Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

Modelagem estatística de extremos espaciais com base em
processos max-stable aplicados a dados meteorológicos
no estado do Paraná

Ricardo Alves de Olinda

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em
Ciências. Área de concentração: Estatística e Experi-
mentação Agronômica

Piracicaba
2012

Ricardo Alves de Olinda
Bacharel em Estatística

**Modelagem estatística de extremos espaciais com base em processos
max-stable aplicados a dados meteorológicos no estado do Paraná**

Orientador:
Prof. Dr. **VITOR AUGUSTO OZAKI**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em
Ciências. Área de concentração: Estatística e Experi-
mentação Agronômica

Piracicaba
2012

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - ESALQ/USP**

Olinda, Ricardo Alves de

Modelagem estatística de extremos espaciais com base em processos max-stable aplicados a dados meteorológicos no estado do Paraná / Ricardo Alves de Olinda. - Piracicaba, 2012.
163 p: il.

Tese (Doutorado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2012.

1. Espaço climático 2. Geoestatística 3. Método de Monte Carlo 4. Modelagem de dados 5. Simulação - Estatística 6. Verossimilhança I. Título

CDD 574.50151
O46m

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor"

DEDICATÓRIA

Aos meus pais,

***Roberto Alves de Olinda e
Marizete Bezerra de Olinda***

Ao meu filho e esposa,

***Gabriel Guedes de Olinda
Andreza dos Santos Guedes de
Olinda***

Com amor, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a DEUS nosso pai e criador, por ter me dado coragem, sabedoria para enfrentar os obstáculos da vida e animo para nunca desistir de meus sonhos.

Aos meus irmãos Ronnie Alves de Olinda e Roberta Sinome de Olinda, por todo apoio e confiança em mim depositado.

Aos meus sobrinhos Carol, Rennan, Ana Livia e Luiz Jr., por todos os momentos felizes que me proporcionaram.

Ao Professor Vitor Augusto Ozaki, meu orientador, pelo apoio, incentivo, amizade e pelas críticas e sugestões que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

A Pesquisadora Juliette Blanchet da *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, pelo auxílio no desenvolvimento teórico e pelo apoio durante toda a pesquisa.

Aos funcionários do Departamento Luciane Brajão, Solange Sabadin, Eduardo Bonilha, Jorge Wiendl e Rosni Honofre.

A Fundação Escola Nacional de Seguros (FUNENSEG) e a Fundação de Estudos Agrários Luiz de Queiroz (FEALQ), pelo apoio financeiro, essencial para realização deste trabalho.

Aos professores do programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, Dr. Carlos Tadeu dos Santos Dias, Dr. Paulo Justiniano Ribeiro Jr., Dra. Roseli Aparecida Leandro, Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio, Dr. César Gonçalves de Lima, Dr. Décio Barbin, Dr. Gabriel Adrián Sarriés, Dr. Sílvio Zocchi, Dra. Sônia Maria de Stefano Piedade, Dra. Taciana Villela Savian por todos os ensinamentos e amizade.

Aos integrantes do Grupo de Estudo em Seguros e Riscos (GESER), Fábio de Negri e Lucas Polo, pela colaboração e organização dos dados.

Ao Professor Isaac Dayan Bastos da Silva, pela organização dos dados via Sistema de Informação Geográfica.

Aos Amigos dos cursos de mestrado e doutorado do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, em especial a Adriana Maria Marques da Silva, Ana Patrícia Bastos Peixoto, Braga Júnior, Cássio Dessotti, Cristiane Rodrigues, Elizabeth Mie Hashimoto, Edilan Quaresma, Eduardo Monteiro, Epaminondas Couto, Everton

Batista, Ezequiel Bautista, Fabiane Silva, Fernada Rizzato, Guilherme Biz, Gláucia Tatiana Ferrari, Keliny Martins, Kuang Hongyu, Josiane Rodrigues, Juliana Betine, Juliana Fachini, Luiz Roberto, Marcelino Rosa de Pascoa, Mariana Urbano, Marina Maestre, Maurício Lordelo, Natalie Veronika, Patrícia Paranaíba, Pedro Henrique, Priscila Neves Faria, Raphael Dias, Renato Nunes Pereira, Renata Alcarde, Rodrigo Pescim, Simone Werner, Simone Sartório, Tiago Almeida de Oliveira, Tiago Santana, Vanderson de Paula, pelo auxílio em momentos de dúvidas, e principalmente pela sincera amizade.

Aos Amigos de trabalho da Universidade Estadual da Paraíba, Tiago Almeida de Oliveira, Ana Patrícia Bastos Peixoto, João Gil de Luna, Juarez Fernandes, Gustavo Esteves, Diana Esteves, Edwirde da Silva, Fernando Bezerra, Chico Guedes, Sílvio Fernando e Kleber Barros, pela amizade e apoio.

A todos os alunos do curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, com os quais tive o prazer de conviver.

Aos Amigos de república Adilson Nunes, Aloísio Coelho, Alexandre Diniz, Augusto Diniz, Carlos Mario Donado, Pedro Arriva, Priscila Robertina, Samuel Carvalho, Valclei Zanin, pela amizade e apoio.

Aos meus tios e tias por compartilharem com muita atenção e carinho minha jornada acadêmica.

Aos meus primos e primas pela motivação e amizade.

“Felizes os aflitos por que DEUS os consolará”

Mateus 5,5

*“A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério.
É essa emoção fundamental que está na raiz de toda ciência e toda arte.”*

Albert Einstein

SUMÁRIO

RESUMO	11
ABSTRACT	13
LISTA DE FIGURAS	15
LISTA DE TABELAS	19
NOTAÇÃO	21
1 INTRODUÇÃO	23
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
2.1 Teoria de valores extremos e o mercado financeiro	25
2.2 Teoria de valores extremos aplicada a dados ambientais	26
2.3 Extremos espaciais aplicados a dados ambientais	28
3 METODOLOGIA	33
3.1 Processo max-stable	33
3.1.1 O problema da distribuição assintótica de extremos	33
3.1.2 Teoria de valores extremos para variáveis aleatórias univariadas	36
3.1.3 Teoria de valores extremos para variáveis aleatórias multivariadas	45
3.1.4 Processo max-stable e unidades marginais de Fréchet	46
3.2 Modelos Espaciais	48
3.2.1 Modelo de Smith	48
3.2.2 Modelo de Schlather	50
3.2.3 Família de funções de correlação para o modelo de Schlather	51
3.3 Dependência espacial e o coeficiente extremo	54
3.3.1 Propriedades do coeficiente extremo	56
3.4 Campos aleatórios	57
3.4.1 Hipótese de estacionariedade e processo isotrópico	58
3.4.2 Variograma e Semivariograma	60
3.4.3 Madograma	62
3.5 Método de máxima verossimilhança	63
3.5.1 Método de máxima verossimilhança pareada	64
3.6 Algoritmo de estimação do modelo	68
3.7 Critério de Informação Takeuchi - TIC	69
3.8 Predição Espacial	71

3.8.1 Krigagem Ordinária	72
3.8.2 Extensão para d observações	73
3.8.3 Krigagem sob o enfoque de máxima verossimilhança pareada	75
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	79
4.1 Estudo de simulação do processo max-stable	79
4.1.1 Simulação do Modelo de Smith	80
4.1.2 Simulação do Modelo de Schlather	86
4.2 Dados meteorológicos do estado do Paraná	89
4.2.1 Aplicação aos dados de precipitação	90
4.2.2 Validação dos modelos	104
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
5.1 Pesquisas futuras	110
REFERÊNCIAS	111
APÊNDICES	119
ANEXOS	155

RESUMO

Modelagem estatística de extremos espaciais com base em processos max-stable aplicados a dados meteorológicos no estado do Paraná

A maioria dos modelos matemáticos desenvolvidos para eventos raros são baseados em modelos probabilísticos para extremos. Embora as ferramentas para modelagem estatística de extremos univariados e multivariados estejam bem desenvolvidas, a extensão dessas ferramentas para modelar extremos espaciais integra uma área de pesquisa em desenvolvimento muito ativa atualmente. A modelagem de máximos sob o domínio espacial, aplicados a dados meteorológicos é importante para a gestão adequada de riscos e catástrofes ambientais nos países que tem a sua economia profundamente dependente do agronegócio. Uma abordagem natural para tal modelagem é a teoria de extremos espaciais e o processo max-stable, caracterizando-se pela extensão de dimensões infinitas da teoria de valores extremos multivariados, podendo-se então incorporar as funções de correlação existentes na geoestatística e consequentemente, verificar a dependência extrema por meio do coeficiente extremo e o madograma. Neste trabalho descreve-se a aplicação de tais processos na modelagem da dependência de máximos espaciais de precipitação máxima mensal do estado do Paraná, com base em séries históricas observadas em estações meteorológicas. Os modelos propostos consideram o espaço euclidiano e uma transformação denominada espaço climático, que permite explicar a presença de efeitos direcionais, resultantes de padrões meteorológicos sinóticos. Essa metodologia baseia-se no teorema proposto por De Haan (1984) e nos modelos de Smith (1990) e de Schlather (2002), verifica-se também o comportamento isotrópico e anisotrópico desses modelos via simulação Monte Carlo. Estimativas são realizadas através da máxima verossimilhança pareada e os modelos são comparados usando-se o Critério de Informação Takeuchi. O algoritmo utilizado no ajuste é bastante rápido e robusto, permitindo-se uma boa eficiência computacional e estatística na modelagem da precipitação máxima mensal, possibilitando-se a modelagem dos efeitos direcionais resultantes de fenômenos ambientais.

Palavras-chave: Coeficiente Extremo; Madograma; Geoestatística; Simulação Monte Carlo; Verossimilhança Pareada; Espaço Climático; Anisotropia

ABSTRACT

Statistical modelling of spatial extremes based on max-stable processes applied to environmental data in the Paraná State

The most mathematical models developed for rare events are based on probabilistic models for extremes. Although the tools for statistical modeling of univariate and multivariate extremes are well-developed, the extension of these tools to model spatial extremes data is currently a very active area of research. Modeling of maximum values under the spatial domain, applied to meteorological data is important for the proper management of risks and environmental disasters in the countries where the agricultural sector has great influence on the economy. A natural approach for such modeling is the theory of extreme spatial and max-stable process, characterized by infinite dimensional extension of multivariate extreme value theory, and we can then incorporate the current correlation functions in geostatistics and thus, check the extreme dependence through the extreme coefficient and the madogram. This thesis describes the application of such procedures in the modeling of spatial maximum dependency of monthly maximum rainfall of Paraná State, historical series based on observed meteorological stations. The proposed models consider the Euclidean space and a transformation called climatic space, which makes it possible to explain the presence of directional effects resulting from synoptic weather patterns. This methodology is based on the theorem proposed by De Haan (1984) and Smith (1990) models and Schlather (2002), checking the isotropic and anisotropic behavior these models through Monte Carlo simulation. Estimates are performed using maximum pairwise likelihood and the models are compared using the Takeuchi information criterion. The algorithm used in the fit is very fast and robust, allowing a good statistical and computational efficiency in monthly maximum rainfall modeling, allowing the modeling of directional effects resulting from environmental phenomena.

Keywords: Extremal Coefficient; Madogram; Geostatistics; Monte Carlo Simulation; Pairwise Likelihood; Climatic Space; Anisotropy

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 - Ilustração do Exemplo 1. As figuras apresentam as funções de distribuição da variável aleatória $a_n^{-1} [\max(Y_1, \dots, Y_n) - b_n]$ em que os Y 's são independentes e cada um deles tem distribuição uniforme em $[0, 1]$, e $b_n = 1$ e $a_n = \frac{1}{n}$; os gráficos, da esquerda para a direita, correspondem aos valores 1, 4 e 50 de n . A linha tracejada é o gráfico da distribuição limite 35
- Figura 2 - Função densidade de probabilidade (lado direito) e função de distribuição acumulada (lado esquerdo) da distribuição *GEV* 44
- Figura 3 - Função densidade de probabilidade (lado direito) e função de distribuição acumulada (lado esquerdo) da distribuição generalizada de valores extremos com $\xi = -0,30$ (Weibull), $\xi \rightarrow 0$ (Gumbel) e $\xi = 0,30$ (Fréchet), para $\mu = 10$ e $\sigma = 2,6$ 45
- Figura 4 - Gráficos das funções de Whittle-Matérn, Powered Exponential, Cauchy e as funções de correlação Bessel, da esquerda para a direita, os parâmetros de alcance e limiar são $\phi = \beta = 1$ 53
- Figura 5 - Seis simulações do modelo de Smith nos casos isotrópicos e anisotrópicos no espaço bidimensional, sob o processo max-stable com diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$. As matrizes Σ_1 e Σ_2 representam o caso isotrópico 82
- Figura 6 - Seis simulações do coeficiente extremo nos casos isotrópicos e anisotrópicos do modelo de Smith, no espaço bidimensional, sob o processo max-stable com diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$. As matrizes Σ_1 e Σ_2 representam o caso isotrópico 83
- Figura 7 - Oito simulações do modelo de Schlather sob o espaço bidimensional com funções de correlação: *Whittle-Matérn* com $\rho(\mathbf{h}) = 2/\Gamma(1) (\mathbf{h}/10^2) K_1(\mathbf{h}/10^2)$, *Powdered Exponential* com $\rho(\mathbf{h}) = \exp(-\mathbf{h}/6^2)$, *Cauchy* com $\rho(\mathbf{h}) = (1 + (\mathbf{h}/10)^2)^{-5}$ e *Whittle-Matérn* com $\rho(\mathbf{h}) = 2/\Gamma(2) (\mathbf{h}/5^2)^2 K_2(\mathbf{h}/5^2)$ da esquerda para direita, respectivamente. Os gráficos da parte superior representam o processo isotrópico e os gráficos da parte inferior representam o processo anisotrópico 87

- Figura 8 - Oito simulações do coeficiente para o modelo de Schlather sob o espaço bidimensional com funções de correlação: *Whittle-Matérn* com $\rho(\mathbf{h}) = 2/\Gamma(1) (\mathbf{h}/10^2) K_1(\mathbf{h}/10^2)$, *Powdered Exponential* com $\rho(\mathbf{h}) = \exp(-\mathbf{h}/6^2)$, *Cauchy* com $\rho(\mathbf{h}) = (1 + (\mathbf{h}/10)^2)^5$ e *Whittle-Matérn* com $\rho(\mathbf{h}) = 2/\Gamma(2) (\mathbf{h}/5^2)^2 K_2(\mathbf{h}/5^2)$ da esquerda para direita, respectivamente. Os gráficos da parte superior representam o processo isotrópico e os gráficos da parte inferior representam o processo anisotrópico 88
- Figura 9 - Topografia do Estado do Paraná para os quais os dados de precipitações diárias estão disponíveis nas estações meteorológicas 91
- Figura 10 - Localização das estações meteorológicas utilizadas na modelagem de extremos espaciais (verde) e na validação dos modelos (marrom) 91
- Figura 11 - Histogramas referentes as variáveis altitude (lado esquerdo) e precipitação média diária (lado direito) do estado do Paraná. São excluídas as estações utilizadas para validação dos modelos 92
- Figura 12 - Quantil amostral versus quantil esperado sob normalidade representado pelo *QQ*-plot da altitude (lado esquerdo) e precipitação média diária (lado direito) do estado do Paraná. São excluídas as estações utilizadas para validação dos modelos 93
- Figura 13 - Série temporal referente aos dados de precipitação máxima mensal das regiões de Castro, Terra Roxa e Cascavel com os dados originais (gráficos superiores) e os dados padronizados em unidades marginais de Fréchet (gráficos inferiores) 94
- Figura 14 - Perfil dos valores de TIC ajustados aos 54 modelos de Schlather. As escalas de 1 a 6 representam: os modelos isotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude e longitude (escala 1); os modelos isotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude, longitude e altitude (escala 2); os modelos anisotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude e longitude (escala 3); os modelos anisotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude, longitude e altitude (escala 4); os modelos anisotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude, longitude e precipitação (escala 5); os modelos anisotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude, longitude, altitude e precipitação (escala 6) 97

- Figura 15 - Coeficiente extremo pareado de Barbosa Ferraz, Paranavaí, Cascavel e Castro (círculos brancos) preditos pelo processo max-stable sob o modelo selecionado 104
- Figura 16 - Coeficiente extremo para pares de estações meteorológicas, em função da distância entre eles, no espaço euclidiano (gráfico da esquerda) ou o espaço climático (gráfico da direita). A curva vermelha é a curva do coeficiente extremo ajustado ao processo max-stable correspondente ao modelo anisotrópico de Schlather 106
- Figura 17 - Coeficiente extremo para pares de estações meteorológicas, em função da distância entre eles, no espaço climático em ambos os gráficos. A curva vermelha é a curva do coeficiente extremo ajustado ao processo max-stable correspondente ao modelo anisotrópico de Schlather 106
- Figura 18 - Comparação dos quantis empíricos e teóricos do modelo para os máximos mensais de grupos de estações não utilizadas nos ajustes. As estações utilizadas para cada figura são mostradas em seu mapa, e os envelopes com 95% de confiança obtidos a partir de $\mathcal{T} = 5.000$ simulações 107
- Figura 19 - Comparação dos quantis empíricos e teóricos do modelo para os máximos mensais de grupos de estações não utilizadas nos ajustes. As estações utilizadas para cada figura são mostradas em seu mapa, e os envelopes com 95% de confiança obtidos a partir de $\mathcal{T} = 5.000$ simulações 108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Configurações da modelagem de extremos espaciais (isotrópico e anisotrópico) sob processos max-stable utilizando-se diferentes matrizes de covariâncias Σ : mesmo peso de variâncias em ambas direções (Σ_1), diferentes pesos de variâncias em ambas direções (Σ_2), correlação espacial (Σ_3), mediana correlação espacial (Σ_4), moderada correlação espacial (Σ_5), forte correlação espacial (Σ_6)	81
Tabela 2 - Estimativas das variâncias e covariâncias e desvios padrão da matriz Σ , por meio de máxima verossimilhança pareada, baseando-se em 1.000 simulações de dados de extremos espaciais sob o processo max-stable ($K=100$ localizações e $N=200$ observações) para o modelo de Smith. Erros padrão encontram-se dentro de parênteses e os valores verdadeiros estão dentro de colchetes	84
Tabela 3 - Estimativas das variâncias e covariâncias e desvios padrão (em parênteses) da matriz de covariâncias Σ_3 por meio de máxima verossimilhança pareada, com diferentes observações (N) e localizações (K), baseando-se em 1.000 simulações de dados de extremos espaciais para o modelo de Smith	85
Tabela 4 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (TIC), considerando-se as coordenadas latitude e longitude em quilômetros	99
Tabela 5 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos isotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (TIC), considerando-se as coordenadas latitude e longitude em quilômetros	99

- Tabela 6 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude, longitude e a covariável altitude em quilômetros 100
- Tabela 7 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos isotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude, longitude e a covariável altitude em quilômetros 100
- Tabela 8 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude e longitude em quilômetros e a covariável precipitação média 101
- Tabela 9 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude, longitude a covariável altitude em quilômetros somado à covariável precipitação média 101
- Tabela 10 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos e isotrópicos de Smith para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude, longitude a covariável altitude em quilômetros somado à covariável precipitação média 102

NOTAÇÃO

i.i.d.: independente e identicamente distribuído.

sup: Supremo.

inf: Ínfimo.

max: Máximo.

$\xrightarrow{d}$: Convergência em distribuição.

$\xrightarrow{q.c.}$: Convergência quase certa.

$\lim_{y \downarrow 0} g(y)$: Limite de $g(y)$ quando y tende ao zero pela direita.

$\lim_{y \uparrow 0} g(y)$: Limite de $g(y)$ quando y tende ao zero pela esquerda.

$I(\cdot)$: Função indicadora.

$\equiv$: Idêntico.

$\|\cdot\|$: Norma de um vetor.

1 INTRODUÇÃO

A maioria dos modelos matemáticos desenvolvidos para eventos raros são baseados em modelos probabilísticos para extremos, ajustando-se aos dados por meio de técnicas estatísticas (DE HAAN; ZHOU, 2008). Estudos comprovam que essas técnicas são insuficientes para lidar com a tarefa de modelar extremos georeferenciados, ou seja, extremos espaciais (SMITH, et al. 2009). É necessário melhorar os modelos atuais de extremos espaciais e desenvolver técnicas e metodologias, a fim de melhor compreender, prever e quantificar a incerteza associada aos eventos extremos.

Embora as ferramentas para modelagem estatística de extremos univariados e multivariados estejam bem desenvolvidas, a extensão dessas ferramentas para modelar extremos espaciais integra uma área de pesquisa em desenvolvimento muito ativa atualmente (DE HAAN; PEREIRA, 2006; PADOAN, 2008; PADOAN; RIBATET; SISON, 2010; MANNSHARDT-SHAMSELDIN et al., 2010; RIBATET, 2011, DAVISON; PADOAN; RIBATET, 2012).

A modelagem estatística de extremos espaciais pode ser utilizada para solucionar uma série de problemas reais, tanto no ambiente urbano como em temáticas rurais. Em muitas regiões do Brasil, onde estão disponíveis longos registros climáticos, tem-se observado um aumento na frequência de eventos extremos que, em parte, explicam o número crescente de desastres naturais, como deslizamentos de terras e inundações, que são responsáveis por um número alarmante de mortes nas grandes cidades e por catástrofes no setor agrícola.

Um exemplo é a região Sul, que apresenta condições atmosféricas mais propícias para a formação de tempestades tornádicas no hemisfério sul (BROOKS et al., 2006). Nota-se um grande aumento de 109,5 eventos extremos/ano, durante o período de 1984-1993, para 127,4 eventos extremos/ano, para 1994-2003, registrado para o estado do Paraná (MARCELINO; NUNES; KOBIYAMA, 2006).

Em Janeiro de 2011, cerca de 83 municípios do estado do Paraná decretaram situação de emergência por causa das fortes chuvas. A defesa civil contabilizou 6 mortes e cerca de 930 mil pessoas foram afetadas. Mais de 26 mil pessoas tiveram que deixar suas casas em todo o estado; as chuvas causaram um prejuízo estimado em 400 milhões de reais. No contexto agropecuário, o estudo e a quantificação dos impactos das mudanças climáticas na agricultura é de fundamental importância para o mundo, e em particular

para o Brasil e a América Latina, que tem a sua economia profundamente dependente do agronegócio.

O relatório de desenvolvimento humano de 2007/2008 do *Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento-PNUD*¹ projetou um aumento de 600 milhões de pessoas no número de subnutridos até 2080. Já hoje algumas mudanças vêm sendo registradas em todo o mundo, como o maior número de quebras de safras e a morte de cabeças de gado, ressalta o relatório sobre o desenvolvimento mundial de 2008, do banco mundial. Para a América Latina, o *Painel Intergovernamental de Mudanças Climáticas-IPCC*² estima uma aridificação do semi-árido e a savanização do leste da Amazônia.

Para a agricultura, o *IPCC* prevê perda da produtividade de várias culturas, o que deve trazer consequências preocupantes para a segurança alimentar. Segundo o *Departamento de Economia Rural-Deral*³ a produção de grãos no estado do Paraná na safra 2010/11 deve atingir 31,52 milhões de toneladas, que terá um resultado inferior à produção de 2009/10, que teve um volume recorde de 32,82 milhões de toneladas. A quebra é atribuída aos eventos extremos de curto prazo. Uma das perguntas mais importantes relacionadas aos eventos extremos de curto prazo é se as suas ocorrências estão aumentando ou diminuindo com o tempo.

Geadas, ondas de calor e frio, chuvas intensas, inundações, veranicos, entre outros eventos extremos, afetam as plantações tornando o segmento de finanças e seguro rural sensíveis às mudanças climáticas. Dessa forma, faz-se necessário verificar a presença ou a ocorrência de alterações na variabilidade do clima em escala local, para que se tenha mais acurácia em afirmar a ocorrência ou não de catástrofes ambientais na região estudada (HABERLANDT, 2007).

Este trabalho tem os seguintes objetivos: modelar os extremos espaciais a fim de contribuir com a previsão destes; avaliar o comportamento dos modelos de extremos espaciais por meio de simulações e validação cruzada, em conjunto com a estimação por máxima verossimilhança pareada; quantificar através de mapas, os riscos extremos associados a dados meteorológicos do Estado do Paraná; descrever, de forma quantitativa, a variabilidade e o extremo espacial desses dados, de modo que se possa avaliar o quanto esses fenômenos surtem impactos na produção agrícola dessa região.

¹<http://www.pnud.org.br/home/>

²<http://www.wwf.org.br/naturezabrasileira>

³<http://www.agricultura.pr.gov.br/>

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo concentram-se os principais aspectos da Teoria de Valores Extremos bem como uma revisão dos principais artigos que contribuíram para o desenvolvimento dessa teoria em aplicações ao mercado financeiro e em dados ambientais, posteriormente faz-se uma revisão dos principais artigos, teóricos e aplicados, que contribuíram para o surgimento da Teoria de Extremos Espaciais.

2.1 Teoria de valores extremos e o mercado financeiro

Em 1700, Nicolas Bernoulli já se deparava com o problema de valor extremo, ao tratar da média da distância máxima à origem, de pontos aleatoriamente posicionados em uma linha reta de tamanho fixo. A Teoria de Valores Extremos (*TVE*) originou-se da necessidade dos astrônomos de utilizar ou rejeitar observações discrepantes; os primeiros artigos sobre o assunto são atribuídos a Fuller em 1914 e a Griffith em 1920, nos quais discutiram as utilidades dessa teoria, tanto no campo das aplicações como no dos métodos de análise matemática.

A *TVE* se aplica a finanças, em análise de risco, que busca estimar perdas futuras por meio da modelagem do comportamento menos frequente, ou raro, de perdas associadas a eventos de inadimplência ou de retornos de ativos financeiros. No último caso, os eventos de menor frequência são retornos que representam valorização ou desvalorização excessiva do ativo. Os órgãos reguladores das instituições financeiras, cuja preocupação é a saúde do sistema financeiro, esperam que elas sejam capazes de honrar seus compromissos mesmo em situações de crise, e, por isso, determinam que reservem capital suficiente para cobrir perdas em tais situações, com base no risco associado a cada instituição.

Além dos modelos para determinação desta reserva de capital, as instituições financeiras mantêm um modelo interno de análise de risco de mercado, sendo a metodologia de Value At Risk (*VAR*), que representa a perda esperada para um período de tempo (associado a certa probabilidade), a mais difundida.

A parte fundamental de um modelo de *VAR* é a escolha da distribuição de probabilidades para os retornos dos fatores de risco que afetam o valor de um portfólio.⁴ Subestima-se o *VAR* ao assumir normalidade dos retornos quando a verdadeira distribuição tem caudas mais pesadas, como é o caso das distribuições de valor extremo.

A *TVE* contribui para o aprimoramento dos modelos de *VAR* por concentrar-se no ajuste da distribuição apenas sobre os valores extremos da variável aleatória diminuindo, portanto, a influência dos valores centrais. A *TVE* concentra-se em classes especiais de distribuições de probabilidade: as distribuições Generalizadas de Valores Extremos (*GEV*), classe que inclui as distribuições de Gumbel, de Fréchet e de Weibull, e as distribuições Generalizadas de Pareto (*GPD*), como a Exponencial, a Pareto e a Beta. Na forma padrão, as distribuições *GEV* e *GPD* dependem de apenas um parâmetro chamado de índice de cauda.

Há duas abordagens principais para tratar variáveis aleatórias com valores extremos: *POT* (Picks Over Threshold) e *Block Maxima* (ou método de Gumbel). Enquanto *POT* consiste em ajustar uma distribuição de probabilidade (em geral *GPD*) para os valores que excedem um limiar, a abordagem de *Block Maxima* investiga o conjunto de valores máximos (mínimos), extraídos de blocos de observações, associam-se a eles as distribuições *GEV*. Para avaliação de risco de mercado, por exemplo, buscam-se associar probabilidades aos retornos máximos (mínimos) mensais, anuais, ou de períodos de qualquer extensão, pela abordagem *Block Maxima* (PINTO, 2002).

2.2 Teoria de valores extremos aplicada a dados ambientais

O marco inicial da *TVE* é o trabalho de Fisher e Tippet (1928). Nesse artigo, os autores provaram que a distribuição dos máximos ou dos mínimos de uma amostra aleatória converge ou para uma distribuição degenerada ou converge para um dos três tipos de distribuições de valores extremos, Gumbel ou do tipo *I*, Fréchet ou do tipo *II* e Weibull ou do tipo *III*. Uma outra contribuição importante ao desenvolvimento

⁴O portfólio é um conjunto de todo o trabalho em andamento na organização relacionado com o alcance dos objetivos do negócio. Toda organização tem um portfólio, mesmo que o não reconheça especificamente, consistindo-se nos trabalhos que estão em andamento na empresa, estejam estes trabalhos relacionados de alguma forma entre si ou não. Algumas organizações têm portfólios separados por departamentos, divisões ou unidades de negócio. Em última instância, deve haver um portfólio abrangente para a organização como um todo.

inicial da *TVE* foi o trabalho de Jenkinson (1955). Neste trabalho, o autor mostrou que as funções de distribuição acumulada de Gumbel, Fréchet, Weibull, apresentadas por Fisher e Tippet (1928), são casos particulares da distribuição *GEV*.

Outras contribuições importantes para o estudo de valores extremos foram dadas por Gnedenko (1943), que mostrou as condições necessárias e suficientes para a existência das distribuições assintóticas dos valores extremos e determinou que as caudas dessas distribuições, ou, a parte que trata dos valores máximos ou mínimos menos frequentes, pode ser modelada por alguns tipos de distribuições contínuas. Por exemplo, as caudas da distribuição de Gumbel correspondem às distribuições Exponencial, Gama, Normal ou Log-normal; as caudas da distribuição de Fréchet seguem uma distribuição de Cauchy, Pareto ou *t* de Student e as da distribuição de Weibull seguem uma distribuição Uniforme.

De forma geral, a previsão probabilística da ocorrência de eventos extremos é de vital importância para o planejamento das atividades sujeitas a seus efeitos adversos, e uma forma de modelar esses eventos é utilizar a teoria dos valores extremos proposta por Fisher e Tippet (1928). Para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição *GEV*, Prescott e Walden (1983) e Coles (2001) recomendaram o uso do método de Newton-Raphson.

Hosking (1985), por sua vez, modificou esse método para melhorar a velocidade e a taxa de convergência; quatro anos mais tarde, Macleod (1989) alterou-o novamente a fim de prevenir alguns erros quando de sua execução, visando a otimizar a inversão da matriz Hessiana. Estudos realizados por Hosking, Wallis e Wood (1985) sobre estimação dos parâmetros da distribuição *GEV* por meio do método da máxima verossimilhança, por meio de simulação computacional, revelaram que podem surgir problemas de não convergência no processo iterativo de Newton-Raphson devido ao não cumprimento das condições de regularidade. Situações similares foram reportadas por Martins e Stedinger (2000).

Sendo assim, por meio de um estudo cuidadoso, Smith (1985) obteve os seguintes resultados para o parâmetro de forma (ξ):

- i) quando $\xi > -0,5$, os estimadores de máxima verossimilhança são completamente regulares;
- ii) quando $-1 < \xi < -0,5$, os estimadores de máxima verossimilhança existem, mas são

não regulares;

iii) quando $\xi < -1$, os estimadores de máxima verossimilhança não existem.

Apesar dos problemas que podem ocorrer quando $\xi < -0,5$, esta situação, é extremamente rara para dados ambientais, e correspondem a distribuições com cauda superior muito curta e finita. De uma forma geral, ao se trabalhar com dados reais, os valores do parâmetro ξ geralmente se encontram no intervalo $(-0,5; 0,5)$ (HOSKING; WALLIS; WOOD, 1985).

2.3 Extremos espaciais aplicados a dados ambientais

“Extremos espaciais” referem-se a um elemento teórico que pode ser definido como uma técnica que busca descrever os padrões existentes nos dados espaciais e estabelecer, preferencialmente, de forma quantitativa, os relacionamentos entre as diversas variáveis geográficas e seus extremos. Uma metodologia capaz de avaliar essa técnica é o processo max-stable (SCHLATHER; TAWN, 2003; HASHORVA, 2006; SMITH; STEPHENSON, 2009). O processo max-stable surge de uma generalização infinito-dimensional da *TVE* que, por sua vez, fornece uma generalização natural das estruturas de dependência extrema em espaços contínuos (BLANCHET; DAVISON, 2011).

Partindo-se do processo max-stable, pode-se expressar distribuições bivariadas de formas fechadas (PADOAN; RIBATET; SISSON, 2010). O processo max-stable foi desenvolvido, inicialmente, por de Haan em 1984, o referido autor demonstra o processo pontual de Poisson no espaço bi-dimensional, em seguida, faz uma extensão ao processo max-stable em espaços contínuos. A partir daí, vários autores, tais como, Smith (1990), Schlather (2002), Kabluchko, Schlather e de Haan (2009) e Ribatet (2011) e Davison e Gholamrezaee (2011) desenvolvem este processo no sentido de torná-lo mais flexível em sua aplicação.

Aplicações recentes para dados de precipitação podem ser encontrados em Buishand, de Haan e Zhou (2008), Smith e Stephenson (2009), Padoan, Ribatet e Sisson (2010), Davison, Padoan e Ribatet (2012), extremos de neve Blanchet e Lehning (2010), Blanchet e Davison (2011) e dados de temperatura Davison e Gholamrezaee (2011). A teoria de extremos espaciais tem grande aplicação na área de finanças; no caso específico de retornos de ativos financeiros, os eventos de menor frequência são retornos que representam valorização ou desvalorização excessiva do ativo.

Aplicação na área de finanças pode ser encontrada em Hauksson et al. (2001), taxa de dados de swap⁵ Hsing, Klüppelberg e Kuhn (2004) e mercado de ações e retorno Poon, Rockinger e Tawn, (2003), (2004). A definição matemática de um modelo espacial de riscos extremos considera repetições independentes de um processo estocástico que existe em algum espaço real contínuo (DE HAAN; ZHOU, 2008).

De Haan e Pickands (1986) propuseram uma classe de processos estocásticos estacionários min-stable e mostraram que essa classe pode ser gerada por uma única realização de um processo de Poisson homogêneo em espaços discretos e contínuos. Smith (1990) define dois novos processos estocásticos max-stable, relacionados com a distribuição t multivariada e a normal multivariada. O autor estuda o comportamento desses dois modelos em dados de precipitação máxima em 21 estações no Sudeste da Inglaterra.

Coles (1993) desenvolve um procedimento para modelagem de eventos extremos com dependência espacial em espaços contínuos. O autor ilustra as técnicas do processo max-stable em dados simulados de tempestade sob a representação do processo Gaussiano extremo; o autor também faz uma aplicação em dados de precipitação diária, em 11 estações, em uma série histórica de 17 anos no Sudeste da Inglaterra. Coles comprova a existência de limitações na aplicabilidade das técnicas sugeridas em seu artigo. Janković (1998) investiga o problema de continuidade e o problema de convergência restrita em um conjunto finito de pontos para as propriedades do processo max-stable.

Schlather (2002) propõe uma nova classe de modelos, chamada de distribuições bivariadas de valores extremos, que são baseados em campos aleatórios estacionários Gaussianos. O autor mostra que essas realizações não são, necessariamente, funções semi-contínuas. Schlather e Tawn (2003) estudaram extremos de precipitação diária em 11 estações meteorológicas, numa série histórica de 19 anos, no Sudeste da Inglaterra e observaram uma fraca dependência extrema em relação à distância.

Hashorva (2006) considera transformações lineares de vetores aleatórios bi-

⁵Em finanças, swap (em português, “permuta”) são operações em que há troca de posições quanto ao risco e rentabilidade, entre investidores. O contrato de troca pode ter como objeto moedas, commodities ou ativos financeiros. As swaps mais comuns no mercado brasileiro são:

(i) swap de taxa de juros: troca da taxa de juros pré-fixados por juros pós-fixados (conforme a variação dos Certificados de Depósitos Interfinanceiros-*CDI*, por exemplo, que é um ativo financeiro corrigido pela taxa diária de juros) ou o inverso, para quem quer evitar o risco de uma alta nos juros.

(ii) swap cambial: troca de taxa de variação cambial (variação do preço do dólar) por juros pós-fixados.

variados assintoticamente esféricos e propõe uma nova classe de distribuições bivariadas max-stable, incluindo a função de distribuição bivariada Hüsler-Reiss max-stable. De Haan e Pereira (2006) afirmam que a teoria que eles desenvolveram para processos max-stable espaciais pode ser usada no desenvolvimento de problemas na previsão espacial, mas os autores não resolvem o problema diretamente no artigo.

Cooley, Davis e Naveau (2007) apresentam um método para aproximar a densidade condicional de um componente não observado sob um vetor aleatório max-stable; os autores utilizam uma medida espectral⁶, além disso, apresentam um novo modelo paramétrico para a medida espectral de uma distribuição multivariada max-stable. Os autores utilizam este modelo na realização de previsões de séries temporais e interpolação para aplicações espaciais.

Sang e Gelfand (2009) propuseram uma modelagem hierárquica para extremos espaciais com implementação bayesiana. Os autores baseiam-se na distribuição *GEV* para o processo de suavização espacial. Os autores realizam um estudo de simulação e uma aplicação em dados de precipitação coletados em 200 estações na região do Cabo na África do Sul. Neveau et al. (2009) propuseram uma simples conexão da *TVE* com a Geoestatística baseando-se no comportamento assintótico via madogramas, na sequência, ilustram o desempenho dessa metodologia por meio de simulações Monte Carlo e, posteriormente, analisam um conjunto de dados fornecidos pelo laboratório de pesquisa *Météo France*, referindo-se a precipitações máximas de 146 estações em um período de 51 anos (1953-2003).

