OPÇÕES SOBRE CONTRATOS FUTUROS DE CAFÉ DA BM&F: TESTE DE MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

DALTON RODRIGUES DA SILVA LEITE
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. João Gomes Martines Filho

**Dissertação apresentada à Escola
Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz",
Universidade de São Paulo, para obtenção
do título de Mestre em Ciências, Área
de Concentração: Economia Aplicada.**

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Abril - 2000

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - Campus Luiz de Queiroz/USP

Leite, Dalton Rodrigues da Silva

Opções sobre contratos futuros de café: teste de modelos de precificação / Dalton Rodrigues da Silva Leite. - - Piracicaba, 2000.
195 p.

Dissertação (mestrado) - - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, 2000.
Bibliografia.

1. Café 2. Economia agrícola 3. Mercado futuro 4. Modelo matemático 5. Preço agrícola I. Título

CDD 338.17373

“Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor”

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradecemos a DEUS, que tudo nos provê, pela oportunidade de podermos aprofundar nossos conhecimentos técnicos e aprimorar nossa formação acadêmica.

Gostaríamos também de registrar os seguintes agradecimentos, sem qualquer preocupação de uma ordem de prioridade:

Ao Prof. Dr. João Gomes Martines Filho pela amizade, orientação, críticas e sugestões ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Ao professor Dr. Carlos José Caetano Bacha pela co-orientação na fase final do trabalho, pelas críticas, sugestões e pela participação no exame de qualificação e na banca examinadora. Ao professor Dr. Pedro Valentim Marques pelas críticas, sugestões e pela participação no exame de qualificação. À professora Dra. Míriam Rumenos Piedade Bacchi pelas críticas, sugestões e pela participação no exame de qualificação. Aos demais professores do Departamento de Economia, Administração e Sociologia da ESALQ pelas aulas ministradas e pelo auxílio nas dificuldades encontradas ao longo do curso.

À minha esposa Cintia e a minha filha Luiza pelo amor, apoio, atenção, cuidados e compreensão durante toda a duração do curso, sem os quais certamente não teríamos obtido o sucesso ora alcançado.

Aos meus pais, irmãos, tias e tios pelo amor e apoio no transcorrer de todo o curso.

Ao colega e amigo Bernardo Celso de Rezende Gonzalez pela amizade, idéia do tema e pelas revisões dos anteprojetos.

Ao Banco do Brasil, nas pessoas dos colegas Luis Luz - Superintendente Executivo da Unidade Gestão de Recursos de Terceiros (UGRT) - e William Bezerra Cavalcanti Filho - Gerente Executivo da Gerência de Operações Financeiras da Unidade de Finanças (UF), pelo interesse demonstrado pelo nosso trabalho e pela bolsa de estudo, que nos permitiu a dedicação integral ao curso.

Aos colega Francisco José Sampaio Castelo Branco - Gerente da Divisão de Renda Fixa da UGRT - pela co-orientação do trabalho, e aos demais colegas da UGRT e da UF pela ajuda e apoio durante os estágios realizados no Banco do Brasil no transcorrer do curso.

Aos funcionários da Agência Piracicaba do Banco do Brasil pelo apoio logístico durante nossa permanência na cidade.

Aos funcionários de DESR que direta ou indiretamente nos auxiliaram durante todo o transcorrer do curso.

Aos colegas de turma do mestrado pela amizade e pelo apoio e força nas horas de desânimo, em especial ao amigo e colega Alexandre Hattnher Menegário.

Aos diversos setores da BM&F, na pessoa do Superintendente de Mercados Agrícolas, Sr. Arnaldo Luiz Corrêa, pelo fornecimento dos dados e outras informações utilizadas para elaboração do trabalho.

Peço sinceras desculpas àqueles que porventura foram esquecidos aqui, o que certamente ocorreu, uma vez que este trabalho é sem dúvida o resultado de um grande trabalho em equipe, onde fomos apenas o coordenador e redator.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE FIGURAS.....	vi
LISTA DE TABELAS.....	viii
RESUMO.....	ix
SUMMARY.....	xi
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Apresentação.....	1
1.2 Objetivos.....	3
1.3 Organização do Trabalho.....	4
2 ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DO MERCADO DE CAFÉ.....	5
2.1 Características dos Mercados Físicos de <i>Commodities</i> Agrícolas.....	5
2.1.1 O Mercado Mundial de Café.....	7
2.1.2 O Sistema Agroindustrial Brasileiro do Café.....	10
2.2 O Mercado Futuro e de Opções sobre Futuro de Café.....	14
2.2.1 No Mundo.....	14
2.2.2 No Brasil.....	15
3 FUNDAMENTOS DO MERCADO DE OPÇÕES.....	20
3.1 Definição de Contrato de Opção.....	20
3.1.1 Opção de Compra (<i>call</i>).....	20
3.1.2 Opção de Venda (<i>put</i>).....	21
3.2 Tipos de Opções.....	21
3.3 Opções sobre Disponível e sobre Futuros.....	22
3.4 Operacionalização dos Contratos de Opções sobre Futuros.....	25
3.5 Teorema da Paridade entre <i>Calls</i> e <i>Puts</i>	27
3.5.1 Valores Limites para as Opções.....	27
3.5.2 Métodos Alternativos de Dedução do Teorema.....	30
3.6 Valor Intrínseco e Valor Tempo.....	36
3.7 Potencial de Lucro nos Mercados Futuros e de Opções sobre Futuros.....	37
4 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES.....	44
4.1 Modelos Analíticos.....	48
4.1.1 O Modelo de Black & Scholes.....	49

4.1.1.1 Hipóteses do Modelo.....	50
4.1.1.2 A Fórmula Analítica.....	53
4.1.1.3 As Letras Gregas.....	57
4.1.1.4 Críticas ao Modelo.....	59
4.1.2 O Modelo de Black.....	61
4.1.3 A Fórmula de Black & Scholes Generalizada.....	62
4.1.4 Alternativas ao Modelo de Black para o Cálculo do Preço de Opções sobre Futuros.....	63
4.1.4.1 Modelos para Opções Americanas.....	64
4.1.4.1.1 Modelo de Barone-Adesi & Whaley.....	64
4.1.4.1.2 Modelo de Bjerk Sund e Stensland.....	71
4.1.4.1.3 A Proposta de Chaudhury.....	73
4.1.4.2 Modelos para Opções Europeias.....	80
4.1.4.2.1 A Proposta de Myers e Hanson.....	81
4.1.4.2.2 Modelo de Miltersen e Schwartz.....	83
4.2 Métodos Numéricos.....	85
4.3 Modelos Considerados no Trabalho.....	87
 5 VOLATILIDADE.....	 90
5.1 Tipos de Volatilidade.....	91
5.2 Volatilidade Histórica.....	93
5.3 Volatilidade Implícita.....	95
5.3.1 Cálculo da Volatilidade Implícita.....	95
5.3.2 Volatilidade Implícita e a Precificação de Opções.....	97
5.4 Relação entre a Volatilidade Implícita e a Volatilidade Histórica.....	99
 6 METODOLOGIA E FONTE DE DADOS.....	 101
6.1 Procedimentos e Problemas em Testes Empíricos.....	101
6.2 Testes Estatísticos Utilizados.....	102
6.3 Dados Utilizados	111
 7 RESULTADOS DOS TESTES ESTATÍSTICOS.....	 115
 8 CONCLUSÕES.....	 121
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 125
 APÊNDICE A: Estratégias com Opções.....	 134
 APÊNDICE B: Métodos Numéricos.....	 147
 APÊNDICE C: Dados Utilizados e Valores Calculados pelos Modelos.....	 167

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1. Participação percentual do café nas exportações do Brasil de 1980 a 1999.....	10
Figura 2. Exportações brasileiras de café, por tipo, em US\$ mil, de 1991 a 1999.....	11
Figura 3. Comportamento dos preços (em US\$/saca 60kg) dos contratos futuros de café (1º. vencimento) da BM&F e da CSCE e do indicador BM&F-ESALQ de preços do café no mercado físico. Período: setembro de 1996 a agosto de 1999.....	18
Figura 4. Lucro potencial de uma posição comprada em contratos futuros pelo preço de R\$ 100,00.....	37
Figura 5. Lucro potencial de uma posição vendida em contratos futuros pelo preço de R\$ 100,00.....	39
Figura 6. Relação de lucro de uma posição comprada em opções de compra (C = R\$ 10,00 e X = R\$ 100,00).....	40
Figura 7. Relação de lucro de uma posição comprada em opções de venda (P = R\$ 10,00 e X = R\$ 100,00).....	41
Figura 8. Relação de lucro de uma posição vendida em opções de compra (C = R\$ 10,00 e X = R\$ 100,00).....	42
Figura 9. Relação de lucro de uma posição vendida em opções de venda (P = R\$ 10,00 e X = R\$ 100,00).....	43
Figura A1. Compra Put Sintética.....	139
Figura A2. Compra Call Sintética.....	140
Figura A3. Venda Put Sintética.....	140
Figura A4. Venda Call Sintética.....	140
Figura A5. Futuro Sintético - Venda.....	141
Figura A6. Futuro Sintético - Compra.....	141
Figura A7. Spread Alta (Call).....	141

Figura A8. Spread Alta (Put).....	142
Figura A9. Spread Baixa (Put).....	142
Figura A10. Spread Baixa (Call).....	142
Figura A11. Compra Straddle.....	143
Figura A12. Venda Straddle.....	143
Figura A13. Compra Strangle.....	143
Figura A14. Venda Strangle.....	144
Figura A15. Compra Butterfly.....	144
Figura A16. Compra Butterfly (Call).....	144
Figura A17. Compra Butterfly (Put).....	145
Figura A18. Venda Butterfly.....	145
Figura A19. Venda Butterfly (Call).....	145
Figura A20. Venda Butterfly (Put).....	146
Figura A21. Box Quatro Pontas.....	146
Figura B1. Representação de uma árvore binomial de dois estágios para opções.....	157

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1. Importância dos contratos agrícolas e de café na BM&F em 1998 e 1999.....	19
Tabela 2. Valores limites para opções dos tipos c_s , p_s , c_F , p_F , C_s , P_s , C_F e P_F	29
Tabela 3. Valor final de um <i>portfolio</i> sem risco, composto de uma unidade de uma ação, o lançamento de uma opção de compra dessa ação e a compra de uma opção de venda da mesma ação.....	31
Tabela 4. Valor final de um <i>portfolio</i> sem risco composto de uma posição comprada em futuros (<i>long futures</i>), uma posição comprada numa opção de venda sobre futuros (<i>long put</i>), uma posição vendida numa opção de compra sobre futuros (<i>short call</i>) e uma posição em um título (<i>bond</i>) livre de risco com valor de face de $F_{t,T} - X$	35
Tabela 5. Comparação dos métodos MA, MB, MC e MR com o método de aproximação quadrática de Barone-Adesi & Whaley em relação a alguns aspectos selecionados.....	80
Tabela 6. Resultados dos testes de <i>RMSE</i> aplicados aos modelos.....	116
Tabela 7. Resultados dos testes <i>t</i> entre os valores de mercado das opções e os valores calculados pelos modelos.....	117
Tabela 8. Resultados dos testes <i>t</i> entre os valores das opções calculados pelos diferentes modelos (com o mesmo cálculo da volatilidade).....	118
Tabela 9. Resultados dos teste de <i>RMSE</i> aplicados aos métodos de cálculo da volatilidade.....	119
Tabela 10. Resultados dos testes <i>t</i> entre os valores da volatilidade real e das volatilidades implícita (<i>volrealvolimplic</i>) e histórica (<i>volrealvolhist</i>), e entre as volatilidades histórica e implícita (<i>volhistvolimplic</i>).....	120
Tabela C1. Dados utilizados e valores calculados pelos modelos.....	168

OPÇÕES SOBRE CONTRATOS FUTUROS DE CAFÉ DA BM&F: TESTES DE MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

Autor: Dalton Rodrigues da Silva Leite

Orientador: Prof. Dr. João Gomes Martines Filho

RESUMO

O presente trabalho compara e testa os valores teóricos obtidos por alguns dos modelos de precificação de opções (modelos de determinação dos preços das opções) existentes na literatura em relação aos preços efetivos de opções sobre contratos futuros de café, com vencimento entre fevereiro de 1997 e agosto de 1999, negociados na Bolsa de Mercadorias & Futuros.

O mercado de opções sobre contratos futuros de café foi escolhido devido à grande importância econômica desta *commodity* para o País, o que explica o fato deste mercado ser intensamente estudado em diversos aspectos. Não há, porém, nenhum trabalho publicado, até a presente data, que tenha analisado o assunto desta dissertação.

O objetivo de um modelo de precificação de opções é fornecer um valor que, consideradas as restrições feitas na concepção do modelo, pode ser considerado como o "valor teórico" a ser pago/recebido na compra/venda de uma determinada opção. Com base nesse valor, os participantes do mercado podem otimizar suas atuações.

Para o cumprimento do objetivo acima colocado, são apresentados os fundamentos do mercado de opções e os principais modelos de precificação que podem ser utilizados na determinação dos preços das opções sobre contratos futuros. Analisa-se, também, com maior profundidade, as características e os métodos de estimação da

volatilidade futura dos preços - a principal variável de qualquer modelo de precificação de opções.

Os resultados desta pesquisa demonstram que o modelo que melhor representou o mercado de opções sobre contratos futuros de café, no período analisado, foi o Modelo de Black quando utilizando-se da volatilidade implícita como previsão da volatilidade futura, embora esse modelo não tenha obtido unanimidade estatística em todos os grupos de opções estudados.

A volatilidade implícita, no entanto, foi invariavelmente maior do que a volatilidade histórica, e a volatilidade histórica foi quem melhor representou a volatilidade futura calculada *ex-post*. Assim, sabendo-se que quanto maior for o valor da volatilidade maior será o valor da opção, os resultados obtidos sugerem que a posição vendedora foi mais lucrativa que a posição compradora no período analisado. Tal fato deve-se, provavelmente, à falta de liquidez desse mercado, o que determina que os lançadores de opções exijam um alto prêmio pelo risco, que é refletido em uma alta volatilidade implícita.

Os resultados obtidos sugerem que os valores fornecidos pelos modelos de precificação de opções para mercados ilíquidos, como o analisado neste trabalho, devem ser usados com muito critério, pois podem induzir à realização de negócios não lucrativos.

OPTIONS ON COFFEE FUTURES CONTRACTS AT BM&F: TESTS OF PRICING MODELS

Author: Dalton Rodrigues da Silva Leite

Adviser: Prof. Dr. João Gomes Martines Filho

SUMMARY

This study compares and tests price calculated according to some options pricing models available in the literature with effective prices of options on coffee futures contracts negotiated at the Bolsa de Mercadorias & Futuros, BM&F, from February 1997 to August 1999. The options market on coffee futures contracts is chosen due to its economic importance among the Brazilian agricultural commodities in the period in which the data were available.

The main purpose of an option pricing model, given its restrictions on its conception, is to generate a value that can be assumed as a fair value to be traded and the participants of this market can optimize their performances when using it.

For most in this thesis, the fundamentals of the options market and the important options on futures pricing models are discussed. Also, the features and computational methods of future price volatility are analyzed - the main variable of any options pricing models.

Among all the models studied in this thesis, the Black model when using implicit volatility to forecast the future volatility shows the best performance. However, this model was not statistically significant in all group of options analyzed.

The implicit volatility shows to be higher than the historical volatility. On the other hand, the historical volatility, in an ex-post analysis, showed to be a better forecast of future volatility. Given that the higher volatility gives the higher option's premium, these results show that short position on options gave a higher return than long positions, during the time frame analyzed in this study. This can be explained by the low liquidity in this market – writers of options will ask higher premium which reflects in higher implicit volatility.

These results also point out to an important conclusion that options pricing models in an insufficient liquidity market may be approached with caution. The use of these models in these markets can be harmful. There is a risk of loss with trading options when using these models.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

Este estudo testa os valores teóricos fornecidos por alguns modelos de precificação de opções sobre futuro em relação aos preços efetivos de opções sobre futuro de café, negociadas na BM&F, com vencimentos¹ entre fevereiro de 1997 e agosto de 1999.

Este período antecede a internacionalização das negociações com contratos agrícolas na BM&F, iniciada em 8 de dezembro de 1999, e que, no primeiro momento, concentraram-se nos contratos futuros de café. O pouco tempo decorrido dessa internacionalização (e, portanto, as poucas informações disponíveis) não permite, ainda, a sua inclusão em nossa análise.

O termo "precificação de opções" é utilizado para designar a utilização de modelos matemáticos para valorar contratos de opções, ou seja, determinar seu preço. Uma importante variável desses modelos é a volatilidade futura. Esta é o desvio padrão dos retornos de curto prazo de um ativo (valorado pelo seu preço futuro) expresso em percentual ao ano. O valor da volatilidade futura é o grande enigma de qualquer modelo de precificação de opções.

Um contrato de opção dá ao seu titular, ou comprador, mediante o pagamento de um valor (preço ou prêmio da opção), o direito, mas não a obrigação, de comprar ou

¹ Os contratos de opções vencem um mês antes dos contratos futuros aos quais se referem.

vender algo (o ativo básico da opção) por determinado valor em uma época futura pré estabelecida. O vendedor, ou lançador, do contrato de opção tem a obrigação respectivamente de vender ou comprar o ativo básico da opção, caso o comprador venha a exercer seu direito. Para tanto, o vendedor recebe, no ato da venda, o prêmio da opção.

Os contratos de opção propiciam aos agentes econômicos oportunidade para administrar o risco de flutuação de preço ao qual estão sujeitos. Há dois tipos de opções: a européia e a americana. A primeira não permite a liquidação antes do vencimento, a segunda permite esta alternativa.

A idéia básica por trás dos modelos de precificação é a de fornecer um valor que, respeitadas as restrições impostas na concepção dos modelos, pode ser considerado como o "valor teórico" para compra e ou venda do referido contrato de opção.

Como sempre há entre os modelos de precificação uma ou mais premissas desiguais e ou a utilização de diferentes tratamentos matemáticos, pode-se sempre supor que os preços gerados por esses modelos, no apreçamento de uma determinada opção, podem diferir entre si. Dessa forma, conhecer um modelo de precificação de opções que expresse, da melhor forma possível, o comportamento das opções negociadas no mercado pode auxiliar os agentes econômicos na tomada de decisão e contribuir para a eficiência do mercado, evitando retornos anormais.

A cultura do café possui grande importância econômica para o país, tendo sido objeto de constantes estudos, tanto de seus aspectos agrônômicos quanto econômicos. Entre os contratos agrícolas negociados na BM&F, os contratos de café são os que possuem maior liquidez. Martits (1998) estudou os fatores que afetam o sucesso/fracasso dos contratos futuros agrícolas negociados na BM&F e concluiu que há algumas características do setor agroindustrial do café que são responsáveis pelo relativo sucesso desses contratos.

No Brasil há alguns trabalhos sobre teste de modelos de precificação, porém, todos relacionados ao mercado de opções de ações, como por exemplo, Barreto & Baidya (1987), Vitiello Júnior (1998) e Rochman (1998). Não há, entretanto, nenhum trabalho publicado, até a presente data, que tenha avaliado como os preços praticados no mercado de opções sobre contratos futuros de café se aproximam ou diferem dos valores sugeridos por modelos de precificação. Essa avaliação é, por sua vez, importante para detectar possíveis comportamentos erráticos dos agentes que operam com opções sobre contratos futuros de café.

1.2 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é comparar e testar os valores teóricos obtidos por alguns dos modelos de precificação de opções sobre futuros com os preços efetivos de opções sobre contratos futuros de café da BM&F.

Como objetivos específicos, tem-se:

- expor os principais modelos de precificação de opções existentes na literatura e que podem ser utilizados para opções sobre futuros;
- calcular os prêmios das opções utilizando diferentes modelos de precificação e métodos de estimação da volatilidade futura;
- testar os valores teóricos dos prêmios fornecidos pelos modelos com os valores negociados pelo mercado; e,
- verificar qual método de estimação da volatilidade futura dos preços dos contratos futuros de café melhor representa a volatilidade real desse ativo medida *ex-post*.

Ao se alcançar os objetivos propostos espera-se disponibilizar uma investigação científica sobre o tema aos integrantes deste mercado, de modo a contribuir para a otimização da suas atuações.

1.3 Organização do trabalho

Esta pesquisa está organizada em oito capítulos, incluindo esta Introdução. No capítulo 2, apresenta-se algumas características do mercado de café, com o propósito de mostrar sua importância econômica para o país e de situar os mercados futuro e de opções nesse contexto. No capítulo 3, faz-se uma apresentação dos fundamentos do mercado de opções, procurando contextualizar o ambiente no qual se formam os preços das opções. No capítulo 4 está a exposição dos principais modelos de precificação de opções encontrados na literatura que, apesar de não terem sido construídos especificamente para precificar opções sobre contratos futuros, podem ser utilizados para este fim. O capítulo 5 trata, especificamente, das características e métodos de estimação da principal variável dos modelos de precificação - a volatilidade futura. O capítulo 6 apresenta os problemas encontrados em testes empíricos, a fonte dos dados e a metodologia usada nesta pesquisa. O capítulo 7 analisa os resultados da pesquisa. Finalmente, o capítulo 8 reúne as conclusões obtidas e algumas sugestões para futuras pesquisas sobre o tema central desta dissertação.

2 ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DO MERCADO DE CAFÉ

Este capítulo destaca algumas características do mercado de café no Mundo e no Brasil. No item 2.1 são analisados os mercados físicos e no item 2.2 os mercados futuros e de opções.

2.1 Características dos mercados físicos de *commodities* agrícolas

A maioria dos processos produtivos ao longo de todo o agribusiness está sujeita a uma série de riscos e incertezas. O segmento agrícola é afetado pelo risco de produção, resultante da interação entre as variáveis edafo-climáticas, fitossanitárias, topográficas, etc., além de estar sujeito ao risco de preço. Esse último é particularmente grave na agricultura devido à sua natureza competitiva. Dado o elevado número de produtores agrícolas, eles são incapazes de determinar o preço de seus produtos, sendo considerados "tomadores" de preço. Isto é, cada produtor, tomado individualmente, representa uma parcela muito pequena da oferta total e, sendo os produtos relativamente homogêneos, nenhum deles pode afetar de maneira significativa o preço do seu produto.

Para muitos produtos agrícolas, existe o que é conhecido como época de safra e de entressafra. A safra, por ser um período de maior oferta, é caracterizada por preços geralmente mais baixos. Na época de entressafra a oferta de produto é menor e, com isso, o preço tende a ser mais elevado. Esse comportamento dos preços, característico dos produtos agrícolas, é conhecido como sazonalidade de preços.

Considerando que a demanda apresenta um comportamento mais estável ao longo do tempo, o ajuste de preços nos mercados agrícolas sofre uma grande influência do comportamento da oferta. Como a oferta da maioria dos produtos agrícolas é sazonal ao longo do tempo, o preço também o será. Vale ressaltar que, como essa sazonalidade está diretamente relacionada ao comportamento do processo produtivo, as variações de preços a ela atribuídas já são esperadas pelos agentes, embora tais variações sejam de difícil dimensionamento.

Além das variações sazonais de preços, há oscilações causadas por mudanças inesperadas na oferta ou demanda. Os fatores climáticos são os principais causadores de mudanças repentinas e imprevisíveis na oferta de determinado produto agrícola. Há, porém, diversos outros fatores que podem causar essas variações repentinas, entre os quais pode-se citar: problemas fitossanitários, liberação de estoques do governo, diminuição ou extinção de tarifas de importação, mudanças na política cambial, etc.

A cultura do cafeeiro, como uma típica *commoditie* agrícola, sofre os efeitos de todos os fatores acima citados. No aspecto climático, por exemplo, a ocorrência de geadas, excesso de chuvas ou seca na floração podem comprometer a produção do ano seguinte. A liberação de estoques do governo, feita nos anos de safra pequena e/ou oferta insuficiente, através de leilões do Ministério responsável pelo gerenciamento destes estoques, afeta diretamente o preço no mercado físico. As mudanças na política cambial também afetam o preço do café, já que o mesmo é uma *commoditie* exportada.

Os principais agentes envolvidos no mercado de produtos agrícolas são os vendedores (principalmente os produtores e suas cooperativas) e os compradores (exportadores, indústrias de transformação, intermediários, varejistas, etc.). Todos defrontam-se com riscos de preço.

Como consequência da crescente profissionalização do setor, da redução da intervenção governamental e da diminuição da inflação, vem crescendo o interesse do mercado por instrumentos modernos de transferência de risco e proteção da safra.

Entre as alternativas atualmente existentes, pode-se destacar o mercado a termo (como a CPR - Cédula de Produto Rural), o mercado futuro e o **mercado de opções**.

Os participantes do mercado de café têm feito bastante uso dos mecanismos alternativos de transferência de risco. Apenas para se ter uma idéia de valores, Gonzalez (1999) constatou que, das CPRs avalizadas pelo Banco do Brasil no ano de 1998 (até o mês de julho), 55,2% referiam-se a CPRs de café. Já o mercado futuro de café é o mais líquido dos mercados agrícolas da BM&F, tendo negociado no ano de 1998 o equivalente a 57,5% da safra brasileira (Resenha BM&F n. 128 - nov/dez 1998). O mercado de opções sobre contratos futuros de café, embora ainda incipiente, é o único que possui alguma expressão dentre os contratos de opção sobre futuros agrícolas negociados na BM&F.

Gonzalez (1999) concluiu, das suas entrevistas com produtores de café dos estados de São Paulo e Minas Gerais, que a idéia de "seguro", transmitida pelas opções, é de fácil assimilação e aceitação pelos produtores. Além disso, para um produtor agrícola atuar em mercados futuros há um grau razoável de dificuldade por diversos motivos, entre os quais a complexidade inerente ao acompanhamento desses mercados.

2.1.1 O mercado mundial de café

O café é uma das mercadorias mais transacionadas internacionalmente, o que pode ser parcialmente explicado pelo fato da produção estar concentrada em países tropicais ou subtropicais do hemisfério sul, enquanto os maiores consumidores estão no hemisfério norte (norte-americanos e europeus). O Brasil é o principal produtor e exportador mundial de café, seguido pela Colômbia (<http://www.usda.gov> - 1999).

Existem muitas espécies e variedades de café. As espécies de importância econômica são o *Coffea arabica* e o *Coffea Cannephora* (conhecida como Robusta). A primeira é a mais conhecida e cultivada principalmente na América do Sul e Central e no Quênia e na Tanzânia na África, fornecendo cerca de 70% do produto comercializado. Pode-se dividir ainda o café arábica em lavado e não lavado, de acordo com a tecnologia empregada. A segunda espécie é cultivada em maior escala na Costa do Marfim, Angola, Uganda, Índia e vários outros países da África, Ásia e Oceania. O Brasil produz os dois cultivares de café: o arábica (principalmente o não lavado) e o robusta, no Brasil conhecido como *conillon*. O primeiro é característico dos estados de Minas Gerais, São Paulo e Paraná. O segundo é plantado, principalmente, no estado do Espírito Santo.

Os cafés dos tipos arábica não lavado e robusta são tidos como cafés de menor qualidade em relação ao arábica lavado. O consumo de café é essencialmente voltado para bebida, tendo também alguma importância como aromatizante para produtos alimentícios.

Segundo Martits (1998), existe uma maior procura, por parte dos países importadores, pelo café do tipo arábica lavado, enquanto os tipos de cafés mais produzidos pelo Brasil, arábica não lavado e robusta, apresentam uma menor demanda, entrando principalmente como complemento no processamento das torrefadoras estrangeiras. Outros fatores, no entanto, também afetam a demanda pelo café brasileiro no mercado mundial. Um exemplo disto ocorre no mercado europeu de café solúvel, onde não são cobrados impostos de importação sobre o café colombiano, enquanto o café brasileiro sofre a incidência destes impostos.

De acordo com Bacha (1998), a cafeicultura brasileira apresenta três tipos de comportamento cíclicos dos preços e/ou produção: o ciclo plurianual, o ciclo bienal e o ciclo intra-anual (o qual implica variação sazonal de preços).

A cultura do cafeeiro por ser perene e demandar certo tempo entre o plantio e o início, e posterior maturidade da produção, apresenta comportamento distinto de preços e produção ao longo dos anos, formando ciclos plurianuais. Estes ciclos têm durações irregulares e são influenciados ainda por diversos fatores, como as políticas internas de sustentação de preço, adversidades climáticas e pelos efeitos do acordo entre os principais países produtores de café (como a Associação dos Países Produtores de Café - APPC²).

O ciclo bienal ocorre como consequência do esgotamento da planta, onde uma boa florada em um ano gera um esgotamento da planta no ano seguinte. Finalmente, pelo fato do cafeeiro não gerar uma produção contínua ao longo do ano, ocorrem variações intra-anuais dos preços.

Devido ao ciclo intra-anual, o preço do café ao longo do mesmo ano é influenciado, assim como outras mercadorias agrícolas, pelos períodos de safra e entressafra. A safra brasileira ocorre normalmente entre os meses de junho e agosto. O período final do ano e início do ano seguinte caracteriza a entressafra cafeeira no Brasil, coincidindo com o inverno no hemisfério norte, quando há maior consumo deste produto, justificando assim um aumento de preços no mercado internacional entre os meses de dezembro a maio.

No entanto, Bacha (1996) diz que a ocorrência de geadas, ou o excesso de chuvas ou seca na floração afetam a safra do ano seguinte, incentivando os produtores de café a formar estoques no ano de ocorrência das adversidades climáticas para poderem atender à demanda do ano seguinte, de baixa produção e preços favoráveis. Esta prevenção por parte dos produtores acaba afetando a sazonalidade do preço do café durante o ano, muitas vezes elevando o preço da mercadoria nos meses de safra. Assim, a política de estocagem dos exportadores e importadores altera sensivelmente a sazonalidade do

² A APPC, criada em setembro de 1994, controla atualmente as cotas de exportação de 14 dos principais países produtores.

preço do café, provocando altas ou baixas de acordo com as previsões do mercado quanto à produção nos períodos seguintes.

2.1.2 O sistema agroindustrial brasileiro do café³

O Brasil é um dos países de maior vantagem comparativa na produção de café. Entretanto, a regulamentação do Sistema Agroindustrial (SAG) do café, que vigorou por quase um século, contribuiu para o aumento da produção em outros países e a perda de participação do Brasil no mercado internacional.

O SAG do café é um dos mais tradicionais e importantes na geração de renda para a economia brasileira. As Figuras 1 e 2 mostram a dimensão das exportações brasileiras de café, por tipo, e sua participação nas exportações totais do Brasil.

Figura 1 - Participação do café nas exportações do Brasil - 1980 a 99 (Fonte: Conselho dos Exportadores de Café Verde do Brasil - CECAFÉ)

³ Esse tópico está baseado em Farina et al. (1998).

Figura 2 - Exportações brasileiras de café, por tipo, em US\$ mil, de 1991 a 1999 (Fonte - CECAFÉ)

Em 1999 as exportações de café foram responsáveis por 12,92% do total das exportações agrícolas brasileiras, representando US\$ 2,44 bilhões de divisas com exportação (<http://www.mdic.gov.br>).

Apesar desse resultado favorável, a participação do Brasil no mercado internacional do café tem sido decrescente. Na década de 60, o Brasil chegou a deter mais de 36% do total das exportações mundiais de café, ao passo que nos anos 90, a participação situava-se em torno de 23%. A produção brasileira de café nos últimos 30 anos não tem conseguido ultrapassar, em média, o patamar de 25 milhões de sacas.

Desde o início da década de 90, o SAG tem experimentado a liberdade de mercado. Quanto à competitividade revelada⁴ brasileira, em termos gerais ela pouco se alterou, sendo que em alguns dos segmentos, como no caso da indústria de solúvel, deteriorou-se.

⁴ Competitividade revelada diz respeito à avaliação da competitividade de um agente econômico considerando-se apenas seu *market share* (participação de mercado).

Em certa medida, pode-se imputar este desempenho a uma conjuntura bastante adversa. Em primeiro lugar, a queda vertiginosa dos preços internacionais no início dos anos 90 reduziu drasticamente a lucratividade do segmento produtor. Em seguida, em 1994, quando os preços já iniciavam uma recuperação, a cafeeicultura sofreu graves problemas climáticos. Nessa época (1994), a indústria de café solúvel nacional passou a sofrer fortes estrangulamentos no fornecimento de matéria-prima, refletindo em perda de participação no mercado internacional.

A safra em 1995 ficou reduzida a 16,8 milhões de sacas, cerca de 40% menor que a obtida no ano anterior. A inexistência de uma política de financiamento à comercialização não permitiu que os produtores se beneficiassem dos preços elevados com a escassez. Até a safra 97/98, a produção brasileira ficou aquém da soma das demandas doméstica e externa, o que contribuiu para os preços internacionais serem bastante atraentes.

O incentivo dos preços acabou revertendo a tendência de redução das lavouras cafeeiras. Para a safra 1999/00 se estima uma população cafeeira de 3.541 milhões de pés (MDIC) ante 3.120 milhões em 1993/94 (USDA). O movimento de expansão da produção nestes últimos anos está se dando com aumento da produtividade, em decorrência da maior participação do cultivo adensado e de índices de utilização de tratos culturais superiores aos observados no período anterior a 1993 (Federação da Agricultura de Minas Gerais - FAEMG, 1996). Com isto, o que se espera para os próximos anos é um retorno a grandes safras e a preços mais baixos.

A exemplo do Brasil, os preços altos estão atraindo produtores do mundo inteiro. Cabe destacar os países da Ásia, notadamente o Vietnã. Este país, entre 1991 e 1998, apresentou um crescimento das exportações da ordem de 440% (1.201 mil para 6.471 mil sacas de 60kg, respectivamente; sendo que as projeções para a safra 99/00 do USDA apontam para 6.700 mil sacas), tornando-se o maior exportador e produtor mundial de café robusta. Há dez anos o Vietnã produzia menos de 400 mil sacas de café por ano. O

exemplo deste país sugere que, com poucas barreiras à entrada na produção de café verde, a médio prazo a alta dos preços se reverterá devido ao aumento da produção mundial.

Farina et al. (1998) cita que no mercado interno, desde a desregulamentação, as empresas torrefadoras têm se defrontado com rápidas mudanças no seu ambiente competitivo. Uma delas é o crescimento da demanda. Esta foi uma das mais importantes conquistas da indústria nestes últimos anos. A tendência decrescente do consumo per capita de café, que se verificava no início da década, conseguiu ser revertida, e isso se explica, ao menos em parte, pela melhoria da imagem do café entre os consumidores brasileiros. Além disso, houve o momento propício criado a partir do Plano Real, quando o consumo de bebidas aumentou significativamente no Brasil. O consumidor brasileiro está aprendendo que o café possui tipos e qualidades diferentes, com a introdução de produtos diferenciados no mercado. Esta estratégia tornou-se tão presente, que, nos últimos anos, passou a despertar a atenção de empresas internacionais.

No mercado interno, o consumo de café tem sido inferior aos 6 quilos/habitante, observados na década de 60. Embora a tendência de queda tenha sido revertida a partir de meados dos anos 90, o consumo brasileiro de café ainda está em torno de 3,7 quilos/habitante.

De uma forma geral, os diagnósticos realizados sobre o SAG do café atribuem a perda de competitividade à regulamentação, que se manteve presente em quase um século da história desse sistema. Mesmo com a desregulamentação, vigente desde o início dos anos 90, a competitividade revelada do sistema pouco se alterou. Em parte, esse resultado deve-se à conjuntura bastante adversa que o sistema tem enfrentado desde então, tais como restrição da oferta (decorrente de geadas) e endividamento geral do sistema. De outra parte, a perda de competitividade do SAG do café pode ser atribuída também a baixa capacidade de coordenação dos agentes do sistema para se adequar às novas regras competitivas do mercado.

Nos tradicionais mercados importadores de café do Brasil, observa-se a estagnação do consumo de café *commodity vis-à-vis* o crescimento do consumo de cafés especiais. Mas, apesar dos atributos de qualidade serem requeridos pelo mercado, no SAG do café brasileiro as transações genéricas, que não premiam a qualidade, tendem a predominar.

2.2 O mercado futuro e de opções sobre futuro de café

Inicialmente, examina-se algumas características destes mercados no mundo (subitem 2.2.1) e, em seguida, no Brasil (subitem 2.2.2).

2.2.1 No Mundo

Em 1982, a *Commodity Futures Trading Commission* (CFTC⁵) liberou a negociação de opções sobre futuros, em bases experimentais, nas Bolsas de *Commodities* dos Estados Unidos. Nessa época, Wolf (1982) afirmou que o sucesso desses contratos dependeria de como eles fossem desenhados, da familiaridade do *floor trader* (operador de pregão) com os contratos e de como sua negociação seria vista pelos integrantes da *Futures Commission Merchants* (FMC).

Diversas normas foram impostas para o lançamento dessas opções⁶, dentre as quais pode-se citar como as de maior importância:

- seriam permitidas opções de compra e de venda;
- as opções deveriam ser americanas⁷;
- o prêmio deveria ser pago integralmente no ato da compra da opção;

⁵ A CFTC é a principal agência regulatória da indústria de futuros dos Estados Unidos.

⁶ Até aquela data as opções sobre futuros de *commodities* agrícolas ainda estavam proibidas.

⁷ Opções americanas são aquelas em que o seu detentor pode exercer o seu direito a qualquer momento entre a compra e o vencimento das mesmas.

- o exercício de uma opção de compra (venda) estabeleceria uma posição comprada (vendida) em futuros por registro contábil;
- os diferentes preços de exercício seriam predeterminados para todos os níveis de preços possíveis; e,
- as opções expirariam aproximadamente dez dias antes do primeiro dia de entrega do contrato futuro básico da opção.

A autorização permanente para a negociação dessas opções nas bolsas de *commodities* americanas só ocorreu em 1987.

Nos Estados Unidos, a *Coffee, Sugar and Cocoa Exchange* (CSCE) é quem negocia contratos futuros e de opções sobre futuros de café arábica. Na Europa, a *London Intl. Finl. Futures & Options Exchange* (LIFFE) negocia contratos futuros e de opções sobre futuros de café robusta.

2.2.2 No Brasil

A Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F) é atualmente a única Bolsa onde são realizados negócios com contratos futuros agropecuários no Brasil. A história da BM&F tem origem na Bolsa de Mercadorias de São Paulo (BMSP), primeira bolsa de *commodities* agropecuárias brasileiras, fundada em 1917. Embora no início houvesse uma preocupação com os aspectos de produção, classificação, etc., no ano seguinte ao da sua fundação (1918) foram iniciadas operações futuras de algodão. Nas décadas de 70 e 80, a BMSP lançou vários contratos agropecuários para negociação. Em 1986, constitui-se a Bolsa Mercantil & de Futuros (BM&F) que, em maio de 1991, uniu-se à Bolsa de Mercadorias de São Paulo, dando origem à Bolsa de Mercadorias & Futuros (mantendo a sigla BM&F).

Em setembro de 1999 a BM&F classificava-se, em volume de contratos negociados, como a décima maior do mundo, de acordo com levantamento da *Futures*

Industry Association (RESENHA BM&F n. 134, setembro 1999), ficando abaixo das seguintes bolsas: Eurex Deutschland (EUREX), Chicago Board of Trade (CBOT), Chicago Mercantile Exchange (CME), London Intl. Finl. Futures & Options Exchange (LIFFE), New York Mercantile Exchange (NYMEX), Marché des Options Negociables de Paris (MONEP), Korea Stock Exchange (KSE), London Metal Exchange (LME) e Chicago Board Options Exchange (CBOE).

O número de contratos agropecuários negociados em 1999 na BM&F (Resenha BM&F n. 136, dez 1999) foi de 551.734 contra um total geral de 55.931.098 (menos de 1%). Com relação ao volume financeiro, os números são de US\$ 4.921.144,00 contra US\$ 2.383.731.969,00 (cerca de 0,2%), o que é muito pouco diante do potencial agropecuário do Brasil.

Por uma série de razões, os mercados futuros agropecuários têm demorado a se desenvolver no Brasil, embora na década de 80 tenham tido um desempenho relativamente bom, negociando-se contratos de café, frango, boi, bezerro, algodão, etc. Atualmente, são negociados contratos de boi gordo (330 @ líquidas), soja (450 sacos de 60kg), café arábica (100 sacas de 60kg), açúcar cristal (270 sacas de 50kg), algodão em pluma (12.750kg) e milho (450 sacos de 60kg).

A pequena utilização dos mercados futuros e de opções sobre futuros agropecuários, no Brasil, pode ser atribuída principalmente à baixa liquidez desses mercados. Martits (1998) cita que a análise do custo de liquidez de um contrato pode ser vista também como uma forma de análise do sucesso ou fracasso dos contratos, ou seja, quanto maior o custo de liquidez, menor o sucesso dos contratos.

Este mesmo autor analisou o custo de liquidez dos contratos futuros agrícolas na BM&F, considerando o seguinte:

- a) características do mercado à vista;
- b) características econômicas e culturais;
- c) características dos mercados futuros.

Martits conclui, quanto aos contratos futuros de café da BM&F, que eles são os de maior sucesso dentre todos os demais devido, principalmente, aos seguintes fatores:

- amplitude e abrangência do setor,
- grande parte da produção voltada para exportação,
- baixa concentração industrial,
- competitividade internacional do café brasileiro,
- o indicador à vista da BM&F é altamente correlacionado com o preço das principais regiões produtoras internas e com o preço internacional (servindo como referência tanto para vendas internas com para exportações), e
- alta volatilidade do preço à vista.

Segundo Martits (1998), existe uma alta correlação entre os preços à vista dado pelo indicador ESALQ-BM&F e os preços do primeiro vencimento da BM&F e da CSCE. A Figura 3 mostra como se comportaram nos últimos anos os preços dos contratos futuros de café negociados na BM&F e na CSCE (1º vencimento), além do indicador ESALQ-BM&F do café.

Stein (1990), examinando os mercados de opções de *commodities*, do ponto de vista de estratégias de especulação, afirma que são ilíquidos os mercados de opções desses ativos onde o número médio de contratos negociados diariamente se situe abaixo de 2000. O autor ressalta, porém, que mercados onde esse número se situe entre 800 e 2000 podem ser considerados negociáveis, do ponto de vista da montagem de estratégias especulativas lucrativas. Schwager (1995) considera ilíquidos os mercados onde o

número de contratos futuros em aberto (*open interest*) se situe abaixo de 5.000, ou que o volume médio de contratos negociados diariamente esteja abaixo de 1.000.

Pela classificação de Stein acima, o mercado de opções sobre contratos futuros de café na BM&F pode ser considerado ilíquido (ver tabela 1). Não obstante, é o mais líquido dentre os agropecuários. Com a internacionalização da BM&F, ocorrida em 08/12/99, espera-se que a liquidez das operações futuras com café aumentem.

Figura 3 - Comportamento dos preços (em US\$/saca 60kg) dos contratos futuros de café (1º. vencimento) da BM&F e da CSCE e do indicador BM&F-ESALQ de preços do café no mercado físico. Período: setembro de 1996 a agosto de 1999 (Fonte - CEPEA).

A Tabela 1 mostra a participação dos contratos agrícolas em relação ao total dos contratos negociados na BM&F, e a participação dos contratos de café (futuros e de opções) em relação ao total dos contratos agrícolas negociados nesta bolsa. Examinando os números apresentados, constata-se a grande importância dos contratos de café entre os contratos agrícolas.

Tabela 1 - Importância dos contratos agrícolas e de café na BM&F em 1998 e 1999

	Número de Contratos Negociados (mil)		Volume Financeiro (US\$ milhões)		Média Diária de Contr. Negociados	
	1998	1999	1998	1999	1998	1999
Total de Contratos da BM&F (A)	87.015	44.056	5.863.850	2.046.177	353.720	179.090
Contratos Agrícolas (B)	382,66	551,73	3.794,38	4.921,14	1.556	2.243
Contratos de Café (C)	217,62	365,50	2.754,95	3.969,23	885	1.486
Opções sobre Futuros Agrícolas (D)	18,43	42,93	12,01	29,51	75	175
Opções sobre Futuro de Café (E)	17,92	42,92	11,99	29,51	73	174
Relações (B/A)	0,44%	1,25%	0,06%	0,24%	0,44%	1,25%
(Valores em %) (C/B)	56,87%	66,25%	72,61%	80,66%	56,87%	66,25%
(E/D)	97,22%	99,98%	99,81%	99,99%	97,22%	99,98%

Fonte: BM&F

3 FUNDAMENTOS DO MERCADO DE OPÇÕES

Neste capítulo são analisados os principais fundamentos do mercado de opções, visando melhorar o entendimento do assunto e contextualizar o ambiente no qual se dá a formação de preços das opções.

3.1 Definição de contrato de opção

Um contrato de opção dá a seu titular, ou comprador, um direito futuro sobre algo, mas não uma obrigação; e a seu vendedor, ou lançador, uma obrigação futura. As opções podem ser de dois tipos básicos, quais sejam: opções de compra (*call*) e opções de venda (*put*).

