,90 m

$A_3 \Rightarrow$ sulco de base larga e espaçamento de
1,70 m

$A_4 \Rightarrow$ sulco de base larga e espaçamento de
1,90 m

e também os tratamentos (B):

$B_1 \Rightarrow$ 4 toneladas de mudas por hectare

$B_2 \Rightarrow$ 6 toneladas de mudas por hectare

$B_3 \Rightarrow$ 8 toneladas de mudas por hectare

Os experimentos foram instalados com 4 blocos em cada um dos locais (usinas) e os dados coletados constam das Tabelas: 1, 2 e 3.

Tabela 1 - Dados de pol % cana obtidos no local 1 (Usina Santa Cruz).

Trat. (A)	Trat. (B)	Blocos			
		I	II	III	IV
A ₁	B ₁	17,67	17,23	17,43	17,61
	B ₂	17,31	17,60	17,05	16,91
	B ₃	17,49	17,30	17,68	18,27
A ₂	B ₁	17,19	17,85	17,44	17,56
	B ₂	17,21	17,26	16,71	17,52
	B ₃	18,04	16,38	17,23	17,14
A ₃	B ₁	17,39	17,54	16,61	17,51
	B ₂	17,39	17,67	16,77	17,61
	B ₃	17,69	17,02	17,34	18,02
A ₄	B ₁	17,19	17,57	17,72	17,73
	B ₂	16,78	17,57	17,79	18,27
	B ₃	17,86	16,85	18,12	17,94

Tabela 2 - Dados de pol % cana obtidos no local 2 (Usina Quissamã).

Trat. (A)	Trat. (B)	Blocos			
		I	II	III	IV
A ₁	B ₁	15,84	14,79	16,08	15,14
	B ₂	16,03	15,81	15,25	16,16
	B ₃	16,00	15,63	15,60	15,59
A ₂	B ₁	16,54	16,25	16,09	14,73
	B ₂	16,25	14,94	16,54	15,64
	B ₃	16,17	16,28	16,26	15,76
A ₃	B ₁	16,11	15,39	16,36	15,07
	B ₂	15,94	15,10	15,90	14,73
	B ₃	16,29	15,90	16,25	15,97
A ₄	B ₁	16,17	15,45	15,93	15,39
	B ₂	16,12	14,98	16,19	14,62
	B ₃	16,15	15,77	16,15	15,30

Tabela 3 - Dados de pol % cana obtidos no local 3 (Usina Ester).

Trat. (A)	Trat. (B)	Blocos			
		I	II	III	IV
A ₁	B ₁	15,54	17,25	16,19	15,92
	B ₂	16,69	17,30	16,47	16,01
	B ₃	16,48	16,96	16,16	16,82
A ₂	B ₁	16,01	16,94	15,82	15,42
	B ₂	16,71	17,23	16,33	16,70
	B ₃	16,70	16,52	16,75	16,65
A ₃	B ₁	16,43	17,40	16,64	16,89
	B ₂	16,69	16,87	16,07	17,15
	B ₃	17,27	17,20	15,90	16,49
A ₄	B ₁	16,48	16,77	16,61	16,93
	B ₂	16,52	17,00	15,49	16,40
	B ₃	16,39	17,21	16,18	16,97

As análises de variância para cada local forneceram os resultados do Quadro 15.

Quadro 15 - Resultados das análises de variância dos três locais.

Causas de Variação	G.L.	Quadrados Médios		
		Local 1	Local 2	Local 3
Blocos	3	0,3307	1,8188	1,4652
Tratamentos (A)	3	0,2251	0,2135	0,1916
Resíduo (a)	9	0,1797	0,1218	0,1176

Tratamentos (B)	2	0,1384	0,4060	0,1914
Resíduo (b)	6	0,3822	0,1470	0,1708

Trat (A) x Trat (B)	6	0,1027	0,1390	0,2532
Resíduo (c)	18	0,1085	0,1653	0,1380

Total	47	-	-	-

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias de tratamentos a serem aplicados nos testes de comparações múltiplas, assim como o núme-

ro de graus de liberdade respectivo, são dados no Quadro 16.

Quadro 16 - Resumo das estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias com seus respectivos graus de liberdade (n).

