MODELOS PARA ESTIMAR RAZÃO DE *HEDGE* DE VARIÂNCIA MÍNIMA: APLICAÇÃO PARA CONTRATOS FUTUROS AGROPECUÁRIOS

Aryeverton Fortes de Oliveira
Bacharel em Ciências Econômicas

Orientadora: Prof^a. Dr^a. **MIRIAN RUMENOS PIEDADE BACCHI**

Dissertação apresentada à Escola
Superior de Agricultura “Luiz de
Queiroz”, para obtenção do título
de Mestre em Ciências, Área de
Concentração: Economia Aplicada.

PIRACICABA
Estado de São Paulo – Brasil
Junho - 2000

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - Campus "Luiz de Queiroz"/USP

Oliveira, Aryeverton Fortes de

Modelos para estimar razão de hedge de variância mínima: aplicação para contratos
futuros agropecuários / Aryerton Fortes de Oliveira. - Piracicaba, 2000.
85 p.

Dissertação (mestrado) - - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, 2000.
Bibliografia.

1. Economia agrícola 2. Mercado de futuros 3. Modelo econométrico 4. Tomada de
decisão I. Título

CDD 332.645

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor"

Aos meus pais, irmãos, sobrinhos e cunhados, pelo amor.

À Ana Célia, por seu amor e compreensão.

AGRADECIMENTOS

À Prfa. Dra. Mirian Rumenos Piedade Bacchi, pela orientação e pelo exemplo. Serei sempre grato pelo projeto de pesquisa, pelas sugestões e pelos comentários valiosos ao trabalho. Suas contribuições ficam marcadas nos acertos desta dissertação e em minha memória. Lembrarei da sua inteligência, do seu equilíbrio e do seu profissionalismo nos momentos em que for preciso me superar. Sou grato também por sua paciência e por todo estímulo.

Ao professor Adriano Júlio de Barros Vicente de Azevedo Filho, pelas longas e ricas conversas e pelo estímulo em aprofundar meus conhecimentos e melhorar este trabalho. Aos professores Geraldo Sant'Ana Camargo de Barros, Heloisa Lee Burnquist e Pedro Valentim Marques pelas contribuições e críticas bem colocadas no exame de qualificação. Aos demais professores do departamento que diariamente se dedicaram ao aprimoramento de nossas capacidades e aprofundamento de nossa consciência crítica.

Aos grandes Companheiros da Pós, os amigos da república, André, Canziani, Daltro e Robson, pelo apoio em momentos difíceis, pela alegria, pelo bom papo e pela sensação de que poderei contar sempre com sua amizade. Também à Dona Sônia, pela dedicação e pelo carinho, e ao Mauro e o Humberto.

À amiga Fabiana, que vem caminhando comigo sempre alegre e solidária. Aos amigos da pós-graduação, que estiveram partilhando bons momentos com entusiasmo e que me estimularam durante todo o caminho. Valeu. Também aos meus amigos Rogério Mattos e Fernando Perobelli, que formaram algumas bases nas quais tenho me apoiado.

Aos funcionários do DESR, com um agradecimento especial à Maielli e às bibliotecárias Ligiana e Luciana por seu profissionalismo e solicitude.

À CAPES, pela bolsa concedida durante o curso de mestrado.

SUMÁRIO

Página

RESUMO.....	v
SUMMARY.....	vii
1 – INTRODUÇÃO.....	1
2 – MERCADOS DE CONTRATOS FUTUROS.....	5
3 - REVISÃO DE LITERATURA.....	10
3.1 – Algumas interpretações das estratégias de <i>hedge</i>	11
3.2 – Modelos de variância mínima.....	14
3.3 – Modelos de maximização da utilidade esperada.....	19
4 – MODELOS ECONOMETRICOS.....	32
4.1 – Modelos univariados.....	34
4.2 – Modelos GARCH multivariados – MGARCH.....	40
4.3 – Testes de co-integração e raiz unitária.....	42
5 – PROCEDIMENTOS.....	44
6 – RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	47
7 – CONCLUSÕES.....	57
8 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	60
ANEXO 1.....	66
ANEXO 2.....	69
ANEXO 3.....	75

MODELOS PARA ESTIMAR RAZÃO DE *HEDGE* DE VARIÂNCIA MÍNIMA: APLICAÇÃO PARA CONTRATOS FUTUROS AGROPECUÁRIOS

Autor: Aryeverton Fortes de Oliveira

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Mirian Rumenos Piedade Bacchi

RESUMO

No presente estudo é descrito e implementado um modelo para estimar a razão de *hedge*, que indica a proporção da posição em contratos futuros em relação à posição à vista, que um agente deve assumir para se proteger do risco de preço. A aplicação é feita para alguns produtos agropecuários que têm contratos negociados na Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F), quais sejam, o açúcar cristal, o algodão em pluma, o boi gordo e o café arábica.

Com as operações de *hedge*, o agente pode estar buscando fixar em algum instante futuro um valor a receber por cada unidade que esteja transacionando no mercado físico. Devido à existência de um comportamento aleatório no diferencial entre os preços dos mercados físico e de futuros, o valor a receber pela operação não pode ser fixado com exatidão, o que abre espaço para a discussão de modelos que minimizam a variância do retorno obtido com as operações de *hedge*.

Os modelos de minimização da variância de um portfólio de *hedge* são expostos em um capítulo que também trata de modelos que maximizam a utilidade esperada da função de riqueza dos agentes. Assim, este trabalho faz uma revisão de alguns dos

principais modelos de tomada de decisão de *hedge*, esclarecendo pressupostos e limitações desses.

Para a estimação da regra de decisão derivada nos modelos teóricos são revistos os modelos de heterocedasticidade condicional e os modelos de correção de erro, que levam em consideração a relação de co-integração entre as variáveis.

Os resultados obtidos com a implementação de tais modelos indicam que estratégias elaboradas com modelos econométricos mais simples, baseados em regressões simples ou múltiplas das séries, podem garantir bons resultados se comparados com modelos mais complexos, analisando algumas estatísticas relacionadas com a redução percentual da variância do retorno desses modelos em relação às estratégias ingênuas. Os modelos de heterocedasticidade condicional não garantiram uma melhora expressiva quando as estratégias eram revistas, dados os custos de transação. Por fim, foi constatado que para períodos diferentes do vencimento dos contratos futuros a razão de *hedge* assume valores relativamente baixos, entre 20% e 35%, com exceção do café arábica que chegou a 65%.

**MODELS TO ESTIMATE MINIMUM-VARIANCE HEDGE RATIO:
AN APPLICATION FOR AGRICULTURAL FUTURE CONTRACTS**

Author: Aryeverton Fortes de Oliveira

Advisor: Professor Mirian Rumenos Piedade Bacchi

SUMMARY

In the present study a model to estimate the hedge ratio is described and implemented. The hedge ratio is the proportion of spot positions that an agent should take on future contracts to prevent against price risk. An application is implemented for sugar, cotton, fed cattle and Arabic coffee, the contracts that have been traded in the “Bolsa de Mercadorias & Futuros” (BM&F).

Through hedging, an agent may be seeking to receive a fixed value in the future for each unity of his product traded in the spot market. However, due to the random behavior of the difference between cash and future market prices, it is not possible to fix an accurate value to receive through the hedge operation. This situation leads to the discussion about models that minimize the variance of the returns obtained from hedging.

The minimum-variance hedge models are presented jointly in the chapter that deals with models that maximize the expected utility of the wealth function agent. In this

study the main decision hedge models are reviewed in order to explain their premises and limits.

The conditional heteroskedasticity and error correction models, which take into account the cointegration relationship between variables, are reviewed with the purpose of estimating the decision rule derived from theoretical models.

The results of the study show that single or multiple equations can lead to consistent results when compared to more complex models. This statement is based on the analysis of the percent reduction of the variance of the return relative to naive hedging strategies. The heteroskedastic conditional models did not ensure an expressive improvement in adjusted strategies regarding some transaction costs. Finally, evidence was found that the hedge ratio values are relatively small for different contract maturity periods (between 20% and 35%, except for coffee that corresponds to 65%).

1 - INTRODUÇÃO

Nos negócios ligados ao setor agrícola, bem como em outras atividades, existem vários fatores causadores de incerteza nos resultados futuros. As grandes variações dos preços de produtos e insumos tornam bastante imprevisível o fluxo financeiro das empresas que transacionam *commodities*, ainda mais quando essas atuam como tomadoras de preços em mercados com baixas elasticidades de oferta e de demanda de produtos. Fatores de incerteza se verificam também nos resultados da produção, que estão sujeitos às mudanças nas condições ambientais e à ineficiência de alocação e manipulação de fatores. Portanto, deve-se esperar que produtores, processadores e outros participantes do *agribusiness* busquem com frequência várias técnicas de administração do negócio capazes de os defender de resultados insatisfatórios.

As empresas podem montar operações compensatórias conhecidas como *hedge* para se proteger do risco oriundo de oscilações desfavoráveis dos preços dos produtos com os quais transacionam em algum instante. Essas operações envolvem ativos como, por exemplo, os contratos à termo, os contratos de opções e os contratos futuros, cujos preços estão relacionados com os preços dos ativos de interesse no mercado físico. Neste trabalho são estudadas as operações de *hedge* que se baseiam exclusivamente em transações com contratos futuros.

Os contratos futuros são obrigações de comprar ou vender um determinado ativo em algum instante futuro por um preço estabelecido no momento em que se assume tal obrigação. Além dos *hedgers*, que empregam os contratos para sua proteção, agentes

com interesses distintos os utilizam para conseguir determinados ganhos. Alguns desses agentes são especuladores, que assumem os riscos que os *hedgers* pretendem evitar em troca da possibilidade de obter lucro com as mudanças de preços futuros, fornecendo volume e liquidez aos mercados. Outros agentes que participam dos mercados futuros são arbitradores, que tentam travar ganhos com pequenos diferenciais de preços ao assumir posições em vários mercados simultaneamente, contribuindo assim para a manutenção da relação de equilíbrio dos preços. Devido às interações entre seus participantes, os mercados de futuros desempenham um papel crucial tanto no processo de transferência do risco das oscilações de preço entre os agentes quanto no processo de descoberta dos preços que irão vigorar adiante. Este último papel decorre do fato de que as expectativas sobre as condições de oferta e demanda futuras, dadas as informações disponíveis, refletem-se imediatamente sobre o preço futuro em um dado instante.

Uma constante preocupação dos administradores das bolsas de futuros e dos estudiosos do assunto é o grau de participação que os agentes do mercado físico (produtores, cooperativas, armazenadores) devem ter nos mercados futuros. No Brasil, onde essa participação é pequena e os mercados de futuros para os produtos agropecuários são recentes, ao se fixar metas quanto ao tamanho desses mercados deve-se levar em conta os limites ou níveis considerados “ótimos” do ponto de vista do gerenciamento do risco de preço. Neste contexto, ganha importância a modelagem das estratégias de *hedge*.

Dada sua importância para os mercados de futuros em geral, um dos objetivos principais deste trabalho será apresentar uma revisão dos modelos utilizados para a implementação de estratégias de *hedge*. Essencialmente, pretende-se com esses modelos determinar a proporção da posição em contratos futuros em relação a posição à vista que o *hedger* deve adotar para atingir objetivos tais como a minimização da variância de uma função de riqueza ou maximização de alguma função de utilidade esperada. Este tipo de problema é conhecido como determinação da razão de *hedge*, e seu estudo

aprofundado ganha importância diante da dificuldade de se antecipar os comportamentos dos preços à vista e futuro e do diferencial entre eles.

É interessante ressaltar algumas suposições que delimitam o modelo a ser implementado na parte empírica deste estudo. Em primeiro lugar, supõe-se que um agente detém uma determinada posição no mercado à vista e que seu horizonte de planejamento e decisão engloba apenas um período, o que torna a compreensão do problema limitada, pois em geral as decisões sobre os montantes das posições em ambos os mercados são tomadas simultaneamente e para vários períodos distintos. Partindo do critério de maximização de uma função de utilidade esperada, supõe-se adicionalmente que o agente é infinitamente averso ao risco e/ou que o mercado de futuros é eficiente, ou seja, que todas as informações relevantes para a previsão do preço num momento futuro estão refletidas no preço atual.

A regra de decisão que daí surge consiste no cálculo relativamente simples da razão de *hedge* de variância mínima, que é uma alternativa às regras que recomendavam uma razão de *hedge* igual à unidade. A distinção entre as abordagens é devida principalmente à influência do comportamento dos preços observados nos mercados físico e de futuros sobre os modelos de variância mínima, pois este comportamento altera os valores dos momentos de segunda ordem da distribuição conjunta dos preços, que são os determinantes da razão de *hedge* nesses modelos.

As relações entre os preços dos mercados à vista e de futuros, subjacentes à sua distribuição de probabilidades conjunta, devem ser tratadas com algum modelo que represente o equilíbrio dos mercados, a fim de fornecer informações úteis aos tomadores de decisão. Na parte experimental deste estudo, pretende-se aplicar modelos estatísticos para a avaliação do comportamento dos preços com destaque para as relações de co-integração e de dependência temporal nos momentos de segunda ordem, sendo esta representada por modelos de heterocedasticidade condicional auto-regressiva.

Os modelos foram construídos a partir de uma formulação mais simples até uma mais complexa, cujos resultados foram comparados entre si através de estatísticas e medidas relacionadas à redução percentual da variância do retorno de uma carteira com posições tomadas em ambos os mercados. Para este fim, foram utilizadas previsões para dentro e para fora da amostra das razões de *hedge*, sendo também estudada a influência dos custos de transação sobre uma estratégia de *hedge* ajustada com base no modelo de heterocedasticidade condicional.

No segundo capítulo apresenta-se uma breve explanação sobre os mercados de futuros e alguns de seus conceitos. No terceiro capítulo encontra-se uma revisão da literatura existente sobre os modelos utilizados para o cálculo da razão de *hedge*. No quarto são expostos os modelos econométricos de heterocedasticidade condicional autoregressiva. No quinto capítulo são apresentados os procedimentos metodológicos. A modelagem econométrica utilizada e os resultados obtidos são apresentados no sexto capítulo. O sétimo capítulo apresenta as principais conclusões deste estudo.

2 – MERCADOS DE CONTRATOS FUTUROS

Acordos com as características dos atuais contratos futuros têm sido amplamente feitos ao longo da história, tendo-se notícias de que obrigações semelhantes existiam no Japão e na China dos séculos passados, bem como nas feiras da Europa medieval e na Inglaterra, país onde inclusive começou a regulamentação dos mercados de contratos futuros. As bases para as modernas bolsas que negociam contratos futuros começaram a ser estabelecidas nos Estados Unidos em meados do século XIX (Purcell, 1991), devido ao grande interesse que esses instrumentos despertavam nos agentes que transacionavam determinados produtos. Nas últimas décadas, devido às possibilidades de ganhos e proteção que seu uso permite, os contratos futuros e outros derivativos financeiros (como opções, contratos a termo e *swaps*) foram criados e ganharam importância para empresas, instituições financeiras e governos, sendo que o volume de dinheiro transacionado em operações com esses ativos supera o PIB mundial várias vezes.

No Brasil, os contratos futuros foram introduzidos em 1917 para o algodão em pluma, na Bolsa de Mercadorias de São Paulo (BMSP). Em 1985 foi criada pela BOVESPA a Bolsa Mercantil & Futuros (BM&F), que em 1991 se fundiu com a BMSP para a criação da Bolsa de Mercadorias & Futuros (também BM&F). A última fusão, em 1997, foi da Bolsa Brasileira de Futuros, que havia sido criada em 1983 no Rio de Janeiro, com a BM&F, tornando esta a única bolsa que negocia contratos futuros no Brasil. As criações e fusões de tais bolsas visavam colocar o Brasil numa posição de destaque nas transações de derivativos, mas no caso de produtos agropecuários os

resultados ainda estão muito aquém do desejado, haja vista o pequeno volume de contratos negociados. |

A compreensão dos termos contratos de futuros para produtos agrícolas é importante porque suas especificidades implicam em um gerenciamento distinto do que é feito com contratos de ativos financeiros. No entanto, os princípios que estabelecem a natureza geral dos contratos são praticamente os mesmos para ambos e sua compreensão é relativamente fácil.