Padoan, Ribatet e Sisson (2010) desenvolveram práticas inferenciais e métodos baseados no critério de verossimilhança composta para o ajuste do processo max-stable sobre a distribuição Gaussiana; os autores concluem que o procedimento é confiável e versátil, permitindo uma modelagem simultânea dos parâmetros marginais e da dependência no contexto espacial; a aplicação é realizada em extremos de precipitação nos Estados Unidos. Os autores utilizam 46 estações hidrométricas com registros diários

⁶Na matemática, particularmente em análise funcional, a Medida espectral é uma função definida em certos subconjuntos de um conjunto fixo no qual todos os valores possíveis são operadores autoadjuntos no espaço de Hilbert. Um Operador auto-adjunto é um operador linear em um espaço vetorial com produto interno, que é o adjunto de si mesmo. No caso de espaços de dimensão finita, a matriz que representa esse operador é igual à sua transposta conjugada. Na matemática, um espaço de Hilbert é uma generalização do espaço Euclidiano, que não precisa estar restrita a um número finito de dimensões.

de precipitação num período de 91 anos.

Blanchet e Lehning (2010) desenvolvem a teoria de valores extremos em duas vertentes: a primeira é baseada na interpolação espacial dos parâmetros da distribuição *GEV*; a segunda, na estimativa direta da distribuição *GEV* espacialmente suavizada com a utilização conjunta das estações. Os dados referem-se à profundidade máxima anual de neve na Suíça durante os invernos de 1965-1966 e de 2007-2008. Os autores mostram que os níveis de retorno e a variabilidade regional estão ligados aos principais padrões climatológicos da Suíça.

Blanchet e Davison (2011) descrevem a aplicação do processo max-stable sob a modelagem da dependência espacial da profundidade de neve na Suíça, e também relatam a importância de se modelar o efeito da anisotropia, levando-se em consideração várias covariáveis climatológicas. Os autores tomaram como base uma série histórica dos invernos de 1966 a 2008 em 101 estações. Genton, Ma e Sang (2011) por meio de simulações Monte Carlo, mostram o ganho na eficiência dos estimadores de máxima verossimilhança composta para expressões de forma fechada, no processo Gaussiano max-stable.

Kunihama, Omori e Zhang (2011) propuseram métodos de estimação bayesiana, com simulação Monte Carlo via Cadeias de Markov, para modelos espaciais não lineares e não Gaussianos, baseando-se em processos max-stable. Os autores verificaram a eficiência dos algoritmos por meio de simulações, e fazem uma aplicação em dados de extremos negativos de retorno sobre o índice de preços na bolsa de Tóquio. Os referidos autores detectaram a existência de dependência dos níveis de retorno ao longo do tempo.

Davison e Gholamrezaee (2011) descrevem uma aproximação na modelagem de observações máximas sob o domínio espacial, baseando-se em ajustes de processos max-stable derivados de campos aleatórios gaussianos. A modelagem proposta baseia-se na generalização das distribuições marginais de valores extremos sob o domínio espacial. Os autores utilizam o método de máxima verossimilhança pareada para estimação dos parâmetros e aplicam esta metodologia aos dados de temperatura máxima na Suíça, os máximos de temperatura são coletados em 17 estações meteorológicas entre os anos de 1961 a 2005 nos meses de Junho, Julho e Agosto. Os referidos autores não verificam a relação de dependência extrema por meio do coeficiente extremo e do madograma, tendo em vista que, utilizam um número pequeno de estações.

Kojadinovic, Shang e Yan (2012) propõem uma classe de bondade de ajustes baseando-se em testes de comparações entre estimadores não-paramétricos e estimadores paramétricos, de acordo com a função de dependência multivariada de Pickands. A performance desses testes são investigados por meio de simulações em uma amostra finita baseando-se nos modelos de Smith e Schlather. Os autores fazem uma aplicação dessa metodologia à dados de precipitação máxima mensal, os dados referem-se a uma série histórica dos verões de 1962 a 2008 em 79 estações meteorológicas, compreendidos entre os meses de Junho, Julho e Agosto mensurados na região de Zúrique-Suíça.

Davison, Padoan e Ribatet (2012) analisam os progressos recentes da modelagem estatística de extremos espaciais e os principais elementos da teoria de valores extremos e da geoestatística. Os autores descrevem a modelagem de extremos espaciais abrangendo-se modelos hierárquicos bayesianos, cópulas e processos max-stable, em seguida, analisam e comparam essas metodologias na modelagem de precipitação máxima em uma série histórica de 1962 a 2008 no Planalto da Suíça. Os dados de precipitação máxima são coletados em 51 estações meteorológicas de Junho a Agosto, período de verão.

3 METODOLOGIA

Encontram-se neste capítulo as principais metodologias que servirão de base para este trabalho, tanto na parte de simulação quanto na parte de aplicação em dados de precipitação.

3.1 Processo max-stable

O processo max-stable é uma extensão da teoria de valores extremos multivariados. Devido a isso, para o caso de dimensões infinitas, ao tentar ajustar esse processo, depara-se com o mesmo problema que se tem nos ajustes finito dimensional, sendo assim, antes de analisar este problema, faz-se um estudo dos principais aspectos da teoria de extremos univariados e multivariados e posteriormente, desenvolve-se este processo aos principais modelos de extremos espaciais.

3.1.1 O problema da distribuição assintótica de extremos

Seja Y uma variável aleatória qualquer e seja $F_Y(\cdot)$ sua função de distribuição. Define-se $Y_1, Y_2, \dots$ como sendo uma sequência infinita de variáveis aleatórias, todas elas independentes entre si, ou seja, cada uma possui a mesma distribuição de Y . Considere o seguinte problema: Encontrar duas sequências numéricas $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ tais que as sequências de variáveis aleatórias

$$a_n^{-1} [\max(Y_1, \dots, Y_n) - b_n] \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

converjam em distribuição para alguma variável aleatória não degenerada. Este é o problema da *distribuição assintótica de extremos* (BELITSKY; MOREIRA, 2007). Antes de analisar o problema, vejam-se os significados de “convergir em distribuição” e “variável aleatória degenerada”.

Sejam $Y_1, Y_2, \dots$ variáveis aleatórias quaisquer. Diz-se que a sequência $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ converge em distribuição à variável aleatória Y se $F_{Y_n}(\cdot)$, a função de distribuição da variável aleatória Y_n , converge conforme $n \rightarrow \infty$ a $F_Y(\cdot)$, a função de distribuição da variável aleatória Y , em cada ponto $y \in \mathbb{R}$ em que $F_Y(\cdot)$ é contínua. Esta última restrição, limita a convergência somente aos pontos de continuidade da função-limite (BELITSKY; MOREIRA, 2007). O teorema a seguir formaliza o conceito de convergência em distribuição.

Teorema 1 (*Teorema Central do Limite*) *Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Defina-se uma sequência de variáveis aleatória $S_n = Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ e então o teorema garantirá que $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}}$ converge em distribuição à variável aleatória Z , em que Z denota a variável aleatória Normal Padrão.*

Lembrando-se o significado de “convergir em distribuição” e lembrando-se que o valor da função de distribuição em qualquer valor y significa a probabilidade de sua variável aleatória assumir valores menores que y , conclui-se que o teorema alega que

$$P \left\{ \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \leq y \right\} \xrightarrow{d} P \{Z \leq y\}, \quad (2)$$

para qualquer que seja y , pois, como se sabe, a função de distribuição da variável aleatória Normal Padrão é contínua em todo y . Segue-se da relação (2) que se n for fixo e suficientemente grande, pode-se aproximar a probabilidade do lado esquerdo desta relação pela probabilidade do lado direito.

Esta aproximação é o exemplo da principal aplicação prática do *Teorema Central do Limite*: ele nos permite aproximar a probabilidade, que envolve variáveis aleatórias mais complexas, pela probabilidade que envolve a variável aleatória Normal Padrão. Com isso, explicam-se as razões do surgimento das constantes $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ em (1) na formulação do problema da distribuição assintótica de extremos.

Exemplo 1 Considere a seguinte situação: Seja $b_n = 1$ e $a_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$. Para essa escolha, tem-se que, para qualquer que seja o número real y , ocorre que

$$\begin{aligned} P \left[a_n^{-1} (\max \{Y_1, \dots, Y_n\} - b_n) \leq y \right] &= P \left[\max \{Y_1, \dots, Y_n\} \leq 1 + \frac{y}{n} \right] \\ &= P \left[Y_1 \leq 1 + \frac{y}{n} \right] \times \dots \times P \left[Y_n \leq 1 + \frac{y}{n} \right] = \left\{ F \left(1 + \frac{y}{n} \right) \right\}^n \\ &= \begin{cases} \left(1 + \frac{y}{n} \right)^n, & \text{se } y \leq 0 \text{ e } n > y, \\ 1^n, & \text{se } y \geq 0, \\ 0^n, & y \leq 0 \text{ e } n \leq y, \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} e^y, & \text{se } y \leq 0, \\ 1, & \text{se } y \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

No presente caso, as distribuições das variáveis aleatórias (1) convergem para a distribuição e^y , esta convergência foi ilustrada na Figura 1.

Pode-se observar, na última expressão desse exemplo, a utilização de um dos limites fundamentais do cálculo, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n} \right)^n = e^y \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Há na verdade um resultado mais forte que (3) o qual será usado no decorrer deste trabalho, qual seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n} + \Delta(n)\right)^n = e^y \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

em que $\Delta(n)$ é uma função arbitrária que decresce a zero mais rápido que $\frac{1}{n}$, como por exemplo, $\frac{1}{n^2}$, ou $\frac{1}{n^{1+1/2}}$, ou $\frac{1}{n \log(n)}$.

Figura 1 - Ilustração do Exemplo 1. As figuras apresentam as funções de distribuição da variável aleatória $a_n^{-1} [\max(Y_1, \dots, Y_n) - b_n]$ em que os Y 's são independentes e cada um deles tem distribuição uniforme em $[0, 1]$, e $b_n = 1$ e $a_n = \frac{1}{n}$; os gráficos, da esquerda para a direita, correspondem aos valores 1, 4 e 50 de n . A linha tracejada é o gráfico da distribuição limite

Assim, através de um estudo cuidadoso Belitski e Moreira (2007), fazem as seguintes observações:

i) Nem toda distribuição $F_Y(\cdot)$ admite sequências numéricas $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, tais que a sequência das variáveis aleatórias (1) convirja em distribuição para uma variável aleatória que seja não degenerada. Isso significa que, existem distribuições $F_Y(\cdot)$ tal que para quaisquer que sejam as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ as distribuições da variável aleatória (1) nem sequer convergem, ou, se convergem, têm como limite a função de distribuição de uma variável aleatória degenerada.⁷

ii) Para a existência de $F_Y(\cdot)$, há necessidade de escolher sequências numéricas $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ em que a sequência de variáveis aleatórias (1) convirja para uma

⁷Observe que no Teorema Central do Limite este denominador é da ordem de $\sqrt{n}$, pois $\text{Var}[S_n] = n\text{Var}[Y_1]$ devido ao fato que $Y_1, Y_2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. A substituição de $\sqrt{n}$ por n diminui a variância de tal forma que o limite é uma variável aleatória degenerada, ou seja, a massa de probabilidade é centrada em um único valor da variável aleatória.

distribuição não degenerada, estas sequências numéricas podem ser escolhidas de maneira que (1) tenha como limite uma função da família chamada distribuições de Fréchet; uma função da família chamada distribuições de Weibull; ou uma função chamada distribuição de Gumbel, que serão vistas na próxima seção.

3.1.2 Teoria de valores extremos para variáveis aleatórias univariadas

Suponha que $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sejam variáveis aleatórias *i.i.d.* com função de distribuição $F_Y(y)$, considera-se M_n como sendo o máximo das primeiras n variáveis aleatórias, isto é,

$$M_n = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n). \quad (4)$$

A função de distribuição da variável aleatória M_n , $F_{M_n}(y)$ é dada por

$$F_{M_n}(y) = P\{M_n \leq y\} = P\{Y_1 \leq y, \dots, Y_n \leq y\} = (F_Y(y))^n. \quad (5)$$

Mas, para n tendendo ao infinito, a função de distribuição de M_n pode ser degenerada. Com isso, seria de grande utilidade algum resultado assintótico para o máximo.

É fácil perceber que o máximo de uma amostra simplesmente tende para extremidade direita da distribuição quase certamente (*q.c.*)⁸, não importa se é finito ou infinito (KOTZ; NADARAJAH, 2000). Seja Y_F o ponto final à direita, então

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\{|M_n - Y_F| > \varepsilon\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{M_n < Y_F - \varepsilon\} = \\ \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_1 < Y_F - \varepsilon\}^n &= \frac{P\{Y_1 < Y_F - \varepsilon\}}{1 - P\{Y_1 < Y_F - \varepsilon\}} < \infty, \end{aligned}$$

e isso mostra que $M_n \xrightarrow{q.c.} Y_F$. Em forma de limite, a *TVE* assegura a existência de uma distribuição assintótica não degenerada, Z , para uma transformação linear de M_n , isto é, para constantes apropriadas $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (F_Y(y))^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq y\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq a_n y + b_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F_Y(a_n y + b_n))^n = Z(y), \end{aligned} \quad (6)$$

⁸Convergência Quase-Certa: **Definição** Seja Y_n uma sequência de variáveis aleatórias. Diz que Y_n converge quase certamente para Y , e escreve-se $Y_n \xrightarrow{q.c.} Y$, se $P[w \in \Omega : Y_n(w) \xrightarrow{n} Y(w)] = 1$. A convergência quase certa é um tipo de convergência mais forte do que a em probabilidade e por isso implica a convergência em probabilidade (mas o inverso não é verdadeiro).

para $y \in \mathbb{R}$ já que as possíveis funções de distribuições de Z (que serão apresentadas a seguir) são funções contínuas em $\mathbb{R}$.

Se (6) possui F (ou Y) pertencente ao domínio de atração do máximo (DAM) associado à distribuição de valores extremos Z , então $F \in DAM(Z)$ ou ($Y \in DAM(Z)$), ou seja, a coleção das F_Y tais que os máximos associados possuem uma distribuição limite não degenerada é denominada domínio de atração de Z .

Os seguintes teoremas são muito úteis para demonstração do $DAM(Z)$ de F , tomando-se como base esses teoremas, define-se uma classe de distribuições denominadas max-stable (ROOTZÉN, 1978; RESNICK, 1987; GALAMBOS, 1987; KOTZ; NADARAYA, 2000), base fundamental para a teoria de extremos espaciais. Mas, primeiramente, será apresentado o conceito e alguns resultados sobre a inversa de funções monótonas.

Definição 1 Se $\omega(y)$ for uma função não-decrescente e contínua à direita, define-se a função inversa generalizada, ω^{-1} , de $\omega(y)$, no intervalo $(\inf \{\omega(y)\}, \sup \{\omega(y)\})$, como sendo $\omega^{-1}(x) = \inf \{y | \omega(y) \geq x\}$.

Observa-se que a função de distribuição de uma variável aleatória é não-decrescente e contínua à direita. Assim, a inversa generalizada de uma função de distribuição Z , $Z^{-1}(x) = \inf \{y | Z(y) \geq x\}$, $0 < y < 1$, é chamada função quantil da função de distribuição Z .

Lema 1 1. Para ω definido acima, se $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ constantes e $H(y) = \omega(ay + b) - c$ tem-se que $H^{-1}(x) = a^{-1}(\omega^{-1}(x + c) - b)$;

2. Para ω definido no item 1., se ω^{-1} for contínua então $\omega^{-1}(\omega(y)) = y$;

3. Se Z for uma função distribuição não degenerada, existem $x_1 < x_2$ tais que $Z^{-1}(x_1) < Z^{-1}(x_2)$ são bem definidas e finitas.

Demonstração:

1. Tem-se que $H^{-1}(x) = \inf \{y | \omega(ay + b) - c \geq x\} =$

$$a^{-1}(\inf \{(ay + b) | \omega(ay + b) \geq x + c\} - b) = a^{-1}(\omega^{-1}(x + c) - b) \text{ como requisitado.}$$

2. A partir da definição de ω^{-1} é claro que $\omega^{-1}(\omega(y)) \leq y$. Se a desigualdade escrita for válida para algum y , a definição de ω^{-1} mostra a existência de $g < y$ com $\omega(g) \geq \omega(y)$ e, portanto, $\omega(g) = \omega(y)$ pois ω é não-decrescente. Para $x = \omega(g) = \omega(y)$ tem-se que $\omega^{-1}(x) \leq g$, considerando para $y > \omega(g) = \omega(y)$ tem-se $\omega^{-1}(x) \geq y$, contrariando a continuidade de ω^{-1} . Então, $\omega^{-1}(\omega(y)) = y$.

3. Se Z for não degenerada existem $y'_1 < y'_2$ tais que $0 < Z(y'_1) = x_1 < Z(y'_2) = x_2 \leq 1$.

Claramente, $y_1 = Z^{-1}(x_1)$ e $y_2 = Z^{-1}(x_2)$ são ambos bem definidos. Também, $Z^{-1}(x_2) \geq y'_1$ e a igualdade implicaria em $Z(g) \geq x_2$ para todo $g > y_1$ de modo que $Z(y'_1) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Z(y'_1 + \varepsilon) = Z(y'_1) \geq x_2$, contrariando $Z(y'_1) = x_1$. Então, $Z^{-1}(x_2) > y'_1 \geq y_1 = Z^{-1}(x_1)$, como requerido.

Corolário 1 *Se Z for uma função de distribuição não degenerada, $a > 0$, $\alpha > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ forem constantes tais que $Z(ay + b) = Z(\alpha y + \beta)$ para todo y , então $a = \alpha$ e $b = \beta$.*

Demonstração: Tome $x_1 < x_2$ e $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$, pelo item 3. do Lema 1, de modo que $y_1 = Z^{-1}(x_1)$ e $y_2 = Z^{-1}(x_2)$. Considerando a inversa de $Z(ay + b)$ e $Z(\alpha y + \beta)$ tem-se que $a^{-1}(Z^{-1}(x) - b) = \alpha^{-1}(Z^{-1}(x) - \beta)$ para todo x , pelo item 1. do Lema 1. Aplicando isto a x_1 e x_2 dados acima, obtém-se $a^{-1}(y_1 - b) = \alpha^{-1}(y_1 - \beta)$ e $a^{-1}(y_2 - b) = \alpha^{-1}(y_2 - \beta)$, portanto, segue-se que $a = \alpha$ e $b = \beta$.

Teorema 2 (*Khintchine*). *Seja $\{F_n\}$ uma sequência de funções de distribuição e Z uma função de distribuição não degenerada. Sejam $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ constantes tais que*

$$F_n(a_n y + b_n) = Z(y). \quad (7)$$

Seja Z_ uma função de distribuição não degenerada tal que*

$$F_n(\alpha_n y + \beta_n) \xrightarrow{d} Z_*(y), \quad (8)$$

se e somente se

$$a_n^{-1} \alpha_n \rightarrow a \quad (9)$$

$$a_n^{-1}(\beta_n - b_n) \rightarrow b$$

para algum $a > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, em que α_n e $\beta_n \in \mathbb{R}$, então

$$Z_*(y) = Z(ay + b). \quad (10)$$

Demonstração: Dados $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ e considerando-se $\alpha'_n = a_n^{-1} \alpha_n$, $\beta'_n = a_n^{-1}(\beta_n - b_n)$ e $F'_n(y) = F_n(a_n y + b_n)$ pode-se reescrever (7), (8) e (9), respectivamente, da seguinte forma

$$F'_n(y) \xrightarrow{d} Z(y), \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
F_n(\alpha_n y + \beta_n) &= F_n(a_n \alpha'_n y + (a_n \beta'_n + b_n)) = F_n(a_n(\alpha'_n y + \beta'_n) + b_n) = \\
&= F'_n(\alpha'_n y + \beta'_n) \xrightarrow{d} Z_*(y)
\end{aligned} \tag{12}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha'_n &\rightarrow a \\
\beta'_n &\rightarrow b
\end{aligned} \tag{13}$$

para algum $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Se (11) e (13) valem, então (12) vale com $Z_*(y) = Z(ay + b)$ pois, por (12) e (13), $F'_n(a_n y + b_n) \xrightarrow{d} Z_*(y)$, e, por (11), $F'_n(a_n y + b_n) \xrightarrow{d} Z(a_n y + b_n)$. Então, (7) e (9) implicam em (8) e (10). A prova estará completa mostrando-se que (11) e (12) implicam em (13) para, (10) ser válida.

Como, por hipótese, Z_* é não degenerada, existem dois pontos y' e y'' (que podem ser pontos de continuidade de Z_*) tais que $0 < Z_*(y') < 1$ e $0 < Z_*(y'') < 1$.

A sequência $\{\alpha'_n y' + \beta'_n\}$ precisa ser limitada pois, se não fosse, uma sub-sequência $\{n_k\}$ poderia ser escolhida de modo que $\{\alpha'_{n_k} y' + \beta'_{n_k}\} \rightarrow \pm\infty$, o que, por (11), (já que Z é uma função de distribuição) implicaria que o limite de $F'_{n_k}(\alpha'_{n_k} y' + \beta'_{n_k})$ seria zero ou um, contradizendo (12) para $y = y'$. Então, $\{\alpha'_n y' + \beta'_n\}$ é limitada e, similarmente, $\{\alpha'_n y'' + \beta'_n\}$ também é, o que mostra que as sequências $\{\alpha'_n\}$ e $\{\beta'_n\}$ são limitadas.

Dado que as sequências $\{\alpha'_n\}$ e $\{\beta'_n\}$ são limitadas, existem constantes $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ e uma sub-sequência $\{n_k\}$ de inteiros tais que $\alpha'_{n_k} \rightarrow a$ e $\beta'_{n_k} \rightarrow b$ e, segue-se que, $F'_{n_k}(\alpha'_{n_k} y + \beta'_{n_k}) \rightarrow Z(ay + b)$ em que, por (12), $Z(ay + b) = Z_*(y)$.

Por outro lado, se houvesse uma outra sub-sequência $\{m_k\}$ de inteiros tais que $\alpha'_{m_k} \rightarrow a' > 0$ e $\beta'_{m_k} \rightarrow b' \in \mathbb{R}$, tem-se, pelo Corolário 1, que $Z(a'y + b') = Z_*(y) = Z(ay + b)$ e, portanto, $a' = a$ e $b' = b$. Então, $\alpha'_n \rightarrow a$ e $\beta'_n \rightarrow b$.

Definição 2 *Seja uma sequência de variáveis aleatórias $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. e seja Y uma variável aleatória não degenerada e i.i.d. com a sequência. A variável aleatória Y é chamada max-stable se existem constantes apropriadas $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \geq 2$ que satisfaça $\max(Y_1, \dots, Y_n) \xrightarrow{d} a_n Y + b_n$.*

Definição 3 *Duas funções de distribuição Z_1 e Z_2 são do mesmo tipo se $Z_2(y) = Z_1(ay + b)$ para algumas constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$.*

Pelas definições 2 e 3, pode-se dizer que uma função de distribuição Z não

degenerada é max-stable se, para cada $n \geq 2$ existirem constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tais que $(Z(a_n y + b_n))^n = Z(y)$, ou seja, a função de distribuição Z^n é do mesmo tipo de Z .

Definição 4 Se $(F_Y(a_n y + b_n))^n \xrightarrow{d} Z(y)$ valer para alguma sequência $\{a_n > 0\}$ e $\{b_n \in \mathbb{R}\}$, F_Y pertencerá ao domínio de atração do máximo de Z , $F_Y \in DAM(Z)$.

Teorema 3 1. Uma função de distribuição não degenerada Z é max-stable se e somente se existir uma sequência $\{F_n\}$ de funções de distribuição e constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$F_n(a_{nk}y + b_{nk}) \xrightarrow{d} (Z(y))^{1/k}, \quad (14)$$

quando $n \rightarrow \infty$ para cada valor fixo de k ($k = 1, 2, \dots$).

2. Em particular, se Z for não degenerada, $DAM(Z)$ será não-vazio se e somente se Z for max-stable, $Z \in DAM(Z)$. Desta forma, a classe das funções de distribuição não degeneradas Z que aparecem como limite em lei, em (6), coincide com a classe das funções de distribuição max-stable.

Demonstração:

1. Se Z for não degenerada, $Z^{1/k}$ também será, para cada $k = 1, 2, \dots$. Se a Equação (14) valer para cada k , o Teorema 2 implicará que $(Z(y))^{1/k} = Z(\alpha_k y + \beta_k)$ para algum $\alpha_k > 0$ e $\beta_k \in \mathbb{R}$ e, assim, Z será max-stable. Reciprocamente, se Z for max-stable, $(Z(a_n y + b_n))^n = Z(y)$ para algum $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ e, considerando $F_n = Z^n$,

$$F_n(a_{nk}y + b_{nk}) = (Z^{nk}(a_{nk}y + b_{nk})) = (Z(y))^{1/k},$$

que está de acordo com (14)

2. Se Z for max-stable, $(Z(a_n y + b_n))^n$ para algum $\alpha_k > 0$ e $\beta_k \in \mathbb{R}$ e quando $n \rightarrow \infty$, $Z \in DAM(Z)$. Reciprocamente, se $DAM(Z)$ for não-vazio, $F \in DAM(Z)$, ou seja, $(F(a_n y + b_n))^n \xrightarrow{d} Z(y)$. Sendo assim, (14) é válido para $F_n = F^n$ e, assim, Z é max-stable.

Teorema 4 Seja $0 \leq \tau \leq \infty$ e suponha que para sequências numéricas $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, $u_n = \frac{y}{a_n} + b_n$ de tal forma que

$$n(1 - F(u_n)) \rightarrow \tau, \quad (15)$$

então

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau}. \quad (16)$$

Por convergência, se (16) conduz para algum τ , $0 \leq \tau \leq \infty$, então a Equação (15) converge.

Teorema 5 *Condições necessárias e suficientes para que a distribuição F_Y pertença ao DAM dos seguintes tipos*

Tipo I: $\int_0^\infty (1 - F(u)) du < \infty$,

$$\lim_{t \uparrow Y_F} \frac{1 - F(t + yg(t))}{1 - F(t)} = e^{-y},$$

para todo y real, em que

$$g(t) = \frac{\int_t^{Y_F} (1 - F(u)) du}{1 - F(t)},$$

para $t < Y_F$.

Tipo II: $Y_F = \infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(ty)}{1 - F(t)} = y^{-\gamma},$$

$\gamma > 0$, para cada $y > 0$.

Tipo III: $Y_F < \infty$ e

$$\lim_{w \downarrow 0} \frac{1 - F(Y_F - yw)}{1 - F(Y_F - w)} = y^\gamma,$$

$\gamma > 0$, para cada $y > 0$.

Alguns outros resultados teóricos podem ser muito úteis na demonstração do DAM(Z) de F_Y utilizando-se constantes de normalização, esses resultados, demonstrações e exemplos cujas distribuições pertencem a cada um dos três domínios da atração pode ser encontrado em Leadbetter, Lindgren e Rootzén (1983), Resnick (1987), Galambos (1987), Kotz e Nadarajah (2000).

Exemplo 2 Considere a distribuição de Pareto com parâmetros κ e γ , com função de distribuição definida por

$$F(y) = 1 - \kappa y^{-\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \kappa > 0 \quad y \geq \kappa^{1/\gamma}.$$

Tem-se que

$$\frac{1 - F(ty)}{1 - F(t)} = \frac{(ty)^{-\gamma}}{t^{-\gamma}} = y^{-\gamma},$$

assim F pertence ao DAM da distribuição de valores extremos Tipo *II*. Define-se

$$n(1 - F(u_n)) = \tau,$$

com

$$u_n = (\kappa n / \tau)^{1/\gamma},$$

como $\tau = y^{-\gamma}$ para $y \geq 0$ tem-se que

$$P\left\{(\kappa n)^{-1/\gamma} M_n \leq y\right\} \rightarrow \exp(-y^{-\gamma}),$$

assim

$$a_n = (\kappa n)^{-1/\gamma}, \quad b_n = 0.$$

As distribuições de valores extremos são distribuições max-stable (ZHANG, 2002).

Teorema 6 *Todas as distribuições max-stable são do tipo valor extremo, isto é, possui uma das seguintes estruturas funcionais citadas a seguir*

1. **Tipo I (Distribuição de Gumbel):**

$$Z(y) = \exp(-e^{-y}), \quad \text{para } -\infty < y < \infty.$$

2. **Tipo II (Distribuição de Fréchet):**

$$Z(y) = \exp(-y^{-\alpha}), \quad \text{para algum } \alpha > 0 \text{ e para } y > 0.$$

3. **Tipo III (Distribuição de Weibull):**

$$Z(y) = \exp(-(-y)^\alpha), \quad \text{para algum } \alpha > 0 \text{ e para } y \leq 0.$$

Teorema 7 (Fisher-Tippett) *Seja $M_n = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ em que $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$, são variáveis aleatórias i.i.d. Se para algumas sequências numéricas (constantes em n) $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq y) \xrightarrow{d} Z(y), \tag{17}$$

para alguma Z não degenerada, então Z é um dos três tipos citados no Teorema 6. Reciprocamente, cada função de distribuição Z do tipo valor extremo aparece como um dos limites em (17) e de fato, aparece quando Z é, ela mesma, a função de distribuição de cada Y_i .

Pelo Teorema 7 pode-se, então, estimar a distribuição assintótica de $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ diretamente da família Z sem fazer nenhuma referência à distribuição de Y pois tem-se que a distribuição Z (que corresponde à distribuição dos máximos $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$ em que Y_i , $i = 1, \dots, n$, são variáveis aleatórias *i.i.d.*) é uma das três distribuições descritas no Teorema 6. A expressão seguinte incorpora os três tipos de distribuições de valores extremos:

$$Z(y) = \begin{cases} \exp \left[- (1 + \gamma y)^{-\frac{1}{\gamma}} \right], & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \exp [-\exp(-y)], & \text{se } \gamma = 0 \end{cases}$$

em que $(1 + \gamma y) > 0$.

Pode-se, também, utilizar a reparametrização $\xi = -\gamma$ e, assim, obter:

$$Z(y) = \begin{cases} \exp \left[- (1 - \xi y)^{\frac{1}{\xi}} \right], & \text{se } \xi \neq 0 \\ \exp [-\exp(-y)], & \text{se } \xi = 0 \end{cases}$$

em que $(1 - \xi y) > 0$.

Pode-se, ainda, incorporar parâmetros de locação e escala na distribuição de valores extremos substituindo-se y por $\frac{y - \mu}{\sigma}$ em que $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Assim, a família locação-escala e forma pode ser escrita em uma distribuição *GEV* a partir de (que é muito útil na teoria de extremos espaciais)

$$Z(y; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left\{ - \left[1 - \frac{\xi (y - \mu)}{\sigma} \right]^{1/\xi} \right\}, \quad (18)$$

em que $1 - \xi (y - \mu) / \sigma > 0$, $\sigma > 0$ e μ e σ arbitrário. O caso $\xi = 0$ é interpretado $\xi \rightarrow 0$, que é

$$Z(y; \mu, \sigma, 0) = \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{(y - \mu)}{\sigma} \right] \right\}. \quad (19)$$

A condição $1 - \xi (y - \mu) / \sigma > 0$, $\sigma > 0$ garante que y seja limitado superiormente e inferiormente por $\frac{\mu + \sigma}{\xi}$, respectivamente, se $\xi > 0$ e $\xi < 0$.

O Teorema de Fisher-Tippett fornece a distribuição limite para o máximo coletado em blocos de tamanho n . Sendo $y_1, \dots, y_k$ as realizações da variável aleatória

Y , consideram-se blocos de tamanho k desta amostra, isto é, os dados amostrais são particionados em n blocos tais que $nk \leq m$. Define-se, então

$$\begin{aligned} M_1 &= \max \{y_1, \dots, y_k\} \\ M_2 &= \max \{y_{k+1}, \dots, y_{2k}\} \\ &\vdots \\ M_n &= \max \{y_{nk-k+1}, \dots, y_{nk}\}. \end{aligned}$$

Por meio dessa nova amostra, $M_1, \dots, M_n$, podem-se obter os estimadores de $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ e $\hat{\xi}$ e, assim, determinar a distribuição extremal de Z .

De modo geral, pode-se visualizar (Figura 2) os gráficos da função densidade de probabilidade e função de distribuição GEV , escrita na Equação (18). Com o auxílio do pacote *evd* do software *R*, criou-se uma função que varia em uma sequência de -1 a 1 para os parâmetros de locação (μ), escala (σ) e forma (ξ).

Figura 2 - Função densidade de probabilidade (lado direito) e função de distribuição acumulada (lado esquerdo) da distribuição GEV

Para visualizar o comportamento dos três casos particulares, foram construídos os gráficos da função densidade de probabilidade e função de distribuição (Figura 3). Observa-se que o parâmetro ξ determina a natureza das caudas da distribuição.

Figura 3 - Função densidade de probabilidade (lado direito) e função de distribuição acumulada (lado esquerdo) da distribuição generalizada de valores extremos com $\xi = -0,30$ (Weibull), $\xi \rightarrow 0$ (Gumbel) e $\xi = 0,30$ (Fréchet), para $\mu = 10$ e $\sigma = 2,6$

3.1.3 Teoria de valores extremos para variáveis aleatórias multivariadas

Suponha que $\{\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{iK}), i = 1, 2, \dots\}$ seja um processo aleatório K -dimensional com distribuição $F(\mathbf{y}) = F(y_1, \dots, y_K) = P\{Y_{ik} \leq y_k, k = 1, \dots, K\}$. Seja $\mathbf{M}_n = (M_{n1}, \dots, M_{nK})$ denotado o vetor de máximos pareados, em que $M_{nk} = \max\{Y_{ik}, 1 \leq i \leq n\}$. Se existem constantes de normalização $\mathbf{a}_n > 0$, $\mathbf{b}_n \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{M}_n \leq \mathbf{a}_n \mathbf{y} + \mathbf{b}_n\} &= P\{M_{nk} \leq a_{nk} y_k + b_{nk}, k = 1, \dots, K\} \\ &= F^n(a_{n1} y_1 + b_{n1}, a_{n2} y_2 + b_{n2}, \dots, a_{nK} y_K + b_{nK}) \\ &= F^n(\mathbf{a}_n \mathbf{y} + \mathbf{b}_n) \xrightarrow{d} Z(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (20)$$

como $n \rightarrow \infty$ e para que a distribuição limite $Z(\mathbf{y})$ seja não degenerada é necessário que cada Z não degenerada pertença à família GEV , então a distribuição Z é chamada de distribuição K -dimensional de valor extremo multivariado e F pertence ao domínio de atração do máximo de Z , ou seja, $DAM(Z)$.

Outras considerações teóricas dessas distribuições encontram-se em de Haan e Resnick (1977), de Haan (1985), Pickands (1981), e Resnick (1987). Na caracterização da distribuição extrema multivariada, as distribuições max-stable (ou min-stable) representam um papel central. Diz-se que uma distribuição $Z(\mathbf{y})$ é max-stable se para algum

$s > 0$ existem funções $\mathbf{a}_n(s)$ e $\mathbf{b}_n(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$Z^s(\mathbf{y}) = Z(\mathbf{a}_n(s)\mathbf{y} + \mathbf{b}(s)) = Z(a_1(s)y_1 + b_1(s), \dots, a_K(s)y_K + b_K(s)), \quad (21)$$

o teorema a seguir descreve a equivalência entre as distribuições de valores extremos multivariados e distribuições max-stable.

Teorema 8 *A classe de valores extremos multivariados é precisamente a classe de funções max-stable com distribuições marginais não degeneradas.*

Esta é a proposição 5.9 de Resnick (1987). Pickands (1981) fez uma modificação na representação de uma exponencial multivariada min-stable, com o objetivo de representar uma distribuição de Fréchet multivariada max-stable.

Teorema 9 *Suponha que $Z(\mathbf{y})$ seja uma distribuição limite satisfazendo (21), então*

$$Z(\mathbf{y}) = \exp \left\{ - \int_{D_k} \max_{1 \leq i \leq K} \left(\frac{w_i}{y_i} \right) dG(w) \right\}, \quad (22)$$

em que G é uma medida positiva finita sobre unidades simplex.

$$D_k = \left\{ (w_1, \dots, w_K) : \sum_{i=1}^K w_i = 1, \ w_i \geq 0, \ i = 1, \dots, K \right\}, \quad (23)$$

e G satisfaz

$$\int_{D_k} w_i dG(w) = 1, \ i = 1, \dots, K.$$

Observa-se que $Z(\mathbf{y}) = \exp \left\{ - \int_{D_k} \max_{1 \leq i \leq K} \left(\frac{w_i}{y_i} \right) dG(w) \right\}$ é chamado de expoente mensurável por de Haan e Resnick (1977). Assim, para modelar uma função de distribuição de valores extremos multivariados é de fato o modelo da função G mensurável. De Haan (1985) propôs um simples procedimento, não paramétrico, para a modelagem da função mensurável G . Coles e Tawn (1991) argumentaram que os modelos paramétricos são preferíveis quando se busca, simultaneamente, estimar o expoente mensurável e a estrutura de dependência.

3.1.4 Processo max-stable e unidades marginais de Fréchet

Teorema 10 *Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de índices e $\{Y_i(s)\}_{s \in \mathcal{S}}, i = 1, \dots, n$ sendo n repetições de um processo aleatório contínuo. Suponham-se duas sequências*

numéricas $a_n(s) > 0$ e $b_n(s) \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1}^n Y_i(s) - b_n(s)}{a_n(s)} \xrightarrow{d} Z(s), \quad s \in \mathcal{S}. \quad (24)$$

Se este limite existe, então $Z(s)$ é um processo max-stable.

Note que (24) não garante a existência do limite, uma vez que, Z pode ser uma variável aleatória degenerada, sendo assim, de Haan (1984) mostra que a classe dos processos limitados correspondem ao processo max-stable e portanto, enfatiza seu uso para modelar máximos anuais de extremos espaciais, por exemplo.

Sem perda de generalidades, se $a_n(s) = n$, $b_n(s) = 0$, em seguida, o processo correspondente, $\{Z(s)\}_{s \in \mathcal{S}}$, tem unidades marginais de Fréchet, com função de distribuição $F(z) = \exp(-1/z)$, $z > 0$. Este processo é obtido pela padronização da Equação (18) por meio de

$$\{Z(s)\}_{s \in \mathcal{S}} \equiv \left[\left\{ 1 + \frac{\xi(s)(Y(s) - \mu(s))}{\sigma(s)} \right\}^{1/\xi(s)} \right]_{s \in \mathcal{S}},$$

em que $\mu(s)$, $\xi(s)$ e $\sigma(s) > 0$ agora são funções contínuas. O processo Z ainda é um processo max-stable. Se Z é estacionário, o processo pode ser expresso por meio de sua representação espectral (DE HAAN; PICKANDS, 1986).