Contraste	Local 1		Local 2		Local 3	
	$\hat{V}(\bar{Y})$	n	$\hat{V}(\bar{Y})$	n	$\hat{V}(\bar{Y})$	n
$\bar{Y}_i$	0,0300	9	0,0203	9	0,0196	9
$\bar{Y}_k$	0,0478	6	0,0184	6	0,0214	6
$\bar{Y}_{i/k}$	0,0661	26	0,0754	27	0,0656	27
$\bar{Y}_{k/i}$	0,0885	17	0,0804	24	0,0731	24

Supondo que local 1, houve a perda de uma observação, associada aos tratamentos A_1 e B_1 no bloco I, pode-se obter a análise de variância apresentada no Quadro 17, levando em consideração a estimativa $x = 17,01$.

Quadro 17 - Análise de variância do local 1 (Usina Santa Cruz) com perda de uma observação.

Causas de Variação	G.L.	SQ	QM	F
Blocos	3	1,0245	0,3415	-
Tratamentos (A)	3	0,6704	0,2235	1,21
Resíduo(a)	9	1,6574	0,1842	-

Tratamentos (B)	2	0,2761	0,1380	0,34
Resíduo(b)	6	2,4649	0,4108	-

Trat(A) x Trat(B)	6	0,6602	0,1100	0,99
Resíduo(c)	17	1,7917	0,1054	-

Total	46	8,5452	-	-

O teste F para a interação Trat(A) x Trat(B) foi o resultado do quociente $\frac{QM_{Trat(A) \times Trat(B)}}{W \cdot QM_{Res(c)}}$, onde $W = 1,0556$.

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias, bem como o respectivo número de graus de liberdade (n) constam do Quadro 18.

Quadro 18 - Estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias.

Contraste	$\hat{V}(\hat{Y})$	n
$\hat{Y}_i$	0,0317	10
$\hat{Y}_k$	0,0517	6
$\hat{Y}_{i/k}$	0,0990	26
$\hat{Y}_{k/i}$	0,1245	21

A fim de estruturar as correções das somas de quadrados, pelo método dos resíduos condicionais, obteve-se:

$$x_1 = 17,01$$

$$x_2 = 17,16$$

$$x_3 = 17,41$$

$$x_4 = 17,40$$

$$x_5 = 17,42$$

$$x_6 = 17,41$$

$$x_7 = 17,43$$

e a partir das estimativas, as correções:

$$U_{B\ell} = 0,0267$$

$$U_A = 0,0034$$

$$U_{R(a)} = 0,0439$$

$$U_B = 0,0039$$

$$U_{R(b)} = 0,0860$$

$$U_{AB} = 0,0115$$

Aplicando as correções às somas de quadrados foi estruturado o Quadro 19, dado a seguir:

Quadro 19 - Análise de variância do local 1 (Usina Santa Cruz), com perda de 1 observação, aplicando as correções das somas de quadrados.

Causas de Variação	G.L.	SQ	QM	F
Blocos	3	0,9978	0,3326	-
Tratamentos (A)	3	0,6670	0,2223	1,24
Resíduo (a)	9	1,6135	0,1793	-

Tratamentos (B)	2	0,2722	0,1361	0,34
Resíduo (b)	6	2,3789	0,3965	-

Trat (A) x Trat (B)	6	0,6487	0,1081	1,02
Resíduo (c)	17	1,7917	0,1054	-

Total	46	8,3698	-	-

Reunindo os três locais numa análise conjunta, sem considerar a perda da observação, obtiveram-se os resultados do Quadro 20.

Quadro 20 - Resultados da análise de variância conjunta para os três locais.

Causas de Variação	G.L.	SQ	QM	F
Blocos dentro de experimentos	9	10,8440	1,2049	-
Experimentos	2	67,4085	33,7042	19,76
Tratamentos (A)	3	0,2126	0,0709	0,25
Trat (A) xExp	6	1,6782	0,2797	1,22
Resíduo (a)	27	3,7719	0,1397	-

Tratamentos (B)	2	1,0210	0,5105	4,53
Trat (B) xExp	4	0,4510	0,1128	0,58
Resíduo (b)	18	4,2006	0,2334	-

Trat (A) xTrat (B)	6	0,5471	0,0912	0,45
Trat (A) xTrat (B) xExp	12	2,4229	0,2019	1,47
Resíduo (c)	54	7,4125	0,1373	-

Total	143	99,9704	-	-

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias de tratamentos e os respectivos números de graus de liberdade (n) são dados no Quadro 21.