3.1.1 Opção de compra (*call*)

As opções de compra dão ao seu titular o direito de comprar algo (o objeto da negociação), por determinado preço (preço de exercício) e em determinada data futura (vencimento ou expiração). Desse modo, através do pagamento de um prêmio (preço da opção), o titular de uma *call* garante o preço máximo de compra do bem. O vendedor (lançador) de uma *call* possui a obrigação de vender o objeto da negociação em uma data futura (vencimento ou expiração) por um preço predeterminado (preço de exercício), caso o comprador venha a exercer o seu direito. O lançador recebe, no ato da venda, o valor do prêmio (preço da opção).

Vale ressaltar que a única obrigação do comprador da opção é o pagamento do prêmio. Já o lançador da opção é obrigado a fazer um depósito inicial em dinheiro

(margem), cujo valor é definido pela Bolsa, e ajustá-lo diariamente em função da oscilação do preço do ativo básico da opção.

3.1.2 Opção de venda (*put*)

As opções de venda dão ao seu titular o direito de vender algo (o objeto da negociação), por determinado preço (preço de exercício) e em determinada data futura (vencimento ou expiração). Desse modo, mediante o pagamento de um prêmio (preço da opção), o titular de uma *put* garante o preço mínimo de venda do bem. O vendedor (lançador) de uma *put* possui a obrigação de comprar o objeto da negociação em uma data futura (vencimento ou expiração) por um preço predeterminado (preço de exercício), caso o comprador venha a exercer o seu direito. O lançador recebe, no ato da venda, o valor do prêmio (preço da opção).

Como acontece com o lançador da opção de compra, o lançador da opção de venda também está sujeito às mesmas regras de depósito de margem e ajuste diário da mesma.

Das definições de opções de compra e de venda, pode-se inferir que as principais características de uma opção são: o ativo a que se refere, o preço de exercício, a data de vencimento e, logicamente, o valor do seu prêmio.

3.2 Tipos de opções

Já se definiu, anteriormente, as opções de compra (*call*) e de venda (*put*). Há, porém, outras classificações das opções que merecem ser colocadas a fim de possibilitar uma melhor compreensão do texto.

a) Quanto ao exercício:

- Opção Européia: opção que só pode ser exercida na data de vencimento.
- Opção Americana: opção que pode ser exercida em qualquer data entre a sua compra e o seu vencimento.

b) Quanto a relação entre o preço de exercício e o preço corrente do ativo objeto de negociação ($F_{t,T}$ no caso de ser um contrato futuro e S no caso de uma ação):

- Opção no dinheiro (*at the money*): opção (compra ou venda) cujo preço de exercício é exatamente igual ao preço corrente do ativo objeto;
- Opção dentro do dinheiro (*in the money*): opção de compra (venda) cujo preço de exercício está abaixo (acima) do preço corrente do ativo objeto;
- Opção fora do dinheiro (*out the money*): opção de compra (venda) cujo preço de exercício está acima (abaixo) do preço corrente do ativo objeto.

3.3 Opções sobre disponível e sobre futuros

Como as opções de interesse deste trabalho são opções sobre contratos futuros, apresenta-se a seguir algumas diferenças entre este tipo de opção e as opções sobre disponível.

As opções se inserem no campo dos derivativos pelo fato de seu preço depender do preço de um outro ativo, ou seja, deriva desse ativo, que é chamado de ativo objeto da opção. O ativo objeto (subjacente) de uma opção pode ser uma ação, uma *commodity* ou um contrato futuro.

A diferença básica entre opções sobre disponível de determinado ativo (por exemplo, café) e opções sobre contratos futuros desse mesmo ativo é que, ao exercer a

primeira, o investidor recebe o próprio ativo (no nosso exemplo, o café) e, ao exercer a segunda, recebe um outro ativo (no nosso exemplo, um contrato futuro de café, que também é um derivativo). Como as opções sobre contratos futuros sempre vencem antes dos contratos futuros a que se referem⁸, um comprador de opções sobre futuros que esteja interessado em receber o ativo principal (ativo objeto do contrato futuro - no nosso exemplo o café) deve estar bastante atento a esse aspecto pois, uma vez recebido o contrato futuro, o investidor fica sujeito às regras desse mercado, onde se destacam a necessidade de depósito de margem e os ajustes diários.

Segundo Hull (1997), os investidores preferem negociar opções sobre futuro a opções sobre o ativo objeto (opções sobre disponível). Aparentemente, o principal motivo é que um contrato futuro, muitas vezes, tem mais liquidez e é mais fácil de negociar do que o ativo objeto. Além disso, um preço futuro é conhecido imediatamente, a partir do momento em que é transacionado em bolsa de futuros, ao passo que o preço à vista do ativo objeto poderá não estar tão prontamente disponível.

De acordo com Chaudhury (1995), as opções sobre futuros freqüentemente acabam sendo um melhor caminho para a estimação do ISD (*implied standard deviation* - volatilidade implícita⁹) do que as opções sobre disponíveis.

A regulamentação das bolsas onde as opções sobre futuros são negociadas dá ao investidor uma garantia que não existe nos mercados de balcão, onde se negociam a maioria das opções sobre disponível. Essa garantia é dada através das Câmaras de Compensação (*Clearing Houses*), que garantem a liquidação física e financeira dos contratos negociados.

⁸ Por exemplo, ao se exercer uma opção sobre contrato futuro de café com vencimento em agosto recebe-se um contrato futuro de café com vencimento em setembro.

⁹ Veja a definição no capítulo 5, seção 5.6.

Outro aspecto importante das opções sobre futuro é que seu exercício não resulta na entrega do ativo principal (o ativo objeto do contrato futuro), visto que, na maioria das vezes, o contrato futuro recebido é encerrado antes da entrega pela tomada de uma posição inversa. Portanto, as opções sobre futuros acabam sendo liquidadas financeiramente, fato que as torna interessantes para muitos investidores, especialmente para aqueles com capital limitado, que poderiam ter dificuldades de conseguir a quantia necessária à aquisição do ativo principal quando do exercício da opção, e para aqueles que não desejam receber/entregar o ativo principal ao qual se refere a opção sobre futuro (especuladores e investidores institucionais).

Wolf (1982) cita que o procedimento de exercício de uma opção sobre futuros difere de uma opção de ações ou de *commodities* físicas, uma vez que a alavancagem no exercício da opção sobre futuros é maior do que em físico, devido ao fato de que os contratos futuros requerem somente o depósito da margem e não o pagamento total do ativo principal como no físico.

Outra vantagem é que, normalmente, as negociações com futuros e com opções sobre futuros são organizadas em rodas dispostas lado a lado na mesma bolsa, o que facilita o "hedging", a arbitragem e a especulação, tendendo a tornar os mercados mais eficientes. Além disso, as opções sobre futuro, em muitas situações, tendem a envolver custos operacionais menores do que os das opções à vista.

Segundo Daigler (1994), a possibilidade de exercer a opção antecipadamente, no caso de opções sobre futuros americanas, permitem ao investidor aplicar, num ativo livre de risco¹⁰, os eventuais lucros acumulados na negociação dessas opções sem ter havido a necessidade de dinheiro para comprar o ativo objeto.

¹⁰ Nos EUA, os *Treasuries Bills* (Notas do Tesouro) de 90 dias são os títulos normalmente citados como exemplo prático de um ativo livre de risco. No Brasil, costuma-se referir-se ao CDI (Certificado de Depósito Interbancário) como exemplo desse tipo de ativo.

Brenner et al. (1985) apontam que, para ativos que não fazem pagamentos (como, por exemplo, dividendos), tal como o ouro, o preço de uma opção de compra sobre disponível (*spot*) é menor que o de uma opção de compra sobre futuros, sendo o oposto válido para opções de venda. Para esses autores, a principal razão para a diferença de preço entre essas opções foi o privilégio do exercício antecipado das opções americanas sobre futuro, com as quais trabalharam.

3.4 Operacionalização dos contratos de opções sobre futuros

Segundo Hull (1997), a operacionalização de contratos de opções sobre futuros pode ser melhor explicada lançando-se mão de um exemplo.

Consideremos um investidor que compra uma opção de compra americana sobre futuro com preço de exercício X . O investidor deve pagar pela opção no ato da compra do contrato (o valor do prêmio). Se a opção de compra sobre futuro for exercida, o que só ocorrerá quando estiver dentro do dinheiro, o titular assume uma posição comprada em futuro no preço de ajuste mais recente ($F_{t,T}^*$). Como se sabe, os contratos futuros são ajustados a mercado diariamente, o que significa que, no dia do exercício da opção, uma quantia $F_{t,T}^* - X$ é depositada na conta de margem do investidor.

Uma vez exercida a opção, o investidor poderá encerrar a posição futura ou mantê-la. Se a encerrar imediatamente depois do exercício, haverá uma liquidação financeira de $F_{t,T} - F_{t,T}^*$, onde $F_{t,T}$ é o preço do contrato futuro no momento do exercício da opção. Portanto, o retorno total é:

$$(F_{t,T}^* - X) + (F_{t,T} - F_{t,T}^*) = F_{t,T} - X \quad (1)$$

Se o investidor mantiver a posição futura após o exercício da opção, haverá um depósito em sua conta de margem equivalente a $F_{t,T}^* - X$. Mas, nesse caso, ele deverá

depositar margem se o valor adicionado à sua conta for inferior ao limite mínimo estabelecido para o tipo de contrato futuro em questão.

O lançador de uma opção de compra sobre futuro recebe o prêmio da opção. Porém, corre o risco do contrato ser exercido. Em caso de exercício, o lançador recebe uma posição vendida em futuro com preço de venda igual a $F_{t,T}^*$. Uma quantia $(F_{t,T}^* - X)$ é deduzida de sua conta de margem e transferida, pela câmara de compensação da bolsa, à contraparte que decidiu exercer a opção.

As opções de venda sobre futuros americanas funcionam de modo semelhante. Quando um investidor, com uma posição comprada numa opção de venda sobre futuros, exerce a opção, ele recebe uma posição vendida a futuro somada a uma quantia em dinheiro igual à quantia pela qual o preço de exercício excede o preço de ajuste mais recente $(X - F_{t,T}^*)$. A contraparte da transação (isto é, o lançador da opção de venda sobre futuros) recebe uma posição comprada a futuro, sendo deduzida de sua conta de margem a quantia pela qual o preço de exercício supera o preço de ajuste mais recente $(X - F_{t,T}^*)$.

A operacionalização de contratos de opções sobre futuros européias é semelhante ao anterior, porém, as opções só podem ser exercidas no seu vencimento. O retorno de um contrato de opção européia de compra (c) sobre futuro no seu vencimento é dado por:

$$c(F, X, T) = \max(F_{T,T} - X, 0) \quad (2)$$

onde $F_{T,T}$ é o preço futuro do ativo na data de vencimento da opção.

Se $F_{T,T} > X$, o titular da opção decidirá exercê-la, realizando um lucro igual a $F_{T,T} - X$ se encerrar imediatamente a posição comprada em futuro obtida. Se $F_{T,T} \leq X$, o titular da opção decidirá não exercê-la, tendo nesse caso um retorno nulo.

O retorno de um contrato de opções européias de venda (p) sobre futuros, no seu vencimento, é:

$$p(F, X, T) = \max(X - F_{T,T}, 0) \quad (3)$$

Se $X > F_{T,T}$, o titular da opção decidirá exercê-la, realizando um lucro igual a $X - F_{T,T}$ se encerrar imediatamente a posição vendida em futuros recebida. Se $X \leq F_{T,T}$, o titular da opção decidirá não exercê-la.

3.5 Teorema da paridade entre *calls* e *puts*¹¹

O teorema da paridade entre *calls* e *puts* é aqui apresentado devido ao seu largo uso na determinação das fórmulas de precificação de opções de venda a partir das fórmulas deduzidas para opções de compra.

3.5.1 Valores limites para as opções

Antes de se falar do teorema da paridade entre *calls* e *puts* é interessante definir os limites máximos e mínimos para o preço de opções, acima e abaixo dos quais há oportunidades lucrativas para os arbitradores.

Para opções de compra/venda de ações que não pagam dividendos, tanto americanas (C/P) quanto européias (c/p), os limites máximos são:

$$C \leq S \text{ e } c \leq S \quad (4)$$

$$P \leq X \text{ e } p \leq X \quad (5)$$

Já os limites mínimos podem ser assim definidos;

¹¹ Este item se baseia em Marshall (1989), Daigler (1994) e Hull (1997).

$$c(S, X, T) > \max(S - Xe^{-rT}, 0) \quad (6)$$

$$p(S, X, T) > \max(Xe^{-rT} - S, 0) \quad (7)$$

onde: S é o preço da ação, X é o preço de exercício da opção, r é a taxa de juros livre de risco e T é o tempo até o vencimento.

Como no caso de opções americanas de compra de ações que não pagam dividendos, o exercício antecipado nunca é uma solução ótima, o limite mínimo para esse tipo de opção é igual ao da similar européia. Assim;

$$C(S, X, T) > \max(S - Xe^{-rT}, 0) \quad (8)$$

Já no caso de uma opção americana de venda de ações que não pagam dividendos pode ser ideal exercer antecipadamente a opção desde que esta esteja suficientemente dentro do dinheiro. Assim, o valor mínimo deste tipo de opção será:

$$P(S, X, T) > \max(X - S, 0) \quad (9)$$

No caso de opções sobre futuros, americanas ou européias, os limites máximos são similares ao caso anterior. Assim, temos:

$$C \leq F_{T,T} \text{ e } c \leq F_{t,T} \quad (10)$$

$$P \leq X \text{ e } p \leq X \quad (11)$$

Já os limites mínimos podem ser assim definidos;

$$c(F, X, T) > \max[(F_{t,T} - X)e^{-rT}, 0] \quad (12)$$

$$p(F, X, T) > \max[(X - F_{t,T})e^{-rT}, 0] \quad (13)$$

Como as opções americanas sobre futuros podem ser exercidas a qualquer momento, teremos:

$$C(F, X, T) > \max(F_{t,T} - X, 0) \quad (14)$$

$$P(F, X, T) > \max(X - F_{t,T}, 0) \quad (15)$$

Isso nos mostra também que, se as taxas de juros forem positivas, o limite mínimo para o preço de uma opção americana será sempre maior que o limite mínimo para uma opção européia.

Na Tabela 2 estão resumidos todos os limites máximos e mínimos para opções de compra de ações européias (c_S), de venda de ações européias (p_S), de compra sobre futuros européias (c_F), de venda sobre futuros européias (p_F), de compra de ações americanas (C_S), de venda de ações americanas (P_S), de compra sobre futuros americanas (C_F) e de venda sobre futuros americanas (P_F) apresentados acima.

Tabela 2 - Valores limites para opções dos tipos c_S , p_S , c_F , p_F , C_S , P_S , C_F e P_F

Tipos de Opções/Limites	Limite Máximo	Limite Mínimo
c_S	$c(S, X, T) \leq S$	$c(S, X, T) > \max(S - Xe^{-rT}, 0)$
p_S	$p(S, X, T) \leq X$	$p(S, X, T) > \max(Xe^{-rT} - S, 0)$
c_F	$c(F, X, T) \leq F_{T,T}$	$c(F, X, T) > \max[(F_{t,T} - X)e^{-rT}, 0]$
p_F	$p(F, X, T) \leq X$	$p(F, X, T) > \max[(X - F_{t,T})e^{-rT}, 0]$
C_S	$C(S, X, T) \leq S$	$C(S, X, T) > \max(S - Xe^{-rT}, 0)$
P_S	$P(S, X, T) \leq X$	$P(S, X, T) > \max(X - S, 0)$
C_F	$C(F, X, T) \leq F_{T,T}$	$C(F, X, T) > \max(F_{t,T} - X, 0)$
P_F	$P(F, X, T) \leq X$	$P(F, X, T) > \max(X - F_{t,T}, 0)$

Fonte: Marshall (1989), Daigler (1994) e Hull (1997).

3.5.2 Métodos alternativos de dedução do teorema

Segundo Marshall (1989), o teorema da paridade entre *calls* e *puts* descreve a relação entre o valor de uma opção de compra (*call*) e de uma opção de venda (*put*) que possuem o mesmo preço de exercício e o mesmo vencimento. A relação representa uma condição de mercado eficiente e é obtida, como muitas outras relações de preços, de argumentos de arbitragem. Hull (1997) afirma que a relação de paridade entre *calls* e *puts* só é consistente para opções européias, pois a possibilidade de exercício antecipado das opções americanas impossibilita a construção de um *portfolio* livre de risco.

Para se entender o teorema da paridade, deve-se primeiramente reconhecer que um *portfolio* livre de risco¹² pode ser construído pela compra de uma unidade de uma ação, pelo lançamento de uma opção de compra dessa ação e pela compra de uma opção de venda dessa mesma ação.

Denotaremos o preço da opção de compra da ação no tempo t por $c_{t,T}$, o preço da ação no tempo t por S_t e o preço da opção de venda dessa ação no tempo t por $p_{t,T}$. O valor desses mesmos instrumentos no tempo T serão indicados por $c_{T,T}$, S_T e $p_{T,T}$, respectivamente. Consideremos que a opção de compra e a opção de venda têm o mesmo preço de exercício (X). Por simplicidade, consideraremos o tempo t como o presente, de modo que os preços no tempo t são os preços correntes (conhecidos).

Desde que os preços correntes são conhecidos, a criação de uma posição requer um investimento inicial que chamaremos de valor do *portfolio* ao tempo t (V_t):

$$V_t = S_t + p_{t,T} - c_{t,T} \quad (16)$$

¹² Um *portfolio* livre de risco é aquele em que na época de sua montagem já conhecemos com certeza seu valor final. Esse *portfolio* deve ser remunerado à taxa de juros livre de risco (r).

No vencimento das opções, se o ativo objeto estiver precificado acima do preço de exercício da opção, isto é, $S_T > X$, então a opção de venda estará “fora do dinheiro” e, deste modo, sem valor. Porém, a opção de compra estará “dentro do dinheiro” e terá um valor de $S_T - X$. Nessa situação, o titular da opção de compra irá exercê-la. Se, de outro lado, o preço do ativo objeto estiver abaixo do preço de exercício da opção, a opção de compra estará “fora do dinheiro” e, deste modo, sem valor. Porém, neste caso, a opção de venda estará “dentro do dinheiro” e terá um valor de $X - S_T$. Finalmente, se no período de vencimento, o preço do ativo objeto for igual ao preço de exercício da opção, ambas as opções (compra e venda) não terão valor e o ativo será vendido no mercado ao preço X . Assim, não importa qual o valor de S_T , o valor final do *portfolio* é sempre X .

Para visualizar melhor o que acontece com o valor final do *portfolio* observe a Tabela 3:

Tabela 3 - Valor final de um *portfolio* sem risco, composto de uma unidade de uma ação, o lançamento de uma opção de compra dessa ação e a compra de uma opção de venda da mesma ação

Condição Final	Valor da opção de compra	Valor da opção de venda	Valor do ativo objeto	Valor do <i>Portfolio</i>
$S_T > X$	$-(S_T - X)$ *	0	S_T	X
$S_T = X$	0	0	S_T	X
$S_T < X$	0	$X - S_T$	S_T	X

FONTE: Marshall (1989)

* O valor da opção de compra é negativo pois trata-se de uma posição vendida nessa opção.

Deste modo, assumindo que V_T representa o valor final do *portfolio*, temos que a riqueza relativa no tempo t ($WR_{t,T}$) será dada por:

$$WR_{t,T} = \frac{V_T}{V_t} = 1 + r \quad (17)$$

onde r é a taxa de juros livre de risco. Fazendo-se as substituições cabíveis e rearranjando os termos teremos:

$$\frac{X}{(S_t + p_{t,T} - c_{t,T})} = 1 + r \quad (18)$$

ou

$$p_{t,T} = c_{t,T} - S_t + X \cdot R \quad (19)$$

onde:

$$R = (1 + r)^{-1} \quad (20)$$

A equação (19) representa o teorema da paridade *put/call* para opções européias de ações. A relação é imposta por argumentos de arbitragem e é mais facilmente vista à partir da equação (18). Se o lado esquerdo da equação (18) fosse maior que o lado direito, significaria que a estratégia sem risco estaria tendo um retorno maior que a taxa de juros livre de risco (r). Qual seria a resposta dos arbitradores nessa situação? A resposta é simples: eles tomariam emprestado à taxa de juros livre de risco e usariam esse recurso para comprar (montar) um *portfolio* livre de risco, o qual teria retorno maior do que a taxa livre de risco. Essa atividade de arbitragem elevaria gradualmente o preço do *portfolio* livre de risco até que seu retorno não fosse maior que a taxa de juros livre de risco.

Supondo, de outro lado, que o *portfolio* livre de risco oferecesse uma taxa de retorno menor que a taxa de juros livre de risco. Os arbitradores, então, venderiam o *portfolio* e utilizariam o recurso resultante para emprestar à taxa de juros livre de risco. As vendas desses *portfolios* rapidamente diminuiriam seus preços, até que seus retornos se igualassem à taxa de juros livre de risco. Assim, na ausência de risco, a arbitragem ocorre se o *portfolio* livre de risco tem retorno maior ou menor que a taxa de juros livre de risco. Não há arbitragem somente quando o retorno do *portfolio* livre de risco é igual

a taxa de juros livre de risco. Deste modo, a arbitragem garante a validade da equação (18) e, consequentemente, da equação (19).

O teorema da paridade entre opções de compra e venda pode ser interpretado de muitas maneiras diferentes. Ele pode ser usado para determinar o valor de uma opção de venda a partir dos preços de mercado de uma opção de compra, do ativo objeto, do preço de exercício da opção e da taxa de juros livre de risco.

Uma interpretação alternativa dada algumas vezes para o teorema em questão envolve a criação de uma opção de venda sintética¹³. Uma opção de venda sintética pode ser obtida, por exemplo, tomando-se uma posição comprada numa opção de compra, vendendo o ativo objeto, e comprando X unidades de \$1 de um título descontado à taxa de juros livre de risco.

Hull (1997) apresenta esse mesmo teorema, para o caso de opções de ações, de uma maneira diferente da anterior. Considere dois *portfolios* com as seguintes composições:

Portfolio A: uma posição comprada em uma opção de compra européia (c) de determinada ação e uma quantia em dinheiro igual a Xe^{-rT} .

Portfolio B: uma posição comprada em uma opção de venda européia (p), da mesma ação que a opção de compra, e uma unidade desta ação (S_t).

Ambos terão o seguinte valor no vencimento das opções:

$$\max(S_T, X) \quad (21)$$

¹³ Instrumentos sintéticos são aqueles criados a partir de uma combinação de outros instrumentos e que comportam-se de uma forma idêntica ao instrumento real.

Pelo fato das opções européias não poderem ser exercidas antes do vencimento, os *portfolios* devem ter valores idênticos hoje. Isto significa que:

$$c = p + S_t - Xe^{-rT} \quad (22)$$

Como foi dito anteriormente, o teorema da paridade entre *calls* e *puts* não se mantém para o caso de opções americanas, porém, é possível derivar a seguinte relação (chamada relação de não arbitragem) entre os preços de opções americanas de ações sem dividendos¹⁴ com mesmo valor de exercício e mesma data de vencimento:

$$S - X < C - P < S - Xe^{-rT} \quad (23)$$

Para o caso de opções americanas sobre futuros a relação é:

$$F_{t,T}e^{-rT} - X < C - P < F_{t,T} - Xe^{-rT} \quad (24)$$

Segundo Daigler (1994), o conceito de paridade entre opções de compra e venda européias sobre futuros é equivalente ao mesmo conceito de opções de ações. A Tabela 4 mostra os resultados previstos a partir de uma posição comprada em futuros (*long futures*), uma posição comprada numa opção de venda sobre futuros (*long put*), uma posição vendida numa opção de compra sobre futuros (*short call*) e uma posição em um título (*bond*) livre de risco com valor de face de $F_{t,T} - X$.

¹⁴ Pode-se mostrar que para ações que não pagam dividendos, $C = c$ e $P > p$ (quando $r > 0$).

Tabela 4 - Valor final de um *portfolio* sem risco composto de uma posição comprada em futuros (*long futures*), uma posição comprada numa opção de venda sobre futuros (*long put*), uma posição vendida numa opção de compra sobre futuros (*short call*) e uma posição em um título (*bond*) livre de risco¹⁵ com valor de face de $F_{t,T} - X$

Instrumento	Valor Corrente	$F_{t,T} < X$	$F_{t,T} > X$
Long Futures	0	$F_{T,T} - F_{t,T}$	$F_{T,T} - F_{t,T}$
Long Put	p	$X - F_{T,T}$	0
Short Call	-c	0	$-(F_{T,T} - X)$
Bond	$(F_{t,T} - X)e^{-rT}$	$F_{t,T} - X$	$F_{t,T} - X$
Valor Final do Portfolio		0	0

Fonte: Daigler (1994).

onde:

$F_{t,T}$ = preço futuro original

$F_{T,T}$ = preço futuro no vencimento da opção

X = preço de exercício da opção

Como pode ser observado, o resultado final obtido será zero independentemente do preço futuro no vencimento da opção ser maior ou menor do que o preço de exercício. Desde que o *portfolio* tem um valor previsto de zero no vencimento da opção, o valor inicial deve também ser zero. Consequentemente,

$$p - c + (F_{t,T} - X) \cdot e^{-rT} = 0 \quad (25)$$

Resolvendo-se para o preço da opção de venda, temos:

¹⁵ Se o preço de exercício (X) for maior que o preço futuro ($F_{t,T}$) os títulos (*bonds*) serão vendidos; no caso contrário, serão comprados.

$$p = c - (F_{t,T} - X) \cdot e^{-rt} \quad (26)$$

Dado que a maioria das opções sobre futuros são do tipo americana, o modelo para opções européias acima pode dar respostas levemente diferentes das relações reais entre os preços das opções de compra e de venda americanas. Entretanto, alguns autores, citados por Daigler (1994), encontraram, a partir da equação (22), que os desvios para os preços reais das opções sobre futuros americanas são incomuns, e muitos desvios não são grandes o suficiente para obtenção de lucro.

Entretanto, Wilson e Fung (1991), trabalhando com opções sobre futuros de grãos e com dois tipos de testes¹⁶ obtiveram resultados que sugerem substanciais evidências para rejeitar a condição de paridade entre *calls* e *puts* nesses mercados.

3.6 Valor intrínseco e valor tempo

O prêmio pago por uma opção pode ser separado em dois componentes: valor intrínseco e valor tempo.

O valor intrínseco é a quantia pela qual o preço de exercício de uma *call* é menor que o preço corrente do ativo básico, ou a quantia pela qual o preço de exercício de uma *put* é maior que o preço corrente do ativo básico. Silva Neto (1996) diz que o valor intrínseco é determinado pela quantidade da opção que está dentro do dinheiro, ou seja, caso ela fosse exercida imediatamente, quanto se ganharia.

O valor tempo é o prêmio adicional ao valor intrínseco que o mercado está disposto a pagar pela opção. É também conhecido como valor extrínseco, prêmio pelo risco ou prêmio pelo tempo (*time premium*). É interessante notar que o titular de uma

¹⁶ Um para determinar a igualdade do ISD - *implied standard deviation* - obtido através dos preços de *calls* e *puts* durante o período de negociação, e outro para determinar a extensão na qual o limite de arbitragem foi violado num dia de negociação específico.

opção só receberá esse valor se a vender a outro investidor, pois, caso a exerça, receberá apenas seu valor intrínseco.

3.7 Potencial de lucro nos mercados futuros e de opções sobre futuros

Completando a exposição anterior, nesta seção são mostrados os gráficos de lucro potencial de todas as posições singulares possíveis nos mercados futuros e de opções. No apêndice A, apresenta-se várias estratégias possíveis com opções e seus lucros potenciais.

A Figura 4 mostra a variação do lucro potencial numa posição comprada em contratos futuros em função da variação do preço do contrato futuro. O eixo vertical foi chamado de lucro potencial uma vez que ele só será efetivo se o comprador encerrar sua posição (vendendo a mesma quantidade de contratos futuros) ou se o contrato vencer. O eixo horizontal representa o valor do contrato futuro em qualquer momento entre a sua compra (t) e o seu vencimento (T). Considerou-se, para efeito ilustrativo, a situação em que o preço de compra do contrato futuro ($F_{t,T}$) é de R\$ 100,00 e desconsiderou-se os custos de transação.

Figura 4 - Lucro potencial de uma posição comprada em contratos futuros pelo preço de R\$ 100,00.

Como se pode visualizar nesta figura, o detentor de uma posição comprada em contratos futuros terá um lucro potencial positivo toda vez que o preço do contrato futuro estiver maior que o preço de aquisição dos mesmos. Na situação inversa, preço do contrato futuro menor que o preço de aquisição dos mesmos, o lucro potencial torna-se negativo (prejuízo)¹⁷. Vale notar que o lucro potencial positivo é ilimitado, pois não há, teoricamente, limite superior para o preço de um contrato futuro. Mas, o prejuízo potencial fica limitado ao valor de compra do contrato, pois um contrato futuro não pode valer menos que zero.

A Figura 5 mostra a variação do lucro potencial de uma posição vendida em contratos futuros em função da variação do preço do contrato futuro. Os eixos seguem a mesma nomenclatura da Figura 4. Neste caso, considerou-se a situação em que o preço de venda do contrato futuro ($F_{t,T}$) é de R\$ 100,00 e, novamente, desconsiderou-se os custos de transação. Pode ser visto através desta figura que o detentor de uma posição vendida em contratos futuros terá um lucro potencial positivo toda vez que o preço do contrato futuro estiver menor que o preço de aquisição dos mesmos, e um lucro negativo (prejuízo) no caso contrário.

¹⁷ Quando se fala neste item em lucro ou prejuízo potencial, está-se considerando apenas a posição no mercado futuro, ou seja, não se está considerando a possível compensação no mercado físico (posição "hedgeada" ou travada).

Figura 5 - Lucro potencial de uma posição vendida em contratos futuros pelo preço de R\$ 100,00.

Como pode ser visto na figura 5, o lucro potencial positivo está limitado ao valor do título, mas o prejuízo potencial é ilimitado (pelas mesmas razões apresentadas para o caso de uma posição comprada).

A Figura 6 apresenta a variação do lucro potencial de uma posição comprada em opções de compra sobre contratos futuros (ativo objeto da opção) em função da variação do preço do contrato futuro. O eixo vertical foi novamente chamado de lucro potencial uma vez que só se efetiva no caso de exercício da opção ou no vencimento da mesma¹⁸. O eixo horizontal representa os possíveis valores do contrato futuro em qualquer momento entre a compra da opção e o seu vencimento ou exercício. Neste exemplo, o preço pago pela opção (C), ou seu prêmio, foi de R\$ 10,00 e o preço de exercício da opção (X) fixado em R\$ 100,00.

¹⁸ Há uma terceira possibilidade do proprietário de uma opção de compra (ou de venda) realizar lucro. Ela ocorre quando a opção é vendida a um terceiro. Nesse caso, desde que o valor tempo da opção seja diferente de zero (ver definição de valor tempo e valor intrínseco no item 3.6), o lucro será maior que o auferido com o exercício.

Figura 6 - Relação de lucro de uma posição comprada em opções de compra ($C = R\$ 10,00$ e $X = R\$ 100,00$).

Como se pode observar pela figura, o lucro potencial positivo surge a partir do momento em que o valor do contrato futuro torna-se superior à soma do preço de exercício com o valor do prêmio ($R\$ 100,00 + R\$ 10,00 = R\$ 110,00$). Porém, diferentemente de uma posição comprada em contratos futuros, onde o prejuízo potencial máximo é igual ao valor pago pelo contrato, numa posição comprada em opções de compra o prejuízo potencial do comprador fica limitado ao prêmio pago pelas mesmas. Esse aspecto de prejuízo limitado é, sem dúvida, um dos grandes atrativos do mercado de opções quando comparado com os mercados futuros.

A Figura 7 apresenta a variação do lucro potencial de uma posição comprada em opções de venda sobre contratos futuros (ativo objeto da opção) em função da variação do preço do contrato futuro. Os eixos seguem a mesma nomenclatura da Figura 4. Neste exemplo, o preço pago pela opção (P), ou seu prêmio, foi de $R\$ 10,00$ e o preço de exercício da opção (X) é fixado em $R\$ 100,00$.

Figura 7 - Relação de lucro de uma posição comprada em opções de venda (P = R\$ 10,00 e X = R\$ 100,00).

Como se pode observar pela figura, o lucro potencial positivo surge a partir do momento em que o valor do contrato futuro torna-se inferior à diferença entre o preço de exercício e o valor do prêmio ($\text{R\$ } 100,00 - \text{R\$ } 10,00 = \text{R\$ } 90,00$). Porém, diferentemente de uma posição vendida em contratos futuros, onde o prejuízo potencial máximo é ilimitado, numa posição comprada em opções de venda o prejuízo potencial do comprador fica limitado ao prêmio pago pelas mesmas.

A Figura 8 ilustra a variação do lucro potencial de uma posição vendida em opções de compra sobre contratos futuros (ativo objeto da opção) em função da variação do preço do contrato futuro. Os eixos seguem a mesma nomenclatura da Figura 4. Neste exemplo, o preço recebido (C) pelo lançador da opção, ou seu prêmio, foi de R\$ 10,00 e o preço de exercício da opção (X) foi fixado em R\$ 100,00.

Figura 8 - Relação de lucro de uma posição vendida em opções de compra (C = R\$ 10,00 e X = R\$ 100,00).

Como se pode observar pela figura 8, o lucro potencial positivo surge a partir do momento em que o valor do contrato futuro torna-se inferior à soma do valor do prêmio mais o preço de exercício ($R\$ 10,00 + R\$ 100,00 = R\$ 110,00$). É interessante notar que o lançador desse tipo de opção tem o seu lucro potencial limitado ao valor do prêmio, mas o prejuízo potencial é ilimitado.

A Figura 9 ilustra a variação do lucro potencial de uma posição vendida em opções de venda sobre contratos futuros (ativo objeto da opção) em função da variação do preço do contrato futuro. Os eixos seguem a mesma nomenclatura da Figura 4. Neste exemplo o preço recebido (P) pelo lançador da opção, ou seu prêmio, foi de R\$ 10,00 e o preço de exercício da opção (X) foi fixado em R\$ 100,00.

Figura 9 - Relação de lucro de uma posição vendida em opções de venda (P = R\$ 10,00 e X = R\$ 100,00).

Como se pode observar pela figura 9, o lucro potencial positivo surge a partir do momento em que o valor do contrato futuro torna-se superior à diferença entre o valor do prêmio e o preço de exercício ($R\$ 100,00 - R\$ 10,00 = R\$ 90,00$). Como ocorre com o lançador da opção de compra, o lançador desse tipo de opção também tem o seu lucro potencial limitado ao valor do prêmio, mas, neste caso, o prejuízo potencial é limitado à diferença entre o valor de exercício do contrato futuro e o prêmio da opção ($R\$ 100,00 - R\$ 10,00 = R\$ 90,00$).

Além das situações expostas nas figuras 6 a 9, há várias estratégias possíveis com opções. Algumas delas, e seus lucros potenciais, estão expostas no apêndice A.

4 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

No capítulo anterior, expõe-se a relação entre os preços de compra e venda de opções, bem como algumas estratégias de operações com opções e seus respectivos resultados. No presente capítulo faz-se uma revisão de vários modelos de determinação dos preços de opções (são os modelos de precificação de opções), mostrando sua evolução e deficiências. A contribuição do presente capítulo está no resumo da literatura teórica existente sobre o tema em questão.

Não houve o interesse em deduzir as fórmulas, mas apenas mostrá-las. As deduções matemáticas dos modelos a serem comentados podem ser encontradas na bibliografia citada.

Antes de se expor os modelos de precificação de opções é interessante fazer algumas considerações sobre a elaboração e o uso de um modelo teórico.

Segundo Natenberg (1994), um investidor que atua no mercado do ativo básico (subjacente) da opção está quase que exclusivamente interessado na direção na qual o mercado se moverá. Já o investidor que negocia com opções deve também levar em consideração a velocidade na qual é provável que o mercado se mova. Se um investidor em futuros e um investidor em opções tomam posições compradas em seus respectivos instrumentos, e o mercado de fato se move para cima, o investidor em futuros está seguro de obter lucro enquanto o investidor em opções pode amargar um prejuízo. Se o mercado não se mover suficientemente rápido, apenas a direção favorável não será suficiente para compensar a perda de valor no tempo da opção.

O conceito de velocidade é vital para a negociação com opções, tanto que há muitas estratégias com opções que dependem apenas da velocidade de mudança dos preços e não da sua direção.

O investidor que deseja avaliar inteligentemente o potencial de lucro de um negócio com opções deve analisar muitos fatores diferentes. Destacam-se os seguintes:

- a) o preço do contrato básico (subjacente);
- b) o preço de exercício;
- c) o tempo que resta até o vencimento;
- d) a direção na qual ele espera que os preços do mercado se movam; e,
- e) a velocidade na qual ele espera que esse movimento se dê.

Deve-se considerar também o conceito de valor teórico, que pode ser definido como o preço que alguém espera pagar por um ativo de modo a pelo menos “empatar” no longo prazo. Assim posto, o único fator que deve ser considerado na determinação do valor de um ativo é a expectativa de retorno ou retorno esperado. Entretanto, sabe-se que há outros fatores a serem considerados. Um desses outros fatores, comumente considerados num investimento financeiro, é o custo de carregamento.

O conceito de valor teórico é baseado no conceito de probabilidade, o que torna o investimento em opções bastante análogo ao de um jogo de cassino. Não obstante, pode também ser entendido como um seguro pelo qual deve ser pago um prêmio.

O objetivo da avaliação de opções é determinar, através do uso de modelos teóricos de precificação, o valor teórico de uma opção. Desse modo, o investidor pode

tomar uma decisão inteligente se a opção estiver sub ou sobrevalorizada, e se a margem teórica justificar a realização do negócio.

Todos modelos, para serem efetivos, requerem que se faça, *a priori*, certas hipóteses sobre o mundo real¹⁹, e essa regra geral sobre modelos inclui também os de precificação de opções. Um modelo de precificação de opções é apenas a concepção de como as opções devem ser avaliadas sob certas condições. Não há, porém, garantia de que o valor gerado pelo modelo esteja correto, nem se pode estar certo de que esse valor reflita o preço atual do mercado, pois o próprio modelo, ou os dados que o alimentaram, podem estar incorretos.

De fato, há uma grande discordância entre os investidores sobre a utilidade dos modelos de precificação de opções. Alguns acreditam que os modelos são muito mistificados e não têm relação com o que se passa no mundo real. Outros acreditam que os valores teóricos fornecidos pelos modelos podem resolver todos os seus problemas. A realidade, no entanto, deve estar entre esses dois extremos.

Segundo Natenberg (1994), um investidor iniciante no mercado de opções é como alguém entrando num quarto escuro pela primeira vez. Sem nenhuma orientação, ele tateará o quarto escuro e, eventualmente, encontrará o que está procurando. O investidor que possui um entendimento básico de modelos de precificação entra no mesmo quarto com uma pequena lamparina. Ele pode observar o *layout* do quarto, mas a “potência” da lamparina o impede de distinguir todos os detalhes. Além disso, alguma coisa do que ele vê pode estar distorcida pela luz da lamparina. Apesar de todas essas limitações, é mais provável que o investidor encontre o que procura quando munido da pequena lamparina do que sem nenhuma iluminação.

¹⁹ A respeito das hipóteses de uma teoria e ou modelo, vale lembrar a célebre frase de Friedman "É o poder de previsão, e não o realismo de suas pressuposições, o que realmente importa na escolha de uma teoria".

Natenberg (1994) aponta, por outro lado, que o problema real com modelos teóricos de precificação de opções pode surgir depois que o investidor já adquiriu alguma sofisticação. Como ele ganha confiança, passa a aumentar o tamanho de seus negócios. Quando isso acontece, sua inabilidade para ver todos os detalhes do quarto, assim como as distorções causadas pela “lâmparina”, tomam uma importância bem maior. Nessa situação, uma má interpretação pode levá-lo a um desastre financeiro, desde que qualquer erro de julgamento será de grande amplitude.

Segundo Natenberg (1994), um modelo deve ser usado de modo criterioso, com total consciência do que ele pode e não pode fazer. Investidores em opções encontram nos modelos teóricos de precificação de opções as ferramentas inestimáveis para o seu entendimento. Por causa do discernimento ganho a partir de um modelo, a grande maioria dos bem sucedidos investidores em opções confia em algum tipo de modelo teórico de precificação.

Natenberg (1994) argumenta que os passos necessários ao desenvolvimento de um modelo teórico de precificação de opções são:

- a) propor uma série de possíveis preços do contrato objeto (subjacente) para a época de vencimento da opção;
- b) determinar uma probabilidade apropriada para cada preço possível;
- c) considerar o mercado do ativo objeto como “livre de arbitragem” (*arbitrage-free*);
- d) para cada preço e probabilidade obtida acima, considerando-se as restrições impostas pelo item c, calcular a expectativa de retorno para a opção; e,
- e) a partir da expectativa de retorno da opção, deduzir o custo de carregamento.

Segundo esse autor, se pudermos realizar todos os passos acima, teremos um valor teórico a partir do qual podemos começar a negociar.

Há na literatura muitos modelos teóricos de precificação de opções. A maioria desses modelos foi desenvolvida para a precificação de um ou mais dos seguintes ativos: ações, moedas (*currency*), índice de ações, índice de taxa de juros, contratos futuros, etc. Focamos nossa pesquisa nos modelos de precificação que podem ser usados para opções sobre contratos futuros, pois os contratos de opções de café da BM&F têm como ativo básico o contrato futuro cambial de café arábica.

Pode-se dividir os modelos existentes na literatura em dois grandes grupos: modelos analíticos e métodos numéricos. Nas próximas subseções damos detalhes de cada um deles.

4.1 Modelos Analíticos

Modelos analíticos de precificação de opções podem ser definidos como aqueles que utilizam fórmulas fechadas (do inglês *closed-form*), ou aproximações destas, para o cálculo do prêmio teórico. Segundo Goldenberg (1991), fórmula fechada pode ser definida como uma integral envolvendo quantidades conhecidas, mesmo se ela não puder ser expressa em termos de suas funções elementares, ou se puder ser calculada apenas numericamente.

Entre os modelos analíticos se destacam: o modelo de Black & Scholes, o modelo de Black, a fórmula de Black & Scholes generalizada, o modelo de Barone-Adesi & Whaley, o modelo de Bjerk Sund & Stensland, a proposta de Chaudhury, a proposta de Myers e Hanson e o modelo de Miltersen e Schwartz.

4.1.1 O modelo de Black-Scholes

Embora o objetivo principal deste trabalho seja o de examinar modelos de precificação de opções sobre futuros, é impossível deixar de falar do mais famoso modelo de precificação de opções européias de ações que surgiu até hoje, ou seja, do modelo de Black & Scholes, uma vez que ele é a base da grande maioria dos modelos existentes.

Segundo Hull (1997), a fórmula²⁰ de Black & Scholes, desenvolvida no início dos anos 70, fez uma revolução na precificação de opções européias de ações. Esse trabalho tem tido uma enorme influência nas estratégias de precificação e hedge com opções tomadas pelos participantes do mercado.

Segundo Hauser e Neff (1985), o modelo de precificação de opções de Black & Scholes, *per se*, não representou uma "nova" solução, pois Boness tinha apresentado essa mesma fórmula em 1964²¹. Entretanto, os argumentos usados por Black & Scholes para derivar a fórmula produziram uma construção teórica que fez com que o valor do prêmio por ela fornecido independesse da estrutura de preferência por risco.

A idéia básica por detrás da fórmula foi explicado de maneira bastante simples pelo próprio Fischer Black em seu artigo "*How we come up with the option formula*". O texto diz o seguinte:

"Suponha que há uma fórmula que diga como o valor de uma opção de compra depende do preço da ação, da volatilidade da ação, do preço de exercício, do vencimento da opção e da taxa de juros.

Tal fórmula nos dirá, entre outras coisas, quanto o valor da opção mudará quando o preço da ação muda por uma pequena quantia em um pequeno intervalo de tempo. Suponha que a opção aumenta de \$ 0,50 quando a ação aumenta de \$ 1,00, e diminui de \$

²⁰ A fórmula de Black & Scholes é citada na literatura como uma *closed-form* (fórmula fechada).

²¹ BONESS, A. J., "Elements of a Theory of Stock Option Value," *Journal of Political Economy*, 72. p.163-175. 1964.

0,50 quando a ação diminui de \$ 1,00. Isto posto, você pode criar uma posição "hedgeada" através da venda de dois contratos de opção de compra e da compra de um lote da ação (uma quantidade correspondente à descrita no contrato de opção).

Tal posição será aproximadamente sem risco. Para pequenos movimentos dos preços da ação no curto prazo, suas perdas de um lado serão, na maioria das vezes, compensadas pelos ganhos do outro lado. Se a ação sobe, você perde na opção mas compensa na ação. Se a ação cai, você perde na ação mas compensa na opção.