Teorema 11 (Teorema de Haan) *Seja $\{Y_j, U_j\}_{j \geq 1}$ um processo de Poisson homogêneo, Π , em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, com medida de contagem $\Pi(\cdot) = \sum_j \mathbf{I}_{(Y_j, U_j)}(\cdot)$ e medida de intensidade $\nu d(y) \times u^{-2} du$, em que $\mathbf{I}_{(Y_j, U_j)}(A)$ é a função indicadora do número aleatório de pontos num conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, ν é uma medida positiva e U_j é uma medida positiva finita. Para uma função mensurável $f(y - s)$ ($s \in \mathcal{S}$) tem-se que $\int_{\mathbb{R}^d} f(y - s) \nu d(y) = 1$, $\forall s \in \mathcal{S}$. O processo estocástico*

$$Z(s) = \max_{j=1, 2, \dots} \{U_j f(Y_j - s)\}, \quad s \in \mathcal{S} \quad (25)$$

é um processo estacionário max-stable. O Teorema 11 é utilizado em dois métodos para simulação de campos aleatórios max-stable e ambos surgem de processos pontuais, em certo sentido, fornece o número de eventos sobre os quais o máximo é tomado.

O primeiro método foi desenvolvido por Smith (1990), o qual representa este processo em termos de fenômenos ambientais, por exemplo, fenômenos de tempestade. O segundo método proposto por Schlather (2002), surge a partir de campos aleatórios Gaussianos que são escalados pela realização de um processo pontual.

Corolário 2 Para um conjunto finito de índices $s_1, \dots, s_K \in \mathcal{S}$ e limiares positivos $z_1, \dots, z_K$ para $K \in \mathbb{N}$, a distribuição do vetor aleatório $Z(s_1), \dots, Z(s_K)$ é

$$P[Z(s_k) \leq z_k, k = 1, \dots, K] = \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \max_{1 \leq k \leq K} \left\{ \frac{f(y - s_k)}{z_k} \right\} \nu(dy) \right]. \quad (26)$$

Segue-se então que as distribuições são unidades marginais de Fréchet:

$$P[Z(s) \leq z] = \exp \left(-z^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(y - s) \nu(dy) \right) = \exp(-1/z).$$

3.2 Modelos Espaciais

Atualmente, existem duas diferentes caracterizações de um processo max-stable. O primeiro, muitas vezes referido como o modelo de “Tempestade de Smith”, proposto por Smith em 1990. Mais recentemente, Schlather (2002), introduziu uma nova caracterização de um processo max-stable permitindo-se uma maior flexibilidade na aplicação desta teoria. Nesta seção, apresentam-se modelos max-stable que serão relevantes no estudo de extremos espaciais.

3.2.1 Modelo de Smith

Teorema 12 (*Modelo de Tempestade de Smith*) Seja $\{(\eta_i, y_i), i \in \mathbb{N}\}$ denotado o número de pontos de um processo de Poisson em $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ com intensidade $\eta^{-2} d\eta \times \nu d(y)$, em que ν é uma medida positiva em $\mathbb{R}$. Seja $\{f(y, s), y \in \mathbb{R}^d, s \in \mathcal{S}\}$ denotado uma função não-negativa, para todos os $s \in \mathcal{S}$, ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y, s) \nu d(y) = 1.$$

Então o processo aleatório

$$Z^* = \left\{ \max_{i \in \mathbb{N}} \{ \eta_i f(y_i, s) \}, s \in \mathcal{S}, \right\} \quad (27)$$

é max-stable com unidades marginais de Fréchet. Uma demonstração mais detalhada do Teorema 12 encontra-se no Anexo A

Smith (1990), dá a seguinte interpretação física para o processo definido em (27):

1. O espaço $\mathbb{R}^d$ pode ser interpretado como um espaço de “centros de tempestade”, por exemplo, “locais de tempestade”;

2. A função $f(y, \cdot)$ representa a forma de uma tempestade centrada em y , e η a magnitude da tempestade;
3. Finalmente, $\eta f(y, s)$ representa a quantidade de chuva recebida no local s para uma tempestade de magnitude η centrada em s e $Z^*(\cdot)$ em (27) é a precipitação máxima observada no local s sobre um número infinito de tempestades independentes.

Suponha que $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ e que $\{Y_j\}_{j \geq 1}$ sejam pontos aleatórios em $\mathbb{R}^2$. Para $K > 2$, a função de distribuição geral K -dimensional sob a representação do processo max-stable (25) não permite nenhuma forma analítica tratável, uma classe bivariada de modelos espaciais pode ser avaliada considerando-se o modelo da Equação (27), f , é uma densidade Gaussiana bivariada e ν é uma medida de Lebesgue⁹ (PADOAN; RIBATET; SISSON, 2010). Neste caso, para locais $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{s}_j$ a função de distribuição bivariada é definida por

$$P[Z(\mathbf{0}) \leq z_i, Z(\mathbf{h}) \leq z_j] = \exp \left[-\frac{1}{z_i} \Phi \left(\frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{1}{a(\mathbf{h})} \log \frac{z_j}{z_i} \right) - \frac{1}{z_j} \Phi \left(\frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{1}{a(\mathbf{h})} \log \frac{z_i}{z_j} \right) \right], \quad (28)$$

em que $\mathbf{h} = (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)^T$, $\mathbf{0}$ é a origem, Φ é a função de distribuição Gaussiana padronizada, ou seja, $\Phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^u \exp(-x^2/2) dx$, $a(\mathbf{h}) = (\mathbf{h}^T \Sigma^{-1} \mathbf{h})^{1/2}$ e Σ é a matriz de covariâncias de f , com covariância σ_{12} e desvios padrão $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

Uma demonstração mais detalhada na obtenção da função de distribuição acumulada da Equação (28) encontra-se no Anexo B. O resultado da distribuição bivariada de Z^* definido em (28) para duas estações s_1 e s_1 é então

$$P\{Z^*(s_1) \leq z_1, Z^*(s_2) \leq z_2\} = \exp \left\{ -\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_2}{z_1} \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right\} \quad (29)$$

em que Φ é a função de distribuição normal padrão, definida na Equação (28), e a é a distância de Mahalanobis definida por

$$a^2 = (s_1 - s_2)^T \Sigma^{-1} (s_1 - s_2). \quad (30)$$

⁹Em matemática, a medida de Lebesgue é a generalização padrão dos conceitos de comprimento de reta, área no plano e volume no espaço. A medida de Lebesgue está definida para uma ampla família de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Essa família é na realidade uma sigma-álgebra e contém os conjuntos abertos e conjuntos fechados.

Na Equação (29) a é a distância de Mahalanobis e é semelhante à distância euclidiana, exceto quando há diferentes pesos para cada componente $\Delta \mathbf{s} = (s_1 - s_2)$. a é positiva e os casos limites $a \rightarrow 0^+$ e $a \rightarrow \infty$, correspondem respectivamente, à dependência e independência. Portanto, para Σ fixo, a dependência diminui monotonicamente e continuamente à medida que $\|\Delta \mathbf{s}\|$ aumenta. Caso contrário, se $\|\Delta \mathbf{s}\|$ for fixo, a dependência diminui monotonicamente com o aumento de a .

A função densidade de probabilidade da Equação (28) é definida por

$$f(z_i, z_j) = \exp \left\{ -\frac{\Phi(w(\mathbf{h}))}{z_i} - \frac{\Phi(\nu(\mathbf{h}))}{z_j} \right\} \\ \left\{ \left(\frac{\Phi(w(\mathbf{h}))}{z_i^2} + \frac{\varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h}) z_i^2} - \frac{\varphi(\nu(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h}) z_i z_j} \right) \left(\frac{\Phi(\nu(\mathbf{h}))}{z_j^2} + \frac{\varphi(\nu(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h}) z_j^2} - \frac{\varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h}) z_i z_j} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\nu(\mathbf{h}) \varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})^2 z_i^2 z_j} + \frac{w(\mathbf{h}) \varphi(\nu(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})^2 z_i z_j^2} \right) \right\}, \quad (31)$$

em que φ é a função densidade Gaussiana, $w(\mathbf{h}) = a(\mathbf{h})/2 + \log(z_j/z_i)/a(\mathbf{h})$ e $\nu(\mathbf{h}) = a(\mathbf{h}) - w(\mathbf{h})$. Os detalhes da demonstração da Equação (31) encontra-se no Anexo C

3.2.2 Modelo de Schlather

O segundo método proposto por Schlather (2002) surge a partir de campos aleatórios Gaussianos que ocorrem com a realização de um processo pontual em $(0, \infty)$.

Teorema 13 (*Modelo de Tempestade de Schlather*) *Seja $Y(\cdot)$ um processo estacionário em $\mathbb{R}^d$ de tal forma que $E[\max\{0, Y(s)\}] = 1$ e $\{\eta_i, i \in \mathbb{N}\}$ denotados os pontos de um processo de Poisson em $\mathbb{R}_+$ com medida de intensidade $\eta^{-2}d\eta$. Então (SCHLATHER, 2002) um processo estacionário max-stable com unidades marginais de Fréchet pode ser definido por*

$$Z^* = \max_{i \in \mathbb{N}} \eta_i \max\{0, Y_i(s)\}, \quad (32)$$

em que $Y_i(\cdot)$ são cópias independentes e identicamente distribuídas da variável aleatória Y . Uma demonstração mais detalhada do Teorema 13 encontra-se no Anexo D.

Tal como acontece no modelo de Smith, o processo definido na Equação (32) também tem interpretação prática. Imagine-se $\eta_i Y_i(\cdot)$ como se tratando de eventos diários de precipitação espacial, diferindo-se apenas em suas magnitudes η_i . A diferença

desse modelo para o modelo de Smith é a não existência de uma forma determinística, ou seja, uma densidade normal multivariada para as tempestades, mas uma forma aleatória impulsionada pelo processo $Y(\cdot)$. O modelo de Smith e o de Schlather têm forte ligação. Para ver isso, considere o caso para o qual $Y_i(s) = f_0(y - s_i)$ em que f_0 é uma função densidade de probabilidade e s_i é um processo de Poisson homogêneo em $\mathbb{R}^d$. Com esta informação particular, o modelo (32) é idêntico ao modelo (27).

Pressupostos adicionais são necessários para obter, novamente, modelos úteis a partir de (32). Schlather (2002) propõe adotar $Y_i(\cdot)$ como sendo a parte positiva de um processo estacionário Gaussiano com função de correlação $\rho(\mathbf{h})$, de tal forma que $E[\max\{0, Y_i(s)\}] = 1$. Com esses novos pressupostos, pode-se mostrar que a função de distribuição acumulada bivariada é definida por

$$P[Z^*(s_1) \leq z_1, Z^*(s_2) \leq z_2] = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 2(\rho(\mathbf{h}) + 1) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}} \right) \right], \quad (33)$$

em que $\mathbf{h} \in \mathbb{R}_+$ é um vetor de distâncias Euclidiana $\|s_1 - s_2\|$ entre duas estações.

Mais uma vez, a função densidade pareada $Z^*(s_1), Z^*(s_2)$ é calculada por meio de diferenciação parcial em relação a z_1 e z_2 ,

$$f(z_1, z_2) = \left\{ \frac{\partial G(z_1, z_2)}{\partial z_1} \frac{\partial G(z_1, z_2)}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 G(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2} \right\} \exp \{-G(z_1, z_2)\}, \quad z_1, z_2 \geq 0, \quad (34)$$

em que

$$G(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left[1 + \sqrt{1 - 2(\rho(\mathbf{h}) + 1) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}} \right].$$

Apresenta-se na próxima seção as funções de correlação propostas para o modelo de Schlather.

3.2.3 Família de funções de correlação para o modelo de Schlather

Vejam-se algumas famílias de funções de correlação utilizadas no modelo de Schlather, a família de funções de correlação *Whittle-Matérn*, essa família de funções de correlação foi proposta por Bertil Matérn em 1986 e possui a seguinte forma

$$\rho(\mathbf{h}; \phi, \nu) = \frac{2^{2-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right), \quad h > 0$$

em que $K_\nu(\cdot)$ é a função *Bessel* modificada de terceiro grau de ordem $\nu > 0$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função *Gamma*. O primeiro desses parâmetros (ϕ) está relacionado ao alcance das

correlações, sendo que maiores valores indicam dependências espaciais de maior alcance. O segundo parâmetro (ν) está relacionado à suavidade do processo, de forma que, quanto maior ν , maior será a suavidade (DIGGLE; RIBEIRO Jr., 2007).

Outra opção é a família de correlação *Powered Exponential*, essa família de correlação possui características similares às da função de *Matérn* em que ϕ e ν são interpretados de forma análoga. Entretanto, neste caso, ν é limitado ao intervalo $[0; 2]$ e não define uma sequência de diferenciabilidade dos processos associados, que passam de não diferenciáveis para infinitamente diferenciáveis para $\nu > 2$. A família de função de correlação *Powered Exponential* pode ser escrita como

$$\rho(\mathbf{h}; \phi, \nu) = \exp \left\{ \left(-\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right)^\nu \right\}, \quad \mathbf{h} > 0$$

que depende dos parâmetros $\phi > 0$, $0 < \nu \leq 2$ e $\mathbf{h}$ é um vetor de distância euclidiana entre o i -ésimo e j -ésimo local $Z(s_i)$ e $Z(s_j)$. Nesse caso, o parâmetro ϕ determina a faixa de alcance. Essas duas funções são muito utilizadas devido à capacidade de produzir comportamentos distintos quanto à suavidade do processo, ou seja, é possível modelar processos mais ou menos diferenciáveis (DIGGLE; RIBEIRO Jr., 2007).

A próxima função de correlação é a família de funções *Bessel*, que é denotada por

$$\rho(\mathbf{h}; \phi, \nu) = \left(\frac{2\phi}{\mathbf{h}} \right)^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right), \quad \mathbf{h} > 0$$

em que J_ν é a função de *Bessel* de ordem ν .

Além disso, a função de correlação *Cauchy* é definida por

$$\rho(\mathbf{h}; \phi, \nu) = \left\{ 1 + \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right)^2 \right\}^{-\nu}, \quad \mathbf{h} > 0$$

em que $\phi > 0$ e $\nu > 0$ são os parâmetros de alcance e suavidade, respectivamente.

Na Figura 4 encontram-se as funções de correlação para as famílias paramétricas introduzidas por Schlather (2002), descritas anteriormente, com diferentes valores para o parâmetro de suavização, fixando-se o parâmetro limiar e o alcance ($\phi = 1$).

Na Geoestatística clássica, uma família de correlação bastante utilizada é a família *Spherical*, a qual possui a função de correlação definida por

$$\rho(\mathbf{h}; \phi) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right)^3; & 0 \leq \mathbf{h} \leq \phi \\ 0; & \mathbf{h} > \phi \end{cases},$$

Figura 4 - Gráficos das funções de Whittle-Matérn, Powered Exponential, Cauchy e as funções de correlação Bessel, da esquerda para a direita, os parâmetros de alcance e limiar são $\phi = \beta = 1$

em que $\phi > 0$ é o único parâmetro. Pannatier (1996) também destaca o comportamento linear dessa função, para pequenos valores de $\mathbf{h}$, e observa que a tangente à origem atinge o patamar a dois terços do alcance. Uma característica que diferencia essa função de correlação das demais, descritas anteriormente, é que ela tem um alcance finito ou seja, $\rho(\mathbf{h}) = 0$ para $\mathbf{h}$ suficientemente grande, ou seja, $\mathbf{h} > \phi$. A família de correlação *Spherical* é um dos modelos mais utilizados na geoestatística, em escalas uni, bi e tridimensional (WEBSTER; OLIVER, 2001). A falta de flexibilidade comparativamente à função de correlação de Matérn de dois parâmetros, restringe sua aplicação.

Outra função de correlação limitada e de alcance finito é o modelo *Cubic*. Sua Equação é definida por

$$\rho(\mathbf{h}; \phi) = \begin{cases} 7 \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right)^2 - 8,75 \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right)^3 + 3,5 \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right)^5 - 0,75 \left(\frac{\mathbf{h}}{\phi} \right)^7 & \text{para } \mathbf{h} \leq \phi \\ 0; & \text{para } \mathbf{h} > \phi. \end{cases}$$

O parâmetro ϕ possui um intervalo finito, aproximando-se do seu limite mais lentamente do que no modelo *Spherical*.

Gneiting (2002) apresentou uma família de funções bastante flexível na construção de funções de correlação em espaços temporais, a família de funções *Gneiting*. Esta função possui a seguinte forma

$$\rho(\mathbf{h}; \phi) = \frac{1}{(\phi^2 + 1)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{h}\|}{\phi^2 + 1} \right\},$$

em que $(\mathbf{h}, \phi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Outra função de curvatura inversa próxima à origem é o chamado modelo *Gaussiano*, com Equação definida por

$$\rho(\mathbf{h}; \phi) = \phi \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\mathbf{h}^2}{r^2}\right) \right\}.$$

Mais uma vez, ϕ está relacionado ao alcance das correlações e r é um parâmetro de distância. A função se aproxima, assintoticamente, de sua faixa de alcance e pode ser considerada como tendo um alcance efetivo de cerca de $\sqrt{3}r$ onde atinge aproximadamente 95% da sua variância.

A desvantagem desse modelo é que se aproxima da origem com gradiente zero, a variação subjacente se torna, contínua e duas vezes diferenciável, acarretando efeitos incomuns quanto à estimativa dos parâmetros (WACKERNAGEL, 2003). Outras classes de famílias de correlação, bem como os critérios para verificar a validade de funções candidatas, são descritas por Schlather (1999) e Webster e Oliver (2001).

3.3 Dependência espacial e o coeficiente extremo

Uma medida simples da dependência espacial extrema entre duas estações s_1, s_2 , ($\forall s_i \text{ e } s_j \in \mathcal{S}$), é o coeficiente extremo $\theta_{s_1 s_2}$. O próximo teorema ajuda a formalizar essa ideia.

Teorema 14 *Seja $Z(\cdot)$ um campo aleatório estacionário max-stable com unidades marginais de Fréchet. A dependência extrema sobre K localizações fixas em $\mathcal{S}$ pode ser resumida pelo coeficiente extremo, definido como*

$$P[Z(s_1) \leq z, \dots, Z(s_K) \leq z] = \exp\left(-\frac{\theta_K}{z}\right), \quad (35)$$

em que $1 \leq \theta_K \leq K$ com os limites inferiores e superiores correspondentes à completa dependência e independência e portanto, fornece uma medida do grau de dependência espacial entre as estações. Baseando-se no Teorema 14, θ_K pode ser tratado, convenientemente, como o número efetivo de estações independentes.

Devido às propriedades do processo max-stable com unidades marginais de Fréchet, a função de distribuição acumulada finita-dimensional pertence à classe de distribuições de valores extremos multivariados definido por

$$P[Z(s_1) \leq z_1, \dots, Z(s_K) \leq z_K] = \exp\{-V(z_1, \dots, z_K)\}, \quad (36)$$

em que V é uma função homogênea de ordem -1 chamada medida expoente (PICKANDS, 1981; COLES, 2001). Como consequência, a propriedade de homogeneidade de V implica em uma forte relação entre a medida expoente do coeficiente extremo, ou seja

$$\theta_K = V(1, \dots, 1). \quad (37)$$

Um caso especial da Equação (35) é considerar o caso bidimensional do coeficiente extremo definido por

$$P[Z(s_1) \leq z, Z(s_2) \leq z] = \exp \left\{ -\frac{\theta_{s_1 s_2}}{z} \right\}. \quad (38)$$

Após Schlather e Tawn (2003), $\theta_{s_1 s_2}$ é chamado de função do coeficiente extremo, que vem à fornecer informações suficientes sobre a dependência extrema em muitos problemas práticos, embora não caracterizam a distribuição completa.

As funções do coeficiente extremo para os modelos max-stable apresentados nas Equações (29) e (33) podem ser derivadas diretamente de sua distribuição bivariada. Substituindo-se z_1 e z_2 por z na Equação (29), tem-se que

$$\begin{aligned} P[Z(s_1) \leq z, Z(s_2) \leq z] &= \exp \left\{ -\frac{1}{z} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log 1 \right) - \frac{1}{z} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log 1 \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{z} \Phi \left(\frac{a}{2} \right) - \frac{1}{z} \Phi \left(\frac{a}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

conforme (28),

$$\theta_{s_1 s_2} = 2\Phi(a/2). \quad (39)$$

A distância de Mahalanobis a definida em (30) atribui diferentes pesos para diferentes componentes do vetor $(s_1 - s_2)$. Os casos limitantes $a \rightarrow 0^+$ e $a \rightarrow +\infty$ correspondem, respectivamente, à dependência perfeita, $\theta_{s_1 s_2} = 1$, e independência, $\theta_{s_1 s_2} = 2$. Para uma dada estação s_1 , superfícies $\{s_2 \in \mathcal{S}, \theta_{s_1 s_2} = c\}$ estão, de acordo com (39), de tal forma que (30) é constante. Se Σ é esférica, segue-se que essas superfícies são círculos em duas dimensões e esferas em três dimensões. Caso contrário, elas são elipses e elipsóides, respectivamente.

A mesma ideia pode ser empregada na Equação (33), isto é, fazendo-se $z_1 = z_2 = z$ tem-se que,

$$\begin{aligned} P[Z(s_1) \leq z, Z(s_2) \leq z] &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 2(\rho(\|s_1 - s_2\|) + 1) \frac{z^2}{4z^2}} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{z} \left(1 + \sqrt{\frac{2 - \rho(\|s_1 - s_2\|)}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

de acordo com (38),

$$\theta_{s_1 s_2} = 1 + \left\{ \frac{1 - \rho(\|s_1 - s_2\|)}{2} \right\}^{1/2}. \quad (40)$$

Nesse caso, o coeficiente extremo envolve a distância euclidiana entre dois locais s_1 e s_2 . Para uma dada estação s_1 , as superfícies com o mesmo coeficiente extremo $c \in [1, 2]$, ou seja, superfícies $\{s_2 \in S, \theta_{s_1 s_2} = c\}$, estão, de acordo com (40), de tal forma que $\|s_1 - s_2\| = c'$. Tais superfícies são círculos em duas dimensões e esferas em três dimensões.

O caso limite $\|s_1 - s_2\| \rightarrow 0^+$ corresponde à dependência perfeita $\theta_{s_1 s_2} = 1$. Como a maioria das funções de correlação na Geoestatística, o processo Gaussiano subjacente possui $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ quando $\mathbf{h} \rightarrow +\infty$, então o caso limite $\|s_1 - s_2\| \rightarrow +\infty$ corresponde a $\theta_{s_1 s_2} = 1 + 2^{-1/2} \approx 1,707$, portanto, dificilmente surgirão extremos independentes, mesmo em distâncias muito grandes (BLANCHET; DAVISON, 2011).

Além disso, como na função de correlação, no caso isotrópico podem ocorrer correlações maiores que -0,403 em $\mathbb{R}^2$ e -0,218 em $\mathbb{R}^3$ (MATÉRN, 1986), sob o modelo de Schlather, tem-se $\theta_{s_1 s_2} \leq 1,838$ para qualquer $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2$ e $\theta_{s_1 s_2} \leq 1,780$ para qualquer $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^3$. Assim, é impossível produzir extremos independentes usando tal processo, não importa o quão distantes estejam as estações. Davison e Gholamrezaee (2011) propuseram extensões para permitir independência em (33).

3.3.1 Propriedades do coeficiente extremo

Schlather e Tawn (2003) demonstram propriedades interessantes para $\theta_{s_1 s_2}$. A partir das ligações com o coeficiente extremo de duas variáveis, uma série de propriedades da função do coeficiente extremo são descritas: invariância à distribuição marginal; simetria sobre a origem $\theta_{s_1 s_2} = 1$; $1 < \theta_{s_1 s_2} < 2$ para $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^d$ com os limites inferiores e superiores correspondentes à completa dependência e independência na distância s_1, s_2 , respectivamente, se $Z(s)$ é um processo max-stable a função do coeficiente extremo é uma medida exata da dependência; e qualquer combinação convexa finita das funções do coeficiente extremo é uma função do coeficiente extremo. Propriedades adicionais da função coeficiente extremo são apresentadas no Teorema 15.

Teorema 15 *Seja $\theta_{s_1 s_2}$ uma função do coeficiente extremo pertencente a um processo max-stable estacionário em $\mathbb{R}^d$. Então são válidas as seguintes afirmações*

1. *A função $2 - \theta_{s_1 s_2}$ é positiva semi-definida;*

2. A função $\theta_{s_1 s_2}$ não é diferenciável em 0, a menos que $\theta_{s_1 s_2} = 1 \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}^d$;
3. Se a dimensão do campo aleatório é maior ou igual a dois e se o campo aleatório é isotrópico, então $\theta(\cdot)$ tem, no máximo, um salto na origem e é contínua em outro lugar.

Essas propriedades têm consequências fortes. A primeira indica que a estrutura de dependência espacial do processo estacionário max-stable pode ser caracterizada por uma função de correlação. A segunda afirma que uma função de correlação nem sempre leva a uma função de correlação extrema. Por exemplo, a função de correlação Gaussiana, $\rho(\mathbf{h}) = \exp(-\mathbf{h}^2)$, $\mathbf{h} \geq 0$ não é permitida, uma vez que é diferenciável em $\mathbf{h}=0$.

3.4 Campos aleatórios

Um campo aleatório é um processo estocástico que existe em algum espaço real d -dimensional definido por

$$\{Z(s_i) : s_i \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d\}, \quad (41)$$

em que, $Z(s_i)$ denota a variável aleatória Z na localização s_i do espaço sob a região de estudo $\mathcal{S}$. A descrição de um campo aleatório é obtido através das distribuições acumuladas finito-dimensionais F , para qualquer conjunto de localizações $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ pertencentes à região $\mathcal{S}$ e qualquer inteiro n , tal que

$$F_{S_1, S_2, \dots, S_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv P(Z(s_1) \leq z_1, Z(s_2) \leq z_2, \dots, Z(s_n) \leq z_n).$$

Devido a simplicidade inferencial, a distribuição de probabilidade gaussiana é uma das mais utilizadas na literatura. Sendo assim, um campo aleatório é dito ser gaussiano se Z segue uma distribuição normal em todas as localizações do espaço sob a região de estudo $\mathcal{S}$. Para todo conjunto finito de localizações $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ pertence a $\mathcal{S}$, $Z(\mathbf{s})$ segue uma distribuição normal n -variada e é completamente especificado pelo vetor de médias $n \times 1$, denotada por $\boldsymbol{\mu}$, e pela matriz de covariâncias $n \times n$, denotado por $\boldsymbol{\Sigma}$, que no contexto de geoestatística, em geral possui o comportamento de que quanto maior a distância euclidiana entre duas localizações s_i e s_j quaisquer, menor a correlação entre $Z(s_i)$ e $Z(s_j)$ (DIGGLE; RIBEIRO, 2007).

A interpretação probabilística é que, o campo aleatório $\mathcal{S}$ é uma particular realização de uma função aleatória $Z(s_i)$, sendo consistente quando pode-se inferir toda ou pelo menos parte da lei de distribuição de probabilidade que define este campo aleatório. No entanto, em problemas práticos, em cada ponto s_i tem-se apenas uma realização $Z(s_i)$ e o número de pontos é sempre finito. Isto torna usualmente impossível inferir sobre a distribuição de $Z(s_i)$. Em vista disto, certas hipóteses são necessárias, as quais envolvem diferentes graus de homogeneidade espacial, sendo comumente denominadas hipóteses de estacionariedade.

3.4.1 Hipótese de estacionariedade e processo isotrópico

Quando um processo estocástico é estacionário a distribuição de probabilidade associada ao campo aleatório não depende da grandeza de escala das coordenadas, ou seja, a distribuição conjunta de $(Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_n))$ é igual à distribuição conjunta de $(Z(s_1 + \mathbf{h}), Z(s_2 + \mathbf{h}), \dots, Z(s_n + \mathbf{h}))$, para qualquer distância $\mathbf{h}$. Sendo assim, um campo aleatório é estacionário de primeira ordem se para qualquer deslocamento do vetor $\mathbf{h}$, a esperança matemática é constante em relação à origem, conforme mostrado na relação a seguir

$$E \{Z(s_i)\} = E \{Z(s_i + \mathbf{h})\} = \mu. \quad (42)$$

Outra definição menos restritiva é que a média do campo aleatório é constante em toda a região de estudo e a correlação entre $Z(s_i)$ e $Z(s_j)$, para quaisquer s_i e s_j , só depende da distância entre as localizações, pois, a grandeza de escala de $Z(\cdot)$ não influencia na estrutura de correlação espacial. Esse tipo de estacionariedade é conhecida na literatura como estacionariedade fraca ou de segunda ordem. Uma observação importante é que a primeira restrição implica na segunda, no entanto, o contrário não é válido, exceto no caso de o processo espacial ser Gaussiano.

Uma função numérica com uma distribuição espacial é estacionária de segunda ordem, se além de cumprir a estacionariedade de primeira ordem, a covariância entre $Z(s_i)$ e $Z(s_i + \mathbf{h})$, separados por um vetor distância $\mathbf{h}$, depende apenas de $\mathbf{h}$, ou

seja,

$$\begin{aligned}
Cov[Z(s_i), Z(s_i + \mathbf{h})] &= E[(Z(s_i) - \mu) \times (Z(s_i + \mathbf{h}) - \mu)] \\
&= E[Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{h}) - \mu \times Z(s_i + \mathbf{h}) - \mu \times Z(s_i) + \mu^2] \\
&= E[Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{h})] - \mu \times E[Z(s_i + \mathbf{h})] - \mu \times E[Z(s_i)] + \mu^2.
\end{aligned}$$

Da Equação (42) tem-se que

$$\begin{aligned}
Cov[\mathbf{h}] &= E[Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{h})] - \mu^2 - \mu^2 + \mu^2 \\
&= E[Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{h}) - \mu^2],
\end{aligned} \tag{43}$$

ou seja,

$$E[Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{h})] = Cov[\mathbf{h}] + \mu^2.$$

Levando-se em consideração a Equação (43), a estacionaridade da covariância implica na estacionariedade da variância, sua expressão é definida por

$$\begin{aligned}
Var[Z(s_i)] &= E[Z(s_i) - \mu]^2 \\
&= E[Z^2(s_i) - 2\mu \times Z(s_i) + \mu^2] \\
&= E[Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{0})] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E[Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{0})] - \mu^2 \\
&= Cov[\mathbf{0}].
\end{aligned}$$

A estacionaridade da covariância também implica na estacionariedade do variograma, que é definido como

$$\begin{aligned}
2\zeta(\mathbf{h}) &= E[Z(s_i) - Z(s_i + \mathbf{h})]^2 \\
&= E[Z^2(s_i) - 2Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{h}) + Z^2(s_i + \mathbf{h})] \\
&= E[Z^2(s_i)] - 2E[Z(s_i) \times Z(s_i + \mathbf{h})] + E[Z^2(s_i + \mathbf{h})],
\end{aligned}$$

em que $2\zeta(\mathbf{h})$ representa uma função conhecida como variograma que será descrito na seção 3.4.2.

Um campo aleatório Gaussiano é dito homogêneo se ele for estacionário e o padrão de correlação não depender das direções, ou seja, isotrópico. Conforme Illian et al. (2008), o conceito de isotropia é análogo ao de estacionariedade. Em lugar de translações

por meio de vetores, as rotações ao redor da origem são consideradas. No caso do plano uma rotação é descrita por um ângulo θ entre 0° e 360° . Se $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ é um ponto no $\mathbb{R}^2$ tendo as coordenadas s_1 e s_2 , então o movimento executado por um ponto em torno de seu próprio eixo $\mathcal{R}_\theta \mathbf{s}$ possui coordenadas dadas por:

$$\begin{aligned} s_1\theta &= s_1 \cos \theta + s_2 \sin \theta \\ s_2\theta &= -s_1 \sin \theta + s_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Um processo N é considerado isotrópico se:

$$N = \{s_1, s_2, \dots\} \quad e \quad \mathcal{R}_\theta N = \{\mathcal{R}_\theta s_1, \mathcal{R}_\theta s_2, \dots\}.$$

Tendo a mesma distribuição para todo θ . Um processo espacial que é isotrópico e estacionário é chamado de movimento invariante.

3.4.2 Variograma e Semivariograma

Seja $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d\}$ um processo espacial estocástico, isto é, um campo aleatório definido em (41), define-se

$$\begin{aligned} \zeta^*(s_i, s_j) &= \frac{1}{2} \text{var} [Z(s_i) - Z(s_j)] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Var} [Z(s_i)] + \text{Var} [Z(s_j)] - 2\text{Cov} [Z(s_i), Z(s_j)] \}. \end{aligned} \quad (44)$$

Se $\zeta^*(s_i, s_j) \equiv \zeta(s_i - s_j)$, uma função que depende apenas da diferença entre as coordenadas $s_i - s_j$, então define-se $\zeta(s_i - s_j)$ como sendo o semivariograma de um processo espacial. Se $Z(\mathbf{s})$ é intrinsecamente estacionário, então $\zeta(s_i - s_j)$ é um parâmetro de um processo estocástico.

Na ausência de estacionariedade, $\zeta^*(\cdot)$ continua sendo uma função válida a partir da qual a matriz de covariâncias ($\text{Var} [Z(\mathbf{s})] = \mathbf{\Sigma}$) pode ser construída, no entanto, não refere-se ao semivariograma. A função $2\zeta(s_i - s_j)$ é chamada de variograma embora a literatura não seja consistente a esse respeito. Alguns autores definem $\zeta(s_i - s_j)$ à (44) e se referem a ela como o variograma. Chilès e Delfiner (1999, p.31), por exemplo, definem o termo $\zeta(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \text{Var} [Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})]$ de variograma “*tende a se estabelecer por sua simplicidade*” e reconhecem que $\zeta(\mathbf{h})$ é também chamado de semivariograma. Para maior clareza, refere-se ao longo deste trabalho $\zeta(s_i - s_j)$ como o semivariograma e $2\zeta(s_i - s_j)$ como o variograma.

Seja $Z(s_1), \dots, Z(s_n)$ observações de um processo espacial com média constante mas desconhecida, então

$$\zeta(s_i - s_j) = \frac{1}{2} E[(Z(s_i) - Z(s_j))^2], \quad (45)$$

um simples estimador definido por Matheron (1962, 1963), baseando-se em momentos, para (45) é dado por

$$\hat{\zeta}(s_i - s_j) = \frac{1}{2|N(s_i - s_j)|} \sum_{N(s_i, s_j)} \{Z(s_i) - Z(s_j)\}^2,$$

em que $N(s_i - s_j)$ é o conjunto de localizações pareadas com diferentes coordenadas $s_i - s_j$ e $|N(s_i - s_j)|$ é o número de pares distintos desse conjunto.

Para saber mais sobre o semivariograma a partir de um conjunto de dados observados, $Z(s_1), \dots, Z(s_n)$, pode-se traçar a diferença quadrática $\{Z(s_i) - Z(s_j)\}^2$ contra o “lag”(passo) de distância $\mathbf{h}$ (ou $\|\mathbf{h}\|$). O gráfico é apropriadamente chamado de semivariograma empírico, tendo em vista que, geralmente não é muito informativo, pois, o número de diferenças pareadas pode ser muito grande, sendo assim, as distâncias intervalares podem ser únicas para dados irregularmente espaçados e observações extremas causam muitos “valores aberrantes” na nuvem de pontos. Uma vez que $\{Z(s_i) - Z(s_j)\}^2$ são estimativas não viesadas do variograma com lag $s_i - s_j$, desde que a média do campo aleatório seja constante, um estimador mais utilizado é obtido através das somas das diferenças ao quadrado.

O estimador do semivariograma que representa a diferença das médias ao quadrado dos pontos que estão à distância $s_i - s_j = \mathbf{h}$ é comumente conhecido como o estimador clássico ou estimador de Matheron, desde que foi proposto por Matheron (1962), isto é

$$\hat{\zeta}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{N(\mathbf{h})} \{Z(s_i) - Z(s_j)\}^2.$$

O conjunto $N(\mathbf{h})$ consiste de localizações pareadas (s_i, s_j) tais que $s_i - s_j = \mathbf{h}$ e $|N(\mathbf{h})|$ denota o número de pares distintos em $N(\mathbf{h})$. Quando os dados são escassos ou possui um formato irregular, o número de pares distintos em $N(\mathbf{h})$ pode não ser suficiente para obter uma estimativa estável no lag $\mathbf{h}$ (CARLIN et al., 2005).

Quando os valores extremos são de interesse, o variograma não é uma ferramenta tão útil. Portanto, há uma necessidade de desenvolver ferramentas mais adequadas para a análise da dependência espacial de campos de max-stable (RIBATET, 2009).

3.4.3 Madograma

Uma ferramenta padrão na geoestatística, similar ao variograma é o madograma (MATHERON, 1987). O Madograma é definido por

$$\nu(s_1 - s_2) = \frac{1}{2} E [|Z(s_1) - Z(s_2)|], \quad (46)$$

em que $Z(\cdot)$ é um campo aleatório estacionário com média constante.

O problema com o Madograma é quase idêntico ao problema enfatizado com o variograma, uma vez que, variáveis aleatórias com unidades marginais de Fréchet não possuem média finita. Isso levou Cooley, Naveau e Poncet (2006) a considerar marginais idênticas da *GEV* com parâmetro de forma $\xi < 1$ para garantir que a média, e até mesmo a variância, sejam finitas. É possível usar a mesma estratégia para assegurar que o variograma existe teoricamente, mas, trabalha-se com o madograma por ser particularmente adequado para valores extremos e tem fortes ligações com o coeficiente extremo.

