**Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”**

**Estudo de delineamentos experimentais no esquema fatorial duplo com um
tratamento adicional**

Marcos André Braz Vaz

**Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Ciências: Área de concentração: Estatística
e Experimentação Agronômica**

**Piracicaba
2013**

Marcos André Braz Vaz
Engenheiro Agrônomo

Estudo de delineamentos experimentais no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientadora:
Prof^ª. Dra. **SÔNIA MARIA DE STEFANO PIEDADE**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Ciências: Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

**Piracicaba
2013**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - ESALQ/USP**

Vaz, Marcos André Braz

Estudo de delineamentos experimentais no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional / Marcos André Braz Vaz.- - versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011. - - Piracicaba, 2013.
102 p: il.

Dissertação (Mestrado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2013.

1. Análise de variância 2. Delineamento experimental 3. Mínimos quadrados
4. Regressão linear 5. Tratamento adicional I. Título

CDD 519.535
V393e

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor"

*Aos meus pais, Queli e Marcos,
à minha irmã, Thaís,
dedico.*

AGRADECIMENTOS

À Profª. Dra. Sônia Maria De Stefano Piedade, Professora Doutora do Departamento de Ciências Exatas da Esalq/USP, pela sugestão do assunto e oportunidade.

À Profª. Dra. Paula Pinheiro Padovese Peixoto, Professora Doutora do Departamento de Ciências Agrárias da Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD, pelo constante apoio e motivação.

À colega e amiga Gina Tasso que sempre esteve ao meu lado durante as disciplinas e fora delas, pelos estímulos e cooperação.

Aos colegas do departamento Maria, Simone, Renata, Ricardo e Everton, que de alguma forma colaboraram com as ideias do trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela concessão da bolsa.

Ao meu amigo Rafael Oliveira, pelo apoio e amizade durante toda a realização do curso.

Aos meus pais, pelo incentivo e apoio de sempre.

SUMÁRIO

RESUMO	11
ABSTRACT	13
LISTA DE FIGURAS	15
LISTA DE TABELAS	17
1 INTRODUÇÃO	19
2 DESENVOLVIMENTO	21
2.1 Revisão Bibliográfica	21
2.1.1 Planejamento e delineamento de experimentos	21
2.1.2 Experimentos fatoriais duplos	21
2.1.3 Tratamento controle	23
2.1.4 Fatorial incompleto	24
2.1.5 Teste de Dunnett	26
2.2 Delineamento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com uma testemunha como tratamento adicional	26
2.2.1 Caracterização	26
2.2.2 Modelo linear	27
2.2.3 Sistema de equações normais	29
2.2.4 Análise de variância	31
2.2.4.1 Obtenção das somas de quadrados	31
2.2.4.2 Graus de liberdade	37
2.2.4.3 Quadro da análise de variância	39

2.2.4.4 Esperança matemática das somas de quadrados	40
2.2.4.4.1 Esperança matemática da soma de quadrados de tratamentos	40
2.2.4.4.2 Esperança matemática da soma de quadrados de resíduos	41
2.2.4.5 Independência e distribuição das formas quadráticas	42
2.2.4.5.1 Distribuição da SQ_{Trat}/σ^2	43
2.2.4.5.2 Distribuição da SQ_{Res}/σ^2	44
2.2.4.5.3 Distribuição do quociente $SQ_{Trat}/n_r/SQ_{Res}/n_r$	45
2.2.4.6 Teste de significância	46
2.2.5 Diagrama de Hasse	47
2.2.5.1 Graus de liberdade	47
2.2.5.2 Somas de quadrados	48
2.2.6 Ajuste de equações de regressão	49
2.2.6.1 Regressão linear simples	49
2.2.6.2 Teste de linearidade	51
2.2.6.3 Análise de variância para regressão	52
2.2.7 Ilustração do método	53
2.2.7.1 Análise exploratória	54
2.2.7.2 Análise de variância	55
2.2.7.3 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade	57
2.2.7.4 Teste de Dunnett	58
2.2.7.5 Análise pelo pacote ExpDes no R	59
2.2.7.5.1 Desdobramento da interação	60
2.2.7.5.2 Ajuste do modelo de regressão	61

2.3 Delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento controle adicional	62
2.3.1 Caracterização	62
2.3.2 Modelo linear	63
2.3.3 Sistema de equações normais	66
2.3.4. Análise de variância	68
2.3.4.1 Obtenção das somas de quadrados	68
2.3.4.2 Graus de liberdade	69
2.3.4.3 Quadro da análise de variância	70
2.3.4.4 Teste de significância	72
2.3.5 Diagrama de Hasse	73
2.3.5.1 Graus de liberdade	73
2.3.5.2 Somas de quadrados	74
2.3.6 Ilustração do método	75
2.3.6.2 Análise de variância	77
2.3.6.3 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade	80
2.3.6.4 Teste de Dunnett	82
3 CONCLUSÃO	85
REFERÊNCIAS	87
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	89
APÊNDICES	91

RESUMO

Estudo de delineamentos experimentais no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

O presente trabalho teve como objetivo o estudo de experimentos em delineamentos em esquema fatorial duplo com tratamento adicional do tipo testemunha. Para este esquema usa-se a notação $A \times B + 1$, em que A representa o primeiro fator com i níveis ($i = 1, 2, \dots, a$) e B representa o segundo fator com j níveis ($j = 1, 2, \dots, b$) com a adição do tratamento adicional. Para a análise de variância deste caso, consideraram-se os modelos lineares $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ e $y_h = \mu + \tau + \varepsilon_h$; relacionados, em que y_{ijk} é a variável observada no i -ésimo nível do fator α com o j -ésimo nível do fator β da k -ésima repetição ($k = 1, 2, \dots, r$), μ é a média amostral, α_i é o efeito do i -ésimo nível do primeiro fator, β_j é o efeito do j -ésimo nível do segundo fator, γ_{ij} é o efeito da interação do i -ésimo nível do fator α com o j -ésimo nível do fator β , ε_{ijk} é o erro associado independente e identicamente distribuído, $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$, y_h é a variável observada na h -ésima repetição do tratamento adicional, τ é o efeito do tratamento adicional e ε_h é o erro associado ao tratamento adicional, independente e identicamente distribuído $\varepsilon_h \sim N(0, \sigma^2)$. Considerou-se os delineamentos experimentais inteiramente casualizado e blocos casualizados. Para a análise do delineamento em blocos ao acaso, a adição do efeito de blocos λ_v ($v = 1, 2, \dots, w$) aos modelos, se fez necessária. Foi realizada a dedução da soma de quadrados de tratamentos e sua decomposição para os efeitos dos fatores, sua interação e o contraste com o tratamento adicional. Os graus de liberdade foram deduzidos a partir do posto da matriz núcleo da forma quadrática das somas de quadrados. A técnica do diagrama de Hasse também foi adotada para dedução das somas de quadrados e graus de liberdade. Uma ilustração do método obteve os mesmos resultados da análise de variância do pacote ExpDes no programa R. Curvas de regressão linear foram ajustadas considerando o tratamento controle como um nível de fatores quantitativos. O teste de Dunnett foi empregado para comparar as médias do fatorial com o tratamento controle.

Palavras-chave: Controle; Interação; Experimento fatorial; Tratamento adicional

ABSTRACT

Study of experimental design in two-way factorial with an additional treatment

The present study aimed to study the experiments in two-way factorial designs with additional treatment of type control. For this scheme uses the notation $A \times B + 1$, where A represents the first factor levels with i ($i = 1, 2, \dots, a$) and B is the second factor with levels j ($j = 1, 2, \dots, b$) with the addition of one more treatment. For the analysis of variance of this case, we considered the linear models $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ and $y_h = \mu + \tau + \varepsilon_h$; related, wherein y_{ijk} is the variable observed in the i th level of factor α with the j th level of factor β of k -th iteration ($k = 1, 2, \dots, r$), μ is the sample mean, α_i is the effect of the i th level of the first factor, β_j is the effect of the j th level of the second factor, γ_{ij} is the interaction effect of the i th level of factor α with the j th level of factor β , ε_{ijk} is the error associated with independent and identically distributed, $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$, y_h is the variable observed in the h th repetition of the additional treatment, τ is the effect of the additional treatment and ε_h is the error associated to the additional treatment, independent and identically distributed $\varepsilon_h \sim N(0, \sigma^2)$. It was considered the completely experimental designs and randomized block design. For the analysis of the randomized block design, the addition of blocks effect λ_v ($v = 1, 2, \dots, w$) to the models, was necessary. Was performed the deduction of the sum of squares of treatments and their decomposition to the effects of the factors, their interaction and the contrast with the additional treatment. The degrees of freedom were deducted from the posto of the matrix core of the quadratic form of sums of squares. The Hasse diagram technique has also been adopted for deduction of sums of squares and degrees of freedom. An illustration of the method has obtained the same results of analysis of variance program package ExpDes in R. Linear regression analysis was fitted control treatment as a level of the quantitative factors. The Dunnett test was used to compare the means of the factorial with the control treatment.

Keywords: Control treatment; Interaction; Factorial experiment; Additional treatment

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração da análise visual exploratória da interação.....	23
Figura 2 – Diagrama de Hasse combinado para fatores de parcela e de tratamento.....	47
Figura 3 – Graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de parcela.....	47
Figura 4 – Graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de tratamento.....	48
Figura 5 – Matrizes núcleos no diagrama de Hasse para fatores de parcela.....	48
Figura 6 – Matrizes núcleos no diagrama de Hasse para fatores de tratamento.....	49
Figura 7 – Retas observadas dos níveis de substratos dentro do fator doses.....	54
Figura 8 – Graus de liberdade para fatores de parcela da ilustração.....	57
Figura 9 – Graus de liberdade para fatores de tratamentos da ilustração.....	57
Figura 10 – Curvas de regressão linear de doses em relação à altura para os níveis Plantmax e Casca de coco.....	61
Figura 11 – Curvas de regressão linear de doses em relação à altura para os níveis Plantmax e Casca de coco, considerando o tratamento testemunha.....	62
Figura 12 – Diagrama de Hasse combinado para fatores de parcela e de tratamento.....	73
Figura 13 – Graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de parcela.....	73
Figura 14 – Graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de tratamento.....	74
Figura 15 – Matrizes núcleos no diagrama de Hasse para fatores de parcela.....	74
Figura 16 – Matrizes núcleos no diagrama de Hasse para fatores de tratamento.....	75
Figura 17 – Graus de liberdade para fatores de parcela.....	81
Figura 18 – Graus de liberdade para fatores de tratamentos.....	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variáveis e médias observadas em um experimento fatorial duplo.....	23
Tabela 2 – Ilustração de um esquema fatorial incompleto em que as combinações de níveis iguais não são realizadas.....	24
Tabela 3 – Ilustração de um fatorial duplo com uma testemunha como tratamento adicional (2x2+1).....	25
Tabela 4 – Ilustração de um fatorial duplo com um tratamento adicional (3x2+1).....	25
Tabela 5 – Quadro da análise de variância de um experimento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional.....	39
Tabela 6 – Graus de liberdade e somas de quadrados por desvios de um experimento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional.....	40
Tabela 7 – Análise de variância para o teste de ajuste de regressão linear de um experimento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional.....	52
Tabela 8 – Médias de alturas de plantas de pimentão cultivadas em bandejas sob casa de vegetação em Dourados, MS.....	53
Tabela 9 – Análise de variância de um delineamento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com tratamento adicional (3x2+1).....	56
Tabela 10 – Análise de variância realizada pelo pacote ExpDes do R para um delineamento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional.....	59
Tabela 11 – Desdobramento do fator Doses dentro dos níveis do fator Substratos.....	60
Tabela 12 – Desdobramento do fator Substratos dentro dos níveis do fator Doses.....	60
Tabela 13 – Quadro da análise de variância de um experimento em delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional.....	71

Tabela 14 – Quadro da análise de variância com as respectivas somas de quadrados em termos de desvios de um experimento em delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional.....	71
Tabela 15 – Dados de massa seca da parte aérea, Piracicaba, SP.....	76
Tabela 16 – Análise de variância de um experimento em delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional.....	80
Tabela 17 – Quadro de análise de variância pelo método do diagrama de Hasse para um experimento em delineamento casualizado em blocos casualizados no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional	82

1 INTRODUÇÃO

Em experimentação agronômica, uma das maiores dificuldades no planejamento de um experimento está na escolha do melhor delineamento a se utilizar. A melhor opção surge no bom senso do pesquisador em estudar as condições do experimento e seus objetivos.

Delineamentos em esquema fatorial são amplamente utilizados em experimentos agronômicos visando o estudo da combinação de dois ou mais fatores. Fagundes (2012) cita como vantagem do uso de delineamentos no esquema fatorial, a possibilidade de estudar os efeitos simples dos fatores e as interações entre eles. A adição de tratamentos controles, ou testemunhas, na análise de um experimento fatorial têm sua relevância e pode ser feito simultaneamente.

A análise de variância de um delineamento em esquema fatorial duplo com um tratamento adicional pode ser realizada com a ajuda de dois quadros de análises, um para o estudo do fatorial e outro para o estudo do contraste. Recentemente, com o auxílio de rotinas computacionais e programação, as análises tem sido feitas em um único quadro conjunto (R, 2002). Apesar disso, poucas são as referências e os detalhamentos sobre as somas de quadrados e sobre o ajuste de equações de regressão.

O uso de delineamentos com esquema fatorial e tratamentos adicionais, que servem de referência para comparação com as demais combinações estudadas (YASSIN et al., 2002), deve ser feito com cautela, devido a interpretação do contraste fatorial versus adicional. Vários trabalhos têm utilizado delineamentos em esquema fatorial duplo com um tratamento adicional. Machado et al. (2011) aplicou o delineamento fatorial $4 \times 4 + 1$ (dois fatores com quatro níveis cada e um tratamento adicional) no estudo do crescimento inicial de limoeiros. Hisano et al. (2007) e Araujo et al. (2011) aplicaram em suas pesquisas o delineamento $3 \times 3 + 1$.

O objetivo geral do presente trabalho é a realização da análise de variância de delineamentos com esquema fatorial duplo e uma testemunha como tratamento adicional.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Revisão Bibliográfica

2.1.1 Planejamento e delineamento de experimentos

O planejamento e a escolha do delineamento experimental são etapas importantes no processo de realização de pesquisa e experimentos agrônômicos. Viera (1999) explica que a seleção de variáveis explanatórias é função importante para a determinação dos delineamentos a serem utilizados.