De início, você criou uma posição "hedgeada" pela venda de duas opções e compra de uma ação. Conforme o preço da ação muda e conforme se aproxima o vencimento da opção, a relação entre a quantidade de opções e ações necessária para manter um hedge aproximadamente sem risco mudará. Para manter um hedge neutro, você terá que mudar sua posição nas ações, ou sua posição nas opções, ou ambas.

Como a posição "hedgeada" será aproximadamente sem risco, ela deve dar um retorno igual à taxa de juros de curto prazo de um título aproximadamente sem risco. Este único princípio nos dá a fórmula para precificar opções. Ele mostra que há apenas uma fórmula para o valor da opção que tem a característica de retornar para uma posição "hedgeada" a taxa de juros livre de risco de curto prazo" (Black, 1989, p.1).

O princípio descrito acima dá ao lançador da opção um método de "hedgear" perfeitamente²² o risco de ter de cobrir a opção no vencimento. Esta estratégia de hedging perfeito é um ponto fundamental do modelo.

4.1.1.1 Hipóteses do modelo

No desenvolvimento de seu modelo, Black & Scholes fizeram uma série de hipóteses, quais sejam:

²² "Hedgear" o risco de um investimento significa ser capaz de custeá-lo através da realização de um outro investimento que compense os possíveis gastos com o primeiro. Num hedge perfeito, o resultado obtido no segundo investimento cobre exatamente os custos do primeiro, ou seja, não há sobras.

- a) o comportamento do preço das ações corresponde ao modelo lognormal no qual o retorno esperado da ação (μ) e a volatilidade futura do preço da ação (σ) são constantes;
- b) não há custos de transação ou impostos. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
- c) a ação não receberá dividendos durante a vida da opção;
- d) não há oportunidades de arbitragem sem risco;
- e) a negociação com títulos é contínua;
- f) os investidores podem tomar emprestado ou emprestar à mesma taxa de juros livre de risco; e,
- g) a taxa de juros livre de risco de curto prazo, r , é constante.

Antes de se iniciar a apresentação do modelo de Black & Scholes, é interessante fazer algumas considerações acerca das hipóteses por ele consideradas.

A primeira hipótese do modelo de Black & Scholes nos diz, em outras palavras, que os preços das ações seguem movimentos aleatórios. Isso significa que mudanças proporcionais no preço de uma ação num curto período de tempo são normalmente distribuídas. Isso, por sua vez, implica que o preço da ação, a qualquer tempo no futuro, tem distribuição lognormal. Uma variável com distribuição normal pode ter qualquer valor, negativo ou positivo, ao passo que uma variável lognormal só pode ser positiva. Uma distribuição normal é simétrica; uma distribuição lognormal é distorcida, com média, mediana e moda diferentes.

De acordo com Hull (1997), o retorno esperado (μ) demandado pelos investidores para uma ação depende do risco da própria ação. Ele também depende dos níveis das taxas de juros da economia. Quanto maior a taxa de juro livre de risco, maior o retorno esperado de qualquer ação. Mas, quando o valor de uma opção é expresso em termos do valor da ação objeto, ele em nada depende de μ ²³.

A volatilidade futura (σ) é uma medida de nossa incerteza quanto às oscilações futuras no preço da ação. Mais precisamente, ela é a medida de nossa incerteza quanto às mudanças proporcionais no preço futuro da ação. Sempre que se usar o termo "volatilidade" sem especificação, daqui para frente neste texto, este se referirá à volatilidade futura. Dada a imensa importância da volatilidade para os modelos de precificação de opções, trataremos especificamente deste assunto no capítulo 5.

A segunda hipótese pressupõe que não haja cobrança de taxas, por parte das Bolsas e/ou corretoras, e que os títulos sejam perfeitamente divisíveis, ou seja, que um investidor possa comprar qualquer fração que desejar de um título (por exemplo, meia ação). Esta é, sem dúvida, uma hipótese simplificadora.

Para esclarecer melhor a quarta hipótese, deve-se entender primeiro o que vem a ser arbitragem. De acordo com Marshall (1989), a definição acadêmica de arbitragem é: a negociação simultânea em dois ou mais mercados com o propósito de obter lucro sem risco e sem investimento. Chriss (1997) afirma que o princípio econômico da arbitragem é o coração de todo modelo teórico de precificação de opções. Segundo esse autor, o uso da teoria da arbitragem na precificação de opções de ações depende de certas hipóteses

²³ De acordo com Chriss (1997), este conceito é chamado de risco neutralidade. Segundo esse autor, a observação desse conceito levou os economistas Cox e Ross a desenvolverem em 1976 uma importante ferramenta para avaliação de títulos conhecida como "Método de Avaliação Neutra em Relação ao Risco". Esse método argumenta que ao precificar opções podemos, com total impunidade, assumir que a situação seja de indiferença ao risco (numa situação de indiferença ao risco, os investidores não exigem compensação por riscos e o retorno esperado de todos os títulos é a taxa de juro livre de risco).

básicas sobre a natureza dos mercados de opções e de ações. As principais hipóteses consideradas são a de que os mercados são eficientes e sem fricção²⁴ (*frictionless*).

A hipótese feita pelo modelo é conhecida como hipótese de não arbitragem, que pode ser assim definida: "Nunca há um cenário no qual uma seleção de ativos é precificada de tal modo que quaisquer compras e/ou vendas simultâneas desses ativos possam resultar em lucro sem risco" (Chriss, 1997, p.39).

A hipótese de negociação contínua dos títulos, segundo Natenberg (1994), traz consigo a hipótese de que as mudanças de preços seguem um *diffusion process*. Em um *diffusion process* a mudança entre preços consecutivos é suave e contínua, sem saltos entre eles.

A taxa de juros livre de risco é a taxa de juros na qual títulos do tipo "*riskless zero-coupon bonds*"²⁵ de todos os vencimentos podem ser comprados e vendidos em qualquer quantia.

4.1.1.2 A fórmula analítica

A fórmula de Black & Scholes, para os preços de opções de compra e venda europeias de ações sem dividendos, pode ser assim descrita:

²⁴ Num mercado sem fricção (*frictionless*) assume-se que: os investidores podem comprar ou vender o ativo básico livremente e sem restrições de quantidade; pode-se emprestar e tomar emprestado à mesma taxa de juro; não há custos de transação e não há impostos.

²⁵ Título da dívida pública ou privada subscrito e negociado com desconto, sem pagamento periódico de juros, que obriga o emitente a pagar o valor de face no vencimento.

$$\begin{aligned}
c &= S.N(d_1) - Xe^{-rT}.N(d_2) \\
p &= X.e^{-rT}.N(-d_2) - S.N(-d_1) \\
\text{onde} & \\
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma.\sqrt{T}} \\
d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma.\sqrt{T}} = d_1 - \sigma.\sqrt{T}
\end{aligned}
\tag{27}$$

Onde:

c = preço de uma opção de compra européia

p = preço de uma opção de venda européia

S = preço corrente da ação objeto

X = preço de exercício da opção

r = taxa de juros livre de risco (continuamente capitalizada)

T = tempo até o vencimento da opção (em anos)

σ = volatilidade do preço da ação (desvio padrão dos retornos)

$N(.)$ = função de distribuição de probabilidade acumulada de uma variável normal padronizada

Para derivar a fórmula acima, Black & Scholes partiram da criação de um *portfolio*, ajustado continuamente, composto por uma posição comprada em uma unidade da ação objeto e uma posição vendida em $\frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S}}$ unidades de opções de compra

desta mesma ação. Neste caso considera-se o *portfolio* como sendo livre de risco porque, em um curto intervalo de tempo, os dois ativos são afetados pela mesma fonte de incerteza. O *portfolio*, portanto, deve ter um rendimento igual à taxa de juros livre de risco, pois não depende do preço da ação mas somente do tempo e dos valores constantes conhecidos. Matematicamente o valor do portfólio (V_H) é dado por :

$$V_H = Q_s \cdot S + Q_c \cdot c \quad (28)$$

onde Q_s e Q_c são, respectivamente, as quantidades das ações e opções utilizadas no *portfolio*, sendo a mudança no valor do *portfolio* (dV_H) dada por:

$$dV_H = Q_s \cdot dS + Q_c \cdot dc \quad (29)$$

O movimento dos preços da opção ao longo do tempo, sendo uma função dos preços da ação objeto, deve estar relacionado ao movimento dos preços desta ao longo do tempo. Desta forma, assumindo-se que o *portfolio* (V_H) é ajustado continuamente e sendo o retorno da ação objeto descrito por:

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \quad (30)$$

onde: μ é a taxa de retorno esperada, σ é o desvio padrão dos retornos e dz é um processo de Wiener²⁶;

utiliza-se o "lema de Ito"²⁷ para expandir dc , obtendo-se:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial c}{\partial t} dt \quad (31)$$

²⁶ De acordo com Hull (1997), o processo de Wiener é um tipo específico de processo estocástico, chamado, também, de movimento Browniano. De forma simplificada, $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$, onde ε é uma extração randômica de uma distribuição normal padronizada.

²⁷ Resumidamente o "lema de Ito" demonstra que:

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \mu + \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{2 \partial x^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial y}{\partial x} \sigma dz$$

sendo a variável x definida através da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dx = \mu(x, t) dt + \sigma(x, t) dz$$

e sendo a variável y definida por: $y_t = u(x, t)$

Substituindo-se a equação (31) na equação (29), tem-se que a variação no valor do *portfolio* é:

$$dV_H = Q_S dS + Q_c \left(\frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial c}{\partial t} dt \right) \quad (32)$$

Sendo o *portfolio* livre de risco, ele deverá proporcionar, em um mercado eficiente, um retorno igual à taxa de juro livre de risco. Assim:

$$\frac{dV_H}{V_H} = r dt \quad (33)$$

Como o *portfolio* é formado mantendo-se ajustadas as relações $Q_S = 1$ e $Q_c = -\frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S}}$, substituindo-se a equação (33) na equação (32), obtém-se:

$$dV_H = r dt V_H = dS - \frac{\partial S}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial c}{\partial t} dt \right) \quad (34)$$

e, isolando-se $\frac{\partial c}{\partial t}$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left(-\frac{\partial c}{\partial S} \right) r V_H - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \quad (35)$$

Por fim, substituindo-se o valor de V_H da equação (28) na equação (35), obtém-se:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = r c - \frac{\partial c}{\partial S} r S - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \quad (36)$$

que, na data de vencimento da opção, quando sujeita às restrições:

$$c = S - X, \quad S \geq X$$

$$c = 0, \quad S < X$$

corresponde à fórmula de Black & Scholes dada pela equação (27).

De acordo com Hull (1997), algumas hipóteses do modelo de Black & Scholes foram flexibilizadas por outros pesquisadores para estender o seu uso além do originalmente proposto. O próprio Black adaptou a fórmula original para utilizá-la para as opções européias sobre futuro. Outras transformações permitem o seu uso para opções européias de compra e venda de índices de ações e moedas, além de opções americanas de compra de ações sem dividendos e algumas com dividendos. Por exemplo, as variações da fórmula de Black-Scholes podem ser usadas quando r e σ são funções do tempo, e a própria fórmula pode ser ajustada para levar em conta dividendos.

4.1.1.3 As letras gregas²⁸

Os preços das opções comportam-se de forma não linear com a variação dos fatores determinantes do seu prêmio. Ao efeito da variação de cada um desses fatores no valor da opção é dado o nome de medida de sensibilidade, sendo atribuído uma letra grega a cada um desses fatores determinantes do prêmio.

Através da fórmula de Black-Scholes pode-se derivar as fórmulas dessas medidas. Vale lembrar, entretanto, que a variação das medidas não é linear e, portanto, as fórmulas a seguir calculam as sensibilidades para determinado ponto, em condições *ceteris paribus*. Assim, a cada alteração, em quaisquer das condições de mercado, elas devem ser recalculadas.

²⁸ Este subitem está baseado em Silva Neto (1996) e Hull (1997).

A variação do prêmio teórico de uma opção, dada uma variação no preço do ativo objeto, introduz o conceito de delta (Δ). No modelo de Black-Scholes, o delta para uma opção europeia de compra de uma ação sem dividendos (Δ_c), e para uma opção europeia de venda (Δ_p), no mesmo ativo, são dados pelas seguintes fórmulas, respectivamente:

$$\Delta_c = N(d_1) > 0 \quad (37)$$

$$\Delta_p = N(d_1) - 1 < 0 \quad (38)$$

Outra letra grega importante é o gama (Γ), que mede a variação do valor do delta em relação a mudanças no preço do ativo objeto. O gama é também conhecido como a curvatura de uma opção e pode ser visto como uma medida do quão rapidamente uma opção muda suas características, passando a comportar-se mais ou menos como o ativo objeto. No modelo de Black-Scholes, o gama para uma opção europeia de compra ou de venda, de uma ação sem dividendos, é dado pela seguinte fórmula:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} > 0 \quad (39)$$

O teta (θ), ou fator de perda do valor tempo (*time decay factor*), é a medida que reflete a perda de valor de *puts* e *calls* com o passar do tempo, se todas as outras condições permanecerem constantes. As fórmulas para opções europeias de compra (θ_c) e venda (θ_p) de ações que não pagam dividendos são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \theta_c &= -\frac{S \cdot N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - r \cdot X \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) \geq \leq 0 \\ \theta_p &= -\frac{S \cdot N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + r \cdot X \cdot e^{-rt} \cdot N(-d_2) \geq \leq 0 \end{aligned} \quad (40)$$

O vega (Λ) é a medida da variação do preço da opção quando ocorre uma variação na volatilidade do ativo básico. Para uma opção europeia de compra ou de venda, de uma ação sem dividendos, o vega é dado por:

$$\Lambda = S \cdot \sqrt{T} \cdot N'(d_1) > 0 \quad (41)$$

Por fim, tem-se o ρ (ρ), que é a medida da variação do preço da opção quando ocorre uma variação na taxa de juros livre de risco. As fórmulas para opções europeias de compra (ρ_c) e venda (ρ_p), de ações que não pagam dividendos, são, respectivamente:

$$\rho_c = X \cdot T \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2) > 0 \quad (42)$$

$$\rho_p = -X \cdot T \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) < 0 \quad (43)$$

4.1.1.4 Críticas ao Modelo

Como acontece com todos os modelos teóricos de uma forma geral, as principais críticas ao modelo de Black & Scholes têm origem na inadequação de algumas de suas premissas, devido, principalmente, à simplificação da realidade por elas imposta, ou pela dificuldade de mensurar possibilidades futuras.

Desse modo, dentre as principais críticas ao modelo em questão, pode-se citar:

- a) Divergências da lognormalidade: o modelo de comportamento do preço da ação que fundamenta as teorias de Black & Scholes pressupõe que a distribuição do preço da ação em algum tempo futuro, condicionado pelo seu valor atual, seja lognormal. Por equivalência, ele assume que a taxa de retorno da ação continuamente capitalizada, em qualquer intervalo de tempo, seja normalmente distribuída. De acordo com Hull (1997), os testes de precificação de opções utilizando o modelo de Black & Scholes mostram que as opções dentro do dinheiro e/ou fora do dinheiro parecem mal precificadas

em comparação com as opções no dinheiro. Isto é, a volatilidade que permite que a equação determine corretamente o preço de opções no dinheiro causa distorção na precificação de opções dentro e fora do dinheiro. Esses vieses podem ser explicados pelas diferenças entre a distribuição lognormal adotada pelo modelo e a distribuição real. Outros autores, como Sherrick et al. (1990) e Vercammen (1995), também demonstraram a inadequação dessa hipótese em seus trabalhos;

- b) Volatilidade constante: o modelo supõe volatilidade constante, porém, na prática, a volatilidade futura de um ativo é estocástica²⁹. Existem diversos trabalhos na literatura que propõem soluções alternativas para a precificação de opções em função do viés causado pela volatilidade estocástica no modelo de Black & Scholes. Dentre esses trabalhos pode-se citar: Choi & Longstaff (1985), Hauser & Neff (1985), Hull & White (1987), Wiggins (1987), Johnson & Shanno (1987), Sherrick et al. (1992), Myers & Hanson (1993) e Ball & Roma (1994);
- c) Taxa de juros constante: o modelo também usa a pressuposição de taxa de juros constante quando na realidade ela, ao menos no Brasil, muda constantemente. Miltersen & Schwartz (1998) propõem um modelo de precificação de opções com taxa de juros estocástica;
- d) Negociação contínua: como foi dito anteriormente, a idéia por detrás da negociação contínua é a de que as mudanças de preços seguem um *diffusion process*. Na realidade, porém, os preços seguem um *jump process*. Num *jump process* os preços de um contrato permanecem constantes durante um período de tempo e, então, instantaneamente saltam para um novo preço. Goldenberg (1991) desenvolveu um modelo para precificar opções européias em ativos com preços que seguem um *jump process*;

²⁹ Uma variável estocástica, ou aleatória, é aquela que possui um conjunto de valores possíveis, cada um dos quais associado a uma probabilidade de ocorrência.

- e) Custo de oportunidade: há dentro do modelo a hipótese de que as taxas de captação (*borrowing*) e aplicação (*lending*) são iguais, o que também não condiz com a realidade;
- f) Custos operacionais: vários custos operacionais estão envolvidos na negociação de opções, desde taxas cobradas pelas Bolsas até impostos. Mas, o modelo também não considera esse aspecto prático, o que dificulta o hedge neutro e a administração dinâmica da posição. Eales e Hauser (1990) tratam desse aspecto do modelo.

É interessante ressaltar que, apesar de todas as críticas, o modelo de Black & Scholes ainda hoje é o mais conhecido e usado pelos participantes do mercado de opções de ações.

4.1.2 O modelo de Black

Num trabalho publicado em 1976, Fischer Black estendeu o modelo de Black & Scholes às opções europeias sobre futuros, supondo que o preço futuro tivesse a mesma propriedade lognormal que o modelo de Black & Scholes assume³⁰. Black chegou as seguintes fórmulas para o preço das opções de compra (c) e venda (p):

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} [F.N(d_1) - X.N(d_2)] \\ p &= e^{-rT} [X.N(-d_2) - F.N(-d_1)] \end{aligned} \quad (44)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + \sigma^2 \cdot T/2}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

³⁰ O modelo de Black assume as mesmas hipóteses que o de Black & Scholes.

onde: F é o preço corrente do contrato futuro, e os demais símbolos têm o mesmo significado que na fórmula (27).

De acordo com Hull (1997), nas situações em que o custo de carregamento e o *convenience yield*³¹ são apenas funções do tempo, pode-se mostrar que a volatilidade do contrato futuro é a mesma do ativo objeto.

É importante notar também que a fórmula de Black não exige que o contrato de opções e o contrato futuro tenham o mesmo vencimento. Porém, Miltersen & Schwartz (1998) mostram em seu trabalho que o tempo entre o vencimento da opção e do respectivo contrato futuro tem grande influência no preço de uma opção sobre futuro de *commodities*.

4.1.3 A fórmula de Black & Scholes generalizada

Haug (1997) cita que a fórmula de Black & Scholes pode ser escrita numa forma mais geral pela inclusão do termo referente ao custo de carregamento (b). Essa fórmula geral (GBS) pode ser usada para precificar opções européias de ações, de ações que pagam dividendos contínuos, opções sobre futuros e de taxa de câmbio (moedas). A fórmula é a seguinte:

³¹ Esse termo diz respeito às vantagens que os detentores da posse física de uma *commodity* podem ter sobre os detentores de um contrato futuro dessa *commodity*. Essas vantagens podem incluir a capacidade de obter lucro devido à escassez temporária ou à possibilidade de, nessa situação, manter o processo de produção em andamento. Edwards (1992) - EDWARDS, F. **Futures & Options**. N. York. McGraw-Hill. 1991. -, citado por Martits (1998), diz também que o *convenience yield* varia de acordo com a mercadoria e a época, tornando difícil sua previsão para os contratos futuros agrícolas.

$$c_{\text{GBS}} = S.e^{(b-r)}.N(d_1) - X.e^{-rT}.N(d_2)$$

$$p_{\text{GBS}} = X.e^{-rT}.N(-d_2) - S.e^{(b-r)}.N(-d_1)$$

onde :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(b + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (45)$$

onde: S representa o valor corrente do ativo objeto da opção, e os demais símbolos seguem o significado apresentado na fórmula (27).

Assim, conforme o valor assumido por b , temos os seguintes modelos:

Quando $b = r$ temos o modelo de Black & Scholes (1973), para opções européias que não pagam dividendos;

Quando $b = r - q$ temos o modelo de Merton (1973), para opções que pagam dividendos contínuos a uma taxa q ;

Quando $b = 0$ temos o modelo de Black (1976), para opções européias sobre futuros; e,

Quando $b = r - r_f$ (taxa de juros estrangeira) temos o modelo de Garman & Kohlhagen (1983), para opções de taxa de câmbio (moedas).

4.1.4 Alternativas à fórmula de Black para calcular o preço de opções sobre futuros

Selecionou-se nesta seção alguns dos principais modelos encontrados na literatura que podem ser utilizados na precificação de opções sobre futuros.

4.1.4.1 Modelos para opções americanas

Os modelos para opções americanas partem do pressuposto de que o valor dessas opções deve exceder o valor das análogas européias por uma quantia que represente o prêmio pelo direito de exercício antecipado. Nos próximos itens são apresentados os modelos de Barone-Adesi & Whaley, de Bjerk Sund & Stensland e o de Chaudhury.

4.1.4.1.1 Modelo de Barone-Adesi & Whaley³²

O método de aproximação quadrática de Barone-Adesi e Whaley³³ pode ser usado para precificar opções de compra e venda de um ativo subjacente (objeto) com taxa de custo de carregamento igual a b . Quando $b \geq r$ (a taxa de juros livre de risco), o valor de uma opção de compra americana é igual ao de uma opção de compra européia e pode então ser encontrado usando-se a fórmula de Black & Scholes generalizada.

As hipóteses usadas por este modelo são aquelas introduzidas por Black & Scholes (1973) e Merton (1973).

A taxa de juros livre de risco (r) e o custo de carregamento (b) são assumidos como sendo taxas proporcionais constantes. Assim, na ausência de oportunidades de arbitragem sem risco, a relação entre os preços futuro e à vista de uma *commodity*³⁴ será:

$$F = S.e^{b.T} \quad (46)$$

Uma segunda hipótese é que o movimento de mudanças de preço do ativo básico segue a seguinte equação diferencial estocástica:

³² Esta subseção foi escrita baseada no artigo de Barone-Adesi & Whaley (1987).

³³ A concepção desse modelo também utiliza as mesmas hipóteses do modelo de Black & Scholes, exceto pela possibilidade de exercício antecipado das opções, já que se trata de um modelo para opções americanas.

³⁴ O termo *commodity* é utilizado pelos autores para representar qualquer ativo (ações, metais, moedas estrangeiras, ou qualquer outro instrumento financeiro) que não um contrato futuro.

$$dS/S = \alpha dt + \sigma dz \quad (47)$$

onde α é a expectativa instantânea de mudança de preço do ativo, σ é o desvio padrão instantâneo e z é um processo de Wiener.

Como consequência das equações (46) e (47), tem-se que os movimentos dos preços futuros são descritos pela seguinte equação:

$$DF/F = (\alpha - b) dt + \sigma dz \quad (48)$$

Por fim, assumindo que pode-se formar um hedge sem risco entre a opção e o ativo básico, a equação diferencial parcial dos movimentos dos preços da opção (V) através do tempo será dada por:

$$1/2 \sigma^2 S^2 V_{SS} + bSV_S - rV + V_t = 0 \quad (49)$$

onde: V = preço da opção; V_t = derivada de V em relação a t (tempo); V_S = derivada de V em relação a S (preço do ativo) e V_{SS} = segunda derivada de V em relação a S .

A equação (49) acima é o "coração" do modelo, e serve para opções européias e americanas, tanto de compra quanto de venda.

Segundo os autores, Merton (1973) mostra indiretamente que, quando a condição limite - $\max(0, S_T - X)$ - é aplicada na equação (49), o valor de uma opção européia de compra de uma *commodity* será:

$$c(S, T) = S.e^{(b-r)T}.N(d_1) - X.e^{-rT}.N(d_2) \quad (50)$$

onde $d_1 = [\ln(S/X) + (b + 0,5 \sigma^2)T] / \sigma T^{1/2}$, $d_2 = d_1 - \sigma T^{1/2}$ e $N(.)$ é a função de densidade padrão acumulada.

Quando a condição limite - $\max(0, X - S_T)$ - é aplicada na equação (49), o valor de uma opção européia de venda de uma *commodity* será:

$$p(S, T) = Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{(b-r)T}N(-d_1) \quad (51)$$

A fórmula (50) nos possibilita demonstrar que, sob certas condições, uma opção americana de compra pode ser exercida antecipadamente.

Supondo $b < r$, como acontece com muitas das opções de *commodities* negociadas nas bolsas, quando o preço da *commodity*, S , torna-se extremamente grande em relação ao preço de exercício da opção, o valor de $N(d_1)$ e $N(d_2)$ aproximam-se de 1 e o valor da opção européia de compra aproxima-se de $Se^{(b-r)T} - Xe^{-rT}$. Entretanto, a opção americana pode ser exercida imediatamente pelo valor de $S - X$, o qual pode ser maior que o valor da opção européia quando $b < r$.

Se $b \geq r$, como no caso de opções de ações que não pagam dividendos (onde $b = r$), o limite inferior para opções européias terá um valor maior que o resultante do exercício das opções americanas, para todos os níveis de preços da *commodity*. Desse modo, a equação (50) avaliará precisamente as opções de compra americanas, uma vez que não há vantagem no exercício antecipado. No caso de opções de venda americanas, sempre há a possibilidade de exercício antecipado, de modo que a equação (51) nunca deve ser aplicada para avaliar essas opções.

O critério chave no método de aproximação quadrática é que, se a equação diferencial parcial (49) aplica-se tanto para opções americanas quanto para européias, ela também aplica-se ao prêmio pelo direito de exercício antecipado de opções americanas.

Para uma opção de compra americana de uma *commodity*, o prêmio pelo direito de exercício antecipado $[\varepsilon_C(S, T)]$ é definido como:

$$\varepsilon_C(S, T) = C(S, T) - c(S, T) \quad (52)$$

onde:

$C(S,T)$ é o valor da opção americana de uma *commodity* e $c(S,T)$ é o valor da correspondente européia.

A equação diferencial parcial para o prêmio pelo exercício antecipado será:

$$1/2 \sigma^2 S^2 \varepsilon_{SS} + bS\varepsilon_S - r\varepsilon + \varepsilon_t = 0 \quad (53)$$

onde: ε = prêmio pelo exercício antecipado; ε_t = derivada de ε em relação a t (tempo); ε_S = derivada de ε em relação a S (preço do ativo) e ε_{SS} = segunda derivada de ε em relação a S .

Fazendo-se algumas simplificações, pode-se escrever a equação (53) da seguinte maneira;

$$S^2 \cdot \varepsilon_{SS} + N \cdot S \cdot \varepsilon_S - M \cdot \varepsilon - (M/r) \cdot \varepsilon_T = 0 \quad (54)$$

onde:

$$M = 2r/\sigma^2, \quad N = 2b/\sigma^2 \quad e \quad \varepsilon_T = -\varepsilon_t$$

O prêmio pelo exercício antecipado é então definido como:

$$\varepsilon_C(S,K) = K(T) \cdot f(S,K) \quad (55)$$

onde: $K(T)$ = função genérica que depende de T (tempo); $f(S,K)$ = função genérica que depende de S (preço do ativo) e T .

Desse modo, segue que $\varepsilon_{SS} = K \cdot f_{SS}$ e $\varepsilon_T = K_T \cdot f + K \cdot K_T \cdot f_K$, onde f_K = derivada de f em relação a K e f_{SS} = segunda derivada de f em relação a S . Substituindo a

expressão da derivada parcial na equação (54), escolhendo $K(T) = 1 - e^{-rT}$ e fazendo os arranjos cabíveis, tem-se:

$$S^2.f_{SS} + N.S.f_S - (M/K).f - (1-K).M.f_K = 0 \quad (56)$$

Até aqui, a análise feita pelo modelo foi exata, não tendo sido feita nenhuma aproximação. O modelo faz uma aproximação ao considerar o último termo do lado esquerdo da equação (56) igual a 0.

Para opções de *commodities* com prazo muito curto (ou longo) para vencer, esta hipótese é razoável uma vez que quando T aproxima-se de 0 (ou ∞), f_K aproxima-se de 0 (ou K aproxima-se de 1), e o termo $(1 - K)Mf_K$, desaparece.

Assim, uma aproximação da equação diferencial do prêmio pelo exercício antecipado é:

$$S^2.f_{SS} + N.S.f_S - (M/K).f = 0 \quad (57)$$

A equação (57) é uma equação diferencial de segundo grau ordinária, com duas soluções linearmente independentes da forma aS^q . Elas podem ser escritas substituindo-se $f = aS^q$ na equação (57):

$$aS^q[q^2 + (N - 1)q - M/K] = 0 \quad (58)$$

As raízes da equação (58) são:

$$q_1 = [-(N-1) - (N-1)^2 + 4M/K]^{1/2}/2 \text{ e } q_2 = [-(N-1) + ((N-1)^2 + 4M/K)^{1/2}]/2 \quad (59)$$

Como $(M/K) > 0$, $q_1 < 0$ e $q_2 > 0$, a solução geral da equação (57) é:

$$f(S) = a_1.S^{q_1} + a_2.S^{q_2} \quad (60)$$

Colocando-se a restrição de que $a_1 = 0$, o valor aproximado de uma opção americana de compra será:

$$C(S,T) = c(S,T) + K.a_2.S^{q_2} \quad (61)$$

Outra restrição a ser imposta é que o lado direito da equação (61) deve tocar, mas não interceptar, o limite imposto pela possibilidade de exercício antecipado da opção de compra americana ($S - X$). Assim, considerando-se $a_2 > 0$, deve-se encontrar um valor crítico (ponto de tangência) abaixo do qual o valor da opção é dado pela equação (61) e acima do qual o valor é dado pela condição limite ($S^* - X$).

Para se encontrar o valor crítico (S^*) deve-se usar a equação (61) substituindo-se S por S^* , e igualar o preço da opção de compra americana [$C(S^*,T)$] ao seu valor de exercício ($S^* - X$):

$$S^* - X = c(S^*,T) + K.a_2.S^{*q_2} \quad (62)$$

e igualando-se a declividade do valor de exercício da opção [$\partial(S^* - X)/\partial S^*$], que é igual a 1, à declividade de $C(S^*,T)$, tem-se:

$$1 = e^{(b-r).T} N.[d_1(S^*)] + Kq_2 a_2 S^{*q_2-1} \quad (63)$$

onde: $e^{(b-r).T} N.[d_1(S^*)]$ é a derivada parcial de $c(S^*,T)$ em relação a S^* e $d_1(S^*) = [\ln(S^*/X) + (b + 0,5\sigma^2).T]/\sigma.T^{1/2}$.

Assim, tem-se duas equações com duas incógnitas, a_2 e S^* . Resolvendo para S^* chega-se a:

$$S^* - X = c(S^*,T) + \{1 - e^{(b-r).T} N[d_1(S^*)]\} S^*/q_2 \quad (64)$$

Embora a única incógnita da equação (64) seja S^* , ela deve ser determinada iterativamente³⁵. Uma vez conhecido S^* , chega-se às seguintes equações:

$$\begin{aligned} C(S,T) &= c(S,T) + A_2(S/S^*)^{q_2} , \text{ quando } S < S^* , \text{ e} \\ C(S,T) &= S - X , \text{ quando } S \geq S^* \end{aligned} \quad (65)$$

onde:

$$A_2 = (S^*/q_2)\{1 - e^{(b-r)T}N[d_1(S^*)]\} \quad (66)$$

Vale notar que $A_2 > 0$ desde que S^* , q_2 , e $\{1 - e^{(b-r)T}N[d_1(S^*)]\}$, são positivos quando $b < r$. Desse modo, a equação (65) é uma eficiente aproximação analítica do valor de uma opção de compra americana.

Seguindo passos semelhantes para uma opção de venda americana, chega-se a:

$$\begin{aligned} P(S,T) &= p(S,T) + A_1(S/S^{**})^{q_1} , \text{ quando } S > S^{**} , \text{ e} \\ P(S,T) &= X - S , \text{ quando } S \leq S^{**} \end{aligned} \quad (67)$$

onde:

$$A_1 = - (S^{**}/q_1)\{1 - e^{(b-r)T}N[-d_1(S^{**})]\} \quad (68)$$

e

S^{**} = valor crítico para uma opção de venda

Para o caso de opções sobre futuro, o custo de carregamento, b , é igual a 0. Assim, basta substituir nas equações (65) e (67) o valor de b por 0, e S por F , para se chegar às fórmulas de precificação dessas opções.

³⁵ Os autores sugerem utilizar o algoritmo de Newton-Raphson para achar o valor

4.1.4.1.2 Modelo de Bjerksund e Stensland³⁶

A aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) pode ser usada para precificar opções americanas de ações, contratos futuros e de taxa de câmbio.

O modelo é uma aproximação e está baseado na possibilidade de exercício da opção a partir do momento em que o preço do ativo básico atinge um limite superior, chamado de preço de disparo (I). Segundo os autores, investigações numéricas indicam que este limite mínimo é muito próximo do verdadeiro valor da opção (avaliado pelos autores através do modelo binomial).

Baseados nessas investigações numéricas, os autores afirmam também que o modelo é mais preciso para opções de longo prazo que o modelo de Barone-Adesi e Whaley. Além disso, outra vantagem do modelo está no fato de que, sendo o preço calculado um limite inferior para o verdadeiro valor da opção, o sinal do erro de aproximação é sempre conhecido. A aproximação de Bjerksund e Stensland é a seguinte³⁷:

$$C = \alpha S^\beta - \alpha \phi(S, T, \beta, I, I) + \phi(S, T, 1, I, I) - \phi(S, T, 1, X, I) - \\ - X \phi(S, T, 0, I, I) + X \phi(S, T, 0, X, I) \quad (69)$$

onde a função genérica $\phi(S, T, \gamma, H, I)$ é dada por:

³⁶ Esse item está baseado em Bjerksund & Stensland (1993) e Haug (1997).

³⁷ Este modelo também utiliza as mesmas hipóteses do modelo de Black & Scholes exceto pela possibilidade de exercício antecipado das opções, já que se trata de um modelo para opções americanas.

$$\phi(S, T, \gamma, H, I) = e^{\lambda S^\gamma} \left[N(d) - \left(\frac{I}{S} \right)^\kappa N\left(d - \frac{2 \ln(I/S)}{\sigma \sqrt{T}}\right) \right] \quad (70)$$

$$\lambda = \left[-r + \gamma b + \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) \sigma^2 \right] \cdot T$$

$$d = -\frac{\ln(S/H) + \left[b + (\gamma - 1/2) \sigma^2 \right] T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (71)$$

$$\kappa = \frac{2b}{\sigma^2} + (2\gamma - 1) \quad (72)$$

e $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$, quando a avaliação baseia-se num ativo sem risco ou no ativo básico, respectivamente.

$$\alpha = (I - X) I^{-\beta} \quad (73)$$

$$\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{b}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \frac{r}{\sigma^2}} \quad (74)$$

O preço de disparo I é definido como:

$$I = B_0 + (B_\infty - B_0) \left(1 - e^{h(T)} \right)$$

$$B_\infty = \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right) X$$

$$B_0 = \max \left[X, \left(\frac{r}{r - b} \right) \cdot X \right]$$

$$h(T) = -\left(bT + 2\sigma\sqrt{T} \right) \left(\frac{\beta_0}{\beta_\infty - \beta_0} \right) \quad (75)$$

Se $S \geq I$, deve-se exercer a opção imediatamente, e o valor deve ser igual ao valor intrínseco de $S - X$. Por outro lado, se $b \geq r$, não se deve exercer a opção antes do vencimento, e o valor pode ser encontrado usando-se a versão generalizada da fórmula de Black & Scholes. O valor de uma opção americana de venda é dada pela transformação *put-call* de Bjerksund e Stensland;

$$P(S, X, T, r, b, \sigma) = C(X, S, T, r - b, -b, \sigma) \quad (76)$$

onde $C(.)$ é o valor da opção de compra quando a taxa de juros livre de risco é $r - b$ e o custo de carregamento é igual a $-b$. Com o uso desta transformação não é necessário desenvolver uma outra fórmula para uma opção de venda americana.

4.1.4.1.3 A proposta de Chaudhury³⁸

Segundo Chaudhury (1995), a fórmula de Black para o cálculo do preço de opções européias sobre futuros, ao ignorar a possibilidade de exercício antecipado das opções americanas, subestima o valor dessas opções. Os participantes do mercado continuam, porém, a usar a fórmula de Black para muitos propósitos como, por exemplo, para calcular o valor de opções americanas sobre futuros e o requerimento de margens. Por causa de sua forma e natureza analítica, a fórmula de Black é intuitivamente atraente e extremamente fácil de se usar. Nesse aspecto, os modelos existentes de precificação de opções americanas sobre futuros são deficientes, embora eles conduzam a preços mais precisos.

³⁸ Esta subseção está baseada em Chaudhury (1995)

Os modelos apresentados a seguir são um novo caminho para avaliação de opções americanas sobre futuros³⁹. Nelas mostra-se que o valor de uma opção americana sobre futuros, que imbuir um prêmio pelo exercício antecipado, é um múltiplo (proporção) do valor da opção européia calculado pela fórmula de Black. Nas simulações feitas pelos autores, o ganho em relação à fórmula de Black é o nível de precisão, o qual é ao menos tão bom quanto o oferecido pelo método de aproximação quadrática (Barone-Adesi & Whaley, 1987), o qual é, computacionalmente falando, o mais eficiente dos métodos existentes de avaliação de opções americanas sobre futuros.

Os modelos de precificação de opções são usados para estimar o ISD (*implied standard deviation* - volatilidade implícita), ou seja, para estimar a volatilidade futura dos preços dos ativos básicos das opções atualmente considerada pelos participantes do mercado⁴⁰. A estimação do ISD usando os métodos existentes de precificação de opções americanas sobre futuros requer uma pesquisa interativa para o ISD e o preço futuro crítico acima/abaixo do qual uma opção americana sobre futuros de compra/venda seria exercida.

Segundo Shastri e Tandon (1986), citados por Chaudhury (1995), isto pode tornar-se uma tarefa de difícil execução. Essa é talvez mais uma razão porque a fórmula de precificação de opções européias de Black é preferida por muitos participantes do mercado⁴¹.

Uma vantagem dos métodos que serão apresentados, em relação à fórmula de Black, é que se evita o viés ascendente na estimação do ISD produzida por essa última, além de não haver a complicação da pesquisa conjunta para o ISD e o(s) preço(s)

³⁹ Como os dois modelos anteriores, este modelo também utiliza as mesmas hipóteses do modelo de Black & Scholes exceto pela possibilidade de exercício antecipado das opções, já que se trata de um modelo para opções americanas.

⁴⁰ Veja o capítulo 5, item 5.3, para uma definição mais detalhada de volatilidade implícita.

⁴¹ Chaudhury (1995) cita que enquanto aproximações analíticas [Barone-Adesi & Whaley (1987); Geske & Johnson (1984)] tem sido usadas em muitas pesquisas empíricas [por exemplo, Cakici, Chatterjee, & Wolf (1993); Shastri & Tandon (1986); Whaley (1986)], outras [por exemplo, Ball & Torous (1986); Wilson & Fung (1990); Wilson, Fung & Ricks (1988)] continuam a usar a fórmula de precificação de opções européias de Black.

futuro(s) crítico(s) exigida pelos métodos atuais de precificação de opções americanas sobre futuros.

Em trabalho anteriormente publicado⁴², Chaudhury provou que o preço de opções sobre futuros com ajuste do tipo *future-style*⁴³ são um limite superior para as opções sobre futuros com ajuste convencional (*stock-style*). Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} c_p &= F.N(d_1) - X.N(d_2) = \exp(rT).c \\ p_p &= X.N(-d_2) - F.N(-d_1) = \exp(rT).p \end{aligned} \quad (77)$$

onde: c_p é o preço de uma opção de compra européia sobre futuro com ajuste do tipo *future-style*, c é o preço de uma opção de compra européia sobre futuro com ajuste convencional, p_p é o preço de uma opção de venda européia sobre futuro com ajuste do tipo *future-style*, p é o preço de uma opção de venda européia sobre futuro com ajuste convencional, F é o preço futuro do ativo, X é o preço de exercício, $N(.)$ é a função de densidade padrão acumulada, $d_1 = [\ln(F/X) - 0,5s^2T] / sT^{0,5}$ e $d_2 = d_1 - sT^{1/2}$.

Partindo das equações (77) e de que as opções européias sobre futuros convencionais são um limite inferior natural para as opções americanas sobre futuros convencionais, Chaudhury mostra que o preço das opções americanas sobre futuros situa-se entre estes dois limites.

Para chegar à formula de precificação, Chaudhury define um fator multiplicativo (Φ), que pode ser interpretado como um "fator de juros economizado" (*expected interest*

⁴² CHAUDHURY, M.; WEI, J. Upper bounds for american futures options: A note. **Journal of Futures Markets**, v.14, p.111-116, 1994.

⁴³ Na negociação de opções com ajustamento do tipo *future-style*, o valor do prêmio não é pago na hora, mas depositado numa cota de margem. Nesse caso, como no mercado de contratos futuros, os ajustes são realizados diariamente. No segundo caso, opções com ajuste do tipo *stock-style*, o mais comum em todas as bolsas do mundo, o prêmio é pago na hora e o proprietário da opção só recebe o ajuste, ao qual porventura tenha direito, quando do vencimento ou exercício da opção. Outro aspecto importante das opções com ajuste do tipo *future-style* é que o valor de opções européias e americanas são iguais neste caso, pois o exercício antecipado nunca é ideal.

savings factor). Se um investidor assume uma posição comprada em uma opção européia com ajuste do tipo *future-style* para "hedgear" uma posição vendida em uma opção com ajuste comum, o valor do prêmio recebido estaria "livre" até o vencimento. Como resultado o investidor, com certeza, "economizaria juros" de $\{c[\exp(rT) - 1]\}$ ou $\{p[\exp(rT) - 1]\}$ durante toda a vida da opção. Deste modo, Φ é igual a $\exp(rT)$ para uma opção européia com ajuste do tipo *future-style*.

Como, porém, no caso de uma opção americana pode haver o exercício antecipado, o fator de juro economizado é mais uma expectativa do que uma certeza e será menor que no caso de uma opção européia. Assim, embora o comprador de uma opção americana com ajuste do estilo *future-style* "economize" mais do que o proprietário de uma opção européia (pois, $C > c$ e $P > p$), a expectativa do fator de juro economizado sendo menor faz com que o valor final das opções (americana e européia) de estilo de ajuste do tipo *future-style* sejam o mesmo. Assim, como $c_p = C_p$ e $p_p = P_p$, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} C\Phi_C &= \exp(rT)c \\ P\Phi_P &= \exp(rT)p \end{aligned} \tag{78}$$

onde: $\exp(rT) > \Phi_C > 1$, e $\exp(rT) > \Phi_P > 1$. Omitindo-se o subscrito, pode-se dizer que $\exp(rT) > \Phi$ impõe a condição de que o preço de uma opção americana sobre futuros é maior que sua análoga européia⁴⁴ e $\Phi > 1$ impõe a restrição do valor de uma opção com ajuste do estilo *future-style* ser um limite superior para uma opção com ajuste do estilo comum.

Os quatro métodos que são apresentados a seguir utilizam as seguintes equações para precificar opções americanas de compra (C) e venda (P) sobre futuros:

⁴⁴ O valor de Φ pode ser aproximado pela expressão: $\Phi \approx \exp\{E(x)\} [1 + 0,5 \text{ Var}(x)]$, onde

$x = r \int_0^T u(t) dt$, onde $u(t) = 1$ quando a taxa de juro livre de risco pode ser economizada e $u(t) = 0$ no caso contrário.

$$\begin{aligned}
 C &= \left[(1 / \Phi_C) \exp(rT) \right] c \\
 P &= \left[(1 / \Phi_P) \exp(rT) \right] p
 \end{aligned}
 \tag{79}$$

onde: Φ_C é o fator de juro economizado de uma opção de compra americana, Φ_P é o fator de juro economizado de uma opção de venda americana, c é o valor de uma opção de compra europeia e p é o valor de uma opção de venda europeia.

A diferença entre eles está no cálculo da expectativa do “fator de juros economizado - Φ (*expected interest savings factor - EISF*)” e, assim, do multiplicador que se aplica à fórmula de Black (1976) de precificação de opções sobre futuro europeias.