Utilizando-se argumentos simples e alguns resultados obtidos por Hosking et al. (1985), em momentos de probabilidade ponderada, Cooley, Naveau e Poncet (2006) mostraram que

$$\theta(s_1 - s_2) = \begin{cases} u_\beta \left(\mu + \frac{\nu(s_1 - s_2)}{\Gamma(1-\xi)} \right), & \xi < 1, \quad \xi \neq 0 \\ \exp \left(\frac{\nu(s_1 - s_2)}{\lambda} \right), & \xi = 0, \end{cases} \quad (47)$$

em que μ , λ e ξ são os parâmetro de localização escala e forma da distribuição *GEV*, $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma e

$$u_\beta(\cdot) = \left(1 + \xi \frac{y - \mu}{\lambda} \right)_+^{1/\xi}. \quad (48)$$

Pode-se estimar a Equação (46) da seguinte forma

$$\hat{\nu}(s_1 - s_2) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |z_i(s_1) - z_i(s_2)|, \quad (49)$$

em que $z_i(s_1)$ e $z_i(s_2)$ são as i -ésimas observações do campo aleatório na posição s_1 e s_2 e n é o número total de observações. Se a isotropia é assumida, então é preferível usar uma versão na forma “fechada” do estimador

$$\hat{\nu}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2n |B_{\mathbf{h}}|} \sum_{(s_1 - s_2) \in B_{\mathbf{h}}} \sum_{i=1}^n |z_i(s_1) - z_i(s_2)|, \quad (50)$$

em que $B_{\mathbf{h}}$ é o conjunto de pares de localizações cuja distância pareada pertence a $[\mathbf{h} - \varepsilon, \mathbf{h} + \varepsilon]$, para $\varepsilon > 0$.

3.5 Método de máxima verossimilhança

Dada uma distribuição de probabilidade cujos parâmetros são desconhecidos, tem-se como objetivo, a partir de uma amostra de uma determinada população, estimar o valor do parâmetro da distribuição de probabilidade que representa toda a população. Assim, considerando $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ uma amostra aleatória *i.i.d.* com distribuição de probabilidade $p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi})$ em que $\boldsymbol{\psi}$ é o vetor de parâmetros a serem estimados, deseja-se obter uma estimativa do valor de $\boldsymbol{\psi}$ ou de uma função de $\tau(\boldsymbol{\psi})$ a partir dos valores observados $z_1, \dots, z_n$. O Método de Máxima Verossimilhança, por ser um método de estimação pontual, nos fornecerá um valor numérico de uma estatística $T(\mathbf{Z})$ para estimar $\tau(\boldsymbol{\psi})$.

Dada uma amostra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, o Método de Máxima Verossimilhança consiste em maximizar a função de verossimilhança definida por $L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z}) = p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi}) = p(z_1; \boldsymbol{\psi}) \times p(z_2; \boldsymbol{\psi}) \times \dots \times p(z_n; \boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\psi} \in \Theta$ em que Θ representa o espaço paramétrico de $\boldsymbol{\psi}$, isto é, o método consiste em encontrar $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ tal que $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\psi} \in \Theta} L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z})$ em que $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ é o vetor das estimativas de $\boldsymbol{\psi}$ e $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{Z})$ é o vetor dos estimadores de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\psi}$.

Como o valor de $\boldsymbol{\psi}$ que maximiza $L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z})$ é o mesmo que maximiza a função logarítmica, ou seja, $\ell_p(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z}) = \ln(L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z}))$ e $\ell_p(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z})$ sempre está definida pois $L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z})$ é positiva, então, por simplicidade, maximiza-se $\ell_p(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z})$, também chamada de *função suporte*.

O método de Máxima Verossimilhança pode apresentar algumas dificuldades práticas, tais como:

1. O cálculo de derivadas é muito complicado;
2. A resolução $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z}) = 0$ nem sempre possui solução analítica;
3. $L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z})$ não possui ponto de máximos ou $L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z})$ possui máximos locais.

Devido às dificuldades práticas, deve-se recorrer a métodos numéricos de otimização para o cálculo de um estimador de máxima verossimilhança.

Suponha que o modelo paramétrico seja regular¹⁰ e que Θ seja um sub-

¹⁰Um modelo paramétrico $P_{\boldsymbol{\psi}}$ é denominado regular se: Todos os modelos $P_{\boldsymbol{\psi}}$ forem contínuos com função densidade $p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi})$ ou todos os modelos $P_{\boldsymbol{\psi}}$ forem discretos com função de probabilidade $p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi})$ existindo um conjunto $\{z_1, z_2, \dots\}$, independente de $\boldsymbol{\psi}$, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} p(z_i; \boldsymbol{\psi})$, para todo i .

conjunto aberto em $\mathbb{R}$. Por simplicidade, será assumido que $p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi})$ seja uma função densidade. A discussão e os resultados são essencialmente idênticos para o caso discreto. As seguintes condições serão consideradas.

1. O conjunto $A = \{\mathbf{z} : p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi}) > 0\}$ não depende de $\boldsymbol{\psi}$ em que $p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi})$ é uma densidade. E, para todo $\mathbf{z} \in A$, $\boldsymbol{\psi} \in \Theta$, $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} \ln(p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi}))$ existe e é finita;
2. Se T é alguma estatística tal que $E_{\boldsymbol{\psi}}(|T|) < \infty$, para todo $\boldsymbol{\psi} \in \Theta$, então

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} \int T(\mathbf{z}) p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi}) d\mathbf{z} = \int T(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\psi}) d\mathbf{z},$$

sempre que o lado direito da Equação acima for finito.

As funções densidade de probabilidade para os modelos max-stable foram introduzidas recentemente e são conhecidas analiticamente apenas para o caso bivariado (PADOAN; RIBATET; SISSON, 2010). Sendo assim, ajustar um processo max-stable aos dados não é tarefa fácil. Como os dados espaciais frequentemente lidam com um número grande de localidades, em nosso estudo são 232 estações meteorológicas, é impossível escrever analiticamente a distribuição conjunta (RIBATET, 2009). Consequentemente, substitui o procedimento de ajuste da “máxima verossimilhança total” pela “máxima verossimilhança pareada”.

3.5.1 Método de máxima verossimilhança pareada

No campo dos modelos paramétricos, a inferência estatística está bem estabelecida usando-se a função de verossimilhança. Seja $\mathcal{K} = \{s_1, \dots, s_K\} \subset \mathcal{S}$ denotado as 232 estações meteorológicas cujos máximos são usados para ajustar os modelos aos dados. Cálculos de verossimilhança requerem uma função de densidade conjunta de $\{Z^*(s_1), \dots, Z^*(s_K)\}$ mas no contexto de processos max-stable, isto é inviável porque somente as distribuições bivariadas marginais estão disponíveis. Padoan, Ribatet e Sisson (2010) propuseram a substituição da verossimilhança total por uma função de verossimilhança pareada (COX; REID, 2004; VARIN, 2008). Esta ideia também é usada por Blanchet e Davison (2011), Davison, Padoan e Ribatet (2012) e por Davison e Gholamrezaee (2011).

Seja $z_d^{(i)}$ denotado o d -ésimo máximo observado para a i -ésima estação, transformado de maneira que a série temporal $(z_1^{(i)}, \dots, z_D^{(i)})$ em cada estação tenha

distribuição de Fréchet unitária, aqui $d \in \{1, \dots, D\}$, com $D=36$ anos, e $i \in \{1, \dots, K\}$ com $K=232$ estações meteorológicas. Seja $L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{z})$ a função de verossimilhança para o i -ésimo e j -ésimo local, em que $i = 1, \dots, K-1$ e $j = i+1, \dots, K$, sendo K o número de estações dentro da região de estudos $\mathcal{S}$. Então a verossimilhança pareada é definida por

$$L\left(\boldsymbol{\psi}; z_d^{(i)}, z_d^{(j)}\right) = \prod_{i < j} \prod_d f\left(z_d^{(i)}, z_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}\right), \quad (51)$$

em que cada $f\left(z_d^{(i)}, z_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}\right)$ é uma função densidade de probabilidade marginal bivariada, baseando-se nos dados, que encontram-se no i -ésimo e j -ésimo local, por consequência, o logaritmo da função de verossimilhança pareada definido em (51) pode ser escrito como

$$\ell_p\left(\boldsymbol{\psi}; z_d^{(i)}, z_d^{(j)}\right) = \text{Ln}\left[L\left(\boldsymbol{\psi}; z_d^{(i)}, z_d^{(j)}\right)\right] = \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \log f\left(z_d^{(i)}, z_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}\right), \quad (52)$$

a fim de limitar o comportamento caracterizado por um processo max-stable (25) que exige distribuições de Fréchet unitárias, sendo assim, considera-se a bijeção $(Y_d^{(i)}, Y_d^{(j)}) = g\left(Z_d^{(i)}, Z_d^{(j)}\right)$ com função inversa definida por

$$\begin{aligned} Z_d^{(i)} &= \left(1 + \xi_i \frac{y_d^{(i)} - \mu_i}{\sigma_i}\right)^{1/\xi_i}; \\ Z_d^{(j)} &= \left(1 + \xi_j \frac{y_d^{(j)} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^{1/\xi_j}, \end{aligned}$$

em que $Z_d^{(i)} \equiv Z(s_i)$ e $Y_d^{(j)} \equiv Y(s_j)$, e para cada marginal Y , as constantes μ , ξ e $\sigma > 0$ garantem que Z é distribuído com unidades marginais de Fréchet. O resultado da distribuição bivariada é

$$f_{Y_d^{(i)}, Y_d^{(j)}}\left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}\right) = f_{Z_d^{(i)}, Z_d^{(j)}}\left[g^{-1}\left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}\right)\right] \left|J\left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}\right)\right|,$$

em que $f_{Z_d^{(i)}, Z_d^{(j)}}\left(z_d^{(i)}, z_d^{(j)}\right)$ denotam as densidades definidas em (31) e (34), e $\left|J\left(g\left(y_d^{(i)}\right)\right)\right|, \left|J\left(g\left(y_d^{(j)}\right)\right)\right|$ é o jacobiano da transformação $g : \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}$ avaliado nas observações $z_d^{(i)}, z_d^{(j)}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \left|J\left(g\left(z_d^{(i)}\right)\right)\right| &= \frac{1}{\sigma_i} \left(1 + \xi_i \frac{y_d^{(i)} - \mu_i}{\sigma_i}\right)^{1/\xi_i - 1}; \\ \left|J\left(g\left(z_d^{(j)}\right)\right)\right| &= \frac{1}{\sigma_j} \left(1 + \xi_j \frac{y_d^{(j)} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^{1/\xi_j - 1}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\left| J \left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)} \right) \right| = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \left(1 + \xi_i \frac{y_d^{(i)} - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{\frac{1}{\xi_i} - 1} \left(1 + \xi_j \frac{y_d^{(j)} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^{\frac{1}{\xi_j} - 1}.$$

A mudança de variável permite o uso das marginais da distribuição *GEV* (sob unidades marginais de Fréchet) sem reformular a definição do problema, assim, a log-verossimilhança pareada definida na Equação (52) permite a avaliação simultânea dos parâmetros de dependência das caudas das Equações (31) e (34), entre localizações pareadas e também os parâmetros de locação, escala, e de forma da distribuição marginal em cada local. Pode-se observar que os parâmetros não podem ser diretamente estimados por uma solução analítica da equação composta. No entanto, rotinas de maximizações numéricas do método quasi-Newton (por exemplo, Broyden 1967) podem ser aplicadas a fim de obter estimativas de máxima verossimilhança.

Seja $L \left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}, \boldsymbol{\psi} \right)$ a verossimilhança para o i -ésimo e j -ésimo local, em que $i = 1, \dots, K-1$, $j = i+1, \dots, K$, K é o número de estações dentro da região, $y_d^{(i)}, y_d^{(j)}$ são as observações conjuntas para o i -ésimo e j -ésimo local e $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_R)$ são os parâmetros a serem estimados. Então o logarítmico da função de verossimilhança pareada é definido por

$$\ell_p(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{y}) = \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \log f \left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi} \right), \quad (53)$$

em que $f \left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)} \right)$ é a função densidade de probabilidade bivariada com unidades marginais de Fréchet sob o processo max-stable, isto é, proveniente da Equação (31) para o modelo de Smith ou da Equação (34) para o modelo de Schlather, o primeiro somatório é sobre todos os pares distintos de estações, ou seja, todos os termos $K(K-1)/2$.

De forma análoga à verossimilhança padrão e, através da diferenciação da verossimilhança parada com relação ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\psi}$, deriva-se a Equação (53) gerando-se a seguinte função

$$U(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} \ell_p(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{y}) = \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} \log f \left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi} \right),$$

que é denominada, neste contexto, como função (ou vetor) *escore pareado*. As estimativas do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\psi}$ podem ser obtidas resolvendo a equação *escore pareado*, $U(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{y}) = 0$, ou seja,

$$\sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} \log f \left(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \hat{\boldsymbol{\psi}} \right) = 0.$$

Sob certas condições de regularidade, uma expansão em série de Taylor sobre $\boldsymbol{\psi}_g$ conduz a

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \frac{\partial \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}_g)}{\partial \boldsymbol{\psi}} + \left(\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}_g \right)^T \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \frac{\partial^2 \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}_g)}{\partial \boldsymbol{\psi} \partial \boldsymbol{\psi}^T} \doteq 0 \\ \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\psi}} & \doteq \boldsymbol{\psi}_g - \left\{ \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \frac{\partial^2 \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}_g)}{\partial \boldsymbol{\psi} \partial \boldsymbol{\psi}^T} \right\}^{-1} \left\{ \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \frac{\partial \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}_g)}{\partial \boldsymbol{\psi}} \right\}, \end{aligned} \quad (54)$$

em que $\boldsymbol{\psi}_g$ é o valor que minimiza a Informação de Kullback–Leibler ¹¹ definida como

$$KL(f_{\boldsymbol{\psi}}, g) = \int \log \left(\frac{g(\mathbf{y})}{f(\mathbf{y}; g)} \right) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Pode ser demonstrado utilizando-se o Teorema 1 e a Lei Fraca dos Grandes Números (DAVISON, 2003) que a Equação (54) implica em

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} \dot{\sim} N(\boldsymbol{\psi}_g, H(\boldsymbol{\psi}_g)^{-1} J(\boldsymbol{\psi}_g) H(\boldsymbol{\psi}_g)^{-1}), \quad (55)$$

em que $J(\boldsymbol{\psi}_g)$ é a variância da função *escore*,

$$J(\boldsymbol{\psi}_g) = n \int \frac{\partial \log f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} \frac{\partial \log f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}^T} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

e $H(\boldsymbol{\psi}_g)$ é a informação de Fisher,

$$H(\boldsymbol{\psi}_g) = -n \int \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi} \partial \boldsymbol{\psi}^T} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Observa-se que, se por um acaso, o modelo candidato $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\psi})$ for o verdadeiro, então $H(\boldsymbol{\psi}_g) = -J(\boldsymbol{\psi}_g)$, de modo que a Equação (55) reduz-se à distribuição normal assintótica para a estimativa de máxima verossimilhança.

O uso de verossimilhança pareada, como um caso específico de verossimilhança completa, conduz a simplificações adicionais. Para ver isso, considera-se o gradiente de log-verossimilhança pareada,

$$\nabla \ell_p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\psi}) = \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \nabla \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}),$$

para cada i e j fixo,

$$\sum_{d=1}^D = \nabla \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi}) = 0,$$

¹¹A Informação de Kullback–Leibler é uma medida da similaridade entre o modelo estatístico e a verdadeira distribuição dos dados. Assume-se que a distribuição dos dados seja $g(y)$ e que o modelo estatístico proposto para aproximar $g(y)$ seja $f(y)$, então $KL(f; g) = E\{\log g(Y)\} - E\{\log f(Y)\}$, satisfazendo: (i) $KL(f; g) \geq 0$ e (ii) $I(f; g) = 0$, se e somente se, $g(y)=f(y)$.

é uma equação não viesada, ou seja, $\nabla \ell_p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\psi})$ é não viesado também para uma combinação linear de equações não viesadas. Isto leva a uma modificação na Equação (55).

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} \sim N(\boldsymbol{\psi}, H(\boldsymbol{\psi})^{-1} J(\boldsymbol{\psi}) H(\boldsymbol{\psi})^{-1}), \quad D \rightarrow \infty,$$

ou seja,

$$H(\boldsymbol{\psi}) = - \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \frac{\partial^2 \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi} \partial \boldsymbol{\psi}^T}; \quad (56)$$

$$J(\boldsymbol{\psi}) = \sum_{i < j} \sum_{d=1}^D \frac{\partial \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} \frac{\partial \log f(y_d^{(i)}, y_d^{(j)}; \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}^T}, \quad (57)$$

em que $H(\boldsymbol{\psi}) = E[\nabla^2 \ell_p(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{Y})]$ (Matriz de informação de Fisher) e $J(\boldsymbol{\psi}) = \text{Var}[\ell_p(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{Y})]$ são as esperanças com respeito às densidades completas (variância da função *escore*).

Na prática, para obter os “erros padrão”, calculam-se as estimativas de $H(\boldsymbol{\psi})$ e $J(\boldsymbol{\psi})$, a estimativa de $H(\boldsymbol{\psi})$ é obtida por $\hat{H}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) = \nabla^2 \ell_p(\hat{\boldsymbol{\psi}}; \mathbf{y})$; isto é, a matriz Hessiana avaliada em $\hat{\boldsymbol{\psi}}$. Normalmente, “otimizadores padrão” são capazes de obter estimativas baseadas em diferenças finitas para $H(\hat{\boldsymbol{\psi}})$ de modo que nenhum trabalho adicional é necessário para obter $\hat{H}(\hat{\boldsymbol{\psi}})$. $J(\hat{\boldsymbol{\psi}})$ pode ser obtido utilizando-se o estimador $\hat{J}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) = \nabla \ell_p(\hat{\boldsymbol{\psi}}; \mathbf{y}) \nabla \ell_p(\hat{\boldsymbol{\psi}}; \mathbf{y})^T$

3.6 Algoritmo de estimação do modelo

Estimar os parâmetros por meio da máxima verossimilhança pareada requer a maximização da Equação (53) com respeito aos R -ésimos parâmetros do modelo. Blanchet e Davison (2011) constataram que a função *optim* do software *R* apresenta resultados ruins para aplicação em profundidade máxima de neve na Suíça, constatou-se o mesmo problema em nossa aplicação: a superfície de ℓ_p pode ter muitos máximos locais. Depois de algumas tentativas adotou-se a metodologia de verossimilhança pareada. Dado um conjunto de $(R - 1)$ parâmetros $\boldsymbol{\psi}_{-r}$, pode-se encontrar o valor $\boldsymbol{\psi}_{-r}$ que maximiza a função de uma variável $\ell_p(\cdot, \boldsymbol{\psi}_{-r})$, isto sugere o seguinte algoritmo iterativo:

1. Dar “chutes” iniciais ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_R)^T$;
2. Para j em 1, ..., R :
 - a) Encontrar os valores que maximizam $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ da verossimilhança pareada com respeito

a magnitude ψ_r , considerando a ordem dos parâmetros, ψ_{-r} , fixos, isto é, $\hat{\psi}_r = \arg \max_{\psi_r} \ell_p(\psi_r, \psi_{-r})$;

b) Então atualiza-se o j -ésimo componente de ψ para $\hat{\psi}$;

3. Ir ao passo 2, quando não houver mudança em algum ψ_r incrementado a log verossimilhança pareada.

A rotina do algoritmo de estimação encontra-se no Apêndice A.

3.7 Critério de Informação Takeuchi - TIC

Quando vários modelos $M_1, M_2, \dots$, são ajustados aos dados, quer-se saber qual se deve preferir para a modelagem de nossos dados. Se dois modelos têm exatamente a mesma maximização de log-verossimilhança, deve-se preferir aquele que tem menos parâmetros, porque ele terá uma menor variância. No entanto, se esses dois modelos diferem apenas por uma pequena quantidade, para esta pequena quantidade vale a pena ter parâmetros adicionais? Para responder a esta questão, recorre-se à Informação de Kullback-Leibler.

Define-se uma amostra aleatória $Y_1, \dots, Y_n$ *i.i.d.* extraída de uma densidade desconhecida g , ignorando-se g , ajusta-se o modelo estatístico $f(\mathbf{y}; \psi)$, maximizando-se a log-verossimilhança. A Informação de Kullback-Leibler mede a discrepância do modelo ajustado f a partir do único e verdadeiro modelo g

$$KL(f_{\psi}, g) = \int \log \left(\frac{g(\mathbf{y})}{f(\mathbf{y}; \psi)} \right) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (58)$$

A informação Kullback-Leibler é sempre positiva. De fato, como $y \mapsto -\log(y)$ é uma função convexa¹² e, conseqüentemente, a Desigualdade de Jensen¹³ garante que

$$KL(f_{\psi}, g) = \int \log \left(\frac{g(\mathbf{y})}{f(\mathbf{y}; \psi)} \right) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \geq -\log \left(\int \frac{f(\mathbf{y}; \psi)}{g(\mathbf{y})} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) = 0,$$

¹²Funções convexas são funções cujo gráfico está abaixo de (ou coincide com) qualquer segmento de reta, que inicia e finda em dois pontos de uma seção cônica, traçada entre dois de seus pontos na região entre esses pontos. Isso é equivalente a dizer que o gráfico está acima de qualquer tangente a um de seus pontos.

¹³A desigualdade de Jensen, devida ao matemático Johan Ludwig Jensen, é um resultado em estatística que diz que, para determinadas funções, o valor esperado de $f_Y(y)$ é maior ou igual ao valor de $f(E(Y))$. Este resultado é usado, por exemplo, para mostrar que se Y for uma variável aleatória que tem média finita, então $E(Y^2) \geq E(Y)^2$.

usa-se o fato de que $(f_{\boldsymbol{\psi}}, g)$ é uma função densidade de probabilidade. Além disso, o limite inferior é atingido se, e somente se a função convexa não for estritamente convexa que só ocorre se $(f_{\boldsymbol{\psi}}, g) = g(\mathbf{y})$.

Consequentemente, para a seleção de modelos, escolhe-se modelos que minimizem $KL(f_{\boldsymbol{\psi}}, g)$. Porém, $KL(f_{\boldsymbol{\psi}}, g)$ não é suficiente como discriminante, tendo em vista que, vários modelos podem satisfazer $KL(f_{\boldsymbol{\psi}}, g)$. Para resolver este problema suponha que disponha de uma estimativa de $\hat{\boldsymbol{\psi}}$, precisa-se da média $KL(f_{\hat{\boldsymbol{\psi}}}, g)$ sobre a distribuição de $\hat{\boldsymbol{\psi}}$. Intuitivamente, por causa de sua maior variância amostral, será penalizado modelos que possuem um maior número de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ do que aqueles com menos parâmetros.

A fim de comparar g com $f_{\boldsymbol{\psi}}$ em $\boldsymbol{\psi} = \hat{\boldsymbol{\psi}}$ para uma diferente amostra aleatória $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*$ de g , que é por sua vez é independente de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, sendo assim, a estatística da razão da log-verossimilhança esperada pode ser calculada como

$$E_g^* \left[\sum_{j=1}^n \log \left(\frac{g(Y_j^*)}{f(Y_j^*; \hat{\boldsymbol{\psi}})} \right) \right] = nKL(f_{\hat{\boldsymbol{\psi}}}, g) \geq nKL(f_{\boldsymbol{\psi}_g}, g).$$

A fim de eliminar a dependência de $\boldsymbol{\psi}$ desta quantidade, é calculada a média de sua distribuição, conduzindo-se a

$$E_g \left\{ E_g^* \left[\sum_{j=1}^n \log \left(\frac{g(Y_j^*)}{f(Y_j^*; \hat{\boldsymbol{\psi}})} \right) \right] \right\} = nE_g \left(KL(f_{\hat{\boldsymbol{\psi}}}, g) \right).$$

Uma expansão em série de Taylor sob $\log f(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\psi}})$ em torno de $\boldsymbol{\psi}_g$ fornece

$$\log f(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\psi}}) \approx \log f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\psi}_g) + \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}_g)^T \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\psi}_g)}{\partial \boldsymbol{\psi} \partial \boldsymbol{\psi}^T} (\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}_g).$$

Usa-se o fato de que $\boldsymbol{\psi}_g$ minimiza a Informação de Kullback-Leibler, então, a derivada parcial em relação a $\boldsymbol{\psi}$ desaparece. Substituindo-se a expressão anterior na Equação (58) obtém-se

$$KL(f_{\hat{\boldsymbol{\psi}}}, g) \doteq KL(f_{\boldsymbol{\psi}_g}, g) - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}_g) (\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}_g)^T J(\boldsymbol{\psi}_g) \right\},$$

em que $J(\boldsymbol{\psi}_g)$ é dado pela Equação (56), Finalmente tem-se

$$E_g \left[KL(f_{\hat{\boldsymbol{\psi}}}, g) \right] \doteq KL(f_{\boldsymbol{\psi}_g}, g) - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ J(\boldsymbol{\psi}_g)^{-1} H(\boldsymbol{\psi}_g) \right\}, \quad (59)$$

em que $H(\boldsymbol{\psi}_g)$ é dado pela Equação (58).

Um estimador da Equação (59) é definido como

$$AIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\psi}}; \mathbf{y}) + 2p.$$

A simplificação $\text{tr} \left\{ J(\boldsymbol{\psi}_g)^{-1} H(\boldsymbol{\psi}_g) \right\} = -p$ surge quando o *AIC* supõe que não há erro de especificação.

Ao utilizar o estimador de máxima verossimilhança pareada trabalha-se sob erro de especificação, portanto, o *AIC* não é apropriado. Outro estimador da Equação (59), que permite o erro de especificação, é o critério de informação Takeuchi (1976) (*TIC*), definido por

$$TIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\psi}}) - 2\text{tr} \left\{ \hat{J}\hat{H}^{-1} \right\}.$$

Em conformidade com o *AIC*, o melhor modelo corresponderá àquele que minimiza a Equação (59). Observa-se que, se o modelo for corretamente especificado

$$J(\boldsymbol{\psi}) = -H(\boldsymbol{\psi}), \quad E[\nabla^2 \ell(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{y})] + \text{Var}[\nabla \ell(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{y})] = 0,$$

de modo que,

$$TIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\psi}}; \mathbf{y}) - 2\text{tr} \{I_p\} = AIC.$$

3.8 Predição Espacial

Nesta seção, o problema de prever dados não observados baseando-se em dados observados será discutido. Em geoestatística, a abordagem padrão para obter predições em locais não observados é chamada de krigagem (DIGGLE; RIBEIRO 2007; SCHABENBERGER; GOTWAY, 2005; WACKERNAGEL, 2003; CRESSIE, 1993). Esta abordagem baseia-se em ajustar o Erro Quadrático Médio (*EQM*), que equivale a basear-se no preditor da densidade condicional. No entanto, em modelos mais complexos, por exemplo, se o processo subjacente é um processo max-stable, a máxima verossimilhança total não está disponível. Densidades conjuntas de ordens menores podem ser obtidas. É, portanto, interessante desenvolver um preditor de $Z(s)$, utilizando-se a máxima verossimilhança pareada e aplicá-la aos processos cuja máxima verossimilhança total não encontram-se disponíveis.

3.8.1 Krigagem Ordinária

Considerando-se agora o problema de prever o valor da variável aleatória Z em um local não aferido $s \in \mathcal{S}$, $Z(s)$, baseando-se nos dados observados $Z(s_1), \dots, Z(s_n)$, que se supõe serem gerados pelo modelo gaussiano descrito na Seção 3.4.1. Denota-se a matriz de covariâncias do processo $\mathbf{Z} = \{Z(s_1), \dots, Z(s_n)\}$ por $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{R}$ em que $\sigma^2 = \text{Var}\{Z(s_i)\}$ e $R_{ij} = \rho(\|s_i - s_j\|)$ correspondente a correlação entre $Z(s_i)$ e $Z(s_j)$

O preditor $\hat{Z}(s)$ de $Z(s)$, cujo interesse é minimizar o EQM de $\hat{Z}(s)$ é definido por

$$EQM\{\hat{Z}(s)\} = E\left[\left\{\hat{Z}(s) - Z(s)\right\}^2\right], \quad (60)$$

onde a expectativa é com relação à distribuição conjunta de $Z(s)$ e $\hat{Z}(s)$ ou, equivalente, a distribuição conjunta de $Z(s)$ e $Z(s_1), \dots, Z(s_n)$. Em predição, o EQM definido em 60 é distinto do EQM condicional;

$$EQM\{\hat{Z}(s)\} = E\left[\left\{\hat{Z}(s) - Z(s)\right\}^2 \mid Z(s_1) = Z(s_2), \dots, Z(s_n) = z(s_n)\right].$$

O teorema a seguir fornece o EQM .

Teorema 16 *O Erro Quadrático Médio de $\hat{Z}(s)$, $EQM\{\hat{Z}(s)\}$, é minimizado por*

$$\hat{Z}(s) = E[Z(s) \mid \{Z(s_1), \dots, Z(s_n)\}].$$

Como a distribuição gaussiana multivariada condicional também é normal multivariada, o EQM de $\hat{Z}(s)$ e sua variância podem ser obtidos de imediato. Mais formalmente, o resultado bem conhecido a seguir se aplica (DIGGLE; RIBEIRO 2007).

Teorema 17 *Se $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ são conjuntamente normal multivariada, com $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$ e*

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

então a distribuição condicional de Y_1 dado Y_2 também é normal multivariada

$$Y_1 \mid Y_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}).$$

Denotando-se $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ em que $r_i = \rho(\|s - s_i\|)$, $i = 1, \dots, n$, o EQM é facilmente obtido aplicando-se o teorema da distribuição conjunta de $Y_1 = Z(s)$ e $Y_2 = \mathbf{Z}$ com vetor de média $\boldsymbol{\mu}_1$ e matriz de covariância

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \mathbf{r}^T \\ \sigma^2 \mathbf{r} & \sigma^2 \mathbf{R} \end{pmatrix},$$

Gerando-se o EQM para $Z(s)$

$$\mathbf{Z}(s) = \mu + \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \{\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}_1\}. \quad (61)$$

Observa-se que o preditor obtido em 61 é também obtido considerando-se uma abordagem de máxima verossimilhança completa. A predição correspondente a variância é igual ao EQM , nesse contexto, tem-se que

$$EQM\{\mathbf{Z}(s)\} = Var\{\mathbf{Z}(s)\} = \sigma(1 - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}). \quad (62)$$

3.8.2 Extensão para d observações

O conceito de krigagem pode ser estendido para um conjunto de dados $Z_d(s_1), \dots, Z_d(s_n)$, $d = 1, \dots, D$, em que d observações em cada localização (uma série histórica de uma estação meteorológica) são avaliadas. Aqui uma suposição ainda precisa ser feita. A observação a ser predita é suposta ser, digamos, $Z_1(s)$ e é, portanto, apenas correlacionada com as primeiras observações em outros locais. O EQM pode, portanto, ser encontrado através de Cokrigagem¹⁴ (CRESSIE, 1993).

O estimador é, portanto, uma combinação linear de todas as observações disponíveis e pode ser escrito como

$$\hat{Z}_1(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^D \lambda_{di} Z_d(s_i).$$

Esse estimador é necessário por ser uniformemente não viesado, $E\{\hat{Z}_1(s)\} = \mu$, sob a restrição

$$\sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^D \lambda_{di} = 1.$$

¹⁴A cokrigagem é similar à krigagem e permite estimar uma variável a partir das informações que se tem sobre ela própria e também a partir das informações disponíveis sobre outras variáveis que tenham correlação espacial com ela; a cokrigagem busca melhorar a estimação de uma variável pela utilização de informações relativas também a outras variáveis com as quais ela está correlacionada.

O problema de minimização a ser resolvido agora, pode assim ser escrito como

$$E \left[\left\{ Z_1(s) - \sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^D \lambda_{di} Z_d(s_i) \right\}^2 \right].$$

Seja m o multiplicador de Lagrange¹⁵ é reescrevê-la como

$$\text{Var} \left\{ Z_1(s) - \hat{Z}_1(s) \right\} + \left[E \left\{ Z_1(s) - \hat{Z}_1(s) \right\} \right]^2 - m \left(\sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^D \lambda_{di} - 1 \right). \quad (63)$$

Pode-se observar que o segundo termo cancela-se quando o estimador escolhido for uniformemente não viesado. Além disso, o primeiro termo pode ser expandido e como $\mathbf{Z}_d$ não está correlacionado com $\mathbf{Z}_p$ para $d \neq p$, é igual a

$$\begin{aligned} & \text{Var} \{ Z_1(s) \} + \sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^D \lambda_{di}^2 \text{Var} \{ Z_i(s_i) \} \\ & + 2 \sum_{i < l}^D \sum_{d=1}^D \lambda_{di} \lambda_{dl} \text{Cov} \{ Z_d(s_i), Z_d(s_l) \} - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^D \lambda_{di} \text{Cov} \{ Z_1(s), Z_d(s_i) \} \\ = & \sigma^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^D \lambda_{di}^2 + 2\sigma^2 \sum_{i < l}^D \sum_{d=1}^D \lambda_{di} \lambda_{dl} R_{il} - 2\sigma^2 \sum_{i=1}^n \lambda_{1i} r_i. \end{aligned}$$

Diferenciando-se (63) com relação a m , λ_{di} para $i = 1, \dots, n$ e $d = 1, \dots, D$, a fim de encontrar os valores ideais produzindo-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} 2\sigma^2 \sum_{l=1}^n \lambda_{1l} R_{il} - 2\sigma^2 r_i - m &= 0; \quad i = 1, \dots, n; \\ 2\sigma^2 \sum_{l=1}^n \lambda_{dl} R_{il} - m &= 0; \quad d = 2, \dots, D, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Neste caso, o EQM é igual a

$$EQM \left\{ \hat{Z}_1(s) \right\} = \sigma^2 - \sigma^2 \sum_{i=1}^n \lambda_{1i} r_i + m.$$

Intuitivamente, como $\mathbf{Z}_d$ não é correlacionado com $\mathbf{Z}_p$ para $d \neq p$, pode-se assumir que $\lambda_{di} = 0$ para $d = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n$ e, portanto, este preditor é equivalente ao obtido em (61). No entanto sob esta suposição, denota-se $\lambda = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n})$, um valor adequado para λ seria

$$\lambda = \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z}_1,$$

¹⁵Em matemática, em problemas de otimização, o método dos multiplicadores de Lagrange permite encontrar extremos (máximos e mínimos) de uma função de uma ou mais variáveis suscetíveis a uma ou mais restrições.

em que $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ com $r_i = \rho(\|s - s_i\|)$, $i = 1, \dots, n$ e $R_{id} = \rho(\|s_i - s_d\|)$ corresponde à correlação entre $Z(s_i)$ e $Z(s_d)$. Assim, um preditor adequado seria igual a

$$\hat{Z}(s) = \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z}_1.$$

Esta intuição, no entanto, é enganosa sob a condição $\sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^D \lambda_{di} = 1$, sendo não satisfeita devido ao fato de que $\sum_{i=1}^n \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z}_1 \neq 1$. Há, portanto, uma influência das observações $d = 2, \dots, n$ no preditor $\hat{Z}(s)$ para a localização não observada s (GRÜNENFELDER; DAVISON, 2010).

3.8.3 Krigagem sob o enfoque de máxima verossimilhança pareada

Vários problemas podem surgir com as abordagens de krigagem vistas anteriormente, especialmente para grandes conjuntos de dados (BLANCHET; DAVISON, 2011). Como alternativa, a abordagem de máxima verossimilhança total produz o preditor definido em (61), que por sua vez pode ser considerado. No entanto, para modelos complicados a máxima verossimilhança total pode não ser conhecida analiticamente ou requer muito esforço computacional. Uma abordagem diferente para o problema de krigagem que se baseia no conhecimento das densidades pareadas pode ser considerado (GRÜNENFELDER; DAVISON, 2010).

Como antes, a observação a ser predita é $Z_1(s)$ e é, portanto, apenas correlacionada com as primeiras observações de outros locais. A máxima verossimilhança pareada pode ser escrita como

$$L_K \{Z_1(s)\} = \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^n f \{Z_1(s) | Z_d(s_i)\}^{w_{di}},$$

consequentemente, o logaritmo da função de verossimilhança pareada é escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} l_K \{Z_1(s)\} &= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^n w_{di} \log f \{Z_1(s) | Z_d(s_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n (w_{1i} \left[-\frac{1}{2} \log \{2\pi\sigma^2 (1 - r_i^2)\} - \frac{1}{2\sigma^2 (1 - r_i^2)} (Z_1(s) - [\mu + r_i \{Z_d(s_i) - \mu\}])^2 \right] \\ &\quad + \sum_{d=2}^D w_{di} \left[-\frac{1}{2} \log \{2\pi\sigma^2\} - \frac{1}{2\sigma^2} \{Z_1(s) - \mu\}^2 \right]). \end{aligned}$$

O objetivo é maximizar essa verossimilhança em relação a $Z_1(s)$. A equação é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_K \left\{ \hat{Z}_K(s) \right\}}{\partial Z_1(s)} &= - \sum_{i=1}^n \left[\frac{w_{1i}}{\sigma^2(1-r_i^2)} (Z_1(s) - [\mu + r_i \{Z_1(s_i) - \mu\}]) + \sum_{d=2}^D \frac{w_{di}}{\sigma^2} \{Z_1(s) - \mu\} \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

permitindo-se obter a função que maximiza $\hat{Z}_K(s)$. Resolvendo-se essa equação em relação à $\hat{Z}_K(s)$, tem-se que

$$\hat{Z}_K(s) = \frac{\sum_{i=1}^n \left([\mu + r_i \{Z_1(s_i) - \mu\}] \frac{w_{1i}}{\sigma^2(1-r_i^2)} + \sum_{d=2}^D \frac{w_{di}}{\sigma^2} \mu \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_{1i}}{\sigma^2(1-r_i^2)} + \sum_{d=2}^D \frac{w_{di}}{\sigma^2} \right)}.$$

Este preditor só leva em consideração a observação 1. Portanto, os pesos w_{di} , $d = 2, \dots, D$, $i = 1, \dots, n$ podem ser definidos iguais a 0. Consequentemente, a mudança de notação $w_{1i} \equiv w_i$, $i = 1, \dots, n$ é introduzida. Isso produz o seguinte preditor pareado

$$\hat{Z}_K(s) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1-r_i^2} [\mu + r_i \{Z_1(s_i) - \mu\}]}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1-r_i^2}}. \quad (64)$$

Esta fórmula mostra que se os parâmetros são conhecidos antecipadamente, quanto à primeira parte do estudo de simulação, observações adicionais são desperdiçadas. No entanto, podem influenciar indiretamente o preditor se os parâmetros do processo Gaussiano são estimados (GRÜNFELDER; DAVISON, 2010).