Quadro 21 - Estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre duas médias na análise conjunta, e seus respectivos números de graus de liberdade (n).

Contrastes	$\hat{V}(\hat{Y})$	n
$\hat{Y}_i$	0,0155	6
$\hat{Y}_k$	0,0047	4
$\hat{Y}_r$	1,4043	2
$\hat{Y}_{i/k}$	0,0380	18
$\hat{Y}_{k/i}$	0,0299	16
$\hat{Y}_{r/i}$	1,4393	2
$\hat{Y}_{r/k}$	1,4137	2
$\hat{Y}_{ik}$	0,0343	19
$\hat{Y}_{ir}$	1,4393	2
$\hat{Y}_{kr}$	1,4137	2
$\hat{Y}_{r/ik}$	1,4992	3
$\hat{Y}_{ir/k}$	1,4992	3
$\hat{Y}_{kr/i}$	1,4992	3
$\hat{Y}_{ikr}$	1,4992	3

5. CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos pode-se concluir:

1 - Nas análises individuais, quando ocorre perda de uma observação, seu estimador é:

$$x = \frac{IJ(TB) + KJ(T'B) - JB + IK(TT') - IT - KT' + G}{(I-1)(K-1)(J-1)}$$

2 - Em decorrência da minimização do resíduo (c), as demais somas de quadrados estão alteradas.

As correções para as somas de quadrados são as que se seguem:

$$U_{B\ell} = \left\{ x_6^2 - x_7^2 + \frac{(x_1 - x_6)}{IK} \left[(x_1 + x_6) + 2B \right] - \right. \\ \left. - \frac{(x_1 - x_7)}{IKJ} \left[(x_1 + x_7) + 2G \right] \right\} ;$$

$$U_A = \left\{ \frac{(x_5 - x_6)}{IK} \left[(IK-1)(x_5 + x_6) - 2B \right] + \frac{(x_1 - x_5)}{IKJ} \left[(I-1)(x_1 + x_5) + 2IT - 2G \right] \right\} ;$$

$$U_B = \left\{ \frac{(x_3 - x_4)}{K} \left[(K-1)(x_3 + x_4) - 2(TB) \right] + \frac{(x_1 - x_3)}{IKJ} \left[(K-1)(x_1 + x_3) + 2KT' - 2G \right] \right\} ;$$

$$U_{AB} = \left\{ \frac{(x_1 - x_2)}{IK} \left[(I-1)(K-1)(x_1 + x_2) + 2B - 2I(TB) - 2K(T'B) \right] \right\} ;$$

$$U_{R(a)} = \left\{ x_4^2 - x_5^2 + \frac{(x_1 - x_4)}{K} \left[(x_1 + x_4) + 2(TB) \right] + \frac{(x_1 - x_5)}{IKJ} \left[(1-I-J)(x_1 + x_5) + 2G - 2JB - 2IT \right] \right\} ;$$

$$U_{R(b)} = \left\{ \frac{(x_2 - x_3)}{K} \left[(K-1)(x_2 + x_3) - 2(TB) \right] + \frac{(x_1 - x_2)}{IK} \left[(K-1)(x_1 + x_2) + 2K(T'B) - 2B \right] + \frac{(x_1 - x_3)}{IKJ} \left[2G - 2KT' - (K-1)(x_1 + x_3) \right] \right\} ;$$

onde:

$$x_1 = \frac{IJ(TB) + KJ(T'B) - JB + IK(TT') - IT - KT' + G}{(I-1)(K-1)(J-1)} ;$$

$$x_2 = \frac{I(TB) + K(T'B) - B}{(I-1)(K-1)} ;$$

$$x_3 = \frac{IJ(TB) + KT' - G}{(IJ-1)(K-1)} ;$$

$$x_4 = \frac{(TB)}{(K-1)} ;$$

$$x_5 = \frac{JB + IT - G}{J(IK-1) - (I-1)} ;$$

$$x_6 = \frac{B}{(IK-1)} ;$$

$$x_7 = \frac{G}{(IJK-1)} .$$

3 - Sem considerar as correções " U_s " que devem ser utilizadas para as somas de quadrados, todos os resultados das esperanças matemáticas das somas de quadrados apresentam o fator

$$W = \left[1 + \frac{1}{(I-1)(K-1)(J-1)} \right] ,$$

associado a variância residual (σ^2), com exceção feita para a $E[QMRes(c)]$ que está corretamente estimada.