O primeiro dos métodos, chamado MA, assume que $n(t)$, a probabilidade do não exercício antecipado ao tempo t , move-se linearmente através do tempo⁴⁵. O método apresenta as seguintes fórmulas para precificar opções de compra (CMA) e venda (PMA) americanas sobre futuros:

$$\begin{aligned}
 \text{CMA} &= \max \{ F - X, c \exp[0,5N(d_2)rT] \} \\
 \text{PMA} &= \max \{ X - F, p \exp[0,5N(-d_2)rT] \}
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

onde (os quatro métodos utilizam a mesma notação):

F = preço corrente do contrato futuro;

X = preço de exercício da opção sobre futuro;

T = prazo de vencimento da opção sobre futuro;

r = taxa de juros livre de risco (constante);

$C(c)$ = preço da opção de compra sobre futuro americana (europeia);

⁴⁵ A equação usada para o cálculo de $n(t)$ nesse método é: $n(t) = n(0) + [n(T) - n(0)]t / T$.

$P(p)$ = preço da opção de venda sobre futuro americana (européia);

$$d_1 = [\ln(F/X) - 0,5s^2 T] / sT^{0,5}$$

$$d_2 = d_1 - sT^{0,5}$$

s = volatilidade instantânea dos preços do contrato futuro;

$N(.)$ = função de distribuição normal padrão acumulada;

$n(t)$ = probabilidade do não exercício antecipado ao tempo t ;

$n_{ce}(0)$ = valor previsto de $n(t)$, quando $t = 0$, para uma *call*;

$n_{pe}(0)$ = valor previsto de $n(t)$, quando $t = 0$, para uma *put*.

O segundo método, chamado MB, assume que $n(t)$ varia de forma exponencial a uma taxa⁴⁶ m . O método chega ao seguinte par de fórmulas para os valores das opções de compra (CMB) e venda (PMB) americanas sobre futuros:

$$\begin{aligned} \text{CMB} &= \max[F - X, c \exp(rT\{1 + N(d_2)/\ln N(-d_2)\})] \\ \text{PMB} &= \max[X - F, p \exp(rT\{1 + N(-d_2)/\ln N(d_2)\})] \end{aligned} \quad (81)$$

O terceiro método proposto por Chaudhury (1995) é uma alteração do método anterior (MB) pela adição da expressão relacionada com a variância no cálculo de Φ (veja nota de rodapé n. 44). Neste método, chamado de MC, as fórmulas para os valores das opções de compra (CMC) e venda (PMC) americanas sobre futuros são as seguintes:

$$\begin{aligned} \text{CMC} &= \max\left\{F - X, c \exp\left[rT(1 + N(d_2)/\ln N(-d_2))\right] / \left[1 - r^2 T [N(d_2)]^2 / 2 \ln[N(-d_2)]^2\right]\right\} \\ \text{PMC} &= \max\left\{X - F, p \exp\left[rT(1 + N(-d_2)/\ln N(d_2))\right] / \left[1 - r^2 T [N(-d_2)]^2 / 2 \ln[N(d_2)]^2\right]\right\} \end{aligned} \quad (82)$$

⁴⁶ O cálculo de $n(t)$ nesse método é feito através da seguinte expressão: $n(t) = n(T) \exp\{-(T-t)m\}$

Os três métodos anteriores - MA, MB e MC - estimam o valor de uma opção americana sobre futuros sob a hipótese de que a opção está "viva", isto é, não será exercida no momento t em questão. Desse modo, valores relativamente altos estão implicitamente assegurados para os vários valores de $n(t)$ num futuro próximo. Isto pode não ser razoável para opções no dinheiro onde o preço futuro corrente não está tão distante do nível crítico (valor limite para o exercício). Desde que as estimativas de preços, dadas pelos três métodos acima, não usam o preço futuro crítico corrente como um *input*, pode ocorrer uma subestimação do valor da opção. Para avaliar esse tipo de opção o autor propõe o quarto método (MR).

O quarto e último método proposto - MR - chega ao preço das opções de compra e venda, respectivamente, pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{CMR} &= \max \left\{ F - X, c \exp \left[rT \left(1 - 0,5 \left(n_{ce}(0) + N(-d_2) \right) \right) \right] \right\} \\ \text{PMR} &= \max \left\{ X - F, p \exp \left[rT \left(1 - 0,5 \left(n_{pe}(0) + N(d_2) \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (83)$$

A Tabela 5 traz o resumo dos resultados das simulações efetuadas por Chaudhury (1995) para verificar as vantagens/desvantagens, em relação a alguns aspectos selecionados, dos quatro métodos de precificação de opções sobre futuros americanas quando comparados ao método de aproximação quadrática de Barone-Adesi & Whaley (foi assumido como o valor correto das opções o calculado através do modelo binomial com 750 passos).

Tabela 5 - Comparação dos métodos MA, MB, MC e MR com o método de aproximação quadrática de Barone-Adesi & Whaley em relação a alguns aspectos selecionados

Aspecto da Opção	Resultado da Simulação
Moneyness *	Todos os quatro métodos produzem estimativas de preço mais precisas que a aproximação quadrática para opções no dinheiro, fora do dinheiro e muito fora do dinheiro.
	Para opções dentro do dinheiro e profundamente dentro do dinheiro, o método MR e a aproximação quadrática são mais precisos que os métodos MA, MB e MC. O método MR tem um desempenho relativamente melhor que a aproximação quadrática. O método MR está, em média, dentro do intervalo de um “penny” ou dois do preço binomial.
Tempo para o vencimento	Todos os quatro novos métodos produzem estimativas de preço mais precisas que a aproximação quadrática para qualquer vencimento.
	O mais simples dos métodos, MA, apresenta uma excelente precisão para opções com vencimento superior a um ano, independentemente de outros aspectos da opção (por exemplo, moneyness).
	A performance de todos os métodos deteriora-se para opções de longo prazo de vencimento. A precisão da aproximação quadrática piora consideravelmente.
Volatilidade do preço futuro	Todos os quatros novos métodos produzem uma estimativa de preço mais precisa que a aproximação quadrática independentemente do nível de volatilidade dos preços futuros.
Taxa de juros	Todos os métodos apresentados trabalham tão bem quanto a aproximação quadrática, independentemente do nível da taxa de juros.
	A precisão de todos os métodos piora um pouco com altas taxas de juros, a perda de precisão é maior (menor) no método de aproximação quadrática (MR).

FONTE: Chaudhury (1995).

* Preço futuro dividido pelo preço de exercício.

4.1.4.2 Modelos para opções européias

Embora as opções de interesse deste trabalho sejam opções sobre futuros americanas, incluiu-se nesta revisão modelos para a precificação de opções sobre futuros européias pois, de acordo com Natenberg (1994), a diferença de valor apresentado entre

modelos para opções européias e americanas pode ser insignificante se comparada às possíveis diferenças ocasionadas pela não correta determinação de outras variáveis (principalmente a volatilidade).

4.1.4.2.1 As propostas de Myers e Hanson⁴⁷

Segundo Myers e Hanson (1993), há consideráveis evidências de que mudanças proporcionais nos preços futuros de *commodities* não seguem uma distribuição normal.

Gordon (1985)⁴⁸, citado pelos autores acima, encontrou evidências, nos movimentos de preços futuros de *commodities*, de excesso de curtose e de variação da volatilidade no tempo, sugerindo sistemático desvio da normalidade.

Hausser e Neff (1985) encontraram erros sistemáticos na precificação de opções quando se usa o modelo de Black, provavelmente devido à inapropriada hipótese de distribuição de movimentos dos preços futuros.

A despeito das evidências crescentes de inadequação, em relação à hipótese acerca da distribuição das mudanças proporcionais nos preços futuros de *commodities*, o modelo padrão do mercado continua sendo o de Black (que assume essa distribuição como sendo normal, idêntica e independentemente distribuída - i.i.d.)⁴⁹.

Baillie e Myers (1991) encontraram que - quando se trabalha com um modelo heterocedástico autoregressivo condicional (GARCH), assumindo uma distribuição *t* (de Student) para distribuição condicional de mudanças de preços - os resultados são satisfatórios com respeito à modelagem do excesso de curtose e da variação temporal da volatilidade nos movimentos de preços futuros de *commodities*.

⁴⁷ O texto desta subseção está baseado no trabalho de Myers e Hanson (1993)

⁴⁸ GORDON, J.D. Distribution of daily changes in commodity futures prices. **Economics Research Service USDA**, v.1702, 1985.

⁴⁹ $\Delta f_t = \mu + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Assim, tem-se um modelo GARCH (1,1) ao se generalizar o modelo de probabilidade de movimentos dos preços futuros para:

$$\begin{aligned}\Delta f_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t | \Omega_{t-1} &\sim t(0, h_t, v) \\ h_t &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}\end{aligned}\tag{84}$$

onde: $\Delta f_t = \ln F_t - \ln F_{t-1}$ (F é o preço do contrato futuro), Ω_{t-1} é o conjunto de informações disponíveis no período $t-1$, h_t é a variância condicional das mudanças de preços futuros e $t(0, h, v)$ é a distribuição t de *Student* com variância h_t e v graus de liberdade.

Uma possível aproximação para o preço de uma opção sob o modelo de probabilidade GARCH envolve tomar a variância condicional de um período a frente, $\hat{h}_{t+1}$, estimada com o modelo GARCH usando dados até o período t , e assumir que todas as variações subsequentes de preços são normalmente distribuídas com variância constante $\hat{h}_{t+1}$. Isto conduz para a fórmula padrão de Black com $\hat{h}_{t+1}$ no lugar de σ^2 estimado a partir de volatilidades históricas.

Uma segunda aproximação envolve o uso do modelo GARCH para prever a variância de preços futuros na data de vencimento da opção (T), condicionado às informações disponíveis em t .

Usando os resultados de Baillie e Bollerslev (1990) para prever as variâncias condicionais, chega-se a uma fórmula para estimar a variância condicional de f_T no modelo GARCH (1,1):

$$\text{var}(f_T / \Omega_t) = \frac{\hat{\omega}}{(1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta})} \left[T - t - \sum_{j=1}^{T-t} (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{j-1} \right] + \hat{h}_{t+1} \sum_{j=1}^{T-t} (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{j-1}\tag{85}$$

onde: $f_T = \ln F_{T,T}$ e $F_{T,T}$ é o preço do contrato futuro no vencimento da opção.

Assim, se a distribuição de f_T condicional a Ω_t é aproximadamente normal com a variância dada pela equação acima, pode ser mostrado (Rubinstein - 1976) que a fórmula de precificação de opções de compra (c_t) é:

$$c_t = e^{r_t(t-T)} \left\{ F_t C \left(\frac{\ln(F_t/X) + 0,5 \text{ var}(f_T | \Omega_t)}{\sqrt{\text{var}(f_T | \Omega_t)}} \right) - \left[-XC \left(\frac{\ln(F_t/X) - 0,5 \text{ var}(f_T | \Omega_t)}{\sqrt{\text{var}(f_T | \Omega_t)}} \right) \right] \right\} \quad (86)$$

onde: $C(.)$ é a função de distribuição normal padrão acumulada, $F_t = E_t(F_{T,T})$ e X é o preço de exercício da opção.

Esta última aproximação é diretamente computável e tem a vantagem de considerar diretamente a variação temporal da variância. Como, porém, a hipótese de normalidade é geralmente violada na prática, a utilidade dessa aproximação dependerá da extensão em que o excesso de curtose na distribuição de f_T é importante na precificação de opções de *commodities*.

4.1.4.2.2 O modelo de Miltersen e Schwartz⁵⁰

Miltersen e Schwartz (1998) desenvolveram um modelo para a precificação de opções sobre futuros de *commodities*. É um modelo de três fatores: preços futuros, *convenience yields*⁵¹ e taxas de juros, todos estocásticos. O modelo é baseado na distribuição lognormal dos preços a vista da *commodity* e na distribuição normal das taxas de juros futuras continuamente compostas e dos futuros *convenience yields*.

⁵⁰ Esse item está baseado em Miltersen & Schwartz (1998).

⁵¹ Segundo os autores, o conceito por eles adotado de *convenience yield* é o normalmente utilizado na literatura de precificação de *commodities*, ou seja, como o fluxo de benefícios que há para o detentor da posse física do bem e não para o proprietário de um contrato para entrega futura, isto é, a *convenience yield* instantânea inclui o custo de carregamento instantâneo.

Exemplos numéricos de aplicação do modelo, apresentados pelos autores com valores reais dos parâmetros, mostram que o intervalo de tempo entre a expiração da opção e do contrato futuro básico (subjacente) tem um significativo efeito no valor da opção. Mesmo com três variáveis estocásticas, Miltersen e Schwartz obtiveram uma solução próxima de uma *closed-form*, similar ao tipo de fórmula de Black & Scholes. O modelo pode ser usado para precificar opções européias sobre futuros de *commodities*⁵².

A fórmula utilizada na precificação desse tipo de opções de compra é:

$$c = P_t \left[F_T e^{-\sigma_{xz}} N(d_1) - X N(d_2) \right] \quad (87)$$

onde: t é o tempo até o vencimento da opção, F_T é o preço do contrato futuro com vencimento em T ($T \geq t$), e P_t é um título que não distribui dividendos (*zero-coupon bond*) e que vence junto com a opção.

$$d_1 = \frac{\ln(F_T/X) - \sigma_{xz} + \sigma_z^2/2}{\sigma_z}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_z \quad (88)$$

e as variâncias e covariâncias podem ser calculadas como:

$$\sigma_z^2 = \int_0^t \left\{ \sigma_s(u) + \int_u^T [\sigma_f(u,s) - \sigma_\varepsilon(u,s)] ds \right\}^2 du = \int_0^t [\sigma_{FT}(u)]^2 du \quad (89)$$

onde:

⁵² De acordo com os autores, o método desenvolvido pode também ser aplicado para precificar derivativos mais complexos tal como opções americanas e exóticas mas, em alguns casos, métodos numéricos são necessários.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz} &= \int_0^t \left[\int_u^t \sigma_f(u,s) ds \right] \cdot \left\{ \sigma_s(u) + \int_u^T [\sigma_f(u,s) - \sigma_\varepsilon(u,s)] ds \right\} du \\
&= - \int_0^t \sigma_{Pt}(u) \cdot \sigma_{FT}(u) du
\end{aligned} \tag{90}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\sigma_{PT}(t) &= - \int_t^T \sigma_f(t,s) ds \\
\sigma_{FT}(t) &= \sigma_s(t) + \int_t^T [\sigma_f(t,s) - \sigma_\varepsilon(t,s)] ds
\end{aligned} \tag{91}$$

onde:

σ_s = Volatilidade do preço à vista da *commodity*

σ_ε = Volatilidade do futuro *convenience yield*

σ_f = Volatilidade da taxa de juros futura

De acordo com Haug (1997), esse é um modelo muito flexível onde as variâncias e covariâncias podem ter muitas especificações diferentes.

4.2 Métodos Numéricos

Segundo Humes et al. (1984), métodos numéricos são um conjunto de regras escritas sob a forma de uma sequência de operações elementares que levam à solução de um problema.

No caso de precificação de opções, pode-se dividir os métodos numéricos em duas categorias:

A. Métodos onde o processo estocástico fundamental do ativo objeto é aproximado:

A1. Modelos *Lattice* (árvores binomiais, trinomiais, etc.)

A2. Simulação de Monte Carlo

B. Métodos onde a equação parcial diferencial, que determina o preço da opção, é aproximada:

B1. Método de diferenças finitas

Segundo Barone-Adesi & Whaley (1989), os métodos numéricos são os mais precisos que existem para se calcular o valor de qualquer tipo de opção, sendo, porém, necessário um computador de grande porte para efetuar os cálculos, com a precisão recomendada, no caso de opções americanas.

Chaudhury (1995) também diz que o ponto forte dos métodos numéricos são a precisão e a flexibilidade. Saliente, porém, que eles são "desajeitados" (*cumbersome*) para calcular a volatilidade implícita e necessitam, usualmente, de um computador de grande porte para calcular com precisão o valor de opções americanas.

Chriss (1997) afirma também que, para se obter valores precisos para opções americanas, as árvores binomiais requerem um tempo de computação muito superior ao utilizado pelos modelos analíticos. Nenhum modelo analítico, porém, possui a flexibilidade e ou precisão das árvores binomiais.

No apêndice B há uma explicação mais detalhada desses métodos.

4.3 Modelos considerados no trabalho

Serão testados três dos modelos apresentados, quais sejam, o de Black, o de Barone-Adesi & Whaley e o de Bjerk Sund & Stensland.

A escolha destes modelos foi feita considerando-se os seguintes aspectos:

- facilidade de obtenção dos dados (*inputs*) exigidos pelo modelo;
- eficiência computacional (tempo gasto para execução dos cálculos); e,
- facilidade de operacionalização.

A existência destas características nos modelos a serem testados parece ser fundamental para que possam ser usados em larga escala pelos participantes do mercado.

As equações básicas desses modelos, que foram estimadas, são as seguintes:

a) Modelo de Black

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} [FN(d_1) - XN(d_2)] \\ p &= e^{-rT} [XN(-d_2) - FN(-d_1)] \end{aligned} \tag{44}$$

Onde:

c = preço de uma opção de compra européia,

p = preço de uma opção de venda européia,

F = preço corrente do contrato futuro objeto da opção,

X = preço de exercício da opção,

r = taxa de juros livre de risco (continuamente capitalizada),

T = tempo até o vencimento da opção (em anos),

σ = volatilidade do contrato futuro (desvio padrão dos retornos), e,
 $N(.)$ = função de distribuição de probabilidade acumulada de uma variável normal padronizada.

a) Modelo de Barone-Adesi & Whaley

$$\begin{aligned} C(S,T) &= c(S,T) + A_2(S/S^*)^{q_2} \text{ , quando } S < S^* \text{ , e} \\ C(S,T) &= S - X \text{ , quando } S \geq S^* \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} P(S,T) &= p(S,T) + A_1(S/S^{**})^{q_1} \text{ , quando } S > S^{**} \text{ , e} \\ P(S,T) &= X - S \text{ , quando } S \leq S^{**} \end{aligned} \quad (67)$$

onde:

c = preço de uma opção de compra européia (determinado pelo modelo de Black),

C = preço de uma opção de compra americana,

p = preço de uma opção de venda européia (determinado pelo modelo de Black),

P = preço de uma opção de venda americana,

S = preço corrente do ativo objeto da opção,

X = preço de exercício da opção,

T = tempo até o vencimento da opção (em anos),

S^* = valor crítico para o exercício de uma opção de compra americana,

S^{**} = valor crítico para o exercício de uma opção de venda americana,

$$A_2 = (S^*/q_2) \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\},$$

$$A_1 = - (S^{**}/q_1) \{1 - e^{(b-r)T} N[-d_1(S^{**})]\}, \text{ e}$$

$$q_1 \text{ e } q_2 \text{ são as raízes da equação (58): } aS^q[q^2 + (N-1)q - M/K] = 0.$$

b) Modelo de Bjerksund & Stensland

$$\begin{aligned} C &= \alpha S^\beta - \alpha \phi(S, T, \beta, I, D) + \phi(S, T, 1, I, D) - \phi(S, T, 1, X, D) - \\ &\quad - X \phi(S, T, 0, I, D) + X \phi(S, T, 0, X, D) \end{aligned} \quad (69)$$

$$P(S, X, T, r, b, \sigma) = C(X, S, T, r - b, -b, \sigma) \quad (76)$$

onde:

C = preço de uma opção de compra americana,

P = preço de uma opção de venda americana,

S = preço corrente do ativo objeto da opção,

X = preço de exercício da opção,

T = tempo até o vencimento da opção (em anos),

r = taxa de juros livre de risco (continuamente capitalizada),

b = custo de carregamento,

σ = volatilidade do ativo (desvio padrão dos retornos),

I = preço de disparo (valor do ativo acima do qual a opção de compra deve ser exercida),

$\alpha = (I - X)I^{-\beta}$, e,

$$\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{b}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \frac{r}{\sigma^2}}.$$

É importante lembrar que para se utilizar esses modelos para a precificação de opções é necessário que se tenha em mãos os valores de todas as variáveis, quais sejam: o preço do ativo básico (contrato futuro de café no nosso caso), o preço de exercício da opção, o tempo até o vencimento da opção, a taxa de juros livre de risco e a volatilidade.

A volatilidade é considerada a variável mais importante devido, principalmente, à dificuldade de estimá-la corretamente e a alta sensibilidade do preço a ser calculado em relação às variações do seu valor. No próximo capítulo se analisa com maiores detalhes dessa importante variável.

5 VOLATILIDADE

De acordo com Hull (1997), volatilidade pode ser definida de uma forma genérica como o desvio padrão dos retornos continuamente capitalizados de um ativo, expresso em percentual ao ano.

Segundo Natenberg (1994), a volatilidade é, talvez, a variável mais importante para quem atua no mercado de opções e, sem dúvida, para os que nesse mercado aplicam os modelos teóricos de determinação de prêmios. O valor da volatilidade é o grande enigma de qualquer modelo, uma vez que os demais dados (*inputs*) são de obtenção direta - preço do ativo básico, tempo até o vencimento da opção e o preço de exercício da opção - ou não afetam tão intensamente a determinação do valor da opção - taxa de juros livre de risco.

O investidor em opções, tanto quanto o em futuros, ou mesmo o investidor no mercado físico, estão interessados na direção do mercado, isto é, tentam prever se o mercado tem tendência de alta ou de baixa. Em opções, no entanto, deve-se levar em conta outra variável: a velocidade do mercado. Se o preço de um ativo não se mover com suficiente velocidade, para cima ou para baixo, as opções referentes a esse ativo perderão valor. Isso ocorre ou devido à menor probabilidade de o preço de mercado atingir seus respectivos preços de exercício, ou devido ao menor risco apresentado no mercado. Em certo sentido, a volatilidade é uma medida da velocidade do mercado. Mercados que se movem lentamente são mercados de baixa volatilidade; mercados que se movem velozmente, em qualquer sentido, são mercados de alta volatilidade.

Na determinação do valor teórico de uma opção, usa-se algum tipo de modelo de precificação de opções. Portanto, é necessário definir a volatilidade de maneira numérica para se poder utilizar tais modelos.

5.1 Tipos de Volatilidade

Segundo Natenberg (1994), existem diversas interpretações que os investidores dão para a volatilidade. São elas:

- ◆ Volatilidade futura: é o que muitos investidores gostariam de conhecer, ou seja, a volatilidade que descreve exatamente a distribuição futura dos retornos de um ativo básico (subjacente). Na teoria, este é o número ao qual nos referimos quando falamos de volatilidade dentro de um modelo teórico de precificação. Se um investidor conhecesse a volatilidade futura, ele conheceria a verdadeira volatilidade que irá ocorrer. Quando se coloca esse número em um modelo teórico, ele pode gerar um valor teórico bastante preciso pois o valor da volatilidade é o grande enigma de qualquer modelo, conforme dito antes. É claro que os investidores raramente falam sobre volatilidade futura, pois é impossível conhecê-la;
- ◆ Volatilidade histórica: embora não se possa conhecer a volatilidade futura, é necessário que tenhamos uma previsão desta se pretendemos usar um modelo teórico de precificação de opções. Para tanto, os dados históricos são um bom ponto de partida. A volatilidade, assim calculada, é chamada de volatilidade histórica;
- ◆ Volatilidade prevista⁵³: são valores fornecidos por firmas que tentam prever a volatilidade futura de um contrato. Por ser relativamente recente a

⁵³ No nosso entendimento, Natenberg está se referindo aqui aos modelos estatísticos utilizados para prever a volatilidade.

introdução das opções, a previsão da volatilidade está ainda em sua fase inicial e deve ser considerada, no melhor dos casos, um cálculo inexato; e,

♦ Volatilidade implícita: até aqui, o conceito utilizado de volatilidade foi o de desvio padrão da variação proporcional dos preços do ativo básico. Há, porém, uma outra interpretação da volatilidade que está associada mais com a opção propriamente dita do que com o ativo básico - volatilidade implícita (*implied standard deviation - ISD*). Ela é obtida resolvendo-se o modelo teórico de precificação de opções (como, por exemplo, o de Black & Scholes) para a volatilidade. Para tanto, é necessário supor que o preço da opção é conhecido (o de mercado) e a volatilidade é desconhecida (volatilidade implícita). Logo, a volatilidade implícita é aquela que, imputada em um modelo de precificação de opções, faz com que o prêmio originado por seu cálculo seja igual ao que está sendo correntemente negociado no mercado. A volatilidade implícita pode ser usada para monitorar a opinião do mercado sobre a volatilidade de certo ativo, que muda com o tempo. Ela também é usada para calcular o preço de uma opção a partir do preço de outra opção. É comum obter simultaneamente muitas volatilidades implícitas para diferentes opções do mesmo ativo, para depois calcular, através de uma média ponderada adequada, uma volatilidade implícita composta para o ativo. O peso de cada volatilidade implícita deve refletir a sensibilidade do preço da opção à volatilidade.

De acordo com Natenberg (1994), todos os tipos de volatilidade são de interesse para estudo teórico. Contudo, dois são de importância fundamental: a futura e a implícita. A futura, se pudéssemos calculá-la, habilitar-nos-ia a conhecer o valor das opções referentes a dado ativo. A implícita nos dá o preço das opções no mercado. O que precisamos saber de fato, nos mercados, é a diferença entre valor e preço da opção. Se fosse possível conhecer isso, saber-se-ia imediatamente quando comprar e quando vender uma opção.

Neste trabalho utilizou-se, no cálculo dos prêmios das opções, os conceitos de volatilidade histórica e volatilidade implícita. Eles são melhor discutidos nos próximos itens.

5.2 Volatilidade histórica

Pode-se entender a volatilidade histórica como o desvio padrão, expresso em porcentagem ao ano, dos retornos continuamente capitalizados de um ativo (valorado pelo seu preço *spot*).

O cálculo da volatilidade (σ) a partir de dados históricos dos preços de uma ação pode ser obtido, segundo Hull (1997), através das seguintes fórmulas:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}$$

ou

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2} \quad (92)$$

onde⁵⁴:

s = volatilidade histórica (desvio padrão dos retornos continuamente capitalizados);

n = número de variações nos preços (considera-se, portanto, $n + 1$ observações dos preços);

$r_i = \ln(S_i / S_{i-1})$, sendo S_i o preço da ação no final do i -ésimo intervalo ($i = 1, 2, \dots, n$);

$\bar{r}$ = média de r_i .

⁵⁴ A expressão $\ln(S_i / S_{i-1})$ é o retorno, capitalizado de forma contínua, fornecido pela ação (que não paga dividendos) no intervalo $(S_i - S_{i-1})$. Os valores de S_i e S_{i-1} são, normalmente, os preços de fechamento dos dias i e $i-1$.

Como r_i é o retorno continuamente capitalizado do preço da ação, e o desvio padrão dos valores de r_i é $\sigma\sqrt{T}$, a variável s é uma estimativa de $\sigma\sqrt{T}$. Assim, σ pode ser estimado como:

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{T}} \quad (93)$$

onde T é o intervalo de tempo em anos entre dois dados consecutivos da amostra. O erro padrão dessa estimativa é de aproximadamente $\sigma/\sqrt{2n}$.

A escolha do valor de n não é uma tarefa fácil, porém, é certo que mais informações conduzem a uma maior precisão. Entretanto, segundo Hull (1997), σ realmente muda com o tempo, e as informações muito antigas podem não ser relevantes para prever o futuro.

Segundo Silva Neto (1996), o método aqui descrito é largamente usado pelos investidores para prever a volatilidade. Entretanto, Engle (1993) alerta para o fato que diversos outros métodos têm sido desenvolvidos utilizando-se ferramentas estatísticas mais poderosas. Este trabalho, porém, limitou-se a utilizar o cálculo tradicional de volatilidade histórica.

Neste trabalho, utilizou-se as fórmulas (92) e (93) para o cálculo da volatilidade histórica, com $n = 20$ e S_i = valor de ajuste do contrato futuro de café objeto do contrato de opção. Segundo Pelly (1989), qualquer método de estimação da volatilidade histórica envolve um *tradeoff* entre o aumento da eficiência com o aumento de n (número de dias usados no cálculo), e a probabilidade da estrutura a termo da volatilidade ter mudado durante o período de tempo em questão. Assim, o ideal seria usar o menor número de observações que forneça um valor não viesado para a volatilidade. Porém, quando o número de observações é menor do que 20, para se obter uma estimativa não viesada da volatilidade histórica deve-se multiplicá-la por um fator de conversão. Portanto, para

evitar tal complicação, mas ainda tentar capturar qualquer possível mudanças na estrutura da volatilidade, o número de observações sugerido é de 20.

5.3 Volatilidade implícita

Como a volatilidade implícita é calculada através de um modelo teórico de precificação de opções, o valor calculado pode diferir ao utilizarmos um modelo ou outro e, para algumas opções, a diferença pode ser significativa.

A precisão do cálculo da volatilidade implícita também depende da precisão dos dados requeridos pelo modelo (*inputs*). Particularmente, pode haver problemas quando uma opção não é negociada há algum tempo e as condições de mercado mudaram significativamente.

O valor da volatilidade implícita muda constantemente, porque os preços das opções, assim como outras condições do mercado, estão em constante mudança. É como se o mercado estivesse continuamente levantando a opinião de todos os participantes para chegar a uma volatilidade de consenso para o ativo básico. Assim, quando as ofertas de compra (*bid*) e de venda (*asked*) são lançadas, o preço de negociação de uma opção representará o equilíbrio entre oferta e demanda. Este equilíbrio pode ser traduzido numa volatilidade implícita. Por esse motivo, é comum entre os investidores referir-se à volatilidade implícita como o prêmio ou nível de prêmio de uma opção.

5.3.1 Cálculo da volatilidade implícita

Como já vimos, a volatilidade implícita é aquela que, aplicada a um modelo de precificação de opções, torna o prêmio teórico igual ao prêmio de mercado.

Porém, como as fórmulas mais usadas no mercado para precificação de opções (Black & Scholes, Black, Binomial, etc.) não permitem que se isole a variável volatilidade, isto tem de ser feito por processos iterativos de tentativa e erro, como o

algoritmo de aproximação de Newton-Raphson⁵⁵ ou o Método da Bisseção (*Bisection Method*), ou ainda outras fórmulas, como as encontradas, Feinstein (1988) e Brenner e Subrahmanyam (1988), entre outros.

Neste trabalho, utilizou-se o método de Newton-Raphson, que usa a seguinte fórmula:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{c(\sigma_i) - c_m}{\partial c / \partial \sigma_i} \quad (94)$$

onde: σ_i é a volatilidade, c_m é o preço de mercado da opção, $c(\sigma_i)$ é o valor calculado pela Fórmula de Black & Scholes (FBS) e $\partial c / \partial \sigma_i$ é o vega - sensibilidade do valor da opção a pequenas mudanças na volatilidade - da opção quando precificada utilizando-se o valor da volatilidade σ_i .

Deve-se repetir o processo até que $|c_m - c(\sigma_{i+1})| \leq \varepsilon$, que é o ponto onde σ_{i+1} é a volatilidade implícita (ε é o grau de precisão desejado). Segundo Haug (1997), raramente são necessárias mais do que duas ou três repetições para convergir para o valor correto (segundo a precisão esperada).

Silva Neto (1996) também descreve o método de Newton-Raphson, porém com o nome de "Método por Tentativa e Erro usando a Fórmula do Vega". De acordo com Silva Neto (1996), o processo consiste em estimar um primeiro número para a volatilidade (v_i) e aplicá-lo à FBS para se obter o valor teórico da opção (C_i) para essa volatilidade. Em seguida, calcula-se o vega (V_i) para esta volatilidade (v_i) e, por fim, utiliza-se esses valores (C_i , V_i e v_i) para calcular a volatilidade implícita. Repetir o processo utilizando-se agora o valor calculado para a volatilidade implícita para alimentar a FBS (no lugar de v_i). O processo termina quando, ao aplicarmos o valor

⁵⁵ Uma explicação detalhada do método, incluindo exemplos, pode ser encontrada em Chriss (1997).

calculado para a volatilidade implícita na FBS, chegarmos ao valor teórico que se iguala ao preço de mercado.

As fórmulas são:

$$V_i = S\sqrt{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} \quad (95)$$

$$\text{Volatilidade implícita} = v_i - \frac{C_i - p}{V_i} \quad (96)$$

onde:

S = Preço da ação

T = Tempo para o vencimento

$$h = \frac{\ln(S/X) + (r + v_i^2/2)T}{v_i\sqrt{T}}$$

X = Preço de exercício

r = Taxa de juros livre de risco

v_i = Volatilidade

C_i = Valor teórico da opção para a volatilidade v_i

V_i = Vega da opção para o valor teórico C_i

p = Valor do prêmio de mercado.

No presente trabalho foi utilizada a equação (96) para o cálculo da volatilidade implícita.

5.3.2 Volatilidade implícita e a precificação de opções

Jarrow e Wiggins (1989) demonstram em seu trabalho que as volatilidades implícitas calculadas a partir da FBS podem ser usadas para avaliar opções em muitas situações onde as hipóteses do modelo de Black & Scholes são violadas, incluindo: (i) hipóteses alternativas para a distribuição lognormal dos preços futuros, (ii) taxas de juros

estocásticas, e (iii) presença de fricção no mercado. Os autores consideram que, dada sua simplicidade computacional, o procedimento apresentado no trabalho (utilização da FBS usando o *ISD*) oferece uma atraente alternativa a modelos mais complexos.

Segundo Pelly (1989), não há consenso na literatura de opções de ações sobre qual valor da volatilidade implícita deve ser utilizado no cálculo do prêmio destas opções. Melhor explicando, devido ao fato de se ter diversos vencimentos e diversos preços de exercício para opções sobre um mesmo ativo, há diversos valores para a volatilidade implícita.

Beckers (1981)⁵⁶, citado por Pelly (1989), encontrou que a volatilidade implícita da opção de curto prazo que se encontra "no dinheiro" é a melhor estimativa para a volatilidade implícita das opções de ações. De acordo com Pelly (1989), este parece ser também o método escolhido por muitos pesquisadores empíricos de opções sobre futuros.

Turvey (1990) analisou quatro métodos diferentes de ponderar a volatilidade implícita para usá-la no cálculo do prêmio de cada classe de opções⁵⁷ de venda sobre futuros de soja e boi (*live cattle*), negociadas nos EUA no período de janeiro de 1987 a dezembro de 1988. Os métodos analisados foram: (i) a média aritmética das volatilidades implícitas de todas as opções da classe da opção em questão; (ii) a volatilidade implícita da opção mais próxima de estar no dinheiro dentre as opções da classe da opção em análise; (iii) uma média, ponderada pelas derivadas das opções em relação às suas volatilidades, das volatilidades implícitas das opções da mesma classe da opção de interesse; e (iv) um método que faz uso de uma média, ponderada pelas elasticidades das opções em relação às suas volatilidades, das volatilidades implícitas das opções da classe da opção a ser precificada.

⁵⁶ BECKERS, S. Standard deviations implied in options prices as predictors of future stock price variability. *Journal of Banking and Finance*, v.5, p. 363-382, Sep. 1981.

⁵⁷ Uma classe de determinada opção compreende todas as opções de mesmo vencimento, mas com diferentes preços de exercício, lançadas sobre determinado contrato futuro.

O autor acima concluiu que, para as opções analisadas, o melhor método era o que utilizava a média, ponderada pelas derivadas dos preços das opções em relação às suas volatilidades, das volatilidades implícitas das opções da mesma classe da opção de interesse.

Neste trabalho, utilizou-se, devido aos problemas impostos pela baixa liquidez do mercado de opções analisado, uma adaptação do método da média aritmética das volatilidades implícitas de todas as opções da classe da opção em questão. A descrição detalhada do método usado encontra-se no item 6.3.

5.4 Relação entre a volatilidade implícita e a volatilidade histórica

A volatilidade implícita pode ser entendida como uma volatilidade de consenso, entre todos os participantes do mercado, com respeito às flutuações esperadas nos preços do ativo básico até o vencimento da opção. Do mesmo modo que um investidor provavelmente mudará sua previsão da volatilidade em resposta às mudanças na volatilidade histórica, é bastante lógico assumir que o mercado como um todo também mudará sua volatilidade de consenso quando houver mudanças na volatilidade histórica.

Quando comparamos os gráficos da volatilidade histórica (recente) com o da volatilidade implícita, notamos que, normalmente, as flutuações na volatilidade histórica são acompanhadas por flutuações na volatilidade implícita, mas a amplitude da flutuação normalmente é menor na última.

Devido à característica de *mean reverting*⁵⁸ da volatilidade, a volatilidade implícita de opções de longo prazo tende a ficar mais próxima da volatilidade média que a de opções de curto prazo. Assim, quando a volatilidade histórica aumenta (diminui), é provável que a volatilidade implícita de todas opções aumente (diminua), porém, dada a

⁵⁸ Segundo Natenberg (1994), a volatilidade de um ativo pode variar consideravelmente ao longo do tempo, porém, parece apresentar um valor de equilíbrio ao qual sempre retorna. Essa característica é chamada de *mean reverting*.

característica acima exposta, o aumento (diminuição) deverá ser menor nas opções de longo do que nas de curto prazo.

Sobre longos períodos de tempo a volatilidade histórica do ativo básico será o fator dominante a afetar a volatilidade implícita. Entretanto, quando consideramos períodos de tempo curtos, outros fatores podem sobrepujar o papel desta. Se o mercado prevê eventos que podem tornar o ativo básico mais volátil, a antecipação desses eventos pode fazer com que a volatilidade implícita mude numa direção e/ou proporção que não necessariamente será consistente com a volatilidade histórica.

6 METODOLOGIA E FONTE DE DADOS

6.1 Procedimentos e problemas em testes empíricos

De acordo com Pelly (1989), os tipos de testes normalmente aplicados para avaliar a performance de modelos de precificação de opções são: testes de exatidão (*accuracy*) e testes de eficiência. Os testes de exatidão comparam o preço teórico calculado pelo modelo com o correspondente valor de mercado da opção, através de um cálculo da diferença relativa entre o preço de mercado e o respectivo preço teórico.

Um outro teste para avaliar o valor de um modelo teórico é a determinação da possibilidade de sua utilização para obtenção de lucro sem risco (teste de eficiência). Em um mercado eficiente⁵⁹, um hedge sem risco não produzirá um retorno maior que a taxa de juros livre de risco. Desse modo, a hipótese nula de mercado eficiente é testada usando um estratégia de hedging *ex post*.

Para iniciar a estratégia de hedging, *portfolios* sem risco são construídos a partir do lançamento de opções subprecificadas pelo modelo, e da compra de opções sobreprecificadas pelo modelo, junto com a correspondente posição comprada ou vendida no ativo básico.

⁵⁹ Segundo Hull (1997), mercado eficiente é aquele em que os preços dos ativos refletem todas as informações relevantes disponíveis naquele momento.

O número de opções compradas ou vendidas para cada unidade do ativo básico é o recíproco da relação de hedge. Posteriormente, os *portfolios* "hedgeados" são liquidados em algum ponto predefinido do tempo e as taxas de retorno são calculadas. Se o retorno obtido com o *portfolio* "hedgeado" (sem considerar os custos de transação) for maior que o que deveria ter sido obtido através do investimento em um título livre de risco, a hipótese nula é rejeitada e o mercado é dito ineficiente com respeito ao modelo de opção avaliado. Este teste assume que o modelo está corretamente especificado e que as variáveis do modelo estão corretamente estimadas.

Segundo Followill (1987)⁶⁰, citado por Pelly (1989), economistas de finanças consideram os testes de eficiência falhos como um critério de performance de um modelo de precificação, devido à dificuldade de responder às seguintes questões: caso o valor do modelo teórico seja igual ao observado no mercado, podemos dizer que este fato configura uma prova inequívoca da eficiência do mercado? Do mesmo modo, podemos dizer que qualquer valor diferente de zero para o excesso de retorno demonstra que o mercado é ineficiente? A hipótese nula seria de um mercado eficiente *per se* ou de uma união das hipóteses de mercado eficiente, de especificação do modelo e de correta estimação das variáveis?

Dadas as críticas existentes na literatura a respeito do teste de eficiência, optou-se por realizar apenas o teste de exatidão.

6.2 Testes estatísticos utilizados

Como comentado no item 4.3, os modelos de precificação de opções a serem considerados são os de Black, o de Barone-Adesi & Whaley e o de Bjerk Sund & Stensland. Com cada um desses modelos serão calculados dois valores para cada uma das opções

⁶⁰ FOLLOWILL, R. A. Relative Call Futures Option Pricing: An Examination of Market Efficiency. *The Review of Futures Markets*, 6, p 354-389, 1987.

analisadas, um utilizando o valor da volatilidade implícita e outro utilizando o valor da volatilidade histórica.

Como foram testados três modelos e dois métodos diferentes de cálculo da volatilidade, obteve-se, ao final, seis valores teóricos calculados para cada opção.

Para se avaliar a precisão dos modelos usou-se um teste simples de erro quadrático médio (*root mean-square error -RMSE*). A interpretação dos resultados deste teste é extremamente simples: o modelo que apresentar o menor *RMSE* é o que melhor estima o verdadeiro preço de mercado da opção.

A fórmula empregada neste teste é a seguinte:

$$RMSE_j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum \left(\frac{Q_{MKT_i} - Q_{MODEL_{ij}}}{Q_{MKT_i}} \right)^2} \quad (97)$$

onde n é o número de opções avaliadas, Q_{MKT_i} é o preço de mercado da opção i e $Q_{MODEL_{ij}}$ é o preço da opção i calculada pelo modelo j (Q pode ser tanto uma opção de compra "C" como uma venda "P").

Esta medida de exatidão é sugerida por Pelly (1989), Myers & Hanson (1993) e por Broadie & Detemple (1996).

Além do teste acima citado, efetuou-se dois testes de hipóteses com as seguintes finalidades: (i) confirmar, estatisticamente, a exatidão dos modelos escolhidos (ii) averiguar se há diferença, estatisticamente significativa, entre os valores calculados pelos modelos. Para a realização dos testes de hipótese foi necessário que se fizesse algumas definições, a seguir discutidas.

Inicialmente, definiu-se o logaritmo da razão entre o preço de mercado da opção⁶¹ i , e o preço da mesma opção calculado de acordo com o modelo j , como $F_{(MKTMODj)i}$, dado por:

$$F_{(MKTMODj)i} = \ln \left(\frac{Q_{MKTi}}{Q_{MODELij}} \right) \quad (98)$$

onde:

Q_{MKTi} é o preço de mercado da opção i .

$Q_{MODELij}$ é o preço teórico da opção i calculado pelo modelo j ;

Este valor de $F_{(MKTMODj)i}$ se aproxima, matematicamente, para pequenas diferenças entre os valores, da diferença percentual relativa entre o preço de mercado da opção i e o preço calculado pelo modelo j para a mesma opção⁶². Isto quer dizer, em outras palavras, que a taxa de crescimento se aproxima da taxa de desconto.

Os valores calculados pelos j modelos testados foram nomeados da seguinte maneira:

- BVH - Valor calculado pelo modelo de Black usando o valor calculado da volatilidade histórica;
- BVI - Valor calculado pelo modelo de Black usando o valor calculado da volatilidade implícita;
- BSVH - Valor calculado pelo modelo de Bjerk Sund & Stensland usando o valor calculado da volatilidade histórica;
- BSVI - Valor calculado pelo modelo de Bjerk Sund & Stensland usando o valor calculado da volatilidade implícita;

⁶¹ O subscrito i engloba aqui quatro características que, juntas, definem de modo inequívoco cada uma das opções analisadas. Essas características são: se a opção é de compra (C) ou venda (P), o preço de exercício da opção, o contrato futuro ao qual ela se refere (mês de vencimento) e o tempo até o vencimento.

⁶² $\ln \left(\frac{Q_{MKTi}}{Q_{MODELij}} \right) \cong \left(\frac{Q_{MKTi} - Q_{MODELij}}{Q_{MKTi}} \right)$

BWVH - Valor calculado pelo modelo de Barone Adesi & Whaley usando o valor calculado da volatilidade histórica;

BWVI - Valor calculado pelo modelo de Barone Adesi & Whaley usando o valor calculado da volatilidade implícita.

Definiu-se, em seguida, a média das diferenças percentuais relativas dos preços das opções i praticados pelo mercado, em relação aos preços calculados conforme o modelo j como $\bar{F}_{(MKTMODj)}$:

$$\bar{F}_{(MKTMODj)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{(MKTMODj)i} \quad n = \text{número de opções da amostra} \quad (99)$$

O primeiro teste comparou as seguintes hipóteses para os valores de $\bar{F}_{(MKTMODj)}$:

$$H_0: \mu = 0$$

$$H_1: \mu > 0$$

onde: μ = a média populacional das diferenças dos logaritmos dos preços de mercado das opções i e os logaritmos dos preços calculados pelo modelo j para as mesmas opções.

Neste caso, optou-se pelo teste unilateral pois há a suspeita de que o preço no qual a opção foi negociada no mercado seja maior do que o preço fornecido pelos modelos. Tal suspeita baseia-se no afirmado por Martits (1998), segundo o qual mercados pouco líquidos apresentam um alto custo, chamado custo de liquidez. Como, porém, esses custos não são totalmente captados pelos modelos, mas estão incorporados aos preços praticados no mercado, é possível se esperar o resultado acima descrito.