Fagundes (2012) define o delineamento experimental como aquele que irá conduzir o perfil do experimento. Os delineamentos experimentais mais utilizados são o inteiramente casualizado, blocos ao acaso e quadrado latino. Por sua vez, o delineamento de tratamentos independe do tipo de delineamento experimental. O fatorial é um exemplo de delineamento de tratamentos, em que dois ou mais fatores são analisados. Podem-se citar ainda as parcelas subdivididas e as faixas, que são delineamentos de tratamentos com maior nível de controle local.

Um planejamento depende das condições e disponibilidades para a realização do experimento, da experiência do pesquisador e dos objetivos do estudo. Pimentel-Gomes (1990) cita os três princípios básicos da experimentação; repetição, casualização e controle local; que são funções importantes para redução do erro experimental. O mesmo autor ainda comenta sobre as dificuldades encontradas nas análises de experimentos com aplicação abusiva do controle local e delineamentos complexos, que muitas vezes poderiam ser realizados por delineamentos mais simples, além da maior perda de graus de liberdade residual.

2.1.2 Experimentos fatoriais duplos

Os experimentos em esquema fatorial não constituem um delineamento experimental, e sim um esquema de tratamentos. Considera-se um fatorial duplo quando dois fatores, e a sua interação, estão em estudo. O fatorial mais simples é o 2x2 onde há dois níveis de cada fator. Outras formas mais comuns de delineamento fatorial são o 3x3 e 4x4. A combinação dos níveis dos fatores determina o número de tratamentos que serão executados (FAGUNDES, 2012).

Seja um experimento no esquema fatorial duplo A x B, em que A é o primeiro fator com a níveis e B o segundo fator com b níveis. Para cada combinação realiza-se r réplicas. Considerando o modelo (1):

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (1)$$

sendo:

y_{ijk} a variável resposta relacionada ao i -ésimo nível do primeiro fator ($i = 1, 2, \dots, a$) com o j -ésimo nível do segundo fator ($j = 1, 2, \dots, b$) na k -ésima repetição ($k = 1, 2, \dots, r$);

μ a média geral;

α_i o efeito do i -ésimo nível do primeiro fator;

β_j o efeito do j -ésimo nível do segundo fator;

γ_{ij} o efeito da interação do i -ésimo nível do primeiro fator com o j -ésimo nível do segundo fator;

ε_{ijk} o erro experimental associado à observação y_{ijk} e supõe-se que $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ e independentes;

A análise de variância pode ser empregada para testar o efeito simples de um fator, o efeito principal de um fator e o efeito da interação entre os dois fatores. A interação é o resultado de uma combinação onde um fator influencia na resposta de outro fator, positivamente ou negativamente (PERECIN e FILHO, 2008).

A interação pode ser identificada por análise exploratória quando não se observa paralelismo entre as retas observadas (Figura 1). Além do teste de igualdade entre interações de combinações, um teste de hipóteses pode confirmar estatisticamente se há paralelismo entre retas por meio dos coeficientes angulares. Retas com coeficientes angulares estatisticamente iguais são paralelas, indicando que não há o efeito de interação entre os fatores testados (DEMÉTRIO e ZOCCHI, 2011).

Figura 1 – Ilustração da análise visual exploratória da interação

A Tabela 1 mostra um esquema para organização dos dados coletados de um experimento em esquema fatorial duplo. As médias apresentadas são resultados dos efeitos individuais de cada nível de cada fator.

Tabela 1 – Variáveis e médias observadas em um experimento fatorial duplo

Fator A	Fator B				Média
	1	2	...	b	
1	$y_{111}, \dots, y_{11r}$	$y_{121}, \dots, y_{12r}$	...	$y_{1b1}, \dots, y_{1br}$	$\bar{y}_{1..}$
2	$y_{211}, \dots, y_{21r}$	$y_{221}, \dots, y_{22r}$	...	$y_{2b1}, \dots, y_{2br}$	$\bar{y}_{2..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a	$y_{a11}, \dots, y_{a1r}$	$y_{a21}, \dots, y_{a2r}$	...	$y_{ab1}, \dots, y_{abr}$	$\bar{y}_{a..}$
Média	$\bar{y}_{.1.}$	$\bar{y}_{.2.}$	...	$\bar{y}_{.b.}$	$\bar{y}_{...}$

2.1.3 Tratamento controle

Um tratamento controle ou testemunha em uma pesquisa serve como base de referência para o efeito dos tratamentos que são objetivos do trabalho. Em experimentos, a variação do valor de uma variável observada pode ser explicada pelo efeito de um tratamento ou por características não observáveis (SILVA, 2005). A comparação do efeito de uma

testemunha com efeito de tratamentos pode ser feita para verificar o quanto realmente é explicado pelo tratamento testado.

Para fatores quantitativos, em geral, o tratamento testemunha é o valor nulo, ou zero, como visto em experimentos em que os tratamentos testados são lâminas de irrigação (VIEIRA et al., 2000), níveis de adubação nitrogenada (BISCARO et al., 2011) e doses de fungicida (BEZERRA et al., 2010). Porém, em alguns casos, o nível testemunha pode ser um valor de referência, como a dose recomendada comercialmente de um determinado adubo.

CORRENTE et al. (2001) sugerem o emprego do contraste ortogonal para a comparação do tratamento testemunha com as demais combinações de um fatorial.

2.1.4 Fatorial incompleto

Trochim (2006) classifica como um fatorial incompleto, aquele em que nem todas as combinações do fatorial são executadas. A Tabela 2 ilustra um exemplo de experimento em esquema fatorial incompleto de modo geral.

Tabela 2 – Ilustração de um esquema fatorial incompleto em que as combinações de níveis iguais não são realizadas

Fator A	Fator B			
	1	2	3	4
1	..	Y ₁₂₁ , ..., Y _{12r}	Y ₁₃₁ , ..., Y _{13r}	Y ₁₄₁ , ..., Y _{14r}
2	Y ₂₁₁ , ..., Y _{21r}	..	Y ₂₃₁ , ..., Y _{23r}	Y ₂₄₁ , ..., Y _{24r}
3	Y ₃₁₁ , ..., Y _{31r}	Y ₃₂₁ , ..., Y _{32r}	..	Y ₃₄₁ , ..., Y _{34r}
4	Y ₄₁₁ , ..., Y _{41r}	Y ₄₂₁ , ..., Y _{42r}	Y ₄₃₁ , ..., Y _{43r}	..

Zeviane (2011) comenta que experimentos fatoriais com a adição de uma testemunha podem ser classificados como fatoriais incompletos. Para obtenção da ortogonalidade das somas de quadrados, o tratamento controle deve ser considerado como um pseudonível dos fatores combinados. Esta ideia está ilustrada na Tabela 3 que representa o esquema de um experimento fatorial com a combinação de doses de adubo e fontes de aplicação e a adição de um tratamento adicional testemunha que representa a dose 0 e nenhuma fonte de aplicação (controle). Sendo assim, a testemunha pode ser considerada um pseudonível de doses e fontes.

Tabela 3 – Ilustração de um fatorial duplo com uma testemunha como tratamento adicional (2x2+1)

Fontes	Doses		
	Dose 0	Dose 10	Dose 20
Controle	Testemunha		
Fonte A		Fonte A x Dose 10	Fonte A x Dose 20
Fonte B		Fonte B x Dose 10	Fonte B x Dose 20

A testemunha nem sempre indica um valor de nulidade ou ausência de efeitos. Zeviani (2011) exemplifica um experimento $5 \times 5 + 1$, em que os níveis do primeiro fator são doses de um determinado adubo em kg/ha (50, 75, 100, 125, 150) e, do segundo fator, cultivares (B, C, D, E, F). Deseja-se comparar o fatorial com uma cultivar comercial de uma região em que a dose recomendada é 100kg/ha (Tabela 4).

Tabela 4 – Ilustração de um fatorial duplo com um tratamento adicional (3x2+1)

Cultivar	Doses				
	50	75	100	125	150
A			A x 100		
B	B x 50	B x 75	B x 100	B x 125	B x 150
C	C x 50	C x 75	C x 100	C x 125	C x 150
D	D x 50	D x 75	D x 100	D x 125	D x 150
E	E x 50	E x 75	E x 100	E x 125	E x 150
F	F x 50	F x 75	F x 100	F x 125	F x 150

2.1.5 Teste de Dunnett

O teste de Dunnett é um teste de comparação múltipla que é utilizado quando se deseja comparar a média de um tratamento controle com os demais tratamentos testados (ESTATCAMP, 2011). Suponha-se que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j$ são as médias de tratamentos de um experimento, para $i = 1, 2, \dots, j$, e μ_{j+1} é a média do tratamento controle adicionado. Ao realizar o teste de comparação múltipla com a testemunha, os parâmetros de interesse primários são a diferença entre a média dos tratamentos μ_i , e a média da testemunha μ_{j+1} , ou seja, $\mu_i - \mu_{j+1}$. Assim, temos as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_i = \mu_{j+1} \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_{j+1} \end{cases}$$

Quando não há dados faltantes temos a menor diferença significativa definida pela equação:

$$d = d_{\alpha}(j+1, GLE_{\text{Erro}}) \sqrt{2 \times \frac{QME}{n}} \quad (2)$$

Para o caso dos dados desbalanceados, temos este valor definido pela equação:

$$d = d_{\alpha}(j+1, GLE_{\text{Erro}}) \sqrt{QME \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{j+1}} \right)} \quad (3)$$

em que $d_{\alpha}(j+1, GLE_{\text{Erro}})$ é o valor tabelado de Dunnett, que depende dos níveis de tratamentos ($j+1$) e dos graus de liberdade dos resíduos (GLE_{Erro}); QME é o quadrado médio do resíduo; n é o número de repetições de cada tratamento.

2.2 Delineamento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com uma testemunha como tratamento adicional

2.2.1 Caracterização

Seja um experimento inteiramente casualizado em esquema fatorial duplo com um tratamento adicional do tipo testemunha $A \times B + 1$, em que A é o primeiro fator e B é o segundo fator com a adição do tratamento testemunha, com os seguintes índices:

a: níveis do primeiro fator;

b: níveis do segundo fator;

r: número de repetições de cada combinação de tratamentos do fatorial;

m: número de repetições do tratamento adicional (e, considerando que os dados sejam balanceados, $m = r$).

2.2.2 Modelo linear

Para um experimento em esquema fatorial duplo com tratamento adicional, o modelo não pode ser expresso em uma única equação. Isso acontece porque os efeitos dos pares de combinações do fatorial são independentes do efeito do tratamento adicional. Portanto, para o experimento em questão, considera-se o seguinte modelo linear:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (4)$$

e

$$y_h = \mu + \tau_a + \varepsilon_h \quad (5)$$

em que:

y_{ijk} é a variável resposta relacionada ao i -ésimo nível do primeiro fator ($i = 1, 2, \dots, a$) com o j -ésimo nível do segundo fator ($j = 1, 2, \dots, b$) na k -ésima repetição ($k = 1, 2, \dots, r$);

μ é a média geral;

α_i é o efeito do i -ésimo nível do primeiro fator;

β_j é o efeito do j -ésimo nível do segundo fator;

γ_{ij} é o efeito da interação do i -ésimo nível do primeiro fator com o j -ésimo nível do segundo fator;

ε_{ijk} é o erro experimental associado à observação y_{ijk} e supõe-se que $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ e independentes;

y_h é a variável resposta associada à h -ésima observação ($h = 1, 2, \dots, m$) do tratamento adicional;

τ_a é o efeito do tratamento adicional;

ε_h é o erro experimental associado ao tratamento adicional e supõe-se que $\varepsilon_h \sim N(0, \sigma^2)$ e independentes.

Na forma matricial, os modelos (4) e (5) são dados por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

em que:

$\mathbf{y}_{r(ab+1) \times 1}$ é o vetor de realizações de variáveis aleatórias;

$\mathbf{X}_{r(ab+1) \times (a+b+ab+2)}$ é a matriz dos coeficientes dos parâmetros do modelo (matriz de delineamento) de característica $(ab+1)$;

$\boldsymbol{\theta}_{(a+b+ab+2) \times 1}$ é o vetor de parâmetros do modelo;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{r(ab+1) \times 1}$ é um vetor, não observável, de erros aleatórios, tal que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}\sigma^2)$;

e por ser um modelo de Gauss-Markov (G.M.) $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}\sigma^2)$.

Particionando a matriz de delineamento convenientemente, obtém-se:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2 \mid \mathbf{X}_3 \mid \mathbf{X}_4 \mid \mathbf{X}_5]$$

em que:

$\mathbf{X}_{1_{r(ab+1) \times 1}}$ é o vetor dos coeficientes associados à média μ ;

$\mathbf{X}_{2_{r(ab+1) \times a}}$ é a matriz dos coeficientes associados ao fator A;

$\mathbf{X}_{3_{r(ab+1) \times b}}$ é a matriz dos coeficientes associados ao fator B;

$\mathbf{X}_{4_{r(ab+1) \times ab}}$ é a matriz dos coeficientes associados à interação AxB;

$\mathbf{X}_{5_{r(ab+1) \times 1}}$ é o vetor dos coeficientes associados ao tratamento adicional.