O preditor obtido em (64) produz um preditor linear questionável para $Z(s)$. Como o interesse é encontrar o *EQM* deste preditor, sua variância precisa ser calculada

$$\begin{aligned} \text{Var} \left\{ \hat{Z}_K(s) \right\} &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1-r_i^2} \right)^{-2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1-r_i^2} [\mu + r_i \{Z_1(s_i) - \mu\}] \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1-r_i^2} \right)^{-2} \left[2 \sum_{d < i} \frac{w_d r_d}{1-r_d^2} \frac{w_i r_i}{1-r_i^2} \text{Cov} \{Z_1(s_d), Z_1(s_i)\} + \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2 r_i^2}{(1-r_i^2)^2} \text{Var} \{Z_1(s_i)\} \right] \\ &= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1-r_i^2} \right)^{-2} \left[2 \sum_{d < i} \frac{w_d}{1-r_d^2} \frac{w_i}{1-r_i^2} r_d r_i R_{di} + \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2 r_i^2}{(1-r_i^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

O EQM , em seguida, é igual a

$$\begin{aligned}
EQM \left\{ \hat{Z}_K(s) \right\} &= E \left[\left\{ Z(s) - \hat{Z}_K(s) \right\}^2 \right] \\
&= \text{Var} \left\{ Z(s) - \hat{Z}_K(s) \right\} + E \left\{ Z(s) - \hat{Z}_K(s) \right\}^2 \\
&= \text{Var} \left\{ Z(s) \right\} + \text{Var} \left\{ \hat{Z}_K(s) \right\} - 2\text{Cov} \left\{ \hat{Z}_K(s), Z(s) \right\} \\
&= \sigma^2 + \text{Var} \left\{ \hat{Z}_K(s) \right\} - 2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1 - r_i^2} \right)^{-1} \\
&\quad \text{Cov} \left\{ Z(s), \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1 - r_i^2} [\mu + r_i \{Z_1(s_i) - \mu\}] \right\} \\
&= \sigma^2 + \text{Var} \left\{ \hat{Z}_K(s) \right\} - 2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1 - r_i^2} \right)^{-1} \text{Cov} \left\{ Z(s), \sum_{i=1}^n \frac{w_i r_i}{1 - r_i^2} Z_1(s_i) \right\} \\
&= \sigma^2 + \text{Var} \left\{ \hat{Z}_K(s) \right\} - 2\sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1 - r_i^2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{w_i r_i^2}{1 - r_i^2},
\end{aligned}$$

como o preditor é não viesado, o objetivo é encontrar pesos tal que o EQM seja mínimo.

Grünenfelder e Davison (2010) realizaram um estudo detalhado de simulação e atribuíram diferentes pesos para w_i , uma vez que, é difícil obter os pesos ótimos analiticamente.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Descreve-se neste capítulo alguns resultados preliminares do comportamento dos modelos via simulação, verificando-se o comportamento isotrópico e anisotrópico dos modelos de Smith e Schlather, descritos nas seções 3.2.1 e 3.2.2 respectivamente, associando-se o grau de dependência espacial através do coeficiente extremo descrito na seção 3.3 e posteriormente, ajustam-se esses modelos aos dados de precipitação máxima mensal do estado do Paraná.

4.1 Estudo de simulação do processo max-stable

No estudo de simulação assume-se que os pontos aleatórios $\{U_j\}_{j \geq 1}$ de um processo de Poisson homogêneo pertencem ao $\mathbb{R}^2$, de modo que, o campo aleatório seja definido no plano, sendo $\mathcal{W}$ um conjunto compacto. A simulação de um processo estacionário max-stable não é tão simples, tendo em vista que envolve a definição do Teorema 11. De fato, a representação espectral de um processo max-stable envolve os máximos sobre uma sequência infinita de pontos $\{Y_j, U_j\}_{j \geq 1}$. Mas, em situações práticas o número de pontos gerados tem que ser, necessariamente, finito.

No entanto, a simulação de um processo max-stable pode ser realizada sob algumas condições particulares, conforme Schlather (2002) tem demonstrado. A princípio, a simulação de um campo aleatório max-stable consiste das seguintes etapas essenciais resumidas neste algoritmo iterativo.

Algoritmo iterativo: Simulação de M realizações de um campo aleatório max-stable:

1. Definir uma *grid* regular ou irregular de K pontos (localizações) em $\mathbb{R}^2$;
2. Definir um conjunto $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^2$ com medida de Lebesgue finita $|\mathcal{W}|$;
3. Gerar uma sequência de pontos $\{y_j\}_{j \geq 1}$ distribuídos uniformemente em $\mathcal{W}$;
4. Simular uma sequência $u_1, \dots, u_n, n = 1, \dots$ a partir de distribuições unitárias de Fréchet;
5. Calcular $Z(s_k) = \max_n \{u_j f(y_j - s_k)\}$, $k = 1, \dots, K$;
6. Repetir os passos 3-5 M vezes.

A fim de realizar simulações do processo max-stable, define-se uma amostra no conjunto $\mathcal{W}$ com um número finito de pontos $\{Y_j, U_j\}_{j \geq 1}$. As soluções para isto estão descritas no lemma 3 e no Teorema 4 de Schlather (2002).

4.1.1 Simulação do Modelo de Smith

Nesta seção, por meio de simulações, avaliam-se várias formas de dependência extrema do modelo de tempestade de Smith definido na Equação (29) caracterizado por meio da matriz de covariâncias Σ , incluindo-se variações de dependência e força de direção (Figura 5 e Tabela 1), a fim de avaliar as propriedades de amostras finitas do estimador de máxima verossimilhança pareada. A matriz de covariâncias Σ tem interpretações intimamente relacionadas aos dados meteorológicos e define diretamente a dependência extrema. Em particular, o estudo é direcionado assumindo-se que o modelo é de valor extremo Gaussiano, os parâmetros do modelo são σ_1 , σ_2 e σ_{12} , que definem a matriz de covariâncias de uma distribuição normal bivariada.

Note que, para locais fixos, sobre a região de estudos, a matriz de covariâncias determina a dependência espacial forte, moderada, mediana dos eventos extremos entre as localizações. As K estações meteorológicas definem diretamente a dependência extrema no mapa do estado do Paraná, as simulações são executadas usando-se uma grid irregular de pontos (localizações) ao longo dessa região.

Na prática, os pontos são aleatoriamente localizados, gerando-se valores aleatórios a partir de uma variável uniforme sobre um intervalo $[a, b]$ para cada eixo e, em seguida estas realizações definem o plano de coordenadas dos pontos. Seis modelos de Smith sobre o processo max-stable são simulados com diferentes matrizes de covariâncias Σ , conforme visto na Figura 5, pode-se também observar na Figura 6, os gráficos de contornos, que por sua vez, definem os coeficientes extremos em ambos os casos isotrópico e anisotrópico. Utiliza-se técnicas de simulação com aproximação direta da decomposição de Cholesky.

O caso anisotrópico surge quando Σ não é esférica, isto é, Σ não é escrita na forma $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}_K$, em que $\sigma^2 > 0$ e $\mathbf{I}_K$ é uma matriz identidade de K localizações. O resultado da anisotropia geométrica (por exemplo, Journel e Huijbregts, 1978) pode ser visto calculando-se o coeficiente extremo definido na Equação (39). Em muitos conjuntos de dados, existem maiores continuidades de valores ao longo de certas direções do que de

outras. Nestes modelos anisotrópicos, maior peso é dado às amostras alinhadas com a direção de máxima continuidade, compensando mesmo um maior afastamento em termos de distância geométrica.

A decomposição espectral da matriz de covariâncias Σ , pode ser escrita como $\Sigma = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$, em que $\mathbf{U}$ é a matriz de rotação e $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal de autovalores positivos, na qual pode ser escrita como:

$$\Sigma^{-1} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U} = \left(\mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U} \right)^T \left(\mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U} \right), \quad (65)$$

em que $\mathbf{\Lambda}^{-1/2}$ denota a matriz diagonal composta da raiz quadrada recíproca de elementos da diagonal de $\mathbf{\Lambda}$. Se λ_1 denota o primeiro elemento da matriz $\mathbf{\Lambda}$, então (65) pode ser escrita como $\Sigma^{-1} = \lambda_1^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{V}$, em que $\mathbf{V} = \lambda_1^{1/2} \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}$. A distância de Mahalanobis definida na Equação (30) pode ser escrita como

$$a^2 = \frac{1}{\lambda_1} (s_1 - s_2)^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} (s_1 - s_2) = \frac{1}{\lambda_1} [\mathbf{V} (s_1 - s_2)]^T \mathbf{V} (s_1 - s_2),$$

que é exatamente o que existe entre $\tilde{s}_1 = \mathbf{V}s_1$ e $\tilde{s}_2 = \mathbf{V}s_2$ no caso isotrópico, isto é, quando se usa uma matriz de covariâncias esférica K -dimensional $\lambda_1 \mathbf{I}_K$ em (29). Sendo assim, o modelo anisotrópico de Smith em $\mathcal{S}$ (aqui denotado pelo estado do Paraná), é justamente o modelo de Smith no espaço transformado $\tilde{\mathcal{S}} = \mathbf{V}\mathcal{S}$.

Tabela 1 - Configurações da modelagem de extremos espaciais (isotrópico e anisotrópico) sob processos max-stable utilizando-se diferentes matrizes de covariâncias Σ : mesmo peso de variâncias em ambas direções (Σ_1), diferentes pesos de variâncias em ambas direções (Σ_2), correlação espacial (Σ_3), mediana correlação espacial (Σ_4), moderada correlação espacial (Σ_5), forte correlação espacial (Σ_6)

Estrutura da dependência espacial	σ_1^2	σ_2^2	σ_{12}	ρ
Σ_1	500	500	0	0
Σ_2	300	500	0	0
Σ_3	300	500	150	0,38
Σ_4	800	1000	500	0,40
Σ_5	2000	3000	1500	0,55
Σ_6	40	60	20	0,61

Figura 5 - Seis simulações do modelo de Smith nos casos isotrópicos e anisotrópicos no espaço bidimensional, sob o processo max-stable com diferentes matrizes de covariâncias Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , Σ_4 , Σ_5 . As matrizes Σ_1 e Σ_2 representam o caso isotrópico

A Tabela 2 resume o desempenho dos estimadores da matriz de covariâncias Σ , baseando-se em $K=100$ localizações e $N=200$ observações, isto é, para cada localização, são geradas n repetições independentes a partir do processo max-stable e também ajusta-se o modelo usando-se o mesmo número de observações para cada local. Estimativas e desvios padrão foram obtidos utilizando-se o método de máxima verossimilhança pareada, baseando-se em 1.000 simulações reportadas para cada estrutura de dependência espacial. O logarítmico da função de verossimilhança, dado K localizações, é composto de $K(K-1)/2$ pares distintos.

Para K grande a maximização da verossimilhança é computacionalmente exigente, por isso, em alguns casos pode ser necessário implementar uma linguagem de programação mais geral, por exemplo, a linguagem *C* em favor da redução do tempo computacional. Uma boa correspondência com os valores verdadeiros é alcançada. Não há evidências de viés, mesmo nos casos em que se esperava um menor desempenho, como no caso da forte e moderada dependência espacial.

Figura 6 - Seis simulações do coeficiente extremo nos casos isotrópicos e anisotrópicos do modelo de Smith, no espaço bidimensional, sob o processo max-stable com diferentes matrizes de covariâncias Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , Σ_4 , Σ_5 . As matrizes Σ_1 e Σ_2 representam o caso isotrópico

Esta é uma boa informação pois outros métodos, como por exemplo, o proposto por de Haan e Pereira (2006) executa um mal desempenho no caso de dependências moderadas. Estes resultados corroboram com Padoan, Ribatet e Sisson (2010), quando estudaram o desempenho do critério de verossimilhança composta, proposto por Varin e Vidoni (2005), para o ajuste do modelo de Smith no processo max-stable. Os mesmos resultados foram obtidos por Padoan (2008) ao realizar um estudo de simulação sobre o processo max-stable para extremos espaciais.

O desempenho dos estimadores da matriz de covariâncias Σ para diferentes tamanhos de conjunto de dados ($N = 10, 50, 100, 500$) e diferentes números de localizações ($K = 10, 50, 100$) encontram-se na Tabela 3, estão listados os resultados da estimação baseando-se em 1.000 simulações de dados espaciais com o modelo de dependência espacial Σ_3 .

Tabela 2 - Estimativas das variâncias e covariâncias e desvios padrão da matriz Σ , por meio de máxima verossimilhança pareada, baseando-se em 1.000 simulações de dados de extremos espaciais sob o processo max-stable ($K=100$ localizações e $N=200$ observações) para o modelo de Smith. Erros padrão encontram-se dentro de parênteses e os valores verdadeiros estão dentro de colchetes

	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_{12}$
$\Sigma_1 :$	477,82(20,27)[500]	488,11(21,35)[500]	15,86(14,63)[0]
$\Sigma_2 :$	324,42(14,12)[300]	505,08(21,85)[500]	-5,56(12,61)[0]
$\Sigma_3 :$	315,68(13,66)[300]	496,28(21,49)[500]	96,14(12,79)[150]
$\Sigma_4 :$	872,52(36,91)[800]	1008,01(43,19)[1000]	533,67(32,01)[500]
$\Sigma_5 :$	1995,32(84,75)[2000]	2429,27(62,18)[3000]	1439,53(67,03)[1500]
$\Sigma_6 :$	40,69(1,72)[40]	61,50(2,66)[60]	31,34(1,80)[20]

Como esperado, as simulações apontam para existência de uma moderada variação quando N é pequeno, e uma pequena variância para N grande. Observa-se que para o tamanho da amostra fixa, o número de localizações não tem impacto sobre os resultados da estimação.

No entanto, pode-se observar que o aumento do número de localizações não tem muito efeito sobre as estimativas mas, uma redução da variabilidade pode ser observada. Por exemplo, uma comparação entre 50 e 200 localizações com 50 observações na Tabela 3, particularmente mostra que, com o crescente número de localizações as estimativas de variância diminuem.

Tabela 3 - Estimativas das variâncias e covariâncias e desvios padrão (em parênteses) da matriz de covariâncias Σ_3 por meio de máxima verossimilhança pareada, com diferentes observações (N) e localizações (K), baseando-se em 1.000 simulações de dados de extremos espaciais para o modelo de Smith

	K	N=50	N=100	N=200	N=400	parâmetros
$\hat{\sigma}_1^2$	50	285,43(11,97)	285,43(11,97)	285,43(11,97)	285,43(11,97)	300
	100	307,08(12,02)	307,08(12,02)	307,08(12,02)	307,08(12,02)	
	200	373,07(71,69)	320,41(21,00)	320,41(21,00)	320,41(21,00)	
$\hat{\sigma}_2^2$	50	509,74(20,58)	509,74(11,27)	509,74(20,58)	509,74(20,58)	500
	100	491,70(21,25)	491,70(12,08)	491,70(21,25)	491,70(21,25)	
	200	574,10(25,64)	527,09(30,54)	527,09(30,54)	527,09(30,54)	
$\hat{\sigma}_{12}$	50	141,58(11,27)	141,58(20,58)	141,58(11,27)	141,58(11,27)	150
	100	152,43(12,08)	152,43(21,25)	152,43(12,08)	152,43(12,08)	
	200	181,80(15,41)	157,98(18,54)	157,98(18,54)	157,98(18,54)	

4.1.2 Simulação do Modelo de Schlather

Examinam-se várias formas de dependência extrema com o modelo de tempestade de Schlather definido na Equação (33). Seis simulações desse modelo com $\mathcal{S}$ correspondendo ao estado do Paraná é apresentado na Figura 7, com as seguintes funções de correlação *Matérn*, *Cauchy* e *Powder Exponential*, os gráficos da parte superior da Figura 7 representam o caso isotrópico. A isotropia pode ser vista calculando-se o coeficiente extremo definido na Equação (40). As metodologias utilizadas no modelo de Smith, podem ser utilizadas no modelo de Schlather, aplicando-se o espaço transformado $\tilde{\mathcal{S}} = \mathbf{H}\mathcal{S}$, em que se pode adotar o espaço tridimensional

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ c_2 \sin \vartheta & c_2 \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad c_2 \text{ e } c_3 \in \mathbb{R}_+^*, \quad (66)$$

como para o modelo de Smith, o ângulo ϑ define o efeito da dependência direcional.

Blanchet e Davison (2011) adotam o termo *espaço climático* para o espaço transformado $\tilde{\mathcal{S}} = \mathbf{H}\mathcal{S}$ na qual a isotropia é alcançada, neste trabalho adota-se o mesmo termo para o espaço transformado. Os gráficos da parte inferior da Figura 7 ilustram o espaço climático transformado, permitindo-se uma anisotropia para o modelo de Schlather, com a mesma matrix $\mathbf{H}$, correspondente ao caso anisotrópico da Figura 5, em comparação com os gráficos da parte inferior da Figura 7, o coeficiente extremo corresponde às elipses, que por sua vez, permite modelos de efeitos direcionais. Observar-se na Figura 8, os gráficos de contornos, que por sua vez, definem os coeficientes extremos em ambos os casos isotrópicos e anisotrópicos.

A anisotropia geométrica induzida pela matriz $\mathbf{H}$ é um caso especial do alcance da anisotropia (ZIMMERMAN, 1993). No âmbito não-extremo, essa ideia foi estendida aos modelos não geométricos anisotrópicos, na qual as covariâncias aninhadas são usadas como parâmetros de alcance em diferentes direções, mas em geral isso não define uma função de covariância válida. Ecker e Gelfand (2003) introduziram o produto de geometria anisotrópica, em que as funções de covariância são produtos geométricos de covariâncias anisotrópicas. Transformações de espaço também foram usados por Sampson e Guttorp (1992) para o modelo não estacionário com estruturas de covariância espacial, permitindo transformações mais complexas do que a transformação considerada nesse trabalho.

Figura 7 - Oito simulações do modelo de Schlather sob o espaço bidimensional com funções de correlação: *Whittle-Matérn* com $\rho(\mathbf{h}) = 2/\Gamma(1) (\mathbf{h}/10^2) K_1(\mathbf{h}/10^2)$, *Powdered Exponential* com $\rho(\mathbf{h}) = \exp(-\mathbf{h}/6^2)$, *Cauchy* com $\rho(\mathbf{h}) = (1 + (\mathbf{h}/10)^2)^{-5}$ e *Whittle-Matérn* com $\rho(\mathbf{h}) = 2/\Gamma(2) (\mathbf{h}/5^2)^2 K_2(\mathbf{h}/5^2)$ da esquerda para direita, respectivamente. Os gráficos da parte superior representam o processo isotrópico e os gráficos da parte inferior representam o processo anisotrópico

Além desses métodos globais, os métodos locais para modelagem da anisotropia e formas mais gerais de não estacionariedade também existem, estes podem ser divididos em três grandes famílias (SCHABENBERGER; GOTWAY, 2005). A abordagem de espaço móvel proposta por Haas (1990), estima uma função de covariância local na vizinhança. O método de ponderação em processos estacionários (FUENTES, 2001) permite escrever a função de covariância não estacionária como uma mistura ponderada de covariâncias isotrópicas, onde os pesos dependem da localização.

Fuentes, Henry e Reich (2010) usam uma mistura de processos de Dirichlet¹⁶ como base para uma aproximação mais flexível via cópulas para modelagem espaço-temporal de temperaturas extremas, mas não corresponde a um modelo de processo max-stable. Seria muito valioso aplicar essas ideias no contexto max-stable, mas a indisponibilidade de uma função de verossimilhança parece ser um grande obstáculo (BLANCHET;

¹⁶Em matemática, sobretudo na análise real, a função de Dirichlet, em honra a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, fornece um exemplo de função que é descontínua em todos os pontos do domínio. A função de Dirichlet é um exemplo de função real limitada que não é integrável à Riemann.

Figura 8 - Oito simulações do coeficiente para o modelo de Schlather sob o espaço bidimensional com funções de correlação: *Whittle-Matérn* com $\rho(\mathbf{h}) = 2/\Gamma(1) (\mathbf{h}/10^2) K_1(\mathbf{h}/10^2)$, *Powared Exponential* com $\rho(\mathbf{h}) = \exp(-\mathbf{h}/6^2)$, *Cauchy* com $\rho(\mathbf{h}) = (1 + (\mathbf{h}/10)^2)^5$ e *Whittle-Matérn* com $\rho(\mathbf{h}) = 2/\Gamma(2) (\mathbf{h}/5^2)^2 K_2(\mathbf{h}/5^2)$ da esquerda para direita, respectivamente. Os gráficos da parte superior representam o processo isotrópico e os gráficos da parte inferior representam o processo anisotrópico

DAVISON, 2011).

A ideia de transformação do espaço foi proposta por Cooley, Nychka e Naveau (2007) na modelagem de precipitação nos Estados Unidos. Em vez de usar as coordenadas geográficas tridimensionais (longitude, latitude, altitude) na localização das estações, os autores trabalham em um “espaço climático”, ou seja, o espaço bidimensional dado pela altitude e precipitação média para os meses de Abril a Outubro.

Ao contrário de Cooley, Nychka e Naveau (2007), Blanchet e Davison (2011) atribuem transformações de valores finitos a grandezas finitas, dando mais peso para altitude através de c_3 , e definindo uma direção principal de dependência ao longo do eixo ϑ . Neste trabalho adota-se a metodologia utilizada por Blanchet e Davison (2011), um espaço de dimensão superior pode, evidentemente, ser utilizado para $\mathcal{S}$.

Em particular, pode-se utilizar o espaço de quatro dimensões (longitude, latitude, altitude e média de precipitação). A dependência entre pares de estações diminui quando a distância aumenta, uma maneira de modelar regiões fracamente dependente é aumentar a distância entre elas. Isto pode ser feito por meio da adição de uma coordenada

em $\mathcal{S}$ igual a 0 na região Norte, e 1 na região Sul.

Se as outras coordenadas forem (longitude, latitude, altitude), então a matriz $\mathbf{H}$ da transformação do espaço climático definido na Equação (66) pode ser escrita no caso mais geral, como uma matriz 4×4 com uma coluna de elementos 0. No entanto, por razões computacionais, pode ser melhor considerar a rotação da matriz $\mathbf{U}$, conforme visto na Equação (65), como sendo uma matriz de rotação no plano (latitude, longitude) e, assim, para definir

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 & 0 \\ c_2 \sin \vartheta & c_2 \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

No espaço climático em quatro dimensões $\tilde{\mathcal{S}} = \mathbf{H}\mathcal{S}$, o quadrado da distância entre duas estações s_1 e s_2 é $\{\mathbf{H}(s_1 - s_2)\}^T \{\mathbf{H}(s_1 - s_2)\}$. Mas a quarta coordenada de $s_1 - s_2$ é 0 se as duas estações pertencerem à mesma região. O quadrado da distância pode ser igual ao espaço climático (longitude, latitude, altitude) se as duas estações estiverem na mesma região, e incrementa-se c_4^2 caso contrário. Sendo assim, aumenta-se a distância entre as regiões climáticas e, portanto, diminui-se a dependência entre elas, sem aumentar a distância entre as estações da mesma região.

4.2 Dados meteorológicos do estado do Paraná

Nesta seção considera-se a aplicação da metodologia de extremos espaciais aos dados meteorológicos do estado do Paraná. Atenção é restrita à abordagem “tradicional” da teoria de valores extremos baseando-se nos máximos amostrais, isto é, os dados consistem em uma série histórica de máximos extraídos a partir de medições diárias em um conjunto de estações meteorológicas.

Aplica-se esta teoria aos dados de precipitação máxima mensal. É importante observar-se que os dados são extraídos de n blocos de tamanho k dessa amostra e posteriormente, considera-se uma nova amostra baseando-se em uma série histórica dos máximos de precipitação, que por sua vez, está de acordo com a metodologia descrita na seção 3.1, abordagem de *Block Maxima* e o Teorema de Fisher-Tippett descrito na seção 3.1.2.

4.2.1 Aplicação aos dados de precipitação

Os dados de precipitação máxima mensal utilizados neste estudo são provenientes de séries históricas disponibilizadas pela Agência Nacional de Águas - *ANA*, entidade vinculada ao Ministério do Meio Ambiente - *MMA* e compilados pelo Grupo de Estudos em Seguros e Riscos - *GESER* da Escola Superior de agricultura “Luiz de Queiroz” - *ESALQ/USP*.

Os dados foram organizados em duas matrizes da seguinte forma: A primeira matriz de dimensões 136×232 representa os máximos mensais da quantidade de chuvas em milímetros (*mm*) do estado do Paraná, cada coluna corresponde a uma estação meteorológica, num total de 232 estações. Em cada estação meteorológica foram coletados 136 observações máximas de precipitação, tendo em vista que, a série histórica é de 34 anos e em cada ano foram coletados quatro observações máximas.

Os máximos mensais são extraídos a partir de medições diárias de precipitação que se leem por volta das 07h30min AM entre os meses de Janeiro a Abril, período de maior concentração de colheita de grãos no Estado. A série histórica de precipitação máxima mensal está compreendida entre os anos de 1976 a 2009, ou seja, uma série histórica de 34 anos. O conjunto de dados original é composto de 262 estações meteorológicas, sendo que, 30 dessas estações foram utilizadas para validação dos modelos.

A fim de manter a estrutura geográfica com similaridades econômicas e sociais do estado do Paraná, foram selecionadas, de forma aleatória, utilizando-se a função *sample* do software *R*, três estações em cada mesorregião¹⁷ para validação dos modelos. Sendo assim, estas estações ficaram espacialmente bem distribuídas em todo o estado do Paraná, conforme pode ser visto na Figura 10. As distâncias entre as estações foram medidas em quilômetros.

A segunda matriz de dimensões 232×4 representa as coordenadas das estações meteorológicas e as covariáveis que possivelmente venham à influenciar a dependência extrema dos dados de precipitação do estado do Paraná, cada coluna correspondendo-se, respectivamente a latitude, longitude, altitude e precipitação média

¹⁷Mesorregião é uma subdivisão dos estados brasileiros que congrega diversos municípios de uma área geográfica com similaridades econômicas e sociais. Foi criada pelo *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística-IBGE* e é utilizada para fins estatísticos e não constitui, portanto, uma entidade política ou administrativa.

das 232 estações, a covariável altitude foi medida em quilômetros, mesma escala da latitude e longitude. É importante observar que a covariável precipitação média foi obtida dos dados originais, isto é, das medições diárias de precipitação observadas em cada estação meteorológica.

A topografia do estado do Paraná, conforme visto na Figura 9, mostra a importância das covariáveis climatológicas altitude e precipitação média na modelagem do coeficiente extremo, uma vez que, cerca de 52% do território do Paraná encontra-se acima de 600 metros e 89% acima de 300 metros; somente três por cento ficam abaixo de 200 metros. O quadro morfológico é dominado por superfícies planas dispostas em grande altitude, compondo planaltos que formam as serras do Mar e Geral. Cinco unidades de relevo sucedem-se de leste para oeste, na seguinte ordem: Baixada Litorânea, Serra do Mar, Planalto Cristalino, Planalto Paleozóico e Planalto Basáltico.

Figura 9 - Topografia do Estado do Paraná para os quais os dados de precipitações diárias estão disponíveis nas estações meteorológicas

Figura 10 - Localização das estações meteorológicas utilizadas na modelagem de extremos espaciais (verde) e na validação dos modelos (marrom)

Na sequência analisa-se as covariáveis altitude e precipitação média sob a hipótese de que essas covariáveis são normalmente distribuídas, pode-se observar por meio das Figuras 11 e 12 que a hipótese de normalidade não é verificada. Os histogramas mostram que essas covariáveis estão bem distorcidas e isso é confirmado pelo quantil

amostral versus quantil esperado sob normalidade representado pelo QQ -plot (Figura 12), percebe-se claramente que os pontos desviam-se do comportamento linear.

A não independência das covariáveis precipitação máxima e altitude pode ser atribuída as cinco unidades de relevo do estado, esses resultados corroboram com Grünenfelder e Davison (2010), ao estudar máximos de precipitação anual na região de Zürich-Suíça, os referidos autores comprovam a existência de outra fonte de dependência através do componente espacial, uma vez que todos os locais são investigados simultaneamente.

Blanchet e Lehning (2010) e Blanchet e Davison (2011), também comprovam essas assimetrias, tanto na altitude das estações meteorológicas quanto na profundidade média de neve na Suíça, os autores afirmam que a variabilidade regional está ligada aos principais padrões climatológicos da Suíça.

Figura 11 - Histogramas referentes as variáveis altitude (lado esquerdo) e precipitação média diária (lado direito) do estado do Paraná. São excluídas as estações utilizadas para validação dos modelos

Após a organização dos dados, dá-se sequência às análises. O próximo procedimento baseia-se nos cálculos das estimativas dos parâmetros de locação (μ), escala (σ) e forma (ξ) da distribuição GEV definido na Equação (18) em cada uma das 232 estações meteorológicas e, posteriormente, a transformação da função de distribuição de probabilidade

$$f_s : z \mapsto \left\{ 1 + \frac{\xi_s (y - \mu_s)}{\sigma_s} \right\}^{1/\xi_s},$$

na função de distribuição de probabilidade $Z(y) = e^{-1/y}$, conforme apresentado no

Figura 12 - Quantil amostral versus quantil esperado sob normalidade representado pelo QQ -plot da altitude (lado esquerdo) e precipitação média diária (lado direito) do estado do Paraná. São excluídas as estações utilizadas para validação dos modelos

Corolário 2, página 48 na seção 3.1.4, para que se possa modelar a dependência extrema (SCHLATHER; TAWN, 2003). É importante observar que os pressupostos associados à distribuição GEV foram verificados pontualmente, ou seja, para cada uma das 262 estações meteorológicas.

Pode-se visualizar por meio da Figura 13, a série histórica de precipitação máxima de algumas estações meteorológicas, com os dados originais e os dados padronizados em unidades marginais de Fréchet para as regiões de Castro, Terra Roxa e Cascavel, principais Regiões produtoras de grãos no Estado. Segundo a *Conab*, os bons preços na comercialização de grãos, como por exemplo, a soja, o milho, o trigo e o feijão estão ligados à qualidade desses produtos, e o principal fator que influencia a qualidade dos grãos é a quantidade de chuvas no momento da colheita.

Segundo a *Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - EMBRAPA*¹⁸, as perdas de grãos acontecem, geralmente, em duas etapas distintas, antes e durante a colheita e um dos fatores que influenciam nessas perdas é o excesso de chuvas. O *DERAL* constatou que as perdas de grãos provocadas pelas geadas foram expressivas na safra 2010/11.

O cálculo das estimativas dos parâmetros de locação, escala e forma, bem como a transformação dos dados em unidades marginais de Fréchet a partir da GEV

¹⁸<http://www.embrapa.br/>

foi obtido mediante a criação de uma função com auxílio dos pacotes *SpatialExtremes* e *extRemes* do software *R*. Após a transformação dos dados de precipitação máxima mensal

Figura 13 - Série temporal referente aos dados de precipitação máxima mensal das regiões de Castro, Terra Roxa e Cascavel com os dados originais (gráficos superiores) e os dados padronizados em unidades marginais de Fréchet (gráficos inferiores)

em unidades marginais de Fréchet, ajustou-se os diferentes modelos descritos na seção 3.2, associando-se a estrutura de extremos espaciais do processo max-stable aos modelos isotrópicos e anisotrópicos de Smith e Schlather.

Para o modelo de Schlather utilizou-se as seguintes funções de correlação: *Cauchy*, *Powered Exponential*, *Matérn*, *Circular*, *Cubic*, *Gneiting*, *Exponential*, *Spherical* e *Gaussiana*, cada uma dessas funções de correlação possui um ou dois parâmetros, sendo que, as funções de correlação *Spherical*, *Circular*, *Cubic* e *Gneiting* têm um limite superior conforme descrito na seção 3.2.3.

Todas essas funções de correlação são tais que $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 1$ quando $\mathbf{h} \rightarrow 0^+$ e $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ quando $\mathbf{h} \rightarrow +\infty$. Conforme mencionado no final da seção 3.3, isto limita o coeficiente extremo do modelo de Schlather à corresponder a dados dependentes. No entanto, Blanchet e Davison (2011) afirmam que tais suposições são justificáveis sob a

modelagem da dependência espacial da profundidade da neve na Suíça, espera-se que neste trabalho essas suposições também sejam aceitáveis.

Consideram-se as coordenadas s como coordenadas geográficas (longitude, latitude, altitude), e precipitação média entre os meses de Janeiro a Abril durante os anos de 1976 a 2009. Profundidade média de neve durante os invernos de 1966 a 2008 foi considerada como uma possível coordenada climática em estudos de extremos espaciais realizado por Blanchet e Davison (2011). Em estudos de precipitações extremas realizado por Cooley, Nychka e Naveau (2007), consideraram como uma possível coordenada climática a média de precipitação.

Utiliza-se neste trabalho a média de precipitação como uma coordenada climática baseando-se no artigo de Cooley, Nychka e Naveau (2007), espera-se que a média de precipitação seja influenciada pelas cinco unidades de relevo que se sucedem de leste para o oeste do estado do Paraná e deve, portanto, existir algum tipo de similaridade entre as estações meteorológicas que se encontram dentro dessas unidades de relevo.

Consideram-se diferentes combinações das coordenadas citadas acima, em todos os casos, utiliza-se a longitude e latitude, além de, possivelmente, altitude e precipitação média. Considera-se também os processos isotrópicos e anisotrópicos para os modelos de Smith e Schlather. No total, 60 tipos de modelos foram considerados, todos foram estimados usando-se o algoritmo iterativo definido na Seção 3.6.

Outras variáveis poderiam ser consideradas neste estudo, tais como temperatura, umidade e velocidade máxima de ventos, que também são coletadas nas estações meteorológicas, no entanto, essas variáveis possuem valores de qualidade relativamente ruins, com muitos dados faltantes e em muitos casos valores negativos, essas foram as razões pelas quais se decidiu não utilizá-las. Cooley, Nychka e Naveau (2007), Fuentes Henry e Reich (2010), Blanchet e Davison (2011) e Davison e Gholamrezaee (2011), deparam-se com este mesmo problema.

Como a perda de informações é um problema frequente em estudos ambientais, acreditava-se que a imputação de dados faltantes resolvesse esse tipo de problema, porém, ao ajustar esses modelos aos dados imputados de velocidade máxima de ventos e umidade máxima não obteve-se bons resultados. Este insucesso pode ser atribuído a curta série histórica desses dados, cerca de dez anos. Os dados utilizados para imputação referiam-se a 110 estações meteorológicas provenientes de séries históricas disponibilizados

pelos seguintes órgãos: Instituto Nacional de Meteorologia - *INMET*; Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos - *CPTEC*; Instituto Agrônomo da Paraná - *IAPAR* e o Instituto Tecnológico *SIMEPAR*.

Dando sequência às análises, segue-se com a comparação dos modelos por meio do critério de informação *TIC* definido na seção 3.7. O perfil dos valores do *TIC* é mostrado na Figura 14. Há diferenças relativamente pequenas entre eles, embora as funções de correlação de *Matérn*, *Powered Exponential* e *Cauchy* obtiveram os menores valores do *TIC*, essas funções de correlação são regidas por dois parâmetros, conforme descrito na seção 3.2.3, pode-se observar também (Figura 14) que, a medida que adiciona-se as covariáveis climatológicas altitude e precipitação média nos diferentes modelos há um decréscimo considerável nos valores do critério de informação *TIC* para as funções de correlação *Matérn*, *Powered Exponential* e *Cauchy*, destacando-se a função de correlação *Powered Exponential*.

Esses resultados estão de acordo com Diggle e Ribeiro Jr. (2007), quando se referem à flexibilidade dessas funções as quais modelam processos mais ou menos diferenciáveis. Pode-se observar na Figura 14 que as funções de correlação *Gneiting*, *Cubic*, *Circular*, *Spherical* e *Gaussiana* obtiveram um maior valor do *TIC*, mesmo com o acréscimo das covariáveis climatológicas aos modelos, observa-se também uma estabilidade dos valores do *TIC*. Essas funções de correlação são regidas apenas por um parâmetro, esses resultados corroboram com Webster e Oliver (2001), ao afirmarem que na prática a maioria dessas funções possuem algum tipo de restrição.

De modo geral, o modelo de Schlather apresentou melhor desempenho do que o de Smith, qualquer que seja a função de correlação escolhida. A escala dos valores do *TIC* para o modelo Smith está entre 40000 a 60000 unidades maior do que com o modelo Schlather, o qual apresenta um valor mínimo de 31208388 para o modelo 60. Em particular, os modelos que tiveram um mau desempenho correspondem aos modelos no espaço euclidiano, ou seja, sem transformação do espaço climático. Esses resultados corroboram com Blanchet e Davison (2011), ao afirmarem a importância de se trabalhar em um espaço transformado de modo a permitir a anisotropia.

Os modelos em que nem a altitude e nem a precipitação média são consideradas também obtiveram resultados ruins, sendo assim, neste estudo, pode-se afirmar que essas coordenadas climáticas são muito importantes na modelagem do coeficiente extremo

e que modelos que as considere devem ser preferidos.

Figura 14 - Perfil dos valores de TIC ajustados aos 54 modelos de Schlather. As escalas de 1 a 6 representam: os modelos isotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude e longitude (escala 1); os modelos isotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude, longitude e altitude (escala 2); os modelos anisotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude e longitude (escala 3); os modelos anisotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude, longitude e altitude (escala 4); os modelos anisotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude, longitude e precipitação (escala 5); os modelos anisotrópicos de Schlather com as covariáveis latitude, longitude, altitude e precipitação (escala 6)

As Tabelas 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 resumem os diferentes tipos de modelos investigados neste estudo, de acordo com o valor do *TIC*, o melhor ajuste é dado pelo modelo de Schlather com função de correlação *Powered Exponential*, em um espaço climático ($\mathcal{S}$) 4-dimensional de coordenadas (longitude, latitude, altitude, precipitação média), modelo que, sob um espaço contínuo, possui um *TIC* igual a 30783815. Isto significa que uma matriz $\mathbf{H}$ conforme apresentado em (67) é estimada, em quatro dimensões e assim, possui quatro parâmetros: o efeito de dependência direcional (ϑ), latitude (c_2), altitude (c_3) e precipitação média (c_4).

Os parâmetros de alcance (ϕ) e suavidade (ν) da função de correlação *Pow-
ered Exponential* também são estimados, num total de 6 parâmetros, cujas estimativas e desvios padrão são apresentados na Tabela 9.