Para realizar o segundo teste de hipótese, definiu-se o logaritmo da razão entre cada par de preços calculados por dois modelos (j e k) para a opção i como $F_{(MODjMODk)i}$:

$$F_{(\text{MODjMODk})i} = \ln \left(\frac{Q_{\text{MODELj}i}}{Q_{\text{MODELk}i}} \right) \quad j \neq k \quad (100)$$

onde:

$Q_{\text{MODELj}i}$ é o preço teórico da opção i calculado pelo modelo j (BVH, BVI, BSVH,BSVI,BWVH ou BWVI) ;

$Q_{(\text{MODELk}i)}$ é o preço teórico da opção i calculado pelo modelo k (BVH, BVI, BSVH,BSVI,BWVH ou BWVI).

Novamente, este valor se aproxima matematicamente, para pequenas diferenças entre os preços, da diferença percentual relativa entre o preço calculado pelo modelo k e o preço calculado pelo modelo j , para a mesma opção.

Definiu-se, em seguida, a média das diferenças percentuais relativas dos preços das opções i , calculados conforme o modelo j , em relação aos preços calculados pelo modelo k como $\bar{F}_{(\text{MODjMODk})}$:

$$\bar{F}_{(\text{MODjMODk})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{(\text{MODjMODk})i} \quad n = \text{número de opções da amostra} \quad (101)$$

O segundo teste de hipótese verificou a veracidade da seguinte hipótese de nulidade para os valores de $\bar{F}_{(\text{MODjMODk})}$:

$$H_0: \mu = 0$$

$$H_1: \mu \neq 0$$

onde: μ = média populacional das diferenças dos logaritmos dos preços das opções i , calculados conforme o modelo j , em relação aos logaritmos dos preços calculados pelo modelo k .

Neste teste comparou-se, dois a dois, apenas os modelos com mesmo método de cálculo da volatilidade, dada a grande diferença observada nos resultados dos modelos com cálculos de volatilidade diferentes.

Assim, os testes de hipóteses referentes aos valores das expressões (99) e (101) foram realizados nos seguintes conjuntos de dados:

- Todos os dados da amostra (TODOS - com 521 observações);
- Somente as opções de compra (COMPRA TOTAL - com 238 observações);
- Somente as opções de venda (VENDA TOTAL - com 283 observações);
- Todas as opções de compra e de venda que se encontravam no dinheiro (*AT* TOTAL - com 161 observações);
- Todas as opções de compra que se encontravam no dinheiro (*AT* COMPRA TOTAL - com 65 observações);
- Todas as opções de venda que se encontravam no dinheiro (*AT* VENDA TOTAL - com 96 observações);
- Todas as opções de compra e de venda que se encontravam dentro do dinheiro (*IN* TOTAL - com 58 observações);
- Todas as opções de compra que se encontravam dentro do dinheiro (*IN* COMPRA TOTAL - com 21 observações);
- Todas as opções de venda que se encontravam dentro do dinheiro (*IN* VENDA TOTAL - com 37 observações);
- Todas as opções de compra e de venda que se encontravam fora do dinheiro (*OUT* TOTAL - com 302 observações);
- Todas as opções de compra que se encontravam fora do dinheiro (*OUT* COMPRA TOTAL - com 152 observações);
- Todas as opções de venda que se encontravam fora do dinheiro (*OUT* VENDA TOTAL - com 150 observações);

Para efeito da classificação quanto a *moneyness* (M) considerou-se os seguintes limites arbitrários, sugeridos por Hauser & Lauterbach (1997):

- Opções no dinheiro (AT): $0,95 < M < 1,05$;
- Opções dentro do dinheiro (IN): $M \geq 1,05$;
- Opções fora do dinheiro (OUT): $M \leq 0,95$.

onde:

$M = F/X$ para opções de compra;

$M = X/F$ para opções de venda;

F = preço corrente do contrato futuro objeto da opção; e,

X = preço de exercício da opção.

Estas subdivisões dos dados justificam-se pela possibilidade de haver um desempenho diferente dos modelos em função das opções a serem precificadas estarem no dinheiro, fora do dinheiro ou dentro do dinheiro e/ou serem de compra ou de venda.

Realizou-se também, para os mesmos conjuntos de dados acima, testes de exatidão (RMSE) e testes de hipótese, com a finalidade de confirmar, estatisticamente, a exatidão dos valores fornecidos pelos métodos escolhidos para calcular a volatilidade histórica e implícita em relação aos valores da volatilidade real⁶³.

Para realização dos testes de hipótese foi necessário se fazer algumas definições, a seguir detalhadas.

Inicialmente, definiu-se os logaritmos das razões entre a volatilidade real do preço do ativo básico (contrato futuro de café) da opção i e o valor da volatilidade da mesma opção, calculado de acordo com cada um dos dois métodos escolhidos, como $F_{(VOLREAL/VOLHIST)i}$ e $F_{(VOLREAL/VOLIMPLIC)i}$. Definiu-se também o logaritmo da razão entre a volatilidade histórica e a volatilidade implícita de uma opção i como $F_{(VOLHIST/VOLIMPLIC)i}$:

⁶³ A volatilidade real foi calculada pelo desvio padrão dos retornos continuamente capitalizados dos contratos futuros entre o dia de negociação da opção e o dia do seu vencimento.

$$F_{(\text{VOLREAL} / \text{VOLHIST})i} = \ln\left(\frac{\sigma_{(\text{VOLREAL})i}}{\sigma_{(\text{VOLHIST})i}}\right) \quad \text{e} \quad F_{(\text{VOLREAL} / \text{VOLIMPLIC})i} = \ln\left(\frac{\sigma_{(\text{VOLREAL})i}}{\sigma_{(\text{VOLIMPLIC})i}}\right) \quad (102)$$

$$F_{(\text{VOLHIST} / \text{VOLIMPLIC})i} = \ln\left(\frac{\sigma_{(\text{VOLHIST})i}}{\sigma_{(\text{VOLIMPLIC})i}}\right) \quad (103)$$

onde:

$\sigma_{(\text{VOLREAL})i}$ é o valor real da volatilidade da opção i calculada *ex-post*;

$\sigma_{(\text{VOLIMPLIC})i}$ é o valor da volatilidade implícita da opção i , calculada através da equação (96);

$\sigma_{(\text{VOLHIST})i}$ é o valor da volatilidade histórica da opção i , calculada através da equação (93).

Estas fórmulas se aproximam, respectivamente, para pequenas diferenças entre os valores, das diferenças percentuais relativas entre os valores da volatilidade real da opção i e o valor da volatilidade histórica da mesma opção, entre o valor da volatilidade real e da volatilidade implícita e entre o valor da volatilidade histórica e da volatilidade implícita⁶⁴. Isto quer dizer, em outras palavras, que a taxa de crescimento se aproxima da taxa de desconto.

Definiu-se, em seguida, as médias das diferenças percentuais relativas dos valores das variáveis acima como $\bar{F}_{(\text{VOLREAL} / \text{VOLHIST})}$, $\bar{F}_{(\text{VOLREAL} / \text{VOLIMPLIC})}$ e $\bar{F}_{(\text{VOLHIST} / \text{VOLIMPLIC})}$:

$$\bar{F}_{(\text{VOLREAL} / \text{VOLHIST})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{(\text{VOLREAL} / \text{VOLHIST})i} \quad n = \text{número de opções da amostra} \quad (104)$$

64

$$\ln\left(\frac{\sigma_{(\text{VOLREAL})i}}{\sigma_{(\text{VOLHIST})i}}\right) \cong \left(\frac{\sigma_{(\text{VOLREAL})i} - \sigma_{(\text{VOLHIST})i}}{\sigma_{(\text{VOLREAL})i}}\right) \quad \text{e} \quad \ln\left(\frac{\sigma_{(\text{VOLREAL})i}}{\sigma_{(\text{VOLIMPLIC})i}}\right) \cong \left(\frac{\sigma_{(\text{VOLREAL})i} - \sigma_{(\text{VOLIMPLIC})i}}{\sigma_{(\text{VOLREAL})i}}\right) \quad \text{e}$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_{(\text{VOLHIST})i}}{\sigma_{(\text{VOLIMPLIC})i}}\right) \cong \left(\frac{\sigma_{(\text{VOLHIST})i} - \sigma_{(\text{VOLIMPLIC})i}}{\sigma_{(\text{VOLHIST})i}}\right)$$

$$\bar{F}_{(VOLREAL / VOLIMPLIC)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{(VOLREAL / VOLIMPLIC)i} \quad n = \text{número de opções da amostra} \quad (105)$$

$$\bar{F}_{(VOLHIST / VOLIMPLIC)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{(VOLHIST / VOLIMPLIC)i} \quad n = \text{número de opções da amostra} \quad (106)$$

Os testes de hipóteses comparam as seguintes hipóteses para os valores de $\bar{F}_{(VOLREAL / VOLHIST)}$ e $\bar{F}_{(VOLREAL / VOLIMPLIC)}$:

$$H_0: \mu = 0$$

$$H_1: \mu \neq 0$$

onde: μ = média populacional da soma das diferenças dos logaritmos das volatilidades reais das opções i e dos logaritmos dos valores calculados das volatilidades históricas e implícitas para as mesmas opções.

Um segundo teste de hipótese verificou a veracidade da seguinte hipótese de nulidade para os valores de $\bar{F}_{(VOLHIST / VOLIMPLIC)}$:

$$H_0: \mu = 0$$

$$H_1: \mu < 0$$

onde: μ = média populacional da soma das diferenças dos logaritmos das volatilidades históricas das opções i em relação aos logaritmos das volatilidades implícitas das mesmas opções.

Neste caso, optou-se pelo teste unilateral pois há a suspeita de que a volatilidade histórica seja menor do que a volatilidade implícita para uma opção i qualquer. Esta suspeita é baseada em Pelly (1989), segundo o qual a volatilidade implícita é normalmente maior que a volatilidade histórica pois traz imbutido no seu valor um prêmio pelo risco.

O valor do teste t utilizado⁶⁵ para verificar a significância dos testes de hipótese aplicados foi obtido pela fórmula:

$$t = \frac{\bar{F} - \mu}{s / \sqrt{n}} \quad (107)$$

onde:

s é o desvio padrão da amostra e as demais variáveis seguem as definições já descritas.

6.3 Dados utilizados

Os dados utilizados sobre as opções sobre contratos futuros de café foram obtidos junto à BM&F. Vale destacar que, devido à baixa liquidez e ao fato dos mercados de opções agrícolas serem relativamente recentes na BM&F, quando comparados com as principais bolsas que negociam esses tipos de contratos no mundo, a qualidade dos dados disponíveis para pesquisa impossibilitou uma maior precisão da mesma. Como exemplo, podemos citar a não disponibilidade do horário das negociações efetuadas, tanto no mercado futuro quanto no de opções.

Melhor explicando, segundo Pelly (1988), em virtude das opções serem ativos derivativos (o valor de uma opção é função do preço do ativo básico), a ligação essencial entre um valor não viesado de um modelo teórico e o verdadeiro valor de mercado é a existência de uma contemporaneidade entre a negociação da opção e o preço do ativo básico na hora em que a opção é negociada. Como exemplo, Jordan et al. (1987) mostraram que a variância dentro de um dia de negociação para contratos futuros de soja é 30% maior durante os primeiros e os últimos 45 minutos de pregão. Assim, fica claro que a não existência desse tipo de informação pode causar distorções nos resultados da pesquisa.

⁶⁵ É importante lembrar que quando se analisa os resultados de um teste t se esta assumindo, a priori, que a variável F tem distribuição normal.

Foram analisados os valores das opções de compra e venda sobre contratos futuros de café com vencimento entre fevereiro/97 e agosto/99 (quatorze vencimentos), observando-se apenas os dias em que houve negócios. A análise dos dados até agosto de 1999 é proposital para excluir informações que possam ser afetadas pela internacionalização das operações agrícolas da BM&F. Além disso, esse período foi escolhido por ser o mais recente e possuir o maior volume de negociação com opções após a saída dos fundos de *commodities* deste mercado, pois a atuação destes últimos foi marcada pela ocorrência de operações casadas⁶⁶, o que inviabiliza um estudo técnico dos preços praticados naquela época.

O número total de observações inicialmente coletadas no período escolhido foi de 886. Fez-se, então, seguindo metodologia sugerida por Lauterbach & Schultz (1990), uma primeira filtragem nos dados a fim de excluir aqueles que não se enquadravam dentro das condições de não arbitragem imposta pelo modelo de Black⁶⁷. Uma segunda filtragem foi feita para excluir os dados de opções que foram negociadas abaixo do custo de transação, pois, segundo Shastri & Tandon (1986), os investidores provavelmente não comprariam ou venderiam opções por um prêmio que não cobrisse pelo menos os custos de transação⁶⁸. Finalmente, em virtude da metodologia usada para o cálculo da volatilidade implícita, foram eliminados os dados referentes ao primeiro dia em que cada vencimento foi negociado. Assim, chegou-se ao final com um total de 521 observações.

Os dados utilizados nos cálculos das volatilidades e dos valores teóricos da opções foram:

⁶⁶ Segundo Martits (1998), as operações de box de quatro pontas (ou box fechado) representavam grande parte das operações com opções sobre futuros de café na época em que os fundos de *commodities* atuaram neste mercado. Segundo este mesmo autor, tais operações envolvem um acordo prévio entre o lançador e o titular das opções, oferecendo também um menor risco do que as outras operações com opções, sendo assim a melhor alternativa encontrada por esses fundos para atender à obrigatoriedade legal.

⁶⁷ Foram excluídos os dados de negócios com opções de compra/venda em que não se observaram, respectivamente, as seguintes condições: $C \geq F - X$ e $P \geq X - F$. Tal exclusão é feita pois, caso contrário, não é possível se calcular a volatilidade implícita através do modelo.

⁶⁸ Os custos foram calculados seguindo as cláusulas constantes dos contratos de opções de compra e de venda sobre futuros de café da BM&F.

- Preço corrente do contrato futuro (ativo objeto da opção) - foi utilizado o preço de ajuste do dia de negociação da opção, devido à falta de dados mais detalhados;
- Preço de exercício da opção - foi utilizado o valor constante das planilhas fornecidas pela BM&F;
- Tempo até o vencimento - foi utilizado o valor fornecido pela BM&F (dias corridos);
- Taxa de juros - devido ao fato dos contratos de opções analisados serem cotados em pontos por saca (equivalente a dólares por saca), a taxa de juro utilizada foi a do cupom cambial⁶⁹ transformada para taxa de juro continuamente capitalizada (como requerem os modelos). Entretanto, como o Contrato Futuro de cupom cambial só começou a ser negociado no final do ano de 1997, para se poder realizar os testes propostos "montou-se" uma série de cupom cambial utilizando os seguintes dados: cotação do contrato futuro de DI de um dia, cotação do contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólares americanos e a cotação à vista do dólar comercial de venda, todos fornecidos pela BM&F. Nos dias em que houve cotação negativa⁷⁰ para o Cupom Cambial foi utilizado o valor de 0,1%, uma vez que os modelos utilizados não suportam taxa de juros negativa. Para cada cálculo utilizou-se a taxa de juros continuamente capitalizada do Cupom Cambial com o mesmo vencimento da opção;

⁶⁹ O diferencial entre a taxa de juro efetiva e a variação cambial, definidas, para esse efeito, como:

- Taxa de juro efetiva: a taxa de juro efetiva de Depósitos Interfinanceiros-DI, calculada a partir da acumulação das taxas médias diárias de DI de um dia, apuradas pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos-Cetip, para o período compreendido entre a data da operação no mercado futuro, inclusive, e o último dia do mês anterior ao mês de vencimento do contrato, inclusive;
- Variação Cambial: medida pela taxa de câmbio de reais por dólar dos Estados Unidos, para entrega pronta, contratada nos termos da Resolução 1690/90, do Conselho Monetário Nacional-CMN, apurada e divulgada pelo Banco Central do Brasil-Bacen e observada entre o dia útil anterior à data da operação no mercado futuro, inclusive, e o último dia do mês anterior ao mês de vencimento do contrato, inclusive.

⁷⁰ Tal fato ocorreu em alguns poucos dias em que o mercado futuro de dólar esteve extremamente "agitado", fechando à cotações que embutiam taxas de juros maiores que as negociadas no mercado de DI.

- Volatilidade - Utilizou-se dois cálculos distintos para a volatilidade. Seguindo metodologia proposta por Pelly (1989), calculou-se a volatilidade histórica através do desvio padrão dos retornos continuamente capitalizados dos últimos 20 dias úteis anteriores à data de negociação da opção (fórmula 93). Utilizou-se para estes cálculos o valor de ajuste do dia do contrato futuro de café objeto da opção. Também foram calculadas todas as volatilidades implícitas das opções da amostra através do método de Newton Raphson (fórmula 96). O valor da volatilidade implícita utilizado como *input* para os modelos foi a média aritmética das volatilidades implícitas, das opções de mesmo vencimento da opção em questão, negociadas no dia útil anterior. Nos casos em que nenhuma opção com mesmo vencimento da opção em questão foi negociada no dia útil anterior, utilizou-se, então, a média aritmética das volatilidades implícitas das opções do último dia em que tal vencimento foi negociado;
- Preço de mercado das opções - valor médio diário de negociação de cada opção, fornecido pela BM&F.

Os dados utilizados nos cálculos encontram-se no apêndice C.

7 RESULTADOS DOS TESTES ESTATÍSTICOS

Os dados utilizados e os resultados dos cálculos dos valores das opções, segundo cada um dos modelos utilizados (BVH, BVI, BSVH, BSVI, BWVH e BWVI), encontram-se no apêndice C.

Na tabela 6 estão os resultados dos testes de erro quadrático médio para cada um dos modelos e para cada um dos grupos de opções analisados. Trata-se da estimativa da equação (97) do capítulo 6. O menor valor de cada linha, assinalado com um asterisco, indica o modelo com menor RMSE e, assim, o que melhor representou os dados de mercado para o grupo em questão.

Os resultados da Tabela 6 mostram que não houve um único modelo com melhor desempenho para todos os grupos de dados analisados. Como, porém, o teste de *RMSE* não possui maiores recursos, não é possível concluir pela análise dos seus resultados que o modelo que obteve melhor desempenho representou bem o que de fato aconteceu no mercado, mas apenas que foi o melhor dentre os testados. Mais do que isso, os resultados também não permitem afirmar que a diferença entre os modelos é estatisticamente significativa. Assim, para se poder afirmar algo sobre os resultados, deve-se analisar estes resultados conjuntamente com os dos testes de hipótese realizados.

Tabela 6 - Resultados dos testes de *RMSE* aplicados aos modelos

	B VH	B VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
TODOS	0,949	0,780*	0,949	0,781	0,949	0,784
COMPRA TOTAL	1,238	0,896*	1,239	0,897	1,239	0,899
VENDA TOTAL	0,600*	0,668	0,601	0,670	0,601	0,673
OUT TOTAL	0,710	0,594*	0,710	0,595	0,709	0,599
OUT COMPRA TOTAL	0,691	0,504*	0,690	0,505	0,689	0,506
OUT VENDA TOTAL	0,729	0,672*	0,729	0,675	0,729	0,680
IN TOTAL	0,156	0,194	0,155*	0,196	0,155*	0,197
IN COMPRA TOTAL	0,166*	0,233	0,169	0,236	0,170	0,238
IN VENDA TOTAL	0,149	0,168	0,146*	0,169	0,146*	0,169
AT TOTAL	1,395	1,139*	1,396	1,140	1,397	1,142
AT COMPRA TOTAL	2,119	1,526*	2,120	1,528	2,122	1,530
AT VENDA TOTAL	0,474*	0,774	0,474*	0,775	0,474*	0,776

FONTE: Dados gerados na pesquisa.

* Modelo com menor *RMSE* em cada grupo de dados analisados.

Na tabela 7 estão os resultados dos testes *t* referentes à equação (107), onde o valor de $\bar{F}$ corresponde ao calculado pela fórmula (99). Esses testes avaliaram se os preços de mercado são iguais ou diferentes dos previstos pelos modelos.

Analizando a Tabela 7 pode-se verificar que, ao nível de significância de 5%, não se rejeita a hipótese de nulidade em apenas cinco dos doze grupos de dados testados, quais sejam, compra total, out total, out venda total, in total e in compra total. A não rejeição da hipótese nula significa que, ao nível de significância escolhido, não se pode rejeitar a hipótese de que a média populacional das diferenças dos logaritmos dos preços das opções *i* praticados no mercado, em relação aos logaritmos dos preços calculados conforme o modelo *j*, é igual a zero. Em outras palavras, pode-se dizer que, apenas nesses casos os modelos representaram significativamente o que ocorreu no mercado. Porém, somente nos três primeiros grupos, dos cinco acima citados, houve coincidência dos resultados dos dois testes (*RMSE* e teste de hipótese).

Outro aspecto interessante que se pode notar nos resultados apresentados na Tabela 7 é que, para todos os grupos em que não foi possível rejeitar a hipótese nula, os

modelos utilizaram como *input* a volatilidade implícita, com exceção do grupo - *in compra total* -, para o qual não foi possível rejeitar a hipótese nula em todos os modelos testados (com volatilidade implícita ou histórica).

Tabela 7 - Resultados dos testes *t* entre os valores de mercado das opções e os valores calculados pelos modelos

	BVH	BVI	BSVH	BSVI	BWVH	BWVI
TODOS	18,580*	-3,253*	18,498*	-3,392*	18,397*	-3,649*
COMPRA TOTAL	14,774*	0,970	14,725*	0,885	14,672*	0,738
VENDA TOTAL	12,193*	-3,789*	12,120*	-3,882*	12,030*	-4,065*
OUT TOTAL	19,447*	0,882	19,394*	0,787	19,263*	0,559
OUT COMPRA TOTAL	17,779*	3,025*	17,742*	2,953*	17,678*	2,798*
OUT VENDA TOTAL	10,776*	-1,347	10,735*	-1,412	10,622*	-1,582
IN TOTAL	3,147*	-1,995	2,862*	-2,243*	2,763*	-2,350*
IN COMPRA TOTAL	0,734	-0,773	0,575	-0,903	0,501	-0,953
IN VENDA TOTAL	3,471*	-2,044**	3,248*	-2,274*	3,184*	-2,380*
AT TOTAL	7,079*	-5,550*	7,044*	-5,592*	7,004*	-5,644*
AT COMPRA TOTAL	3,575*	-2,609**	3,555*	-2,632**	3,533*	-2,659**
AT VENDA TOTAL	6,804*	-5,291*	6,775*	-5,331*	6,739*	-5,377*

FONTE: Dados gerados na pesquisa.

* Significativo a 1%, ** Significativo a 5%.

Na tabela 8 estão os testes *t* referentes à equação (107), onde o valor de $\bar{F}$ corresponde ao calculado pela fórmula (101). Esses testes avaliaram se os preços das opções calculados pelos modelos, que utilizaram um mesmo método de cálculo da volatilidade, diferiram entre si.

A Tabela 8 mostra que houve significância, para todos os grupos analisados, dos testes que compararam dois a dois os modelos que usaram o mesmo método de cálculo da volatilidade na determinação dos preços das opções. Em outras palavras, isto quer dizer que os resultados apresentados por cada um destes modelos diferem estatisticamente dos resultados dos demais. Juntando-se esta observação àquelas feitas sobre as Tabelas 6 e 7, pode-se dizer que, para os três grupos em que os testes de hipótese e o teste de *RMSE* apresentaram o mesmo resultado, o BVI - modelo de Black usando o valor calculado da volatilidade implícita - foi o que realmente representou de

modo estatisticamente significativo, e melhor do que todos os demais modelos, o ocorrido de fato no mercado.

Tabela 8 - Resultados dos testes *t* entre os valores das opções calculados pelos diferentes modelos (com o mesmo cálculo da volatilidade)

	BVIBSVI	BVIBWVI	BWVIBSVI	BVHBSVH	BVHBWVH	BWVHBSVH
TODOS	-15,391*	-17,805*	16,960*	-13,724*	-17,110*	-15,078*
COMPRA TOTAL	-10,289*	-12,839*	12,628*	-9,0446*	-12,502*	11,415*
VENDA TOTAL	-11,409*	-12,748*	12,024*	-10,348*	-12,097*	10,416*
OUT TOTAL	-12,571*	-15,720*	16,397*	-11,532*	-15,204*	14,911*
OUT COMPRA TOTAL	-8,442*	-11,141*	12,009*	-7,435*	-11,105*	11,132*
OUT VENDA TOTAL	-9,322*	-11,250*	11,592*	-8,879*	-10,630*	10,285*
IN TOTAL	-6,584*	-8,748*	9,232*	-6,612*	-8,732*	8,568*
IN COMPRA TOTAL	-3,811*	-5,400*	6,283*	-3,455*	-5,438*	4,992*
IN VENDA TOTAL	-5,417*	-6,818*	6,850*	-5,639*	-6,758*	8,239*
AT TOTAL	-7,909*	-9,477*	10,754*	-7,659*	-9,544*	10,824*
AT COMPRA TOTAL	-8,215*	-8,856*	8,565*	-7,761*	-8,901*	8,581*
AT VENDA TOTAL	-4,908*	-6,129*	7,382*	-4,812*	-6,178*	7,413*

FONTE: Dados gerados na pesquisa.

* Significativo a 1%.

Na tabela 9 estão os resultados dos testes de erro quadrático médio para cada um dos métodos de cálculo da volatilidade e para cada um dos grupos de opções analisados. Trata-se da estimativa da equação (97) do capítulo 6. O menor valor de cada linha, assinalado com um asterisco, indica o modelo com menor RMSE e, assim, o que melhor representou os dados de mercado para o grupo em questão.

Analisando a Tabela 9 pode-se verificar que para todos os grupos de opções estudados, o método de cálculo da volatilidade que melhor representou a volatilidade real foi o da volatilidade histórica.

Tabela 9 - Resultados dos teste de *RMSE* aplicados aos métodos de cálculo da volatilidade

	Volhist	Volimplic
TODOS	0,523*	0,826
COMPRA TOTAL	0,426*	0,735
VENDA TOTAL	1,179*	1,283
OUT TOTAL	0,464*	0,642
OUT COMPRA TOTAL	0,326*	0,654
OUT VENDA TOTAL	0,477*	0,526
IN TOTAL	0,507*	0,744
IN COMPRA TOTAL	0,774*	0,795
IN VENDA TOTAL	0,250*	0,714
AT TOTAL	1,507*	1,632
AT COMPRA TOTAL	0,471*	0,880
AT VENDA TOTAL	1,813*	2,078

FONTE: Dados gerados na pesquisa.

* Modelo com menor *RMSE* em cada grupo de dados analisados.

Na tabela 10 estão os testes *t* referentes à equação (107), onde os valores de $\bar{F}$ correspondem aos calculados pela fórmulas (104), (105) e (106). Esses testes avaliaram se houve diferença estatisticamente significativa entre os valores calculados da volatilidade real e volatilidade histórica, entre a volatilidade real e a volatilidade implícita e entre a volatilidade histórica e a volatilidade implícita.

A Tabela 10 confirma os resultados observados na Tabela 9, mostrando que não se pode rejeitar, ao nível de significância de 1%, que a média populacional da soma das diferenças dos logaritmos das volatilidades reais das opções *i* e dos logaritmos dos valores calculados das volatilidades históricas para as mesmas opções, é igual a zero. Apenas no caso do grupo - *in* compra total - não houve uma representação significativa da volatilidade real pela histórica. Pela Tabela 10 pode-se dizer também que a média populacional da diferença dos logaritmos das volatilidades históricas e implícita foi significativamente menor que zero.

Tabela 10 - Resultados dos testes *t* entre os valores da volatilidade real e das volatilidades implícita (volreal/volimplic) e histórica (volreal/volhist), e entre as volatilidades histórica e implícita (volhist/volimplic).

	Volrealvolhist	Volrealvolimplic	Volhistvolimplic
TODOS	0,594	-23,358*	-22,901*
COMPRA TOTAL	0,040	-17,458*	-15,215*
VENDA TOTAL	0,100	-15,211*	-16,249*
OUT TOTAL	1,153	-19,841*	-17,524*
OUT COMPRA TOTAL	1,786	-16,698*	-15,462*
OUT VENDA TOTAL	0,017	-11,833*	-9,920*
IN TOTAL	-1,885	-8,562*	-5,426*
IN COMPRA TOTAL	-4,092*	-7,324*	-1,3908
IN VENDA TOTAL	1,649	-5,655*	-6,082*
AT TOTAL	-0,091	-10,702*	-13,053*
AT COMPRA TOTAL	0,330	-6,056*	-6,358*
AT VENDA TOTAL	-0,347	-8,911*	-12,213*

FONTE: Dados gerados na pesquisa.

* Significativo a 1% .

É interessante notar também que o único grupo, dentre os analisados, em que os modelos que utilizaram a volatilidade histórica representaram significativamente o ocorrido no mercado (grupo *in compra total* - vide tabela 7), foi o mesmo em que a volatilidade histórica não representou de modo significativo a volatilidade real (vide tabela 10) e também o único em que não houve diferença estatisticamente significativa entre os valores dos cálculos de volatilidade histórica e implícita (vide tabela 10). Uma possível causa para isto pode estar no pequeno número de dados analisados nesse grupo.

8 CONCLUSÕES

Este trabalho avaliou a fixação dos preços das opções de café na BM&F, com vencimentos entre fevereiro de 1997 e agosto de 1999, considerando os argumentos de três modelos de precificação de opções (o de Black, o de Barone-Adesi & Whaley e o de Bjerksund & Stensland) e dois tipos de volatilidade (a implícita e a histórica).

Não é possível afirmar de modo inequívoco, com base nos testes realizados, que há um modelo de precificação de opções, dentre os testados, que representou de maneira estatisticamente significativa os preços praticados no mercado de opções sobre futuros de café da BM&F em todos os grupos analisados. Pode-se afirmar, porém, com base nos resultados obtidos, que o modelo de Black, usando o cálculo de volatilidade implícita (BVI), foi o que obteve melhor desempenho.

A volatilidade histórica representou a volatilidade real, ou seja, a volatilidade futura medida *ex-post*, de modo estatisticamente significativo na grande maioria dos grupos testados (11 dos 12 grupos analisados). São eles:

- Todos os dados da amostra (TODOS - com 521 observações);
- Somente as opções de compra (COMPRA TOTAL - com 238 observações);
- Somente as opções de venda (VENDA TOTAL - com 283 observações);
- Todas as opções de compra e de venda que se encontravam no dinheiro (AT TOTAL - com 161 observações);
- Todas as opções de compra que se encontravam no dinheiro (AT COMPRA TOTAL - com 65 observações);

- Todas as opções de venda que se encontravam no dinheiro (*AT VENDA TOTAL* - com 96 observações);
- Todas as opções de compra e de venda que se encontravam dentro do dinheiro (*IN TOTAL* - com 58 observações);
- Todas as opções de venda que se encontravam dentro do dinheiro (*IN VENDA TOTAL* - com 37 observações);
- Todas as opções de compra e de venda que se encontravam fora do dinheiro (*OUT TOTAL* - com 302 observações);
- Todas as opções de compra que se encontravam fora do dinheiro (*OUT COMPRA TOTAL* - com 152 observações);
- Todas as opções de venda que se encontravam fora do dinheiro (*OUT VENDA TOTAL* - com 150 observações);

É interessante notar que para esses mesmos grupos acima citados pôde-se rejeitar a hipótese nula em favor da hipótese alternativa no teste que comparou os valores fornecidos pelo Modelo de Black (BVH) com os praticados no mercado (veja tabela 7). Melhor explicando, quando se calculou o valor das opções com o Modelo de Black usando a volatilidade histórica como *input*, os valores fornecidos situaram-se abaixo dos preços praticados no mercado.

Além disso, a volatilidade implícita foi, invariavelmente, maior do que a volatilidade histórica, e a volatilidade histórica foi quem melhor representou a volatilidade real. Assim, sabendo-se que quanto maior for o valor da volatilidade maior será o valor da opção, os resultados obtidos sugerem que, como o modelo que obteve o melhor desempenho na representação dos preços praticados no mercado utilizou o cálculo da volatilidade implícita, a posição vendedora foi mais lucrativa que a posição compradora no período analisado. Tal fato deve-se, provavelmente, à falta de liquidez desse mercado, o que determina que os lançadores de opções exijam um alto prêmio pelo risco, que é refletido em uma alta volatilidade implícita.

Os resultados encontrados devem ser considerados diante das seguintes dificuldades:

- os tipos de dados obtidos junto à BM&F não possuem o detalhamento necessário a uma análise mais precisa do desempenho dos modelos;
- o pequeno número de negócios em aberto/realizados diariamente neste mercado, em relação aos parâmetros apontados pela literatura (Stein, 1990; e Schwager, 1995), coloca-o fora de uma das hipóteses básicas de todos os modelos examinados, qual seja, a de liquidez dos mercados;
- a falta de liquidez acarretou também dificuldade no cálculo da volatilidade implícita; e,
- devido ao tipo de cotação do contrato (pontos por saca) houve também dificuldade na obtenção da taxa de juro livre de risco.

Com a base teórica e os modelos fornecidos nesta dissertação, o leitor poderá avaliar de forma mais consistente a estratégia que deve ser adotada neste mercado, lembrando que os resultados obtidos sugerem que o uso dos valores fornecidos pelos modelos de precificação para mercados com baixa liquidez, como o estudado nesta pesquisa, deve ser criterioso, pois pode induzir à realização de negócios não lucrativos.

Acredita-se que o presente trabalho tenha alcançado os objetivos propostos. Os resultados obtidos sugerem que esse não é um assunto completamente esgotado e que novos testes podem e devem ser aplicados ao mercado de opções sobre contratos futuros de café da BM&F.

Pode-se sugerir que novos estudos abordem outros modelos mais complexos que os testados neste trabalho, analisem outros métodos estatisticamente mais sofisticados de

cálculo da volatilidade e realizem testes para confirmar se realmente houve uma posição mais lucrativa: a de comprador ou lançador das opções. Outra sugestão seria comparar os resultados obtidos neste trabalho com os que seriam obtidos se os dados utilizados fossem os da bolsa de Nova York (CSCE).

Por fim, espera-se que com a recente internacionalização dos mercados futuros agropecuários da BM&F, ocorrida em 08/12/99, estes atinjam um grau satisfatório de liquidez e que, assim, possa haver também uma melhoria na qualidade das informações disponibilizadas pela BM&F.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHA, C.J.C. Ciclos e tendências do café no Brasil. **Preços Agrícolas**, v.131, p.8-9, set. 1996.

BACHA, C.J.C. A cafeicultura brasileira nas décadas de 80 e 90 e suas perspectivas. **Preços Agrícolas**, v.142, p.14-22, ago. 1998.

BAILLIE, R.T.; BOLLERSLEV, T. Prediction in dynamic models with time dependent conditional variances. **Michigan State University - Department of Economics - Working Paper**, nov. 1990.

BALL, C.A.; ROMA, A. Stochastic volatility option pricing. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v.29, n.4, p.589-607, Dec. 1994.

BARONE-ADESI, G.; WHALEY, R.E. Efficient analytic approximation of american option values. **Journal of Finance**, v.62, n.2, p.301-320, June. 1987.

BARRETO, L.A.; BAIDYA, T.K.N. Teste empírico do modelo de Black e Scholes na avaliação de opções de Vale do Rio Doce. **Revista Brasileira de Mercado de Capitais**, v.13, n.39, p. 89-108, Abr/Jun 1987.

BJERKSUND, P.; STENSLAND, G. Closed-form approximation of american options. **Scandinavian Journal of Management**, v.9, p.S87-S99, 1993.

- BLACK, F. The pricing of commodity contracts. **Journal of Financial Economics**, v.3, p.167-179, 1976.
- BLACK, F. How we came up with the option formula. **Journal of Portfolio Management**, v.15, p.4-8, Win. 1989.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v.81, p.637-657, May/June. 1973.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v.31, p.307-327, 1986.
- BOYLE, P.P. Option valuation using a three jump process. **International Options Journal**, v.3, p.7-12, 1986.
- BOYLE, P.P.; BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. Monte Carlo methods for security pricing. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v.21, p.1267-1321, 1997.
- BRENNER, M.; COURTADON, G.; SUBRAHMANYAM, M.G. Options on spot and options on futures. **Journal of Finance**, v.60, n.5, p.1303-1317, Dec. 1985.
- BRENNER, M.; SUBRAHMANYAM M.G. A simple formula to compute the implied standard deviation. **Financial Analysts Journal**, v.44, n.5, p.80-83, Sep/Oct. 1988.
- BRILL, E.A.; HARRIFF, R.B. Pricing american options: managing risk with early exercise. **Financial Analysts Journal**, v.42, n.6, p.48-56, Nov/Dec. 1986.
- BROADIE, M.; DETEMPLE, J. Recent advances in numerical methods for pricing derivatives securities. **Cirano Scientific Series**, v.5, p.25-44, May 1996.

- CHAUDHURY, M.M. Some easy-to-implement methods of calculating american futures option prices. **Journal of Futures Markets**, v.15, n.3, p.303-344, 1995.
- CHAUDHURY, M.; WEI, J. Upper bounds for american futures option: A note. **Journal of Futures Markets**, v.14, n.2, p.111-116, 1994.
- CHOI, J.W.; LONGSTAFF, F.A. Pricing options on agricultural futures: na application of the constant elasticity of variance option pricing model. **Journal of Futures Markets**, v.5, n.2, p.247-258, 1985.
- CHRISS, N.A. **Black-Scholes and Beyond**. Chicago: Irwin Professional Publishing, 1997. 496p.
- CORRADO, C.; MILLER T.W. Volatility without tears. **Risk**, v.9, n.7, p.49-52, July. 1996.
- CORRADO, C.; MILLER T.W. Efficient option-implied volatility estimators. **Journal of Futures Markets**, v.16, n.3, p.247-272, 1996.
- COSTA, C.L. **Operando a Volatilidade**. São Paulo. Cultura Editores Associados. 1998. 253p.
- DAIGLER, T.D. **Advanced Options Trading**. Chicago: Irwin Professional Publishing, 1994. 325p.
- EALLES, J.; HAUSER, R.J. Analyzing biases in valuation models of options on futures. **Journal of Futures Markets**, v.10, n.3, p.211-228, 1990.
- EASTON, S.A. Put-call parity with futures-style marging. **Journal of Futures Markets**, v.17, n.2, p.215-227, 1997.

ENGLE, R.F. Statistical models for financial volatility. **Financial Analysts Journal**, v.14, p.72-78, 1993.

FARINA, E.M.M.Q.; ZYLBERSZTAJN, D. Competitividade no agribusiness brasileiro. São Paulo: USP/FEA/PENSA, **CD-ROM**, 1998.

FEINSTEIN, S. A source of unbiased implied volatility forecasts. **Federal Reserve Bank of Atlanta - Working Paper**, p.88-89, 1988.

GARDNER, B.L. Commodity options for agriculture. **American Journal of Agricultural Economics**, v.59, p.986-992, Dec. 1977.

GARMAN, M.B.; KLASS M.J. On the estimation of security price volatilities from historical data. **Journal of Business**, v.53, n.1, p.67-78, 1980.

GARMAN, M.B.; KOHLHAGEN, W. Foreign currency options values. **Journal of International Money and Finance**, v.2, p.231-237, 1983.

GOLDENBERG, D.H. A unified method for pricing options on diffusion processes. **Journal of Financial Economics**, v.29, p.3-34, 1991.

GONZALEZ, B.C.R. Os ambientes contratual e operacional da cédula de produto rural (CPR) e interações com os mercados futuros e de opções. Piracicaba, 1999. 169p. Tese (Doutorado) – Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo.

HAUG, E.G. **Option Pricing Formulas**. New York: MacGraw-Hill, 1997. 232p.

HAUSER, S.; LAUTERBACH, B. The relative performance of five alternative warrant pricing models. **Financial Analysts Journal**, v. 35, n.3, p.55-61, 1977.

HAUSER, R.J.; NEFF, D. Pricing options on agricultural futures: departures from tradicional theory. **Journal of Futures Markets**, v.5, n.4, p.539-577, 1985.

HULL, J.; WHITE, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. **Journal of Finance**, v.62, n.2, p.281-300, June. 1987.

HULL, J.C. **Futures and Options Markets**. 3.ed. New Jersey: Prentice Hall, 1997. 470p.

HUMES, A.; MELO, I.; YOSHIDA, L.; MARTINS, L. **Noções de Cálculo Numérico**. São Paulo: McGraw-Hill, 1984. 327p.

JARROW, R.A.; WIGGINS, J.B. Option pricing and implicit volatilities. **Journal of Economic Surveys**, v.3, n.1, p.59-81, 1989.

JOHNSON, H.; SHANNO, D. Option pricing when the variance is changing. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v.22, n.2, p.143-151, June. 1987.

KIM, J. The analytic valuation of american options. **Review of Financial Studies**, v.3, n.4, p. 547-572, 1990.

KIM, J. Analytic approximation of the optimal exercise boundaries for american futures options. **Journal of Futures Markets**, v.14, n.1, p.1-24, 1994.

KUO, C.K. The valuation of futures-stile options. **Review of Futures Markets**, v.10, n.3, p.480-487. "Discussion", by Malyck Sy, p. 488-489, 1991.

LAUTERBACH, B.; SCHULTZ, P. Pricing warrants: an empirical study of the Black-Scholes model and its alternatives. **Journal of Finance**, v.45, n.4, p.1181-1209, Set. 1990.

- LEI, L.F.; LIU, D.; HALLAM, A. Solving for optimal futures and options positions using a simulation-optimization technique. **Journal of Futures Markets**, v.15, n.5, p.559-571, 1995.
- MARSHALL, J.F. **Futures and Option Contracting**. Cincinnati: South Western Publishing CO., 1989. 634p.
- MARTITS, L.A. Avaliação do uso de derivativos agrícolas no Brasil: os fatores que determinam o sucesso ou fracasso dos contratos negociados na BM&F. São Paulo. 1998. 178p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Administração de Empresas de São Paulo.
- MERTON, R.C. Theory of rational options pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, v.1, p.141-183, 1973.
- MILTERSEN, K.R.; SCHWARTZ, E.S. Pricing of options on commodity futures with stochastic term structures of convenience yields and interest rates. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v.33, n.1, p.33-59, Mar. 1998.
- MURPHY, G. When options price theory meets the volatility smile. **Euromoney**, v.3, p.66-74, 1994.
- MYERS, R.J.; HANSON, S.D. Pricing commodity options when the underlying futures price exhibits time-varying volatility. **American Journal of Agricultural Economics**, v.75, p.121-130, Feb. 1993.
- NATENBERG, G.S. **Option Volatility & Pricing**. 2.ed. New York: MacGraw-Hill, 1994. 469p.
- NELSON, D. Condicional heteroskedasticity in assets returns: a new approach. **Econometrica**, v.59, 1991.

- OVERDAHL, J.; CHEN, A. The exercise of options on agricultural commodity futures. **Review of Futures Markets**, v.10, n.2, p.296-317. "Discussion", by Bruce Sherrick and James Bittman, p. 318-323, 1991.
- PARKINSON, M. The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. **Journal of Business**, v.53, n.1, p. 61-65, 1980.
- PELLY, R.A. An investigation of options pricing models for live cattle and feedercattle futures contracts. Ohio, 1989. 118p. Thesis (Ph.D.) - Ohio State University.
- PUTNAM, B. Staying out of the holes in Black-Scholes. **Global Investor**, London, v.65, p. 19-25, Sep. 1993.
- RAMASWAMY, K.; SUNDARESAN, S.M. The valuation of options on futures contracts. **Journal of Finance**, v.15, n.5, p.1319-1340, Dec. 1985.
- ROCHMAN, R.R. Análise de métodos numéricos para precificação de opções. São Paulo. 1998. 145p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Administração de Empresas de São Paulo.
- ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JAFFE, J.F. **Administração Financeira**. 3.ed. São Paulo: Atlas. 1995. 700p.
- RUBINSTEIN, M. The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. **Bell Journal of Economics and Management Science**. v.7, p.407-425, 1976.
- RUBINSTEIN, M. Return to OZ. **Risk Magazine**, v.7, n.11, p.8-17, 1994.
- SCHWAGER, J.D. **Fundamental Analysis**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1995. 639p.