Correspondentemente à partição da matriz X , a partição do vetor $\boldsymbol{\theta}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \hline \boldsymbol{\alpha} \\ \hline \boldsymbol{\beta} \\ \hline \boldsymbol{\gamma} \\ \hline \tau \end{bmatrix}$$

em que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_a \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \vdots \\ \gamma_{ab} \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Sistema de equações normais

Pelo método dos quadrados mínimos obtém-se o sistema de equações normais dado por:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_2' \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2' \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_2' \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_2' \mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_2' \mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_3' \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_3' \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3' \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_3' \mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_3' \mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_4' \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_4' \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_4' \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4' \mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_4' \mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_5' \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_5' \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_5' \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_5' \mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_5' \mathbf{X}_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' \mathbf{y} \\ \mathbf{X}_2' \mathbf{y} \\ \mathbf{X}_3' \mathbf{y} \\ \mathbf{X}_4' \mathbf{y} \\ \mathbf{X}_5' \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

em que:

$\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1 = r(ab+1) = n$ = número total de unidades experimentais ou parcelas;

$\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_2 = [br \ br \ \dots \ br]$ = vetor linha de repetições associadas ao fator A de dimensões $(1) \times (a)$;

$\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_3 = [ar \ ar \ \dots \ ar]$ = vetor linha de repetições associadas ao fator B de dimensões $(1) \times (b)$;

$\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_4 = [r \ r \ \dots \ r]$ = vetor linha de repetições associadas ao número de repetições da interação AB de dimensões $(1) \times (ab)$;

$\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_5 = r$ = número de repetições associadas ao tratamento adicional;

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_2 = br \mathbf{I}_a$ = diagonal $[br, br, \dots, br]$ = submatriz associada às repetições do fator A de dimensões $(a) \times (a)$;

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_3 = \mathbf{r}_{(axb)}$ = submatriz de números de repetições do fator A em cada nível do fator B;

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_4$ = submatriz de dimensões $(a) \times (ab)$, correspondente ao número de incidências dos níveis do fator A na interação γ_{ij} ;

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_5$ = vetor coluna nulo de dimensões $(a) \times (1)$;

$\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_3 = ar \mathbf{I}_b$ = diagonal $[ar, ar, \dots, ar]$ = submatriz associada às repetições do fator B de dimensões $(b) \times (b)$;

$\mathbf{X}_3'\mathbf{X}_4$ = submatriz de dimensões $(b) \times (ab)$, correspondente ao número de incidências dos níveis do fator B na interação γ_{ij} ;

$\mathbf{X}_3'\mathbf{X}_5$ = vetor coluna nulo de dimensões $(b) \times (1)$;

$\mathbf{X}_4'\mathbf{X}_4 = \mathbf{rI}_{ab}$ = diagonal $[r, r, \dots, r]$ = submatriz associada às repetições dos pares da interação γ_{ij} de dimensões $(ab) \times (ab)$;

$\mathbf{X}_4'\mathbf{X}_5$ = vetor coluna nulo de dimensões $(ab) \times (1)$;

$\mathbf{X}_5'\mathbf{X}_5 = r$ = número de repetições dos tratamentos adicionais;

$\mathbf{X}_1'\mathbf{y} = N$ = total geral observado;

$\mathbf{X}_2'\mathbf{y}$ = vetor dos totais observados no fator A de dimensões $(a) \times (1)$;

$\mathbf{X}_3'\mathbf{y}$ = vetor dos totais observados no fator B de dimensões $(b) \times (1)$;

$\mathbf{X}_4'\mathbf{y}$ = vetor dos totais observados nos pares de interação γ_{ij} de dimensões $(ab) \times (1)$;

$\mathbf{X}_5'\mathbf{y}$ = é o total observado no tratamento adicional.

2.2.4 Análise de variância

2.2.4.1 Obtenção das somas de quadrados

Supondo que as variáveis respostas em questão seguem uma distribuição normal de Gauss-Markov, cujo primeiro momento é descrito como a esperança matemática de $\mathbf{y}$, tem-se:

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$$

e portanto:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Utilizando o método de estimação dos mínimos quadrados, pelo modelo $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ obtém-se:

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \|\hat{\mathbf{y}}\|^2 + \|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2$$

$$\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{\theta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

em que $\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}}$ é a soma de quadrados de resíduos (SQRes), $\mathbf{y}'\mathbf{y}$ é a soma de quadrados total não corrigida, e $\tilde{\mathbf{\theta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$ é a soma de quadrados de parâmetros.

Pela metodologia de Brien (2007), o modelo minimal $\psi_G = E(y) = X_1\mu$, é o modelo esperado quando a resposta da média populacional é a mesma para todas as observações sem efeitos dos fatores ou do tratamento adicional.

O modelo maximal $\psi_T = E(y) = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$, é o modelo esperado quando todos os efeitos ocorrem, tanto das interações, assim como do contraste com o tratamento adicional.

Portanto,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}$$

e

$$\hat{\Psi}_g = \mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\mu}}$$

$$\hat{\Psi}_g = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}$$

$$\hat{\Psi}_g = \mathbf{M}_g\mathbf{y},$$

em que $\mathbf{M}_g = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1' = \mathbf{1}/n_{n \times n}$.

A forma quadrática $\mathbf{y}'\mathbf{M}_g\mathbf{y}$ é o fator de correção (C) das somas de quadrados (YASSIN, 2002), que pode ser expressa por:

$$\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk} + \sum_{h=1}^m y_h}{abr + m}$$

que no caso balanceado fica:

$$\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk} + \sum_{h=1}^m y_h}{r(ab+1)}$$

A soma de quadrados de parâmetros (SQPar) pode ser definida por:

$$SQPar = \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y}$$

$$SQPar = \mathbf{y}' \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}$$

$$SQPar = \mathbf{y}' \mathbf{M}_t \mathbf{y}$$

sendo $\mathbf{M}_t = \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'$.

Assim, a soma de quadrados de tratamentos (SQTrat) é dada por:

$$SQTrat = SQPar - C$$

$$SQTrat = \mathbf{y}' \mathbf{M}_t \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{M}_g \mathbf{y}$$

$$SQTrat = \mathbf{y}' (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g) \mathbf{y}$$

$$SQTrat = \mathbf{y}' \mathbf{Q}_t \mathbf{y}$$

sendo $\mathbf{Q}_t = \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g$.

A correção da soma de quadrados totais (SQTotal_{corr}) fica expressa por:

$$SQTotal_{corr} = \mathbf{y}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{M}_g \mathbf{y}$$

$$SQTotal_{corr} = \mathbf{y}' (\mathbf{I} - \mathbf{M}_g) \mathbf{y}$$

$$SQTotal_{corr} = \mathbf{y}' \mathbf{Q}_u \mathbf{y}$$

em que $\mathbf{Q}_u = \mathbf{I}_{r(ab+1)} - \mathbf{M}_g$.

Por diferença deduz-se a soma de quadrados residual (SQRes):

$$SQRes = \mathbf{y}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{M}_t \mathbf{y}$$

$$SQRes = \mathbf{y}' (\mathbf{I} - \mathbf{M}_t) \mathbf{y}$$

$$SQRes = \mathbf{y}' \mathbf{Q}_r \mathbf{y}$$

em que $\mathbf{Q}_r = \mathbf{I}_{r(ab+1)} - \mathbf{M}_t$.

Para decompor a soma de quadrados de tratamento é necessário obter a ortogonalidade das submatrizes. Para isso, considera-se o experimento como um fatorial incompleto em que o tratamento controle é um pseudonível dos fatores A e B. Com isso, obtém-se os seguintes subespaços:

$$\mathbf{X}_c = [\mathbf{X}_f | \mathbf{X}_5]$$

$$\mathbf{X}_a = [\mathbf{X}_2 | \mathbf{X}_5]$$

$$\mathbf{X}_b = [\mathbf{X}_3 | \mathbf{X}_5]$$

$$\mathbf{X}_{ab} = [\mathbf{X}_4 | \mathbf{X}_5]$$

e os subvetores reparametrizados:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_a \\ \tau_f \end{bmatrix} ;$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_a \\ \alpha_t \end{bmatrix} ;$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \\ \beta_t \end{bmatrix} ;$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \vdots \\ \gamma_{ab} \\ \gamma_t \end{bmatrix} ,$$

em que:

$\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_5$, é uma submatriz auxiliar dos coeficientes relacionados ao fatorial;

$\mathbf{X}_c$ é o subespaço dos coeficientes relacionados aos efeitos do controle (X_5) e dos coeficientes que não são do efeito do controle (X_f);

$\mathbf{X}_a$ é o subespaço dos coeficientes definido pelo fator A considerando o tratamento adicional com um pseudonível deste fator;

$\mathbf{X}_b$ é o subespaço dos coeficientes definido pelo fator B considerando o tratamento adicional como um pseudonível deste fator;

$\mathbf{X}_{ab}$ é o subespaço dos coeficientes definido pelo fator AB considerando o tratamento adicional como uma combinação dos pseudoníveis de A e B;

α_t é o efeito do tratamento adicional como pseudonível do fator A;

β_t é o efeito do tratamento adicional como pseudonível do fator B;

γ_t é o efeito da combinação do pseudonível do fator A com o pseudonível do fator B;

τ_f é o efeito dos tratamentos do fatorial, ou seja, dos tratamentos que não são o controle.

Assim, o vetor X_1 de coeficientes associados às médias é uma combinação linear das submatrizes $\mathbf{X}_a$, $\mathbf{X}_b$, $\mathbf{X}_{ab}$ e $\mathbf{X}_c$ de modo que o modelo minimal seja marginal aos modelos alternativos:

$$\psi_A = E(y) = \mathbf{X}_a \boldsymbol{\alpha} \text{ (somente o fator A tem efeito na resposta)}$$

$$\psi_B = E(y) = \mathbf{X}_b \boldsymbol{\beta} \text{ (somente o fator B tem efeito na resposta)}$$

$$\psi_{AB} = E(y) = \mathbf{X}_{ab} \boldsymbol{\gamma} \text{ (fator A e B possuem efeito de interação na resposta)}$$

$$\psi_{A+B} = E(y) = \mathbf{X}_a \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{X}_b \boldsymbol{\beta} \text{ (fator A e B possuem efeitos independentes na resposta)}$$

$$\psi_C = E(y) = \mathbf{X}_c \boldsymbol{\tau} \text{ (tratamento adicional tem efeito diferente dos tratamentos do fatorial)}$$

A submatriz $\mathbf{X}_c$ passa a ser uma combinação linear das submatrizes $\mathbf{X}_a$, $\mathbf{X}_b$ e $\mathbf{X}_{ab}$, e, portanto, o modelo ψ_C é marginal aos modelos ψ_A , ψ_B e ψ_{AB} .

Considerando que o contraste do tratamento adicional com o fatorial é uma redução em relação a μ , a soma de quadrados do contraste ($SQ_{\text{contraste}}$) pode ser definida pela diferença:

$$SQ_{\text{contraste}} = \mathbf{y}' \mathbf{M}_c \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{M}_g \mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{contraste}} = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_g)\mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{contraste}} = \mathbf{y}'\mathbf{Q}_c\mathbf{y}$$

sendo $\mathbf{M}_c = \mathbf{X}_c(\mathbf{X}_c'\mathbf{X}_c)^{-1}\mathbf{X}_c'$ e $\mathbf{Q}_c = \mathbf{M}_c - \mathbf{M}_g$.

Sendo os modelos ψ_G e ψ_C marginais ao modelo ψ_A , a soma de quadrados do fator A (SQ_A), pode ser deduzida por:

$$SQ_A = \mathbf{y}'\mathbf{M}_a\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_c\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{M}_g\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_g\mathbf{y}$$

$$SQ_A = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_a - \mathbf{M}_c)\mathbf{y}$$

$$SQ_A = \mathbf{y}'\mathbf{Q}_a\mathbf{y}$$

e analogamente a soma de quadrados do fator B (SQ_B) é

$$SQ_B = \mathbf{y}'\mathbf{M}_b\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_c\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{M}_g\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_g\mathbf{y}$$

$$SQ_B = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c)\mathbf{y}$$

$$SQ_B = \mathbf{y}'\mathbf{Q}_b\mathbf{y}$$

em que:

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{X}_a(\mathbf{X}_a'\mathbf{X}_a)^{-1}\mathbf{X}_a';$$

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{X}_b(\mathbf{X}_b'\mathbf{X}_b)^{-1}\mathbf{X}_b';$$

$$\mathbf{Q}_a = \mathbf{M}_a - \mathbf{M}_f;$$

$$\mathbf{Q}_b = \mathbf{M}_b - \mathbf{M}_f.$$

Finalmente, tem-se que o modelo ψ_G é marginal ao modelo ψ_C , que por sua vez é marginal ao modelo ψ_{A+B} , que é marginal ao modelo ψ_{AB} ($\psi_G \leq \psi_C \leq \psi_{A+B} \leq \psi_{AB}$), portanto, a soma de quadrados da interação do fator A com o fator B ($SQ_{A \times B}$), fica definida por:

$$SQ_{A \times B} = \mathbf{y}'\mathbf{M}_{ab}\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_a\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{M}_c\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_b\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{M}_c\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_c\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{M}_g\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_g\mathbf{y}$$

$$SQ_{A \times B} = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_{ab} - \mathbf{M}_a - \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_c)\mathbf{y}$$

$$SQ_{A \times B} = \mathbf{y}'\mathbf{Q}_{ab}\mathbf{y}$$

sendo $\mathbf{M}_{ab} = \mathbf{X}_{ab}(\mathbf{X}_{ab}'\mathbf{X}_{ab})^{-1}\mathbf{X}_{ab}'$ e $\mathbf{Q}_{ab} = \mathbf{M}_{ab} - \mathbf{M}_a - \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_c$.

2.2.4.2 Graus de liberdade

Os graus de liberdade podem ser definidos pelo posto da matriz núcleo de cada forma quadrática, assim:

Graus de liberdade do fator A:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_a] = \text{posto}[\mathbf{M}_a - \mathbf{M}_c]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_a] = \text{posto}[\mathbf{M}_a] - \text{posto}[\mathbf{M}_c]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_a] = (a + 1) - 2$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_a] = a - 1$$

Graus de liberdade do fator B:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_b] = \text{posto}[\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_b] = \text{posto}[\mathbf{M}_b] - \text{posto}[\mathbf{M}_c]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_b] = (b + 1) - 2$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_b] = b - 1$$

Graus de liberdade da interação AxB:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_{ab}] = \text{posto}[\mathbf{M}_{ab} - \mathbf{M}_a - \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_c]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_{ab}] = \text{posto}[\mathbf{M}_{ab}] - \text{posto}[\mathbf{M}_a] - \text{posto}[\mathbf{M}_b] + \text{posto}[\mathbf{M}_c]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_{ab}] = (ab + 1) - (a + 1) - (b + 1) + 2$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_{ab}] = ab - a - b + 1$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_{ab}] = (a - 1)(b - 1)$$

Graus de liberdade do contraste fatorial vs tratamento adicional:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_c] = \text{posto}[\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_c] = \text{posto}[\mathbf{M}_c] - \text{posto}[\mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_c] = 2 - 1$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_c] = 1$$

Graus de liberdade de tratamentos:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_t] = \text{posto}[\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_t] = \text{posto}[\mathbf{M}_t] - \text{posto}[\mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_t] = (ab + 1) - 1$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_t] = ab$$

Graus de liberdade do resíduo:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = \text{posto}[\mathbf{I} - \mathbf{M}_t]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = \text{posto}[\mathbf{I}_{r(ab+1)}] - \text{posto}[\mathbf{M}_t]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = r(ab+1) - ab + 1$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = (r-1)(ab+1)$$

Graus de liberdade total:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_u] = \text{posto}[\mathbf{I} - \mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_u] = \text{posto}[\mathbf{I}_{r(ab+1)}] - \text{posto}[\mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_u] = r(ab+1) - 1$$

Por propriedade de matrizes, o posto também pode ser calculado pelo traço das matrizes núcleo.