Define-se um contrato futuro como um acordo entre duas partes para comprar ou vender um ativo em determinada data futura por preço determinado. As negociações desses contratos ocorrem em bolsas que cuidam da sua padronização e de alguns pontos que asseguram o bom funcionamento dos mercados. A atuação de uma bolsa é fundamental para auxiliar as transações e garantir o cumprimento do contrato. Órgãos do governo cuidam da manutenção do interesse público, sendo que no Brasil a Comissão de Valores Mobiliários regulamenta e fiscaliza este mercado. ^

Os contratos futuros são ativos cuja natureza deve ser bem conhecida por aqueles que os utilizam, e por isso a definição de seus termos pelas Bolsas é bastante cuidadosa e precisa. Para produtos agropecuários, cuja qualidade difere de um lote para outro, um dos principais pontos a se estabelecer é o tipo de produto aceito na entrega, que se não for único, no contrato ficarão claras variedades aceitas e diferenciais de preço entre elas. Também é preciso especificar no contrato a data de vencimento e a quantidade do ativo a ser entregue. O tamanho do contrato, como ressalta Hull (1997), é uma decisão importante para a Bolsa de futuros porque um contrato para um volume elevado da mercadoria pode excluir do mercado agentes que se interessam por posições menores, ou se o tamanho do contrato for pequeno, pode encarecer a negociação de cada unidade deste.

A bolsa precisa também estabelecer outros pontos referentes à entrega do produto. Entre esses estão os locais da entrega, cujos preços irão diferir devido aos custos e riscos do transporte. Em geral as bolsas estabelecem nos contratos as praças onde serão feitas as entregas e mantêm armazéns adequados à recepção dos produtos.

Nos contratos também devem estar estabelecidos os padrões de cotação e os limites de oscilação diária dos preços futuros.¹ Este último ponto é sempre motivo de discussão porque a atividade especulativa pode ser exagerada e justificar a imposição de tais barreiras, mas também pode sofrer sérios entraves devido a restrições colocadas artificialmente. Os especuladores são agentes fundamentais pois assumem os riscos que os *hedgers* pretendem evitar, fornecendo volume e liquidez necessários para que os contratos futuros sejam liquidados sempre que se desejar.

Os procedimentos para a liquidação do contrato também têm que estar estabelecidos em suas cláusulas. Alguns contratos são liquidados com a entrega física da mercadoria, como as *commodities*, enquanto outros são liquidados financeiramente, como os ativos financeiros. No Brasil, também alguns contratos para produtos agropecuários são liquidados através de índices calculados diariamente por algumas instituições.

O período da entrega é fundamental. A medida em que este se aproxima, operações de arbitragem forçam uma convergência de preços que os igualam ou os tornam bem próximos um do outro¹. Isto é importante para que os contratos futuros sirvam como um instrumento para as estratégias de *hedge*, discutidas em detalhes no próximo capítulo. Purcell(1991, p.15) ressalta que tais estratégias podem ser montadas se o comportamento dos preços nos mercados preencher os requisitos de:

¹ Pode existir uma pequena diferença entre preços causada por custos de transação.

1. *Over time, cash and futures prices will respond to the underlying forces of supply and demand in such a way that prices in the two markets tend to move together, and;*
2. *as the maturity date of the futures contract approaches, the cash and futures markets will tend to converge or come together to some predictable difference called basis.*

Além da arbitragem, que gera expectativas de convergência, alguns autores, como Keynes e Hicks, estudaram as relações entre os preços e estabeleceram termos conhecidos como *normal backwardation*, para o caso de o preço futuro estar abaixo do valor esperado do preço à vista no vencimento do contrato futuro, e *contango*, caso oposto de comportamento de preços (ver Duffie, 1989, p.180). O primeiro termo refere-se à situação que ocorreria se o volume das posições vendidas em futuros com os *hedgers* fosse maior que o das posições compradas, caso para o qual se estaria pagando um prêmio para os especuladores assumirem as posições compradas não adquiridas pelos *hedgers*. A segunda corresponde ao caso oposto de as posições compradas em futuros pelos *hedgers* serem maiores que as vendidas.²

É importante destacar que as bolsas mantêm departamentos chamados de Câmaras de Compensação que asseguram o cumprimento dos contratos. As Câmaras de Compensação acompanham e registram as transações nos mercados, e através de alguns instrumentos, como margens de garantia e ajustes diários, minimizam os riscos de inadimplência e não cumprimento dos contratos pelos agentes.

O sistema de margens envolve um depósito em conta de um valor chamado de margem inicial. Com oscilações diárias dos preços o saldo desta conta muda e pode ser retirado, caso se torne positivo ao longo do tempo, ou se for negativo, reduzindo a conta a um patamar mínimo chamado de margem de segurança, pode ser que os agentes sejam

² Estes fatos se relacionam com a propriedade *martingale* discutida no próximo capítulo, para a qual os preços futuros são estimadores não viesados, equivalente à um prêmio de risco igual a zero.

chamados a repor o valor da margem inicial (ver detalhes em Hull (1997) e Duffie (1989)).

Dentro do ambiente acima descrito, uma função básica dos mercados futuros, que também deve ser destacada, trata do processo de sinalização dos preços. Como os preços são variáveis fundamentais para o processo de tomada de decisão pelos agentes, pode-se acreditar que a alocação dos recursos será amplamente influenciada pela sinalização fornecida pelos preços futuros, a medida que esses são governados pelas expectativas das condições de oferta e de demanda futuras. O ganho de eficiência³ com o processamento das informações relevantes vai refletir na produção e no nível de bem-estar social.

³ Pode-se definir: eficiência fraca, quando as informações dos preços passados estão refletidas no preço corrente; eficiência semi-forte, quando todas as informações públicas estão refletidas; e eficiência forte, quando qualquer informação está refletida, seja ela pública ou não.

CAPÍTULO 3 - REVISÃO DE LITERATURA

A utilização dos mercados de futuros para fins de *hedge* é conhecida e estudada praticamente desde seu surgimento. Os modelos desenvolvidos para representar as escolhas de *hedge* têm em geral seus princípios baseados nos interesses dos agentes que atuam nos mercados físico e de futuros.¹ As características dos modelos mais recentes inserem na tomada de decisão variáveis relativas aos comportamentos dos preços nesses mercados e a reação dos agentes frente ao risco.² Com frequência o *hedge* tem sido estudado como um problema que envolve a otimização de uma função através de algumas variáveis de controle, como as posições nos mercados físico e de futuros. Os dois principais tipos de funções otimizadas nesses estudos são funções de riqueza (ou de retorno dos portfólios) dos indivíduos, cuja variância deve ser minimizada, e funções de utilidade, que devem ser maximizadas. Esta revisão tratará de cada um desses tipos de modelos em seções separadas.

Na apresentação desses modelos serão discutidos os pressupostos envolvidos em cada um e a sua correspondência com situações reais. Destaque especial será dado à diferença entre modelos estáticos e dinâmicos. Como explicado por Lence et al. (1993), os primeiros tratam o *hedger* como um agente míope, que se preocupa apenas com a abertura de posições num instante inicial, tendo em vista seu encerramento em um determinado instante futuro. O agente não revê as posições no intervalo de tempo entre tais momentos, a luz de informações que surgem. Os modelos dinâmicos incorporam um processo de tomada de decisão mais complexo, onde são geralmente considerados vários

instantes de planejamento e de decisão, com a possibilidade de se rever e ajustar as posições sempre que novas informações surgirem.

Pretende-se com isto fornecer uma leitura sequencial, onde o modelo estático de variância mínima, que serve de base teórica para a aplicação feita nos capítulos finais, entra em contato com outros modelos que questionam seus fundamentos e apontam suas eventuais deficiências, podendo esses servirem de referencial para investigações futuras.

3.1 – Algumas interpretações das estratégias de *hedge*

O conceito de razão de *hedge*, definido como a proporção da posição em contratos futuros em relação à posição no mercado físico, é o principal ponto a ser considerado por quem monta as estratégias com contratos futuros. A forma mais intuitiva de determinar esta razão é conhecida na literatura como *hedge* ingênuo, no qual o agente assume posições de mesma extensão nos dois mercados, ou seja, ele estabelece uma razão de *hedge* igual à unidade. Ao fazer isto, o agente pode conseguir ganhos com o encerramento de uma posição no mercado de futuros de magnitude igual às perdas ocorridas no mercado físico, ou vice-versa, de maneira a receber a pagar um valor pactuado na definição da estratégia. Este comportamento foi defendido como uma forma consistente de redução de risco, sendo que seu resultado será tanto mais seguro quanto mais próximo de um deslocamento paralelo estiverem os preços nos dois mercados.

A receita R_t do *hedger* com o encerramento da estratégia ingênua num instante t pode ser expressa como:

$$R_t = p_t Q_{t-1} + (f_{t-1} - f_t) F_{t-1} \quad (1)$$

onde f_{t-1} e f_t são os preços dos contratos futuros nos momentos de abertura $t-1$ e de encerramento t da operação; p_t denota o preço do ativo no encerramento do *hedge*; Q_{t-1} é

o volume negociado no mercado físico (um valor negativo, se for feita a venda antecipada do produto); e F_{t-1} denota o volume do ativo negociado nos contratos futuros, adquiridos no instante inicial.

Tomando a equação (1) acima e dividindo cada uma das parcelas por Q_{t-1} , obtém-se uma expressão do valor efetivamente recebido por unidade do ativo que foi *hedgeada* no instante $t-1$. Como explicado por Shafer (1993), para o *hedge* ingênuo ($F_{t1}/Q_{t-1} = 1$), o preço efetivo pe_t (*net price*) de cada unidade que está sendo *hedgeada* pode ser expresso de três maneiras:

$$pe_t = p_t + (f_{t-1} - f_t) \quad (2)$$

$$pe_t = f_{t-1} + b_t \quad (3)$$

$$pe_t = p_{t-1} + (b_t - b_{t-1}) \quad (4)$$

onde, por definição, b_t e b_{t-1} são os valores da base nos instantes final e inicial, iguais a $(p_t - f_t)$ e $(p_{t-1} - f_{t-1})$, respectivamente.

A primeira expressão decorre diretamente da definição (1) e serve para calcular o preço efetivo com o *hedge* no encerramento da estratégia, quando todos os valores do lado direito são conhecidos. A segunda expressão é interessante para tentativas de projeção do resultado líquido através da previsão da base no encerramento. Ela ilustra bem o fato de que o *hedger* corre o risco advindo do desconhecimento do valor exato da base, que é o único termo aleatório na expressão. Quando existir uma correlação perfeita entre os preços futuro e físico o *hedge* será denominado perfeito, pois todo o risco de base poderá ser eliminado. A incerteza na base existe fundamentalmente devido a fatores relacionados ao tempo, pois a relação entre os preços nos mercados pode se alterar constantemente; ao espaço, pois os preços de determinado produto podem diferir de um local para outro em algum momento; e à qualidade, que pode ser diferente entre lotes de um mesmo produto (além da possibilidade de uma não correspondência entre o ativo objeto do contrato futuro e o ativo *hedgeado* (*cross-hedge*)).

Working (1962) definiu que por transacionar no mercado de futuros para proteção de posições no mercado físico, o agente assumiria o risco de oscilação da base e se tornaria um *hedger*, enquanto que, sem uma posição no mercado físico que alterasse sua função lucro, um especulador seria o agente que assumiria o risco de oscilação dos preços futuros. ^{ou SEJA,} Pode-se dizer, portanto, que para este autor a distinção entre os agentes estaria determinada pelo fato desses transacionarem ou não determinado produto no mercado à vista.

Para Working (1953 e 1962), o *hedger* seria um agente discricionário, cuja participação no mercado de futuros diretamente relacionada com a sua expectativa de fortalecimento ($b_t - b_{t-1} > 0$) ou de enfraquecimento ($b_t - b_{t-1} < 0$) da base, relação que aparece diretamente na expressão (4). Pode-se concluir que para Working (1962), o *hedger* seria um agente que estaria “especulando” com a mudança na base, enquanto que o especulador estaria trabalhando com a expectativa de mudança no nível dos preços futuros. Shafer (1993) explica que Working considera que haveria participação no mercado de futuros numa razão de *hedge* unitária se o agente julgasse que a mudança na base lhe seria favorável. Caso contrário, não haveria participação alguma no mercado de futuros, isto é, a razão de *hedge* adotada seria igual zero, o que distingue seu ponto de vista do *hedge* ingênuo.

Contudo, em termos de redução da variância do retorno, se o deslocamento dos preços for não paralelo ao longo do tempo é possível conseguir um resultado melhor com uma razão de *hedge* diferente da unidade, o que altera as expressões acima da seguinte maneira:

$$pe_t = p_t + h_{t-1}(f_{t-1} - f_t) \quad (5)$$

$$pe_t = h_{t-1}f_{t-1} + (p_t - h_{t-1}f_t) \quad (6)$$

$$pe_t = p_{t-1} + (p_t - h_{t-1}f_t) - (p_{t-1} - h_{t-1}f_{t-1}) \quad (7)$$

onde, $h_{t-1} = F_{t-1}/Q_{t-1}$ é a razão de *hedge*.

Observando as equações (5) e (6), nota-se que o desconhecimento da base continua sendo a principal fonte de risco para o *hedger*. Isto implica que os agentes devem se concentrar na escolha de uma razão de *hedge* adequada para reduzir o risco considerando as características da distribuição de probabilidades conjunta dos preços, o que entra em discussão nas próximas seções.

3.2 - Modelos de variância mínima

Os modelos de variância mínima são extremamente importantes, dado que minimizar o risco de um ganho futuro, ou seja, tentar travar um valor a receber, é a principal motivação para os *hedgers* buscarem os mercados futuros. Tais modelos são bastante empregados como uma primeira abordagem ou ponto de referência para comparação com outros, por sua praticidade e por representarem sob certas condições uma estratégia ótima (como mostrado na seção 3.3).

Abordagem Estática

Na sua versão estática, o modelo de variância mínima começa com a definição de uma função do lucro futuro π_t de uma carteira, dado por:

$$\pi_t = p_t Q_{t-1} - c(Q_{t-1}) + (f_{t-1} - f_t) F_{t-1} \quad (8)$$

onde f_{t-1} é o preço corrente do contrato futuro; p_t e f_t são respectivamente os preços do ativo no mercado físico e do contrato futuro no instante t de encerramento do *hedge*, ambos aleatórios; Q_{t-1} é a posição no mercado físico assumida em $t-1$ para ser vendida

no instante t ; F_{t-1} é o montante da posição no de futuros que se assume para fins de *hedge*; e $c(\cdot)$ é uma função custo crescente e convexa.

O problema no modelo de variância mínima é então definir a razão de *hedge* ($h_{t-1} = F_{t-1}/Q_{t-1}$) que minimiza a variância da expressão (8) acima, condicional às informações I_{t-1} disponíveis na elaboração da estratégia, supondo que a posição no mercado físico Q_{t-1} é um valor dado:

$$\begin{aligned} \min_F \text{var}(\pi_t | I_{t-1}) = \\ \min_F [Q_{t-1}^2 \text{var}(p_t | I_{t-1}) - 2Q_{t-1}F_{t-1} \text{cov}(p_t, f_t | I_{t-1}) + F_{t-1}^2 \text{var}(f_t | I_{t-1})] \end{aligned} \quad (9)$$

A condição de primeira ordem para a solução deste problema é:

$$\frac{\partial \text{var}(\pi_t | I_{t-1})}{\partial F_{t-1}} = -2Q_{t-1} \text{cov}(p_t, f_t | I_{t-1}) + 2F_{t-1} \text{var}(f_t | I_{t-1}) = 0 \quad (10)$$

Desta equação, pode-se extrair a seguinte regra de decisão:

$$F_{t-1} = \frac{\text{cov}(p_t, f_t | I_{t-1})}{\text{var}(f_t | I_{t-1})} Q_{t-1} \quad (11)$$

ou seja, a razão de *hedge* é igual à:

$$h_{t-1} = \frac{F_{t-1}}{Q_{t-1}} = \frac{\text{cov}(p_t, f_t | I_{t-1})}{\text{var}(f_t | I_{t-1})} \quad (12)$$

Lence & Hayes (1994) colocaram o problema de tomada de decisão com modelos de variância mínima dentro de uma discussão sobre o risco envolvido na

estimação dos parâmetros de variância e covariância, dado que as distribuições verdadeiras dos preços são desconhecidas. Os autores sugeriram que métodos Bayesianos podem gerar resultados mais consistentes, inclusive quando se parte da maximização de uma função de utilidade esperada. Este assunto é importante e merece atenção no processo decisório, mas sua complexidade o coloca fora do escopo deste trabalho.

Abordagem Dinâmica

Uma generalização do problema de cálculo da razão de *hedge* de variância mínima para o caso dinâmico foi feita por Lence et al. (1993). O modelo construído será exposto porque suas características, como ressaltado pelos autores, evitam alguns problemas de modelos muito complexos para serem aplicados na prática, como os de Anderson & Danthine (1983), Karp (1987) e Martinez & Zering (1992), e também permitem que seja adotado pelos agentes um processo de revisão de sua posição à vista durante a vigência do *hedge*, ao contrário dos modelos de Mathews & Houlthausen (1991) e Howard & D'Antonio (1991).