- SHASTRI, K.; TANDON, K. An empirical test of a valuation model for american options futures contracts. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v.21, n.4, p.377-392, Dec. 1986.
- SHERICK, B.J.; GARCIA, F.; TIRUPATTUR, V. Empirical tests of distributional assumptions for option pricing models. **American Journal of Agricultural Economics**, v.73, p.345-361, 1992.
- SILVA NETO, L.A. **Opções: do tradicional ao exótico**. 2.ed. São Paulo: Atlas, 1996. 293p.
- STEIN, J. What to watch for in less liquid commodity options. **Futures: The Magazine of Commodities & Options**, v.19, n.1, p.28-30, 1990.
- TURVEY, C.G. Alternative estimates of weighted implied volatilities from soybean and live cattle options. **Journal of Futures Markets**, v.10, n.4, p.353-366, 1990.
- VERCAMMEN, J. Hedging with commodity options when pricing distributions are skewed. **American Journal of Agricultural Economics**, v.77, p.935-945, 1995.
- VITIELLO JÚNIOR, L.R.S. O ajustamento de dois modelos de precificação de opções de compra ao mercado brasileiro: evidências empíricas. Rio Grande do Sul. 1998. 78p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- WHALEY, R.E. On valuing american futures options. **Financial Analysts Journal**, v.42, n.3, p.49-59, May/June 1986.
- WHALEY, R.E. Valuation of american futures options: theory and empirical tests. **Journal of Finance**, v.41, n.1, p.127-151, Mar. 1986.

- WIGGINS, J.B. Option values under stochastic volatility. **Journal of Financial Economics**, v.19, p.351-372, 1987.
- WILSON, W.W.; FUNG, H.G. Information content of volatilities implied by option premiums in grain futures markets. **Journal of Futures Markets**, v.10, n.1, p.13-27, 1990.
- WILSON, W.W.; FUNG, H.G. Put-call parity and arbitrage bounds for options on grain futures. **American Journal of Agricultural Economics**, v.73, p.55-65, 1991.
- WOLF, A. Fundamentals of Commodity Options Futures. **Journal of Futures Markets**, v.2, p.391-408, 1982.

APÊNDICE A

Estratégias com opções¹

Diferentemente dos mercados de ações e de contratos futuros, onde há um pequeno número de instrumentos, no mercado de opções há uma infinidade de contratos à disposição do investidor. Se por um lado isso é uma vantagem, pois permite a elaboração de uma grande quantidade de operações/estratégias diferentes, por outro requer do investidor um conhecimento muito mais aprofundado e um cuidado redobrado na escolha do melhor investimento. A seguir, apresenta-se algumas das principais estratégias normalmente utilizadas no mercado de opções, partindo das elementares, como as posições sintéticas, e chegando até algumas mais elaboradas, como as travas. Os gráficos referentes às estratégias encontram-se no final do texto.

A) Posições sintéticas

- *Put* e *call* sintéticas - vendendo o produto no mercado futuro e comprando, paralelamente, uma *call*, o investidor estará, efetivamente, tomando uma posição comprada em uma opção de venda. Essa estratégia financeira é conhecida como compra de uma *put* sintética. Por outro lado, combinando a compra do ativo com a compra de uma *put*, o portfólio resultante possuirá o mesmo comportamento de uma posição comprada em uma *call*, conhecida por *call* sintética. Tomando-se as posições inversas àquelas assumidas para compra de uma *call* sintética, ou seja, vendendo-se uma *put* e o ativo, cria-se a venda de uma *call* sintética. De modo semelhante, tomando-se as posições inversas àquelas assumidas para compra de uma *put* sintética, cria-se a de venda de uma *put* sintética.

¹ As descrições dessas estratégias estão baseadas em Silva Neto (1996), Costa (1998) e Natenberg (1994).

- Futuro sintético - Comprando uma *put* e vendendo uma *call*, com mesmo preço de exercício, o investidor estará efetivamente tomando uma posição vendida no mercado futuro. Se os preços no mercado do ativo básico caírem, a opção de venda comprada ganhará valor, e a opção de compra vendida não será exercida, resultando em um lucro para a posição. Se o mercado subir, a *call* vendida será exercida, resultando em uma perda na posição, pois a *put* comprada irá perder valor. De maneira inversa, a compra de uma *call* e a venda de uma *put*, todas com mesmo preço de exercício, produzirão uma estratégia financeira com comportamento de uma posição comprada no mercado futuro.

É importante notar que para se obter uma posição sintética em futuro os preços de exercícios das opções combinadas devem ser idênticos. Se isso não ocorrer, a estratégia resultante da combinação não se comportará como a posição esperada. As posições sintéticas somente devem ser implementadas quando a posição resultante das mesmas não esteja sendo negociada no mercado. Além disso, deve-se sempre estar atento aos custos de transação.

Uma vantagem adicional das posições sintéticas é a de se conseguir a mesma proteção do mercado futuro sem se incorrer em obrigações como os ajustes diários.

B) Travas

Essas operações têm por objetivos a limitação da exposição ao risco. Os exemplos de travas apresentados a seguir, supõem a manutenção da posição até o seu vencimento.

- *Spread* de alta com opções de compra - é formada pela compra de uma *call* e pela venda de uma outra *call*, porém, de preços de exercício diferentes. O preço de exercício da primeira *call* (comprada) será menor que o da última *call* (vendida). Esta estratégia é recomendada quando o investidor acredita que o preço do ativo irá

subir e, por isso, deve estar comprado. Além disso, o investidor deve acreditar que o preço subirá apenas até determinado nível, o qual deve ser inferior ao preço de exercício da *call* vendida. Nesse caso, não há necessidade de se preservar toda possibilidade de ganho na alta. Assim, a venda uma *call* de preço de exercício maior, permite diminuir o custo da posição. Esta estratégia é também conhecida como *call bull spread*.

- *Spread* de alta com opções de venda - consiste da venda de uma *put* e da compra de uma outra de menor preço de exercício. Permite ganhos na alta do mercado. Se nenhuma das opções for exercida, o investidor receberá um prêmio líquido positivo. É também chamada de *put bull spread*.
- *Spread* de baixa com opções de venda - nessa estratégia o investidor adquire uma opção de venda e vende uma outra opção de venda, contudo com preço de exercício inferior à primeira. É recomendada quando o investidor acredita que o mercado está em baixa. Nesse caso, a meta deverá ser sempre vender a opção a um preço de exercício o mais próximo e abaixo possível do patamar que se espera que o mercado atinja. Esta estratégia é também chamada de *put bear spread*.
- *Spread* de baixa com opções de compra - se o investidor comprar uma opção de compra, e vender outra, poderá conseguir uma estratégia cuja área de ganho se dê com a queda do mercado. Monta-se esta estratégia vendendo-se uma opção de compra com preço de exercício mais baixo, e comprando-se uma outra com preço de exercício mais elevado (portanto, mais barata). Nesta estratégia, caso o mercado fique abaixo do preço de exercício da *call* vendida, haverá um prêmio líquido positivo. É também chamada de *call bear spread*.
- Compra de *straddle* (*long straddle*) - é montada através da compra de uma *call* e de uma *put* com os mesmos preços de exercício, possibilitando a obtenção de lucro tanto em altas quanto em baixas do mercado. O risco da operação está limitado ao

prêmio pago, e o lucro somente ocorrerá se o mercado sofrer consideráveis oscilações (aumento da volatilidade), pois o prêmio líquido será sempre negativo. Esta estratégia é também conhecida como compra de volatilidade.

- Venda de *straddle* (*short straddle*) - é a operação inversa da anterior, consistindo na venda de uma *call* e de uma *put* com mesmo preço de exercício e vencimento. Ao contrário da estratégia anterior, uma *short straddle* somente apresentará lucro quando a volatilidade do mercado cair, ou seja, os preços futuros adquirirem estabilidade. É também conhecida como venda de volatilidade.
- Compra de *strangle* - é uma estratégia similar ao *long straddle*, só que executada com opções que possuem preços de exercícios diferentes. Consiste na compra de uma *call* e na compra de uma *put* com preço de exercício inferior ao da *call*. Tem a vantagem de apresentar um custo inferior ao do *long straddle*. Estas operações, conhecidas também como *long strangle*, são recomendadas quando o investidor acredita na alta da volatilidade. Porém, mesmo se o mercado se movimentar conforme o esperado, mas não alcançar os preços de exercício das opções, a operação representará um prejuízo.
- Venda de *strangle* - é a operação inversa da anterior, consistindo da venda de uma *call* e de uma *put*, com preços de exercício e prêmios diferentes. O preço de exercício da *put* deve ser inferior ao da *call*. A área de risco do vendedor dessa posição será menor do que a do vendedor de um *straddle*. É também conhecida como *short strangle*.
- Compra de *butterfly* (*long butterfly*) - esta operação foi desenvolvida com o objetivo de reduzir o custo de se operar a compra de um *straddle*. Consiste da compra de uma *call* e de uma *put*, com preços de exercício idênticos, e também na venda de uma *put* de preço de exercício inferior e uma *call* de preço de exercício superior ao das duas primeiras. O custo da operação não será muito grande devido à venda das duas

opções, contudo, isto reduz a possibilidade de maiores ganhos quando o mercado apresentar fortes oscilações.

- Compra de *butterfly* de *call* - uma *long call butterfly*, como também é conhecida esta estratégia, consiste da combinação da compra de uma *call* de preço de exercício X , na venda de duas *calls* de preço de exercício Y e na compra de uma outra *call* de preço de exercício Z , sendo $Z > Y > X$. Assim, haverá um descaixe líquido de prêmio ou seja, a soma dos prêmios pagos é maior do que a dos prêmios recebidos, caracterizando-se a compra de uma trava. Apesar de ser uma posição comprada, esta estratégia possui maior semelhança com a posição de venda de *straddle* do que de compra de *butterfly*.
- Compra de *butterfly* de *put* - é montada comprando-se uma *put* de preço de exercício X , vendendo-se duas *puts* de preços de exercício Y e comprando um *put* com preço de exercício Z , aos prêmios x , y e z . Considerando que se deve ter $Z > Y > X$ e $z > y > x$, esta estratégia também promove um descaixe líquido de prêmio, o que torna o seu resultado similar ao da anterior.
- Venda de *butterfly* - uma *short butterfly*, como também é chamada esta estratégia, tem por objetivo limitar o risco assumido, por exemplo, na venda de um *straddle* ou de um *strangle* (operações em que as perdas são consideradas ilimitadas). Tal estratégia consiste na venda de uma *call* e de uma *put*, de mesmo preço de exercício, e na compra de uma *call* de preço de exercício superior e de uma *put* de preço de exercício inferior ao das opções vendidas, ou seja, na compra de duas outras opções mais baratas do que as vendidas.
- Venda de *butterfly* de *call* - esta estratégia consiste na montagem de uma *short butterfly* somente com *calls*. Consiste na venda de uma *call* de preço de exercício X , na compra de duas *calls* de preço de exercício Y e na venda de uma *call* de preço de exercício Z , onde $Z > Y > X$. Tal operação promove um descaixe líquido de prêmio.

- Venda de *butterfly* de *put* - uma *short put butterfly*, como também é conhecida, consiste na montagem de uma trava vendendo-se uma *put* com preço de exercício X, comprando-se duas *puts* com preço de exercício Y e vendendo-se uma *put* com preço de exercício Z, sendo $Z > Y > X$. É uma operação de resultado similar ao da anterior.

C) Operações de box

- Box de quatro pontas - esta estratégia permite captar ou aplicar recursos financeiros sem incorrer em riscos (operação de arbitragem). Consiste em adquirir uma *call* de preço de exercício X, vender uma *call* de preço de exercício Z, vender uma *put* de preço de exercício X e comprar uma *put* com preço de exercício Z. A condição necessária para haver arbitragem é que os preços de exercício sejam diferentes, no caso, $X < Z$. O resultado desta operação equivale a uma aplicação livre de risco uma vez que o saldo inicial, representado pela diferença entre os prêmios recebidos e pagos, seria negativo, e o saldo final, representado pela diferença dos pagamentos e recebimentos das opções exercidas, seria positivo.

Figura A2 - Compra Call Sintética **Figura A3 - Venda Put Sintética** **Figura A4 - Venda Call Sintética**

Figura A5 - Futuro Sintético - Venda **Figura A6 - Futuro Sintético - Compra** **Figura A7 - Spread de Alta (Call)**

Figura A8 - Spread Alta (Put) **Figura A9 - Spread Baixa (Put)** **Figura A10 - Spread Baixa (Call)**

Figura A11 - Compra Straddle **Figura A12 - Venda Straddle** **Figura A13 - Compra Strangle**

Figura A14 - Venda Strangle **Figura A15 - Compra Butterfly** **Figura A16 - Compra Butterfly (Call)**

Figura A17 - Compra Butterfly (Put) **Figura A18 - Venda Butterfly** **Figura A19 - Venda Butterfly(Call)**

Figura A20 - Venda Butterfly(Put) **Figura A21 - Box Quatro Pontas**

APÊNDICE B

Métodos Numéricos

1 Modelos *Lattice*

Os modelos conhecidos como *lattice* buscam, através de um passeio aleatório discreto¹, modelar um movimento browniano² correspondente. Estes modelos são considerados muito intuitivos e flexíveis, podendo ser aplicados tanto para opções européias como para americanas, que pagam ou não dividendos, derivativos de taxas de juros e também para opções exóticas. Os principais modelos *lattice* são as árvores binomial, trinomial, binomial tridimensional, binomial implícita e trinomial implícita.

1.1 Árvores Binomiais

Uma árvore binomial representa as diferentes trajetórias que poderão ser seguidas pelo preço de um ativo durante a vida da opção desse ativo.

Como já foi dito, as árvores binomiais são consideradas o modelo mais preciso para calcular o preço de quaisquer opções. Por isso, elas são muito utilizadas nos trabalhos que apresentam novos modelos (fórmulas fechadas ou aproximações destas) para testar a exatidão destes³.

¹ O termo "passeio aleatório discreto" diz respeito a uma maneira de se determinar os possíveis valores que podem ser assumidos por uma variável aleatória discreta. A denominação "discreta" nos informa que a variável não é contínua, ou seja, seu valor sofre alteração apenas uma vez dentro de um período de tempo.

² Um movimento browniano é um processo aleatório contínuo que apresenta três importantes propriedades: (i) a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo dependem somente do seu valor atual, (ii) a distribuição de probabilidades da variação do processo, em um intervalo de tempo, é independente de qualquer outro intervalo de tempo (que não sobreponha o primeiro) e (iii) as variações de um processo, em um intervalo de tempo finito, seguem uma distribuição normal, com variância que cresce linearmente com o intervalo de tempo.

³ Pode-se citar os seguintes exemplos de trabalhos que utilizam o cálculo do valor das opções através das árvores binomiais como parâmetro para averiguar a precisão dos modelos propostos: Barone-Adesi & Whaley (1987), Bjerk Sund & Stensland (1993) e Chaudhury (1995).

De acordo com Hull (1997), as árvores binomiais são um avanço crucial na teoria de precificação de opções após Black & Scholes. Por estes motivos, elas serão apresentadas detalhadamente neste trabalho, embora não estejam entre os modelos que foram escolhidos para os testes realizados.

Segundo Chriss (1997), a utilização do modelo de árvore binomial de movimentos de preços de ações começa com a especificação de uma árvore binomial. O que se deseja do modelo é que nos dê o preço do ativo para um certo período de tempo. O tempo inicial da árvore é chamado de período ou data inicial. O tempo final é chamado de período ou data final.

O período de tempo que a árvore cobre é separado em períodos de tempo individuais (passos). O modelo diz quais os possíveis preços do ativo, ao final de cada período de tempo, e para quais novos preços o ativo pode se mover na passagem de um período para o seguinte.

A árvore é chamada de árvore binomial porque o preço no mercado físico (à vista ou *spot*) se moverá para cima ou para baixo ao final de cada período. O quanto o preço do ativo sobe ou desce está relacionado com sua volatilidade. Além disso, a árvore especifica a probabilidade do preço subir ou cair em cada nó⁴.

Algumas perguntas que poderiam surgir aqui são: o que o modelo diz sobre o comportamento do preço entre dois períodos? O preço move-se para cima e para baixo entre períodos ou, alternativamente, muda diretamente para seus novos patamares? A partir do ponto de vista da finalidade do modelo, a resposta é que isso simplesmente não importa, pois toda informação sobre o preço da opção que pode ser deduzida a partir do modelo é válida, independentemente do que acontece com o preço entre períodos de tempo.

⁴ Nó é cada ponto da árvore binomial onde se calcula um possível valor para a ação.

Vale lembrar também que o método binomial de precificação é um processo de dois passos: inicialmente se constrói uma árvore binomial para os preços do ativo e então se precifica a opção. Existem vários tipos de árvores binomiais, dentre as quais se destacam as árvores binomiais padrão e as árvores binomiais flexíveis.

Nas árvores padrão, as relações de aumento (u) e queda (d) de preço e as probabilidades de transição⁵ são as mesmas em todo nó. Além disso, os tamanhos dos períodos de tempo também são os mesmos. Desde que as relações e probabilidades nunca mudam, pode-se falar da relação de ascensão e queda de toda a árvore. Toda árvore padrão é também recombinante porque se a relação de ascensão é u e a de queda é d , então um movimento ascendente seguido por um de queda pode ser denotado pelo fator ud . Do mesmo modo, um movimento de queda seguido por um ascendente pode ser denotado pelo fator du , e naturalmente $ud = du$.

As árvores flexíveis são assim chamadas porque muito poucas restrições são colocadas nas relações de ascensão e queda e nas probabilidades de transição dessas árvores. Apenas se exige que essas árvores sejam recombinantes. A razão para se considerar as árvores flexíveis é que é quase tão fácil precificar opções nessas árvores quanto nas árvores padrão, porém o modelo de árvores flexíveis permite mudança na volatilidade.

1.1.1 Relação entre Retornos de Ações e Árvores Binomiais

A taxa de retorno de um ativo representa a quantia de juros (continuamente capitalizado) ganho com esse ativo em um período de tempo. A expectativa da taxa de retorno de um ativo, por outro lado, é mais difícil de definir. Em um modelo de precificação de um ativo, a terminologia refere-se ao retorno médio desse ativo quando o “retorno” é considerado como uma variável randômica (aleatória).

⁵ A probabilidade de que o preço se mova a partir de um nó para o próximo, de modo ascendente - probabilidade de ascensão - ou de modo descendente - probabilidade de queda.

A relação entre retorno de ações e árvores binomiais está em que as árvores binomiais são modelos de precificação de ações e, como tais, eles nos dão um modelo probabilístico de retorno de ações.

Suponha que o preço *spot* de algum ativo é S_0 e que ele pode, ou subir para S_u , ou descer para S_d , no próximo período Δt a frente, ou, dizendo de outra maneira, suponha que se tem um "modelo binomial de um período" para o preço do ativo. Representando-se por p a probabilidade do ativo aumentar de valor, por r a taxa de juros livre de risco e considerando-se ainda a hipótese de avaliação neutra em relação ao risco⁶, pode-se escrever:

$$pS_u + (1 - p)S_d = e^{r\Delta t} \cdot S_0 \quad (C1)$$

Esta equação é chamada de "equação de um período futuro". Ela mostra que após um período o valor médio (que é o valor esperado) do ativo será $S_0 e^{r\Delta t}$. Isolando-se o valor de p tem-se:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} S_0 - S_d}{S_u - S_d} \quad (C2)$$

Assim, obtém-se uma fórmula para a probabilidade p num mundo risco-neutro, que depende da taxa de juros livre de risco e dos valores de S_0 , S_u e S_d ⁷.

⁶ Esse princípio, como definido anteriormente (nota de rodapé n. 23), também se aplica no caso de avaliação de opções com o uso de árvores binomiais.

⁷ Esta fórmula considera o caso de ações que não distribuem dividendos. No caso de opções de ações que distribuem dividendos contínuos à taxa q a equação para a probabilidade seria:

$$p = \frac{S_0 e^{(r-q)\Delta t} - S_d}{S_u - S_d}$$

1.1.2 Árvore Binomiais e Volatilidade

No modelo de árvore padrão assumiu-se que a volatilidade é constante, isto é, a incerteza dos retornos é a mesma qualquer que seja o período de tempo considerado.

Lembrando que a volatilidade é o desvio padrão dos retornos de curto prazo de um ativo, se considerarmos que seu preço é S_0 hoje e S_1 algum tempo depois, então, o retorno anualizado sobre S , para esse período de tempo (Δt), será:

$$\text{retorno} = \frac{1}{\Delta t} \log(S_1/S_0), \quad (\text{C3})$$

onde Δt é o intervalo de tempo entre observações.

Supondo, novamente, que o preço *spot* é S_0 e que ele ou se eleva para S_u , ou cai para S_d , no tempo t_1 , então, haverá dois possíveis retornos para o período entre observações ($\Delta t = t_1 - t_0$):

$$\begin{aligned} \text{retorno} &= \frac{1}{t_1 - t_0} \log(S_u/S_0) \\ \text{ou} \\ \text{retorno} &= \frac{1}{t_1 - t_0} \log(S_d/S_0) \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

onde as expressões acima representam, respectivamente, os retornos se o preço *spot* sobe ou desce. Representando a probabilidade do preço subir por p e a probabilidade do preço cair por $1 - p$, o valor esperado da taxa de retorno no intervalo de tempo entre t_0 e t_1 será dado por:

$$\text{retorno esperado} = \frac{p}{t_1 - t_0} \log(S_u/S_0) + \frac{1-p}{t_1 - t_0} \log(S_d/S_0) \quad (\text{C5})$$

O desvio padrão do retorno do ativo será dado pela fórmula:

$$\sigma_{\text{loc}} = \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}} \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \log(S_u/S_d) , \quad (\text{C6})$$

onde o símbolo “ σ_{loc} ” representa a volatilidade local. Conceitualmente, a volatilidade local representa a volatilidade específica para um nó particular da árvore que se está estudando.

Se a árvore binomial em questão é do tipo padrão, então, como normalmente assume-se que $d = 1/u$, tem-se:

$$\sigma_{\text{loc}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \log(u^2) , \quad (\text{C7})$$

desde que nenhum dos termos dessa equação depende do nó particularmente escolhido, comprova-se que, se a árvore é do tipo padrão, a volatilidade local é a mesma em todo nó. Essa é exatamente a hipótese de volatilidade do modelo de movimento geométrico Browniano da variação de preço de ações. Por essa razão, a árvore binomial do tipo padrão é chamada de uma aproximação temporal discreta do modelo de movimento geométrico Browniano.

1.1.3 A Construção de uma Árvore Binomial Padrão

Para se construir uma árvore binomial padrão para a precificação de um ativo com volatilidade σ , deve-se primeiramente fixar o tempo total que o modelo cobrirá (chamaremos de T esse período e o expressaremos em anos). Em seguida, é necessário estabelecer o número de períodos, N , e dividir o tempo total por esse número de períodos a fim de se obter o intervalo de cada período ($\Delta t = T/N$). Chama-se de μ a taxa de retorno esperada, expressa na mesma unidade de T . É necessário obter-se uma fórmula

para u , a relação de aumento de preço, e p , a probabilidade de transição ascendente, tal que o modelo tenha taxa de retorno esperada μ e desvio padrão σ . O primeiro método para resolver este problema é devido a Cox, Ross e Rubinstein (1979). Outro método, chamado “probabilidades iguais”, tem a vantagem que a volatilidade local é exatamente igual a σ .

O método de Cox, Ross e Rubinstein apresenta as seguintes fórmulas para as relações de aumento de preço, queda de preço e probabilidade de transição (para valores de Δt pequenos):

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} \quad (C8)$$

Com uma boa aproximação, essas fórmulas tornam a volatilidade local em cada nó igual a σ , e a expectativa de retorno exatamente igual a μ .

O método das “probabilidades iguais” produz um modelo que assegura que as probabilidades de transição de aumento e queda em todo nó são iguais a 50% . Para derivar as fórmulas, duas equações devem ser satisfeitas:

$$pu + (1 - p).d = e^{\mu\Delta t} \quad e \quad \sqrt{p(1 - p)} \log(u/d) = \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (C9)$$

A primeira equação especifica que o valor esperado do ativo para um período de tempo é igual ao preço futuro para um período (usando uma expectativa de retorno igual a μ). A segunda equação é a da volatilidade local.

Desde que se condicionou que o valor de p deve ser igual a 0,5, pode-se substituí-lo nas equações acima e obter:

$$u + d = 2e^{\mu\Delta t} \quad e \quad \log(u/d) = 2\sigma\sqrt{\Delta t} \quad (C10)$$

exponenciando a segunda equação da fórmula (C10), obtêm-se:

$$u/d = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{ou} \quad u = de^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (\text{C11})$$

substituindo estes valores na primeira equação da fórmula (C10) tem-se:

$$d = \frac{2e^{\mu\Delta t}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1} \quad \text{e} \quad u = \frac{2e^{\mu\Delta t + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1} \quad (\text{C12})$$

1.1.4 O uso da árvore binomial para precificação de opções européias

Considerando-se uma árvore de passo único, pode-se fazer uma generalização para obtenção de uma fórmula para precificação de opções européias através do modelo binomial. Assim, dado um ativo cujo preço seja S e uma opção de compra desse ativo cujo preço atual seja f , se a opção durar um tempo T e se ao longo de sua vida o preço do ativo puder assumir tanto um valor acima de S ($S.u$) quanto um valor abaixo de S ($S.d$), tal que $u > 1$ e $d < 1$, e se for indicado por f_u o retorno da opção se o preço subir para $S.u$ e por f_d se o preço cair para $S.d$, tem-se as seguintes situações para uma carteira composta de uma posição comprada em Δ ações e de uma posição vendida numa opção de compra.

- a) Se houver um movimento de alta no preço do ativo, o valor da carteira, ao final da vida da opção, será:

$$S.u.\Delta - f_u \quad (\text{C13})$$

- b) Se houver um movimento de baixa no preço do ativo, o valor será:

$$S.d.\Delta - f_d \quad (\text{C14})$$

Para que se tenha uma carteira livre de risco, os dois resultados possíveis devem ser iguais, assim tem-se:

$$S.u.\Delta - f_u = S.d.\Delta - f_d \quad \text{e} \quad \Delta = \frac{f_u - f_d}{S.u - S.d} \quad (\text{C15})$$

Nesse caso, a carteira não tem risco, devendo obter como retorno a taxa de juros livre de risco. A equação acima mostra que Δ é a razão de mudança no preço da opção em relação à mudança no preço do ativo quando o preço se move entre os nós. Denotando-se por r a taxa de juros livre de risco, o valor atual da carteira deverá ser:

$$[S.u.\Delta - f_u]e^{-rT} \quad (\text{C16})$$

e o custo de montagem da carteira é:

$$S.\Delta - f \quad (\text{C17})$$

disso segue que:

$$[S.u.\Delta - f_u]e^{-rT} = S.\Delta - f \quad (\text{C18})$$

substituindo-se o valor de Δ e simplificando-se, chega-se a:

$$f = e^{-rT} [p.f_u + (1-p).f_d] \quad (\text{C19})$$

onde: $p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$, sendo p a probabilidade do ativo subir de valor e f o preço da opção.

1.1.5 A análise da árvore do final para o começo

As opções são avaliadas no sentido do vencimento (instante T) para o começo da árvore. O valor da opção é conhecido no instante T . Por exemplo, no vencimento, uma opção de venda vale $\max(X - S_T, 0)$ e uma opção de compra, $\max(S_T - X, 0)$, onde S_T é o preço do ativo no instante T e X é o preço de exercício. Como se trabalha numa situação de indiferença ao risco, o valor de cada nó no instante $T - \Delta t$ pode ser calculado como o valor esperado no instante T , descontado à taxa de juros livre de risco r para um período de tempo Δt . Similarmente, o valor de cada nó no instante $T - 2\Delta t$ pode ser calculado como o valor esperado no instante $T - \Delta t$, descontado à taxa r para um período de tempo Δt ; e assim por diante.

Quando a opção é do tipo americana, é necessário verificar cada nó para saber se o exercício antecipado é preferível à manutenção da opção por outro período de tempo Δt (como será melhor explicado na próxima subseção). Em consequência, ao se analisar os nós do final para o começo, obtêm-se o valor da opção no instante zero.

Essa abordagem pode ser feita da seguinte forma (para o caso de dois intervalos de tempo):

Suponha-se que o preço inicial de um ativo seja S e o valor da opção seja f . Durante cada intervalo de tempo, o preço do ativo pode tanto subir para u vezes o seu valor inicial, quanto diminuir para d vezes seu valor inicial. A Figura B1 mostra uma representação esquemática de uma árvore binomial de dois passos para precificação de opções:

Figura B1 - Representação de uma árvore binomial de dois estágios para opções.

Por exemplo, após um movimento descendente o valor da opção será f_d , após dois movimentos ascendentes será f_{uu} , e assim por diante.

Utilizando-se a técnica de indução para trás, a aplicação da primeira fórmula da equação (C19) no caso acima (árvore de dois passos), produz:

$$f_u = e^{-r\Delta T} [pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \quad \text{e} \quad f_d = e^{-r\Delta T} [pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \quad (\text{C20})$$

substituindo-se as duas equações acima na primeira equação da fórmula (C19), tem-se:

$$f = e^{-2r\Delta T} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \quad (\text{C21})$$

Esse resultado é consistente com a avaliação neutra em relação ao risco. As variáveis p^2 , $2p(1-p)$ e $(1-p)^2$ são as probabilidades de se atingir nós superiores, intermediários e inferiores finais. O preço da opção é igual a seu retorno esperado numa situação de indiferença a risco, descontado à taxa livre de risco.

Ao se generalizar o uso das árvores binomiais ainda mais, acrescentando mais passos à árvore, vê-se que o princípio da avaliação neutra em relação ao risco ainda é consistente. Cox et al. (1979) apresentam a seguinte fórmula para opções de compra européia precificadas através de uma árvore de passos múltiplos:

$$c = \left[\sum_{j=0}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max(0, u^j d^{n-j} S - X) \right] / r^n \quad (C22)$$

Segundo esses autores é possível expressar a fórmula (C22) da seguinte maneira:

$$c = S\phi[a;n,p'] - Xr^n \phi[a;n,p] \quad (C23)$$

onde:

ϕ = função distribuição binomial complementar

$p \equiv (r-d) / (u-d)$;

$p' \equiv (u/r)p$;

$a \equiv$ o menor inteiro não negativo maior que $\log(X/Sd^n)/\log(u/d)$, podendo ser entendido como o número mínimo de movimentos para cima que o ativo deve fazer para terminar dentro do dinheiro;

Se $a > n$, $c = 0$.

De acordo com Cox et al. (1979), a obtenção da fórmula para precificar opções de venda segue o mesmo raciocínio usado na obtenção da fórmula para opções de compra. Os autores destacam também que a fórmula de Black & Scholes pode ser obtida como um caso limite (quando se considera a distribuição lognormal dos preços futuros) da fórmula (C23).

1.1.6 Precificação de opções americanas utilizando árvores binomiais

A utilização de árvores binomiais na precificação de opções americanas mostra o poder desse método quando comparado com a estrutura da Fórmula de Black & Scholes. O método abaixo descrito é uma simples extensão da técnica de “indução para trás” usada para opções europeias e desenvolvida por Cox, Ross e Rubinstein (1979).

Como já foi dito, opções europeias só podem ser exercidas nos seus vencimentos e opções americanas podem ser exercidas a qualquer tempo antes da expiração.

Para precificar opções europeias através de uma árvore binomial deve-se trabalhar do final para o começo. Assim, devido ao fato de haver apenas duas possibilidades de preço para os quais o preço *spot* pode caminhar a partir de cada nó, pode-se sempre reproduzir o valor da opção no momento anterior.

O mesmo conceito se aplica no caso de opções americanas. Entretanto, para reproduzir o valor da opção em um dado nó, deve-se estar preparado para o caso da opção ser exercida.

Considerando-se o aspecto acima, para precificar uma opção de compra americana deve-se seguir os seguintes passos de acordo com Chriss (1997):

- a) iniciar com uma árvore binomial (para o ativo);
- b) criar uma árvore binomial para o valor da opção;
- c) especificar o valor intrínseco da opção para os nós finais da árvore;
- d) trabalhar do final para o começo da árvore via método de indução para trás; e,

- e) para computar o valor de um nó, procede-se em dois passos. Primeiro, calcula-se o valor de manutenção (*holding value*) do nó, que é o valor para manter a opção por mais um período (calculado pela processo de indução para trás, como se fosse de uma opção européia). Em seguida, calcula-se o valor intrínseco da opção, que é o de exercício imediato da opção. O valor do nó é o maior dentre os dois acima calculados. Assim, tem-se:

$$f_0 = \max \left[e^{-r\Delta t} (pf_u + (1-p)f_d), \max(S_0 - X, 0) \right] \quad (C24)$$

onde:

f_0 = valor atual da opção de compra americana

X = preço de exercício

p = probabilidade de transição ascendente num ambiente risco-neutro

Segundo Hull (1997), para fins de avaliação de opções através de árvores binomiais, os contratos futuros podem ser considerados como ações que pagam dividendos continuamente. Nesse caso, o dividendo relevante é a taxa de juros livre de risco.

Na maioria das vezes, a abordagem de uma árvore binomial, com pequeno número de passos, para avaliar opções americanas pode ser melhorada pela técnica de controle conjunto, que envolve o uso da mesma árvore para avaliar a opção americana e a européia correspondente. Segundo Hull (1997), embora isso possa parecer perda de tempo, uma vez que o preço da opção européia é conhecido pela fórmula de Black & Scholes e suas extensões, como os erros no preço calculado para a opção americana estão muito correlacionados com os erros no preço calculado para a opção européia, é possível melhorar a estimativa de preço para a opção americana através dessa técnica. Assim, definindo-se:

f_A : preço da opção americana calculado através da árvore;

f_E : preço da opção européia calculado através da árvore;

f_{BS} : preço de Black & Scholes para a opção européia;

uma estimativa melhorada para o preço da opção americana (f'_A) é:

$$f'_A = f_A + f_{BS} - f_E \quad (C25)$$

1.2 Árvores trinomiais

Segundo Haug (1997), as árvores trinomiais, introduzidas por Boyle (1986), são similares às árvores binomiais. Elas podem ser usadas para precificar opções européias ou americanas sobre um único ativo objeto.

Pelo fato do preço do ativo poder mover-se em três direções a partir de um nó, comparado com apenas duas nas árvores binomiais, o número de intervalos de tempo (passos) necessários para se atingir a mesma precisão das árvores binomiais pode ser reduzido, tornando as árvores trinomiais mais eficientes que as binomiais.

Uma maneira de se construir uma árvore trinomial é considerar que o preço do ativo em cada nó pode subir, permanecer no mesmo nível, ou descer. Neste caso, o tamanho dos “saltos” para cima e para baixo são:

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \quad (C26)$$

e as probabilidades de subir ou descer são, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 p_u &= \left(\frac{e^{b\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2 \\
 p_d &= \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{b\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{C27}$$

Como a soma das probabilidades deve ser 1, a probabilidade de permanecer no mesmo nível de preço é:

$$p_m = 1 - p_u - p_d \tag{C28}$$

onde: b é custo de carregamento, $\Delta t = T/n$ é o tamanho de cada intervalo de tempo, T é o tempo para o vencimento em anos e n é o número de intervalos de tempo. Depois de construir a árvore de preços do ativo, o valor da opção pode ser encontrado utilizando-se o método padrão de indução para trás (*backward induction*).

1.3 Outros tipos de árvores

Há diversos outros tipos de árvores que são uma evolução dos acima descritos. Entre eles, destacam-se:

- Árvore binomial tridimensional

Rubinstein (1994) publicou um método para construir um modelo binomial tridimensional que pode ser usado para precificar muitos tipos de opções, tanto européias quanto americanas, que dependem de dois tipos de ativos.

- Árvore binomial implícita

Segundo Chriss (1997), o objetivo de uma árvore binomial implícita é começar com uma determinada distribuição de preços do ativo, para uma data futura pré estabelecida, e então construir uma árvore binomial cuja distribuição de preços ao final seja igual à distribuição escolhida.

Segundo Haug (1997), este modelo é uma discretização do processo de difusão de preços de ações (movimento Browniano) onde a volatilidade local é uma função do nível de preço do ativo básico e do tempo. A função da volatilidade numa árvore implícita, $\sigma(S,T)$, é deduzida numericamente a partir da volatilidade *smile*⁸ de opções líquidas. Os modelos podem ser usados para precificar opções exóticas e outros derivativos.

- Árvore trinomial implícita

Segundo Haug (1997), as árvores trinomiais implícitas oferecem maior flexibilidade e podem combinar uma grande classe de estruturas de volatilidade quando comparadas às binomiais implícitas.

2 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é baseado na simulação de variáveis aleatórias para resolução de problemas. É considerado muito simples e flexível, podendo ser aplicado em problemas de qualquer nível de complexidade. Entretanto, a maior inconveniência do método é o número de simulações necessário para se reduzir o erro da estimativa da solução procurada, o que tende, na prática, a tornar o método muito lento.

⁸ A volatilidade *smile* é o modo com que a volatilidade implícita varia em relação ao preço de exercício para opções de determinado vencimento.

A idéia básica da simulação de Monte Carlo, quando aplicada na precificação de opções, é a de simular um caminho que o preço do ativo objeto pode percorrer, dada a equação estocástica que determina o comportamento desse ativo, e, em seguida, calcular o valor da opção. O valor da opção assim calculado é considerado como uma amostra aleatória dos possíveis valores que a opção pode assumir. Então, este procedimento é repetido n vezes, obtendo-se, assim, a distribuição dos valores da opção, onde a média é uma estimativa do valor esperado da opção.

Segundo Boyle et al. (1997), até recentemente a precificação de opções de estilo americano era considerada fora do escopo da simulação de Monte Carlo, devido à dificuldade de determinar os períodos ótimos de exercício dessas opções. No entanto, segundo estes autores, alguns trabalhos mais recentes (Tiley, 1993; Barraquand & Martineau, 1995; e Broadie & Glasserman, 1997) propõem alternativas para o emprego deste método na avaliação dessas opções.

Segundo Hull (1997), as árvores binomiais de passos múltiplos podem ser usadas em conjunto com a simulação de Monte Carlo. Ela envolve a busca aleatória de caminhos através da árvore. Em vez de trabalhar do final para o começo da árvore, trabalha-se do começo para o final. O procedimento básico é o seguinte: no primeiro nó, sorteia-se um número aleatório entre 0 e 1. Se o número estiver entre 0 e p , segue-se um ramo ascendente; se estiver entre p e 1, toma-se um ramo descendente. Repete-se esse procedimento no nó que é atingido e em todos os nós subsequentes, até o final da árvore.

Calcula-se, em seguida, o valor final da opção pela rota traçada. Isso completa a primeira tentativa. Seguindo o mesmo procedimento, faz-se, então, várias outras tentativas. A estimativa para o valor da opção será a média aritmética dos valores finais de todas as tentativas, descontada à taxa de juros livre de risco.

De acordo com Hull (1997), o método de Monte Carlo tende a ser mais eficiente que outros métodos numéricos quando se tem três ou mais ativos objetos que envolvem processos estocásticos, pois o tempo usado pela simulação de Monte Carlo cresce de

forma praticamente linear com o número de variáveis, enquanto que em outros métodos esse crescimento tende a ser exponencial.

3 Método de diferenças finitas

Enquanto os métodos de Monte Carlo e os baseados em *lattice* visam uma aproximação do comportamento do preço do ativo objeto no decorrer do tempo, os métodos de diferenças finitas buscam uma aproximação para a função do preço da opção, a qual é solução de uma equação diferencial.

A idéia básica dos vários métodos de diferenças finitas existentes é a de substituir as derivadas parciais de uma equação diferencial por aproximações baseadas em expansões das séries de Taylor na região dos pontos de interesse. Feitas as substituições das derivadas parciais pelas aproximações de diferenças finitas na equação diferencial, esta pode ser resolvida do "final para o começo", ou seja, da data de vencimento da opção até a data atual, de uma forma recursiva, similar àquela realizada pelos modelos baseados em *lattice*. Entretanto, Dewynne et al. (1996) mostram como utilizar este método do "começo para o final".

Existem diversos trabalhos na literatura que tratam de modelos de diferenças finitas, sendo os principais, citados por Rochman⁹ (1998): Schwartz (1977), Brennan & Schwartz (1978), Courtadon (1990), Hull & White (1990) e Ames (1992).

Hull (1997) diz que os métodos de diferenças finitas são muito usados na avaliação de derivativos exóticos, opções sobre debêntures e taxas de juros. Afirma,

⁹ SCHWARTZ, E.S. The valuation of warrants: implementing a new approach. *Journal of Financial Economics*, n.4, p.79-94, 1977. BRENNAN M.J.; SCHWARTZ, E.S. Finite Difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: a synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.13, p.461-474, 1978. COURTADON, G. An introduction to numerical methods in option pricing. In: FIGLEWSKI, S.; SILBER, W.L.; SUBRAHMANYAM, M.G. Financial options: from theory to practice. Chicago: Irwin Professional Publishing, 1990, cap.14, p.538-573. HULL, C.J.; WHITE, A. A valuing derivative securities using the explicit finite difference methods. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.25, n.1, p.87-100, 1990. AMES, W.S. *Numerical methods for partial differential equations*. San Diego: Academic Press, 1992.

também, que podem ser usados tanto para opções européias quanto para americanas. O autor coloca, porém, que estes métodos tornam-se muito complicados e computacionalmente caros com o aumento do número de variáveis que determinam o valor da opção.

APÊNDICE C

Neste apêndice são apresentados os dados utilizados e os valores das opções calculados pelos modelos testados.