2.2.4.3 Quadro da análise de variância

O quadro da análise de variância, com a decomposição da SQ_{Trat} em partes ortogonais, é dado pela Tabela 5.

Tabela 5 – Quadro da análise de variância de um experimento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.
Fator A	a-1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_a\mathbf{y}$	$SQ_A/(a-1)$
Fator B	b-1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_b\mathbf{y}$	$SQ_B/(b-1)$
Interação AxB	(a-1)(b-1)	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{ab}\mathbf{y}$	$SQ_{AxB}/(a-1)(b-1)$
Fatorial vs Ad.	1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_c\mathbf{y}$	$SQ_{\text{contraste}}$
Tratamentos	ab	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_t\mathbf{y}$	SQ_{Trat}/ab
Resíduo	(r-1)(ab+1)	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_r\mathbf{y}$	$SQ_{\text{Res}}/(r-1)(ab+1)$
Total corrigido	r(ab+1)-1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_u\mathbf{y}$	–

De acordo com Brien (2007), como as matrizes $\mathbf{Q}$ são simétricas e idempotentes, as formas quadráticas podem ser expressas por matrizes $\mathbf{D}$ de desvios, sendo:

$$\mathbf{D}_a = \mathbf{Q}_a\mathbf{y}$$

$$\mathbf{D}_b = \mathbf{Q}_b\mathbf{y}$$

$$\mathbf{D}_{ab} = \mathbf{Q}_{ab}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{Q}_c\mathbf{y}$$

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{Q}_t\mathbf{y}$$

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{Q}_r\mathbf{y}$$

$$\mathbf{D}_u = \mathbf{Q}_u\mathbf{y}$$

Na Tabela 6 são apresentadas as somas de quadrados da análise de variância por matrizes de desvios.

Tabela 6 – Graus de liberdade e somas de quadrados por desvios de um experimento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

C.V.	G.L.	S.Q.
Fator A	a-1	$\mathbf{D}_a'\mathbf{D}_a$
Fator B	b-1	$\mathbf{D}_b'\mathbf{D}_b$
Interação AxB	(a-1)(b-1)	$\mathbf{D}_{ab}'\mathbf{D}_{ab}$
Fatorial vs Ad.	1	$\mathbf{D}_c'\mathbf{D}_c$
Tratamentos	ab	$\mathbf{D}_t'\mathbf{D}_t$
Resíduo	(r-1)(ab+1)	$\mathbf{D}_r'\mathbf{D}_r$
Total corrigido	r(ab+1)-1	$\mathbf{D}_u'\mathbf{D}_u$

2.2.4.4 Esperança matemática das somas de quadrados

2.2.4.4.1 Esperança matemática da soma de quadrados de tratamentos

Sabe-se que:

$$\text{SQTrat} = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)\mathbf{y} \quad (7)$$

Para determinar a $E[\text{SQTrat}]$, utiliza-se o teorema enunciado a seguir.

Teorema 1 (SEARLE, 1971)

Seja $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}\sigma^2)$, então:

$$E[\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}] = \sigma^2 \text{tr}[\mathbf{A}] + \boldsymbol{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \quad (8)$$

Assim, conforme Teorema 1, obtém-se:

$$E[\text{SQTrat}] = E[\mathbf{y}'(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)\mathbf{y}] = \text{tr}[\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g] \sigma^2 + \boldsymbol{\theta}'\mathbf{X}'(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$$

Como $\text{tr}[\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g] = \text{posto}[\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g] = ab$, então

$$\text{tr}[\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g] = ab. \quad (9)$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \theta'X'(M_t - M_g)X\theta &= \theta'X'M_tX\theta - \theta'X'M_gX\theta \\
 &= \theta'X'X(X'X)^{-1}X'X\theta - \theta'X'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X\theta \\
 &= \theta'X'X\theta - \theta'X'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X\theta \\
 &= y'X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'y - y'X(X'X)^{-1}X'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X(X'X)^{-1}X'y \\
 &= y'X(X'X)^{-1}X'y - y'X(X'X)^{-1}X'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X(X'X)^{-1}X'y \\
 &= y'M_t y - y'M_t M_g M_t y \\
 &= y'M_t y - y'M_g M_t y \\
 &= y'(M_t - M_g M_t)y \\
 &= y'(M_t - M_g)y \\
 &= y'Q_t y \\
 &= D_t' D_t
 \end{aligned} \tag{10}$$

Substituindo as expressões (9) e (10) na expressão (8) obtém-se

$$E[\text{SQTrat}] = ab\sigma^2 + D_t' D_t. \tag{11}$$

Da expressão (11) segue-se que

$$E[\text{QMTrat}] = \sigma^2 + D_t' D_t / ab.$$

2.2.4.4.2 Esperança matemática da soma de quadrados de resíduos

Para a SQRes, tem-se, como é usual,

$$\text{SQRes} = y'(I - M_t)y$$

Aplicando o Teorema 1, tem-se:

$$E[\text{SQRes}] = E[y'(I - M_t)y] = \text{tr}[I - M_t]\sigma^2 + \theta'X'[I - M_t]X\theta$$

Como $\text{tr}[I - M_t] = \text{posto}[I - M_t] = (r-1)(ab+1)$, então $\text{tr}[I - M_t] = (r-1)(ab+1)$.

Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \theta'X'[I - M_t]X\theta &= \theta'X'X\theta - \theta'X'M_tX\theta \\
 &= \theta'X'X\theta - \theta'X'X(X'X)^{-1}X'X\theta \\
 &= \theta'X'X\theta - \theta'X'X\theta \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

Portanto, define-se que:

$$E[SQRes] = (r-1)(ab+1)\sigma^2 \tag{13}$$

De (13), segue-se que:

$$E[QMRes] = \sigma^2$$

2.2.4.5 Independência e distribuição das formas quadráticas

Para verificar a independência e a distribuição das formas quadráticas, empregam-se os seguintes teoremas citados por Riboldi (1988):

Teorema 2 (GRAYBILL, 1961)

Se $y \sim N(\mu, I\sigma^2)$, então $y'Ay/\sigma^2 \sim \chi^2(n, \delta)$, ou seja, $y'Ay/\sigma^2$ tem distribuição qui-quadrado não central, com n graus de liberdade, e parâmetro de não centralidade $\delta = \mu'A\mu/2\sigma^2$, se e somente se A for uma matriz idempotente de característica n .

Teorema 3 (SEARLE, 1971)

Quando $y \sim N(\mu, V)$, as formas quadráticas $y'Ay$ e $y'By$ são independentemente distribuídas se e somente se $AVB = 0$, ou, de forma equivalente, $BVA = 0$.

Teorema 4 (GRAYBILL, 1961)

Se uma variável w é distribuída conforme $\chi^2(n_1, \delta)$, ou seja, como qui-quadrado não central com n_1 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ , e se outra variável aleatória z é distribuída como $\chi^2(n_2)$, ou seja, como qui-quadrado central com n_2 graus de liberdade, e se w e z são independentes, então a variável

$$u = \frac{\frac{w}{n_1}}{\frac{z}{n_2}} = \frac{wn_2}{zn_1}$$

tem distribuição F não central, com n_1 e n_2 graus de liberdade, e parâmetro de não centralidade δ .

2.2.4.5.1 Distribuição da SQ_{Trat}/σ^2

Sabe-se que

$$SQ_{Trat} = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)\mathbf{y}. \quad (14)$$

Assim,

$$(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)^2 = \mathbf{M}_t\mathbf{M}_t - 2\mathbf{M}_t\mathbf{M}_g + \mathbf{M}_g\mathbf{M}_g.$$

Como $\mathbf{M}_t$ e $\mathbf{M}_g$ são idempotentes, e $\mathbf{M}_t\mathbf{M}_g = \mathbf{M}_g$, tem-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)^2 &= \mathbf{M}_t - 2\mathbf{M}_g + \mathbf{M}_g \\ &= \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g, \end{aligned}$$

e portanto, $(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)$ é idempotente.

Tem-se ainda que

$$\begin{aligned} \text{posto}(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g) &= \text{tr}(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g) \\ &= ab + 1 - 1 \\ &= ab. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 2, tem-se que:

$$SQTrat/\sigma^2 \sim \chi^2(n_t, \delta_t), \quad (15)$$

em que

$$n_t = ab$$

$$\delta_t = \mathbf{D}_t' \mathbf{D}_t / \sigma^2.$$

2.2.4.5.2 Distribuição da $SQRes/\sigma^2$

Sabe-se que

$$SQRes = \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t)\mathbf{y}. \quad (16)$$

Assim,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t)^2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{M}_t + \mathbf{M}_t\mathbf{M}_t.$$

Como $\mathbf{M}_t$ é idempotente, tem-se:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t)^2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{M}_t + \mathbf{M}_t$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t)^2 = \mathbf{I} - \mathbf{M}_t,$$

e portanto, $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t)$ é idempotente.

Tem-se ainda que

$$\text{posto}(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t) = \text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t) = (r-1)(ab+1).$$

Além, por (12), sabe-se que:

$$\boldsymbol{\theta}'\mathbf{X}'[\mathbf{I} - \mathbf{M}_t]\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = 0.$$

Pelo Teorema 2, tem-se que:

$$SQRes/\sigma^2 \sim \chi^2(n_r, 0), \quad (17)$$

em que:

$$n_r = (r-1)(ab+1)$$

$$\delta_r = 0.$$

2.2.4.5.3 Distribuição do quociente $SQTrat/n_t/SQRes/n_r$

De (14) e (16), tem-se:

$$SQTrat = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)\mathbf{y} \text{ e } SQRes = \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t)\mathbf{y},$$

respectivamente.

Verifica-se que, sendo $V = \mathbf{I}\sigma^2$, então

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g)\mathbf{I}\sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t) &= (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_t\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_g\mathbf{M}_t)\sigma^2 \\ &= (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_g)\sigma^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 3, $SQTrat$ e $SQRes$ são independentes; e usando o teorema 4 tem-se, por (15) e (17) que:

$$\frac{\frac{SQTrat}{n_t}}{\frac{SQRes}{n_r}} \sim F(n_t, n_r, \delta_t)$$

em que:

$n_t = ab$, são os graus de liberdade dos tratamentos;

$n_r = (r-1)(ab+1)$, são os graus de liberdade do resíduo;

$\delta_t = \mathbf{D}_t'\mathbf{D}_t/\sigma^2$, o parâmetro de não-centralidade.

2.2.4.6 Teste de significância

As hipóteses geradas pela decomposição da soma de quadrados de tratamento, são dadas de acordo com os parâmetros testados:

Para a soma de quadrados do fator A:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a$$

H_a : pelo menos dois níveis do fator A diferem entre si.

Para a soma de quadrados do fator B:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b$$

H_a : pelo menos dois níveis do fator B diferem entre si.

Para a soma de quadrados da interação:

$$H_0: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = \gamma_{ab}$$

H_a : existe interação entre os fatores.

Para a soma de quadrados do contraste tratamento adicional vs fatorial:

$$H_0: \tau_a = \tau_f$$

$$H_a: \tau_a \neq \tau_f$$

2.2.5 Diagrama de Hasse

De acordo com Alcarde (2007), definem-se os fatores experimentais: Tratamentos, fator de parcela; e Fator A, Fator B e Controle, fatores de tratamento (Figura 2).

Figura 2 – Diagrama de Hasse combinado para fatores de parcela e de tratamento

2.2.5.1 Graus de liberdade

Para o esquema do diagrama de Hasse para fatores de parcela obtém-se:

Figura 3 – Graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de parcela

Diagrama de Hasse para fatores de tratamentos:

Figura 4 – Graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de tratamento

2.2.5.2 Somas de quadrados

O diagrama de Hasse pode ser empregado para encontrar as matrizes núcleos de forma prática das somas de quadrados.

Diagrama de Hasse para fatores de parcela:

Figura 5 – Matrizes núcleos no diagrama de Hasse para fatores de parcela

Diagrama de Hasse para fatores de tratamentos:

Figura 6 – Matrizes núcleos no diagrama de Hasse para fatores de tratamento

2.2.6 Ajuste de equações de regressão

2.2.6.1 Regressão linear simples

Num experimento fatorial duplo, seja o fator A quantitativo, podem-se escrever b equações lineares de regressão, sendo b o número de níveis do fator B. As seguintes equações de regressão linear simples podem ser escritas:

$$y_{ik1} = \beta_{01} + \beta_{11}x_{i1} + \varepsilon_{ik1}$$

$$y_{ik2} = \beta_{02} + \beta_{12}x_{i2} + \varepsilon_{ik2}$$

⋮

$$y_{ikb} = \beta_{0b} + \beta_{1b}x_{ib} + \varepsilon_{ikb}$$

em que:

y_{ikb} é o valor observado no i -ésimo nível do fator A na k -ésima repetição da b -ésima equação;

β_{0b} é o coeficiente linear da b-ésima equação;

β_{1b} é o coeficiente angular da b-ésima equação;

x_{ib} é o nível fixo do fator A na b-ésima equação;

ε_{ikb} é o erro associado à observação y_{ikb} com $\varepsilon_{ikb} \sim N(0, \sigma^2)$ e independentes.

Demétrio e Zocchi (2011) descrevem que se os erros tem distribuição normal, são independentes e com variâncias homogêneas, então $y_{ikb} \sim N(\beta_{0b} + \beta_{1b}x_{ib}, \sigma^2)$.

O modelo matricial pode ser empregado para cada uma das equações de regressão:

$$\mathbf{y}_b = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

sendo:

$\mathbf{y}$ o vetor de variáveis observáveis;

$\mathbf{X}$ a matriz dos coeficientes da equação;

$\boldsymbol{\beta}$ o vetor de parâmetros da equação;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ o vetor de erros associados.

Para o caso do fatorial duplo com uma testemunha como tratamento adicional, tem-se que para uma equação:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_i \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

sendo:

x_0 o nível do tratamento adicional;

x_i o i -ésimo nível do fator A.

Assim, pelo método dos mínimos quadrados, as estimativas por variáveis centradas dos parâmetros são:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

e

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} .$$

2.2.6.2 Teste de linearidade

Segundo Demétrio e Zocchi (2011), o teste de linearidade, também conhecido por teste da falta de ajuste, combinado com o teste de nulidade do coeficiente angular da reta, resultam em quatro possíveis casos, resultando em diferentes conclusões:

Caso 1:

Teste de falta de ajuste: não significativo

Teste de regressão ($H_0: \beta_1=0$): não significativo

Conclusão: não há inclinação da reta e o modelo se ajusta aos dados.