O segundo melhor ajuste é dado pelo modelo de Schlather com função de correlação *Powered Exponential*, em um espaço climático ($\mathcal{S}$) 3-dimensional de coordenadas (longitude, latitude, precipitação média) sob um espaço contínuo, este modelo possui um *TIC* igual a 30786627, nesse caso, a matriz $\mathbf{H}$ estimada é apresentada em (66), em três dimensões, sendo assim, o segundo melhor ajuste é similar ao anterior, mas sem a covariável altitude (c_3), num total de 5 parâmetros, cujas estimativas e desvios padrão são apresentados na Tabela 6.

O terceiro melhor modelo é similar ao primeiro, mas com outra função de correlação, a função de correlação *Cauchy*, modelo que possui um *TIC* igual a 30792178; esses dois modelos agem de forma semelhante, tendo em vista que a covariável média de precipitação e altitude fornecem informações sobre a variabilidade local das chuvas, de acordo com a Figura 14 percebe-se a importância em se usar ambas as covariáveis, no entanto, há um pequeno aumento no *TIC* quando se usa apenas uma delas. Os piores desempenhos são atribuídos aos modelos de Smith, tanto no caso isotrópico quanto no caso anisotrópico, que por sua vez, corrobora com os resultados obtidos por Blanchet e Davison (2011).

Não é nenhuma surpresa que na Tabela 9, para o modelo com menor valor do *TIC*, a precipitação média é a covariável que mais influencia na distância climática, e, assim, a função de dependência extrema. Isto significa que a dependência entre duas estações na mesma altitude é a mesma numa distância de 10 km entre si ao longo da direção principal de dependência, ou seja, um ângulo de $\vartheta = -0,20$ radianos no sentido de um diagrama de Argand¹⁹, na mesma altitude e 2,5 km perpendicularmente à direção principal de dependência, e na mesma latitude e longitude com 322 metros de distância em altitude, são todos iguais. Estes valores são obtidos da seguinte forma: $10/4,390 \approx 2,5$ km, $10/31,009 \approx 0,322$ km = 322 metros.

Na pesquisa realizada por Davison e Gholamrezaee (2011), utilizando-se

¹⁹O plano complexo, também chamado de Plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand, é um plano cartesiano usado para representar números complexos geometricamente. Nele, a parte imaginária de um número complexo é representada pela ordenada e a parte real pela abscissa. O Diagrama Argand é um acessório útil pois através dele pode-se algebrizar vetores bidimensionais.

Tabela 4 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude e longitude em quilômetros

Função de correlação	Modelo anisotrópico de Schlather				TIC
	$\hat{\nu}$	$\hat{c}_2$	$\hat{\phi}$	$\hat{\nu}$	
Cauchy	-0,129(0,022)	5,249(0,380)	14,912(3,031)	0,292(0,079)	30800183
Powered Exponential	-0,159(0,026)	4,781(0,575)	109,518(37,632)	0,490(0,054)	30795900
Matérn	-0,178(0,018)	4,848(1,901)	600,823(5,701)	0,125(0,034)	30793367
Circular	10885,433(0,009)	3826,278(9,802)	396,310(29,735)		30821009
Cubic	0,165(0,041)	2,853(0,291)	96,843(13,180)		30819645
Gneiting	2588,142(0,001)	1317,972(0,361)	113,344(9,293)		30820935
Exponential	4115,397(0,001)	4331,600(2,142)	317,344(0,116)		30805117
Spherical	3,215(0,029)	3,854(2,081)	176,751(43,539)		30814885
Gaussiano	0,165(0,003)	2,803(0,214)	39,732 (5,865)		30819528

Tabela 5 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos isotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude e longitude em quilômetros

Função de correlação	Modelo isotrópico de Schlather		
	$\hat{\phi}$	$\hat{\nu}$	TIC
Cauchy	6,376(1,568)	0,312(0,087)	30805034
Powered Exponential	40,746(9,146)	0,499(0,083)	30802804
Matérn	201,690(48,871)	0,132(0,023)	30799734
Circular	77,553(20,451)		30818079
Cubic	50,833(10,876)		30820340
Gneiting	20,657(4,204)		30820286
Exponential	53,163(13,505)		30809257
Spherical	93,665(22,593)		30817251
Gaussiano	21,031(4,161)		30820192

Tabela 6 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (TIC), considerando-se as coordenadas latitude, longitude e a covariável altitude em quilômetros

Função de correlação	Modelo anisotrópico de Schlather					TIC
	$\hat{\theta}$	$\hat{c}_2$	$\hat{c}_3$	$\hat{\phi}$	$\hat{\nu}$	
Cauchy	-0,153(0,023)	5,306(0,347)	234,280(0,271)	19,667(3,581)	0,314(0,079)	30799863
Powered Exponential	-0,158(0,021)	4,926(2,535)	27,273(12,243)	110,780(22,338)	0,486(0,060)	30794612
Matérn	-0,179(0,018)	4,851(1,930)	20,119(0,569)	600,828(2,110)	0,125 (0,065)	30793346
Circular	10895,062(0,001)	3808,853(1,171)	29,288(7,219)	396,094(0,694)		30820826
Cubic	333,149(0,053)	2,500(0,308)	272,292(24,147)	134,074(22,912)		30818896
Gneiting	2600,071(0,001)	1310,782(2,900)	24,539(9,545)	105,071(33,828)		30820940
Exponential	4074,521(0,001)	4323,428(1,674)	27,734(2,932)	124,906(1,566)		30820918
Spherical	3,220(0,026)	3,118(0,803)	395,721(53,760)	265,302(29,066)		30814121
Gaussiano	-7,718(0,032)	0,423(0,035)	111,474(11,348)	22,699(3,366)		30818600

Tabela 7 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos isotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (TIC), considerando-se as coordenadas latitude, longitude e a covariável altitude em quilômetros

Função de correlação	Modelo isotrópico de Schlather		TIC
	$\hat{\phi}$	$\hat{\nu}$	
Cauchy	6,377(1,609)	0,313(0,088)	30805040
Powered Exponential	40,747(8,901)	0,499(0,085)	30802784
Matérn	201,688(37,987)	0,132(0,031)	30798870
Circular	77,550(20,563)		30818087
Cubic	50,841(11,598)		30820366
Gneiting	20,659(4,310)		30820294
Exponential	53,163(13,828)		30809343
Spherical	93,668(27,321)		30817584
Gaussiano	21,031(4,279)		30820202

Tabela 8 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude e longitude em quilômetros e a covariável precipitação média

Função de correlação	Modelo anisotrópico de Schlather					TIC
	$\hat{\nu}$	$\hat{c}_2$	$\hat{c}_4$	$\hat{\phi}$	$\hat{\nu}$	
Cauchy	-0,168(0,021)	4,810(0,429)	504,044(7,490)	83,210(10,643)	0,481(0,121)	30792178
Powered Exponential	-0,202(0,019)	5,526(1,504)	572,499(51,523)	316,642(119,707)	0,768(0,038)	30786627
Matérn	-0,181(0,018)	4,815(1,960)	37,896(1,982)	601,640(3,795)	0,128 (0,065)	30792812
Circular	10593,872(0,0009)	72,211(1,250)	12,091(3,566)	396,957(3,808)		30821016
Cubic	0,010(0,110)	2,074(1,034)	225,057(26,719)	295,231(34,537)		30810177
Gneiting	2200,251(0,0006)	1294,101(18,090)	29,668(8,731)	113,877(5,423)		30820910
Exponential	3828,613(0,0004)	4285,655(4,826)	63,385(0,665)	125,670(1,860)		30820981
Spherical	1193,924(0,0003)	709,911(9,701)	13,421(26,585)	427,013(13,448)		30820778
Gaussiano	-70,688(0,028)	0,474(0,108)	106,051(30,507)	57,779(3,214)		30811451

Tabela 9 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos de Schlather para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude, longitude e a covariável altitude em quilômetros somado à covariável precipitação média

Função de correlação	Modelo anisotrópico de Schlather					$\hat{\nu}$	TIC
	$\hat{\vartheta}$	$\hat{c}_2$	$\hat{c}_3$	$\hat{c}_4$	$\hat{\phi}$		
Cauchy	-0,179(0,017)	6,103(0,714)	316,911(18,320)	684,586(26,512)	0,495(3,397)	0,399(0,109)	30791371
Powered Exponential	-0,200(0,016)	4,390(0,776)	31,009(12,968)	457,278(14,280)	168,276(3,758)	0,790(0,086)	30783815
Matérn	-0,181(0,018)	4,818(1,921)	20,394(4,883)	37,834(4,818)	601,627(3,448)	0,128 (0,078)	30792818
Circular	10618,188(0,002)	3748,758(11,064)	29,096(0,945)	71,626(25,686)	397,236(10,767)		30821107
Cubic	-1,625(0,036)	0,432(0,047)	180,026(9,224)	113,746(8,999)	176,006 (16,036)		30809167
Gneiting	2416,231(0,001)	1286,176(10,726)	24,410(6,179)	29,499(6,039)	114,454(2,510)		30820895
Exponential	3861,484(0,0006)	4271,560(5,900)	27,569(4,758)	62,973(5,971)	126,081(10,183)		30820979
Spherical	345,455(0,0004)	390,285(3,155)	31,882(1,722)	102,434(3,229)	447,302(19,978)		30820646
Gaussiano	-29,892(0,039)	0,442(0,047)	202,639(12,915)	84,104(3,738)	68,450(7,739)		30809210

Tabela 10 - Estimativas e desvios padrão (em parênteses) dos parâmetros associados aos modelos anisotrópicos e isotrópicos de Smith para os máximos mensais de precipitação, pelo método de máxima verossimilhança pareada, comparados pelo Critério de Informação Takeuchi (*TIC*), considerando-se as coordenadas latitude, longitude a covariável altitude em quilômetros somado à covariável precipitação média

Modelo	Função de correlação Gaussiana					TIC
	$\hat{\vartheta}$	$\hat{c}_2$	$\hat{c}_3$	$\hat{c}_4$	$\hat{\sigma}$	
Anisotrópico	40,697(0,026)	1,639(0,068)	497,013(7,654)	216,246(6,096)	123,108(4,981)	31208388
Anisotrópico	39,139(0,026)	0,553(0,020)		120,930(3,178)	52,943(3,758)	31412412
Anisotrópico	37,655(0,091)	1,465(0,063)	382,879(18,504)		50,930(3,146)	31384721
Anisotrópico	40,863(0,037)	1,781(0,073)			28,540(2,519)	31429659
Isotrópico					20,274(1,626)	31432832

dados de temperatura no espaço euclidiano, observaram que a covariável altitude era a que mais influenciava a dependência espacial. Utilizando-se a mesma metodologia deste trabalho, Blanchet e Davison (2011) observaram que a altitude era a covariável que mais influenciava a distância climática na modelagem de extremos de neve. Uma característica interessante é a direção principal de dependência na região noroeste e região sudoeste.

Observa-se que o modelo com menor valor *TIC*, disponível na Tabela 9, leva-se em consideração as covariáveis altitude e precipitação média, tendo em vista que essas covariáveis influenciam no modelo, há necessidade de se interpolar essas duas covariáveis para obtenção do coeficiente extremo pareado. Para a covariável altitude realiza-se krigagem espacial com uma dependência spline²⁰. A matriz de altitude utilizada na krigagem espacial com dependência spline possui uma resolução espacial de 90 metros, com dimensões 5.935×8.309 , definindo-se o relevo do estado do Paraná, esses dados estão disponíveis no site do Ministério de Agricultura e Abastecimento²¹.

Na sequência interpola-se a covariável precipitação média, levando-se em consideração as 232 estações meteorológicas. É importante ressaltar que a dimensão dessa matriz interpolada tem que ser igual matriz de altitude, o mesmo processo foi utilizado com sucesso por Blanchet e Davison (2011), na modelagem de extremos de neve na Suíça.

²⁰Um spline é uma curva definida matematicamente por dois ou mais pontos de controle. Os pontos de controle que ficam na curva são chamados de nós. Os demais pontos definem a tangente à curva em seus respectivos nós.

²¹<http://www.relevobr.cnpm.embrapa.br/download/pr/pr.htm>

Pode-se observar por meio da Figura 15 os mapas estimados da dependência extrema pareada sob o processo max-stable, a Figura 15 mostra claramente o efeito das variáveis altitude e precipitação média, pode-se observar também uma fraca dependência extrema na região leste/sudeste. Os resultados sugerem que a altitude pode ter influência na dependência dos valores extremos. Em outras palavras, regiões mais planas possuem uma dependência espacial da precipitação maior comparativamente a regiões com maiores altitudes.

Nesse contexto, máximos pluviométricos possuem relativa dependência espacial em regiões de baixa altitude e pouca dependência em regiões de maiores altitudes. Isso se deve principalmente ao fato da precipitação ocorrer quando a massa de ar eleva-se juntamente com o conjunto de montanhas e encontra temperaturas mais baixas, mas a partir de uma certa altitude quando a umidade do ar se reduz, a precipitação se reduz.

Outras variáveis devem ser levadas em conta na análise da precipitação, por exemplo, insolação, ventos, etc. Contudo, em se tratando de dependência dos máximos de precipitação, existem indícios de que a altitude possui efeito negativo na dependência. Existem algumas implicações práticas desse fato. A primeira delas refere-se a gestão de risco agrícola. Quando ocorre uma elevada quantidade de precipitação nas épocas de colheita pode haver prejuízos, devido a impossibilidade de se utilizar o maquinário para a colheita.

Os resultados podem subsidiar a decisão de implantação de estações meteorológicas quando a variável de interesse for a precipitação máxima. Regiões com alta dependência espacial precisariam de muito menos estações do que regiões de baixa dependência. A ideia é utilizar poucas estações que possuam alta representatividade da precipitação máxima em determinadas regiões, e vice-versa. Com isso reduz-se o custo de obtenção, instalação e manutenção de estações meteorológicas manuais e automáticas.

Figura 15 - Coeficiente extremo pareado de Barbosa Ferraz, Paranavai, Cascavel e Castro (círculos brancos) preditos pelo processo max-stable sob o modelo selecionado

4.2.2 Validação dos modelos

A validação cruzada é uma técnica para avaliar a capacidade de generalização de um modelo, a partir de um conjunto de dados. Esta técnica é amplamente empregada em problemas onde o objetivo da modelagem é a predição. Busca-se então estimar o quão acurado é este modelo na prática, ou seja, o seu desempenho para um novo conjunto de dados. O conceito central das técnicas de validação cruzada é o particionamento do conjunto de dados em subconjuntos mutualmente exclusivos, e posteriormente, utilizam-se alguns destes subconjuntos para a estimação dos parâmetros do modelo (da-

dos de treinamento) e os restantes dos subconjuntos (dados de validação ou de teste) são empregados na validação do modelo.

Para uma verificação inicial da qualidade do modelo selecionado, compara-se a predição do coeficiente extremo obtido substituindo-se os parâmetros envolvidos na Equação (38) por suas respectivas estimativas encontradas na Tabela 9, com os estimadores de Schlather e Tawn (2003) ou o Madograma estimado baseado em Cooley, Naveau e Poncet (2006). Como o coeficiente extremo definido na Equação (38) está em função da distância entre as estações meteorológicas, avalia-se graficamente o coeficiente extremo em função da distância. As Figuras 16 e 17 mostram essas comparações para os três modelos que tiveram um melhor desempenho em comparação ao *TIC*. Para maior clareza, é apresentado apenas o madograma estimado definido na seção 3.4.3.

Os estimadores de Schlather e Tawn (2003) produzem essencialmente a mesma imagem, mas com uma variabilidade um pouco maior. O ajuste do modelo segue muito bem até uma distância climática de 1.300, e, em seguida, subestima-o. Esperava-se um limite do madograma a cerca de 1,8, no entanto, não pode ser alcançado com o modelo de Schlather; veja seção 3.3, este resultado corrobora com Davison, Padoan e Ribatet (2012) em estudo de precipitação máxima em uma série histórica de 1962 a 2008 no Planalto da Suíça e com Blanchet e Davison (2011), na modelagem da dependência espacial extrema da profundidade de neve na Suíça.

Dando sequência as análises, utiliza-se as 30 estações meteorológicas para validação do modelo (aproximadamente 11% das estações meteorológicas), conforme apresentado na Figura 10. Verifica-se a validade do modelo e compara-se a distribuição empírica dos máximos com subconjuntos de estações, isto é, $Z_{\mathcal{A}}^* = \max \{Z^*(s_i), s_i \in \mathcal{A}\}$, com máximos preditos pelo modelo selecionado. A distribuição de $Z_{\mathcal{A}}^*$ sob o modelo selecionado é conhecida analiticamente apenas quando $\mathcal{A}$ inclui duas estações, no entanto, as amostras de $Z_{\mathcal{A}}^*$ pode ser simulada para qualquer $\mathcal{A}$.

Uma vez que, realizações $z_{\mathcal{A}}^*$ de $Z_{\mathcal{A}}^*$ são avaliadas para $D = 36$ anos, pode-se comparar os quantis empíricos de $Z_{\mathcal{A}}^*$ com os quantis simulados. Mais precisamente, dado um subconjunto $\mathcal{A}$, simula-se $\mathcal{T}$ séries independentes $z_{\mathcal{A}}^{*(T)}$ de tamanho D , e depois obtém $\mathcal{T}$ replicas de séries observadas de Fréchet. Ordenando-se os valores observados $z_{\mathcal{A}}^*$, pode-se então compara-los com os valores ordenados de $z_{\mathcal{A}}^{*(T)}$. Bandas de confiança, em geral também podem ser obtidas a partir dessas simulações (DAVISON; HINKLEY,

Figura 16 - Coeficiente extremo para pares de estações meteorológicas, em função da distância entre eles, no espaço euclidiano (gráfico da esquerda) ou o espaço climático (gráfico da direita). A curva vermelha é a curva do coeficiente extremo ajustado ao processo max-stable correspondente ao modelo anisotrópico de Schlather

Figura 17 - Coeficiente extremo para pares de estações meteorológicas, em função da distância entre eles, no espaço climático em ambos os gráficos. A curva vermelha é a curva do coeficiente extremo ajustado ao processo max-stable correspondente ao modelo anisotrópico de Schlather

1997).

As Figuras 18 e 19 usam essa abordagem com objetivo de comparar distribuições empíricas e teóricas para diferentes grupos de duas, três ou quatro estações meteorológicas tomadas a partir das 30 não utilizadas no ajuste do modelo, pode-se ob-

servar que alguns grupos estão bem agrupados, e outros se dispersando. O ajuste parece ser rezoavelmente satisfatório em todos os casos. Mesmo quando há uma considerável distância entre as estações, os dados parecem estar bem modelados, apesar da incompatibilidade entre os modelos ajustados e o coeficiente extremo pareado empírico visto na Figura 16.

Figura 18 - Comparação dos quantis empíricos e teóricos do modelo para os máximos mensais de grupos de estações não utilizadas nos ajustes. As estações utilizadas para cada figura são mostradas em seu mapa, e os envelopes com 95% de confiança obtidos a partir de $\mathcal{T} = 5.000$ simulações

Figura 19 - Comparação dos quantis empíricos e teóricos do modelo para os máximos mensais de grupos de estações não utilizadas nos ajustes. As estações utilizadas para cada figura são mostradas em seu mapa, e os envelopes com 95% de confiança obtidos a partir de $\mathcal{T} = 5.000$ simulações

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considera-se os modelos e métodos descritos ao longo deste trabalho como um passo na direção realista e modelagem flexível de máximos espaciais, em concordância com o paradigma clássico em processos max-stable e distribuições espaciais extremas. Eles são baseados nos modelos propostos por Smith (1990) e Schlather (2002). Estas abordagens envolvem os seguintes passos:

1. construção de um modelo marginal generalizado de valor extremo para localizações sobre valores máximos que permite a extrapolação para os máximos em todo o domínio espacial, permitindo-se transformar os máximos a partir de sua escala original para uma distribuição em unidades marginais de Fréchet;
2. construção de um modelo espacial sobre o processo max-stable para valores máximos transformados, levando-se em consideração a sua dependência espacial através de uma função de covariância apropriada;
3. ajuste de máxima verossimilhança pareada do modelo indicado por 1 e 2, com seleção de modelo usando-se critérios de informação;
4. avaliação do ajuste desses modelos usando-se o coeficiente extremo pareado em diferentes localizações;
5. validação dos modelos comparando-se a distribuição empírica dos máximos com subconjuntos de estações não utilizadas nos ajustes iniciais.

Embora o surgimento natural, a partir da construção probabilística do processo max-stable, na transformação da etapa (1) possa parecer estranho, tendo em vista que, a interpretação da escala em unidades marginais de Fréchet é apenas indiretamente ligada ao processo físico subjacente. O mesmo pode ser dito ao passo (2), embora o conjunto de elementos aleatórios possa ter uma interpretação clara em casos extremos, por exemplo, chuvas consecutivas, onde possam corresponder a uma célula de tempestade excepcionalmente ativa.

Nossa aplicação envolveu classes mais amplas de funções tais como splines que, em princípio, não há nenhuma dificuldade em utiliza-la, desde que os dados sejam confiáveis. Em muitos trabalhos de extremos espaciais, utiliza-se funções mais sim-

ples, como por exemplo, a utilização de uma superfície de resposta polinomial para os parâmetros marginais, que por sua vez, não leva em consideração o processo max-stable.

O algoritmo utilizado no ajuste do passo (3) é bastante rápido e robusto, permitindo-se uma boa eficiência computacional e estatística na modelagem da precipitação máxima mensal. Esta modelagem pode ser estendida para qualquer período do ano, até mesmo máximos anuais. Em particular, pode-se representar o modelo de um modo mais flexível até mesmo em regiões fracamente dependentes, envolvendo-se uma transformação na distância euclidiana, conseqüentemente, permite-se a modelagem dos efeitos direcionais resultantes de fenômenos ambientais.

Em termos práticos, os impactos das mudanças climáticas na agricultura é uma questão econômica, ambiental e social para o setor agrícola, relacionada com identificação de oportunidades e manejo de riscos. O estudo dos extremos espaciais permite fornecer ao segmento de finanças e seguro rural, informações para auxiliá-los em seus processos de tomada de decisão de manejo de riscos, em um cenário de aumento da frequência e intensidade de eventos extremos, bem como de variação, ao longo prazo dos fenômenos meteorológicos.

5.1 Pesquisas futuras

Dando continuidade a esta pesquisa, pretende-se utilizar as estimativas dos parâmetros da distribuição *GEV* para obtenção de superfícies de respostas e estimativas dos níveis de retorno via extremos espaciais.

Outra pesquisa consistirá na obtenção do ajuste dos modelos com representações de extremos espaciais por meio de processos pontuais.

REFERÊNCIAS

- BELITSKY, V.; MOREIRA, F.M. **Emprego do método “Peaks-over-Threshold” na estimação de risco; uma exposição abrangente, detalhada mas simples.** IN BRASILIAN. **Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance**, 3., 2007. Maresias, 2007, 117 p.
- BUISHAND, T.A.; DE HAAN, L.; ZHOU, C. On spatial extremes: with application to a rainfall problem. **Annals of Applied Statistics**, Beachwood, v. 2, p. 624–642, 2008.
- BLANCHET, J.; LEHNING, M. Mapping snow depth return levels: smooth spatial modeling versus station interpolation. **Hydrology and Earth System Sciences**, Göttingen, v. 14, p. 2527–2544, 2010.
- BLANCHET, J.; DAVISON, A.C. Spatial modelling of extreme snow depth. **Annals of Applied Statistics**, Beachwood, v. 8, p. 62-92, 2011.
- BROOKS, T.M.; MITTERMEIER, R.A.; FONSECA, G.A.B.; GERLACH, J.; HOFFMANN, M.; LAMOREUX, J.F.; MITTERMEIER, C.G.; PILGRIM, J.D.; RODRIGUES, A.S.L. Global Biodiversity Conservation Priorities. **Journal of Applied Statistical Science**, New York, v. 313, p. 58-61, 2006.
- BROYDEN, C.G. Quasi-Newton Methods and Their Application to Function Minimization, **Mathematics of Computation**, Providence, v. 21, p. 368–381, 1967.
- CARLIN, B.P.; CHATFIELD, C.; TANNER, M.; ZIDEK, J. **Statistical Methods for Spatial Data Analysis**. New York: CHAPMAN & HALL/CRC, 2005. 488 p.
- COLES, S.G. Regional modeling of extreme events via max-stable processes. **Journal of the Royal Statistical Society**, London, v. 55, p. 797-816, 1993.
- **An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values**. New York: Springer, 2001. 221 p.
- COLES, S.G.; TAWN, J.A. Modelling Extreme Multivariate Events. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, London, v. 53, p. 377-392, 1991.
- COOLEY, D.; NAVEAU, P.; PONCET, P. Variograms for spatial max-stable random fields. Dependence in Probability and Statistics. **Springer**, New York, v. 187, p. 373-390, 2006.
- COOLEY, D.; DAVIS, R.A.; NAVEAU P. **Prediction for Max-Stable Processes via an Approximated Conditional Density**. Fort Collins: Department of Statistics, cooleyd@stat.colostate.edu, 2007. 23 p.
- COOLEY, D.; NYCHKA, D.; NAVEAU, P. Bayesian Spatial Modeling of Extreme Precipitation Return Levels. **Journal of the American Statistical Association**, London, v. 102, p. 824–840, 2007.

COX, D.R.; REID, N. A note on pseudolikelihood constructed from marginal densities. **Biometrika**, London, v. 91, p. 729–737. 2004.

CHILÈS, J.P.; DELFINER, P. **Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty**. New York: John Wiley, 1999. 605 p.

CRESSIE, N. **Statistics for Spatial Data**. New York: Wiley, 1993. 232 p.

DAVISON, A.C. **Statistical models**. New York: Published in the United States of America by Cambridge University Press, 2003. 738 p.

DAVISON, A.C.; HINKLEY, D.V. **Bootstrap Methods and Their Application**. New York: Published in the United States of America by Cambridge University Press, 1997. 834 p.

DAVISON, A.C.; GHOLAMREZAEI, M.M. Geostatistics of extremes. **Journal of the Royal Society. Series A**, London, v. 3, p. 581–608, 2011.

DAVISON, A.C.; PADOAN, S.; RIBATET, M. Statistical modelling of spatial extremes (with discussion). **Statistical Science**, Dallas, Jan. 2012. In press

DE HAAN, L. A spectral representation for max-stable processes. **Annals of Probability**, Beachwood, v. 12, p. 1194–1204, 1984.

----- Extremes in higher dimensions: the model and some statistics. **Session of the International Statistical Institute**, The Hague: International Statistical Institute, v. 8, p. 26–36, 1985.

DE HAAN, L.; RESNICK, S.I. , Limit Theory for Multivariate Sample Extremes. **Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, copyright by Springer**, Verlag, v. 40, p. 317–337, 1977.

DE HAAN, L.; PICKANDS, J. Stationary Min-Stable Stochastic Processes. **Probability Theory and Related Fields**, New York, v. 72, p. 477–492, 1986.

DE HAAN, L.; PEREIRA, A.E. Spatial extremes: Models for the stationary case. **Annals of Statistics**, Philadelphia, v. 34, p. 146–168, 2006.

DE HAAN, L.; ZHOU, C. On extreme value analysis of a spatial process. **Statistical Journal**, Lisbon, v. 6, p. 71–81, 2008.

DIGGLE, P.J.; RIBEIRO Jr., P.J. **Model-Based geostatistics**. New York: Springer, 2007. 230 p.

ECKER, M.D.; GELFAND, A.E. Spatial modeling and prediction under stationary non-geometric range anisotropy. **Environmental and Ecological Statistics**, Netherlands, v. 10, p. 165–178, 2003.

FISHER, R.A.; TIPPETT, L.H.C. Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge, v. 24, p. 180–190, 1928.

FULLER, W.E. Flood flows. **American Mathematical Society**, Washington, v. 77, p. 564–573, 1914.

FUENTES, M. A high frequency kriging approach for non-stationary environmental processes. **Environmetrics**, Germantown, v. 12, p. 469–483, 2001.

FUENTES, M.; HENRY, J.; REICH, B. Nonparametric spatial models for extremes: Application to extreme temperature data. **Unpublished**, fuentes@stat.ncsu.edu., 2010.

GALAMBOS, J. **Asymptotic theory of extreme order statistics**, 2nd ed. Florida: Krieger, 1987. 414 p.

GENTON, M.G.; MA, Y.; SANG, H. On the likelihood function of Gaussian max-stable processes. **Biometrika**, London, v. 87, p. 1–8, 2011.

GNEDENKO, B. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. **Annals of Mathematics**, Princeton, v. 44, p. 423–453, 1943.

GNEITING, T. Nonseparable, stationary covariance functions for space-time data. **Journal of the American Statistical Association**, London, v. 97, p. 590–600, 2002.

GRÜNENFELDER, C.; DAVISON, A.C. **PREDICTION BASED ON PAIRWISE LIKELIHOOD**. 2010. 62 p. Master Thesis. École polytechnique fédérale de Lausanne, Lausanne, 2010. 62 p.

GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society**, London, v. 221, p. 163–198, 1920.

HAAS, T.C. Lognormal and Moving Window Methods of Estimating Acid Deposition. **Journal of the American Statistical Association**, London, v. 85, p. 950–963, 1990.

HABERLANDT, U. Geostatistical interpolation of hourly precipitation from rain gauges and radar for a large-scale extreme rainfall event. **Journal of Hydrology**, Maryland Heights, v. 332, p. 144–157, 2007.

HASHORVA, E. A novel class of bivariate max-stable distributions. **Statistics & Probability Letters**, Maryland Heights, v. 76, p. 1047–1055, 2006.

HAUKSSON, H.; DACOROGNA, M.; DOMENIG, T.; MÜLLER, U.; SAMORODNITSKY, G. Multivariate extremes, aggregation and risk estimation. **Quantitative Finance**, Oxford, v. 1, p. 79–95, 2001.

HOSKING, J.R.M. Algorithm AS 215: Maximum-likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution. **Journal of the Royal Statistical Society-Applied Statistics**, London, v. 34, p. 301–310, 1985.

HOSKING, J.R.M.; WALLIS, J.R.; WOOD, E.F. Estimation of the generalised extreme value distribution by the method of probability-weighted moments. **Technometrics**, Alexandria, v. 27, p. 251-261, 1985.

HSING, T.; KLÜPPELBERG, C.; KUHN, G. Dependence Estimation and Visualization in Multivariate Extremes with Applications to Financial Data. **Extremes**, Graz, v. 7, p. 99–121, 2004.

ILLIAN, J.; PENTTINEN, A.; STOYAN, H.; STOYAN, D. **Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns**, England: John Wiley, 2008. 557 p.

JANKOVIĆ, S. On continuation of Max-Stable laws. **Journal of Mathematical Sciences**, Belgrade, v. 92, p. 3900-3906, 1998.

JENKINSON, A.F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, London, v. 81, p. 158-171, 1955.

JOURNEL, A.; HUIJBREGTS, C. **Mining Geostatistics**. New York: Academic Press, 1978. 305 p.

KABLUCHKO, Z.; SCHLATHER, M.; DE HAAN, L. Stationary max-stable fields associated to negative definite functions. **Annals of Probability**, Beachwood, v. 37, p. 2042–2065, 2009.

KOTZ, S.; NADARAJAH, S. **Extreme Value Distributions: Theory and Applications**. London: Imperial College Press, 2000. 190 p.

KOJADINOVIC, I.; SHANG, H.; YAN, J. A class of goodness-of-fit tests for spatial extremes models based on max-stable processes, v. 48, p. 1-32, 2012. In press.

KUNIHAMA, T.; OMORI, Y.; ZHANG, Z. Efficient estimation and particle filter for max-stable processes. **Journal of Times Series Analysis**, London, v. 74, p. 1-20, 2011.

LEADBETTER, M.R.; LINDGREN, G.; ROOTZÉN, H. **Extremes and related properties of random sequences and processes**, New York: Springer series in statistics, 1983. 346 p.

MACLEOD, A.J. A remark on algorithm AS 215: Maximum-likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution. **Journal of the Royal Statistical Society**, London, v. 38, p. 198-199, 1989.

MANNSHARDT-SHAMSELDIN, E.C.; SMITH, R.L.; SAIN, S.R.; COOLEY, M.D. Downscaling extremes: a comparison of extreme Value distributions in point-source and gridded Precipitation data. **Annals of Applied Statistics**, Beachwood, v. 4, p. 484–502, 2010.

MARTINS, E.S.; STEDINGER, J.R. Generalized maximum-likelihood generalized extreme-value quantile estimators for hydrologic data. **Water Resources Research**, Arizona, v. 36, p. 737-744, 2000.

MATÉRN, B. **Spatial Variation, Lecture Notes in Statistics**. Berlin: Springer, 1986. 227 p.

MATHERON, G. **Traite de Geostatistique Appliquee**. Paris: Memoires du Bureau de Recherches Geologiques et Minieres, 1962. 238 p.

----- . Principles of geostatistics. **Economic Geology**, New York, v. 58, p. 1246–1266, 1963.

----- . Suffit-il, pour une covariance, d'être de type positif. **Sciences de la Terre, série informatique géologique**, Paris, v. 26, p. 51–66, 1987.

MARCELINO, E.V.; NUNES, L.H.; KOBIYAMA, M. Banco de dados de desastres naturais: análise de dados globais e regionais. **Caminhos de geografia**, Uberlândia, v. 6, p. 130-149, 2006.

NAVEAU, P.; GUILLOU, A.; COOLEY, D.; DIEBOLT, J. Modelling pairwise dependence of maxima in space. **Biometrika**, London, v. 96, p. 1–17, 2009.

PADOAN, S. **Computational Methods for Complex Problems in Extreme Value Theory**. 2008. 98 p. PhD(Thesis) - University of Padova, Padova, 2008. 99 p.

PADOAN, S.; RIBATET, M.; SISSON, S. Likelihood-based inference for max-stable processes. **Journal of the American Statistical Association**, London, v. 105, p. 263-277, 2010.

PANNATIER, Y. **Variowin 2.2: Software for special data analysis in 2D**. New York: Springer-Verlag, 1996. 96 p.

PICKANDS, J. **Multivariate Extreme Value Distributions**. New York: Session International Statistical Institute, 1981. 256 p.

PINTO, F.C. **Teoria de Valores Extremos: Aplicação ao Mercado Financeiro**. 2002. 145 p. Dissertação (Mestrado em Estatística), Instituto de Matemática e Estatística/USP, São Paulo, 2002. 145 p.

POON, S.; ROCKINGER, M.; TAWN, J. Modelling extreme-value dependence in international stock markets. **Statistica Sinica**, Taiwan, v. 13, p. 929-953, 2003.

----- . Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models, and Financial Implications. **The Review of Financial Studies**, Oxford, v. 17, p. 581–610, 2004.

PRESCOTT, P.; WALDEN, A.T. Maximum likelihood estimation of the parameters of the three-parameter generalized extreme-value distribution from censored samples. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v. 16, p. 241-250, 1983.

RESNICK, S.I. **Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes**, New York: Springer, 1987. 320 p.

REICH, B.; SHABY, B.A. A finite-dimensional construction of a max-stable process for spatial extremes. **Unpublished**, p. 1-40, 2011.

RIBATET, M. **A User's Guide to the SpatialExtremes Package**. 2009. 62 p. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2009. 62 p.

----- **SpatialExtremes: Modelling Spatial Extremes**. R package version 1.8-0. <http://CRAN.R-project.org/package=SpatialExtremes>, Lausanne, 2011. 108 p.

ROOTZÉN, H. Extremes of moving averages of stable processes. **Annals of Probability**, Beachwood, v. 6, p. 847-869. 1978 p.

SANG, H.; GELFAND, A.E. Continuous spatial process models for spatial extreme values. **Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics**, London, v. 15, p. 49-65, 2009.

SAMPSON, P.D.; GUTTORP, P. Nonparametric Estimation of Nonstationary Spatial Covariance Structure. **Journal of the American Statistical Association**, London, v. 87, p. 108-119, 1992.

SCHABENBERGER, O.; GOTWAY, C.A. **Statistical Methods for Spatial Data Analysis**. Washington: Chapman & Hall/CRC, 2005. 467 p.

SCHLATHER, M. **Introduction to positive definite functions and to unconditional simulation of random fields**. Lancaster: Technical Report ST-99-10, 1999. 150 p.

----- Models for stationary max-stable random fields. **Extremes**, Netherlands, v. 5, p. 33-44, 2002.

SCHLATHER, M.; TAWN, J.A. A dependence measure for multivariate and spatial extreme values: Properties and inference. **Biometrika**, London, v. 90, p. 139-156, 2003.

SMITH, K. **Environmental hazards: assessing risk**. Florence: Routledge, 2000. 352 p.

SMITH, R.L. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. **Biometrika**, London, v. 72, p. 67-92, 1985.

----- Max-Stable Processes and Spatial Extremes. **Unpublished**, available from <http://www.stat.unc.edu/postscript/rs/spatex.pdf>. p.1-32, 1990.

SMITH, E.L.; STEPHENSON, A.G. An extended Gaussian max-stable process model for spatial extremes. **Journal of Statistical Planning and Inference**, New York, v. 139, p. 1266-1275, 2009.

SMITH, R.L.; TEBALDI, C.; NYCHKA, D.; MEARNS, L.O. Bayesian Modeling of Uncertainty in Ensembles of Climate Models. **JASA**, New York, v. 104, p. 97-116, 2009.

TAKEUCHI, K. Distribution of informational statistics and a criterion of model fitting. **Suri-Kagaku (Mathematic Sciences)**, Tokyo, v. 153, p. 12–18, 1976.

VARIN, C. On composite marginal likelihoods. **Advances in Statistical Analysis**, New York, v. 92, p. 1–28, 2008 p.

VARIN C.; VIDONI, P. A note on composite likelihood inference and model selection. **Biometrika**, London, v. 92, p. 519–528, 2005.

WEBSTER, R.; OLIVER, M. **Geostatistics for environmental scientists**, London: John Wiley, 2001. 271p.

WACKERNAGEL, H. **Multivariate Geostatistics. An Introduction with Applications**, 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2003. 300 p.

ZIMMERMAN, D. Another look at anisotropy in geostatistics. **Mathematical Geology**, Edmonton, v. 25, p. 453-470, 1993.