O modelo parte da pressuposição de que o agente minimiza variância de sua riqueza final. Ele pode alterar suas posições nos mercados físico e de futuros pelo menos uma vez entre a abertura e o encerramento do *hedge*, consciente das informações que surgem neste intervalo de tempo. Representa-se no modelo uma firma que mantém estoques de uma *commodity* para obter lucro a partir de uma possível elevação do preço no mercado físico. A função de riqueza da firma, para uma data final T , é:

$$W_T = \dot{r}^T W_0 + \dot{r}^{T-1} \pi_1 + \dot{r}^{T-2} \pi_2 + \dots + \dot{r}^2 \pi_{T-2} + \dot{r} \pi_{T-1} + \pi_T \quad (13)$$

onde $\dot{r}^{T-t}$ representa um valor igual a um mais a taxa de juros r por período, elevado à potência $T - t$ que é o intervalo de tempo até o encerramento do *hedge*; W_0 é a riqueza

inicial do indivíduo; π_t indica o lucro de se estocar Q_{t-1} unidades de uma *commodity* e *hedgear* $h_{t-1}Q_{t-1}$ unidades no período $t-1$, o que analiticamente pode ser escrito como:

$$\pi_t = \{p_t - \dot{r}[p_{t-1} + c(Q_{t-1})] + (f_{t-1} - f_t)h_{t-1}\}Q_{t-1} \quad (14)$$

onde p_t é o preço no mercado físico; f_{t-1} e f_t são os preços futuros nos momentos $t-1$ e t , respectivamente, para um contrato com vencimento em algum instante futuro; $c(\cdot)$ indica o custo variável da estocagem da *commodity*, excluindo o custo de oportunidade representado pela taxa de juros, e h_{t-1} é a razão de *hedge* para uma posição em futuros tomada no instante $t-1$ e liquidada no instante t . Os autores fazem a ressalva de que tal modelo exclui os casos de lucro advindos de posições puramente especulativas nos mercados de futuros, pois $\pi_t = 0$ quando $Q_{t-1} = 0$.

A derivação do modelo prossegue de maneira análoga ao caso estático, supondo que em cada instante de decisão o agente escolhe primeiro o montante a ser estocado para depois decidir qual a razão de *hedge* minimiza a variância da riqueza final. Assim, no instante $t = 0$, o agente procura determinar o valor de h_0 dado o valor Q_0 , condicional ao conjunto das informações I_0 disponíveis:

$$\min_{h_0} \text{var}(W_T | I_0) \quad (15)$$

A técnica empregada para calcular o valor de h_0 é conhecida como *backward induction*. Com ela define-se em primeiro lugar a variância da riqueza como se o agente estivesse no instante $T-1$:

$$\begin{aligned} \text{var}(W_T | I_{t-1}) &= \text{var}(\pi_T | I_{t-1}) \\ &= Q_{T-1}^2 [\text{var}(p_T | I_{t-1}) + h_{T-1}^2 \text{var}(f_T | I_{t-1}) - 2h_{T-1} \text{cov}(p_T, f_T | I_{t-1})] \end{aligned} \quad (16)$$

Para esta, deriva-se a seguinte condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial \text{var}(W_T | I_{t-1})}{\partial h_{T-1}} = Q_{T-1}^2 [2h_{T-1}^* \text{var}(f_T | I_{t-1}) - 2 \text{cov}(p_T, f_T | I_{t-1})] = 0 \quad (17)$$

Obtendo-se daí a seguinte razão de *hedge*, cujo asterisco indica que é uma solução ótima:

$$h_{T-1}^* = \frac{\text{cov}(p_T, f_T | I_{t-1})}{\text{var}(f_T | I_{t-1})} \quad (18)$$

A derivação prossegue repetindo este procedimento para a variância da função de riqueza no instante $T-2$. Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{var}(W_T | I_{T-2}) &= \text{var}(\dot{r}\pi_{T-1} + \pi_T | I_{T-2}) \\ &= \dot{r}^2 \text{var}(\pi_{T-1} | I_{T-2}) + \text{var}(\pi_T | I_{T-2}) + 2\dot{r} \text{cov}(\pi_{T-1}, \pi_T | I_{T-2}) \\ &= \dot{r}^2 Q_{T-2}^2 [\text{var}(p_{T-1} | I_{T-2}) + h_{T-2}^2 \text{var}(f_{T-1} | I_{T-2}) - 2h_{T-2} \text{cov}(p_{T-1}, f_{T-1} | I_{T-2})] \\ &\quad + \text{var}(\pi_T | I_{T-2}) + 2\dot{r} Q_{T-2} [\text{cov}(p_{T-1}, \pi_T | I_{T-2}) - h_{T-2} \text{cov}(f_{T-1}, \pi_T | I_{T-2})] \end{aligned} \quad (19)$$

Derivando esta expressão em relação à h_{T-2} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{var}(W_T | I_{T-2})}{\partial h_{T-2}} &= \dot{r}^2 Q_{T-2}^2 [2h_{T-2}^* \text{var}(f_{T-1} | I_{T-2}) - 2 \text{cov}(p_{T-1}, f_{T-1} | I_{T-2})] \\ &\quad - 2\dot{r} Q_{T-2} \text{cov}(f_{T-1}, \pi_T | I_{T-2}) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Resolvendo para h_{T-2}^* , obtém-se a regra ótima de decisão para o instante $T-2$:

$$h_{T-2}^* = \frac{\text{cov}(p_{T-1}, f_{T-1} | I_{T-2})}{\text{var}(f_{T-1} | I_{T-2})} + \frac{\text{cov}(f_{T-1}, \pi_T | I_{T-2})}{\dot{r} Q_{T-2} \text{var}(f_{T-1} | I_{T-2})} \quad (21)$$

O procedimento é repetido para os outros instantes, recuando sempre um instante no tempo em relação ao instante precedente, isto é, $var(W_T|I_{T-3}), \dots, var(W_T|I_0)$ são calculados até que se chegue à razão de *hedge* para o momento inicial, indicada pelos autores como:

$$h_0^* = \frac{cov(p_1, f_1|I_0)}{var(f_1|I_0)} + \frac{cov(f_1, \pi_2|I_0)}{rQ_0 var(f_1|I_0)} + \dots + \frac{cov(f_1, \pi_{T-1}|I_0)}{r^{T-2}Q_0 var(f_1|I_0)} + \frac{cov(f_1, \pi_T|I_0)}{r^{T-1}Q_0 var(f_1|I_0)} \quad (22)$$

O primeiro componente do lado direito corresponde ao resultado do modelo estático. Os outros incorporam elementos que indicam a covariância do preço do contrato futuro no instante seguinte com os lucros aleatórios que vão do momento 2 até o final T ($\pi_2, \dots, \pi_{T-1}, \pi_T$). Tais componentes são descontados por fatores crescentes da taxa de juros, porque sua proximidade do instante final T implica em uma menor contribuição deste para a riqueza final e, por consequência, para a variância da mesma. Os termos Q_0 dividem os componentes acima porque quanto maior o montante estocado inicialmente tanto maior será sua contribuição para a variância da riqueza final relativamente à contribuição dos valores estocados em outros momentos.

3.3 - Modelos de maximização da utilidade esperada

Os problemas de escolha em condições de incerteza têm sido tradicionalmente tratados no contexto de maximização de uma função de utilidade esperada. Esta modelagem não pretende definir o comportamento de um tomador de decisão como um agente que realmente maximiza tais funções, mas pretende apenas criar uma

representação que satisfaça alguns princípios de racionalidade a serem seguidos por eles. Matematicamente, a expressão do problema de decisão é:

$$\max E(U(W_t)) = \max \int U(W_t) \phi(W_t) dW_t \quad (23)$$

onde $E(\cdot)$ é o operador esperança, $U(\cdot)$ é uma função de utilidade do tipo von Neumann-Morgenster e $\phi(\cdot)$ é a função densidade de probabilidades da variável π_t , que representa o retorno com os portfolios de *hedge*.

Sobre a função de utilidade esperada, são feitas algumas pressuposições que levam à análise de casos mais restritos de representação do comportamento dos agentes. Em primeiro lugar, é possível demonstrar que tal função é dependente dos momentos da distribuição de probabilidade de $W_t(\cdot)$. Uma série de Taylor pode ser usada para aproximar o valor de $U = g(W_t)$ em torno do valor de $E(W_t)$, chamado de $\hat{W}_t$, isto é:

$$U = g(\hat{W}_t) + g'(\hat{W}_t)(W_t - \hat{W}_t) + [g''(\hat{W}_t)/2!](W_t - \hat{W}_t)^2 + \sum_{i=3}^{\infty} [g^{(i)}(\hat{W}_t)/i!](W_t - \hat{W}_t)^i \quad (24)$$

Aplicando o operador esperança na expressão, obtém-se:

$$E(U) = g(\hat{W}_t) + g'(\hat{W}_t)E(W_t - \hat{W}_t) + [g''(\hat{W}_t)/2!]E(W_t - \hat{W}_t)^2 + \sum_{i=3}^{\infty} [g^{(i)}(\hat{W}_t)/i!]E(W_t - \hat{W}_t)^i \quad (25)$$

Por definição, $E(W_t - \hat{W}_t) = 0$, e considerando que uma aproximação de segunda ordem é razoável, isto é, que $\sum_{i=3}^{\infty} [g^{(i)}(\hat{W}_t)/i!]E(W_t - \hat{W}_t)^i \cong 0$, a expressão acima torna-se:

$$E(U) \equiv g(\hat{W}_t) + \sigma_w^2 [g''(\hat{W}_t)/2] \quad (26)$$

dado que $\sigma_w^2 = E(W_t - \hat{W}_t)^2$ é a variância de W_t .

A função (26) é um caso bastante interessante porque nela as escolhas se baseiam apenas sobre os dois primeiros momentos da distribuição da variável W_t , o que tradicionalmente define a abordagem média-variância⁴. Se esta for considerada como a função de riqueza de um indivíduo, que depende de uma taxa de retorno aleatória w de um portfolio, dada a riqueza inicial W_{t-1} , tem-se que:

$$\hat{W}_t = W_{t-1}(1 + \hat{w}) \quad (27)$$

$$\sigma_{W_t}^2 = W_{t-1}^2 \sigma_w^2 \quad (28)$$

o que torna a expressão (26) igual à:

$$E(U) \equiv g(W_{t-1}(1 + \hat{w})) + W_{t-1}^2 \sigma_w^2 [g''(W_{t-1}(1 + \hat{w}))/2] \quad (29)$$

Portanto, quando analisado do ponto de vista dos retornos relativos dos portfolios dos *hedgers*, o problema pode ser expresso também em função da média e da variância desses. Um caso particularmente importante para os modelos de média-variância é o de retornos relativos com distribuição normal, que é definida pelos valores desses dois momentos e torna a análise mais adequada. Algumas funções de utilidade vêm sendo exploradas na literatura porque delas derivam-se escolhas tomadas exatamente sobre esses dois momentos, quais sejam, a média e a variância. As funções de utilidade quadráticas são casos para os quais a aproximação de Taylor gera um resultado exato.

⁴ Stein (1961) alerta que medidas de risco diferentes da variância podem ser empregadas, como a probabilidade ou o valor esperado de uma perda, mas a variância é adequada quando considera-se funções de densidade simétricas.

Modelos estáticos

O primeiro modelo a ser apresentado inspira-se na abordagem média-variância acima, sendo empregado em vários trabalhos, como o artigo de Stein (1961), o trabalho de Ederington (1979), de Anderson & Danthine (1981), de Myers & Thompson (1989) e de Baillie & Myers (1991), dentre muitos outros autores.

Adotando a formulação de Myers & Thompson (1989), em primeiro lugar define-se uma função lucro:

$$\pi_t = p_t Q_{t-1} - c(Q_{t-1}) + (f_{t-1} - f_t) F_{t-1} \quad (30)$$

onde f_t e p_t são respectivamente os preços nos mercados futuro e físico na data de encerramento da operação, ambos desconhecidos; f_{t-1} é o preço no mercado de futuros quando se assume esta posição, que é um valor conhecido no momento da tomada de decisão; F_{t-1} e Q_{t-1} representam respectivamente as posições nos mercados de futuros, que é uma variável de decisão, e no físico, que é considerado um valor dado em alguns modelos e uma variável de decisão em outros; $c(.)$ representa uma função custo crescente e convexa.

Como explicam os autores, a equação pode ser encarada como se representasse o lucro de um *trader* cujos custos de comprar, estocar e transportar podem ser incluídos em $c(Q_{t-1})$. Além disso representa o lucro de um agente que realiza a venda antecipada do produto no mercado físico ($Q_{t-1} < 0$), caso onde $c(Q_{t-1})$ torna-se negativo e passa a representar a receita com esta operação. Os autores apontam também que não se admite tecnologia de produção estocástica neste tipo de modelagem e indicam os trabalhos de Rolfo (1980) e Grant (1989) para tratar deste caso. Anderson & Danthine (1981), ressaltam que a expressão também serve para exprimir os ganhos de um especulador, cuja posição à vista é nula, ($Q_{t-1} = 0$ e $c(0) = 0$).

O valor esperado do lucro, para uma distribuição não condicional, é:

$$E(\pi_t) = E(p_t)Q_{t-1} - c(Q_{t-1}) - [E(f_t) - f_{t-1}]F_{t-1} \quad (31)$$

A variância não condicional deste lucro é definida como:

$$\text{var}(\pi_t) = Q_{t-1}^2 \text{var}(p_t) + F_{t-1}^2 \text{var}(f_t) - 2F_{t-1}Q_{t-1} \text{cov}(f_t, p_t) \quad (32)$$

com $\text{cov}(\cdot)$ sendo o operador covariância.

Numa modelagem conhecida como convencional, assume-se que os agentes maximizam uma função linear que é crescente em relação ao lucro esperado (π_t) e decrescente em relação à variância deste:

$$\max \left\{ E(\pi_t) - \left(\frac{\lambda}{2} \right) \text{var}(\pi_t) \right\} \quad (33)$$

onde λ é uma medida de aversão absoluta ao risco.

Substituindo (31) e (32) em (33), obtém-se:

$$\max \left\{ \begin{aligned} &Q_{t-1}E(p_t) - c(Q_{t-1}) - F_{t-1}[E(f_t) - f_{t-1}] - \dots \\ &-\frac{\lambda}{2} [Q_{t-1}^2 \text{var}(p_t) + F_{t-1}^2 \text{var}(f_t) - 2Q_{t-1}F_{t-1} \text{cov}(f_t, p_t)] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

A maximização da expressão acima depende essencialmente de quais são as variáveis de decisão sob as quais ela é derivada. Anderson & Danthine (1981) derivam-na para ambos os valores das posições no mercado físico e de futuros, mas a fim de tornar o resultado aplicável os autores incluem uma suposição pouco realista de que não existe risco de base. O problema se torna mais tratável se a posição à vista for tida como um valor estabelecido previamente, gerando uma regra de decisão voltada apenas para o

valor da posição em futuros, tal como a que prossegue da seguinte condição de primeira ordem:

$$E(f_t) - f_{t-1} - \lambda(F_{t-1} \text{var}(f_t) - Q_{t-1} \text{cov}(f_t, p_t)) = 0 \quad (35)$$

Desta resulta que a posição ótima em contratos futuros é:

$$F_{t-1} = \frac{E(f_t) - f_{t-1}}{[\lambda \text{var}(f_t)]} - Q_{t-1} \frac{\text{cov}(f_t, p_t)}{\text{var}(f_t)} \quad (36)$$

Este modelo produz uma razão de *hedge* destinada a maximizar o lucro de um agente com aversão absoluta ao risco crescente. O primeiro termo do lado direito da equação (36), chamado especulativo, desaparece ao pressupor que o mercado futuro é não viesado ($E(f_t) = f_{t-1}$)⁵ e/ou que existe, por parte dos agentes do mercado, aversão infinita ao risco ($\lambda \rightarrow \infty$). O modelo, sob tais pressuposições, é reduzido a uma expressão como:

$$h_{t-1} = \frac{F_{t-1}}{Q_{t-1}} = \frac{\text{cov}(f_t, p_t)}{\text{var}(f_t)} = \frac{\rho_{f,p} \cdot \sigma_p}{\sigma_f} \quad (37)$$

onde $\rho_{f,p}$ é o coeficiente de correlação e onde σ_p e σ_f são os desvios padrões dos preços futuros e à vista.

Aqui, a regra ótima de decisão prescreve o número de contratos futuros relativos à posição no mercado físico de maneira equivalente à feita pela regra de variância mínima. Toda informação pertinente para estimar a razão ótima nesse caso resume-se aos parâmetros de variância e covariância não condicionais dos preços futuros e à vista, o que é feito em muitos trabalhos através de técnicas de regressão simples.

⁵ Esta propriedade é conhecida como *martingale*.