Modelo estimado: $\hat{y}_{ik} = \hat{\beta}_0 = \bar{y}$

Caso 2:

Teste de falta de ajuste: não significativo

Teste da regressão ($H_0: \beta_1=0$): significativo

Conclusão: a reta possui inclinação e o modelo se ajusta aos dados.

Modelo estimado: $\hat{y}_{ik} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

Caso 3:

Teste de falta de ajuste: significativo

Teste de regressão ($H_0: \beta_1=0$): não significativo

Conclusão: a reta estimada não possui inclinação mas não se ajusta aos dados.

Modelo sugerido: $y_{ik} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_{ik}$ ou grau superior.

Caso 4:

Teste de falta de ajuste: significativo

Teste de regressão ($H_0: \beta_1=0$): significativo

Conclusão: a reta possui inclinação e o modelo não se ajusta aos dados.

2.2.6.3 Análise de variância para regressão

Para verificar se o ajuste do modelo linear ou se os graus superiores são adequados, segue o quadrado de análise de variância com os respectivos graus de liberdade para o experimento em estudo:

Tabela 7 – Análise de variância para o teste de ajuste de regressão linear de um experimento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F _{calculado}
Regressão linear	1	SQReg	SQReg/1	QMReg/QMRes
Desvios de regressão	b-2	SQD	SQD/(b-2)	QMD/QMRes
Entre níveis de X	b-1	SQTrat	SQTrat/(b-1)	QMTrat/QMRes
Resíduo	r(ab+1)-b	SQRes	SQRes/[r(ab+1)-b]	—
Total	r(ab+1)-1	SQTotal	—	—

Seguindo o princípio da parcimônia, escolhe-se o modelo com menor quantidade de parâmetros, dentre os modelos ajustáveis. Em alguns casos escolhe-se o modelo que melhor explica os dados de acordo com a experiência ou bom senso do pesquisador.

2.2.7 Ilustração do método

Para ilustração da metodologia, utilizam-se dados de um experimento realizado na Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS, no ano agrícola de 2009, em casa de vegetação da Faculdade de Ciências Agrárias.

O experimento trata da aplicação de doses de fertirrigação de um produto comercial Yogen 5 e diferentes tipos de substratos (casca de coco e substrato comercial Plantmax hortaliças) para o crescimento de mudas de pimentão em bandejas, com três parcelas por bandejas e quatro repetições por parcelas. As doses testadas foram de 1,25; 2,5 e 5,0 g/L⁻¹ do fertilizante diluídas em água. O tratamento controle foi a não aplicação do produto em mudas plantadas em bandejas com solo do tipo Latossolo vermelho distroférrico. O delineamento empregado foi o inteiramente casualizado em esquema fatorial 3x2 com um tratamento adicional. Cada parcela constituiu-se de 36 células da bandeja e apenas 12 foram amostradas e calculadas as médias. A variável analisada para esta ilustração foi altura de plantas (cm) apresentada na Tabela 8.

Tabela 8 – Médias de alturas de plantas de pimentão cultivadas em bandejas sob casa de vegetação em Dourados, MS

Doses	Substratos			
	Plantmax		Casca de coco	
1,25	8,23	8,50	2,98	2,15
	8,62	7,40	2,08	2,23
2,50	11,75	11,28	5,40	4,25
	9,88	9,1	3,67	3,00
5,00	6,12	5,80	4,58	5,7
	5,40	6,23	4,25	3,88
Tratamento	3,25 3,37			
controle	3,88 3,25			

2.2.7.1 Análise exploratória

Pela figura 7 observa-se a possível interação entre os fatores pelo não paralelismo entre os segmentos de retas observados. A testemunha torna-se um ponto em comum entre as retas.

Figura 7 – Retas observadas dos níveis de substratos dentro do fator doses

2.2.7.2 Análise de variância

Com o auxílio do programa R (2011) as matrizes do delineamento foram montadas com rotinas computacionais. A matriz de delineamento fica definida como:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E o vetor de parâmetros correspondente:

$$\boldsymbol{\theta} = [\mu \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \quad \gamma_{31} \quad \gamma_{32} \quad \tau]'$$

Graus de liberdade do fator Dose:

$$a - 1 = 2$$

Graus de liberdade do fator Substratos:

$$b - 1 = 1$$

Graus de liberdade da interação Doses x Substratos:

$$(a - 1)(b - 1) = 2$$

Graus de liberdade de todos os níveis de tratamento do delineamento:

$$ab = 6$$

Graus de liberdade do resíduo:

$$(r - 1)(ab + 1) = 3.7 = 21$$

Graus de liberdade total:

$$r(ab + 1) - 1 = 4(7) - 1 = 27$$

Assim, é possível o cálculo das somas de quadrados para a elaboração do quadro da análise de variância (Tabela 9).

Tabela 9 – Análise de variância de um delineamento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional (3x2+1)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	Fcalculado
Doses	2	22,0221	11,0111	19,95*
Substratos	1	122,1308	122,1308	221,29*
Interação DxS	2	31,5882	15,7941	28,62*
Fatorial vs Ad.	1	21,4143	21,4143	38,80*
Tratamentos	6	197,1553	32,8592	59,53*
Resíduo	21	11,5902	0,5519	
Total corrigido	27	208,7455		

*hipótese nula rejeitada ao nível de 5% de significância pelo teste F de Fisher-Snedecor.

Todos os F calculados foram maiores do que os valores tabelados. Para o fator doses, conclui-se que existe pelo menos dois níveis que diferem entre si. Para o fator substrato,

conclui-se que, ao nível de 5% de significância, a média da altura de plantas cultivadas em casca de coco (3,68cm) é menor do que plantas cultivadas no substrato Plantmax (8,19cm).

2.2.7.3 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade

Para a elaboração do diagrama de Hasse, considera-se como fator de parcela, Tratamentos, e como fatores de tratamentos, Doses, Substratos e Controle.

Portanto, o diagrama de Hasse para fatores de parcela fica:

Figura 8 – Graus de liberdade para fatores de parcela da ilustração

E o diagrama de Hasse para fatores de tratamentos:

Figura 9 – Graus de liberdade para fatores de tratamentos da ilustração

2.2.7.4 Teste de Dunnett

A diferença entre o tratamento testemunha com as demais combinações pode ser realizada por um teste de comparação de médias de Dunnett a 5% de significância.

Sendo d de Dunnett definido pelos níveis de tratamentos $ab+1$ e os graus de liberdade do resíduo $(r-1)(ab+1)$, obtém-se:

$$d_{5\%(7,21)} = 2,79$$

Como o experimento é balanceado o número de réplicas $k=4$ e, pelo quadro da análise de variância o $QMRes = 0,5519$.

Assim, pela equação proposta por Dunnett tem-se:

$$d = d_{5\%}(7, 21) \sqrt{2 \times \frac{0,5519}{4}}$$

$$d = 1,4656$$

Analisando a diferença de cada combinação de tratamento com o controle obtém-se:

$$|\text{Dose 1,25 x Plantmax} - \text{Controle}| = |4,7500| > 1,4656$$

$$|\text{Dose 1,25 x Casca de coco} - \text{Controle}| = |-1,0775| < 1,4656$$

$$|\text{Dose 2,5 x Plantmax} - \text{Controle}| = |7,0650| > 1,4656$$

$$|\text{Dose 2,5 x Casca de coco} - \text{Controle}| = |0,6425| < 1,4656$$

$$|\text{Dose 5,0 x Plantmax} - \text{Controle}| = |2,4500| > 1,4656$$

$$|\text{Dose 5,0 x Casca de coco} - \text{Controle}| = |1,1650| < 1,4656$$

Portanto, conclui-se que a média da testemunha difere significativamente, no teste de Dunnett a 5% de probabilidade, das médias do nível Plantmax combinado em qualquer nível de dose.

2.2.7.5 Análise pelo pacote ExpDes no R

O programa computacional livre R (2011), traz o pacote estatístico ExpDes (Experimental Design), em que é possível realizar a análise de experimentos. O comando `fat2.ad.dic()` é uma função que realiza a análise de um fatorial duplo com um tratamento adicional em delineamento inteiramente casualizado. A análise é realizada pelos comandos:

```
fat2.ad.dic(fator1,fator2,resp,rep,ad,quali=c("FALSE","TRUE"))
```

em que:

fator1 são os níveis das doses;

fator 2 são os níveis dos substratos;

resp é o vetor das observações do fatorial;

rep é a repetição do vetor de observações;

ad é o vetor das observações do tratamento adicional;

quali=c("FALSE","TRUE") é a determinação de que o primeiro fator é quantitativo e de que o segundo fator é qualitativo.

Os resultados obtidos pelo quadro da análise de variância são vistos na Tabela 10, similares aos da Tabela 9.

Tabela 10 – Análise de variância realizada pelo pacote ExpDes do R para um delineamento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

Quadro da analise de variancia					
	GL	SQ	QM	Fc	Pr>Fc
F1	2	22.02206	11.01103	19.9507	0
F2	1	122.13082	122.13082	221.2863	0
F1*F2	2	31.58816	15.79408	28.617	0
Ad vs Fatorial	1	21.41429	21.41429	38.8001	0
Residuo	21	11.59018	0.55191		
Total	27	208.74550	7.73131		

2.2.7.5.1 Desdobramento da interação

Como a interação foi significativa, o desdobramento da interação pode ser realizado com o auxílio do pacote computacional ExpDes. Faz-se o desdobramento de um fator dentro dos níveis do outro fator. O desdobramento de Doses dentro de cada nível de Substratos é observado na Tabela 11.

Tabela 11 – Desdobramento do fator Doses dentro dos níveis do fator Substratos

----- Quadro da análise de variancia -----					
	GL	SQ	QM	Fc	Pr>Fc
F2	1	122.13082	122.13082	221.2863	0
F2:F1 Casca	2	11.01362	5.50681	9.9777	9e-04
F2:F1 Plantmax	2	42.59660	21.29830	38.59	0
Ad vs Fatorial	1	21.41429	21.41429	38.8001	0
Residuo	21	11.59018	0.55191		
Total	27	208.74550	7.73131		

Como o efeito de Doses foi significativo tanto para casca de coco como para Plantmax, o programa roda o ajuste de modelos de regressão para cada nível (ver item 2.2.8.6.1.2).

O desdobramento do fator Substratos dentro dos níveis de Doses pode ser visto na Tabela 12.

Tabela 12 – Desdobramento do fator Substratos dentro dos níveis do fator Doses

----- Quadro da análise de variancia -----					
	GL	SQ	QM	Fc	Pr>Fc
F1	2	22.02206	11.01103	19.9507	0
F1:F2 1.25	1	67.91951	67.91951	123.062	0
F1:F2 2.5	1	82.49701	82.49701	149.4746	0
F1:F2 5	1	3.30245	3.30245	5.9836	0.0233
Ad vs Fatorial	1	21.41429	21.41429	38.8001	0
Residuo	21	11.59018	0.55191		
Total	27	208.74550	7.73131		

Sendo significativo o efeito do fator Substrato em todos os níveis do fator Doses, conclui-se que as médias de altura de plantas cultivadas em casca de coco diferem estatisticamente a 5% de probabilidade pelo teste F, daquelas cultivadas em Plantmax.

2.2.7.5.2 Ajuste do modelo de regressão

Como o fator doses é quantitativo, faz-se o uso da análise de regressão para ajuste de modelo linear que explique os dados. Para o fator Doses desdobrado dentro dos níveis de Substratos, sendo significativo, faz-se o teste de ajuste de modelos de regressão. Por considerar o fator Doses com apenas três níveis, o pacote ExpDes realiza o teste de ajuste para o modelo linear e quadrático.

Nesta ilustração, o modelo linear $y_i = 2,0988 + 0,5424x_i$, é proposto como o mais adequado dentro do nível casca de coco. Para o nível Plantmax, é proposto o modelo quadrático $y_i = 2,7908 + 5,55x_i - 0,9861x_i^2$. As equações estimadas podem ser visualizadas na Figura 10.

Figura 10 – Curvas de regressão linear de doses em relação a altura para os níveis Plantmax e Casca de coco

Como o pacote não considera o tratamento testemunha como um pseudonível de doses, faz-se necessário a criação de uma subrotina R para a análise de regressão considerando o controle.

Esta nova definição é apresentada na Figura 11, em que é proposto o modelo linear $y_i = 2,902 + 0,3282x_i$ para o nível casca de coco e o modelo quadrático $y_i = 3,3846 + 5,1056x_i - 0,9203x_i^2$ para o nível Plantmax.

Figura 11 – Curvas de regressão linear de doses em relação a altura para os níveis Plantmax e Casca de coco, considerando o tratamento testemunha

2.3 Delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento controle adicional

2.3.1 Caracterização

Seja um experimento disposto em blocos casualizado em esquema fatorial duplo com um tratamento adicional do tipo testemunha $A \times B + 1$, em que A é o primeiro fator e B é o segundo fator, com os seguintes índices:

a: níveis do primeiro fator;

b: níveis do segundo fator;

l: número de blocos;

r: número de repetições dos pares de combinação do fatorial;

m: número de repetições do tratamento adicional ($m=r$, caso balanceado);

z: número de repetições do fatorial e do tratamento adicional por blocos.

2.3.2 Modelo linear

Para o experimento em questão, considera-se o seguinte modelo linear:

$$y_{ijvk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \lambda_v + \varepsilon_{ijvk} \quad (18)$$

e

$$y_{vh} = \mu + \tau + \lambda_v + \varepsilon_{vh} \quad (19)$$

em que:

y_{ijvk} é a variável resposta relacionada ao i -ésimo nível do primeiro fator ($i = 1, 2, \dots, a$) com o j -ésimo nível do segundo fator ($j = 1, 2, \dots, b$) no v -ésimo bloco ($v = 1, 2, \dots, w$) na k -ésima repetição ($k = 1, 2, \dots, r$);

μ é a média geral;

α_i é o efeito do i -ésimo nível do primeiro fator;

β_j é o efeito do j -ésimo nível do segundo fator;

γ_{ij} é o efeito da interação do i -ésimo nível do primeiro fator com o j -ésimo nível do segundo fator;

λ_v é o efeito do v -ésimo bloco;

ε_{ijvk} é o erro experimental associado à observação y_{ijvk} e supõe-se que $\varepsilon_{ijvk} \sim N(0, \sigma^2)$ e independentes;

y_{vh} é a variável resposta relacionado ao v -ésimo bloco da h -ésima repetição do tratamento adicional ($h = 1, 2, \dots, m$);

τ é o efeito do tratamento adicional;

ε_{vh} é o erro experimental associado ao tratamento adicional e supõe-se que $\varepsilon_{vh} \sim N(0, \sigma^2)$ e independentes.