ZHANG, Z. **Multivariate Extremes, Max-Stable Process Estimation and Dynamic Financial Modeling**. 2002. 172 p. Dissertation submitted to the Faculty of the University of North Carolina, Chapel Hill, 2002. 172 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Algoritmo para maximização da verossimilhança pareada: Schlather & Tawn 2003 (Biometrika).

#Carregar pacote:

```
require(geoR)
MAXREAL<-10^50
```

#Calculando o limiar(threshold)

```
getpairextind <- function(frech,prob=0,sel=NULL){
  if threshold=0, no censorship
  if (prob == 0) z <- 0
  else z <- -1/log(prob)
  n.site<-ncol(frech)
  n.obs<-nrow(frech)

  lik.fun <- function(theta,frech,pair) .C("extCoeffST", as.double(frech[,pair]),
      as.double(colMeans(1/frech[,pair])), as.double(z), as.double(theta),
      as.integer(n.obs), dns = double(1), PACKAGE = "SpatialExtremes")$dns
  pairextind <- NULL
  k <- 1
  if (is.null(sel)){
    for (i in 1:(n.site - 1)) {
      for (j in (i + 1):n.site) {
        pairextind[k] <- optimize(lik.fun, interval = c(1,2), frech=frech,
            pair=c(i,j))$minimum
        k <- k + 1
      }
    }
  }
  else{
    for (i in 1:n.site) {
      if (i==sel) pairextind[k] <- 1
      else pairextind[k]<-optimize(lik.fun, interval = c(1,2), frech=frech,
          pair=c(i,sel))$minimum
      k <- k + 1
    }
  }
  pairextind
}
```

#Calculando os pares das regiões

```
getpairreg <- function(regs){
  n.site<-length(regs)
  pairreg<-NULL
  k <- 1
```

```

for (i in 1:(n.site - 1)) {
  for (j in (i + 1):n.site) {
    if (regs[i]==regs[j]) pairreg[k]<-regs[i]
    else pairreg[k]<-"both"
    k <- k + 1
  }
}
pairreg
}

getnewcoord <- function(coord,param,regs,dist2border){
  coord.new <- coord
  colnames(coord.new)<-paste(colnames(coord),".new",sep="")
if ("rotxy" %in% substr(names(param),1,5)){
  rotxyvec<-getparvec("rotxy",param,regs,dist2border)
  dilyvec<-getparvec("dily",param,regs,dist2border)
  coord.new[, "x.new"]<-(coord[, "x"]*cos(rotxyvec)+coord[, "y"]*sin(rotxyvec))
  coord.new[, "y.new"]<-dilyvec*(-coord[, "x"]*sin(rotxyvec)+
  coord[, "y"]*cos(rotxyvec))

if ("z" %in% colnames(coord)) {
  dilzvec<-getparvec("dilz",param,regs,dist2border)
  coord.new[, "z.new"]<-coord[, "z"]*dilzvec
}
if ("m" %in% colnames(coord)) {
  dilmvec<-getparvec("dilm",param,regs,dist2border)
  coord.new[, "m.new"]<-coord[, "m"]*dilmvec
}
if ("n" %in% colnames(coord)) {
  dilnvec<-getparvec("diln",param,regs,dist2border)
  coord.new[, "n.new"]<-coord[, "n"]*dilnvec
}
if ("r" %in% colnames(coord)) {
  dilrvec<-getparvec("dilr",param,regs,dist2border)
  coord.new[, "r.new"]<-dilrvec #coord[, "r"]*
}
}
coord.new
}

getparvec<-function(namepar,param,regs,dist2border){
if ("dilr.south" %in% names(param)) param<-c(param,dilr.north=0)
  if ("a" %in% names(param)){
parvec<-(param[paste(namepar, ".north", sep="")] -param[paste(namepar, ".south",
  sep="")])/(2*param["a"]*(dist2border+param["a"])+
  param[paste(namepar, ".south", sep="")])
parvec[(dist2border>=param["a"])]<-param[paste(namepar, ".north", sep="")]
parvec[(dist2border<=
- param["a"])]<-param[paste(namepar, ".south", sep="")]
  nb<-length(intersect(which(dist2border<param["a"]),
  which(dist2border>=param["a"])))

```

```

    }
else if ("a.north" %in% names(param)){
  parvec<-(param[paste(namepar, ".north", sep="")] - param[paste(namepar, ".south",
    sep="")]) / (param["a.north"] + param["a.south"])*(dist2border+
    param["a.south"]) + param[paste(namepar, ".south", sep="")])
  parvec[(dist2border >= param["a.north"])] <-
    param[paste(namepar, ".north", sep="")]
  parvec[(dist2border <=
    -param["a.south"])] <- param[paste(namepar, ".south", sep="")]
  nb <- length(intersect(which(dist2border < param["a.north"]),
    which(dist2border > -param["a.south"])))
  }
else if (paste(namepar, ".north", sep="") %in% names(param)){
  parvec <- rep(NA, length(regs))
  parvec[regs=="north"] <- param[paste(namepar, ".north", sep="")]
  parvec[regs=="south"] <- param[paste(namepar, ".south", sep="")]
  nb <- 0
  }
else if ("dilir" %in% names(param) && namepar=="dilir") {
  parvec <- rep(NA, length(regs))
  parvec[regs=="north"] <- 0
  parvec[regs=="south"] <- param["dilir"]
  nb <- 0
  }
else{
  parvec <- rep(param[namepar], length(regs))
  nb <- 0
  }
  parvec
}

getdistance <- function(coord, dinf, pairregs){
  dist <- distance(coord)
  if (dinf){
    dist[pairregs=="both"] <- MAXREAL
  }
  dist
}

#Checando os parâmetros

check.param <- function(param, cov.model, indt.reg, maxdist){
  ok <- T

  #Verificação do espaço climático

  if (any(param[substr(names(param), 1, 1)=="a"]<0)) {ok<-F}
  if (cov.model!="gauss"){
    if (any(param[substr(names(param), 1, 5)=="range"]<=0)) {ok<-F}
    if (cov.model=="matern"){
      if (any(param[substr(names(param), 1, 6)=="smooth"]<0) ||
        any(param[substr(names(param), 1, 6)=="smooth"]>100)) {ok<-F}
    }
  }
}

```

```

    }
  if (cov.model=="cauchy"){
    if(any(param[substr(names(param),1,6)=="smooth"]<0)) {ok<-F}
  }
  else if (cov.model=="powered.exponential"){
    if(any(param[substr(names(param),1,6)=="smooth"]<0) ||
      any(param[substr(names(param),1,6)=="smooth"]>2)) {ok<-F}
  }
  else if (cov.model=="gencauchy"){
    if(any(param[substr(names(param),1,7)=="smooth1"]<0) ||
      any(param[substr(names(param),1,7)=="smooth2"]<=0) ||
      any(param[substr(names(param),1,7)=="smooth2"]>2)) {ok<-F}
  }
  else if (cov.model=="gneiting.matern"){
    if(any(param[substr(names(param),1,7)=="smooth1"]<=0) ||
      any(param[substr(names(param),1,7)=="smooth2"]<=0)) {ok<-F}
  }
}
return(list(param=param,ok=ok))
}

#Calculo da distância de Mahalanobis para o modelo de Smith

mahal.pair.fct<-function(param,dist,pairreg,indt.regs){
  #print("mahal.pair.fct")
  if (all("sigma" %in% names(param))) nbcov<-1
  else nbcov<-2

  mahal.pair<-rep(NA,length(dist))
  if (!indt.regs) {
    mahal.pair<-dist/param["sigma"]
  }
  else{
    for (r in c("north","south")){
      if(nbcov==1) mahal.pair[pairreg==r]<-dist[pairreg==r]/param["sigma"]
    }
    else mahal.pair[pairreg==r]<-dist[pairreg==r]/param[paste("sigma.",r,sep="")]
  }
  mahal.pair[pairreg=="both"]<- MAXREAL
}
#print("mahal.pair.fct:end")
mahal.pair
}

#Função de covariância Gaussiana para o modelo de Schlather

rho.pair.fct<-function(cov.model,dist,pairreg,param,indt.regs){
  rho.pair<-rep(NA,length(dist))
  for (r in c("none","both")){
    if (indt.regs && r=="both") rho.pair[pairreg==r]<- -1
    else{
      if ("range" %in% names(param)) regstr<-""

```

```

      else regstr<-paste(".",r,sep="")
if (cov.model == "powered.exponential" || cov.model == "cauchy" ||
    cov.model == "matern") {
  rho.pair[pairreg==r]<-cov.spatial(dist[pairreg==r],cov.model=
    cov.model,cov.pars=c(1,param[paste("range",regstr,sep="")]),
    kappa=param[paste("smooth",regstr,sep="")]))
}
else rho.pair[pairreg==r]<-cov.spatial(dist[pairreg==r],cov.model=
  cov.model,cov.pars=c(1,param[paste("range",regstr,sep="")]))
}
}
rho.pair
}

#Logaritmo da função de verossimilhança pareada

nloglik<-function(param.estim,cov.model,frech,coord,param.fixed,names.all,
  indt.regs,dinf,regs,pairregs,dist2border){
  param<-c(param.estim,param.fixed)
  names(param)<-names.all
  coord.new<-getnewcoord(coord,param,regs,dist2border)
  dist<-getdistance(coord.new,dinf,pairregs)

  check<-check.param(param,cov.model,indt.regs,max(dist))
  if(!check$ok) return(MAXREAL)
  if(cov.model=="gauss") ll<-nloglik.smith2(frech,dist,pairregs,
    param,indt.regs)
  else
  ll<-nloglik.schlather(cov.model,frech,dist,pairregs,param,indt.regs)
  ll
}

#Logaritmo da função de verossimilhança para o modelo de Smith

nloglik.smith2 <- function(frech,dist,pairreg,param,indt.regs){
mahal.pair      <- mahal.pair.fct(param,dist,pairreg,indt.regs)
  n.site <- ncol(frech)
  n.obs  <- nrow(frech)
ll<- .C("mylpliksmith",as.double(frech),as.double(mahal.pair),
  double(n.site*n.obs),as.integer(n.obs),as.integer(n.site),
  dns = double(1), PACKAGE = 'SpatialExtremes')$dns
  -ll
}

#Logaritmo da função de verossimilhança para o modelo de Schlather

nloglik.schlather<-function(cov.model,frech,dist,pairreg,param,indt.regs){
rho.pair <- rho.pair.fct(cov.model,dist,pairreg,param,indt.regs)
  n.site <- ncol(frech)
  n.obs  <- nrow(frech)
ll<- .C("lplikschlatherweighted",as.double(frech),as.double(rho.pair),

```

```

      double(n.site*n.obs),rep(1,n.site),as.integer(n.obs),as.integer(n.site),
dns = double(1), PACKAGE = 'SpatialExtremes')$dns
  -ll
}

estimate.alltogether<-function(init,idx.estim,idx.fixed,cov.model,frech,coord,
                               indt.regs,dinf,regs,pairregs,dist2border,method,type=1,
                               temp=10,reltol=sqrt(.Machine$double.eps)){

#Executando as estimativas

if (method %in% c("BFGS","Nelder-Mead","CG","SANN")){
  if (method %in% c("CG","SANN")) maxit<-100
  else maxit<-1000
opt<-optim(init[idx.estim],nloglik,cov.model=cov.model,frech=frech,coord=coord,
param.fixed=init[idx.fixed],names.all=names(init[c(idx.estim,idx.fixed)]),
  indt.regs=indt.regs,dinf=dinf,regs=regs,pairregs=pairregs,dist2border=
  dist2border,control=list(maxit=maxit,type=type,temp=temp,reltol=reltol),
  method=method,hessian=T)
}
else if (method=="NM+CG"){
opt<-optim(init[idx.estim],nloglik,cov.model=cov.model,frech=frech,coord=coord,
  param.fixed=init[idx.fixed],names.all=names(init[c(idx.estim,idx.fixed)]),
  indt.regs=indt.regs,dinf=dinf,regs=regs,pairregs=pairregs,dist2border=
  dist2border,control=list(maxit=300,type=type,temp=temp,reltol=reltol),
  method="Nelder-Mead",hessian=T)
opt<-optim(opt$par,nloglik,cov.model=cov.model,frech=frech,coord=coord,
  param.fixed=init[idx.fixed],names.all=names(init[c(idx.estim,idx.fixed)]),
  indt.regs=indt.regs,dinf=dinf,regs=regs,pairregs=pairregs,dist2border=
  dist2border,control=list(maxit=1000,type=type,temp=temp,reltol=reltol),
  method="CG",hessian=T)
} else{
opt<-nlm(nloglik,init[idx.estim],steptol=10^{-20},cov.model=cov.model,
  frech=frech,coord=coord,param.fixed=init[idx.fixed],
  names.all=names(init[c(idx.estim,idx.fixed)]),indt.regs=indt.regs,
  dinf=dinf,regs=regs,pairregs=pairregs,dist2border=dist2border);
opt$par<-opt$est;
print(opt$code)
}
par.estimated<-opt$par
par.all<-init
par.all[idx.estim]<-par.estimated
names(par.all)<-names(init)
opt$par<-par.all
opt$idx.estim<-idx.estim
opt$idx.fixed<-idx.fixed

#Armazenamento de dados e outras variáveis

opt$frech<-frech
opt$coord<-coord

```

```

opt$indt.regs<-indt.regs
opt$cov.model<-cov.model
opt$regs<-regs
opt$dinf<-dinf
opt$dist2border<-dist2border
opt
}

#Cálculo do vetor gradiente

gradcov6<-function(coord,param,cov.model,indt.regs,regs,pairreg,dinf,
  dist2border){
  require(geoR)
  n.site<-nrow(coord)
if ("range" %in% names(param) || "sigma" %in% names(param)) nbcov<-1
  else nbcov<-2
  if ("rotxy" %in% names(param)) nbdilrot<-1
    else nbdilrot<-2
    if ((!indt.regs) && (nbcov!=1)) {
      stop("nbcov cannot be !=1 with non-independent regions")
    }
}

#Armazenamento as variáveis para cada estação

alldilrot.names <- c("rotxy","dily","dilz","dilm","diln","dilir")
  alldilrot <- NULL
for (ni in alldilrot.names){
  alldilrot <- cbind(alldilrot,getparvec(ni,param,regs,dist2border))
}
  colnames(alldilrot)<-alldilrot.names

#Funções intermediárias

dmahal.fct<-function(wrt){
if (substr(wrt,1,1)=="a") return(NA)
  if (regs[i]!=regs[j] && (indt.regs || dinf)) return(0)
  if (wrt=="sigma.north" && pairreg[ipair]!="north") return(0);
  if (wrt=="sigma.south" && pairreg[ipair]!="south") return(0);
if (wrt %in% c("rotxy","rotxy.north","rotxy.south","dily","dily.north",
  "dily.south","dilz","dilz.north","dilz.south","dilr","dilr.north",
  "dilr.south",
  "dilm","dilm.north","dilm.south","diln","diln.north","diln.south")){
dmahal<-1/sigma*1/(2*h)*dh2.fct(wrt)
  }
if (wrt %in% c("sigma","sigma.north","sigma.south")){
  dmahal<- -h/sigma^2
  }
  dmahal
}

rho.fct <- function(){

```



```

rho.pair.fct(cov.model,h,pairreg[ipair],param,indt.regs)
} drho.fct<-function(wrt){ if (substr(wrt,1,1)=="a") return(NA)

if (regs[i]!=regs[j] && (indt.regs || dinf)) return(0)
  if (wrt %in% c("range.north","smooth.north") && pairreg[ipair]!="north") return(0);
if (wrt %in% c("range.south","smooth.south") && pairreg[ipair]!="south") return(0);

if (wrt %in% c("rotxy","rotxy.north","rotxy.south","dily","dily.north",
  "dily.south","dilz","dilz.north","dilz.south","dilr","dilr.north",
  "dilr.south","dilm","dilm.north","dilm.south","diln","diln.north",
  "diln.south")){
#if (wrt=="dilr.south" && regs[i]!=regs[j]) print(c(i=i,j=j,
  ri=regs[i],rj=regs[j],h=h,dh2=dh2.fct(wrt),drho=drho.fct("h")))
drho<-drho.fct("h")*1/(2*h)*dh2.fct(wrt)
}

if (cov.model=="exponential") {
  if(wrt %in% c("range","range.north","range.south"))
    drho<-rho.fct()*h/phi^2
    if (wrt=="h") drho<- -rho.fct()/phi
  }
else
  if (cov.model=="matern") {
    if (wrt %in% c("range","range.north","range.south"))
      drho<-rho.fct()*((-kappa/phi)*2+(h*besselK(x=h/phi,
        nu=kappa+1))/(phi^2*besselK(x=h/phi,nu=kappa)))
      if (wrt %in% c("smooth","smooth.north","smooth.south"))
        drho<-NA
        if (wrt=="h") drho<-rho.fct()*(2*kappa/h-besselK(x=h/phi,
          nu=kappa+1)/(phi*besselK(x=h/phi,nu=kappa)))
    }
else if (cov.model=="gaussian") {
if (wrt %in% c("range","range.north","range.south"))
  drho<-rho.fct()*2*h^2/phi^3
  if (wrt=="h") drho<- -2*h/phi^2*rho.fct()
}

else if (cov.model=="spherical") {
  if (h<phi) {
    if (wrt %in% c("range","range.north","range.south"))
      drho<-1.5*h/phi^2*(1-(h/phi)^2)
      if (wrt=="h") drho<-1.5/phi*(-1+h^2/phi^2)
    }
  else drho<-0
}

else if (cov.model=="circular"){
  if (h<phi) {

```

```

        if (wrt %in% c("range", "range.north", "range.south"))
            drho<-4*h/(pi*phi^2)*sqrt(1-h^2/phi^2)
            if (wrt=="h") drho<- -4/(pi*phi)*sqrt(1-h^2/phi^2)
        }
    else drho<-0
}

else if (cov.model=="cubic"){
    if (h<phi) {
        if (wrt %in% c("range", "range.north", "range.south"))
            drho<-h^2/phi^3*(14-26.25*h/phi+17.5*h^3/phi^3-5.25*h^5/phi^5)
            if (wrt=="h")
drho<-h/phi^2*(-14+26.25*h/phi-17.5*h^3/phi^3+5.25*h^5/phi^5)
        }
    else drho<-0
}

else if (cov.model=="powered.exponential"){
    if (wrt %in% c("range", "range.north", "range.south"))
        drho<-kappa*h^kappa/phi^{kappa+1}*rho.fct()
if (wrt %in% c("smooth", "smooth.north", "smooth.south"))
    drho<- -log(h/phi)*h^kappa/phi^kappa*rho.fct()
    if (wrt=="h") drho<- -kappa*h^{kappa-1}/phi^kappa*rho.fct()
}

else if (cov.model=="cauchy") {
    if (wrt %in% c("range", "range.north", "range.south"))
        drho<-2*kappa*h^2/phi^3/(1+h^2/phi^2)*rho.fct()
        if (wrt %in% c("smooth", "smooth.north", "smooth.south"))
            drho<- -rho.fct()*log(1+h^2/phi^2)
if (wrt=="h") drho<- -2*h*kappa/phi^2/(1+h^2/phi^2)*rho.fct()
}

else if (cov.model=="gneiting"){
    s<-0.301187465825
    if (h/phi<1/s) {
        if (wrt %in% c("range", "range.north", "range.south"))
drho<-s^2*h^2/phi^3*(1-s*h/phi)^7*(22+154*s*h/phi+352*s^2*h^2/phi^2)
            if (wrt=="h")
drho<-s/phi*(1-s*h/phi)^7*(-22*s*h/phi-154*s^2*h^2/phi^2-352*s^3*h^3/phi^3)
        }
    else drho<-0
}
drho
}

dh2.fct<-function(wrt){
    dh2.rotxy.tmp<-function(){
2*(dcoord.new["x.new"]*(dx_i.rotxy(j)-dx_i.rotxy(i))+
    dcoord.new["y.new"]*(dy_i.rotxy(j)-dy_i.rotxy(i)))
    }
}

```

```

dh2.dily.tmp<-function(){
  2*dcoord.new["y.new"]*(dy_i.dily(j)-dy_i.dily(i))
}
dh2.dilz.tmp<-function(){
  2*dcoord.new["z.new"]*(dz_i.dilz(j)-dz_i.dilz(i))
}
dh2.dilm.tmp<-function(){
  2*dcoord.new["m.new"]*(dm_i.dilm(j)-dm_i.dilm(i))
}
dh2.diln.tmp<-function(){
  2*dcoord.new["n.new"]*(dn_i.diln(j)-dn_i.diln(i))
}
dh2.dilr.tmp<-function(){
  #print(c(i,j,dcoord.new["r.new"],dr_i.dilr(j),dr_i.dilr(i)))
  2*dcoord.new["r.new"]*(dr_i.dilr(j)-dr_i.dilr(i))
}
dx_i.rotxy<-function(i){
  dx_i.rotxy_i(i)*dpar_i.par(i)
}
dy_i.rotxy<-function(i){
  dy_i.rotxy_i(i)*dpar_i.par(i)
}
dy_i.dily<-function(i){
  dy_i.dily_i(i)*dpar_i.par(i)
}
dz_i.dilz<-function(i){
  dz_i.dilz_i(i)*dpar_i.par(i)
}
dm_i.dilm<-function(i){
  dm_i.dilm_i(i)*dpar_i.par(i)
}
dn_i.diln<-function(i){
  dn_i.diln_i(i)*dpar_i.par(i)
}
dr_i.dilr<-function(i){
  dr_i.dilr_i(i)*dpar_i.par(i)
}
dx_i.rotxy_i<-function(i){
  -coord[i,"x"]*sin(alldilrot[i,"rotxy"])
  +coord[i,"y"]*cos(alldilrot[i,"rotxy"])
}
dy_i.rotxy_i<-function(i){
  alldilrot[i,"dily"]*(-coord[i,"x"]*cos(alldilrot[i,
  "rotxy"])-coord[i,"y"]*sin(alldilrot[i,"rotxy"]))
}
dy_i.dily_i<-function(i){
  -coord[i,"x"]*sin(alldilrot[i,"rotxy"])
  +coord[i,"y"]*cos(alldilrot[i,"rotxy"])
}
dz_i.dilz_i<-function(i){
  coord[i,"z"]

```

```

    }
dm_i.dilm_i<-function(i){
    coord[i,"m"]
}
dn_i.diln_i<-function(i){
    coord[i,"n"]
}
dr_i.dilr_i<-function(i){
    coord[i,"r"]
}

dpar_i.par<-function(i){
if(wrt %in% c("rotxy","dily","dilz","dilm","diln","dilr")) return(1)
  else if (wrt %in% c("rotxy.north","dily.north","dilz.north",
    "dilm.north","diln.north","dilr.north")){
    if ("a" %in% names(param)){
      if (dist2border[i]>=param["a"]) return (1)
    else if (dist2border[i]<param["a"] && dist2border[i]>
      -param["a"]) return((dist2border[i]+
        param["a"])/(2*param["a"]))
    else return (0)
  }
else if ("a.north" %in% names(param)){
  if (dist2border[i]>=param["a.north"]) return (1)
else if (dist2border[i]<param["a.north"] && dist2border[i]>
  -param["a.south"]) return((dist2border[i]
  +param["a.south"])/(param["a.north"]+param["a.south"]))
  else return (0)
}
else{ if (regs[i]=="north") return(1)
  else return(0)
}
}
else if (wrt %in% c("rotxy.south","dily.south","dilz.south","dilm.south",
"diln.south","dilr.south")){
  if ("a" %in% names(param)){
    if (dist2border[i]<= -param["a"]) return (1)
  else if (dist2border[i]<param["a"] && dist2border[i]>-
    param["a"])
    return((param["a"]-dist2border[i])/(2*param["a"]))
  else return (0)
}
else if ("a.north" %in% names(param)){
  if (dist2border[i]<= -param["a.south"]) return (1)
else if (dist2border[i]<param["a.north"] && dist2border[i]>-
  param["a.south"]) return((param["a.south"]-dist2border[i])/
  (param["a.north"]+param["a.south"]))
  else return (0)
}
else{
  if (regs[i]=="south") return(1)

```

```

        else return(0)
      }
    }
  }
  if (substr(wrt,1,5)=="rotxy") dh2<- dh2.rotxy.tmp()
  if (substr(wrt,1,4)=="dily") dh2<- dh2.dily.tmp()
  if (substr(wrt,1,4)=="dilz") dh2<- dh2.dilz.tmp()
  if (substr(wrt,1,4)=="dilm") dh2<- dh2.dilm.tmp()
  if (substr(wrt,1,4)=="diln") dh2<- dh2.diln.tmp()
  if (substr(wrt,1,4)=="dilir") dh2<- dh2.dilir.tmp()
  dh2
}

# Translação para o cálculo da coordenada climática

coord.new<-getnewcoord(coord,param,regs,dist2border)
grad<-matrix(NA,ncol=length(param),nrow=n.site*(n.site-1)/2)
colnames(grad)<-names(param)

#Cálculo do gradiente para os pares de estações

ipair<-0
for (i in 1:(n.site-1)){
  for (j in (i+1):n.site){
    ipair<-ipair+1
    if (regs[i]!=regs[j] && (indt.regs || dinf)) {
      grad[ipair,]<-rep(0,length(param))
    }
  }
  else{
    dcoord <- coord[j,]-coord[i,]
    dcoord.new<-coord.new[j,]-coord.new[i,]
    h2 <- sum(dcoord.new^2)
    h <- sqrt(h2)

#Covariância dos parâmetros

if (nbcov==1){
  phi<-param["range"]
  kappa<-param["smooth"]
  sigma<-param["sigma"]
}
else{
  #aqui necessariamente indt.regs and regs[i]==regs[j]
  phi<-param[paste("range.",regs[i],sep="")]
  kappa<-param[paste("smooth.",regs[i],sep="")]
  sigma<-param[paste("sigma.",regs[i],sep="")]
}

#Gradientes

for (l in 1:length(param)){

```

```

    nl<-names(param)[1]
    currpar<-param[nl]
    if (cov.model=="gauss") {
        dmahalh<-dmahal.fct(wrt=nl)
        grad[ipair,1]<-dmahalh
    }
else{
    drhoh<-drho.fct(wrt=nl)
    #if (nl=="dilr.south") print(c(i,j,drhoh,h,phi))
    grad[ipair,1]<-drhoh
    }
    }
    }
    }
    }
    grad
}

#Gradiente para os erros padrão

gradPLL2<-function(opt){
param<-opt$par
coord<-opt$coord
frech<-opt$frech
idx.estim<-opt$idx.estim
cov.model<-opt$cov.model
indt.regs<-opt$indt.regs
regs<-opt$regs
dinf<-opt$dinf
dist2border<-opt$dist2border
rm(opt)
n.site<-ncol(frech)
n.obs<-nrow(frech)
coord.new<-getnewcoord(coord,param,regs,dist2border)
pairregs<-getpairreg(regs)
dist<-getdistance(coord.new,dinf,pairregs)

gradcov<-gradcov6(coord,param,cov.model,indt.regs,regs,pairregs,dinf,
    dist2border)
#print(colnames(gradcov));stop()
gradcov<-gradcov[,idx.estim]
#print(colnames(gradcov))
#print(gradcov[, "dilr.south"]);stop()

if (cov.model=="gauss"){
mahal.pair<-mahal.pair.fct(param,dist,pairregs,indt.regs)
gradlik<-C("mysmithgrad",as.double(frech),as.double(mahal.pair),
    as.double(gradcov),
    as.integer(n.site), as.integer(n.obs),as.integer(length(idx.estim)),
    as.double(0),as.integer(1),as.double(0),as.integer(1),as.double(0),
    as.integer(1),as.double(0),as.double(0),as.double(0),as.integer(F),

```

```

grad=double(n.obs * length(idx.estim)),PACKAGE =
"SpatialExtremes")$grad } else{
rho.pair<-rho.pair.fct(cov.model,dist,pairregs,param,indt.regs)
gradlik<-.C("myschlathergrad",as.double(frech),as.double(rho.pair),
as.double(gradcov),as.integer(n.site), as.integer(n.obs),
as.integer(length(idx.estim)),
as.double(0),as.integer(1),as.double(0),
as.integer(1),as.double(0),as.integer(1),
as.double(0),as.double(0),as.double(0),as.integer(F),grad =
double(n.obs * length(idx.estim)),PACKAGE = "SpatialExtremes")$grad
}

gradlik <- matrix(gradlik, nrow = n.obs, ncol = length(idx.estim))
colnames(gradlik)<-names(param)[idx.estim]
gradlik

}

#Erros padrão

stdPLL2 <- function(opt,std.err.type){
  n.obs<-nrow(opt$frech)

  gradlik <- gradPLL2(opt)
  ihessian <- try(solve(opt$hessian), silent = TRUE)
  if (!is.matrix(ihessian)){ warning("observed information matrix is
singular"); stdpll<-NULL
    stdpll$grad<-gradlik
    stdpll$jacobian<-NA
    stdpll$var.cov<-NA
    stdpll$std.err<-rep(NA,length(opt$par))
    stdpll$penalty<-NA
    stdpll$tic<-NA
  }
  return(stdpll)
}

if (std.err.type=="score") jacobian<-var(gradlik) * (n.obs-1)
  if (std.err.type=="grad"){
    jacobian <- 0
    for (i in 1:n.obs){
      grad.vec <- matrix(gradlik[i,], ncol = 1)
      jacobian <- jacobian + grad.vec %*% t(grad.vec)
    }
  }

var.cov <- ihessian %*% jacobian %*% ihessian
std.err <- sqrt(diag(var.cov))

penalty <- jacobian %*% ihessian
#tic <- 2*opt$val - 2 * sum(diag(penalty)) # wrong!!
tic <- 2*opt$val + 2 * sum(diag(penalty)) # as Mathieu

```

```
stdpll<-NULL
stdpll$grad<-gradlik
stdpll$jacobian<-jacobian
stdpll$var.cov<-var.cov
stdpll$std.err<-std.err
stdpll$penalty<-penalty
stdpll$tic<-tic
  stdpll
}
```

APÊNDICE B - Organização dos dados

#Carregar pacotes:

```
require(SpatialExtremes)
require(extRemes)
require(evd)
require(graphics)
```

#Lendo os dados

```
precip<-read.table("precip.txt",header = FALSE)
precip1<-as.matrix((precip),136,262)
vet.par<-gev.fit(precip1[,1])
par.draw<-vet.par$mle
for(i in 2:n){ vector<-precip1[,i]
  res.vector<- gev.fit(vector) saida<-res.vector$mle
  par.draw<-rbind(par.draw,saida) }
```

#Pegando as estimativas dos parâmetros e transformando os dados em
#unidades marginais de Fréchet a partir da GEV

```
vet1<-gev2frech(precip1[,1],par.draw[1,1],par.draw[1,2],par.draw[1,3]);
vet1<- frech.draw=vet1
```

```
for(i in 2:n) {
  frech<-gev2frech(precip1[,i],par.draw[i,1],par.draw[i,2],par.draw[i,3])
  frech.draw=cbind(frech.draw,frech) }
  gev.frech<-as.matrix((frech.draw),136,262,header=FALSE)
```

APÊNDICE C - Ajuste do processo Max-Stable com anisotropia geométrica

#espaço: “geogr” para o modelo isotrópico, #espaço: “clim” para o modelo anisotrópico

```
myfitmaxstab<-function(space,covar.names,cov.model,method="BFGS"){

  require("SpatialExtremes")
```



```

#Carregando programa do Apêndice Ap.1

source("utils.R")

#Lendo os dados e as coordenadas:

#As coordenadas com quatro colunas x:longitude, y:latitude,
#z:altitude, m:precipitação média.

gev.frech<-as.matrix(read.table("gev.frech.txt",skip=1))
coord<-as.matrix(read.table("coord.txt",skip=1))
colnames(coord)<-c("x","y","z","m")

#seleciona as coordenadas a serem utilizadas

coord<-coord[,match(covar.names,colnames(coord))]
print(coord[1:10,])

print(dim(gev.frech))
print(gev.frech[1,])
print(range(gev.frech))
print(dim(coord))
print(coord[1,])
print(range(coord))
print(colnames(coord))
#stop()

#Número de localizações
n.site<-nrow(coord)

#Conjunto adicional de parâmetros - por default.

indt.regs<-FALSE
regs<-rep("none",n.site)
pairregs<-getpairreg(regs)
dist2border<-NULL
dinf<-FALSE

#Inicialização dos parâmetros
if (space=="clim"){
  init<-c(rotxy=-0.2,dily=6)
  if ("z" %in% covar.names) init<-c(init,dilz=20)
  if ("m" %in% covar.names) init<-c(init,dilm=5)
  newcoord<-getnewcoord(coord,init,regs,dist2border)
}
else {
  init<-NULL
  newcoord<-coord
}
if (space=="geogr"){

```

```

    if (cov.model=="cauchy") init<-c(init,range=6,smooth=0.25)
    if (cov.model=="powered.exponential") init<-c(init,range=50,smooth=0.4)
    if (cov.model=="matern") init<-c(init,range=200,smooth=0.15)
    if (cov.model=="circular") init<-c(init,range=80)
    if (cov.model=="cubic") init<-c(init,range=80)
    if (cov.model=="exponential") init<-c(init,range=40)
    if (cov.model=="gaussian") init<-c(init,range=40)
    if (cov.model=="gneiting") init<-c(init,range=40)
    if (cov.model=="spherical") init<-c(init,range=80)
    if (cov.model=="gauss") init<-c(init,sigma=20)
  }
else{
  if (cov.model=="cauchy") init<-c(init,range=12,smooth=0.25)
  if (cov.model=="powered.exponential") init<-c(init,range=40,smooth=0.2)
  if (cov.model=="matern") init<-c(init,range=1000,smooth=0.2)
  if (cov.model=="circular") init<-c(init,range=500)
  if (cov.model=="cubic") init<-c(init,range=500)
  if (cov.model=="exponential") init<-c(init,range=300)
  if (cov.model=="gaussian") init<-c(init,range=200)
  if (cov.model=="gneiting") init<-c(init,range=200)
  if (cov.model=="spherical") init<-c(init,range=400)
  if (cov.model=="gauss") init<-c(init,sigma=50)
}

#Checar a inicialização, se necessário

#plot.extind(gev.frech,coord,cov.model,init)
print("initalisation:")
print(init)

#Conjunto adicional de parâmetros - por default.

idx.estim<-1:length(init)
idx.fixed<-setdiff(1:length(init),idx.estim)

#Ajuste do modelo.

fit<-estimate.alltogether(init,idx.estim,idx.fixed,cov.model,gev.frech,
  coord,indt.regs,dinf,regs,pairregs,dist2border,method,type=1,
  temp=10,reltol=sqrt(.Machine$double.eps))

if (cov.model=="matern"){
  print("estimation is run one more time because cov.model=matern")
  idx.smooth<-which(names(fit$par=="smooth"))
  idx.fixed<-c(idx.fixed,idx.smooth)
  idx.estim<-idx.estim[-idx.smooth]
  fit<-estimate.alltogether(fit$par,idx.estim,idx.fixed,cov.model,
    gev.frech,coord,indt.regs,dinf,regs,pairregs,dist2border,method)
}

#Cálculo do erro padrão e o valor do TIC

```

```

print("Computation of the std errors")
stdpll<-stdPLL2(fit,"score")
fit$grad<-stdpll$grad
fit$jacobian<-stdpll$jacobian
fit$var.cov<-stdpll$var.cov
fit$std.err<-stdpll$std.err
fit$penalty<-stdpll$penalty
fit$tic<-stdpll$tic

fit

}

#Lendo os dados

gev.frech<-as.matrix(read.table("gev.frech.txt",skip=1))
coord<-as.matrix(read.table("coord.txt",skip=1))

colnames(coord)<-c("x","y","z","m")
covar.names<-c("x","y")
coord<-coord[,match(covar.names,colnames(coord))]

# Ajustando os modelos aos dados

fit1 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"cauchy")
fit2 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"powered.exponential")
fit3 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"matern")
fit4 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"circular")
fit5 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"cubic")
fit6 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"gneiting")
fit7 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"exponential")
fit8 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"spherical")
fit9 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"gaussian")
fit10 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y"),"gauss")

fit1$tic fit1$par fit1$std.err par1<-fit1$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cauchy",par1)

fit2$tic fit2$par fit2$std.err par2<-fit2$par
plot.extind(gev.frech,coord,"powered.exponential",par2)

fit3$tic fit3$par fit3$std.err par3<-fit3$par
plot.extind(gev.frech,coord,"matern",par3)

fit4$tic fit4$par fit4$std.err par4<-fit4$par
plot.extind(gev.frech,coord,"circular",par4)

fit5$tic fit5$par fit5$std.err par5<-fit5$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cubic",par5)

fit6$tic fit6$par fit6$std.err par6<-fit6$par

```

```

plot.extind(gev.frech,coord,"gneiting",par6)

fit7$tic fit7$par fit7$std.err par7<-fit7$par
plot.extind(gev.frech,coord,"exponential",par7)

fit8$tic fit8$par fit8$std.err par8<-fit8$par
plot.extind(gev.frech,coord,"spherical",par8)

fit9$tic fit9$par fit9$std.err par9<-fit9$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gaussian",par9)

fit10$tic fit10$par fit10$std.err par10<-fit10$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gauss",par10)

fit11 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"cauchy")
fit12 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"powered.exponential")
fit13 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"matern")
fit14 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"circular")
fit15 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"cubic")
fit16 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"gneiting")
fit17 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"exponential")
fit18 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"spherical")
fit19 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"gaussian")
fit20 <- myfitmaxstab("geogr",c("x","y","z"),"gauss")

fit11$tic fit11$par fit11$std.err par11<-fit11$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cauchy",par11)

fit12$tic fit12$par fit12$std.err par12<-fit12$par
plot.extind(gev.frech,coord,"powered.exponential",par12)

fit13$tic fit13$par fit13$std.err par13<-fit13$par
plot.extind(gev.frech,coord,"matern",par13)

fit14$tic fit14$par fit14$std.err par14<-fit14$par
plot.extind(gev.frech,coord,"circular",par14)

fit15$tic fit15$par fit15$std.err par15<-fit15$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cubic",par15)

fit16$tic fit16$par fit16$std.err par16<-fit16$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gneiting",par16)

fit17$tic fit17$par fit17$std.err par17<-fit17$par
plot.extind(gev.frech,coord,"exponential",par17)

fit18$tic fit18$par fit18$std.err par18<-fit18$par
plot.extind(gev.frech,coord,"spherical",par18)

fit19$tic fit19$par fit19$std.err par19<-fit19$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gaussian",par19)