Para ilustrar os resultados obtidos com esta abordagem é possível construir um gráfico que representa o conjunto de combinações entre o valor esperado e a variância do ganho obtido com o *hedge*. Note-se que a correlação e as variâncias dos preços determinam o formato das curvas, sendo que o extremo à direita dessas tende a se aproximar do eixo vertical quando a correlação entre os preços se aproxima da unidade. No caso de correlação unitária, como aparece na linha cheia da Figura 1, é possível eliminar todo o risco de ganhos ou perdas com uma posição *hedgeada* se for escolhida uma razão igual à σ_p / σ_f , que corresponderia à um *hedge* perfeito se o ativo objeto dos contratos futuros fosse o mesmo que se está mantendo no mercado físico.

Quando os preços têm variâncias e covariâncias conhecidas com certeza, cria-se uma curva semelhante à mostrada na Figura 2, cujo ramo superior ao ponto de desvio padrão mínimo constitui o que se chama **fronteira eficiente**. Sobre ela os agentes fazem suas escolhas de portfólios que fornecem uma combinação de risco e retorno de acordo com o seu grau de aversão ao risco. Todos os pontos abaixo desta fronteira podem ser substituídos por outros sobre esta, que oferecem um ganho esperado maior mas com a mesma variância, definindo assim uma região ineficiente.

Aqui, cada ponto do gráfico associa-se a uma razão de *hedge* específica, sendo três desses pontos muito interessantes: um ligado à posição desprotegida(*), outro ao *hedge* ingênuo(+) e outro ao *hedge* de variância mínima(O). Este resultado implica que as escolhas por posições não protegidas ou ingênuas são associadas a indivíduos que ou possuem uma baixa aversão ao risco ou esperam obter lucros expressivos com operações com os contratos futuros. Contudo, os parâmetros de variância e covariância dos preços que surgem nesses modelos requerem algum modelo de equilíbrio (ou desequilíbrio) para a determinação dos mesmos, como ressaltam Myers & Thompson (1989).

Na sua essência, a formulação supõe que os momentos condicionais e não condicionais são iguais, o que é muito improvável. Para superar tal dificuldade, nos trabalhos de Myers & Thompson (1989), Baillie & Myers (1991), Kroner & Sultan(1993), Park & Switzer(1996) e Septhon(1996), foi considerado que as informações alteram a distribuição conjunta dos preços futuros e à vista ao longo do tempo, o que provoca mudanças nas variâncias e covariâncias condicionais. O lucro esperado passa também a depender deste conjunto de informações I_{t-1} disponível no

momento da tomada de decisão, o que altera o problema da maneira mostrada na equação (33):

$$\max \left\{ E(\pi_t | I_{t-1}) - \left(\frac{\lambda}{2} \right) \text{var}(\pi_t | I_{t-1}) \right\} \quad (38)$$

Análogo ao que foi feito para o problema anterior, deriva-se a seguinte regra de decisão:

$$F_{t-1} = \frac{E(f_t | I_{t-1}) - f_{t-1}}{[\lambda \text{var}(f_t | I_{t-1})]} - Q_{t-1} \frac{\text{cov}(f_t, p_t | I_{t-1})}{\text{var}(f_t | I_{t-1})} \quad (39)$$

Supondo que o mercado de futuros é não tendencioso ($E(f_t | I_{t-1}) = f_{t-1}$) e/ou que existe aversão infinita ao risco ($\lambda \rightarrow \infty$) chega-se à expressão:

$$h_{t-1}^* = \frac{F_{t-1}}{Q_{t-1}} = \frac{\text{cov}(f_t, p_t | I_{t-1})}{\text{var}(f_t | I_{t-1})} \quad (40)$$

Para modelar tais funções condicionais de variância e covariância, alguns modelos serão apresentados no capítulo seguinte.

Abordagem Dinâmica

Prossegue aqui a derivação de um modelo dinâmico para estimar a razão de *hedge* que maximiza a função de utilidade esperada proposto por Myers & Hanson (1996). Como vantagens deste sobre outros modelos, os autores enumeram:

1) o modelo é desenvolvido para intervalos discretos de tempo, evitando problemas de aproximações e pouco realismo, dada a impossibilidade de os *hedgers*

atuarem continuamente no mercado, como acontece nos modelos de Ho (1984), Stulz(1984), Duffie & Jackson(1990);

2) permite-se que haja risco de base, ao contrário do modelo de Anderson & Danthine (1983);

3) não se recorre a hipóteses pouco realistas como utilidade exponencial negativa, que implica aversão absoluta ao risco constante, e preços normalmente distribuídos, que em geral não se verifica para *commodities* (como o fazem Anderson & Danthine, 1983; Karp, 1987; Martinez & Zering, 1992; Vukina & Anderson, 1993);

4) baseia-se no critério de maximização da utilidade esperada e não na minimização da variância, como fazem Mathews e Holthausen (1991), Howard & D'Antonio (1991), Lence et al. (1993).

O modelo assim construído é mais geral em alguns pontos, mas os autores também explicam que é preciso assumir que os preços futuros são não viesados e que a posição no mercado físico é não estocástica, o que impõe algum sacrifício de realismo. O resultado obtido com o modelo é uma extensão do resultado encontrado no modelo estático sob essas pressuposições, o que o torna bastante simples se comparado aos de outros autores.

Considere que um agente irá manter uma determinada posição no mercado físico durante T períodos, e que o *hedge* pode ser rolado quando necessário. As posições nos mercados de futuros serão ajustadas ao final de cada instante de decisão adequadas às informações disponíveis no momento.

A riqueza final do *hedger* é então dada por:

$$W_T = (1 + r)[W_{T-1} - c_{T-1}(Q_{T-1})] + p_T Q_{T-1} + (f_T - f_{T-1})F_{T-1} \quad (41a)$$

$$W_t = (1 + r)[W_{t-1} - c_{t-1}(Q_{t-1})] + (f_t - f_{t-1})F_{t-1}; 2 \leq t < T \quad (41b)$$

onde W_T é a riqueza no instante de encerramento do *hedge* e W_t é a riqueza no final do período t ; r é uma taxa de juros constante por período, que representa o custo de oportunidade do *hedger*; e $c_t(Q_{t-1})$ é o custo de manter a posição no mercado físico no período t .

O objetivo será então escolher uma seqüência de valores $\{F_t\}_{t=1}^{T-1}$, sujeito às restrições de riqueza acima para maximizar:

$$\max_{\{F_t\}_{t=1}^{T-1}} E(U(W_T) | I_{t-1}) \quad (42)$$

onde $U(\cdot)$ é uma função de utilidade do tipo von Neumann-Morgenstern crescente e estritamente côncava e $E(\cdot | I_{t-1})$ é a esperança condicional às informações disponíveis em $t=1$. As seguintes suposições são feitas:

- i) Os mercados futuros são não-viesados, seguindo um processo do tipo $f_t = f_{t-1} + e_t$, onde e_t é um choque que não pode ser previsto;
- ii) As expectativas do preço no mercado físico são dadas por $E(p_T | I_t) = E(p_T | I_{t-1}) + v_t$;
- iii) As inovações nos preços futuros e a expectativa do preço final no mercado físico estão relacionadas linearmente de acordo com $v_t = \delta_t e_t + \varepsilon_t$, onde ε_t é um choque aleatório imprevisível de média zero e que é independente de e_t ; e δ_t é um parâmetro que pode variar ao longo do tempo.

Para o último período, tem-se como problema $\max_{F_{T-1}} E(U(W_T) | I_{T-1})$, sujeito à restrição imposta pela eq. (41a). A condição de primeira ordem necessária para um máximo é dada por:

$$E[U'(W_T) e_t | I_{T-1}] = 0 \quad (43)$$

Se e_t é independente de W_t , para otimizar a função basta encontrar um valor de F_{T-1} que torna essas variáveis independentes, pois com isto pode-se decompor a expressão acima como:

$$E[U'(W_T) | I_{T-1}] E(e_t | I_{T-1}) = 0 \quad (44)$$

o que é imediatamente satisfeito pela suposição de que os preços futuros são não viesados. Com base nos pressupostos de (i) a (iii), a expressão da riqueza final pode ser escrita como:

$$W_t = (1 + r)[W_{T-1} - c_{T-1}(Q_{t-1})] + [E(p_T | I_{T-1}) + \delta_T e_T + \varepsilon_T] Q_{t-1} + e_T F_{T-1} \quad (45)$$

Deixando $-F_{T-1} = \delta_T Q_{t-1}$, a expressão acima torna-se:

$$W_t = (1 + r)[W_{T-1} - c_{T-1}(Q_{t-1})] + [E(p_T | I_{T-1}) + \varepsilon_T] Q_{t-1} \quad (46)$$

Este resultado torna a riqueza independente do movimento dos preços futuros e a razão de *hedge* derivada, $h_{t-1} = \delta_T = -F_{T-1}/Q_{t-1}$ é equivalente à dos modelos estáticos de variância mínima. Este resultado destaca a importância da minimização de risco para um *hedger* partindo de uma função de utilidade genérica, ao invés da forma linear na média e na variância como a utilizada na derivação do modelo estático desta seção. Este é um resultado obtido por Benningan et al. (1984), que implica que em mercados eficientes o

estímulo dado aos *traders* para transacionar com futuros é somente o interesse pela redução do risco de sua função de riqueza, pelos modelos de utilidade esperada.

As suposições (i) e (ii) permitem que a riqueza final seja expressa como uma combinação linear entre as inovações dos preços futuros correntes e dos valores correntes e futuros dos choques na base. Estes últimos são valores independentes que não podem ser *hedgeados*. A regra ótima é aquela que elimina a influência das inovações nos preços futuros correntes na riqueza final, portanto a de variância mínima.

A estratégia dinâmica é construída recuando-se no tempo sucessivamente, através da técnica *backward induction*, análogo ao que foi feito na seção anterior. Como demonstrado pelos autores (Myers & Hanson, 1996, p. 20), chega-se à seguinte seqüência de regras ótimas como resultado:

$$-F_{t-1} = (1+r)^{t-T} \delta_t Q_{t-1}; 2 \leq t \leq T \quad (47)$$

Para períodos que antecedem o período final, a estratégia dinâmica difere da estática no fator de desconto $(1+r)^{t-T}$, que indica que os lucros ou perdas com as posições são calculados a cada período, mas não são realizados até o instante final. A covariância difere também em relação ao modelo estático porque ela ocorre entre as inovações dos preços futuros e as inovações nas expectativas do preço no mercado físico. Isto dificulta um pouco a estimação porque requer um modelo para prever os preços no mercado físico.

4 – MODELOS ECONOMÉTRICOS

Na literatura econômica existe uma aparente dificuldade de se definir um modelo estrutural para a representação do processo gerador de séries de momentos condicionais de ordem superior a um, como destacam Bollerslev et al. (1994). Em função desta deficiência e do fato dos momentos de segunda ordem serem extremamente importantes para a construção de modelos econômicos e para a tomada de decisão sob condições de incerteza, alguns modelos estatísticos para a representação de processos estocásticos para essas variáveis tornaram-se amplamente empregados. Um desses modelos é o ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedastic*), que inspirou uma série de autores na criação e aplicação de outras classes de modelos de heterocedasticidade condicional para séries econômicas.

Merece ser destacado que vários tipos de modelos de heterocedasticidade condicional estão disponíveis para aplicação em trabalhos empíricos. A escolha do tipo de modelo mais adequado para a representação de um processo específico deve ser feita considerando as características dos dados coletados, conhecidas como fatos estilizados. Bollerslev et al. (1994) destacam que para séries de retornos geralmente se observa:

- 1) Distribuições de probabilidades que tendem a ser leptocúrticas;
- 2) Conglomerados de volatilidade, que refletem períodos alternantes de alta e de baixa oscilação das séries;
- 3) Mudanças nos preços de ações tendem a estar negativamente relacionadas com mudanças na volatilidade (*leverage effects*);

- 4) As informações se acumulam mais vagarosamente quando os mercados estão fechados do que quando estão abertos, o que faz com que a variância não se altere tanto quanto seria de se esperar caso as informações fossem processadas a uma taxa constante ao longo do tempo;
- 5) Anúncios de informações importantes estão relacionados com alta volatilidade;
- 6) Para moedas e índices de ações existe uma relação inversa entre volatilidade e correlação serial;
- 7) Existe frequentemente um movimento conjunto de séries de volatilidade;
- 8) A volatilidade pode se relacionar com outras variáveis econômicas, como as taxas de juros e a produção.

Antes de apresentar e discutir alguns modelos, uma distinção clara deve ser feita entre os momentos condicionais e os não condicionais. As distribuições de probabilidades de séries de tempo e, por consequência, seus momentos podem estar condicionados ao conjunto de informações disponíveis em um dado instante. Formalmente, dadas as funções densidade de probabilidade não condicionais e condicionais, $\phi(x)$ e $\phi(x|I)$ respectivamente, de uma variável x às informações I disponíveis, para variáveis contínuas, sabe-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x|I) dx = 1. \quad (48)$$

Os momentos de primeira ordem para distribuições condicionais e não condicionais são respectivamente:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \phi(x) dx \text{ e } E(x|I) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \phi(x|I) dx. \quad (49)$$

Os momentos de segunda ordem, centrados em torno do valor esperado, são respectivamente:

$$\text{var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 \cdot \phi(x) dx \quad \text{e} \quad \text{var}(x|I) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x|I))^2 \cdot \phi(x|I) dx. \quad (50)$$

Os momentos de ordem r , centrados em torno da média, são:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^r \cdot \phi(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x|I))^r \phi(x|I) dx. \quad (51)$$

4.1 – Modelos univariados

Suponha um processo estocástico $\{u_t\}$, com média zero e variância não condicional constante, que represente as inovações num modelo para um processo estocástico $\{x_t\}$, cujo valor esperado está condicionado ao conjunto de informações anteriormente disponíveis I_{t-1} . Portanto, segundo Bollerslev et al. (1994):

$$u_t \equiv x_t - E(x_t | I_{t-1}). \quad (52)$$

Suponha agora que existe um processo $\{v_t\}$ i.i.d., com média zero e variância unitária, que corresponde à inovação u_t padronizada pela sua variância condicional σ_t^2 , isto é:

$$v_t = \frac{u_t}{\sqrt{\sigma_t^2}}. \quad (53)$$

Para representar o processo que gera os valores condicionais da variância acima, pode-se utilizar uma expressão que representa uma projeção linear desta em relação aos

valores defasados de u_t^2 . Este modelo, que foi introduzido por Engle⁶, é chamado de um modelo ARCH(m), que formalmente pode ser escrito como (Hamilton, 1994):

$$\sigma_t^2 = E(u_t^2 | u_{t-1}^2, u_{t-2}^2, \dots) = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2. \quad (54)$$

Satisfeitas algumas condições de estacionariedade (raízes de $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_m z^m = 0$ fora do círculo unitário) e positividade ($\zeta > 0$ e $\alpha_j \geq 0$) da expressão, a variância não condicional σ^2 do processo u_t é dada por⁷:

$$\sigma^2 = E(u_t^2) = \frac{\zeta}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_m}. \quad (55)$$

Um dos problemas encontrados no modelo acima é o excesso de parâmetros requeridos em muitas de suas aplicações para processos de longa memória. Para superar tal dificuldade, considere um caso extremo de um processo ARCH relacionando a variância condicional com os valores de u_t^2 em um número de defasagens infinito, isto é:

$$\sigma_t^2 = \zeta + \psi(L)u_t^2, \quad (56)$$

onde

$$\psi(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j L^j = \frac{\alpha(L)}{1 - \delta(L)} = \frac{\alpha_1 L^1 + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_m L^m}{1 - \delta_1 L^1 - \delta_2 L^2 - \dots - \delta_r L^r}, \quad (57)$$

⁶ ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, **50**: 987-1008, 1982.

⁷ Note que o símbolo da variância condicional difere do símbolo da variância não condicional pela exclusão do sub-índice t nesta última

cujas raízes de $1 - \delta(L) = 0$ estão supostamente fora do círculo unitário e onde m e r são valores finitos. Neste sentido, se σ_t^2 for multiplicado por $1 - \delta(L)$, o modelo ARCH acima pode ser parametrizado numa estrutura mais generalizada e parcimoniosa chamada de modelo GARCH(r, m) (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity model*) proposto por Bollerslev (1986) e expresso como:

$$[1 - \delta(L)]\sigma_t^2 = [1 - \delta(L)]\kappa + \alpha(L)u_t^2, \quad (58)$$

ou

$$E(u_t^2 | I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \kappa + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \delta_r \sigma_{t-r}^2 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2, \quad (59)$$

para $\kappa \equiv [1 - \delta_1 - \delta_2 - \dots - \delta_r]\kappa$.