4 - Não há teste direto para a interação tratamentos

(A) x tratamentos (B), sugere-se a utilização do produto W QMRes(c) na estruturação do teste F para a interação.

5 - No caso de perda de uma unidade nas análises individuais, os estimadores das variâncias das estimativas dos contrastes são:

a. Entre duas médias de tratamentos (A):

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{KJ} [E_a + f(I-2)E_c]$$

b. Entre duas médias de tratamentos (B):

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJ} [E_b + f(K-2)E_c]$$

c. Entre duas médias de tratamentos (A), num mesmo nível do tratamento (B):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{KJ} \left\{ E_a + [(K-1) + 2f(IK^2-2)] E_c \right\}$$

d. Entre duas médias de tratamentos (B), num mesmo nível do tratamento (A):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{IJ} \left\{ E_b + [(I-1) + 2f(I^2K-2)] E_c \right\}$$

onde:

E_a é o quadrado médio de resíduo (a);

E_b é o quadrado médio de resíduo (b);

E_c é o quadrado médio de resíduo (c);

$$f = \frac{1}{2(I-1)(K-1)(J-1)} ;$$

e ainda:

I é o número de tratamentos (A);

K é o número de tratamentos (B);

J é o número de blocos.

6 - Considerando conjuntamente os R experimentos é possível estruturar o teste F para os tratamentos (A), tratamentos (B) e para a interação tratamentos (A) x tratamentos (B) associando em cada caso com a sua interação com o experimento.

7 - Para a estruturação dos métodos de comparação múltipla aplicam-se os seguintes estimadores de variâncias de estimativas de contrastes entre duas médias:

a. Entre duas médias de tratamentos (A):

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{KRJ} [QMTrat(A) \times Exp]$$

b. Entre duas médias de tratamentos (B):

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IRJ} [QMTrat(B) \times Exp]$$

c. Entre duas médias de experimentos:

$$\hat{V}(\hat{Y}_r) = \frac{2}{IKJ} [QMExp]$$

- d. Entre duas médias de tratamentos (A), num mesmo nível do tratamento (B):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{RJ} \left[\frac{QMTrat(A) \times Exp + (K-1)QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp}{K} \right]$$

- e. Entre duas médias de tratamentos (B), num mesmo nível do tratamento (A):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{RJ} \left[\frac{QMTrat(B) \times Exp + (I-1)QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp}{I} \right]$$

- f. Entre duas médias de experimentos, num mesmo nível do tratamento (A):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{r/i}) = \frac{2}{KJ} \left[\frac{QMExp + (I-1)QMTrat(A) \times Exp}{I} \right]$$

- g. Entre duas médias de experimentos, num mesmo nível do tratamento (B):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{r/k}) = \frac{2}{IJ} \left[\frac{QMExp + (K-1)QMTrat(B) \times Exp}{K} \right]$$

- h. Entre duas médias de experimentos, num mesmo nível do tratamento (A) e num mesmo nível do tratamento (B):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{r/ik}) = \frac{2}{IKJ} \left[\begin{aligned} &QMExp + (I-1)QMTrat(A) \times Exp + (K-1)QMTrat(B) \times Exp + \\ &+ (I-1)(K-1)QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp \end{aligned} \right]$$

- i. Entre duas médias de tratamentos (A), em diferentes níveis do tratamento (B):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{ik}) = \frac{2}{RJ} \left[\frac{IQMTrat(A) \times Exp + KQMTrat(B) \times Exp + (IK-I-K)QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp}{IK} \right]$$

- j. Entre duas médias de tratamentos (A), em diferentes experimentos:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{ir}) = \frac{2}{KJ} \left[\frac{QMExp + (I-1)QMTrat(A) \times Exp}{I} \right]$$

- k. Entre duas médias de tratamentos (B), em diferentes experimentos:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{kr}) = \frac{2}{IJ} \left[\frac{QMExp + (K-1)QMTrat(B) \times Exp}{K} \right]$$

- l. Entre duas médias de tratamentos (A), num mesmo nível do tratamento (B), em diferentes experimentos:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{ir/k}) = \frac{2}{IKJ} \left[\begin{array}{l} QMExp + (I-1)QMTrat(A) \times Exp + (K-1)QMTrat(B) \times Exp + \\ + (I-1)(K-1)QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp \end{array} \right]$$