Na forma matricial, os modelos (18) e (19) são dados por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

em que:

$\mathbf{y}_{rz(ab+1) \times 1}$ é o vetor de realizações de variáveis aleatórias;

$\mathbf{X}_{rz(ab+1) \times (a+b+ab+w+2)}$ é a matriz dos coeficientes dos parâmetros do modelo (matriz de delineamento) de característica $(ab+w)$;

$\boldsymbol{\theta}_{(a+b+ab+w+2) \times 1}$ é o vetor de parâmetros do modelo;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{rz(ab+1) \times 1}$ é um vetor, não observável, de erros aleatórios, tal que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}\sigma^2)$;

e por ser um modelo de Gauss-Markov (G.M.) $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}\sigma^2)$.

Particionando a matriz de delineamento convenientemente, obtém-se:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2 \mid \mathbf{X}_3 \mid \mathbf{X}_4 \mid \mathbf{X}_w \mid \mathbf{X}_5]$$

em que:

$\mathbf{X}_{1_{rz(ab+1) \times 1}}$ é o vetor dos coeficientes associados à média μ ;

$\mathbf{X}_{2_{rz(ab+1) \times a}}$ é a matriz dos coeficientes associados ao fator A;

$\mathbf{X}_{3_{rz(ab+1) \times b}}$ é a matriz dos coeficientes associados ao fator B;

$\mathbf{X}_{4_{rz(ab+1) \times ab}}$ é a matriz dos coeficientes associados à interação AxB;

$\mathbf{X}_{w_{rz(ab+1) \times w}}$ é a matriz dos coeficientes associados aos blocos;

$\mathbf{X}_{5_{rz(ab+1) \times 1}}$ é o vetor dos coeficientes associados ao tratamento adicional.

Correspondentemente à partição da matriz X , a partição do vetor $\boldsymbol{\theta}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\begin{array}{c} \mu \\ \hline \boldsymbol{\alpha} \\ \hline \boldsymbol{\beta} \\ \hline \boldsymbol{\gamma} \\ \hline \boldsymbol{\lambda} \\ \hline \tau \end{array} \right]$$

em que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_a \end{array} \right] ;$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \end{array} \right] ;$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \left[\begin{array}{c} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \vdots \\ \gamma_{ab} \end{array} \right] ;$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_w \end{array} \right] .$$

2.3.3 Sistema de equações normais

Pelo método dos quadrados mínimos obtém-se o sistema de equações normais dado por:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_w & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_w & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_3'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_3'\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3'\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_3'\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_3'\mathbf{X}_w & \mathbf{X}_3'\mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_4'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_4'\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_4'\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4'\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_4'\mathbf{X}_w & \mathbf{X}_4'\mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_w'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_w'\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_w'\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_w'\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_w'\mathbf{X}_w & \mathbf{X}_w'\mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_5'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_5'\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_5'\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_5'\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_5'\mathbf{X}_w & \mathbf{X}_5'\mathbf{X}_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \\ \hat{\lambda} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{y} \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{y} \\ \mathbf{X}_3'\mathbf{y} \\ \mathbf{X}_4'\mathbf{y} \\ \mathbf{X}_w'\mathbf{y} \\ \mathbf{X}_5'\mathbf{y} \end{bmatrix},$$

em que:

$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 = rz(ab+1) = n =$ número total de unidades experimentais ou parcelas;

$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 = [\text{brz} \text{ brz} \dots \text{brz}] =$ vetor linha de repetições associadas ao fator A de dimensões (1)x(a);

$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_3 = [\text{arz} \text{ arz} \dots \text{arz}] =$ vetor linha de repetições associadas ao fator B de dimensões (1)x(b);

$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_4 = [\text{rz} \text{ rz} \dots \text{rz}] =$ vetor linha de repetições associadas a interação AB de dimensões (1)x(ab);

$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_w = [z(ab+1) \ z(ab+1) \dots \ z(ab+1)] =$ vetor linha de repetições associadas aos blocos de dimensões (1)x(w);

$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_5 = rz =$ número de repetições associadas ao tratamento adicional;

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_2 = \text{brz} \mathbf{I}_a = \text{diagonal} [\text{brz}, \text{brz}, \dots, \text{brz}] = \text{submatriz associada às repetições do fator A de dimensões (a) x (a)};$

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_3 = \mathbf{rz}_{(a \times b)} = \text{submatriz de números de repetições do fator A em cada fator B de dimensões (a) x (b)};$

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_4 = \text{submatriz de dimensões (a) x (ab), correspondente ao número de incidências dos níveis do fator A nos pares } \gamma_{ij}, \text{ da interação};$

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_w = \text{submatriz de dimensões (a) x (w), correspondente ao número de níveis do fator B dentro do fator A};$

$\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_5 = \text{vetor coluna nulo de dimensões (a) x (1)};$

$\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_3 = \text{arz} \mathbf{I}_b = \text{diagonal} [\text{arz}, \text{arz}, \dots, \text{arz}] = \text{submatriz associada às repetições do fator B de dimensões (b) x (b)};$

$\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_4 = \text{submatriz de dimensões (b) x (ab), correspondente ao número de incidências dos níveis do fator B nos pares } \gamma_{ij}, \text{ da interação};$

$\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_w = \text{submatriz de dimensões (b) x (w), correspondente ao número de níveis do fator A dentro do fator B};$

$\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_5 = \text{vetor coluna nulo de dimensões (b) x (1)};$

$\mathbf{X}_4' \mathbf{X}_4 = \text{rz} \mathbf{I}_{ab} = \text{diagonal} [\text{rz}, \text{rz}, \dots, \text{rz}] = \text{submatriz associada às repetições dos pares da interação } \gamma_{ij} \text{ de dimensões (ab) x (ab)};$

$\mathbf{X}_4' \mathbf{X}_w = \text{submatriz de dimensões (ab) x (w), correspondente ao número de repetições das combinações dos fatores dentro de blocos};$

$\mathbf{X}_4' \mathbf{X}_5 = \text{vetor coluna nulo de dimensões (ab) x (1)};$

$\mathbf{X}_w' \mathbf{X}_w = (\text{ab}+1) \mathbf{I}_w = \text{diagonal} [\text{ab}+1, \text{ab}+1, \dots, \text{ab}+1] = \text{submatriz associada ao número de tratamentos dentro de cada bloco de dimensões (w) x (w)};$

$\mathbf{X}_w' \mathbf{X}_5 = [\text{z} \text{ z} \dots \text{z}]' = \text{vetor coluna correspondente ao número de repetições do tratamento adicional dentro de cada bloco};$

$\mathbf{X}_5' \mathbf{X}_5 = r = \text{número de repetições dos tratamentos adicionais};$

$\mathbf{X}_1' \mathbf{y} = N = \text{total geral observado};$

$\mathbf{X}_2' \mathbf{y} = \text{vetor dos totais observados no fator A de dimensões } (a) \times (1);$

$\mathbf{X}_3' \mathbf{y} = \text{vetor dos totais observados no fator B de dimensões } (b) \times (1);$

$\mathbf{X}_4' \mathbf{y} = \text{vetor dos totais observados nos pares de interação } \gamma_{ij} \text{ de dimensões } (ab) \times (1);$

$\mathbf{X}_w' \mathbf{y} = \text{vetor dos totais observados dentro de cada bloco de dimensões } (w) \times (1);$

$\mathbf{X}_5' \mathbf{y} = \text{é o total observado no tratamento adicional.}$

2.3.4. Análise de variância

2.3.4.1 Obtenção das somas de quadrados

Analogamente ao modelo inteiramente casualizado visto no item 2.2.5.1, a dedução da soma de quadrados residual pode ser obtida por:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}' \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{y}' \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y}$$

em que $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}' \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ é a soma de quadrados de resíduos (SQRes), $\mathbf{y}' \mathbf{y}$ é a soma de quadrados total não corrigida, e $\hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y}$ é a soma de quadrados de parâmetros (SQPar).

O modelo minimal $\psi_G = E(y) = \mathbf{X}_1 \mu$, é o modelo esperado quando a resposta da média populacional é a mesma para todas as observações sem efeitos dos fatores ou do tratamento adicional (BRIEN, 2007).

A SQPar pode ser decomposta na soma de quadrados de tratamentos (SQTrat) e soma de quadrados de blocos (SQ_{blocos}), em que a SQTrat se refere ao efeito do fatorial e do contraste do tratamento adicional com o fatorial.

O modelo $\psi_T = E(y) = \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}$, é o modelo maximal esperado em que todos os efeitos ocorrem, fator A e fator B influenciam na média, existe o efeito de interações, ocorre o efeito dos blocos, e o tratamento adicional contrasta com o fatorial.

O modelo minimal é marginal ao modelo alternativo do efeito de blocos $\psi_w = \mathbf{X}_w \boldsymbol{\lambda}$. Este modelo estima apenas o efeito de blocos sobre a média. Deste modo, a redução da soma de quadrados dos blocos (SQ_{blocos}) pode ser deduzida:

$$SQ_{\text{blocos}} = \mathbf{y}'\mathbf{M}_w\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_g\mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{blocos}} = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_w - \mathbf{M}_g)\mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{blocos}} = \mathbf{y}'\mathbf{Q}_w\mathbf{y}$$

em que $\mathbf{M}_w = \mathbf{X}_w(\mathbf{X}_w'\mathbf{X}_w)^{-1}\mathbf{X}_w'$ e $\mathbf{Q}_w = \mathbf{M}_w - \mathbf{M}_g$.

Para a dedução da SQTrat faz-se a redução da SQPar em blocos.

$$SQ_{\text{Trat}} = SQ_{\text{Par}} - SQ_{\text{blocos}}$$

$$SQ_{\text{Trat}} = \mathbf{y}'\mathbf{M}_t\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_w\mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{Trat}} = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_w)\mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{Trat}} = \mathbf{y}'\mathbf{Q}_t\mathbf{y}$$

em que $\mathbf{Q}_t = \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_w$.

Assim, para este delineamento, ocorre uma diminuição na soma de quadrados de resíduos e seus graus de liberdade, pela inclusão dos blocos. A SQRes pode ser deduzida pela diferença entre o total e os efeitos de tratamentos e blocos.

$$SQ_{\text{Res}} = SQ_{\text{Total}} - SQ_{\text{Trat}} - SQ_{\text{blocos}}$$

$$SQ_{\text{Res}} = \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M}_g)\mathbf{y} - \mathbf{y}'(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_w)\mathbf{y} - \mathbf{y}'(\mathbf{M}_w - \mathbf{M}_g)\mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{Res}} = \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M}_g - \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_w - \mathbf{M}_w + \mathbf{M}_g)\mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{Res}} = \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M}_t)\mathbf{y}$$

$$SQ_{\text{Res}} = \mathbf{y}'\mathbf{Q}_r\mathbf{y}$$

em que $\mathbf{Q}_r = \mathbf{I} - \mathbf{M}_t$.

2.3.4.2 Graus de liberdade

Com a inclusão do controle local em blocos, os graus de liberdade sofrem alterações em sua dedução para o total e resíduos:

Graus de liberdade total:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_u] = \text{posto}[\mathbf{I} - \mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_u] = \text{posto}[\mathbf{I}_{rz(ab+1)}] - \text{posto}[\mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_u] = rz(ab+1) - 1.$$

Graus de liberdade do resíduo:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = \text{posto}[\mathbf{I} - \mathbf{M}_t]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = \text{posto}[\mathbf{I}_{rz(ab+1)}] - \text{posto}[\mathbf{M}_t]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = rz(ab+1) - (ab + w)$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = rz(ab + 1) - ab - w.$$

No caso em que o número de repetições por blocos for 1 e o número de blocos for igual ao número de repetições ($z = 1$ e $r = w$),

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = ab(r - 1) + r - w$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_r] = ab(r - 1).$$

Graus de liberdade blocos:

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_w] = \text{posto}[\mathbf{M}_w - \mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_w] = \text{posto}[\mathbf{M}_w] - \text{posto}[\mathbf{M}_g]$$

$$\text{posto}[\mathbf{Q}_w] = w - 1.$$

2.3.4.3 Quadro da análise de variância

O quadro da análise de variância, com a decomposição da SQ_{Trat} em partes ortogonais, é dado na Tabela 13.

Tabela 13 – Quadro da análise de variância de um experimento em delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.
Fator A	a-1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_a\mathbf{y}$	$\text{SQ}_A/(a-1)$
Fator B	b-1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_b\mathbf{y}$	$\text{SQ}_B/(b-1)$
Interação AxB	$(a-1)(b-1)$	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{ab}\mathbf{y}$	$\text{SQ}_{AxB}/(a-1)(b-1)$
Fatorial vs Ad.	1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_c\mathbf{y}$	$\text{SQ}_{\text{contraste}}$
Tratamentos	ab	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_t\mathbf{y}$	$\text{SQ}_{\text{Trat}}/ab$
Blocos	w-1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_w\mathbf{y}$	$\text{SQ}_{\text{Bloco}}/(w-1)$
Resíduo	$rz(ab+1) - ab - w$	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_r\mathbf{y}$	$\text{SQ}_{\text{Res}}/(r-1)(ab+1)$
Total corrigido	$rz(ab+1)-1$	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_u\mathbf{y}$	–

A soma de quadrados de blocos pode ser escrita na forma de desvios:

$$\mathbf{D}_w = \mathbf{Q}_w\mathbf{y}$$

Assim, a tabela da análise de variância com as somas de quadrados por termos de desvios pode ser visualizada na Tabela 14.