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&SVH	B&SVI	BSVH	BSVI	BWVH	BWVI
06/11/96	c	135,00	0,255	Mar-97	127,70	23,37%	25,69%	28,39%	12,98%	3,50	3,10	3,63	3,11	3,64	3,12	3,66
07/11/96	c	130,00	0,252	Mar-97	127,60	24,90%	25,12%	28,59%	12,65%	5,50	5,12	5,18	5,14	5,20	5,17	5,22
08/11/96	c	140,00	0,249	Mar-97	127,31	24,71%	26,42%	28,77%	12,20%	3,00	2,02	2,36	2,03	2,36	2,04	2,38
10/12/96	c	140,00	0,162	Mar-97	130,00	14,20%	29,58%	32,51%	12,16%	3,00	0,34	2,55	0,35	2,56	0,35	2,56
20/12/96	c	140,00	0,134	Mar-97	135,40	15,62%	32,11%	35,17%	11,27%	4,00	1,34	4,35	1,34	4,36	1,35	4,36
17/02/97	p	160,00	0,299	Jul-97	190,00	59,44%	46,21%	47,42%	10,47%	6,25	10,30	6,27	10,33	6,29	10,39	6,33
19/02/97	p	160,00	0,293	Jul-97	190,00	62,47%	46,13%	46,69%	10,67%	7,00	11,08	6,13	11,11	6,14	11,17	6,18
24/02/97	p	160,00	0,279	Jul-97	186,50	76,28%	49,14%	47,52%	10,70%	6,25	15,89	7,43	15,94	7,45	16,02	7,49
25/02/97	c	205,00	0,104	Mai-97	206,90	81,06%	51,78%	54,36%	11,31%	10,00	22,13	14,51	22,16	14,53	22,18	14,54
25/02/97	p	160,00	0,277	Jul-97	188,50	81,06%	45,06%	47,86%	10,77%	5,00	16,77	5,77	16,82	5,78	16,90	5,82
07/03/97	p	180,00	0,249	Jul-97	214,50	84,71%	42,24%	49,14%	10,60%	4,50	18,05	4,57	18,10	4,58	18,17	4,61
18/03/97	p	150,00	0,219	Jul-97	202,10	72,61%	41,96%	48,63%	11,01%	1,50	6,00	0,94	6,01	0,94	6,04	0,95
25/04/97	p	190,00	0,115	Jul-97	207,00	45,53%	46,94%	52,04%	10,17%	8,00	5,48	5,81	5,49	5,81	5,50	5,82
29/04/97	p	190,00	0,104	Jul-97	211,60	45,29%	56,32%	54,04%	10,05%	6,00	3,89	6,14	3,89	6,15	3,89	6,15
30/04/97	p	190,00	0,101	Jul-97	217,60	39,50%	55,65%	54,70%	9,29%	4,00	1,81	4,55	1,81	4,55	1,82	4,56
02/05/97	p	190,00	0,096	Jul-97	216,00	39,60%	52,73%	55,70%	9,08%	4,00	1,88	4,04	1,88	4,04	1,88	4,04
13/05/97	p	190,00	0,219	Set-97	228,00	33,83%	65,88%	55,13%	10,70%	10,00	1,99	10,66	1,99	10,68	2,01	10,72
14/05/97	p	175,00	0,216	Set-97	232,00	32,50%	63,77%	55,46%	11,06%	5,00	0,36	5,30	0,36	5,31	0,36	5,34
16/05/97	p	190,00	0,211	Set-97	241,00	32,61%	62,44%	55,90%	10,62%	6,75	0,75	6,81	0,75	6,82	0,76	6,85
16/05/97	p	200,00	0,211	Set-97	241,00	32,61%	62,44%	55,90%	10,62%	9,50	1,64	9,51	1,64	9,52	1,65	9,56
23/05/97	p	200,00	0,192	Set-97	248,00	37,08%	62,32%	57,39%	10,75%	7,75	1,53	7,27	1,53	7,28	1,54	7,31
06/06/97	c	210,00	0,153	Set-97	236,00	59,80%	64,05%	51,38%	10,83%	32,55	35,71	36,99	35,80	37,09	35,86	37,15
13/06/97	c	210,00	0,134	Set-97	217,50	69,04%	49,00%	45,49%	10,46%	12,41	25,11	19,06	25,15	19,10	25,19	19,12
25/06/97	c	210,00	0,101	Set-97	201,50	67,82%	26,58%	44,92%	10,68%	11,82	13,61	3,47	13,63	3,47	13,64	3,48
29/07/97	c	250,00	0,277	Dez-97	195,50	48,29%	56,66%	32,93%	10,70%	8,00	4,80	7,31	4,81	7,32	4,84	7,37
05/08/97	c	300,00	0,258	Dez-97	206,50	38,37%	58,82%	32,75%	10,45%	5,00	0,50	3,62	0,50	3,62	0,50	3,65
07/08/97	c	300,00	0,252	Dez-97	207,00	38,08%	65,23%	32,89%	10,44%	5,00	0,46	5,06	0,46	5,07	0,47	5,10
18/08/97	c	220,00	0,222	Dez-97	189,60	37,10%	65,89%	33,47%	10,21%	10,85	3,82	12,59	3,83	12,61	3,85	12,65
19/08/97	c	220,00	0,219	Dez-97	194,00	36,92%	60,59%	33,40%	10,26%	11,00	4,75	12,31	4,75	12,33	4,78	12,37
20/08/97	c	220,00	0,216	Dez-97	185,50	37,48%	56,71%	32,34%	10,38%	12,50	2,98	8,10	2,99	8,12	3,00	8,15
29/08/97	p	250,00	0,192	Dez-97	213,60	36,87%	71,03%	31,11%	9,49%	40,10	38,94	49,49	39,10	49,62	39,18	49,73
03/09/97	c	220,00	0,178	Dez-97	223,80	38,51%	64,90%	30,52%	9,37%	10,00	16,08	25,68	16,11	25,74	16,14	25,78
19/09/97	p	250,00	0,134	Dez-97	209,50	46,80%	21,76%	22,48%	8,54%	41,26	43,08	40,12	43,13	40,50	43,23	40,50

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
09/10/97	c	200,00	0,329	Mar-98	189,30	37,66%	55,31%	32,65%	9,48%	12,25	11,56	18,94	11,60	19,01	11,65	19,09
15/10/97	c	200,00	0,312	Mar-98	189,50	28,18%	39,33%	33,41%	9,54%	12,00	7,46	11,94	7,48	11,98	7,51	12,03
16/10/97	c	200,00	0,310	Mar-98	185,00	28,19%	39,48%	33,27%	9,51%	10,50	5,81	10,08	5,83	10,11	5,86	10,15
20/10/97	p	110,00	0,625	Jul-98	146,00	27,55%	37,39%	28,27%	8,02%	3,00	1,19	3,19	1,19	3,20	1,21	3,24
21/10/97	c	200,00	0,296	Mar-98	178,50	27,11%	40,57%	32,77%	9,89%	8,00	3,42	7,79	3,42	7,81	3,44	7,85
21/10/97	p	110,00	0,622	Jul-98	147,00	27,11%	36,58%	28,35%	7,88%	3,14	1,04	2,86	1,04	2,87	1,06	2,91
22/10/97	c	200,00	0,293	Mar-98	178,10	25,13%	41,16%	32,98%	10,00%	9,00	2,73	7,80	2,73	7,82	2,75	7,86
22/10/97	p	120,00	0,619	Jul-98	147,20	25,13%	37,78%	28,44%	7,82%	5,00	1,95	5,46	1,96	5,48	1,98	5,54
28/10/97	c	200,00	0,277	Mar-98	175,50	23,37%	44,62%	33,74%	12,49%	9,00	1,64	7,65	1,64	7,68	1,66	7,73
31/10/97	c	185,00	0,422	Mai-98	166,50	22,85%	44,98%	28,42%	16,00%	12,50	3,42	11,65	3,44	11,76	3,49	11,90
31/10/97	c	200,00	0,422	Mai-98	166,50	22,85%	44,98%	28,42%	16,00%	8,50	1,32	7,99	1,32	8,05	1,36	8,17
31/10/97	p	110,00	0,595	Jul-98	147,00	22,85%	36,28%	29,03%	17,98%	3,00	0,42	2,47	0,42	2,49	0,45	2,58
03/11/97	c	200,00	0,414	Mai-98	164,75	22,96%	46,39%	28,50%	14,76%	5,75	1,12	7,87	1,12	7,92	1,15	8,03
04/11/97	c	185,00	0,411	Mai-98	165,50	23,26%	40,15%	28,64%	12,86%	7,50	3,26	9,33	3,27	9,39	3,31	9,48
04/11/97	c	205,00	0,411	Mai-98	165,50	23,26%	40,15%	28,64%	12,86%	3,85	0,88	5,09	0,88	5,11	0,90	5,18
05/11/97	c	185,00	0,408	Mai-98	169,25	23,25%	35,69%	28,57%	16,00%	9,50	4,15	8,81	4,18	8,88	4,24	8,99
05/11/97	c	195,00	0,408	Mai-98	169,25	23,25%	35,69%	28,57%	16,00%	8,20	2,30	6,30	2,31	6,34	2,35	6,44
05/11/97	c	200,00	0,408	Mai-98	169,25	23,25%	35,69%	28,57%	16,00%	7,00	1,67	5,30	1,68	5,33	1,72	5,41
06/11/97	c	195,00	0,405	Mai-98	165,90	21,87%	39,70%	28,53%	16,74%	7,00	1,42	6,69	1,42	6,73	1,46	6,84
06/11/97	c	200,00	0,405	Mai-98	165,90	21,87%	39,70%	28,53%	16,74%	7,00	0,98	5,72	0,99	5,75	1,01	5,85
06/11/97	p	110,00	0,578	Jul-98	147,00	21,87%	38,81%	29,19%	17,44%	2,75	0,31	2,90	0,31	2,92	0,34	3,02
07/11/97	c	195,00	0,403	Mai-98	166,60	20,21%	42,07%	28,67%	17,48%	7,00	1,14	7,66	1,15	7,72	1,18	7,84
07/11/97	c	200,00	0,403	Mai-98	166,60	20,21%	42,07%	28,67%	17,48%	6,00	0,76	6,63	0,76	6,67	0,78	6,79
10/11/97	c	200,00	0,395	Mai-98	170,30	19,51%	40,30%	28,60%	17,84%	7,35	0,94	6,90	0,94	6,95	0,97	7,07
13/11/97	c	200,00	0,386	Mai-98	179,50	20,47%	41,98%	28,58%	17,03%	9,88	2,48	10,39	2,49	10,48	2,54	10,61
13/11/97	c	225,00	0,386	Mai-98	179,50	20,47%	41,98%	28,58%	17,03%	4,75	0,36	5,22	0,36	5,24	0,38	5,34
14/11/97	p	120,00	0,556	Jul-98	157,10	20,69%	41,57%	29,42%	16,76%	4,50	0,32	4,09	0,32	4,13	0,34	4,24
17/11/97	c	205,00	0,375	Mai-98	180,70	20,90%	40,48%	28,85%	14,29%	10,18	2,00	8,79	2,00	8,84	2,04	8,94
18/11/97	c	200,00	0,373	Mai-98	184,50	19,07%	44,02%	28,80%	14,22%	12,00	3,06	13,00	3,08	13,09	3,11	13,21
20/11/97	c	200,00	0,367	Mai-98	182,20	17,64%	41,63%	28,83%	12,11%	5,50	2,06	11,06	2,07	11,12	2,09	11,20
20/11/97	c	210,00	0,367	Mai-98	182,20	17,64%	41,63%	28,83%	12,11%	10,00	0,86	8,42	0,86	8,45	0,87	8,52
20/11/97	p	200,00	0,367	Mai-98	182,20	17,64%	41,63%	28,83%	12,11%	37,30	19,09	28,09	19,40	28,38	19,44	28,50
21/11/97	c	205,00	0,364	Mai-98	182,00	19,35%	57,92%	29,00%	10,48%	11,00	1,74	16,24	1,75	16,32	1,76	16,41

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
24/11/97	c	200,00	0,356	Mai-98	183,00	19,35%	46,65%	29,15%	11,48%	12,50	2,69	13,21	2,70	13,28	2,72	13,36
24/11/97	c	210,00	0,356	Mai-98	183,00	19,35%	46,65%	29,15%	11,48%	9,75	1,24	10,40	1,24	10,45	1,26	10,52
28/11/97	c	205,00	0,345	Mai-98	186,00	19,80%	44,95%	29,65%	14,31%	12,75	2,44	11,81	2,44	11,88	2,47	11,98
08/12/97	c	220,00	0,318	Mai-98	202,30	24,71%	47,28%	29,25%	13,64%	18,00	4,72	14,01	4,74	14,08	4,78	14,18
09/12/97	c	250,00	0,315	Mai-98	210,30	22,82%	56,54%	28,49%	13,08%	11,75	1,15	12,78	1,15	12,83	1,17	12,94
10/12/97	c	200,00	0,312	Mai-98	212,75	28,25%	55,55%	28,56%	12,86%	18,00	19,54	31,06	19,72	31,30	19,79	31,43
16/12/97	c	220,00	0,296	Mai-98	213,00	29,65%	24,43%	27,40%	13,58%	20,00	10,27	7,98	10,32	8,02	10,39	8,07
18/12/97	c	195,00	0,290	Mai-98	199,80	46,55%	51,60%	26,56%	14,38%	10,00	21,29	23,31	21,45	23,49	21,55	23,60
22/12/97	c	220,00	0,279	Mai-98	196,50	47,16%	18,37%	26,72%	14,18%	12,00	10,55	1,17	10,59	1,17	10,87	1,19
22/12/97	c	230,00	0,279	Mai-98	196,50	47,16%	18,37%	26,72%	14,18%	4,00	8,13	0,44	8,15	0,44	8,22	0,45
22/12/97	p	170,00	0,126	Mar-98	209,80	47,16%	48,73%	28,25%	16,17%	0,50	1,54	1,73	1,54	1,73	1,55	1,74
30/12/97	p	120,00	0,430	Jul-98	175,50	47,24%	45,71%	27,47%	12,56%	5,10	2,24	1,99	2,25	2,00	2,29	2,04
13/01/98	c	200,00	0,066	Mar-98	229,00	49,13%	36,13%	22,07%	15,14%	30,00	30,64	29,34	30,67	29,35	30,73	29,46
13/01/98	c	240,00	0,066	Mar-98	229,00	49,13%	36,13%	22,07%	15,14%	6,00	7,02	4,21	7,02	4,21	7,03	4,22
14/01/98	c	200,00	0,063	Mar-98	229,50	49,56%	44,00%	22,74%	14,63%	30,00	31,02	30,42	31,04	30,44	31,11	30,52
16/01/98	c	220,00	0,058	Mar-98	231,50	54,02%	39,23%	24,07%	14,56%	17,11	18,15	15,30	18,17	15,32	18,18	15,33
20/01/98	c	200,00	0,373	Jul-98	175,40	53,76%	61,57%	26,47%	11,10%	8,00	13,50	16,64	13,58	16,72	13,88	16,84
04/02/98	c	160,00	0,332	Jul-98	176,40	43,11%	39,60%	27,22%	14,92%	17,10	24,81	23,64	25,12	23,94	25,23	24,04
04/02/98	p	160,00	0,332	Jul-98	176,40	43,11%	39,60%	27,22%	14,92%	9,00	9,21	8,03	9,26	8,07	9,34	8,15
04/02/98	p	170,00	0,332	Jul-98	176,40	43,11%	39,60%	27,22%	14,92%	13,50	13,42	12,11	13,51	12,20	13,61	12,29
05/02/98	c	160,00	0,329	Jul-98	175,50	41,44%	34,54%	27,39%	15,50%	24,00	23,56	21,28	23,87	21,57	23,97	21,66
05/02/98	c	200,00	0,156	Mai-98	220,50	41,44%	42,75%	24,99%	15,92%	24,00	25,68	26,04	25,83	26,18	25,88	26,23
05/02/98	c	210,00	0,156	Mai-98	220,50	41,44%	42,75%	24,99%	15,92%	17,50	19,43	19,84	19,51	19,93	19,56	19,97
18/02/98	c	225,00	0,293	Jul-98	176,90	67,74%	42,74%	27,32%	14,24%	5,75	10,70	3,41	10,74	3,41	10,83	3,45
19/02/98	p	160,00	0,290	Jul-98	179,80	69,24%	51,67%	27,24%	13,93%	12,00	15,80	10,11	15,88	10,15	15,98	10,22
27/02/98	c	150,00	0,096	Mai-98	206,70	67,72%	35,14%	26,76%	14,23%	59,00	56,93	55,94	56,77	56,70	57,29	56,70
27/02/98	c	160,00	0,268	Jul-98	170,80	67,72%	57,57%	27,73%	13,52%	21,50	27,80	24,57	27,98	24,74	28,10	24,83
27/02/98	c	200,00	0,096	Mai-98	206,70	67,72%	35,14%	26,76%	14,23%	16,50	20,26	12,40	20,29	12,43	20,32	12,44
04/03/98	c	150,00	0,082	Mai-98	198,00	66,82%	71,50%	26,94%	14,52%	50,00	48,50	48,84	48,41	48,77	48,74	49,07
04/03/98	c	220,00	0,082	Mai-98	198,00	66,82%	71,50%	26,94%	14,52%	2,50	7,20	8,16	7,21	8,16	7,22	8,18
06/03/98	c	210,00	0,077	Mai-98	190,50	66,81%	62,91%	26,93%	13,38%	4,50	6,93	6,20	6,94	6,20	6,95	6,21
13/03/98	c	200,00	0,058	Mai-98	191,40	68,04%	53,54%	26,32%	12,45%	0,50	8,82	6,25	8,83	6,26	8,83	6,26
13/03/98	p	200,00	0,058	Mai-98	191,40	68,04%	53,54%	26,32%	12,45%	11,00	17,36	14,79	17,37	14,80	17,38	14,81

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
19/03/98	P	140,00	0,214	Jul-98	151,00	68,76%	47,90%	26,66%	11,25%	4,00	13,07	7,87	13,10	7,89	13,15	7,92
20/03/98	P	135,00	0,211	Jul-98	154,00	68,88%	31,67%	26,45%	10,86%	5,00	9,97	2,04	9,99	2,04	10,02	2,05
20/03/98	P	140,00	0,211	Jul-98	154,00	68,88%	31,67%	26,45%	10,86%	8,00	12,02	3,21	12,05	3,22	12,09	3,23
20/03/98	P	160,00	0,038	Mai-98	177,70	68,88%	23,64%	13,90%	11,62%	2,00	2,83	0,03	2,83	0,03	2,83	0,03
23/03/98	P	165,00	0,030	Mai-98	177,90	69,86%	59,95%	14,68%	11,74%	3,50	3,37	2,44	3,37	2,44	3,37	2,44
30/03/98	C	160,00	0,184	Jul-98	154,00	28,15%	56,66%	27,78%	10,48%	11,45	4,83	12,12	4,84	12,14	4,85	12,17
30/03/98	P	140,00	0,184	Jul-98	154,00	28,15%	56,66%	27,78%	10,48%	5,00	2,12	8,12	2,12	8,13	2,13	8,15
01/04/98	P	120,00	0,351	Set-98	140,50	27,57%	35,25%	27,99%	10,71%	3,25	1,81	3,38	1,81	3,39	1,83	3,42
01/04/98	P	140,00	0,178	Jul-98	150,40	27,57%	48,31%	28,22%	9,96%	4,50	2,72	7,18	2,73	7,19	2,74	7,21
02/04/98	C	175,00	0,175	Jul-98	151,00	27,69%	36,14%	28,50%	9,81%	5,35	0,99	2,11	0,89	2,11	0,90	2,12
02/04/98	P	120,00	0,348	Set-98	141,10	27,69%	48,85%	28,14%	10,91%	4,01	1,73	6,44	1,73	6,46	1,75	6,51
03/04/98	C	120,00	0,173	Jul-98	148,30	27,11%	52,96%	28,61%	9,96%	32,00	27,99	30,39	28,30	30,48	28,32	30,56
03/04/98	P	120,00	0,345	Set-98	139,30	27,11%	50,74%	28,23%	11,28%	4,25	1,86	7,29	1,86	7,32	1,88	7,37
07/04/98	P	120,00	0,334	Set-98	139,10	26,42%	52,24%	28,53%	10,86%	4,25	1,69	7,53	1,69	7,55	1,70	7,60
07/04/98	P	130,00	0,162	Jul-98	148,30	26,42%	63,91%	29,19%	10,28%	1,75	0,75	6,78	0,75	6,78	0,75	6,80
07/04/98	P	220,00	0,162	Jul-98	148,30	26,42%	63,91%	29,19%	10,28%	72,95	70,52	71,75	71,70	71,70	71,70	72,35
08/04/98	P	120,00	0,332	Set-98	141,00	26,73%	52,28%	28,59%	10,55%	4,25	1,47	7,03	1,47	7,05	1,48	7,10
08/04/98	P	130,00	0,159	Jul-98	150,60	26,73%	55,02%	29,18%	9,87%	1,79	0,56	4,52	0,56	4,52	0,56	4,54
13/04/98	P	120,00	0,318	Set-98	148,50	24,91%	52,86%	27,16%	10,78%	4,00	0,51	5,32	0,51	5,33	0,52	5,37
14/04/98	C	160,00	0,142	Jul-98	159,60	31,03%	37,68%	25,86%	10,42%	11,00	7,16	8,73	7,17	8,74	7,18	8,76
14/04/98	C	200,00	0,315	Set-98	149,80	31,03%	53,24%	27,27%	10,82%	5,87	0,59	4,40	0,59	4,41	0,60	4,45
14/04/98	P	110,00	0,315	Set-98	149,80	31,03%	53,24%	27,27%	10,82%	2,25	0,33	2,88	0,33	2,88	0,34	2,91
14/04/98	P	120,00	0,315	Set-98	149,80	31,03%	53,24%	27,27%	10,82%	4,00	1,08	5,11	1,08	5,13	1,10	5,16
15/04/98	C	160,00	0,140	Jul-98	157,70	30,66%	47,29%	26,17%	10,39%	11,00	6,08	9,93	6,09	9,94	6,10	9,96
15/04/98	C	200,00	0,312	Set-98	147,80	30,66%	52,14%	27,36%	10,50%	6,15	0,44	3,73	0,44	3,74	0,45	3,77
15/04/98	P	120,00	0,312	Set-98	147,80	30,66%	52,14%	27,36%	10,50%	3,52	1,20	5,20	1,20	5,21	1,21	5,25
15/04/98	P	130,00	0,140	Jul-98	157,70	30,66%	47,29%	26,17%	10,39%	1,03	0,31	1,73	0,31	1,73	0,31	1,74
16/04/98	P	120,00	0,310	Set-98	145,80	28,74%	53,33%	27,46%	11,23%	3,75	1,10	5,79	1,10	5,81	1,12	5,85
17/04/98	P	120,00	0,307	Set-98	146,20	29,06%	53,71%	27,63%	10,94%	3,75	1,09	5,75	1,09	5,77	1,10	5,80
20/04/98	C	160,00	0,126	Jul-98	155,10	28,40%	38,67%	27,22%	10,64%	9,50	4,13	6,31	4,13	6,31	4,14	6,32
20/04/98	P	120,00	0,299	Set-98	145,90	28,40%	53,67%	27,81%	11,17%	3,60	0,98	5,64	0,98	5,66	0,99	5,69
22/04/98	C	160,00	0,121	Jul-98	152,70	28,31%	53,50%	27,50%	10,91%	8,50	3,12	8,17	3,12	8,18	3,12	8,20
24/04/98	P	120,00	0,288	Set-98	135,10	30,70%	54,04%	26,43%	11,33%	5,75	2,80	8,08	2,80	8,11	2,82	8,15

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&SVH	B&SVI	BSVH	BSVI	BWVH	BWVI
28/04/98	c	160,00	0,277	Set-98	136,80	30,19%	64,82%	26,74%	11,66%	8,00	1,94	10,21	1,94	10,24	1,96	10,30
28/04/98	p	120,00	0,277	Set-98	136,80	30,19%	64,82%	26,74%	11,66%	3,50	2,26	9,91	2,26	9,94	2,28	9,99
28/04/98	p	125,00	0,104	Jul-98	143,70	30,19%	55,08%	24,60%	11,30%	3,00	0,44	2,90	0,44	2,90	0,44	2,91
29/04/98	c	160,00	0,274	Set-98	135,70	33,65%	52,37%	26,90%	11,67%	8,90	2,36	6,56	2,36	6,57	2,38	6,61
30/04/98	c	120,00	0,099	Jul-98	141,70	33,60%	55,87%	25,54%	11,74%	29,00	21,78	23,53	21,78	23,56	21,90	23,61
11/05/98	c	160,00	0,241	Set-98	134,00	33,40%	80,93%	27,92%	11,66%	7,00	1,66	12,04	1,66	12,07	1,67	12,13
15/05/98	c	160,00	0,230	Set-98	131,00	34,03%	70,46%	27,93%	11,57%	6,75	1,22	8,08	1,23	8,10	1,23	8,14
15/05/98	p	120,00	0,230	Set-98	131,00	34,03%	70,46%	27,93%	11,57%	5,00	3,71	11,59	3,72	11,62	3,74	11,67
15/05/98	p	130,00	0,058	Jul-98	136,00	34,03%	61,82%	27,25%	10,82%	3,00	1,96	5,19	1,96	5,19	1,98	5,19
21/05/98	p	120,00	0,214	Set-98	138,00	32,52%	69,45%	27,29%	11,45%	4,00	1,79	8,75	1,79	8,77	1,80	8,81
27/05/98	p	120,00	0,197	Set-98	136,50	28,61%	79,09%	27,85%	12,74%	2,75	1,29	10,54	1,29	10,56	1,29	10,60
28/05/98	p	100,00	0,444	Dez-98	139,50	28,27%	39,54%	29,18%	12,47%	1,25	0,33	1,44	0,33	1,44	0,34	1,47
29/05/98	p	100,00	0,441	Dez-98	138,00	29,49%	38,08%	29,27%	13,07%	1,39	0,45	1,34	0,45	1,35	0,47	1,37
29/05/98	p	120,00	0,192	Set-98	135,80	29,49%	38,34%	28,30%	11,46%	3,15	1,45	2,81	1,45	2,81	1,46	2,82
02/06/98	p	120,00	0,181	Set-98	132,40	29,47%	62,44%	27,33%	11,32%	5,09	1,91	7,86	1,91	7,88	1,92	7,90
04/06/98	p	120,00	0,175	Set-98	131,40	29,92%	72,83%	27,90%	10,19%	5,72	2,12	10,02	2,12	10,03	2,12	10,06
05/06/98	c	130,00	0,173	Set-98	130,60	29,73%	68,55%	28,20%	9,82%	10,00	6,61	14,80	6,62	14,83	6,63	14,86
05/06/98	p	130,00	0,173	Set-98	130,60	29,73%	68,55%	28,20%	9,82%	7,00	6,02	14,21	6,03	14,24	6,04	14,27
08/06/98	p	110,00	0,164	Set-98	127,80	28,90%	40,07%	28,03%	9,77%	4,18	0,65	1,82	0,65	1,82	0,65	1,83
16/06/98	p	120,00	0,142	Set-98	126,00	30,54%	95,82%	28,66%	9,67%	6,00	3,11	14,61	3,11	14,62	3,12	14,65
17/06/98	p	120,00	0,140	Set-98	126,20	29,61%	73,14%	29,07%	9,48%	6,00	2,85	10,37	2,85	10,38	2,86	10,40
18/06/98	p	120,00	0,137	Set-98	124,60	29,17%	48,21%	29,25%	9,56%	6,00	3,24	6,50	3,24	6,51	3,25	6,52
25/06/98	p	120,00	0,118	Set-98	120,70	24,00%	91,93%	29,80%	9,68%	7,00	3,57	14,57	3,58	14,59	3,58	14,61
26/06/98	p	120,00	0,115	Set-98	118,20	25,73%	45,10%	29,48%	9,41%	7,00	5,05	8,11	5,06	8,12	5,06	8,13
30/06/98	p	110,00	0,104	Set-98	115,05	25,64%	38,09%	29,61%	9,28%	4,00	1,70	3,32	1,71	3,32	1,71	3,33
30/06/98	p	110,00	0,353	Dez-98	119,80	25,64%	38,44%	29,99%	10,19%	5,50	3,03	6,05	3,04	6,07	3,06	6,11
01/07/98	p	100,00	0,351	Dez-98	120,70	23,30%	36,18%	30,14%	9,40%	1,75	0,58	2,37	0,58	2,38	0,59	2,40
01/07/98	p	120,00	0,101	Set-98	116,10	23,30%	43,13%	30,16%	9,64%	8,81	5,73	8,51	5,74	8,52	5,74	8,53
02/07/98	p	100,00	0,348	Dez-98	118,50	22,91%	32,35%	30,14%	9,57%	4,05	0,71	2,05	0,71	2,05	0,72	2,07
02/07/98	p	120,00	0,099	Set-98	114,20	22,91%	72,58%	30,01%	9,27%	9,83	6,96	13,65	6,97	13,66	6,98	13,67
06/07/98	p	120,00	0,088	Set-98	115,70	19,29%	70,23%	30,97%	8,94%	12,00	5,32	11,96	5,33	11,97	5,33	11,98
07/07/98	p	120,00	0,085	Set-98	115,90	20,85%	70,49%	31,68%	9,48%	11,50	5,32	11,74	5,33	11,75	5,33	11,76
13/07/98	p	100,00	0,318	Dez-98	116,70	23,94%	43,25%	29,96%	10,20%	3,50	0,89	4,06	0,89	4,07	0,89	4,09

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
13/07/98	P	120,00	0,068	Set-98	112,40	23,94%	68,68%	27,80%	11,00%	11,50	8,10	12,57	8,10	12,58	8,11	12,59
15/07/98	P	100,00	0,312	Dez-98	115,85	24,38%	40,30%	30,25%	10,32%	5,30	1,01	3,61	1,01	3,62	1,02	3,65
15/07/98	P	120,00	0,063	Set-98	112,40	24,38%	77,49%	28,42%	11,94%	11,12	8,06	13,21	8,07	13,22	8,07	13,23
17/07/98	P	120,00	0,058	Set-98	113,25	24,53%	57,93%	30,18%	10,89%	10,00	7,29	10,32	7,30	10,33	7,30	10,33
21/07/98	P	120,00	0,047	Set-98	114,30	24,76%	58,89%	32,34%	9,82%	7,00	6,29	9,17	6,29	9,18	6,29	9,18
23/07/98	P	120,00	0,041	Set-98	118,30	28,44%	99,55%	30,86%	9,45%	3,75	3,66	10,41	3,66	10,41	3,66	10,42
29/07/98	P	105,00	0,274	Dez-98	123,75	32,26%	49,01%	31,09%	8,98%	2,50	1,64	4,48	1,65	4,49	1,66	4,51
30/07/98	C	140,00	0,271	Dez-98	127,00	31,36%	37,81%	30,91%	9,05%	8,00	3,60	5,09	3,60	5,10	3,62	5,13
04/08/98	C	140,00	0,258	Dez-98	129,20	34,63%	49,68%	30,88%	8,64%	7,50	4,88	8,58	4,89	8,60	4,90	8,63
04/08/98	P	120,00	0,258	Dez-98	129,20	34,63%	49,68%	30,88%	8,64%	6,50	4,77	8,24	4,78	8,26	4,80	8,29
05/08/98	C	140,00	0,255	Dez-98	129,90	34,71%	43,77%	31,11%	8,84%	6,50	5,10	7,33	5,11	7,34	5,13	7,36
05/08/98	P	120,00	0,255	Dez-98	129,90	34,71%	43,77%	31,11%	8,84%	6,50	4,54	6,59	4,55	6,60	4,57	6,62
07/08/98	C	90,00	0,249	Dez-98	129,90	34,69%	41,92%	31,60%	9,37%	40,00	39,09	39,33	39,90	39,90	39,90	39,95
07/08/98	C	140,00	0,249	Dez-98	129,90	34,69%	41,92%	31,60%	9,37%	7,00	5,00	6,75	5,01	6,76	5,03	6,79
07/08/98	P	120,00	0,249	Dez-98	129,90	34,69%	41,92%	31,60%	9,37%	7,00	4,45	6,06	4,46	6,07	4,48	6,09
11/08/98	C	140,00	0,238	Dez-98	122,25	34,40%	47,23%	30,51%	9,57%	6,17	2,54	5,05	2,55	5,06	2,56	5,08
14/08/98	C	140,00	0,230	Dez-98	118,50	36,74%	52,51%	30,81%	9,28%	4,25	2,04	4,92	2,05	4,82	2,06	4,84
14/08/98	P	100,00	0,230	Dez-98	118,50	36,74%	52,51%	30,81%	9,28%	2,13	1,67	3,99	1,67	3,99	1,68	4,01
18/08/98	C	120,00	0,219	Dez-98	122,50	37,74%	44,85%	30,83%	9,85%	7,25	9,63	11,19	9,66	11,23	9,68	11,25
18/08/98	P	110,00	0,219	Dez-98	122,50	37,74%	44,85%	30,83%	9,85%	3,00	3,33	4,61	3,33	4,62	3,35	4,64
19/08/98	C	140,00	0,216	Dez-98	122,65	39,05%	31,35%	31,12%	9,93%	2,71	3,17	1,85	3,17	1,85	3,18	1,86
19/08/98	P	110,00	0,216	Dez-98	122,65	39,05%	31,35%	31,12%	9,93%	2,83	3,48	2,19	3,49	2,19	3,50	2,20
20/08/98	C	120,00	0,214	Dez-98	120,90	39,00%	35,89%	31,24%	9,96%	6,50	8,92	8,24	8,94	8,27	8,96	8,29
20/08/98	C	130,00	0,214	Dez-98	120,90	39,00%	35,89%	31,24%	9,96%	3,83	5,07	4,43	5,08	4,43	5,09	4,45
20/08/98	C	150,00	0,214	Dez-98	120,90	39,00%	35,89%	31,24%	9,96%	2,00	1,34	0,99	1,34	0,99	1,35	1,00
20/08/98	P	100,00	0,214	Dez-98	120,90	39,00%	35,89%	31,24%	9,96%	1,75	1,46	1,12	1,46	1,12	1,47	1,13
20/08/98	P	105,00	0,214	Dez-98	120,90	39,00%	35,89%	31,24%	9,96%	2,00	2,46	2,01	2,46	2,01	2,47	2,02
20/08/98	P	110,00	0,214	Dez-98	120,90	39,00%	35,89%	31,24%	9,96%	3,60	3,87	3,31	3,87	3,32	3,89	3,33
21/08/98	C	120,00	0,211	Dez-98	120,30	38,99%	36,63%	31,52%	10,37%	6,00	8,54	8,03	8,56	8,05	8,58	8,07
21/08/98	C	140,00	0,211	Dez-98	120,30	38,99%	36,63%	31,52%	10,37%	2,50	2,51	2,14	2,51	2,14	2,52	2,15
21/08/98	P	110,00	0,211	Dez-98	120,30	38,99%	36,63%	31,52%	10,37%	3,25	3,98	3,56	3,99	3,56	4,00	3,57
25/08/98	C	150,00	0,200	Dez-98	126,00	34,86%	33,68%	31,23%	10,46%	2,00	1,39	1,24	1,39	1,24	1,39	1,25
26/08/98	C	120,00	0,197	Dez-98	123,80	36,00%	39,32%	31,29%	10,94%	8,00	9,60	10,29	9,64	10,33	9,66	10,35

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Pregão de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
01/09/98	p	110,00	0,181	Dez-98	121,50	33,39%	28,20%	32,17%	10,70%	2,91	2,30	1,55	2,30	1,55	2,31	1,56
02/09/98	p	120,00	0,178	Dez-98	121,70	29,27%	37,38%	32,54%	11,63%	6,00	5,03	6,64	5,05	6,65	5,06	6,67
03/09/98	c	130,00	0,175	Dez-98	120,50	29,16%	34,15%	32,82%	12,54%	3,00	2,43	3,30	2,44	3,30	2,45	3,31
03/09/98	p	110,00	0,175	Dez-98	120,50	29,16%	34,15%	32,82%	12,54%	2,50	1,81	2,55	1,81	2,55	1,82	2,57
03/09/98	p	120,00	0,175	Dez-98	120,50	29,16%	34,15%	32,82%	12,54%	6,50	5,49	6,46	5,50	6,48	5,51	6,50
04/09/98	c	140,00	0,173	Dez-98	120,50	28,84%	33,54%	33,22%	15,69%	2,00	0,76	1,26	0,76	1,27	0,77	1,27
04/09/98	p	100,00	0,173	Dez-98	120,50	28,84%	33,54%	33,22%	15,69%	0,50	0,33	0,62	0,33	0,62	0,33	0,63
04/09/98	p	105,00	0,173	Dez-98	120,50	28,84%	33,54%	33,22%	15,69%	1,20	0,82	1,30	0,82	1,30	0,82	1,31
04/09/98	p	110,00	0,173	Dez-98	120,50	28,84%	33,54%	33,22%	15,69%	2,50	1,73	2,41	1,73	2,41	1,74	2,42
08/09/98	p	110,00	0,162	Dez-98	123,30	28,82%	34,47%	33,17%	16,08%	2,50	1,13	1,81	1,13	1,81	1,13	1,82
09/09/98	c	140,00	0,159	Dez-98	121,80	30,13%	39,57%	33,43%	15,15%	1,10	0,93	2,08	0,93	2,08	0,94	2,09
09/09/98	p	105,00	0,159	Dez-98	121,80	30,13%	39,57%	33,43%	15,15%	1,00	0,69	1,62	0,69	1,62	0,70	1,63
09/09/98	p	110,00	0,408	Mar-99	123,40	30,13%	35,19%	27,74%	13,44%	4,50	3,59	4,80	3,61	4,83	3,65	4,88
09/09/98	p	130,00	0,159	Dez-98	121,80	30,13%	39,57%	33,43%	15,15%	9,33	10,73	12,38	10,79	12,44	10,81	12,46
10/09/98	c	140,00	0,156	Dez-98	118,50	30,27%	28,88%	33,05%	19,83%	1,10	0,55	0,46	0,55	0,46	0,56	0,46
10/09/98	p	110,00	0,156	Dez-98	118,50	30,27%	28,88%	33,05%	19,83%	2,69	2,15	1,95	2,16	1,96	2,17	1,97
10/09/98	p	130,00	0,156	Dez-98	118,50	30,27%	28,88%	33,05%	19,83%	12,25	12,96	12,77	13,08	12,89	13,10	12,91
11/09/98	p	110,00	0,153	Dez-98	113,95	31,20%	33,77%	31,73%	17,48%	4,00	3,61	4,03	3,62	4,04	3,63	4,06
14/09/98	p	110,00	0,145	Dez-98	111,70	28,73%	33,60%	31,59%	15,64%	4,44	3,95	4,74	3,95	4,75	3,97	4,76
15/09/98	c	120,00	0,142	Dez-98	113,80	29,31%	31,76%	31,76%	14,42%	4,50	2,58	2,96	2,59	2,97	2,60	2,98
15/09/98	p	110,00	0,142	Dez-98	113,80	29,31%	31,76%	31,76%	14,42%	3,25	3,20	3,59	3,21	3,59	3,21	3,60
15/09/98	p	130,00	0,142	Dez-98	113,80	29,31%	31,76%	31,76%	14,42%	16,50	16,60	16,83	16,70	16,93	16,75	16,96
16/09/98	p	110,00	0,140	Dez-98	113,30	30,04%	33,03%	32,17%	14,76%	3,00	3,45	3,92	3,46	3,93	3,47	3,94
17/09/98	c	120,00	0,386	Mar-99	113,00	28,80%	33,95%	27,22%	10,80%	8,00	5,06	6,41	5,08	6,44	5,12	6,48
17/09/98	p	120,00	0,137	Dez-98	111,40	28,80%	27,17%	32,17%	15,54%	10,00	10,15	9,94	10,20	9,99	10,21	10,00
18/09/98	p	110,00	0,134	Dez-98	111,20	29,10%	27,66%	32,63%	17,07%	4,55	4,03	3,81	4,04	3,82	4,06	3,83
18/09/98	p	120,00	0,134	Dez-98	111,20	29,10%	27,66%	32,63%	17,07%	11,15	10,28	10,10	10,34	10,16	10,35	10,17
21/09/98	p	120,00	0,126	Dez-98	110,80	26,60%	34,01%	33,09%	18,03%	12,00	10,17	11,07	10,24	11,13	10,25	11,15
22/09/98	c	110,00	0,123	Dez-98	111,90	26,54%	43,29%	33,59%	18,44%	5,00	5,03	7,54	5,04	7,57	5,06	7,58
23/09/98	p	110,00	0,121	Dez-98	112,20	27,46%	26,36%	34,16%	16,55%	4,75	3,15	2,99	3,16	2,99	3,17	3,00
23/09/98	p	120,00	0,121	Dez-98	112,20	27,46%	26,36%	34,16%	16,55%	10,00	9,18	9,05	9,22	9,09	9,24	9,10
23/09/98	p	130,00	0,121	Dez-98	112,20	27,46%	26,36%	34,16%	16,55%	19,00	17,75	17,69	17,84	17,80	17,94	17,89
24/09/98	c	110,00	0,118	Dez-98	113,40	31,12%	38,49%	34,70%	17,29%	6,00	6,52	7,58	6,54	7,61	6,55	7,62

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
24/09/98	c	120,00	0,118	Dez-98	113,40	31,12%	38,49%	34,70%	17,29%	2,50	2,30	3,33	2,31	3,34	2,31	3,35
25/09/98	c	110,00	0,115	Dez-98	113,70	30,80%	30,04%	35,34%	16,57%	6,75	6,61	6,51	6,64	6,53	6,65	6,54
28/09/98	p	110,00	0,107	Dez-98	117,00	28,46%	31,76%	35,13%	18,19%	3,00	1,57	1,97	1,57	1,97	1,58	1,97
29/09/98	p	110,00	0,104	Dez-98	114,80	30,18%	39,98%	35,13%	17,05%	3,50	2,34	3,63	2,34	3,63	2,35	3,64
30/09/98	p	120,00	0,101	Dez-98	113,20	30,50%	39,02%	35,38%	17,57%	8,00	8,55	9,63	8,58	9,66	8,59	9,67
30/09/98	p	130,00	0,101	Dez-98	113,20	30,50%	39,02%	35,38%	17,57%	17,87	16,90	17,49	16,98	17,57	17,05	17,61
01/10/98	p	130,00	0,099	Dez-98	110,40	30,53%	34,60%	34,77%	17,15%	20,00	19,48	19,64	19,60	19,71	19,67	19,81
02/10/98	p	100,00	0,096	Dez-98	111,50	31,26%	40,89%	35,52%	14,38%	1,00	0,66	1,42	0,66	1,42	0,66	1,43
05/10/98	c	120,00	0,088	Dez-98	112,00	31,23%	35,87%	36,35%	15,55%	1,75	1,40	1,89	1,40	1,89	1,40	1,89
05/10/98	p	105,00	0,088	Dez-98	112,00	31,23%	35,87%	36,35%	15,55%	1,50	1,42	1,89	1,42	1,89	1,42	1,90
07/10/98	p	110,00	0,082	Dez-98	115,00	31,69%	33,34%	37,97%	15,99%	1,50	2,03	2,21	2,03	2,22	2,03	2,22
08/10/98	c	125,00	0,079	Dez-98	118,40	32,19%	26,90%	37,84%	14,85%	2,75	1,85	1,27	1,85	1,27	1,85	1,27
08/10/98	p	115,00	0,079	Dez-98	118,40	32,19%	26,90%	37,84%	14,85%	4,00	2,71	2,06	2,71	2,06	2,71	2,07
13/10/98	p	110,00	0,066	Dez-98	113,30	32,90%	41,26%	36,99%	19,59%	1,50	2,31	3,20	2,31	3,20	2,31	3,21
14/10/98	p	105,00	0,063	Dez-98	113,90	33,15%	25,16%	38,20%	19,78%	1,10	0,78	0,32	0,78	0,32	0,78	0,32
19/10/98	c	125,00	0,049	Dez-98	115,30	29,33%	46,21%	41,94%	19,53%	2,00	0,40	1,50	0,40	1,50	0,40	1,50
19/10/98	p	110,00	0,049	Dez-98	115,30	29,33%	46,21%	41,94%	19,53%	2,00	1,00	2,41	1,00	2,41	1,00	2,42
20/10/98	p	110,00	0,047	Dez-98	113,00	29,61%	48,79%	41,72%	20,17%	2,40	1,58	3,30	1,58	3,30	1,58	3,31
21/10/98	p	110,00	0,044	Dez-98	113,85	29,86%	38,89%	43,75%	19,28%	2,00	1,27	2,01	1,27	2,01	1,27	2,02
22/10/98	c	120,00	0,041	Dez-98	115,20	29,93%	38,75%	46,09%	18,92%	1,50	1,06	1,76	1,06	1,76	1,06	1,76
22/10/98	p	90,00	0,290	Mar-99	116,80	29,93%	39,94%	28,18%	12,25%	1,50	0,36	1,16	0,36	1,16	0,36	1,18
22/10/98	p	110,00	0,041	Dez-98	115,20	29,93%	38,75%	46,09%	18,92%	1,50	0,87	1,51	0,87	1,51	0,87	1,51
23/10/98	c	120,00	0,038	Dez-98	115,40	30,10%	37,12%	48,71%	18,90%	1,50	1,05	1,58	1,05	1,58	1,05	1,58
23/10/98	p	90,00	0,288	Mar-99	117,00	30,10%	43,08%	28,38%	12,09%	1,50	0,35	1,46	0,35	1,46	0,36	1,47
23/10/98	p	110,00	0,038	Dez-98	115,40	30,10%	37,12%	48,71%	18,90%	1,10	0,77	1,24	0,77	1,24	0,78	1,25
26/10/98	c	120,00	0,030	Dez-98	117,50	28,49%	35,57%	51,79%	19,05%	2,21	1,29	1,83	1,30	1,83	1,30	1,83
27/10/98	p	110,00	0,027	Dez-98	114,90	26,24%	42,90%	51,70%	17,69%	1,19	0,40	1,31	0,40	1,31	0,40	1,31
28/10/98	c	120,00	0,025	Dez-98	115,30	27,31%	40,93%	56,17%	17,55%	1,15	0,48	1,23	0,48	1,23	0,48	1,23
30/10/98	c	120,00	0,019	Dez-98	117,00	25,58%	44,89%	71,62%	14,02%	1,37	0,58	1,67	0,58	1,67	0,58	1,67
06/11/98	c	100,00	0,249	Mar-99	127,25	36,30%	49,30%	24,45%	9,96%	28,50	27,43	28,92	27,62	29,09	27,76	29,19
12/11/98	c	130,00	0,233	Mar-99	122,90	35,89%	49,21%	25,09%	9,68%	5,00	5,50	8,54	5,52	8,56	5,53	8,58
13/11/98	c	130,00	0,230	Mar-99	122,20	35,74%	33,64%	25,30%	9,54%	4,00	5,15	4,69	5,16	4,70	5,18	4,72
16/11/98	c	140,00	0,222	Mar-99	123,65	34,23%	30,45%	25,39%	10,27%	3,00	2,62	1,97	2,63	1,97	2,64	1,98