```

```

fit20$tic fit20$par fit20$std.err par20<-fit20$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gauss",par20)

fit21 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"cauchy")
fit22 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"powered.exponential")
fit23 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"matern")
fit24 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"circular")
fit25 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"cubic")
fit26 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"gneiting")
fit27 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"exponential")
fit28 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"spherical")
fit29 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"gaussian")
fit30 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y"),"gauss")

fit21$tic fit21$par fit21$std.err par21<-fit21$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cauchy",par21)

fit22$tic fit22$par fit22$std.err par22<-fit22$par
plot.extind(gev.frech,coord,"powered.exponential",par22)

fit23$tic fit23$par fit23$std.err par23<-fit23$par
plot.extind(gev.frech,coord,"matern",par23)

fit24$tic fit24$par fit24$std.err par24<-fit24$par
plot.extind(gev.frech,coord,"circular",par24)

fit25$tic fit25$par fit25$std.err par25<-fit25$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cubic",par25)

fit26$tic fit26$par fit26$std.err par26<-fit26$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gneiting",par26)

fit27$tic fit27$par fit27$std.err

par27<-fit27$par plot.extind(gev.frech,coord,"exponential",par27)

fit28$tic fit28$par fit28$std.err par28<-fit28$par
plot.extind(gev.frech,coord,"spherical",par28)

fit29$tic fit29$par fit29$std.err par29<-fit29$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gaussian",par29)

fit30$tic fit30$par fit30$std.err par30<-fit30$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gauss",par30)

fit31 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"cauchy")
fit32 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"powered.exponential")
fit33 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"matern")
fit34 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"circular")
fit35 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"cubic")
fit36 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"gneiting")

```

```

fit37 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"exponential")
fit38 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"spherical")
fit39 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"gaussian")
fit40 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z"),"gauss")

fit31$tic fit31$par fit31$std.err par31<-fit31$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cauchy",par31)

fit32$tic fit32$par fit32$std.err par32<-fit32$par
plot.extind(gev.frech,coord,"powered.exponential",par32)

fit33$tic fit33$par fit33$std.err par33<-fit33$par
plot.extind(gev.frech,coord,"matern",par33)

fit34$tic fit34$par fit34$std.err par34<-fit34$par
plot.extind(gev.frech,coord,"circular",par34)

fit35$tic fit35$par fit35$std.err par35<-fit35$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cubic",par35)

fit36$tic fit36$par fit36$std.err par36<-fit36$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gneiting",par36)

fit37$tic fit37$par fit37$std.err par37<-fit37$par
plot.extind(gev.frech,coord,"exponential",par37)

fit38$tic fit38$par fit38$std.err par38<-fit38$par
plot.extind(gev.frech,coord,"spherical",par38)

fit39$tic fit39$par fit39$std.err par39<-fit39$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gaussian",par39)

fit40$tic fit40$par fit40$std.err par40<-fit40$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gauss",par40)

fit41 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"cauchy")
fit42 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"powered.exponential")
fit43 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"matern")
fit44 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"circular")
fit45 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"cubic")
fit46 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"gneiting")
fit47 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"exponential")
fit48 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"spherical")
fit49 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"gaussian")
fit50 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","m"),"gauss")

fit41$tic fit41$par fit41$std.err par41<-fit41$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cauchy",par41)

fit42$tic fit42$par fit42$std.err par42<-fit42$par
plot.extind(gev.frech,coord,"powered.exponential",par42)

```

```
fit43$tic fit43$par fit43$std.err par43<-fit43$par
plot.extind(gev.frech,coord,"matern",par43)
```

```
fit44$tic fit44$par fit44$std.err par44<-fit44$par
plot.extind(gev.frech,coord,"circular",par44)
```

```
fit45$tic fit45$par fit45$std.err par45<-fit45$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cubic",par45)
```

```
fit46$tic fit46$par fit46$std.err par46<-fit46$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gneiting",par46)
```

```
fit47$tic fit47$par fit47$std.err par47<-fit47$par
plot.extind(gev.frech,coord,"exponential",par47)
```

```
fit48$tic fit48$par fit48$std.err par48<-fit48$par
plot.extind(gev.frech,coord,"spherical",par48)
```

```
fit49$tic fit49$par fit49$std.err par49<-fit49$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gaussian",par49)
```

```
fit50$tic fit50$par fit50$std.err par50<-fit50$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gauss",par50)
```

```
fit51 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"cauchy")
fit52 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"powered.exponential")
fit53 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"matern")
fit54 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"circular")
fit55 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"cubic")
fit56 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"gneiting")
fit57 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"exponential")
fit58 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"spherical")
fit59 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"gaussian")
fit60 <- myfitmaxstab("clim",c("x","y","z","m"),"gauss")
```

```
fit51$tic fit51$par fit51$std.err par51<-fit51$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cauchy",par51)
```

```
fit52$tic fit52$par fit52$std.err par52<-fit52$par
plot.extind(gev.frech,coord,"powered.exponential",par52)
```

```
fit53$tic fit53$par fit53$std.err par53<-fit53$par
plot.extind(gev.frech,coord,"matern",par53)
```

```
fit54$tic fit54$par fit54$std.err par54<-fit54$par
plot.extind(gev.frech,coord,"circular",par54)
```

```
fit55$tic fit55$par fit55$std.err par55<-fit55$par
plot.extind(gev.frech,coord,"cubic",par55)
```

```
fit56$tic fit56$par fit56$std.err par56<-fit56$par
```

```

plot.extind(gev.frech,coord,"gneiting",par56)

fit57$tic fit57$par fit57$std.err par57<-fit57$par
plot.extind(gev.frech,coord,"exponential",par57)

fit58$tic fit58$par fit58$std.err par58<-fit58$par
plot.extind(gev.frech,coord,"spherical",par58)

fit59$tic fit59$par fit59$std.err par59<-fit59$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gaussian",par59)

fit60$tic fit60$par fit60$std.err par60<-fit60$par
plot.extind(gev.frech,coord,"gauss",par60)

```

APÊNDICE D - Plota o madograma e o coeficiente extremo, levando-se em consideração menor valor TIC

```

plot.extind<-function(frech,coord,cov.model,par){

  n.site<-nrow(coord)

  #Conjunto adicional de parâmetros - por default.

  regs<-rep("none",n.site)
  pairregs<-getpairreg(regs)
  dist2border<-NULL
  indt.reg<-FALSE

  #Transformação das coordenadas para o espaço climático,
  #cálculo das distâncias entre as estações

  newcoord<-getnewcoord(coord,par,regs,dist2border)
  dist<-distance(newcoord)

  #Plota o Madograma:

  madogram(data=frech,coord=newcoord,which="ext",cex.lab=1.5,col="grey55",
            ylim=c(1,2))
  madogram(data=frech,coord=newcoord,which="ext",n.bins=500,cex.lab=1.5,
            add=T,pch=21,bg="blue")

  #Cálculo do coeficiente extremo:

  if (cov.model=="gauss") pairextind<-2*pnorm(dist/(2*par["sigma"]))
  else {
    rho.pair<-rho.pair.fct(cov.model,dist,pairregs,par,indt.reg)
    pairextind<-1+sqrt((1-rho.pair)/2)
  }
}

```



```
#Plota o coeficiente extremo:
```

```
order<-sort(dist,index.return=TRUE)$ix
lines(dist[order],pairextind[order],col="red")
}
```

APÊNDICE E - Plota o coeficiente extremo pareado

```
rotate4image <- function(m){
  t(m)[(1:ncol(m)),rev(1:nrow(m))]}
}
```

```
# Níveis de cores:
```

```
getcolors <- function(){
  col2<-colorRampPalette(c("black","red4","orangered","yellow","chartreuse2",
    "darkgreen","black"));
  colors <- col2(140);
  colors<-colors[20:119]
}
```

```
map.extind<-function(fit,id.station,x.grid,y.grid,a.grid.mat,m.grid.mat,border){
```

```
  require(splancs)
  require("SpatialExtremes")
  source("utils.R")
```

```
  graphics.off()
```

```
  #Obtenção da coordenada para o qual o coeficiente extremo será
  #plotado
```

```
  coord.station<-fit$coord[id.station,]
```

```
  #Transformação dos vetores x e y em matrizes
```

```
  x.grid.mat<-matrix(rep(x.grid,times=length(y.grid)),
    ncol=length(x.grid),byrow=T)
  y.grid.mat<-matrix(rep(rev(y.grid),each=length(x.grid)),
    ncol=length(x.grid),byrow=T)
```

```
  #Checando se as coordenadas possuem as mesmas dimensões
```

```
  if (any(dim(x.grid.mat)!=dim(y.grid.mat) | dim(x.grid.mat)!=
    dim(a.grid.mat) | dim(x.grid.mat)!=dim(m.grid.mat)))
    stop("Dimension of matrices x,y,a,m do not match")
```

```
  #Cria um vetor correspondente a todos os pontos da grid
```

```

coord.grid.vec<-cbind(as.vector(x.grid.mat),as.vector(y.grid.mat),
                     as.vector(a.grid.mat),as.vector(m.grid.mat))
colnames(coord.grid.vec)<-c("x","y","z","m")
coord.grid.vec<-coord.grid.vec[,which(colnames(coord.grid.vec) %in%
                                     colnames(fit$coord))]

#Plota a grid e a estação

x11();
plot(coord.grid.vec[, "x"], coord.grid.vec[, "y"])
polygon(border, border="red")
points(fit$coord[, "x"], fit$coord[, "y"], col="green", bg="green", pch=21)
points(coord.station["x"], coord.station["y"], bg="black", pch=21)

#Seleciona os pontos fora da grid

inborder<-inpip(coord.grid.vec[, c("x", "y")], border)
coord.grid.vec<-coord.grid.vec[inborder,]

#Conjunto adicional de parâmetros - por default.

n.site.grid<-nrow(coord.grid.vec)
regs.grid<-rep("none", n.site.grid)
pairregs.grid<-rep("none", n.site.grid)
regs.station<-"none"
dist2border<-NULL
indt.reg<-FALSE

coord.grid.new<-getnewcoord(coord.grid.vec, fit$par, regs.grid, dist2border)
coord.station<-t(as.matrix(coord.station))
coord.station.new<-getnewcoord(coord.station, fit$par, regs.station,
                              dist2border)
coord.station.new.rep<-matrix(rep(coord.station.new, nrow(coord.grid.vec)),
                             ncol=ncol(coord.grid.new), byrow=T)

#Calcula as distâncias entre todos os pontos da grid e da
#estação selecionada

dist<-sqrt(apply((coord.station.new.rep-coord.grid.new)^2, 1, sum))

#Cálculo do coeficiente extremo

if (fit$cov.model=="gauss") pairextind<-2*pnorm(dist/(2*fit$par["sigma"]))
else {
  rho.pair<-rho.pair.fct(fit$cov.model, dist, pairregs.grid, fit$par, indt.reg)
  pairextind<-1+sqrt((1-rho.pair)/2)
}

#Plota o coeficiente extremo

matimage<-matrix(NA, nrow=nrow(x.grid.mat), ncol=ncol(x.grid.mat))

```

```

matimage[inborder]<-pairextind
col<-getcolors()
X11()
plot(x.grid, y.grid, type="n")
image(x.grid,y.grid,rotate4image(matimage),col=col,xlim=range(borders[,1]),
      ylim=range(borders[,2]),lwd=1.5,axes=F,add=T,zlim=c(1,2))
polygon(border,border="black",lwd=1.5)
points(coord.station[1],coord.station[2],pch=21,bg="white",cex=2)

}

```

Carregando os dados

```

m.grid.mat<-as.matrix(read.table("gridm_coorm.txt",skip=1))
dim(m.grid.mat)
max(m.grid.mat)
min(m.grid.mat)

a.grid.mat<-as.matrix(read.table("gridd_coordd.txt",skip=1))
dim(a.grid.mat)
max(a.grid.mat)

border<-as.matrix(read.table("parana_border_km.txt",skip=1))
dim(border)
min.x<-min(border[,1])
min.x
max.x<-max(border[,1])
max.x
x.grid<-seq(min.x,max.x,length=3956)

min.y<-min(border[,2])
min.y
max.y<-max(border[,2])
max.y
y.grid<-seq(min.y,max.y,length=2520)

a.grid.mat[a.grid.mat==--9999]<-NA
m.grid.mat[m.grid.mat==--9999]<-NA

x11();image(x.grid,y.grid,rotate4image(a.grid.mat))
polygon(border[,1],border[,2])

x11();image(x.grid,y.grid,rotate4image(m.grid.mat))
polygon(border[,1],border[,2])

coord.id.station<-76
map.extind(fit=fit52,id.station,x.grid,y.grid,
           a.grid.mat,m.grid.mat,border)

```

APÊNDICE F - Função modificada do pacote *SpatialExtremes* para o caso esférico

```

rmaxstab <- function(n, coord, cov.mod = "gauss", grid = FALSE,...){

  if (!(cov.mod %in% c("gauss","whitmat","cauchy","powexp","bessel",
"spherical"))){stop("'cov.mod' must be one of 'gauss', 'whitmat',
'cauchy', 'powexp', 'bessel' or 'spherical'")}

  dist.dim <- ncol(coord)
    if (is.null(dist.dim)) dist.dim <- 1
    if ((dist.dim == 1) && grid){
warning("You cannot use 'grid = TRUE' in dimension 1. Ignored.")
grid <- FALSE }

  if (cov.mod == "gauss"){
    if ((dist.dim == 1) && (!("var" %in% names(list(...)))))
      stop("You must specify 'var'")
    if ((dist.dim == 2) && (!all(c("cov11", "cov12", "cov22")
%in% names(list(...))))) stop("You must specify 'cov11', 'cov12', 'cov22'")

    ##Imprime os parâmetros do modelo
    var <- list(...)$var
    cov11 <- list(...)$cov11
    cov12 <- list(...)$cov12
    cov22 <- list(...)$cov22
    cov13 <- list(...)$cov13
    cov23 <- list(...)$cov23
    cov33 <- list(...)$cov33
  }

  else{
    if (!all(c("sill", "range", "smooth") %in% names(list(...))))
      stop("You must specify 'sill', 'range', 'smooth'")

    sill <- list(...)$sill
    range <- list(...)$range
    smooth <- list(...)$smooth
    alpha <- list(...)$alpha
    sigma2 <- list(...)$sigma2
  }

  if (dist.dim !=1){
    n.site <- nrow(coord)
    coord.range <- apply(coord, 2, range)
    center <- colMeans(coord.range)
    edge <- max(apply(coord.range, 2, diff))
  }

  else {
    n.site <- length(coord)
    coord.range <- range(coord)
    center <- mean(coord.range)
    edge <- diff(coord.range)
  }
}

```

```

}

cov.mod <- switch(cov.mod, "gauss" = "gauss", "whitmat" = 1,
  "cauchy" = 2, "powexp" = 3, "bessel" = 4, "spherical" = 8)

if (grid)
  ans <- double(n*n.site^dist.dim) ]
else
  ans <- double(n*n.site)

if (cov.mod == "gauss") {
  ans <- switch(dist.dim,
    .C("rsmith1d", as.double(coord), as.double(center), as.double(edge),
    as.integer(n), as.integer(n.site), as.double(var), ans = ans,
    PACKAGE = "SpatialExtremes")$ans,
    .C("rsmith2d", as.double(coord), as.double(center), as.double(edge),
    as.integer(n), as.integer(n.site), grid, as.double(cov11),
    as.double(cov12), as.double(cov22), ans = ans,
    PACKAGE = "SpatialExtremes")$ans) }
else {
  if ((length(ans) / n) > 600) fun.name <- "rschlathertbm"
else fun.name <- "myrschlatherdirect"

ans <- .C(fun.name, as.double(coord), as.integer(n),
  as.integer(n.site),
  as.integer(dist.dim), as.integer(cov.mod), grid, as.double(sill),
  as.double(range), as.double(smooth), ans = ans,
  PACKAGE = "SpatialExtremes")$ans
}

if (grid)
  ans <- array(ans, c(n.site, n.site, n))
else
  ans <- matrix(ans, nrow = n, ncol = n.site)

return(ans)

}

```

APÊNDICE G - Validação do Modelo

```

# Frech é uma matriz contendo apenas os dados das estações
# selecionadas para validação do modelo, par é o vetor de parâmetros.

valid.fct<-function(frech,coord,par){

require(boot)
source("rmaxstab.R")

```

```

regs<-rep("none",ncol(frech))
dist2border<-NULL
coord.new<-getnewcoord(coord,par,regs,dist2border)

nbrun<-5000
nbobs<-nrow(frech)
pp<-ppoints(1:nbobs)

sortsimu<-NULL
for (run in 1:nbrun){
  ms<-rmaxstab(nbobs,coord.new,cov.mod="powexp",sill=1,
               range=par["range"],smooth=par["smooth"])
  sortsimu<-rbind(sortsimu,sort(apply(ms,1,max)))
}
sortfrech<-sort(apply(frech,1,max))
lci<-0.05
qmod<-sort(sortsimu)[round(pp*nbobs*nbrun)]

plot(range(qmod),range(sortfrech),log="xy",type="n",
      xlab="Quartil do Modelo",ylab="Quantis dos Dados",
      cex.axis=1.5,cex.lab=1.8)
abline(0,1,col="blue")
points(qmod,sortfrech,pch=21,bg="black")

envelope<-envelope(mat=sortsimu)
lines(qmod,envelope$point[1,],lty=2)
lines(qmod,envelope$point[2,],lty=2)
lines(qmod,envelope$overall[1,],lty=1)
lines(qmod,envelope$overall[2,],lty=1)
}

valid.fct(frech,coord,fit52$par)

```

APÊNDICE H - Gerando amostras dos modelos de Smith e Schlather

```

require(splancs)
require(geoR)
require(extRemes)
graphics.off()

source("rotate4image.R")

y<-seq(40,550,length=150)
x<-seq(130,800,length=150)

coord<-cbind(x,y)

```

```
#Plota as bordas do Estado do Paraná em km
```

```
b<-read.table("parana_border_km.txt",skip=1)
x11();
plot(b,type="n");polygon(b)
```

```
#Modelo de Smith com processo isotrópico
```

```
set.seed(150) data1<-rmaxstab(1000,coord,"gauss",cov11=500,cov12=0,
cov22=500,grid=TRUE)
class(data1)
dim(data1)
```

```
set.seed(150) data2<-rmaxstab(1000,coord,"gauss",cov11=300,cov12=0,
cov22=500,grid=TRUE)
class(data2)
dim(data2)
```

```
set.seed(150)
data3<-rmaxstab(1000,coord,"gauss",cov11=300,cov12=150,
cov22=500,grid=TRUE)
class(data3)
dim(data3)
```

```
set.seed(150)
data4<-rmaxstab(1000,coord,"gauss",cov11=800,cov12=500,
cov22=1000,grid=TRUE)
class(data4)
dim(data4)
```

```
set.seed(150)
data5<-rmaxstab(1000,coord,"gauss",cov11=2000,cov12=1500,
cov22=3000,grid=TRUE)
class(data5)
dim(data5)
```

```
set.seed(150) data6<-rmaxstab(1000,coord,"gauss",cov11=40,cov12=20,
cov22=60,grid=TRUE)
class(data6)
dim(data6)
```

```
#Margens unitárias de Gumbel para melhor visibilidade
```

```
filled.contour(rotate4image(log(data1)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
side=1,line=4,adj=1,cex=.66)
```

```
X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data2)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
side=1,line=4,adj=1,cex=.66)
```

```

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data3)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data4)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data5)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data6)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

#Exibe a imagem correspondente a 'mat2'.
#Valores fora da região não são computados

x.vec <- as.vector(matrix(rep(x,times=length(y)),ncol=length(x),byrow=T))
y.vec <- as.vector(matrix(rep(rev(y),each=length(x)),ncol=length(x),byrow=T))
inpol<-inip(data.frame(x.vec,y.vec),b)

#INPOL contém o índice de todos os pontos de grade que estão
#dentro da região do Paraná.

mat2<-data1
mat2[!1:length(data1) %in% inpol]<-NA
x11();plot(b,type="n");polygon(b)
image(x,y,rotate4image(log(mat2)),add=F,col=terrain.colors(100))
contour(x,y,rotate4image(log(mat2)),add=F,col="black")
polygon(b,border="blue"); title("Sigma_1")

# Simulação do Modelo isotrópico de Schlather

y<-seq(0,500,length=150)
x<-seq(0,700,length=150)

coord<-cbind(x,y)

coord<-as.matrix(c(coord),150,2)

#Plota as bordas do Estado do Paraná em km

b<-read.table("parana_border_km.txt",skip=1)

```



```

x11();plot(b,type="n");polygon(b)

set.seed(150)
data<-rmaxstab(1000,coord,cov.mod="cauchy",iso=TRUE,sill=1,
              range=4^2,smooth=1,grid=TRUE)

set.seed(150)
data2<-rmaxstab(1000,coord,cov.mod="cauchy",iso=TRUE,sill=1,
              range=4^2,smooth=2,grid=TRUE)

set.seed(150)
data3<-rmaxstab(1000,coord,cov.mod="powexp",iso=TRUE,sill=1,
              range=6^2,smooth=1,grid=TRUE)

set.seed(150)
data4<-rmaxstab(1000,coord,cov.mod="powexp",iso=TRUE,sill=1,
              range=6^2,smooth=2,grid=TRUE)

set.seed(150)
data5<-rmaxstab(1000,coord,cov.mod="whitmat",iso=TRUE,sill=1,
              range=10^2,smooth=1,grid=TRUE)

set.seed(150)
data6<-rmaxstab(1000,coord,cov.mod="whitmat",iso=TRUE,sill=1,
              range=10^2,smooth=2,grid=TRUE)

#Margens unitárias de Gumbel para melhor visibilidade

filled.contour(rotate4image(log(data1)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
      side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data2)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
      side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data3)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
      side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data4)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
      side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data5)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
      side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

```

```

X11()
filled.contour(x,y,rotate4image(log(data6)),color.palette=terrain.colors)
mtext(paste("filled.contour(.) from", R.version.string),
side=1,line=4,adj=1,cex=.66)

#Exibe a imagem correspondente a 'mat2'. #Valores fora da região não
são computados

x.vec <-
as.vector(matrix(rep(x,times=length(y)),ncol=length(x),byrow=T))
y.vec <-
as.vector(matrix(rep(rev(y),each=length(x)),ncol=length(x),byrow=T))
inpol<-inpip(data.frame(x.vec,y.vec),b)

#INPOL contém o índice de todos os pontos de grade que estão #dentro
da região do Paraná.

mat2<-data1
mat2[!1:length(data1) %in% inpol]<-NA
x11();plot(b,type="n");polygon(b)
image(x,y,rotate4image(log(mat2)),add=F,col=terrain.colors(100))
contour(x,y,rotate4image(log(mat2)),add=F,col="black")
polygon(b,border="blue"); title("Sigma_1")

```


ANEXOS

ANEXO A - Demonstração do Teorema 12: Modelo de Tempestade de Smith

Para mostrar que a Equação (27) do Teorema 12 define um processo estacionário Max-Stable com unidades marginais de Fréchet, é preciso verificar que as marginais são unidades de Fréchet e Z^* tem a propriedade Max-Stable. Seguindo Smith (1990), considere o conjunto definido por

$$E = \left\{ (\eta, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : \eta f(y, s) > z \right\}$$

para uma localização fixa $s \in \mathbb{R}^d$ e $z > 0$. Então

$$\begin{aligned} P[Z(s) \leq z] &= P[\text{nenhum ponto em } E] \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \int_{z/f(y,s)}^{+\infty} \eta^{-2} d\eta \nu d(y) \right] \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \nu d(y) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{z/f(y,s)}^t \eta^{-2} d\eta \right] \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \nu d(y) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\eta} \Big|_{z/f(y,s)}^t \right) \right] \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \nu d(y) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{f(y,s)}{z} \right) \right] \\ &= \exp \left[-z^{-1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(y,s) \nu d(y)}_1 \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

ANEXO B - Desenvolvimento da função de distribuição bivariada

A fim de obter a função acumulada de distribuição (28), considerando-se a fórmula (27), precisamos resolver

$$\begin{aligned} F(z_i, z_j) &= \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(\frac{f(y_1, y_2)}{z_i}, \frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \right) dy_1 dy_2 \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1, y_2)}{z_i} \mathbf{I} \left(\frac{f(y_1, y_2)}{z_i} \geq \frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \right) dy_1 dy_2 \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \mathbf{I} \left(\frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \geq \frac{f(y_1, y_2)}{z_i} \right) dy_1 dy_2 \right\}, \end{aligned}$$

em que $f(y_1, y_2)$ é uma densidade normal bivariada de $(Y_1, Y_2) \sim N\left((0, 0)^T, \Sigma\right)$ e abrevia-se $\mathbf{h} = (\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)^T \equiv (s_1, s_2)^T$ lembrando que a partir de (28)

$$a(\mathbf{h}) = (\mathbf{h}^T \Sigma^{-1} \mathbf{h})^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \rho^2)}} \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{1/2},$$

em que $\rho = \sigma_{12}/\sigma_1 \sigma_2$.

Considere o primeiro caso $(s_1 \sigma_2 - \rho s_2 \sigma_1) > 0$. Note que $f(y_1, y_2)/z_i \geq f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)/z_j$ implica em:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} / z_i \\ & \geq \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{(y_1 - s_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(y_1 - s_1)(y_2 - s_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y_2 - s_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} / z_j \end{aligned}$$

aplicando-se a função logarítmica em ambos os membros da inequação acima e desenvolvendo as expressões algébricas

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right) - \log z_i \geq \\ & -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{y_1^2 - 2y_1 s_1 + s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2 + 2\rho y_1 s_2 + 2\rho y_2 s_1 - 2\rho s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2 - 2y_2 s_2 + s_2^2}{\sigma_2^2} \right) - \log z_j \end{aligned}$$

pré-multiplicando-se ambos os membros da inequação acima por -1 e isolando-se a função logarítmica

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \leq$$

$$\frac{y_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2y_1 s_1}{\sigma_1^2} + \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{2\rho y_2 s_1}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{2\rho y_2 s_1}{\sigma_1 \sigma_2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2y_2 s_2}{\sigma_2^2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} + 2(1 - \rho^2) \log \frac{z_j}{z_i}$$

simplificando-se alguns termos e pondo y_1 no primeiro membro da inequação

$$\frac{2y_1 \sigma_1 \sigma_2 s_1 - 2\rho y_1 \sigma_1^2 s_2}{\sigma_1^2 \sigma_1 \sigma_2} \leq \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right) + 2(1 - \rho^2) \log \frac{z_j}{z_i} - \frac{2y_2 \sigma_1 \sigma_2 s_2 - 2\rho y_2 \sigma_2^2 s_1}{\sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2}$$

isolando y_1

$$\Leftrightarrow y_1 \leq \frac{\sigma_1^2 \sigma_2}{2(s_1 \sigma_2 - \rho s_2 \sigma_1)} \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right) + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2 (1 - \rho^2)}{s_1 \sigma_2 - \rho s_2 \sigma_1}$$

$$\log \frac{z_j}{z_i} - \frac{y_2 (s_2 \sigma_1^2 - \rho s_1 \sigma_1 \sigma_2)}{s_1 \sigma_2 - \rho s_2 \sigma_1}$$

$$\Leftrightarrow y_1 \leq c.$$

Dai, segue-se que

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1 - y_2)}{z_i} \mathbf{I} \left(\frac{f(y_1 - y_2)}{z_i} \geq \frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \right) dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^c \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_2) \int_{-\infty}^c \varphi \left(\frac{y_1 - \rho\sigma_1 y_2 / \sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} \right) dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_2) \Phi \left(\frac{c - \rho\sigma_1 y_2 / \sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} \right) dy_2 \\
&= \frac{1}{z_i} \Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{(1-\rho^2)}} \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{-1/2} \frac{\log z_j / z_i}{(1-\rho^2)^{-1/2}} \right) \\
&= \frac{1}{z_i} \Phi \left(\frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{\log z_j / z_i}{a(\mathbf{h})} \right).
\end{aligned}$$

Em que φ é a função densidade Gaussiana, analogamente,

$$\frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \geq \frac{f(y_1, y_2)}{z_i} \Leftrightarrow y_1 \geq c.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \mathbf{I} \left(\frac{f(y_1, y_2)}{z_i} \geq \frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \right) dy_1 dy_2 = \\
& \frac{1}{z_j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_c^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(y_1 - s_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(y_1 - s_1)(y_2 - s_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y_2 - s_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_j} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_2 - s_2) \int_c^{\infty} \varphi \left(\frac{(y_1 - s_1) - \rho\sigma_1(y_2 - s_2)/\sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} \right) dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_j} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_2 - s_2) \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{c - \rho\sigma_1(y_2 - s_2)/\sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} \right) \right\} dy_2 \\
&= \frac{1}{z_j} \Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{(1-\rho^2)}} \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{-1/2} \frac{\log z_j / z_i}{(1-\rho^2)^{-1/2}} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z_j} \Phi \left(\frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{\log z_i / z_j}{a(\mathbf{h})} \right),$$

Considere o segundo caso $(s_1\sigma_2 - \rho s_2\sigma_1) < 0$. Note que $f(y_1 - s_1, y_2 - s_2) / z_j \geq f(y_1, y_2) / z_i$ implica em:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(y_1 - s_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(y_1 - s_1)(y_2 - s_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2 - s_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} / z_j \\ & \geq \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} / z_i \end{aligned}$$

aplicando-se a função logarítmica em ambos os membros da inequação acima e desenvolvendo as expressões algébricas

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{y_1^2 - 2y_1s_1 + s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2 + 2\rho y_1 s_2 + 2\rho y_2 s_1 - 2\rho s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2 - 2y_2s_2 + s_2^2}{\sigma_2^2} \right) - \log z_j \\ & \geq -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right) - \log z_i \end{aligned}$$

pré-multiplicando-se ambos os membros da inequação acima por -1 e isolando-se a função logarítmica

$$\begin{aligned} & \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2y_1s_1}{\sigma_1^2} + \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{2\rho y_2 s_1}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{2\rho y_2 s_1}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2y_2s_2}{\sigma_2^2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} + 2(1-\rho^2) \log \frac{z_j}{z_i} \\ & \leq \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \end{aligned}$$

simplificando-se alguns termos e pondo y_1 no primeiro membro da inequação

$$\left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right) + 2(1-\rho^2) \log \frac{z_j}{z_i} - \frac{2y_2\sigma_1\sigma_2s_2 - 2\rho y_2\sigma_2^2s_1}{\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2} \leq \frac{2y_1\sigma_1\sigma_2s_1 - 2\rho y_1\sigma_1^2s_2}{\sigma_1^2\sigma_1\sigma_2}$$

isolando y_1

$$\Leftrightarrow y_1 \geq \frac{\sigma_1^2\sigma_2}{2(s_1\sigma_2 - \rho s_2\sigma_1)} \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right) + \frac{\sigma_1^2\sigma_2(1-\rho^2)}{s_1\sigma_2 - \rho s_2\sigma_1}$$

$$\log \frac{z_j}{z_i} - \frac{y_2(s_2\sigma_1^2 - \rho s_1\sigma_1\sigma_2)}{s_1\sigma_2 - \rho s_2\sigma_1}$$

$$\Leftrightarrow y_1 \geq c.$$

Dai, segue-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \mathbf{I} \left(\frac{f(y_1, y_2)}{z_i} \geq \frac{f(y_1 - s_1, y_2 - s_2)}{z_j} \right) dy_1 dy_2 =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{z_j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_c^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(y_1-s_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(y_1-s_1)(y_2-s_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2-s_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_j} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_2-s_2) \int_c^{\infty} \varphi \left(\frac{(y_1-s_1) - \rho\sigma_1(y_2-s_2)/\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \right) dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_j} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_2-s_2) \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{c - \rho\sigma_1(y_2-s_2)/\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right\} dy_2 \\
&= \frac{1}{z_j} \Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{(1-\rho^2)}} \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{-1/2} \frac{\log z_j/z_i}{(1-\rho^2)^{-1/2}} \right) \\
&= \frac{1}{z_j} \Phi \left(\frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{\log z_i/z_j}{a(\mathbf{h})} \right).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{f(y_1, y_2)}{z_i} \geq \frac{f(y_1-s_1, y_2-s_2)}{z_j} \Leftrightarrow y_1 \geq c.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1-y_2)}{z_i} \mathbf{I} \left(\frac{f(y_1-y_2)}{z_i} \geq \frac{f(y_1-s_1, y_2-s_2)}{z_j} \right) dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^c \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_2) \int_{-\infty}^c \varphi \left(\frac{y_1 - \rho\sigma_1 y_2/\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \right) dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{z_i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_2) \Phi \left(\frac{c - \rho\sigma_1 y_2/\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \right) dy_2 \\
&= \frac{1}{z_i} \Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{(1-\rho^2)}} \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right)^{-1/2} \frac{\log z_j/z_i}{(1-\rho^2)^{-1/2}} \right) \\
&= \frac{1}{z_i} \Phi \left(\frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{\log z_j/z_i}{a(\mathbf{h})} \right),
\end{aligned}$$

e a forma da distribuição (28) é confirmada.

ANEXO C - Desenvolvimento da função densidade bivariada

A função densidade bi-dimensional da equação (28) é obtida por meio das derivadas parciais de segunda ordem da seguinte forma

$$F(z_i, z_j) = \exp \left(-\frac{\Phi(w)}{z_i} - \frac{\Phi(\nu)}{z_j} \right)$$

com relação a z_i e z_j , em que previamente partimos $a \equiv a(\mathbf{h})$, $w \equiv w(\mathbf{h})$, $\nu \equiv \nu(\mathbf{h})$ e escrevendo-se $w = a/2 + \log(z_j/z_i)/a$ e $\nu = a - w$. A diferenciação é dada por:

$$\begin{aligned} f(z_i, z_j) &\equiv \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} F(z_i, z_j) \\ &= \exp \left(-\frac{\Phi(w)}{z_i} - \frac{\Phi(\nu)}{z_j} \right) \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} \left(-\frac{\Phi(w)}{z_i} - \frac{\Phi(\nu)}{z_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_j} \left(-\frac{\Phi(w)}{z_i} - \frac{\Phi(\nu)}{z_j} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \left(-\frac{\Phi(w)}{z_i} - \frac{\Phi(\nu)}{z_j} \right) \right\}. \end{aligned}$$

A derivada de primeira ordem é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(-\frac{\Phi(w)}{z_i} - \frac{\Phi(\nu)}{z_j} \right) &= -\frac{\Phi(w)}{z_i^2} + \frac{\varphi(w)}{az_i^2} - \frac{\varphi(\nu)}{az_i z_j}, \\ \frac{\partial}{\partial z_j} \left(-\frac{\Phi(w)}{z_i} - \frac{\Phi(\nu)}{z_j} \right) &= -\frac{\Phi(\nu)}{z_j^2} + \frac{\varphi(\nu)}{az_j^2} - \frac{\varphi(w)}{az_i z_j}, \end{aligned}$$

usando os resultados,

$$\frac{\partial \Phi(w)}{\partial z_i} = -\frac{\varphi(w)}{az_i}, \quad \frac{\partial \Phi(\nu)}{\partial z_i} = \frac{\varphi(\nu)}{az_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial z_i} = -\frac{1}{az_i}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial z_i} = \frac{1}{az_i}.$$

A derivada de segunda ordem é dada por:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \left(-\frac{\Phi(w)}{z_i} - \frac{\Phi(\nu)}{z_j} \right) = \frac{\nu \varphi(w)}{a^2 z_i^2 z_j} + \frac{w \varphi(\nu)}{a^2 z_i z_j^2},$$

usando

$$\frac{\partial \varphi(w)}{\partial z_i} = \frac{w \varphi(w)}{az_i} \quad e \quad \frac{\partial \varphi(\nu)}{\partial z_i} = -\frac{\nu \varphi(\nu)}{az_i}.$$

Substituindo, obtemos a função densidade de probabilidade

$$\begin{aligned} f(z_i, z_j) &= \exp \left\{ -\frac{\Phi(w(\mathbf{h}))}{z_i} - \frac{\Phi(\nu(\mathbf{h}))}{z_j} \right\} \\ &\times \left\{ \left(\frac{\Phi(w(\mathbf{h}))}{z_i^2} + \frac{\varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h}) z_i^2} - \frac{\varphi(\nu(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h}) z_i z_j} \right) \left(\frac{\Phi(\nu(\mathbf{h}))}{z_j^2} + \frac{\varphi(\nu(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h}) z_j^2} - \frac{\varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h}) z_i z_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\nu(\mathbf{h}) \varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})^2 z_i^2 z_j} + \frac{w(\mathbf{h}) \varphi(\nu(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})^2 z_i z_j^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

em que φ é a função densidade Gaussiana, $w(\mathbf{h}) = a(\mathbf{h})/2 + \log(z_j/z_i)/a(\mathbf{h})$ e $\nu(\mathbf{h}) = a(\mathbf{h}) - w(\mathbf{h})$.

ANEXO D - Demonstração do Teorema 12: Modelo de tempestade de Schlather

Conforme descrito em (27), a propriedade Max-Stable da Equação (32) do Teorema 13 decorre da superposição de n processos idênticos e independentes de Poisson, enquanto as unidades marginais de Fréchet possuem o mesmo argumento do modelo de Smith. De fato, considere o seguinte conjunto

$$E = \left\{ (\eta, y(s)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : \eta \max(0, y(s)) > z \right\}$$

para um local fixo $s \in \mathbb{R}$ e $Z > 0$. Então

$$\begin{aligned} P[Z(s) \leq z] &= P[\text{nenhum ponto em } E] \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \int_{z/\max(0, y(s))}^{+\infty} \eta^{-2} d\eta \nu d(y) \right] = \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \nu d(y) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{z/\max(0, y(s))}^t \eta^{-2} d\eta \right] \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \nu d(y) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\eta} \Big|_{z/\max(0, y(s))}^t \right) \right] \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \nu d(y) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{\max(0, y(s))}{z} \right) \right] \\ &= \exp \left[-z^{-1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \max(0, y(s)) \nu d(y)}_1 \right] = \exp \left(-\frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$