- m. Entre duas médias de tratamentos (B), num mesmo nível do tratamento (A), em diferentes experimentos:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{kr/i}) = \frac{2}{IKJ} \left[\begin{array}{l} QMExp + (I-1)QMTrat(A) \times Exp + (K-1)QMTrat(B) \times Exp + \\ + (I-1)(K-1)QMTrat(A) \times Trat(B) \times Exp \end{array} \right]$$

- n. Entre duas médias de tratamentos (A), em diferentes níveis do tratamento (B), em diferentes experimentos:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{ikr}) = \frac{2}{IKJ} \left[\begin{array}{l} QMExp + (I-1)QMTrat(A)xExp + (K-1)QMTrat(B)xExp + \\ + (I-1)(K-1)QMTrat(A)xTrat(B)xExp \end{array} \right]$$

6. LITERATURA CITADA

- ANDERSON, R.L., 1946. Missing Plot Techniques. Biometrics. Washington, 2:41-47.
- ANDERSON, R.L. e T.A. BANCROFT, 1952. Statistical Theory in Research. New York, Mc Graw-Hill, 399 p.
- ALLAN, F.E. e J. WISHART, 1930. A Method of Estimating the Yield of a Missing Plot in Field Experimental Work. Jour. Agr. Sci. Cambridge, 20:399-406.
- CAMPOS, H., 1964. Estudo Sobre a Análise de Experimentos com Parcelas Perdidas. Piracicaba, ESALQ/USP, 84 p. (Tese de Doutorado).
- CAMPOS, H., 1984. Estatística Aplicada à Experimentação com Cana-de-açúcar. Piracicaba, FEALQ, 292 p.
- CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. London, Asia Publishing House, 120 p.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Designs. 2nd ed. New York, John Wiley, 611 p.

- FARIA, E.H.S., 1984. Análise de Experimentos em Faixas com Subparcelas Subdivididas. Piracicaba, ESALQ/USP, 82 p. (Dissertação de Mestrado).
- FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design. New York, Mac Millan Co., 544 p.
- GOULDEN, C.H., 1939. Methods of Statistical Analysis. New York, John Wiley, 277 p.
- HEDAYETULLAH, S.; S. SEN e K.R. NAIR, 1944. Influence of Dates of Planting and Spacings on Some Winter Varieties of Rice. Indian J. Agr. Sci. New Delhi, 14:248-259.
- KEMPTHORNE, O., 1952. The Design and Analysis of Experiments. New York, John Wiley, 631 p.
- LAVORENTI, N.A., 1985. Variâncias de Contrastes de Médias nos Ensaio em Parcelas Sub-subdivididas Envolvendo uma Unidade Perdida. Piracicaba, ESALQ/USP, 142 p. (Dissertação de Mestrado).
- LITTLE, T.M. e F.J. HILLS, 1978. Agricultural Experimentation - Design and Analysis. New York, John Wiley, 350 p.
- LOMA, J.L., 1966. Experimentacion Agrícola. 2.ed. México, Union Tipográfica Editorial Hispano-Americana, 495 p.
- NAIR, K.R., 1944. Calculation of Standard Errors and Tests of Significance of Different Types of Treatment Comparisons in Split-plot and Strip Arrangements of Field Experiments. Indian J. Agr. Sci. New Delhi, 14:315-319.

- PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. 8.ed. Piracicaba, Nobel, 430 p.
- PINHO, S.Z., 1973. Observações Perdidas em Delineamentos em Parcelas Subdivididas e Parcelas Sub-subdivididas. Botucatu, Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas/UNESP, 173 p. (Tese de Doutorado).
- PINHO, S.Z., 1975. Estudo dos Componentes de Variância nos Experimentos em Parcelas Subdivididas com Uma Observação Perdida. Piracicaba, ESALQ/USP, 45 p. (Dissertação de Mestrado).
- SATTERTHWAITE, F.E., 1946. An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics. Washington, 2:110-114.
- STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. London, Mc Graw-Hill, 481 p.
- YATES, F., 1933. The Analysis of Replicated Experiments when the Field Results are Incomplete. Emp. Jour. Exp. Agr. Cambridge, 1:129-142.
- ZIMMERMANN, F.J.P., 1973. Análise de um Experimento de Adubação e Calagem em Milho, Executado num Delineamento em Faixa Durante Oito Anos no Mesmo Local. Piracicaba, ESALQ/USP, 93 p. (Dissertação de Mestrado).