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&SVH	B&SVI	BSVH	BSVI	BWVH	BWVI
17/11/98	c	130,00	0,219	Mar-99	124,50	34,37%	36,31%	25,57%	10,62%	4,95	5,57	6,00	5,58	6,02	5,60	6,04
17/11/98	p	110,00	0,219	Mar-99	124,50	34,37%	36,31%	25,57%	10,62%	2,00	2,33	2,64	2,33	2,64	2,34	2,66
17/11/98	p	115,00	0,219	Mar-99	124,50	34,37%	36,31%	25,57%	10,62%	2,50	3,75	4,13	3,76	4,14	3,77	4,15
18/11/98	c	130,00	0,216	Mar-99	122,80	34,45%	30,51%	25,66%	10,71%	4,14	4,86	4,02	4,87	4,03	4,89	4,05
18/11/98	p	95,00	0,216	Mar-99	122,80	34,45%	30,51%	25,66%	10,71%	1,00	0,39	0,21	0,39	0,21	0,39	0,21
18/11/98	p	115,00	0,216	Mar-99	122,80	34,45%	30,51%	25,66%	10,71%	3,25	4,22	3,45	4,23	3,46	4,25	3,47
19/11/98	c	130,00	0,214	Mar-99	123,30	34,17%	34,53%	25,90%	10,14%	4,00	4,96	5,03	4,97	5,04	4,98	5,06
24/11/98	p	95,00	0,200	Mar-99	122,40	33,75%	29,69%	26,33%	11,16%	1,00	0,31	0,15	0,31	0,15	0,31	0,15
27/11/98	c	130,00	0,192	Mar-99	123,90	33,31%	45,61%	27,10%	10,92%	4,00	4,63	7,19	4,64	7,20	4,65	7,22
27/11/98	p	110,00	0,192	Mar-99	123,90	33,31%	45,61%	27,10%	10,92%	2,00	1,95	3,87	1,95	3,87	1,96	3,89
30/11/98	c	130,00	0,184	Mar-99	123,90	32,16%	31,95%	27,41%	11,09%	3,75	4,25	4,21	4,26	4,22	4,27	4,23
30/11/98	p	110,00	0,184	Mar-99	123,90	32,16%	31,95%	27,41%	11,09%	2,00	1,69	1,66	1,69	1,66	1,70	1,67
01/12/98	c	110,00	0,181	Mar-99	122,90	32,18%	32,02%	27,68%	11,11%	19,55	14,48	14,46	14,55	14,53	14,57	14,55
01/12/98	c	130,00	0,181	Mar-99	122,90	32,18%	32,02%	27,68%	11,11%	3,50	3,84	3,81	3,85	3,82	3,86	3,83
01/12/98	p	110,00	0,181	Mar-99	122,90	32,18%	32,02%	27,68%	11,11%	1,88	1,84	1,82	1,84	1,82	1,85	1,82
02/12/98	c	130,00	0,178	Mar-99	123,75	32,38%	54,19%	27,95%	10,99%	3,50	4,15	8,52	4,15	8,54	4,17	8,56
04/12/98	c	130,00	0,173	Mar-99	125,40	16,31%	29,05%	28,10%	10,55%	4,74	1,60	4,04	1,60	4,05	1,61	4,06
04/12/98	p	115,00	0,173	Mar-99	125,40	16,31%	29,05%	28,10%	10,55%	2,05	0,38	1,97	0,38	1,97	0,38	1,98
10/12/98	c	130,00	0,156	Mar-99	131,70	14,80%	71,01%	28,08%	10,35%	6,16	3,91	15,22	3,92	15,25	3,93	15,27
10/12/98	c	135,00	0,156	Mar-99	131,70	14,80%	71,01%	28,08%	10,35%	5,00	1,71	13,07	1,71	13,10	1,71	13,12
16/12/98	p	130,00	0,140	Mar-99	136,00	17,00%	34,60%	27,83%	8,84%	4,25	1,17	4,22	1,17	4,22	1,18	4,23
17/12/98	p	130,00	0,137	Mar-99	136,10	18,14%	36,27%	28,25%	8,74%	4,00	1,30	4,43	1,30	4,43	1,30	4,44
21/12/98	c	130,00	0,126	Mar-99	131,60	18,28%	36,09%	28,19%	8,82%	5,04	4,20	7,43	4,20	7,44	4,21	7,44
21/12/98	c	135,00	0,126	Mar-99	131,60	18,28%	36,09%	28,19%	8,82%	5,00	1,99	5,19	1,99	5,19	2,00	5,20
21/12/98	p	130,00	0,126	Mar-99	131,60	18,28%	36,09%	28,19%	8,82%	5,25	2,62	5,85	2,62	5,85	2,62	5,86
22/12/98	c	130,00	0,123	Mar-99	131,60	21,68%	32,65%	28,69%	8,67%	8,00	4,77	6,74	4,78	6,75	4,78	6,75
22/12/98	c	135,00	0,123	Mar-99	131,60	21,68%	32,65%	28,69%	8,67%	5,00	2,55	4,49	2,55	4,50	2,55	4,50
23/12/98	c	135,00	0,121	Mar-99	134,40	21,69%	37,55%	28,15%	8,38%	5,00	3,72	6,64	3,72	6,64	3,72	6,65
28/12/98	c	130,00	0,107	Mar-99	133,20	21,29%	28,66%	28,67%	7,83%	4,00	5,43	6,63	5,43	6,63	5,44	6,64
28/12/98	c	135,00	0,107	Mar-99	133,20	21,29%	28,66%	28,67%	7,83%	3,96	2,87	4,13	2,87	4,13	2,87	4,13
29/12/98	c	130,00	0,104	Mar-99	134,80	21,70%	35,40%	28,75%	9,19%	6,40	6,52	8,65	6,53	8,66	6,53	8,66
30/12/98	c	130,00	0,101	Mar-99	136,00	21,85%	32,59%	28,98%	8,30%	8,00	7,38	8,94	7,39	8,95	7,39	8,95
05/01/99	c	130,00	0,085	Mar-99	137,75	23,82%	26,28%	26,76%	9,43%	9,63	8,73	9,01	8,74	9,02	8,75	9,02

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
05/01/99	p	130,00	0,085	Mar-99	137,75	23,82%	26,28%	26,76%	9,43%	2,30	1,04	1,32	1,04	1,32	1,04	1,32
06/01/99	c	145,00	0,082	Mar-99	136,80	25,28%	32,81%	27,43%	9,64%	4,00	1,21	2,15	1,21	2,15	1,21	2,15
06/01/99	p	130,00	0,082	Mar-99	136,80	25,28%	32,81%	27,43%	9,64%	2,50	1,36	2,30	1,36	2,30	1,36	2,30
07/01/99	c	150,00	0,252	Mai-99	139,70	25,21%	40,55%	24,49%	10,09%	4,53	3,20	7,12	3,20	7,13	3,22	7,16
07/01/99	p	130,00	0,252	Mai-99	139,70	25,21%	40,55%	24,49%	10,09%	5,00	2,95	6,59	2,95	6,60	2,97	6,63
08/01/99	c	150,00	0,077	Mar-99	138,70	25,21%	38,07%	27,78%	9,58%	3,00	0,66	2,00	0,66	2,00	0,66	2,01
08/01/99	c	150,00	0,249	Mai-99	140,70	25,21%	32,30%	24,62%	9,86%	4,78	3,48	5,28	3,48	5,30	3,50	5,32
11/01/99	c	145,00	0,068	Mar-99	138,10	24,73%	46,00%	28,54%	10,26%	3,00	1,19	3,87	1,19	3,87	1,19	3,87
11/01/99	c	150,00	0,241	Mai-99	139,90	24,73%	30,35%	24,84%	9,87%	5,50	3,02	4,38	3,02	4,39	3,04	4,40
12/01/99	c	130,00	0,066	Mar-99	136,75	24,61%	39,50%	29,42%	11,46%	9,00	7,70	9,35	7,71	9,36	7,71	9,36
12/01/99	c	145,00	0,066	Mar-99	136,75	24,61%	39,50%	29,42%	11,46%	3,00	0,84	2,47	0,84	2,47	0,84	2,47
12/01/99	c	150,00	0,238	Mai-99	138,90	24,61%	34,82%	25,06%	11,61%	5,00	2,66	5,07	2,67	5,09	2,68	5,11
12/01/99	p	135,00	0,066	Mar-99	136,75	24,61%	39,50%	29,42%	11,46%	3,21	2,60	4,62	2,60	4,62	2,60	4,63
14/01/99	c	145,00	0,060	Mar-99	136,20	24,91%	36,50%	31,08%	53,43%	3,00	0,66	1,75	0,66	1,75	0,67	1,76
15/01/99	c	135,00	0,058	Mar-99	133,25	25,09%	47,85%	31,75%	20,48%	2,50	2,39	5,24	2,39	5,25	2,40	5,25
15/01/99	c	145,00	0,058	Mar-99	133,25	25,09%	47,85%	31,75%	20,48%	0,50	0,30	2,12	0,30	2,12	0,30	2,12
15/01/99	p	130,00	0,058	Mar-99	133,25	25,09%	47,85%	31,75%	20,48%	3,00	1,78	4,48	1,78	4,49	1,78	4,49
15/01/99	p	135,00	0,058	Mar-99	133,25	25,09%	47,85%	31,75%	20,48%	6,25	4,12	6,97	4,13	6,98	4,13	6,99
18/01/99	c	130,00	0,049	Mar-99	127,00	24,59%	36,89%	27,20%	14,56%	2,93	1,54	2,85	1,54	2,85	1,54	2,85
19/01/99	c	130,00	0,047	Mar-99	122,25	29,57%	42,05%	23,31%	17,08%	2,59	0,71	1,68	0,71	1,68	0,71	1,69
19/01/99	p	115,00	0,047	Mar-99	122,25	29,57%	42,05%	23,31%	17,08%	0,50	0,68	1,59	0,68	1,59	0,68	1,60
20/01/99	c	130,00	0,044	Mar-99	122,50	30,86%	39,43%	24,32%	7,31%	1,18	0,79	1,43	0,79	1,43	0,79	1,43
20/01/99	c	150,00	0,216	Mai-99	125,90	30,86%	34,82%	23,29%	10,83%	3,00	1,04	1,55	1,04	1,55	1,04	1,56
20/01/99	p	115,00	0,044	Mar-99	122,50	30,86%	39,43%	24,32%	7,31%	0,91	0,66	1,25	0,66	1,25	0,66	1,25
20/01/99	p	120,00	0,044	Mar-99	122,50	30,86%	39,43%	24,32%	7,31%	0,50	2,03	2,86	2,03	2,86	2,03	2,86
20/01/99	p	130,00	0,044	Mar-99	122,50	30,86%	39,43%	24,32%	7,31%	8,50	8,26	8,91	8,26	8,91	8,27	8,91
21/01/99	p	115,00	0,041	Mar-99	119,80	29,44%	29,76%	23,35%	9,49%	1,87	1,02	1,05	1,02	1,05	1,02	1,05
21/01/99	p	120,00	0,041	Mar-99	119,80	29,44%	29,76%	23,35%	9,49%	2,91	2,94	2,97	2,94	2,98	2,95	2,98
22/01/99	p	120,00	0,038	Mar-99	119,90	29,89%	34,33%	24,74%	6,88%	3,58	2,84	3,26	2,84	3,26	2,84	3,26
26/01/99	c	120,00	0,027	Mar-99	120,90	29,89%	39,89%	25,68%	14,92%	3,00	2,84	3,63	2,84	3,63	2,84	3,63
26/01/99	c	150,00	0,200	Mai-99	123,50	29,89%	34,52%	23,39%	18,12%	1,50	0,57	1,00	0,57	1,00	0,58	1,02
26/01/99	p	130,00	0,200	Mai-99	123,50	29,89%	38,82%	23,39%	18,12%	10,00	10,12	11,96	10,20	12,04	10,23	12,08
27/01/99	c	120,00	0,025	Mar-99	118,30	30,26%	45,66%	24,45%	28,20%	1,50	1,50	2,61	1,50	2,61	1,50	2,61

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
02/02/99	p	120,00	0,181	Mai-99	123,00	30,79%	34,06%	22,54%	49,83%	5,50	4,53	5,13	4,60	5,21	4,67	5,29
04/02/99	p	120,00	0,003	Mar-99	117,90	30,16%	56,96%	11,69%	8,09%	2,40	2,22	2,71	2,22	2,70	2,22	2,71
05/02/99	p	110,00	0,173	Mai-99	120,25	26,88%	36,05%	23,02%	24,74%	3,00	1,48	2,80	1,49	2,81	1,50	2,84
08/02/99	p	120,00	0,164	Mai-99	119,60	26,76%	37,33%	23,31%	11,36%	6,14	5,29	7,29	5,30	7,31	5,31	7,32
11/02/99	p	120,00	0,156	Mai-99	120,10	25,83%	31,26%	23,95%	25,67%	5,00	4,65	5,63	4,68	5,67	4,70	5,70
18/02/99	p	100,00	0,463	Set-99	119,90	29,05%	32,75%	33,20%	27,20%	2,50	1,85	2,51	1,87	2,55	1,95	2,64
18/02/99	p	110,00	0,463	Set-99	119,90	29,05%	32,69%	33,20%	27,20%	3,00	4,36	5,27	4,44	5,38	4,57	5,52
18/02/99	p	130,00	0,137	Mai-99	116,90	29,05%	42,86%	24,60%	29,23%	14,30	13,67	15,41	13,88	15,59	13,91	15,63
19/02/99	p	100,00	0,460	Set-99	119,75	29,10%	28,08%	33,35%	19,39%	2,50	1,93	1,75	1,95	1,77	2,00	1,81
19/02/99	p	130,00	0,134	Mai-99	116,00	29,10%	34,48%	24,93%	24,34%	14,00	14,47	15,05	14,65	15,21	14,68	15,24
24/02/99	p	100,00	0,447	Set-99	120,00	23,12%	32,17%	33,65%	26,54%	2,20	0,88	2,30	0,88	2,33	0,93	2,41
24/02/99	p	130,00	0,121	Mai-99	117,76	23,12%	32,96%	25,26%	24,15%	13,00	12,40	13,36	12,54	13,48	12,56	13,50
25/02/99	c	130,00	0,444	Set-99	118,25	23,08%	31,61%	33,74%	24,93%	9,75	2,80	4,98	2,84	5,06	2,92	5,18
25/02/99	p	105,00	0,444	Set-99	118,25	23,08%	31,61%	33,74%	24,93%	3,25	1,93	3,74	1,95	3,80	2,01	3,90
25/02/99	p	110,00	0,444	Set-99	118,25	23,08%	31,61%	33,74%	24,93%	5,00	3,25	5,37	3,30	5,47	3,38	5,59
26/02/99	p	110,00	0,115	Mai-99	114,40	22,72%	29,67%	25,32%	29,68%	3,75	1,63	2,55	1,63	2,56	1,64	2,57
02/03/99	p	110,00	0,104	Mai-99	113,00	22,59%	38,35%	26,21%	3,98%	2,25	1,95	4,11	1,95	4,11	1,95	4,11
03/03/99	p	100,00	0,427	Set-99	114,50	21,68%	36,18%	34,29%	27,70%	3,37	1,22	3,95	1,23	4,01	1,28	4,13
03/03/99	p	110,00	0,101	Mai-99	111,00	21,68%	24,81%	25,90%	23,18%	3,42	2,51	2,93	2,52	2,94	2,52	2,95
04/03/99	c	130,00	0,425	Set-99	117,06	22,23%	33,37%	34,25%	40,00%	6,59	2,07	4,59	2,11	4,72	2,21	4,91
04/03/99	p	100,00	0,425	Set-99	117,06	22,23%	33,37%	34,25%	40,00%	3,50	0,93	2,71	0,94	2,77	1,00	2,91
05/03/99	c	120,00	0,096	Mai-99	116,40	23,27%	28,38%	24,55%	51,49%	3,00	1,80	2,46	1,81	2,48	1,83	2,50
05/03/99	c	130,00	0,422	Set-99	120,20	23,27%	39,57%	34,14%	37,51%	8,03	3,09	7,24	3,17	7,47	3,29	7,70
05/03/99	p	110,00	0,096	Mai-99	116,40	23,27%	28,38%	24,55%	51,49%	2,00	0,96	1,49	0,96	1,49	0,97	1,51
08/03/99	c	120,00	0,088	Mai-99	114,30	22,78%	32,73%	24,16%	35,32%	2,37	1,05	2,17	1,06	2,17	1,06	2,19
08/03/99	p	110,00	0,088	Mai-99	114,30	22,78%	32,73%	24,16%	35,32%	2,20	1,30	2,44	1,30	2,45	1,31	2,46
09/03/99	p	115,00	0,074	Mai-99	116,20	23,31%	32,56%	24,14%	43,23%	5,00	2,29	3,40	2,30	3,41	2,31	3,43
09/03/99	p	130,00	0,074	Mai-99	116,20	23,31%	32,56%	24,14%	43,23%	14,50	13,48	13,88	13,80	14,06	13,80	14,10
10/03/99	p	130,00	0,071	Mai-99	116,70	23,85%	43,68%	24,88%	29,20%	14,50	13,17	14,37	13,30	14,45	13,34	14,47
12/03/99	c	130,00	0,403	Set-99	119,90	23,74%	42,59%	34,86%	18,08%	8,00	3,26	8,34	3,28	8,43	3,34	8,54
15/03/99	c	120,00	0,058	Mai-99	113,50	23,70%	45,19%	26,09%	35,48%	2,17	0,56	2,40	0,56	2,40	0,57	2,41
15/03/99	p	110,00	0,058	Mai-99	113,50	23,70%	45,19%	26,09%	35,48%	1,80	1,14	3,21	1,14	3,22	1,14	3,23
15/03/99	p	115,00	0,058	Mai-99	113,50	23,70%	45,19%	26,09%	35,48%	3,00	3,34	5,61	3,35	5,62	3,36	5,64

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
16/03/99	P	100,00	0,392	Set-99	119,65	24,37%	41,35%	35,15%	25,49%	2,50	0,89	3,69	0,89	3,73	0,93	3,82
16/03/99	P	105,00	0,392	Set-99	119,65	24,37%	41,35%	35,15%	25,49%	3,60	1,68	5,13	1,69	5,20	1,75	5,32
17/03/99	C	120,00	0,052	Mai-99	115,90	24,59%	31,35%	27,91%	11,31%	2,00	1,07	1,69	1,07	1,70	1,08	1,70
17/03/99	C	150,00	0,389	Set-99	121,25	24,59%	34,59%	35,24%	28,99%	4,00	0,70	2,21	0,70	2,24	0,74	2,32
17/03/99	P	100,00	0,389	Set-99	121,25	24,59%	34,59%	35,24%	28,99%	2,50	0,75	2,15	0,76	2,17	0,79	2,25
17/03/99	P	105,00	0,389	Set-99	121,25	24,59%	34,59%	35,24%	28,99%	3,60	1,44	3,27	1,46	3,32	1,51	3,41
17/03/99	P	110,00	0,052	Mai-99	115,90	24,59%	31,35%	27,91%	11,31%	1,50	0,60	1,09	0,60	1,09	0,60	1,09
17/03/99	P	130,00	0,052	Mai-99	115,90	24,59%	31,35%	27,91%	11,31%	15,50	14,07	14,22	14,10	14,19	14,12	14,25
18/03/99	P	100,00	0,386	Set-99	118,20	22,29%	38,77%	35,22%	23,78%	2,75	0,76	3,44	0,76	3,47	0,79	3,55
18/03/99	P	105,00	0,386	Set-99	118,20	22,29%	38,77%	35,22%	23,78%	3,85	1,53	4,89	1,55	4,95	1,59	5,05
18/03/99	P	110,00	0,386	Set-99	118,20	22,29%	36,77%	35,22%	23,78%	7,00	2,76	6,68	2,79	6,78	2,85	6,89
19/03/99	C	120,00	0,047	Mai-99	112,90	23,66%	45,63%	26,65%	27,02%	1,50	0,33	1,85	0,33	1,85	0,33	1,85
19/03/99	C	130,00	0,384	Set-99	118,20	23,66%	38,51%	35,40%	21,61%	7,75	2,60	6,26	2,62	6,33	2,67	6,44
19/03/99	P	105,00	0,384	Set-99	118,20	23,66%	38,51%	35,40%	21,61%	4,00	1,78	4,85	1,79	4,90	1,83	4,98
19/03/99	P	120,00	0,384	Set-99	118,20	23,66%	38,51%	35,40%	21,61%	12,50	7,26	11,26	7,40	11,46	7,48	11,59
19/03/99	P	130,00	0,047	Mai-99	112,90	23,66%	45,63%	26,65%	27,02%	17,10	16,89	17,29	17,10	17,31	17,10	17,38
19/03/99	P	130,00	0,384	Set-99	118,20	23,66%	38,51%	35,40%	21,61%	20,00	13,46	17,12	13,88	17,55	13,95	17,68
22/03/99	C	115,00	0,038	Mai-99	111,40	23,22%	38,50%	26,18%	26,68%	2,59	0,73	1,88	0,73	1,88	0,73	1,89
23/03/99	P	130,00	0,036	Mai-99	111,70	23,56%	39,88%	28,16%	30,17%	18,50	18,10	18,18	18,30	18,30	18,30	18,31
24/03/99	P	105,00	0,370	Set-99	118,00	23,53%	42,88%	35,95%	25,96%	4,02	1,69	5,63	1,70	5,71	1,75	5,82
24/03/99	P	110,00	0,033	Mai-99	111,90	23,53%	47,58%	30,59%	31,45%	1,75	1,08	2,91	1,08	2,91	1,08	2,92
25/03/99	P	105,00	0,367	Set-99	119,70	23,50%	35,41%	36,04%	27,46%	4,00	1,39	3,59	1,41	3,64	1,45	3,73
25/03/99	P	110,00	0,030	Mai-99	113,60	23,50%	34,85%	33,62%	43,87%	0,90	0,55	1,25	0,55	1,26	0,55	1,26
26/03/99	C	120,00	0,027	Mai-99	116,50	22,63%	33,10%	33,71%	37,74%	1,00	0,54	1,19	0,54	1,19	0,54	1,19
26/03/99	C	130,00	0,364	Set-99	122,20	22,63%	37,40%	36,04%	25,17%	9,00	3,34	7,17	3,38	7,27	3,45	7,40
26/03/99	C	150,00	0,364	Set-99	122,20	22,63%	37,40%	36,04%	25,17%	4,75	0,49	2,75	0,50	2,77	0,52	2,85
30/03/99	P	120,00	0,016	Mai-99	120,70	25,65%	30,21%	3,55%	28,84%	1,40	1,25	1,52	1,25	1,52	1,25	1,52
06/04/99	C	130,00	0,162	Jul-99	120,20	29,26%	37,98%	32,06%	11,76%	2,50	2,18	3,62	2,18	3,63	2,19	3,64
06/04/99	P	110,00	0,162	Jul-99	120,20	29,26%	37,98%	32,06%	11,76%	2,50	1,73	2,99	1,73	3,00	1,74	3,01
07/04/99	C	150,00	0,332	Set-99	119,70	28,60%	54,17%	36,37%	23,58%	4,50	0,80	5,27	0,80	5,31	0,83	5,41
07/04/99	P	105,00	0,159	Jul-99	116,90	28,60%	32,98%	31,53%	12,71%	1,75	1,15	1,66	1,15	1,67	1,16	1,67
07/04/99	P	110,00	0,159	Jul-99	116,90	28,60%	32,98%	31,53%	12,71%	2,79	2,37	3,06	2,38	3,06	2,39	3,07
08/04/99	C	130,00	0,156	Jul-99	113,50	30,01%	32,48%	30,78%	16,80%	1,50	0,88	1,13	0,88	1,13	0,89	1,14

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
08/04/99	c	150,00	0,329	Set-99	116,40	30,01%	50,55%	36,31%	14,87%	4,50	0,67	3,81	0,67	3,82	0,69	3,87
08/04/99	p	100,00	0,156	Jul-99	113,50	30,01%	32,48%	30,78%	16,80%	2,18	0,90	1,14	0,90	1,14	0,91	1,15
08/04/99	p	105,00	0,329	Set-99	116,40	30,01%	50,55%	36,31%	14,87%	3,90	3,05	7,47	3,07	7,52	3,10	7,58
08/04/99	p	105,00	0,156	Jul-99	113,50	30,01%	32,48%	30,78%	16,80%	2,06	1,94	2,28	1,94	2,28	1,95	2,29
08/04/99	p	110,00	0,156	Jul-99	113,50	30,01%	32,48%	30,78%	16,80%	3,58	3,62	4,03	3,63	4,04	3,64	4,06
09/04/99	c	80,00	0,153	Jul-99	113,30	30,30%	27,65%	31,16%	16,53%	33,30	32,47	32,47	33,30	33,30	33,30	33,30
09/04/99	p	95,00	0,153	Jul-99	113,30	30,30%	27,65%	31,16%	16,53%	1,00	0,36	0,24	0,36	0,24	0,37	0,24
12/04/99	c	120,00	0,145	Jul-99	111,50	29,62%	51,46%	31,13%	17,11%	3,00	1,97	5,28	1,98	5,29	1,99	5,31
12/04/99	c	130,00	0,145	Jul-99	111,50	29,62%	51,46%	31,13%	17,11%	1,00	0,53	2,84	0,53	2,85	0,53	2,86
12/04/99	c	140,00	0,318	Set-99	114,10	29,62%	44,08%	36,65%	16,07%	3,50	1,07	3,43	1,07	3,44	1,09	3,48
12/04/99	p	100,00	0,318	Set-99	114,10	29,62%	44,08%	36,65%	16,07%	3,30	2,07	4,73	2,08	4,76	2,10	4,81
13/04/99	c	120,00	0,142	Jul-99	111,50	29,74%	36,03%	31,54%	22,22%	3,00	1,94	2,83	1,94	2,83	1,95	2,85
13/04/99	p	100,00	0,315	Set-99	114,10	29,74%	45,94%	36,88%	20,61%	3,30	2,04	4,99	2,05	5,03	2,08	5,10
15/04/99	c	125,00	0,137	Jul-99	111,25	29,70%	37,22%	32,35%	9,87%	3,00	0,95	1,77	0,95	1,77	0,95	1,78
15/04/99	c	130,00	0,137	Jul-99	111,25	29,70%	37,22%	32,35%	9,87%	1,50	0,46	1,05	0,46	1,05	0,46	1,06
15/04/99	c	150,00	0,310	Set-99	113,85	29,70%	61,51%	37,34%	12,43%	4,80	0,41	5,08	0,41	5,09	0,42	5,14
16/04/99	c	125,00	0,134	Jul-99	112,00	29,69%	44,24%	32,84%	9,71%	3,50	1,04	2,80	1,04	2,81	1,04	2,81
19/04/99	c	125,00	0,126	Jul-99	114,40	29,27%	49,27%	33,04%	6,58%	4,00	1,35	4,05	1,35	4,05	1,35	4,06
20/04/99	c	130,00	0,123	Jul-99	113,00	30,28%	48,91%	33,22%	1,00%	2,00	0,56	2,42	0,56	2,42	0,56	2,42
22/04/99	c	125,00	0,118	Jul-99	109,20	30,62%	45,32%	31,66%	15,01%	3,00	0,57	1,89	0,57	1,90	0,57	1,90
22/04/99	c	150,00	0,290	Set-99	112,30	30,62%	64,29%	37,43%	13,04%	5,00	0,33	4,84	0,33	4,86	0,34	4,90
22/04/99	p	100,00	0,290	Set-99	112,30	30,62%	64,29%	37,43%	13,04%	6,20	2,39	8,91	2,39	8,95	2,41	9,00
23/04/99	c	120,00	0,115	Jul-99	109,80	31,32%	54,95%	32,22%	11,99%	2,76	1,36	4,32	1,36	4,32	1,36	4,33
23/04/99	c	125,00	0,115	Jul-99	109,80	31,32%	54,95%	32,22%	11,99%	2,15	0,66	3,09	0,66	3,09	0,66	3,10
28/04/99	c	150,00	0,274	Set-99	114,20	31,06%	74,01%	38,43%	13,47%	3,93	0,40	6,86	0,40	6,88	0,40	6,94
28/04/99	p	105,00	0,101	Jul-99	111,70	31,06%	45,04%	34,05%	17,02%	2,83	1,70	3,35	1,70	3,36	1,71	3,36
28/04/99	p	105,00	0,274	Set-99	114,20	31,06%	74,01%	38,43%	13,47%	9,00	3,30	12,17	3,31	12,22	3,33	12,29
29/04/99	p	105,00	0,099	Jul-99	114,15	31,07%	40,76%	34,39%	17,61%	2,68	1,14	2,13	1,14	2,13	1,15	2,14
30/04/99	p	105,00	0,268	Set-99	116,80	31,65%	64,35%	38,68%	10,20%	3,15	2,74	9,26	2,75	9,29	2,76	9,33
30/04/99	p	105,00	0,096	Jul-99	113,70	31,65%	45,72%	34,97%	8,06%	2,75	1,25	2,75	1,25	2,75	1,25	2,75
10/05/99	c	130,00	0,241	Set-99	117,90	23,73%	65,83%	40,16%	12,59%	7,00	1,57	10,26	1,57	10,30	1,58	10,34
10/05/99	p	110,00	0,068	Jul-99	115,30	23,73%	45,74%	39,54%	15,34%	2,07	0,90	3,10	0,90	3,11	0,90	3,11
11/05/99	p	110,00	0,066	Jul-99	117,50	23,15%	35,68%	40,50%	3,98%	1,57	0,45	1,43	0,45	1,43	0,45	1,43

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
13/05/99	C	120,00	0,060	Jul-99	114,80	21,72%	34,56%	41,49%	6,47%	2,00	0,71	1,89	0,71	1,89	0,71	1,90
13/05/99	P	110,00	0,060	Jul-99	114,80	21,72%	35,62%	41,49%	6,47%	1,00	0,72	1,97	0,72	1,97	0,72	1,97
17/05/99	C	130,00	0,222	Set-99	122,20	21,92%	65,93%	41,17%	5,58%	9,00	2,17	11,82	2,17	11,83	2,18	11,85
19/05/99	C	140,00	0,044	Jul-99	134,30	26,68%	31,19%	29,17%	4,78%	2,80	1,01	1,42	1,01	1,42	1,01	1,42
19/05/99	C	150,00	0,216	Set-99	136,00	26,68%	57,01%	37,90%	6,40%	7,17	2,14	8,97	2,14	8,98	2,15	9,00
20/05/99	C	120,00	0,041	Jul-99	130,90	32,59%	45,09%	27,62%	1,00%	12,00	11,26	11,94	11,24	11,93	11,26	11,94
20/05/99	C	130,00	0,041	Jul-99	130,90	32,59%	45,09%	27,62%	1,00%	6,00	3,90	5,22	3,90	5,22	3,91	5,22
20/05/99	P	120,00	0,041	Jul-99	130,90	32,59%	45,09%	27,62%	1,00%	2,50	0,36	1,05	0,36	1,05	0,36	1,05
24/05/99	C	130,00	0,030	Jul-99	130,60	33,43%	61,00%	30,33%	1,00%	3,50	3,32	5,81	3,32	5,81	3,32	5,81
24/05/99	P	125,00	0,030	Jul-99	130,60	33,43%	61,00%	30,33%	1,00%	4,25	0,96	3,05	0,96	3,05	0,96	3,05
25/05/99	P	125,00	0,027	Jul-99	131,50	30,64%	62,32%	32,56%	1,00%	4,10	0,54	2,65	0,54	2,65	0,54	2,65
26/05/99	C	140,00	0,025	Jul-99	136,90	30,64%	81,17%	19,12%	26,52%	4,00	1,38	5,56	1,38	5,56	1,38	5,56
27/05/99	C	140,00	0,022	Jul-99	133,90	32,22%	71,62%	15,78%	1,92%	2,50	0,62	3,24	0,62	3,24	0,62	3,24
27/05/99	C	150,00	0,195	Set-99	135,70	32,22%	87,72%	38,10%	6,87%	11,00	2,83	15,28	2,83	15,29	2,84	15,32
27/05/99	P	110,00	0,195	Set-99	135,70	32,22%	87,72%	38,10%	6,87%	3,40	0,53	8,54	0,53	8,55	0,53	8,57
28/05/99	C	140,00	0,019	Jul-99	133,70	34,03%	61,43%	18,20%	1,00%	1,50	0,56	2,16	0,56	2,16	0,56	2,16
28/05/99	C	150,00	0,192	Set-99	136,20	34,03%	63,20%	38,43%	4,97%	12,00	3,29	9,70	3,29	9,70	3,29	9,72
28/05/99	P	120,00	0,192	Set-99	136,20	34,03%	63,20%	38,43%	4,97%	6,25	2,07	7,37	2,07	7,37	2,08	7,38
02/06/99	C	130,00	0,178	Set-99	137,00	34,02%	95,87%	39,38%	4,03%	16,25	11,56	24,90	11,57	24,89	11,58	24,93
02/06/99	C	150,00	0,178	Set-99	137,00	34,02%	95,87%	39,38%	4,03%	12,00	3,27	16,95	3,27	16,95	3,27	16,97
04/06/99	C	150,00	0,173	Set-99	135,70	33,63%	67,61%	39,83%	8,52%	11,36	2,72	9,66	2,72	9,67	2,73	9,69
04/06/99	P	120,00	0,173	Set-99	135,70	33,63%	67,61%	39,83%	8,52%	5,88	1,83	7,65	1,83	7,66	1,83	7,68
07/06/99	C	150,00	0,164	Set-99	126,00	33,88%	75,05%	36,72%	4,03%	8,50	0,91	7,28	0,91	7,28	0,91	7,29
07/06/99	P	120,00	0,164	Set-99	126,00	33,88%	75,05%	36,72%	4,03%	8,00	4,13	11,98	4,13	11,99	4,13	12,00
08/06/99	C	130,00	0,162	Set-99	120,80	43,60%	68,57%	36,02%	3,33%	9,87	4,89	9,58	4,89	9,58	4,89	9,58
08/06/99	C	150,00	0,162	Set-99	120,80	43,60%	68,57%	36,02%	3,33%	5,59	1,22	4,53	1,22	4,53	1,22	4,53
08/06/99	C	160,00	0,162	Set-99	120,80	43,60%	68,57%	36,02%	3,33%	4,00	0,56	3,04	0,56	3,04	0,56	3,04
08/06/99	P	105,00	0,162	Set-99	120,80	43,60%	68,57%	36,02%	3,33%	3,00	2,36	6,00	2,36	6,00	2,36	6,00
09/06/99	P	120,00	0,162	Set-99	120,80	43,60%	68,57%	36,02%	3,33%	11,00	7,97	12,74	7,98	12,74	7,98	12,75
09/06/99	C	150,00	0,159	Set-99	120,95	46,21%	71,34%	36,43%	4,77%	5,50	1,47	4,90	1,47	4,90	1,47	4,91
10/06/99	C	150,00	0,156	Set-99	119,90	46,15%	83,51%	36,89%	1,69%	6,00	1,29	6,49	1,29	6,49	1,29	6,49
10/06/99	P	105,00	0,156	Set-99	119,90	46,15%	83,51%	36,89%	1,69%	3,50	2,78	8,43	2,78	8,43	2,78	8,43
10/06/99	P	120,00	0,156	Set-99	119,90	46,15%	83,51%	36,89%	1,69%	10,00	8,74	15,73	8,74	15,72	8,74	15,73

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
11/06/99	c	150,00	0,153	Set-99	119,00	45,88%	69,71%	37,36%	1,00%	5,75	1,12	4,00	1,12	4,00	1,12	4,00
11/06/99	p	115,00	0,153	Set-99	119,00	45,88%	69,71%	37,36%	1,00%	7,50	6,52	10,79	6,52	10,79	6,52	10,79
11/06/99	p	120,00	0,153	Set-99	119,00	45,88%	69,71%	37,36%	1,00%	9,25	9,05	13,46	9,05	13,46	9,05	13,46
14/06/99	c	150,00	0,145	Set-99	116,40	45,67%	59,86%	37,58%	1,04%	5,50	0,74	2,01	0,74	2,01	0,74	2,01
15/06/99	c	150,00	0,142	Set-99	116,70	46,24%	86,69%	38,06%	5,30%	5,25	0,77	5,43	0,77	5,43	0,77	5,44
15/06/99	p	115,00	0,142	Set-99	116,70	46,24%	86,69%	38,06%	5,30%	7,00	7,18	14,11	7,18	14,12	7,19	14,13
15/06/99	p	120,00	0,142	Set-99	116,70	46,24%	86,69%	38,06%	5,30%	8,50	9,91	16,96	9,92	16,96	9,92	16,98
16/06/99	c	130,00	0,140	Set-99	118,75	46,11%	56,26%	38,14%	11,36%	9,00	4,00	5,65	4,00	5,65	4,01	5,67
16/06/99	c	150,00	0,140	Set-99	118,75	46,11%	56,26%	38,14%	11,36%	5,75	0,91	1,85	0,91	1,85	0,92	1,86
16/06/99	p	115,00	0,140	Set-99	118,75	46,11%	56,26%	38,14%	11,36%	6,75	6,19	7,90	6,20	7,91	6,21	7,93
17/06/99	c	130,00	0,137	Set-99	118,80	46,02%	70,58%	38,66%	8,99%	8,07	3,94	7,98	3,95	7,99	3,95	8,00
17/06/99	c	150,00	0,137	Set-99	118,80	46,02%	70,58%	38,66%	8,99%	5,00	0,88	3,49	0,88	3,49	0,88	3,50
17/06/99	p	130,00	0,137	Set-99	118,80	46,02%	70,58%	38,66%	8,99%	16,00	15,01	19,05	15,04	19,07	15,05	19,10
18/06/99	c	150,00	0,134	Set-99	119,30	45,55%	68,32%	39,16%	5,54%	5,75	0,86	3,23	0,86	3,23	0,86	3,24
18/06/99	p	110,00	0,134	Set-99	119,30	45,55%	68,32%	39,16%	5,54%	4,10	3,83	7,31	3,83	7,31	3,83	7,32
18/06/99	p	115,00	0,134	Set-99	119,30	45,55%	68,32%	39,16%	5,54%	6,50	5,78	9,57	5,79	9,58	5,79	9,58
18/06/99	p	120,00	0,134	Set-99	119,30	45,55%	68,32%	39,16%	5,54%	8,25	8,25	12,18	8,25	12,19	8,26	12,20
18/06/99	p	130,00	0,134	Set-99	119,30	45,55%	68,32%	39,16%	5,54%	14,87	14,60	18,35	14,61	18,36	14,62	18,37
21/06/99	c	130,00	0,126	Set-99	117,50	42,38%	47,52%	39,67%	1,32%	8,50	2,78	3,51	2,78	3,51	2,78	3,51
21/06/99	c	150,00	0,126	Set-99	117,50	42,38%	47,52%	39,67%	1,32%	5,50	0,44	0,74	0,44	0,74	0,44	0,74
21/06/99	p	115,00	0,126	Set-99	117,50	42,38%	47,52%	39,67%	1,32%	7,81	5,78	6,62	5,78	6,62	5,78	6,62
21/06/99	p	130,00	0,126	Set-99	117,50	42,38%	47,52%	39,67%	1,32%	16,50	15,25	15,99	15,25	15,98	15,26	15,99
22/06/99	p	115,00	0,123	Set-99	119,60	35,96%	49,19%	39,75%	3,00%	6,00	3,87	5,96	3,87	5,96	3,87	5,96
22/06/99	p	120,00	0,123	Set-99	119,60	35,96%	49,19%	39,75%	3,00%	9,35	6,21	8,41	6,21	8,42	6,21	8,42
23/06/99	c	130,00	0,121	Set-99	119,30	36,17%	52,14%	40,40%	0,90%	8,25	2,29	4,62	2,29	4,62	2,29	4,63
23/06/99	p	120,00	0,121	Set-99	119,30	36,17%	52,14%	40,40%	0,90%	9,50	6,34	8,97	6,34	8,97	6,34	8,98
24/06/99	c	130,00	0,118	Set-99	116,75	36,14%	73,21%	40,82%	3,27%	7,77	1,62	6,79	1,62	6,79	1,62	6,79
25/06/99	p	110,00	0,115	Set-99	114,50	36,05%	85,92%	41,32%	10,60%	6,00	3,47	10,75	3,47	10,76	3,48	10,77
25/06/99	p	120,00	0,115	Set-99	114,50	36,05%	85,92%	41,32%	10,60%	10,50	8,77	16,31	8,79	16,33	8,80	16,35
28/06/99	p	100,00	0,107	Set-99	112,30	36,09%	63,61%	41,84%	11,25%	2,25	1,06	3,92	1,06	3,92	1,06	3,93
29/06/99	c	130,00	0,104	Set-99	114,00	32,58%	48,57%	42,19%	12,36%	4,59	0,64	2,11	0,64	2,11	0,64	2,12
29/06/99	p	100,00	0,104	Set-99	114,00	32,58%	48,57%	42,19%	12,36%	2,00	0,56	1,86	0,56	1,86	0,57	1,86
29/06/99	p	110,00	0,104	Set-99	114,00	32,58%	48,57%	42,19%	12,36%	6,49	2,93	5,11	2,93	5,11	2,93	5,12

Tabela C1 - Dados utilizados e valores calculados pelos modelos

Data do Pregão	Tipo	Preço de Exercício (em US\$)	Dias até o Vencimento (em anos)	Mês do Contrato Objeto	Preço do Contrato Futuro em US\$	Volatilidade Histórica	Volatilidade Implícita	Volatilidade Real	Tx. Juros Livre Risco (% ao ano)	Preço Médio Opção (em US\$)	B&S VH	B&S VI	BS VH	BS VI	BW VH	BW VI
30/06/99	p	115,00	0,101	Set-99	113,40	33,23%	59,23%	43,02%	10,27%	7,00	5,60	9,31	5,61	9,32	5,61	9,32
30/06/99	p	120,00	0,101	Set-99	113,40	33,23%	59,23%	43,02%	10,27%	10,25	8,82	12,33	8,83	12,34	8,84	12,35
30/06/99	p	130,00	0,101	Set-99	113,40	33,23%	59,23%	43,02%	10,27%	18,00	17,02	19,53	17,03	19,55	17,08	19,58
01/07/99	c	130,00	0,099	Set-99	111,75	32,99%	44,09%	43,80%	6,65%	4,50	0,40	1,15	0,40	1,15	0,40	1,15
01/07/99	p	110,00	0,099	Set-99	111,75	32,99%	44,09%	43,80%	6,65%	4,85	3,73	5,25	3,74	5,25	3,74	5,26
07/07/99	p	100,00	0,082	Set-99	102,40	38,57%	58,41%	38,21%	5,89%	5,00	3,35	5,59	3,35	5,59	3,35	5,60
08/07/99	p	120,00	0,079	Set-99	105,20	35,04%	53,19%	37,72%	0,95%	17,00	15,26	16,55	15,22	16,53	15,26	16,55
15/07/99	p	100,00	0,060	Set-99	102,10	40,63%	96,31%	33,86%	9,04%	2,15	3,04	8,45	3,04	8,45	3,04	8,46
16/07/99	p	100,00	0,058	Set-99	100,20	40,64%	31,33%	34,26%	19,71%	3,50	3,75	2,87	3,75	2,87	3,76	2,87
19/07/99	p	100,00	0,049	Set-99	103,30	40,74%	38,00%	32,58%	16,25%	2,75	2,23	2,01	2,23	2,01	2,24	2,01
20/07/99	p	100,00	0,047	Set-99	103,60	41,90%	46,87%	33,79%	7,00%	2,00	2,14	2,55	2,14	2,55	2,14	2,55
26/07/99	c	110,00	0,030	Set-99	103,80	43,15%	91,11%	34,55%	2,86%	3,75	1,01	4,08	1,01	4,08	1,01	4,08
26/07/99	c	115,00	0,030	Set-99	103,80	43,15%	91,11%	34,55%	2,86%	2,25	0,32	2,69	0,32	2,69	0,32	2,69
26/07/99	p	100,00	0,030	Set-99	103,80	43,15%	91,11%	34,55%	2,86%	2,50	1,51	4,70	1,51	4,70	1,51	4,70
26/07/99	p	105,00	0,030	Set-99	103,80	43,15%	91,11%	34,55%	2,86%	3,75	3,75	7,19	3,75	7,19	3,75	7,19
26/07/99	p	110,00	0,030	Set-99	103,80	43,15%	91,11%	34,55%	2,86%	6,50	7,20	10,28	7,20	10,27	7,20	10,28
27/07/99	c	110,00	0,027	Set-99	105,75	43,31%	60,00%	33,67%	11,52%	4,00	1,41	2,47	1,41	2,47	1,41	2,47
27/07/99	c	115,00	0,027	Set-99	105,75	43,31%	60,00%	33,67%	11,52%	2,50	0,47	1,21	0,47	1,21	0,47	1,21
27/07/99	p	100,00	0,027	Set-99	105,75	43,31%	60,00%	33,67%	11,52%	1,25	0,91	1,82	0,91	1,82	0,92	1,82
27/07/99	p	105,00	0,027	Set-99	105,75	43,31%	60,00%	33,67%	11,52%	3,50	2,64	3,80	2,64	3,80	2,65	3,80
27/07/99	p	110,00	0,027	Set-99	105,75	43,31%	60,00%	33,67%	11,52%	5,50	5,65	6,71	5,65	6,71	5,65	6,71
28/07/99	c	110,00	0,025	Set-99	104,50	43,74%	62,44%	36,28%	21,67%	1,50	0,97	1,99	0,97	1,99	0,97	1,99
28/07/99	p	100,00	0,025	Set-99	104,50	43,74%	62,44%	36,28%	21,67%	1,00	1,10	2,13	1,10	2,13	1,10	2,13
29/07/99	p	100,00	0,022	Set-99	103,60	43,51%	64,53%	39,73%	6,07%	1,00	1,20	2,34	1,20	2,34	1,20	2,34
03/08/99	p	100,00	0,008	Set-99	100,30	46,77%	63,68%	12,92%	1,00%	1,05	1,55	2,16	1,55	2,16	1,55	2,16
04/08/99	p	100,00	0,005	Set-99	100,80	46,65%	32,97%	12,35%	1,80%	0,73	1,02	0,63	1,02	0,63	1,02	0,63

FONTE: dados primários fornecidos pela BM&F e valores calculados pelo autor.