Tabela 14 – Quadro da análise de variância com as respectivas somas de quadrados em termos de desvios de um experimento em delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

C.V.	G.L.	S.Q.
Fator A	a-1	$\mathbf{D}_a'\mathbf{D}_a$
Fator B	b-1	$\mathbf{D}_b'\mathbf{D}_b$
Interação AxB	$(a-1)(b-1)$	$\mathbf{D}_{ab}'\mathbf{D}_{ab}$
Fatorial vs Ad.	1	$\mathbf{D}_c'\mathbf{D}_c$
Tratamentos	ab	$\mathbf{D}_t'\mathbf{D}_t$
Blocos	w-1	$\mathbf{D}_w'\mathbf{D}_w$
Resíduo	$(rz-1)(ab+1)-w+1$	$\mathbf{D}_r'\mathbf{D}_r$
Total corrigido	$rz(ab+1)-1$	$\mathbf{D}_u'\mathbf{D}_u$

2.3.4.4 Teste de significância

As hipóteses geradas pela análise, pela decomposição da soma de quadrados de parâmetros em tratamentos e blocos, são dadas de acordo com os parâmetros testados:

Para a soma de quadrados do fator A:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a$$

H_a : pelo menos dois níveis do fator A diferem entre si.

Para a soma de quadrados do fator B:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b$$

H_a : pelo menos dois níveis do fator B diferem entre si.

Para a soma de quadrados da interação:

$$H_0: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = \gamma_{ab}$$

H_a : existe interação entre os fatores.

Para a soma de quadrados de blocos:

$$H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_w$$

H_a : existe pelo menos um bloco que difere dos demais.

Para a soma de quadrados do contraste tratamento adicional vs fatorial:

$$H_0: \tau_a = \tau_f$$

$$H_a: \tau_a \neq \tau_f$$

2.3.5 Diagrama de Hasse

De acordo com Alcarde (2007), definem-se os fatores experimentais: Blocos e Parcelas, fatores de parcela, e Fator A, Fator B e Controle, fatores de tratamento.

Figura 12 – Diagrama de Hasse combinado para fatores de parcela e de tratamento

2.3.5.1 Graus de liberdade

Para o esquema do diagrama de Hasse para fatores de parcela obtém-se:

Figura 13 – Graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de parcela

Diagrama de Hasse para fatores de tratamentos:

Figura 14 – Graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de tratamento

2.3.5.2 Somas de quadrados

O diagrama de Hasse pode ser empregado para encontrar as matrizes núcleos de forma prática das somas de quadrados.

Diagrama de Hasse para fatores de parcela:

Figura 15 – Matrizes núcleos no diagrama de Hasse para fatores de parcela

Diagrama de Hasse para fatores de tratamentos:

Figura 16 – Matrizes núcleos no diagrama de Hasse para fatores de tratamento

2.3.6 Ilustração do método

Os dados a seguir ilustram o método para um delineamento em blocos casualizados em esquema fatorial duplo com uma testemunha como tratamento adicional.

O experimento foi realizado em Piracicaba, SP, no Centro de Estudos em Energia Nuclear na Agricultura (CENA), na Escola de Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” da Universidade de São Paulo (Esalq/USP). Refere-se a aplicação de diferentes doses de nitrogênio em $\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ (50, 100, 150, e 200) de diferentes fontes de adubo (uréia, uréia recoberta 1, uréia recoberta 2 e uréia recoberta 3), com quatro repetições em plantas de um experimento. No controle não é aplicado nitrogênio. A blocagem foi realizada em curvas de nível. A variável resposta é massa seca da parte aérea em gramas.

Tabela 15 – Dados de massa seca da parte aérea de plantas de milho em gramas, Piracicaba, SP.

Doses	Blocos	Fontes				Testemunha
		Uréia	Uréia 1	Uréia 2	Uréia 3	
50	B I	3,55	2,56	5,35	4,61	
	B II	5,44	3,32	5,24	6,12	
	B III	3,01	2,79	4,12	5,31	
	B IV	4,65	3,06	6,75	4,39	
100	B I	4,28	2,21	5,37	4,68	
	B II	3,71	4,76	5,17	5,92	
	B III	4,16	3,81	4,71	5,76	
	B IV	4,15	2,44	5,25	5,11	
150	B I	3,94	2,74	3,32	5,71	
	B II	4,23	3,23	4,13	4,82	
	B III	4,67	4,19	4,42	4,84	
	B IV	4,94	4,33	4,21	4,35	
200	B I	3,92	4,46	2,55	4,43	
	B II	4,33	3,74	5,52	4,21	
	B III	3,85	4,54	4,05	3,10	
	B IV	4,76	2,44	4,48	4,44	
0	B I					1,52
	B II					1,63
	B III					1,33
	B IV					1,08

2.3.6.1 Análise de variância

Com o auxílio do programa R, a matriz de delineamento foi montada para o cálculo das somas de quadrados do experimento.

Vetor dos coeficientes relacionados à média:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{68 \times 1};$$

Submatriz dos coeficientes relacionados ao fator Doses:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{16} \end{bmatrix}_{68 \times 4};$$

Submatriz dos coeficientes relacionados ao fator Substratos:

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_4 \end{bmatrix}_{68 \times 4};$$

Submatriz dos coeficientes relacionados aos blocos:

$$\mathbf{X}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{68 \times 4};$$

Submatriz dos coeficientes relacionados aos pares Doses x Substratos:

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1_4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1_4 \end{bmatrix}_{68 \times 16};$$

Vetor dos coeficientes relacionados ao tratamento adicional:

$$\mathbf{X}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{68 \times 1}.$$

O vetor de parâmetros é definido por:

$$\boldsymbol{\theta} = [\mu \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \gamma \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \tau]'$$

em que:

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{11} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{14} \ \gamma_{21} \ \gamma_{22} \ \gamma_{23} \ \gamma_{24} \ \gamma_{31} \ \gamma_{32} \ \gamma_{33} \ \gamma_{34} \ \gamma_{41} \ \gamma_{42} \ \gamma_{43} \ \gamma_{44}]'$$

Os graus de liberdade são definidos a seguir:

Graus de liberdade do fator Doses

$$a - 1 = 3.$$

Graus de liberdade do fator Fontes

$$b - 1 = 3.$$

Graus de liberdade da interação Doses x Fontes

$$(a - 1)(b - 1) = 9.$$

Graus de liberdade de todos os tratamentos do delineamento

$$ab = 16.$$

Graus de liberdade do resíduo, com $z = 1$ e $r = w$

$$ab(r - 1) = 16(3)$$

$$= 48.$$

Graus de liberdade total

$$rz(ab + 1) - 1 = 4(17) - 1$$

$$= 67.$$

Assim, é possível o cálculo das somas de quadrados para a elaboração do quadro da análise de variância (Tabela 16).

Tabela 16 – Análise de variância de um experimento em delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F _{calculado}
Doses	3	1,6059	0,5353	1,0274
Fontes	3	19,8479	6,6159	12,6974*
Interação Dx F	9	9,9062	1,1007	2,1124*
Fatorial vs Ad.	1	31,6919	31,6919	60,8231*
Tratamentos	16	63,0519	3,9407	7,5631*
Blocos	3	3,2932	1,0977	2,1067
Resíduo	48	25,0104	0,5211	–
Total corrigido	68	91,3555	–	–

*hipótese nula rejeitada ao nível de 5% de probabilidade pelo teste F de Fisher-Snedecor.

Para o fator doses, não houve diferença significativa entre as médias de massa seca pelo teste F ao nível de 5% de significância. Para o fator fontes, conclui-se que existem pelo menos dois níveis que diferem entre si. A interação entre doses e fontes foi significativa. Pelo contraste, conclui-se que o tratamento adicional difere das combinações de tratamentos do fatorial. Não houve diferença significativa entre blocos, o uso de blocos não foi justificado.

2.3.6.2 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade

Para a elaboração do diagrama de Hasse, considera-se como fatores de parcela, Parcelas e Blocos, e como fatores de tratamentos, Doses, Substratos e Controle.

Portanto, o diagrama de Hasse para fatores de parcela fica:

Figura 17 – Graus de liberdade para fatores de parcela

E o diagrama de Hasse para fatores de tratamentos:

Figura 18 – Graus de liberdade para fatores de tratamentos

O quadro de análise de variância proposto por Brien (2007), obtido pelas somas de quadrados calculadas pelos diagramas para este experimento casualizado em bloco no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional, pode ser visualizado na Tabela 17.

Tabela 17 – Quadro da análise de variância pelo método do diagrama de Hasse para um experimento em delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com um tratamento adicional

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F _{calculado}
Blocos	3	3,2932	1,0977	2,1067
Parcelas[Blocos]	64	88,0623	—	—
Controle	1	31,6919	31,6919	60,8231*
Doses[Controle]	3	1,6059	0,5353	1,0274
Fontes[Controle]	3	19,8479	6,6159	12,6974*
Doses^Fontes[Controle]	9	9,9062	1,1007	2,1124*
Resíduos	48	25,0104	0,5211	—
Total corrigido	67	91,3555	—	—

*hipótese nula rejeitada ao nível de 5% de probabilidade pelo teste F de Fisher-Snedecor.

2.3.6.4 Teste de Dunnett

Realizando o teste de Dunnett ao nível de 5% de significância, obtém-se a diferença mínima significativa entre o tratamento testemunha e os tratamentos do fatorial:

$$d_{5\%(17,48)} = 3,60.$$

Como o experimento é balanceado o número de réplicas $k=4$ e, pelo quadro da análise de variância o $QMRes = 0,5211$.

Assim, pela equação proposta por Dunnett tem-se:

$$d = d_{5\%(17,48)} \sqrt{2 \times \frac{0,5211}{4}}$$

$$d = 1,8375.$$

Analisando a diferença de cada combinação de tratamento com o controle obtém-se:

$$|\text{Dose 50 x Uréia} - \text{Controle}| = |2,7725| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 50 x Uréia1} - \text{Controle}| = |1,5425| < 1,8375^{\text{ns}}$$

$$|\text{Dose 50 x Uréia2} - \text{Controle}| = |3,9750| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 50 x Uréia3} - \text{Controle}| = |3,7175| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 100 x Uréia} - \text{Controle}| = |2,6850| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 100 x Uréia1} - \text{Controle}| = |1,9150| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 100 x Uréia2} - \text{Controle}| = |3,7350| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 100 x Uréia3} - \text{Controle}| = |3,9775| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 150 x Uréia} - \text{Controle}| = |3,0550| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 150 x Uréia1} - \text{Controle}| = |2,2325| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 150 x Uréia2} - \text{Controle}| = |2,6300| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 150 x Uréia3} - \text{Controle}| = |3,5400| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 200 x Uréia} - \text{Controle}| = |2,8250| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 200 x Uréia1} - \text{Controle}| = |2,4050| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 200 x Uréia2} - \text{Controle}| = |2,7600| > 1,8375$$

$$|\text{Dose 200 x Uréia3} - \text{Controle}| = |2,6550| > 1,8375$$

Conclui-se que o tratamento controle difere significativamente das combinações de Uréia, Uréia 1, Uréia 2 e Uréia 3 com as doses 50, 100, 150 e 200, exceto para a combinação de Uréia 1 com a dose 50.

3 CONCLUSÃO

A análise de variância de delineamentos em esquema fatorial duplo pode ser calculada por meio das matrizes determinadas pelo modelo proposto e com a obtenção das matrizes núcleos das formas quadráticas dos modelos marginais.

A aplicação do diagrama de Hasse auxilia na obtenção das matrizes núcleos e graus de liberdade para cálculo das somas de quadrados e elaboração do quadro da análise de variância.

O pacote ExpDes no R também pode ser empregado para a análise de variância para delineamentos inteiramente casualizado, porém, o ajuste das curvas de regressão não levam em consideração o tratamento testemunha como um nível do fator quantitativo.

O teste de Dunnett mostrou-se adequado às interpretações das análises para o delineamento inteiramente casualizado e o delineamento casualizado em blocos.

REFERÊNCIAS

ALCARDE, R. **Fundamentos do diagrama de Hasse e aplicações à experimentação**. 2007. 99p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica) – Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2007.

ARAÚJO, L. C. de; SANTOS, P. M.; MENDONÇA, F. C.; MOURÃO, G. B. Establishment of *Brachiaria brizantha* cv. Marandu, under levels of soil water availability in stages of growth of the plants. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Brasília, v. 40, n. 7, p. 1405-1411, 2011.

BEZERRA, A. K. D.; BRUNO, R. de A.; FERRARI, C. dos S.; SILVA, G. Z. da; JÚNIOR, J. M. B.; ALVES, E. U. **Utilização de fungicidas no tratamento de sementes de mamona**. In: IV Congresso Brasileiro de mamona e I Simpósio Internacional de Oleaginosas Energéticas, João Pessoa, PB. Campina grande: Embrapa Algodão, 2010. p. 2180-2185.

BISCARO, G. A.; MOTOMIYA, A. V. de; RANZI, R. VAZ, M. A. B, PRADO, E. A. F, do; SILVEIRA, B. L. R. Desempenho do milho safrinha irrigado submetido a diferentes doses de nitrogênio via solo e foliar. **Agrarian**, Dourados, v. 4, n. 11, p. 10-19, 2011.

BRIEN, C.J. Determining the analysis of variance table. In: _____. **Statistical Modelling**. 2007. Disponível em: <<http://chris.brien.name/ee2/course/SM06.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2012.

CORRENTE, J. E.; NOGUEIRA, M. C. S.; COSTA, B. M. Contrastes ortogonais na análise do controle de volatilização de amônia em compostagem. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v. 58 n2, 2001.

ESTATCAMP, Portal Action. **Comparações de médias com um controle ou com um valor referência**. 2011. Disponível em: <<http://www.portalaction.com.br/content/33-teste-de-dunnett>>. Acesso em: 25 set. 2011.

FAGUNDES, R. S. **Notas de aula**. Disponível em <www.fag.edu.br/professores/pos/MATERIAIS/.../INTRODUO.pdf> Acesso em: 30 fev. 2012.

HISANO, H.; BARROS, M. M.; PEZZATO, L. E. Levedura e zinco como pró-nutriente em rações para tilápia-do-nilo (*Oreochromis niloticus*): Aspectos hematológicos. **Boletim do Instituto de Pesca**, São Paulo, v. 33, n. 1, p. 35-42, 2007.

MACHADO, D. L. M.; LUCENA, C. C. de; SANTOS, D. dos; SIQUEIRA, D. L. de; MATARAZZO, D. H. M.; STRUIVING, T.B. Slow-release and organic fertilizers on early growth of Rangpur lime. **Revista Ceres**, Viçosa, v. 58, n. 3, p. 359-365, 2011.

PERECIN, D. e FILHO, A. C. Efeitos por comparações e por experimento em interações de experimentos fatoriais. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 32, n. 1, p. 68-72, 2008.

R. **R Foundation for Statistical Computing Version 2.5.0**. Disponível em: <<http://www.Rproject.org>>. Acesso em: 21 out. 2011.