Como ressalta Bollerslev (1986), os modelos GARCH podem ser mais facilmente implementados quando descritos como na eq. (59) forma. No entanto, uma alternativa de parametrização existe e é útil na interpretação desses modelos como um processo auto-regressivo e de médias móveis em u_t^2 . O autor utiliza esta especificação para mostrar que para haver estacionariedade no processo, com $E(u_t) = 0$,

$cov(u_i, u_j) = 0$ se $i \neq j$ e $var(u_t) = \kappa \left(1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^r \delta_j \right)^{-1}$, é necessário que:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^m \delta_j < 1. \quad (60)$$

Os modelos ARCH(m) são úteis para representar a leptocurtose (caudas pesadas) característica de algumas distribuições de probabilidades de variáveis econômicas. Os modelos GARCH(r, m) são no entanto uma formulação parcimoniosa que conserva esta propriedade, como Bollerslev (1986) deixou claro para um modelo GARCH(1,1). O

autor notou que neste caso o coeficiente de curtose é por suposição maior do que zero e dado por:

$$k = \left(E(u_t^4) - 3E(u_t^2)^2 \right) E(u_t^2)^{-2} = 6\alpha_t^2 (1 - \delta_t^2 - 2\alpha_t\delta_t - 3\alpha_t^2)^{-1} \quad (61)$$

Os modelos GARCH podem também representar outros fatos estilizados de séries econômicas, como os conglomerados de volatilidade e os períodos de ausência de negociação e anúncios previsíveis de algumas informações, como ressaltam Bollerslev et al. (1994).

Considerando aplicações com dados em frequência elevada, observou-se muitas vezes que $\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^m \delta_j \equiv 1$, caso para o qual Engle & Bollerslev (1986) propuseram um modelo chamado de *integrated* GARCH, ou IGARCH. A presença de raiz unitária torna infinita a variância não condicional, ao contrário do que é estabelecido para um processo estacionário. Os efeitos dos choques na variância condicional serão assim persistentes ao longo do tempo e importantes para as previsões de seus valores.

Os conglomerados de volatilidade também foram tratados em modelos com o desvio padrão condicional dependente dos valores absolutos defasados dos resíduos:

$$\sigma_t = \zeta + \sum_{i=1}^m \alpha_i |u_{t-i}| + \sum_{j=1}^r \delta_j \sigma_{t-j} \quad (62)$$

Um caso do geral deste modelo é o ARCH não linear – NARCH:

$$\sigma_t^\gamma = \zeta + \sum_{i=1}^m \alpha_i |u_{t-i}|^\gamma + \sum_{j=1}^r \delta_j \sigma_{t-j}^\gamma \quad (63)$$

Este por sua vez é um caso especial do modelo:

$$\sigma_u^\gamma = \zeta + \sum_{i=1}^m \alpha_i |u_{t-i} - \eta|^\gamma + \sum_{j=1}^r \delta_j \sigma_{t-j}^\gamma \quad (64)$$

onde η é diferente de zero. Se $\gamma = 2$, o modelo na eq. (64) equivale ao *quadratic* ARCH (QARCH), que introduz impactos assimétricos para valores positivos ou negativos dos termos de erro u_{t-i} . Modelos para impactos assimétricos mais simples são os *asymmetric* ARCH – AARCH, e modelos mais complexos são os chamados de *threshold* ARCH – TARCH. O fenômeno que ficou conhecido como “*leverage effect*” foi também explorado em modelos chamados de *exponential* GARCH – EGARCH.

Tomando a heterocedasticidade condicional como sendo resultado de componentes estruturais não observados, modelos *structural* ARCH (STARCH) foram propostos e estimados numa representação de espaço de estado baseada no filtro de Kalman.

Uma outra classe de modelos é a composta pelos *switching* ARCH (SWARCH), que é descrita como um caso onde diferentes processos ARCH alternam-se no tempo de acordo com estados da natureza, representados por uma cadeia de Markov.

Identificação dos Modelos

Os procedimentos para identificar os modelos não são suficientes para determinar com exatidão o tipo de modelo ARCH que deve ser especificado. É possível apenas estabelecer características como a relação temporal na variância condicional e a presença de efeitos assimétricos.

Dada sua semelhança com alguns modelos para a média condicional, alguns dos métodos para a identificação de modelos ARMA são também empregados para os

modelos GARCH. Em particular, podem ser feitos testes de autocorrelação e autocorrelação parcial sobre a série u_t^2 para captar a presença de heterocedasticidade, embora a interpretação dos resultados deva ser feita considerando que os termos autoregressivos estão ligados à função de autocorrelação e os termos de médias móveis à função de autocorrelação parcial.

Também são bastante difundidos testes como o de Ljung-Box e o teste dos multiplicadores de Lagrange para captar a presença de efeitos GARCH. Esses últimos são feitos através de um teste χ^2 para a variável TR^2 , onde T é o número de observações e R^2 é o coeficiente que indica o grau de ajustamento para o seguinte modelo:

$$u_t^2 = c + u_{t-1}^2 + u_{t-2}^2 + \dots + u_{t-m}^2 + \varepsilon_t \quad (65)$$

O teste é feito sob a hipótese nula de que a variância condicional é constante. Podem ser úteis alguns critérios de validação dos modelos com base em funções de erro, como o erro quadrático médio ou o desvio absoluto médio. Por fim deve-se lembrar que especificações incorretas das equações da média podem levar à identificação de efeitos ARCH inapropriados.

Estimação

A estimação dos modelos envolve um método de máxima verossimilhança. Pressupondo que a série seja normalmente distribuída, pretende-se encontrar os parâmetros que ajustem melhor a seguinte expressão aos dados:

$$L(\Theta; \sigma) = \prod_{t=\mu+1}^T \frac{1}{(2\pi\sigma_t^2)} \exp\left\{-\frac{u_t^2}{2\sigma_t^2}\right\}, \quad (66)$$

onde Θ é o vetor de parâmetros da média

σ é o vetor de parâmetros da variância

$$\mu = \text{Max}[r, m]$$

Também é explorada na literatura uma função de verossimilhança baseada na distribuição *t-student*:

$$L(\Theta; \sigma) = \prod_{t=\mu}^T \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\nu-2)\pi\sigma_t^2}} \left(1 + \frac{u_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \right], \quad (67)$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama e $\nu > 2$.

O processo de maximização da função acima envolve um procedimento iterativo, sendo um dos mais comuns o de Berndt, Hall, Hall, Hausman (1974) – BHHH⁸.

4.2 - Modelos garch multivariados - MGARCH

As séries de variâncias e covariâncias podem estar temporalmente relacionadas, abrindo espaço para a representação de modelos ARCH em uma estrutura multivariada. Como definem Bollerslev et al. (1994), um vetor $N \times 1$ de um processo estocástico u_t segue um processo ARCH multivariado se $E(u_t | I_{t-1}) = 0$, mas a matriz de variância e covariância condicional, $E(u_t u_t' | I_{t-1}) = \Omega_t$, depende não trivialmente do passado do processo. Interessa neste estudo a implementação desses modelos em representações bivariadas, sendo uma das mais simples aquela que considera a correlação condicional entre as inovações constante, com a matriz de variâncias e covariâncias dada por:

⁸ BERNDT, E. K.; HALL, H. B.; HALL, R. E., and HAUSMAN, J. A. Estimation and inference in nonlinear structural models. *Annals of Economic and Social Measurement*, v.4, p. 653-66, 1974.

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t} \end{bmatrix} \quad (68)$$

As variâncias podem ser especificadas como com modelos GARCH(r,m) tais como:

$$\sigma_{1,t}^2 = \kappa_1 + \sum_{i=1}^m \alpha_{1,i} u_{1,t-i}^2 + \sum_{j=1}^r \delta_{1,j} \sigma_{1,t-j}^2 \quad (69)$$

$$\sigma_{2,t}^2 = \kappa_2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{2,i} u_{2,t-i}^2 + \sum_{j=1}^r \delta_{2,j} \sigma_{2,t-j}^2 \quad (70)$$

Bollerslev et al. (1988) propuseram uma parametrização positiva definida que numa formulação bivariada Baillie & Myers (1991) expressaram como:

$$\Omega_t = C'C + A'u_{t-1}u'_{t-1}A + B'\Omega_{t-1}B \quad (71)$$

sendo A e B matrizes de parâmetros 2×2 e C uma matriz de parâmetros 2×2 e simétrica.

Pode-se também especificar um modelo bivariado com uma terceira parametrização que se encontra no capítulo seguinte, a ser implementada neste trabalho. Outros modelos multivariados podem ser especificados, como modelos EGARCH que representam *leverage effects* (ver Bollerslev et al., 1994), muito embora, como destacam os autores, não está clara a superioridade empírica ou teórica de qualquer um deles.

Estimação

O processo de inferência não difere conceitualmente dos modelos univariados. A função de log verossimilhança para uma distribuição condicional normal multivariada, para a qual se aplicam os mesmos métodos de maximização dos modelos univariados, é definida como:

$$L(u_T, u_{T-1}, \dots, u_1; \psi) = -0,5 \left[TN \ln(2\pi) + \sum_{t=1, T} (\ln |\Omega_t| + u_t' \Omega_t^{-1} u_t) \right] \quad (72)$$

4.3 - Testes de co-integração e raiz unitária

Diversos estudos têm utilizado a abordagem de co-integração na análise de relações entre os preços no mercado futuro e físico (Bessler & Covey, 1991; Fortenbery & Zapata, 1993; Lu & Leuthold, 1994; Geppert, 1995 ; Koutmos & Tucker, 1996, Lien, 1996 e outros). O conceito de co-integração está relacionado à existência de uma relação de equilíbrio no longo prazo entre variáveis integradas de mesma ordem, isto é, entre variáveis que exibem tendência estocástica e que precisam do mesmo número de diferenças para se tornarem estacionárias.

A presença de raiz unitária nos preços dos mercados físico e futuro pode ser eventualmente encontrada, o que requer a especificação dos modelos nas diferenças e a realização dos testes de co-integração entre as séries para constatar se há tendência estocástica comum. Se for verificada a co-integração, deve-se contornar o problema causado pela perda de informações de longo prazo com um mecanismo de correção de erro⁴. Ao se relacionar variáveis supondo que o processo é estacionário quando ele não o

⁴ Modelos de correção de erro são discutidos no Anexo I

é, tem-se sérias consequências para as propriedades dos estimadores e dos testes estatísticos, como demonstrado na literatura sobre “regressões espúrias”.

A importância de se incorporar a relação de co-integração em modelos estatísticos para séries de preços dos mercados físico e futuro é bastante discutida. A especificação de modelos de séries temporais em diferenças, para estimar razão ótima de *hedge*, pode conduzir a estimativas inconsistentes se forem ignoradas possíveis relações de co-integração entre os preços dos mercados futuro e físico, ou seja, a razão de *hedge* pode mudar quando o termo de correção de erro é omitido do modelo estatístico (Lien, 1996 e Qian & Duncan, 1994). Para Geppert (1995) as propriedades de integração e co-integração têm implicações no comportamento da razão ótima de *hedge* e na efetividade do *hedge*⁵. Lu & Leuthold (1994) apontam que, no entanto, a co-integração entre preços nos mercados físico e futuro não tem sido observada com frequência e que em alguns casos em que foi verificada, a informação de longo prazo, contida no termo de correção de erro, contribuiu pouco para a efetividade do *hedge* ou melhorou pouco o desempenho dos modelos utilizados para a análise de relações entre preços nos mercados físico e futuro. Segundo Geppert (1995), sob certas circunstâncias deve-se esperar que exista co-integração entre os preços dos mercados físico e futuro. Os argumentos teóricos que o autor apresenta para a existência de co-integração, nesse caso, são baseados na idéia de eficiência de mercado, na convergência dos preços e na estacionariedade dos custos de carregamento.

⁵ O conceito de razão de *hedge* associa-se ao de efetividade do *hedge*, que é definido como a proporção de redução de risco gerada por uma estratégia. Formalmente, a efetividade equivale à eq. (79) do capítulo seguinte.

5 - PROCEDIMENTOS

No cenário desenvolvido para o presente estudo considera-se que as operações com contratos futuros são os únicos mecanismos utilizados para o *hedge*. Essa suposição é compatível com o atual desenvolvimento dos mercados futuros no Brasil, que impossibilitam, muitas vezes, a realização de operações mais elaboradas, como as casadas - futuros e opções. Pressupõe-se que a operação de *hedge* envolve apenas um produto, ou seja, não são considerados no estudo os modelos multiprodutos. Considera-se, ainda, que a posição à vista é conhecida, só existindo incerteza em relação a preços.

Se os momentos condicionais e não condicionais são iguais, a razão de *hedge* é constante no tempo. No ajustamento desses modelos serão feitas regressões simples dos retornos relativos dos preços, sendo consideradas as propriedades de integração e co-integração das séries. Nos casos em que for constatado que a variância condicional dos preços difere da não condicional, pelos testes de Ljung-Box e multiplicadores de Lagrange, serão ajustados modelos GARCH que levam também em conta as propriedades de integração e co-integração das séries.

As séries de preços foram transformadas em logaritmos naturais, da mesma maneira que fizeram Baillie & Myers (1991), Kroner & Sultan(1993) e Park & Switzer (1995). Para um processo bivariado dos preços dos mercados futuros e físico com correção de erro, tais modelos podem ser descritos como:

$$\Delta \ln p_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\ln p_{t-1} - \gamma \ln f_{t-1}) + u_{pt} \quad (73)$$

$$\Delta \ln f_t = \beta_0 + \beta_1 (\ln p_{t-1} - \gamma \ln f_{t-1}) + u_{ft} \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} u_{pt} \\ u_{ft} \end{bmatrix} \left| \quad I_{t-1} \approx N(0, \Omega_t) \right. \quad (75)$$

As variâncias condicionais dos preços à vista σ_{pt}^2 e futuro σ_{ft}^2 e a covariância entre eles $\sigma_{ft,pt}$, serão estimados através das equações:

$$\sigma_{p,t}^2 = c_p + a_p u_{p,t-1}^2 + b_p \sigma_{p,t-1}^2 \quad (76)$$

$$\sigma_{f,t}^2 = c_f + a_f u_{f,t-1}^2 + b_f \sigma_{f,t-1}^2 \quad (77)$$

$$\sigma_{ft,pt} = c_{fp} + a_{fp} u_{f,t-1} u_{p,t-1} + b_{fp} \sigma_{ft,pt,t-1} \quad (78)$$

As estatísticas desenvolvidas por Dickey & Fuller (1976, 1989 e 1981) serão usadas para a análise de integração e os métodos desenvolvidos por Engle & Granger (1987) serão usados para testar co-integração.

A comparação do desempenho de modelos para estimar a razão ótima de *hedge* pode ser feita através da variância dos retornos $\sigma^2(\ln p_t - h_t^* \ln f_t)$, com h_t^* sendo a razão ótima indicada com o uso de cada metodologia (Park & Switzer, 1995). É possível construir uma medida que compare os resultados dos vários modelos com os obtidos em uma estratégia específica:

$$R = 1 - \frac{\sigma_h^2}{\sigma_i^2} \quad (79)$$

onde o denominador da segunda parcela do lado direito é a variância do ganho obtido com uma estratégia de referência, por exemplo a ingênua, e o numerador é a variância

dos ganhos com as demais estratégias, por exemplo, regressão simples, múltipla ou GARCH.

Ao implementar uma estratégia de *hedge* ajustada continuamente, como podem sugerir os modelos GARCH, os custos de transação (CT) seriam bastante elevados. Como explicam Kroner & Sultan (1993), em termos práticos tem-se que os retornos seriam:

$$\pi^*_{t+1} = p_{t+1} + h_t^* f_{t+1} - CT \quad (80)$$

$$\pi_{t+1} = p_{t+1} + h_t f_{t+1} \quad (81)$$

A equação (80) representa o caso onde ocorre a modificação da razão de *hedge* no instante t , conforme o valor indicado pelo modelo de heterocedasticidade condicional, e a (81) indica o caso onde não há modificação, para o qual a razão de *hedge* do instante t permanece igual à do momento anterior.

Pode-se supor que um agente possui uma função utilidade esperada para o ganho da posição sem alteração igual a $EU(\pi_{t+1}) = E(\pi_{t+1}) - \lambda var(\pi_{t+1})$, escrevendo-se para o caso onde ocorre a alteração uma função igual a $EU(\pi^*_{t+1}) = E(\pi^*_{t+1}) - \lambda var(\pi^*_{t+1})$. Um agente modificaria sua posição se a elevação de sua utilidade esperada compensasse a perda de utilidade provocada por esses custos de transação (CT), garantindo um resultado esperado ao menos tão bom para o caso de alteração da razão de *hedge* quanto o que se obtém com a não alteração. Assim, como critério, é possível estabelecer que a posição será alterada se $EU(\pi^*_{t+1}) > EU(\pi_{t+1})$. Supondo que os retornos esperados dos portfólio $E(\pi_{t+1})$ e $E(\pi^*_{t+1})$ são iguais a zero e CT respectivamente, têm-se que a posição será alterada se $CT < \lambda[var(\pi_{t+1}) - var(\pi^*_{t+1})]$.

6 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os dados utilizados neste estudo foram os indicadores de preços ESALQ/BM&F e os preços dos contratos futuros negociados na Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F), ambos com frequência diária e convertidos para valores baseados no dólar americano. Os cálculos foram feitos para quatro *commodities*, quais sejam: açúcar cristal (01/07/1997 a 17/01/2000); algodão em pluma (28/04/1997 a 17/01/2000); boi gordo (02/01/97 a 17/01/00); e café arábica (02/09/1996 a 26/10/1998). As séries de preços futuros foram construídas encadeando-se os preços de contratos com os próximos vencimentos, mudando da sequência de preços de um contrato para a sequência do contrato subsequente sempre que o mês do vencimento do primeiro fosse alcançado. Com este procedimento evitou-se os dados dos meses de vencimento, a fim de que o processo de estimação se concentrasse em períodos cuja relação entre os preços fosse menos conhecida. Isto porque é esperado que os preços do mercado à vista e futuro converjam para o mesmo nível quando se está próximo do encerramento do contrato, devido à arbitragem, o que torna as operações de *hedge* sempre mais efetivas quando encerradas neste intervalo de tempo. Nos gráficos 9 a 12 no Anexo 2 são exibidos os preços nos meses de vencimentos, onde é possível observar essa relação com clareza.

Deve-se ressaltar que este procedimento de encadear contratos é arbitrário e passível de crítica, mas no entanto espera-se que seja coerente com o interesse de um *hedger* que planeja liquidar sua posição neste intervalo de tempo entre os vencimentos

dos contratos, muito embora a tenha aberto a qualquer momento anterior. Aplicou-se uma transformação dos preços em logaritmos, para em seguida diferenciá-los e gerar as séries de retornos relativos.

Foram feitos testes para autocorrelação das séries de retornos (Ljung-Box e de multiplicadores de Lagrange) que indicaram a presença de dependência temporal nos preços futuros das *commodities*, com exceção do café. Isto foi corroborado pelo grande número de termos auto-regressivos requeridos para a eliminação da autocorrelação nas séries de resíduos na realização dos testes de raiz unitária. Esses resultados contrariam a idéia de eficiência dos mercados no processamento das informações, como ressaltam Baillie & Myers (1993).

Para contornar o problema de autocorrelação nas séries de retornos, foram incluídos termos auto-regressivos nos modelos estimados com o código de programação apresentado no Anexo 3. Esse procedimento, no entanto, impossibilitou a estimação de modelos mais complexos e a obtenção de previsões fora da amostra, que serviriam de base para melhor representar o comportamento real dos *hedgers*.

Os testes de raiz unitária de Dickey e Fuller para os logaritmos das séries de preços são apresentados na tabela 1, podendo-se observar que todas as séries apresentaram uma raiz unitária, ao nível de significância de 5%. Nas primeiras diferenças essas séries tornam-se estacionárias.

Na tabela 2 são apresentados os testes de co-integração (Engle e Granger) entre as séries de preços dos mercados físico e de futuros das *commodities* analisadas. Para as séries de preços do açúcar e do café constatou-se uma relação de co-integração aos níveis de significância de 10 % e 1%, respectivamente, indicando que os preços dos mercados físico e de futuros têm seus caminhos no tempo possivelmente ligados por uma tendência estocástica comum. Para os preços do algodão e do boi tal relação entre os preços dos mercados físico e de futuros não se verificou, tomando o nível de

significância de até 10%. Para estimar os modelos, no entanto, considerou-se que a relação de co-integração pudesse estar presente mesmo nestes casos, utilizando os testes de razão de verossimilhança para verificar a relevância ou não da inclusão do termo de correção de erro nos modelos. Tais testes são apresentados nas tabelas 3 a 6 e indicam a importância da inclusão tanto dos componentes de variância condicional quanto dos termos de correção de erro nos modelos. Contudo, nos gráficos de 1 a 8 no Anexo 2, onde se apresentam os resultados dos modelos estimados para a determinação da razão de *hedge*, não apareceram diferenças expressivas entre as razões de *hedge* dos modelos convencionais e convencionais com co-integração, como poderia ser esperado.

Tabela 1 - Resultados dos testes de raiz unitária de Dickey e Fuller.

	AÇÚCAR	ALGODÃO	BOI	CAFÉ
INDICADORES				
1. Constante	1.06519	2.04770	2.55300	1.20423
2. Tendência	-	-1.73198	-1.78665	-2.50098 *
3. Y{1}	-	-2.07976	-2.57429	-1.00741
F	1.36382	2.49594	3.37211	3.30481
1. Constante	1.51274	1.35970	1.87845	0.57784
2. Y{1}	-	-1.40923	-1.88156	-0.59264
F	1.32222	1.65793	1.77044	0.20857
1. Y{1}	-	-1.21044	-0.11065	-0.28871
Defasagens	19	15	21	0
PREÇOS FUTUROS				
1. Constante	0.54503	2.3437	1.7600	1.40976
2. Tendência	0.00823	-	-	-2.04370
3. Y{1}	-0.72688	-	-	-1.27192
F	0.67880	2.80624	1.52945	2.45715
1. Constante	1.08052	0.7468	1.2386	0.84426
2. Y{1}	-1.16596	-	-	-0.85625
F	0.78451	1.76081	0.83761	0.38925
1. Y{1}	-0.63357	-0,8228	0.3752	-0.25643
Defasagens	1	0	5	0

OBS: (**) significativo entre 5% e 1%.

Tabela 2 - Resultados dos testes de co-integração de Engle e Granger.

	AÇÚCAR	ALGODÃO	BOI	CAFÉ
RES{1}	-2.37613	-3.86347 ***	-3.83849 ***	-3.48807 **
Defasagens	3	6	7	0

OBS: significativo (**) entre 10% e 5%; (*) entre 5% e 1%.

Tabela 3 - Testes de Razão de Verossimilhança - Açúcar.

Modelo GARCH em relação ao CONVENCIONAL	
$(\alpha_p = \alpha_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0 \text{ dado } \alpha_l = \beta_l = 0)$	
Chi-Squared(6)=	728.201034 com P = 0.00000000
Modelo CONV-CI em relação ao CONVENCIONAL	
$(\alpha_l = \beta_l = 0 \text{ dado } a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0)$	
Chi-Squared(2)=	15.866885 com P = 0.00035855
Modelo GARCH-CI em relação ao modelo GARCH	
$(\alpha_l = \beta_l = 0)$	
Chi-Squared(2)=	89.377077 com P = 0.00000000
Modelo GARCHI-CI em relação ao modelo CONV.-CI	
$(a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0)$	
Chi-Squared(6)=	801.711226 com P = 0.00000000

Tabela 4 - Testes de Razão de Verossimilhança - Algodão.

Modelo GARCH em relação ao CONVENCIONAL	
$(a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0 \text{ dado } \alpha_l = \beta_l = 0)$	
Chi-Squared(6)=	749.949842 com P = 0.00000000
Modelo CONV-CI em relação ao CONVENCIONAL	
$(\alpha_l = \beta_l = 0 \text{ dado } a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0)$	
Chi-Squared(2)=	12.358705 com P = 0.00207177
Modelo GARCH-CI em relação ao modelo GARCH	
$(\alpha_l = \beta_l = 0)$	
Chi-Squared(2)=	168.473748 com P = 0.00000000
Modelo GARCHI-CI em relação ao modelo CONV.-CI	
$(a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0)$	
Chi-Squared(6)=	906.064884 com P = 0.00000000

Tabela 5 - Testes de Razão de Verossimilhança - Boi gordo.

Modelo GARCH em relação ao CONVENCIONAL	
$(a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0 \text{ dado } \alpha_l = \beta_l = 0)$	
Chi-Squared(6)=	728.179453 com P = 0.00000000
Modelo CONV-CI em relação ao CONVENCIONAL	
$(\alpha_l = \beta_l = 0 \text{ dado } a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0)$	
Chi-Squared(2)=	15.911114 com P = 0.00035071
Modelo GARCH-CI em relação ao modelo GARCH	
$(\alpha_l = \beta_l = 0)$	
Chi-Squared(2)=	89.377077 com P = 0.00000000
Modelo GARCHI-CI em relação ao modelo CONV.-CI	
$(a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0)$	
Chi-Squared(6)=	801.645416 com P = 0.00000000

Tabela 6 - Testes de Razão de Verossimilhança - Café.

Modelo GARCH em relação ao CONVENCIONAL	
$(a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0 \text{ dado } \alpha_l = \beta_l = 0)$	
Chi-Squared(6)=	99.321789 com P = 0.00000000
Modelo CONV-CI em relação ao CONVENCIONAL	
$(\alpha_l = \beta_l = 0 \text{ dado } a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0)$	
Chi-Squared(2)=	29.623382 com P = 0.00000037
Modelo GARCH-CI em relação ao modelo GARCH	
$(\alpha_l = \beta_l = 0)$	
Chi-Squared(2)=	22.116492 com P = 0.00001576
Modelo GARCHI-CI em relação ao modelo CONV.-CI	
$(a_p = a_f = a_{fp} = b_p = b_f = b_{fp} = 0)$	
Chi-Squared(6)=	106.828678 com P = 0.00000000

Analisando as tabelas 7 a 9, que apresentam os resultados obtidos na estimação dos modelos GARCH e convencionais, verificou-se que os termos de correção de erro nos modelos mostraram-se mais significativos para as séries dos indicadores dos preços no mercado físico que para os preços nos mercados futuros. Os termos de variância condicional, no entanto, pareceram ser importantes para explicar a dinâmica em ambos os mercados.

Tabela 7 - Resultados dos modelos GARCH e convencional (com e sem termo de correção de erro – CI) para o Açúcar.

	<i>GARCH - CI</i>		<i>GARCH</i>		<i>CONVENCIONAL - CI</i>		<i>CONVENCIONAL</i>	
	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.
α_0	-0,001157	0,000163	-0,000101	0,000356	0,000003	0,000454	0,000005	0,000442
β_0	-0,000450	0,000461	0,000115	0,000363	-0,000005	0,000487	0,000002	0,000482
α_1	-0,051200	0,003167			-0,019200	0,009391		
β_1	0,008988	0,013300			0,023000	0,011400		
c_p	0,000000	0,000000	0,000003	0,000000	0,000138	0,000002	0,000139	0,000002
c_f	0,000030	0,000005	0,000030	0,000005	0,000164	0,000004	0,000166	0,000003
c_{fp}	0,000001	0,000001	0,000030	0,000066	0,000045	0,000004	0,000044	0,000003
a_p	0,154600	0,031400	0,078678	0,012231				
a_f	0,140000	0,036900	0,145451	0,036954				
a_{fp}	0,040600	0,024000	-0,005429	0,031596				
b_p	0,881800	0,019300	0,876115	0,016152				
b_f	0,707900	0,055100	0,700646	0,052906				
b_{fp}	0,903100	0,040700	-0,637563	3,578882				
Fç.Ver.	6168,3294		6123,6409		5767,4738		5759,5404	

Tabela 8 - Resultados dos modelos GARCH e convencional (com e sem termo de correção de erro – CI) para o Algodão.

	<i>GARCH – CI</i>		<i>GARCH</i>		<i>CONVENCIONAL – CI</i>		<i>CONVENCIONAL</i>	
	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.
α_0	-0,00108	0,000165	-0,001829	0,000261	-0,000536	0,0005300	-0,000552	0,000457
β_0	-0,00130	0,000202	-0,001131	0,000276	-0,000789	0,0005473	-0,000761	0,000540
α_1	-0,05410	0,004235			-0,012400	0,0053549		
β_1	0,028900	0,007499			0,026500	0,0124000		
c_p	0,000001	0,000000	0,000004	0,000001	0,0001338	0,0000024	0,000135	0,000002
c_f	0,000041	0,000003	0,000041	0,000004	0,0001363	0,0000020	0,000138	0,000002
c_{fp}	0,000001	0,000000	0,000007	0,000004	0,0000360	0,0000037	0,000036	0,000004
a_p	0,374900	0,066200	0,305100	0,069900				
a_f	0,841200	0,077000	0,716300	0,070900				
a_{fp}	0,095800	0,030500	0,261200	0,134500				
b_p	0,716000	0,039600	0,713700	0,047600				
b_f	0,253700	0,036700	0,295600	0,050600				
b_{fp}	0,831000	0,035300	0,193300	0,256700				
Fç.Ver	5722,133		5637,8968		5269,1013		5262,9219	

Tabela 9 - Resultados dos modelos GARCH e convencional (com e sem termo de correção de erro – CI) para o Boi gordo.

	<i>GARCH – CI</i>		<i>GARCH</i>		<i>CONVENCIONAL – CI</i>		<i>CONVENCIONAL</i>	
	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.
α_0	-0,00115	0,000163	-0,000101	0,000356	0,000014	0,000456	0,000016	0,000442
β_0	-0,00045	0,000461	0,000115	0,000363	0,000002	0,000490	0,000005	0,000481
α_1	-0,05120	0,003167			-0,019200	0,009442		
β_1	0,008988	0,013300			0,023500	0,011400		
c_p	0,000000	0,000000	0,000003	0,000000	0,000139	0,000002	0,000139	0,000002
c_f	0,000030	0,000005	0,000030	0,000005	0,000165	0,000004	0,000166	0,000003
c_{fp}	0,000001	0,000001	0,000030	0,000066	0,000045	0,000004	0,000044	0,000003
a_p	0,154600	0,031400	0,078678	0,012231				
a_f	0,140000	0,036900	0,145451	0,036954				
a_{fp}	0,040600	0,024000	-0,005429	0,031596				
b_p	0,881800	0,019300	0,876115	0,016152				
b_f	0,707900	0,055100	0,700646	0,052906				
b_{fp}	0,903100	0,040700	-0,637563	3,578882				
Fç.Ver	6168,329		6123,6409		5767,5067		5759,5512	

Tabela 10 - Resultados dos modelos GARCH e convencional (com e sem termo de correção de erro – CI) para o Café.

	<i>GARCH – CI</i>		<i>GARCH</i>		<i>CONVENCIONAL – CI</i>		<i>CONVENCIONAL</i>	
	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.	Coef.	Desv.Pad.
α_0	0,001233	0,000803	0,001725	0,000821	-0,000199	0,000961	-0,000134	0,000973
β_0	0,002315	0,000781	0,002646	0,000799	-0,000146	0,001252	-0,000103	0,001245
α_1	-0,047596	0,015015			-0,059389	0,019201		
β_1	-0,010132	0,015165			-0,013937	0,023127		
c_p	0,000328	0,000048	0,000348	0,000054	0,000465	0,000021	0,000483	0,000022
c_f	0,000347	0,000050	0,000284	0,000035	0,000625	0,000024	0,000630	0,000024
c_{fp}	0,000643	0,000056	0,000401	0,000389	0,000397	0,000020	0,000404	0,000021
a_p	0,169613	0,047054	0,181258	0,047820				
a_f	0,196693	0,036914	0,201229	0,046894				
a_{fp}	-0,044080	0,021227	-0,024372	0,038461				
b_p	0,169171	0,107803	0,127004	0,112206				
b_f	0,285998	0,077095	0,383748	0,065639				
b_{fp}	-0,622952	0,123745	-0,029743	1,018838				
Fç.Ver.	3642,139		3627,3278		3588,7252		3577,6669	

As diferenças entre os dois modelos condicionais parecem ser relativamente pequenas, favorecendo aquele que inclui o termo de correção de erro. Para fazer a análise da redução percentual da variância dos retornos em relação ao *hedge* ingênuo, apresentadas nas tabelas 11 a 14, foi utilizado apenas o último modelo, dado que a relação de co-integração gera apenas um pequeno diferencial nas razões de *hedge*, como é possível notar nos gráficos de 1 a 8 no anexo 2.

Se forem comparadas às demais, as estratégias com os modelos condicionais reduzem pouco a variância do retorno. Em alguns casos, as estratégias convencionais apresentaram uma redução maior que a condicional, o que ocorre principalmente quando são utilizadas previsões fora da amostra para as variâncias e covariâncias condicionais. Essas previsões são obtidas a um passo a partir da centésima observação anterior à observação final que se dispunha, reestimando os modelos a cada instante avançado no tempo. De qualquer maneira, são muito significativas as reduções nas variâncias dos retornos quando implementadas quaisquer das estratégias no lugar da ingênua, que parece ser inadequada para todos os casos.