RIBOLDI, J. **A decomposição da soma de quadrados de tratamentos nos delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados**. 1988. 165p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) – Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1988.

SILVA, F. de A. S. e.; AZEVEDO, C. A. V. de. Versão do programa computacional Assistat para o sistema operacional Windows. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, Campina Grande, v. 4, n. 1, p 71-78, 2002.

SILVA, J.G.C. da. **Planejamento de experimentos, versão preliminar**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, Instituto de Física e Matemática, 2005. 531p.

SOUZA, O. A. Delineamentos de experimentos em ensaios fatoriais utilizados em preferência declarada: uma aplicação em Benchmarking. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, Guarapuava, v. 8, n. 1, p.45-68, 2006.

TROCHIM, W. M. K. **Factorial Design Variation**. 2006. Disponível em: <<http://www.socialresearchmethods.net/kb/expfact2.php>>. Acesso em: 15 jul. 2011.

VIEIRA, G. H. S.; MANTOVANI, E. C.; BONOMO, M. B. A. De; SOARES, A. R. Influência da aplicação de diferentes lâminas de irrigação nos parâmetros de crescimento do cafeeiro na região de Viçosa, MG. In: SIMPÓSIO DE PESQUISA DOS CAFÉS DO BRASIL, POÇOS DE CALDAS, MG, [s.n.], 2000. **Resumos...** Poços de Caldas, 2000. p. 879-881.

VIEIRA, S. **Estatística Experimental**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1999. 159p.

YASSIN, N.; MORAIS, A. R. de; MUNIZ, J. A. Análise de variância em um experimento fatorial de dois fatores com tratamentos adicionais. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, Edição Especial, p. 1541-1547, 2002.

ZEVIANI, W. **Experimento fatorial duplo com um tratamento adicional**. Ridículas: dicas curtas sobre o R, 2011. Disponível em: <<http://ridiculas.wordpress.com/2011/08/09/experimento-fatorial-duplo-com-um-tratamento-adicional/>>. Acesso em: 21 fev. 2011.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BOX, G. E. P.; HUNTER, J. S.; HUNTER, W. **Statistic for Experimenters**. 2nd ed. Wiley: New York, 2005. 639 p.

COX, D. R. **Planning of Experiments**. New York: Wiley, 1992. 308 p.

MONTGOMERY, D. C. **Design and Analysis of Experiments**. 3rd ed. New York: Wiley, 1991. 649 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Teste de linearidade para o ajuste de modelos polinomiais de regressão no nível casca de coco na ilustração do delineamento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com tratamento adicional

```

F1 dentro do nivel Casca de F2
-----
Ajuste de modelos polinomiais de regressao
-----
$`Modelo linear
-----
      Estimativa Erro.padrao      tc p.valor
b0  2.0987500      0.45494 4.61328 0.00015
b1  0.5424286      0.13756 3.94322 0.00074

$`R2 do modelo linear`
[1] 0.7791872

$`Analise de variancia do modelo linear`
      GL      SQ      QM      Fc p.valor
Efeito linear      1  8.58167 8.58167 15.55 0.00074
Desvios de Regressao 1  2.43195 2.43195  4.41 0.04807
Residuos           21 11.59018 0.55191

-----
$`Modelo quadratico
-----
      Estimativa Erro.padrao      tc p.valor
b0   -0.3325      1.24436 -0.26721 0.79192
b1    2.5430      0.96292  2.64093 0.01528
b2   -0.3112      0.14825 -2.09914 0.04807

$`R2 do modelo quadratico`
[1] 1

$`Analise de variancia do modelo quadratico`
      GL      SQ      QM      Fc p.valor
Efeito linear      1  8.58167 8.58167 15.55 0.00074
Efeito quadratico  1  2.43194 2.43194  4.41 0.04807
Desvios de Regressao 0  0.00000 0.00000    0      1
Residuos           21 11.59018 0.55191
-----

```

APÊNDICE B – Teste de linearidade para o ajuste de modelos polinomiais de regressão no nível Plantmax na ilustração do delineamento inteiramente casualizado no esquema fatorial duplo com tratamento adicional

```

F1 dentro do nivel Plantmax de F2
-----
Ajuste de modelos polinomiais de regressao
-----
$`Modelo linear
-----
      Estimativa Erro.padrao      tc p.valor
b0 10.4950000    0.45494 23.06914    0e+00
b1 -0.7894286    0.13756 -5.73880    1e-05

$`R2 do modelo linear`
[1] 0.4267146

$`Analise de variancia do modelo linear`
      GL      SQ      QM      Fc p.valor
Efeito linear      1 18.17659 18.17659 32.93    1e-05
Desvios de Regressao 1 24.42001 24.42001 44.25      0
Residuos           21 11.59018  0.55191

-----
$`Modelo quadratico
-----
      Estimativa Erro.padrao      tc p.valor
b0  2.7908333    1.24436  2.24279 0.03583
b1  5.5500000    0.96292  5.76372 0.00001
b2 -0.9861333    0.14825 -6.65177 0.00000

$`R2 do modelo quadratico`
[1] 1

$`Analise de variancia do modelo quadratico`
      GL      SQ      QM      Fc p.valor
Efeito linear      1 18.17659 18.17659 32.93    1e-05
Efeito quadratico  1 24.42001 24.42001 44.25      0
Desvios de Regressao 0 0.00000 0.00000      0      1
Residuos           21 11.59018  0.55191
-----

```



```
XB=cbind(X3,X5)
```

```
XAB=cbind(X4,X5)
```

```
XC=cbind(X1-X5,X5)
```

```
#Definindo as submatrizes M
```

```
library(MASS)
```

```
MG=X1%%ginv(t(X1)%%X1)%%t(X1)
```

```
MT=X%%ginv(t(X)%%X)%%t(X)
```

```
MA=XA%%ginv(t(XA)%%XA)%%t(XA)
```

```
MB=XB%%ginv(t(XB)%%XB)%%t(XB)
```

```
MAB=XAB%%ginv(t(XAB)%%XAB)%%t(XAB)
```

```
MC=XC%%ginv(t(XC)%%XC)%%t(XC)
```

```
#Definindo uma matriz identidade de tamanho 28x28
```

```
I=diag(1,28)
```

```
#Calculando as Somas de Quadrados
```

```
SQA=t(y)%%(MA-MC)%%y
```

```
SQB=t(y)%%(MB-MC)%%y
```

```
SQAB=t(y)%%(MAB-MA-MB+MC)%%y
```

```
SQC=t(y)%%(MC-MG)%%y
```

```
SQtrat=t(y)%%(MT-MG)%%y
```

```
SQres=t(y)%%(I-MT)%%y
```

```
SQtot=t(y)%%(I-MG)%%y
```

```
#Calculando os Graus de liberdade pelo posto das matrizes núcleos da forma quadrática
```

```
GLA=qr(MA-MC)$posto
```

```
GLB=qr(MB-MC)$posto
```

```
GLAB=qr(MAB-MA-MB+MC)$posto
```

```
GLC=qr(MC-MG)$posto
```

```
GLtrat=qr(MT-MG)$posto
```

```
GLres=qr(I-MT)$posto
```

```
GLtot=qr(I-MG)$posto
```

#Calculando os Quadrados Médios

$QMA = SQA/GLA$

$QMB = SQB/GLB$

$QMAB = SQAB/GLAB$

$QMC = SQC/GLC$

$QMtrat = SQtrat/GLtrat$

$QMres = SQres/GLres$

#Calculando os F para o teste de hipóteses

$FA = QMA/QMres$

$FB = QMB/QMres$

$FAB = QMAB/QMres$

$FC = QMC/QMres$

$Ftrat = QMtrat/QMres$

#Encontrando os valores de F tabelado a 5%

$qf(0.95, 2, 21)$

$qf(0.95, 1, 21)$

$qf(0.95, 6, 21)$

#Teste de Dunnett

$d = 3.79 * \sqrt{2 * QMres / 4}$

#Médias de tratamentos

$trat = c(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7)$

$med = tapply(y, trat, mean)$

$med - 3.44$

#Teste de Shapiro Wilk

$mod = lm(y \sim trat)$

$shapiro.test(residuals(mod))$

#Teste Hartley para homogeneidade de variâncias

var=tapply(y, trat, var)

max(var)/min(var)

APÊNDICE D – Subrotina R para a obtenção da análise do experimento em delineamento casualizado em blocos no esquema fatorial duplo com tratamento adicional

```
#Inserindo os dados de arquivo txt

rm(list=ls(all=TRUE))

dados=read.table("experimento2.txt",head=T)

y=dados$MSPA


#Definindo a matriz e submatrizes de delineamento

x1=c(rep(1,68))

x2=c(rep(1,4),rep(0,64))

x3=c(rep(0,4),rep(1,16),rep(0,48))

x4=c(rep(0,20),rep(1,16),rep(0,32))

x5=c(rep(0,36),rep(1,16),rep(0,16))

x6=c(rep(0,52),rep(1,16))

x7=c(rep(0,4),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12))

x8=c(rep(0,8),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,8))

x9=c(rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,4))

x10=c(rep(0,16),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4),rep(0,12),rep(1,4))

x11=c(rep(0,4),rep(1,4),rep(0,60))

x12=c(rep(0,8),rep(1,4),rep(0,56))

x13=c(rep(0,12),rep(1,4),rep(0,52))

x14=c(rep(0,16),rep(1,4),rep(0,48))

x15=c(rep(0,20),rep(1,4),rep(0,44))

x16=c(rep(0,24),rep(1,4),rep(0,40))

x17=c(rep(0,28),rep(1,4),rep(0,36))

x18=c(rep(0,32),rep(1,4),rep(0,32))

x19=c(rep(0,36),rep(1,4),rep(0,28))

x20=c(rep(0,40),rep(1,4),rep(0,24))

x21=c(rep(0,44),rep(1,4),rep(0,20))

x22=c(rep(0,48),rep(1,4),rep(0,16))

x23=c(rep(0,52),rep(1,4),rep(0,12))

x24=c(rep(0,56),rep(1,4),rep(0,8))

x25=c(rep(0,60),rep(1,4),rep(0,4))
```

```
x26=c(rep(0,64),rep(1,4))
```

```
x27=c(rep(c(1,0,0,0),17))
```

```
x28=c(rep(c(0,1,0,0),17))
```

```
x29=c(rep(c(0,0,1,0),17))
```

```
x30=c(rep(c(0,0,0,1),17))
```

```
X1=x1
```

```
X2=cbind(x3,x4,x5,x6)
```

```
X3=cbind(x7,x8,x9,x10)
```

```
X4=cbind(x11,x12,x13,x14,x15,x16,x17,x18,x19,x20,x21,x22,x23,x24,x25,x26)
```

```
XW=cbind(x27,x28,x29,x30)
```

```
X5=x2
```

```
X=cbind(X1,X2,X3,X4,XW,X5)
```

```
#Definindo os subespaços reparametrizados
```

```
XA=cbind(X2,X5)
```

```
XB=cbind(X3,X5)
```

```
XAB=cbind(X4,X5)
```

```
XC=cbind(X1-X5,X5)
```

```
#Definindo as submatrizes M
```

```
library(MASS)
```

```
MG=X1%*%ginv(t(X1)%*%X1)%*%t(X1)
```

```
MT=X%*%ginv(t(X)%*%X)%*%t(X)
```

```
MA=XA%*%ginv(t(XA)%*%XA)%*%t(XA)
```

```
MB=XB%*%ginv(t(XB)%*%XB)%*%t(XB)
```

```
MAB=XAB%*%ginv(t(XAB)%*%XAB)%*%t(XAB)
```

```
MC=XC%*%ginv(t(XC)%*%XC)%*%t(XC)
```

```
MW=XW%*%ginv(t(XW)%*%XW)%*%t(XW)
```

```
#Definindo uma matriz identidade de tamanho 68x68
```

```
I=diag(1,68)
```

#Calculando as Somas de Quadrados

$$SQA=t(y) \% \% (MA-MC) \% \% y$$

$$SQB=t(y) \% \% (MB-MC) \% \% y$$

$$SQAB=t(y) \% \% (MAB-MA-MB+MC) \% \% y$$

$$SQC=t(y) \% \% (MC-MG) \% \% y$$

$$SQtrat=t(y) \% \% (MT-MW) \% \% y$$

$$SQbloco=t(y) \% \% (MW-MG) \% \% y$$

$$SQres=t(y) \% \% (I-MT) \% \% y$$

$$SQtot=t(y) \% \% (I-MG) \% \% y$$

#Calculando os Graus de liberdade pelo posto das matrizes núcleos da forma quadrática

$$GLA=qr(MA-MC)\$posto$$

$$GLB=qr(MB-MC)\$posto$$

$$GLAB=qr(MAB-MA-MB+MC)\$posto$$

$$GLC=qr(MC-MG)\$posto$$

$$GLtrat=qr(MT-MW)\$posto$$

$$GLbloco=qr(MW-MG)\$posto$$

$$GLres=qr(I-MT)\$posto$$

$$GLtot=qr(I-MG)\$posto$$

#Calculando os Quadrados Médios

$$QMA=SQA/GLA$$

$$QMB=SQB/GLB$$

$$QMAB=SQAB/GLAB$$

$$QMC=SQC/GLC$$

$$QMtrat=SQtrat/GLtrat$$

$$QMbloco=SQbloco/GLbloco$$

$$QMres=SQres/GLres$$

#Calculando os F para o teste de hipóteses

$$FA=QMA/QMres$$

$$FB=QMB/QMres$$

FAB=QMAB/QMres

FC=QMC/QMres

Ftrat=QMtrat/QMres

Fbloco=QMbloco/QMres

#Encontrando os valores de F tabelado a 5%

qf(0.95,3,48)

qf(0.95,3,48)

qf(0.95,9,48)

qf(0.95,1,48)

qf(0.95,16,48)

qf(0.95,3,48)

#Teste de Dunnett

d=3.6*sqrt(2*QMres/4)

#Médias de tratamentos

trat=c(1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,7,7,7,7,8,8,8,8,9,9,9,9,10,10,10,10,11,11,11,11,12,12,12,12,13,13,13,13,14,14,14,14,15,15,15,15,16,16,16,16,17,17,17,17)

med=tapply(y, trat, mean)

med-1.39

#Teste de Shapiro Wilk

mod=lm(y~trat)

shapiro.test(residuals(mod))

#Teste Hartley para homogeneidade de variâncias

var=tapply(y, trat, var)

max(var)/min(var)