Tabela 11 – Redução percentual da variância do retorno em relação ao *hedge* ingênuo para o caso do Açúcar

	dentro da amostra	fora da amostra –100 obs
GARCH-CI	0,436800	0,486750
CONV-CI	0,413140	0,517640
CONV.	0,413180	0,522200

Tabela 12 – Redução percentual da variância do retorno em relação ao *hedge* ingênuo para o caso do Boi gordo.

	dentro da amostra	fora da amostra –100 obs
GARCH-CI	0,436800	0,486750
CONV-CI	0,413120	0,517640
CONV.	0,413180	0,522200

Tabela 13 – Redução percentual da variância do retorno em relação ao *hedge* ingênuo para o caso do Algodão.

	dentro da amostra	fora da amostra –100 obs
GARCH-CI	0,428790	0,670730
CONV-CI	0,377500	0,668810
CONV.	0,377550	0,670900

Tabela 14 – Redução percentual da variância do retorno em relação ao *hedge* ingênuo para o caso do Café.

	dentro da amostra	fora da amostra –100 obs
GARCH-CI	0,212430	0,371320
CONV-CI	0,269410	0,378210
CONV.	0,269430	0,379280

Deve-se estudar a possibilidade da utilização dos modelos condicionais para rebalancear os portfólios de *hedge* durante a vigência dos contratos. Usando tal estratégia, e considerando como custos de transação os percentuais de 0,15%, 0,20% e 0,25% dos ganhos obtidos com as posições, para graus de aversão ao risco iguais a 3, 4 e 5, obtém-se os resultados apresentados nas tabelas 15 a 22 considerando os períodos fora

e dentro da amostra. Os graus de aversão ao risco foram definidos com base em estudos realizados para agentes do mercado americano (ver Kroner & Sultan, 1993, p. 545). Como não se encontrou estudos para o Brasil, utilizou-se aqueles valores como referência, mesmo sabendo que eles possam, em alguma magnitude, diferir dos verificados no Brasil.

Tabela 15– Rebalanceamento da posição para o Açúcar

Aversão ao risco	Custo de transação		
	0,15%	0,20%	0,25%
3	5	2	3
4	5	5	4
5	8	5	5

Tabela 16 – Rebalanceamento da posição para o Algodão

Aversão ao risco	Custos de transação		
	0,15%	0,20%	0,25%
3	6	0	0
4	6	6	0
5	6	6	6

Tabela 17– Rebalanceamento da posição para o Boi gordo

Aversão ao risco	Custos de transação		
	0,15%	0,20%	0,25%
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Tabela 18– Rebalanceamento da posição para o Café

Aversão ao risco	Custos de transação		
	0,15%	0,20%	0,25%
3	1	1	1
4	1	1	1
5	3	1	1

Tabela 19 – Rebalanceamento da posição para o Açúcar (fora da amostra)

Aversão ao risco	Custos de transação		
	0,15%	0,20%	0,25%
3	2	2	2
4	2	2	2
5	2	2	2

Tabela 20 – Rebalanceamento da posição para o Algodão (fora da amostra)

Aversão ao risco	Custos de transação		
	0,15%	0,20%	0,25%
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Tabela 21 – Rebalanceamento da posição para o Boi gordo (fora da amostra)

Aversão ao risco	Custos de transação		
	0,15%	0,20%	0,25%
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Tabela 22 – Rebalanceamento da posição para o Café (fora da amostra)

Aversão ao risco	Custos de transação		
	0,15%	0,20%	0,25%
3	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1

Conforme se verifica, o número de alterações indicado é bastante baixo, chegando em alguns casos a não haver indicação de mudança durante a vigência do contrato. Isso ocorre no caso do algodão, para previsões fora da amostra, e para o boi gordo, tanto dentro da amostra quanto fora. Os valores das razões de *hedge* para o açúcar, o algodão e o boi gordo foram baixos, mesmo com os modelos condicionais. Com os modelos convencionais, as razões de *hedge* verificadas para o açúcar cristal foram da ordem de 20%. No caso do boi gordo e algodão foram observados valores da ordem de 27% e 25% respectivamente. No caso do café, no entanto, os valores são bastante maiores, da ordem de 63%.

Visando contornar o problema de autocorrelação de resíduos, observado em alguns casos, uma metodologia alternativa foi proposta. Trata-se dos modelos utilizados por Myers e Thompson (1989), que incorporam nas regressões simples termos auto-regressivos, ou seja, defasagens da variável dependente, que permitem que a autocorrelação seja corrigida. Os modelos foram ajustados por mínimos quadrados ordinários, incluindo ou não termo de correção de erro, e os resultados obtidos são apresentados na tabela 23. Observa-se que as razões de *hedge* não diferiram muito das verificadas com os modelos convencionais anteriores. Os termos de correção de erros foram, em todos os casos, significativos, todavia, as razões de *hedge* encontradas nos dois casos foram praticamente as mesmas.

Tabela 23. Razão de *hedge* para modelos convencionais que incluem defasagens da variável dependente.

<i>Commodities</i>	Razão de <i>Hedge</i>	
	com correção de erro	sem correção de erro
Açúcar	0,19	0,19
Algodão	0,20	0,21
Boi Gordo	0,24	0,25
Café	0,64	0,64

7 - CONCLUSÕES

Os modelos destinados ao cálculo da razão de *hedge* precisam incorporar termos que expliquem a distribuição dos preços tanto no mercado físico quanto no de futuros. Com tal propósito, foram ajustados, neste estudo, modelos que incluem as relações de co-integração das variáveis e a dependência temporal dos momentos de segunda ordem em relação aos seus valores passados.

Foram constatados problemas de autocorrelação das séries de preços do mercado futuro, o que contraria a pressuposição de eficiência no processamento de informações que é feita nos modelos de variância mínima. Esse fato pode indicar a possibilidade de ganhos com posições especulativas que levariam a participações nos mercados de futuros não tratadas por esses modelos. Talvez a ainda baixa liquidez de alguns dos contratos justifique, em alguma medida, a não incorporação completa das novas informações de mercado no momento em que elas são conhecidas, fazendo com que as séries de preços apresentem um comportamento auto-regressivo. Dessa forma, a aplicação dos modelos de variância mínima para os produtos agropecuários no Brasil pode não ser ainda indicada em alguns casos, mas desde já o conhecimento da relação entre os preços pode ser uma informação importante para desenvolvimentos posteriores.

O problema da autocorrelação de resíduos para alguns dos modelos GARCH e convencionais não foi corrigido da maneira adequada por complicações computacionais, o que pode eventualmente levar à superestimativas dos parâmetros. Uma metodologia alternativa que permite a eliminação da autocorrelação de resíduo foi utilizada e os

valores encontrados para a razão de *hedge* foram bastante próximos dos verificados anteriormente.

Os valores referentes às razões de *hedge* para o açúcar, para o algodão e para o boi gordo foram baixos, mesmo com os modelos condicionais. Com os modelos convencionais, as razões de *hedge* verificadas para o açúcar cristal foram da ordem de 20%. No caso do boi gordo e algodão foram observados valores da ordem de 27% e 25% respectivamente. No caso do café, no entanto, os valores são bastante maiores, da ordem de 65%. Sabe-se que os preços do café no Brasil, tanto no mercado físico como no de futuros, têm como referência para sua formação, os preços verificados em bolsa internacional, e consequentemente, eles mostram-se bastante correlacionados. Os resultados encontrados com modelos convencionais que incluíam defasagens da variável dependente, com e sem termo de correção de erro, foram próximos destes – da ordem de 19% para o açúcar, 20% para o algodão, 24% para boi gordo e 64% para o café. Merece ser destacado que as operações de *hedge* podem ser mais efetivas se encerradas no período de entrega dos contratos futuros, que foram excluídos da amostra de maneira proposital.

Os modelos foram comparados observando a redução percentual da variância do retorno para portfólios baseados nas diferentes razões de *hedge* estimadas, frente o emprego de estratégias ingênuas de *hedge*. Todas as estratégias indicadas pelos modelos estatísticos foram melhores que a ingênua, mas as indicadas pelos modelos não condicionais superaram as indicadas pelos modelos de heterocedasticidade condicional na maioria dos casos. Dessa forma, considera-se que os modelos convencionais constituem-se em um instrumental eficiente e de fácil operacionalização para o cálculo da razão de *hedge*. Deve-se ressaltar que a utilização da metodologia GARCH requer treinamento bastante específico, o que não acontece com os outros modelos.

Quando analisadas as possibilidades de mudanças de posição provocadas por ganhos na utilidade esperada de um agente, dados os custos de transação considerados,

os resultados não foram animadores. Talvez, a redução dos custos de transação pudesse estimular alterações mais freqüentes de posições e viabilizar tais estratégias, permitindo que os resultados econômicos fossem melhorados.

8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, R.; DANTHINE, J.-P. Cross-Hedging. **Journal of Political Economy**, v. 89, p. 1182-96, 1981.

ANDERSON, R.; DANTHINE, J.-P. Time pattern of hedging and the volatility of futures prices. **Review of Economic Studies**, v. 50, p. 249-66, 1983.

BAILLIE, R.T.; MYERS, R.J. Bivariate garch estimation of the optimal commodity futures hedge. **Journal of Applied Econometrics**, v. 6, p. 109-24, 1991.

BENNINGA, S.; ELDOR, R.; ZILCHA, I. The optimal hedge ratio in unbiased futures markets. **Journal of Futures Markets**, v. 4, p. 155-59, 1984.

BERNDT, E. K.; HALL, H. B.; HALL, R. E., and HAUSMAN, J. A. Estimation and inference in nonlinear structural models. **Annals of Economic and Social Measurement**, v. 4, p. 653-66, 1974.

BESSER, D. A.; COVEY, T. Cointegration: some results on U.S. cattle prices. **The Journal of Futures Markets**, v. 11, p. 461-74, 1991.

BOLLESLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, 307-27, 1986.

- BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F.; NELSON, D. B. ARCH models. **Handbook of econometrics**, vol. IV, p. 2961-3038, 1994.
- BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F.; WOLDRIDGE J. M. . A capital asset pricing model with time varying covariances. **Journal of Political Economy**, v. 96, p. 116-31, 1988.
- CAMPBELL, J.Y.; PERRON, P. Pitfalls and opportunities: what macroeconomists should know about unit roots. **NBER Macroeconomics Annual**. Cambridge, Mass. MIT Press. 1991.
- DICKEY, D.A.; FULLER, W.A. Distribution of the estimator for autoregressive time series with a unit root. **Journal of the American Statistical Association**, v. 74, p. 427-31, 1979.
- DICKEY, D.A.; FULLER, W.A. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. **Econometrica**, v. 49, p. 1057-72, 1981.
- DUFFIE, D. **Futures markets**. New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- DUFFIE, D.; JACKSON, M. O. Optimal hedging and equilibrium in a dynamic futures market. **Journal Econ. Dynamics and Control**, v. 14, p. 79-98, 1990.
- EDERINGTON, L. H. The hedging performance of the new futures markets. **Journal of Finance**, v. 34, p. 157-70, 1979.
- ENGLE, R.F.; GRANGER C.W.J. Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. **Econometrica**, v. 55, p. 251-76, 1987.

ENGLE, R.F.; YOO B.S. Forecasting and testing in co-integrated systems. **Journal of Econometrics**, v. 35, p.143-59, 1987.

FACKLER, P. L.; MCNEW, K. P. Multiproduct hedging: theory, estimation, and an application. **Review of Agricultural Economics**, v. 15, p. 521-34, 1993.

FONTENBERY, T. R.; ZAPATA, H. O. An examination of cointegration relations between futures and local grain markets. **The Journal of Futures Markets**, v. 13, p.921-32, 1993.

GEPPERT, J.M. A statistical model for the relationship between futures contract hedging effectiveness and investment horizon length. **The Journal of Futures Markets**, v. 5, p. 507-36, 1995.

HAMILTON, J.D. **Time series analysis**. New Jersey: Princenton University Press, 1994. 799p.

HO, T. Intertemporal commodity futures hedging and production decision. **Journal of Finance**, v. 39, p. 351-76, 1984.

HOWARD e D'ANTONIO. Multiperiod hedging using futures: a risk minimization approach in the presence of autocorrelation. **The Journal of Futures Markets**, v. 11, p. 697 – 710, 1991.

HULL, J. C. **Options, futures and other derivatives**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.

JOHANSEN, S.; JUSELIUS, K. Maximum likelihood estimation and inference on cointegration - with applications to the demand for money. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, v. 52, p. 169-19, 1990.

- KARP, L. A. Methods for selecting the optimal dynamic hedge when production is stochastic. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 69, p. 647-57, 1987.
- KOUTMOS, G.; TUCKER, M. Temporal relationships and dynamic interactions between spot and Futures stock markets. **The Journal of Futures Markets**, v. 16, p. 55-69, 1996.
- KRONER, K.; SULTAN, J. Time-varying distributions and dynamic hedging with foreign currency futures. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 28, p. 535-51, 1993.
- LENCE, S.; HAYES, D. The empirical minimum-variance hedge. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 76, p.94-104, 1994.
- LENCE, S.H.; KIMLE, K.L.; HAYENGA, M.L. A dynamic minimum variance hedge. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 75, p. 1063-71, 1993.
- LIEN, D-H. D. The effect of the cointegration relationship on futures hedging: a note. **The Journal of Futures Markets**, v. 16, p. 773-80, 1996.
- LU, R.; LEUTHOLD, R. M. Cointegration relations between spot and futures prices for storable commodities: implications for hedging and forecasting. **OFOR Paper**, p. 94-12, dez. 1994.
- LÜTKETEPOL, H. **Introduction to multiple time series**. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- MARTINEZ, S.; ZERING, K. Optimal dynamic hedging decisions for grain producers. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 74, p. 879-88, 1992.

- MATHEWS, K. H.; HOULTHAUSEN, D. M. A simple multiperiod minimum risk hedge model. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 63, p. 209-315, 1981.
- MYERS, R. J.; HANSON, S.D. Optimal dynamic hedging in unbiased futures markets. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 78, p. 13-20, 1996.
- MYERS, R. J.; THOMPSON, S.R. Generalized optimal hedge ratio estimation. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 67, p.15-23, 1989.
- PARK, T.H.; SWITZER, L.N. Bivariate GARCH estimation of the optimal hedge ratios for stock index futures: a note. **The Journal of Futures Markets**, v. 15, p. 61-7, 1995.
- PHILLIPS, P.C.B. Time series regression with a unit root. **Econometrica**, v. 55, p. 277-301, 1987.
- PHILLIPS, P.C.B.; PERRON P. Testing for a unit root in time series regression. **Biometrika**, v. 75, p. 335-46, 1988.
- PURCELL, W. D. **Agricultural futures and options: principles and strategies**. New York: Macmillan Publishing Company, 1991. 363p.
- QIAN,Y; DUNCAN, R. Optimal hedging strategy revisited: acknowledging the existence of nonstationary economic time series. **Banco Mundial**. Working Paper no. 1279, march 1994.
- SEPTON, P. S. GARCH and MARKOV hedging at the Winnipeg Commodity Exchange. **Canadian Journal of Agricultural Economics**, v. 46, p. 117-26, 1996.

SHAFFER, C. E. Hedge ratios and basis behavior: an intuitive insight. **The Journal of Futures Markets**, v. 16, p. 773-80, 1996.

STEIN, J. The simultaneous determination of spot and futures prices. **Economic Review**, v. 51, p. 1012 –25, 1961.

VUKINA, T.; ANDERSON, J. A state-space forecasting approach to optimal intertemporal cross-hedging. **American Journal Agricultural Economics**, v. 75, p. 416-24, 1993.

WORKING, H. Futures trading and hedging. **The American Economic Review**, v. 43, p.314-43, 1953.

WORKING, H. New concepts concerning futures markets and prices. **The American Economic Review**, v. 52, p. 432 –59, 1962.

ANEXO I

Integração e co-integração

Diversos estudos tratam de estabelecer procedimentos para determinar a ordem de integração de uma variável (número de raízes unitárias)⁷. Dentre esses procedimentos os de Fuller (1976) (complementados pelos de Dickey & Fuller, 1979 e 1981) têm sido bastante utilizados. As estatísticas τ_τ , τ_μ e τ de Fuller (1976), correspondem ao teste t para a estimativa do coeficiente da variável Y_{t-1} da equação (A1) respectivamente para os seguintes casos: (i) com constante e com tendência, (ii) apenas com constante e (iii) sem tendência e sem constante.

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \left(\sum_{i=1}^p \rho_i - 1 \right) Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \Delta Y_{t-i} + e_t \quad (A1)$$

onde $\lambda_i = - \sum_{j=i+1}^p \rho_j$, sendo p a ordem do modelo auto-regressivo que descreve o comportamento da série temporal. A ordem de integração é definida quando o teste apresenta-se significativo (rejeitando a hipótese de ser nulo o coeficiente da variável Y_{t-1}) numa sequência de ajustamentos onde aumenta-se sucessivamente o número de diferenças.

Fuller (1976) formulou estes testes sob a hipótese de que os resíduos são idêntica e independentemente distribuídos (*iid*). Na prática o valor de p da equação (A3) é tomado de forma a se ter resíduos não correlacionados. Nos testes propostos por Phillips (1987) e Phillips & Perron (1988) a hipótese de erros *iid* é relaxada. Esses testes consistem nas estatísticas de Fuller submetidas a ajustes não-paramétricos.

⁷ Discussão dessa literatura é apresentada em Hendry (1986), Campbell e Perron (1991) e outros.

Os valores críticos das estatísticas τ_τ, τ_μ e τ foram obtidos por Fuller, 1976. Dickey & Fuller (1979 e 1981) obtiveram também a distribuição para as estatísticas ϕ 's - ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 que testam respectivamente se a constante e o coeficiente da variável Y_{t-1} são estatisticamente não diferentes de zero na equação (A1) (considerando a versão sem tendência), se a constante, o coeficiente da variável tendência e o coeficiente da variável Y_{t-1} são estatisticamente não diferentes de zero na equação (A1) e se o coeficiente da variável tendência e o coeficiente da variável Y_{t-1} são estatisticamente não diferentes de zero na equação (A1). Para os testes de Phillips & Perron (1988) utilizam-se os mesmos valores críticos de Fuller (1976).

Após verificar que as séries a serem relacionadas têm a mesma ordem de integração testa-se a co-integração. O procedimento de Engle & Granger (1987) pode ser usado para testar co-integração quando o modelo envolve apenas duas variáveis. Testar co-integração, de acordo com o conceito de Engle-Granger, significa testar se z_t de uma equação de co-integração da forma de (2) é $I(0)$.

$$Y_{1t} = \theta + \gamma Y_{2t} + z_t \quad (A2)$$

Dentre os testes existentes para esse fim o de Dickey & Fuller aumentado (DFA), conforme especificado na equação (A3) (representação simplificada de uma equação do tipo da (A1), tem sido largamente utilizado:

$$\Delta z_t = \pi_{z,t-1} - \sum_{j=1}^n \omega_j \Delta z_{t-j} + u_t \quad (A3)$$

Quando $\omega_j = 0$ para todo j , o teste corresponde ao de Dickey & Fuller (DF). As estatísticas DF e DFA testam se $\pi = 0$ na equação (A3) com e sem a restrição $\omega_j = 0$

para $j = 1, \dots, n$, respectivamente (valores críticos em Engle & Granger, 1987 e Engle & Yoo, 1987).

A estimação de um modelo co-integrado pode ser feita em duas etapas. Na primeira etapa estima-se o modelo (A2); obtém-se a série de resíduo e testa-se a co-integração. Uma vez rejeitada a hipótese de que as variáveis não são co-integradas, passa-se a estimar o modelo de correção de erro.

Admita-se, por exemplo, que duas séries Y_{1t} e Y_{2t} sejam $I(1)$, tal que ΔY_{1t} e ΔY_{2t} sejam $I(0)$. Então a equação (A4) representa um modelo de correção de erro

Os critérios AIC (AKAIKE Information Criterion), SC (SCHWARZ Criterion), HQ (HANNAN-QUINN Criterion) e FPE (Final Prediction Criterion) são utilizados para a determinação do valor de p . Esses critérios, numa versão uniequacional, podem ser usados para a determinação do valor de p nos testes de Dickey e Fuller aumentado para raiz unitária (Lütkepohl, 1991).

ANEXO 2

GRÁFICO 1 - AÇÚCAR CRISTAL

RAZÕES DE HEDGE - PREVISÕES DENTRO DA AMOSTRA

Gráfico 2 - AÇÚCAR CRISTAL

RAZÕES DE HEDGE - PREVISÕES FORA DA AMOSTRA

Gráfico 3 - ALGODÃO EM PLUMA

RAZÕES DE HEDGE - PREVISÕES DENTRO DA AMOSTRA

Gráfico 4 - ALGODÃO EM PLUMA

RAZÕES DE HEDGE - PREVISÕES FORA DA AMOSTRA

Gráfico 5 - BOI GORDO

RAZÕES DE HEDGE - PREVISÕES DENTRO DA AMOSTRA

Gráfico 6 - BOI GORDO

RAZÕES DE HEDGE - PREVISÕES FORA DA AMOSTRA

Gráfico 7 - Café Arábica

RAZÕES DE HEDGE - PREVISÕES DENTRO DA AMOSTRA

Gráfico 8 - CAFÉ ARÁBICA

RAZÕES DE HEDGE - PREVISÕES FORA DA AMOSTRA

ANEXO 3

Código de Programação – Modelos para cálculo da razão de *hedge*

```

cal(irregular)
all 800
open data c:\ary\projeto\dados\boi1.xls
data(format=xls,org=obs)

*****
*
*                               SERIES                               * - DECIDIR
*****

SET ls = indi
SET lf = primfut
*****
*
*                               LOGS? - sim(=1) ou não(=0)           * - DECIDIR
*****

COMPUTE transf = 1
*****
*
*                               INTERVALO PARA PREVISÃO FORA DA AMOSTRA * - DECIDIR
*****

COMPUTE out = 100
*-----*
*-----*
*-----*
*
*                               *
*      transformação em log      *
*                               *
*-----*
*-----*

if transf==1
{
log ls / ls
log lf / lf
display 'retornos relativos'
}
else
{
set ls = ls
set lf = lf
display 'retornos absolutos'
}
end if

*-----*
*
*      diferenças                *
*-----*

```



```

diff ls / rs
diff lf / rf
*          -----          *
*          amostra          *
*          -----          *
set rf2 = rf**2
set amost = rf2+1>0
smpl(series=amost)
set trend = T
table
graph 2
# lf
# ls
*          -----          *
* ponto inicial e final para estimação (toda amostra) *
*          -----          *

extremum(noprint) trend
compute gstart=%minent+10
*-----*
display '***** CONVENCIONAL *****'
nonlin a0 b0
frml res = rs -a0
frml ref = rf -b0
linreg(noprint) rs / res1
# constant
compute a0 = %beta(1)
linreg(noprint) rf / ref1
# constant
compute b0 = %beta(1)
vcv(matrix=RR.noprint)
# res1 ref1
*          -----          *
*          us e uf são as séries de resíduos          *
* hss, hsf e hff são as variâncias e as covariâncias *
*          -----          *

declare series us uf
declare series hss hsf hff
set us = res1
set uf = ref1
set hss = RR(1,1)
set hsf = RR(1,2)
set hff = RR(2,2)
*          -----          *
*          matrizes e elementos          *
*          -----          *
declare symm H

```

```

declare vect U
declare frml hssF hsfF hffF
nonlin(add) d0 e0 f0
frml hssF = d0
frml hffF = e0
frml hsfF = f0
compute d0 = RR(1,1), e0 = RR(2,2), f0 = RR(1,2)
*          ----- *
*          função de verossimilhança          *
*          ----- *
frml glogl = $
    hss(T)=hssF(T) , hsf(T)=hsfF(T) , hff(T)=hffF(T) , $
    us(T)=res(T), uf(T)=ref(T) , $
    H = llhss(T)l hsf(T),hff(T)ll , $
    U = llus(T),uf(T)ll, $
    %logdensity(H.U)
*          ----- *
*          método de maximização              *
*          ----- *
nlparsubits=50)
maximize(method=bhhh,iterations=70) glogl gstart gend
*          ----- *
*          estatísticas                       *
*          ----- *
compute conv = %funcval
set rsel = 0
set rfe1 = 0
set hssFe1 = 0
set hffFe1 = 0
set hsfFe1 = 0
set rsel = rs - %beta(1)
set rfe1 = rf - %beta(2)
set hssFe1 = %beta(3)
set hffFe1 = %beta(4)
set hsfFe1 = %beta(5)
set rzconv = hsfFe1/hffFe1
*          ----- *
*          previsão fora da amostra          *
*          ----- *
do i = gend - out, gend
linreg(noprint) rs gstart i
# constant rf
set frzconv i i = %beta(2)
end do
graph l
#frzconv
*-----*
```

```
display '***** CONVENCIONAL COM CO-INTEGRAÇÃO *****'
```

```
display '----- relação de longo prazo -----'
```

```
linreg ls gstart gend
```

```
# constant lf
```

```
display '----- teste para valor unitário do parâmetro de co-integração -----'
```

```
test
```

```
# 2
```

```
# 1
```

```
* ----- *
*          *
*      modelo de correção de erro      *
*          *
* ----- *
```

```
set termo = ls -%beta(1) -%beta(2)*lf
```

```
nonlin a0 b0 a1 b1
```

```
frml res = rs -a0 -a1*termo{1}
```

```
frml ref = rf -b0 -b1*termo{1}
```

```
linreg(noprint) rs / res1
```

```
# constant termo{1}
```

```
compute a0 = %beta(1) , a1 = %beta(2)
```

```
linreg(noprint) rf / ref1
```

```
# constant termo{1}
```

```
compute b0 = %beta(1) , b1 = %beta(2)
```

```
vcv(matrix=RR.noprint)
```

```
# res1 ref1
```

```
* ----- *
*          *
*      us e uf são as séries de resíduos      *
*          *
*      hss, hsf e hff são as variâncias e as covariâncias *
*          *
* ----- *
```

```
declare series us uf
```

```
declare series hss hsf hff
```

```
set us = res1
```

```
set uf = ref1
```

```
set hss = RR(1,1)
```

```
set hsf = RR(1,2)
```

```
set hff = RR(2,2)
```

```
* ----- *
*          *
*      matrizes e elementos      *
*          *
* ----- *
```

```
declare symm H
```

```
declare vect U
```

```
declare frml hssF hsfF hffF
```

```
nonlin(add) d0 e0 f0
```

```
frml hssF = d0
```

```
frml hffF = e0
```

```
frml hsfF = f0
```

```

compute d0 = RR(1,1), e0 = RR(2,2), f0 = RR(1,2)
*          ----- *
*          função de verossimilhança *
*          ----- *

frml glogl = $
    hss(T)=hssF(T) . hsf(T)=hsfF(T) , hff(T)=hffF(T) , $
    us(T)=res(T), uf(T)=ref(T) , $
    H = llhss(T)llhsf(T).hff(T)ll , $
    U = llus(T),uf(T)ll. $
    %logdensity(H,U)
*          ----- *
*          método de maximização *
*          ----- *

nlpar(subits=50)
maximize(method=bhhh.iters=70) glogl gstart gend
*          ----- *
*          estatísticas *
*          ----- *

set rse2 = 0
set rfe2 = 0
set hssFe2 = 0
set hffFe2 = 0
set hsfFe2 = 0
set rse2 = rs -%beta(1) -%beta(3)*termo{ 1 }
set rfe2 = rf -%beta(2) -%beta(4)*termo{ 1 }
set hssFe2 = %beta(5)
set hffFe2 = %beta(6)
set hsfFe2 = %beta(7)
set rzconvci = hsfFe2/hffFe2
compute convci = %funcval
*          ----- *
*          previsão fora da amostra *
*          ----- *

do i = gend - out, gend
linreg(noprint) ls gstart i fres
# constant lf
*set ftermo = ls -%beta(1) -%beta(2)*lf
linreg(noprint) rs gstart i
# constant fres{ 1 } rf
set frzconvci i i = %beta(3)
end do
graph 2
# frzconv
# frzconvci

display '***** GARCH *****'

```

```

nonlin a0 b0
frml res = rs - a0
frml ref = rf - b0
linreg(noprint) rs / res1
# constant
compute a0 = %beta(1)
linreg(noprint) rf / ref1
# constant
compute b0 = %beta(1)
vcv(matrix=RR,noprint)
# res1 ref1
* ----- *
*          us e uf são as séries de resíduos          *
* hss, hsf e hff são as variâncias e as covariâncias *
* ----- *

declare series us uf
declare series hss hsf hff
set us = res1
set uf = ref1
set hss = RR(1,1)
set hsf = RR(1,2)
set hff = RR(2,2)
* ----- *
*          matrizes e elementos                        *
* ----- *

declare symm H
declare vect U
declare frml hssF hsfF hffF
nonlin(add) d0 e0 f0 d1 e1 f1 d2 e2 f2
frml hssF = d0 + d1 * us{1}**2 + d2 * hss{1}
frml hsfF = e0 + e1 * uf{1}**2 + e2 * hsf{1}
frml hffF = f0 + f1 * us{1} * uf{1} + f2 * hsf{1}
compute d0 = RR(1,1), e0 = RR(2,2), f0 = RR(1,2)
compute d1 = d2 = e1 = e2 = 0.05 , f1 = f2 = 0.0
* ----- *
*          função de verossimilhança                  *
* ----- *

frml glogl = $
    hss(T)=hssF(T) , hsf(T)=hsfF(T) , hff(T)=hffF(T) , $
    us(T)=res(T), uf(T)=ref(T) , $
    H = ||hss(T)||hsf(T),hff(T)|| , $
    U = ||us(T).uf(T)|| , $
    %logdensity(H,U)
* ----- *
*          método de maximização                      *
* ----- *

nlpar(subit=50.criterion=value,cvcr=0.000001)

```

```

maximize(method=simplex.recursive, iters=20, noprint) glogl gstart gend
maximize(method=bhhh.recursive, iters=70) glogl gstart gend
compute garch = %funcval
*          ----- *
*          estatísticas *
*          ----- *

set rse3 = 0
set rfe3 = 0
set hssFe3 = 0
set hffFe3 = 0
set hsfFe3 = 0
set rse3 = rs - %beta(1)
set rfe3 = rf - %beta(2)
set hssFe3 = %beta(3) + %beta(6)*res{1}**2 + %beta(9)*hss{1}
set hffFe3 = %beta(4) + %beta(7)*ref{1}**2 + %beta(10)*hff{1}
set hsfFe3 = %beta(5) + %beta(8)*res{1}*ref{1} + %beta(11)*hsf{1}
set rzgarch = hsfFe3/hffFe3

display '***** GARCH COM CO-INTEGRAÇÃO *****'

nonlin a0 b0 a1 b1
frml res = rs - a0 - a1*termo{1}
frml ref = rf - b0 - b1*termo{1}
linreg(noprint) rs / res1
# constant termo{1}
compute a0 = %beta(1) , a1 = %beta(2)
linreg(noprint) rf / ref1
# constant termo{1}
compute b0 = %beta(1) , b1 = %beta(2)
vcv(matrix=RR, noprint)
# res1 ref1
*          ----- *
*          us e uf são as séries de resíduos *
*          hss, hsf e hff são as variâncias e as covariâncias *
*          ----- *

declare series us uf
declare series hss hsf hff
set us = res1
set uf = ref1
set hss = RR(1,1)
set hsf = RR(1,2)
set hff = RR(2,2)
*          ----- *
*          matrizes e elementos *
*          ----- *

declare symm H
declare vect U

```

```

declare frml hssF hsfF hffF
nonlin(add) d0 e0 f0 d1 e1 f1 d2 e2 f2
frml hssF = d0 + d1 * us{1}**2 + d2 * hss{1}
frml hffF = e0 + e1 * uf{1}**2 + e2 * hff{1}
frml hsfF = f0 + f1 * us{1}*uf{1} + f2 * hsf{1}
compute d0 = RR(1,1), e0 = RR(2,2), f0 = RR(1,2)
compute d1 = d2 = e1 = e2 = 0.05 , f1 = f2 = 0.0
*          ----- *
*          função de verossimilhança          *
*          ----- *
frml glogl = $
      hss(T)=hssF(T) , hsf(T)=hsfF(T) , hff(T)=hffF(T) , $
      us(T)=res(T), uf(T)=ref(T) , $
      H = llhss(T)lhsf(T),hff(T)ll , $
      U = llus(T),uf(T)ll, $
      %logdensity(H.U)
*          ----- *
*          método de maximização              *
*          ----- *
nlparsubits=50,criterion=value,cvcrit=0.000001)
maximize(method=simplex,noprint,recursive,itors=20) glogl gstart gend
maximize(method=bhhh,recursive,itors=70) glogl gstart gend
*          ----- *
*          estatísticas                       *
*          ----- *
set rse4 = 0
set rfe4 = 0
set hssFe4 = 0
set hffFe4 = 0
set hsfFe4 = 0
set rse4 = rs - %beta(1) - %beta(3)*termo{1}
set rfe4 = rf - %beta(2) - %beta(4)*termo{1}
set hssFe4 = %beta(5) + %beta(8)*res{1}**2 + %beta(11)*hss{1}
set hffFe4 = %beta(6) + %beta(9)*ref{1}**2 + %beta(12)*hff{1}
set hsfFe4 = %beta(7) + %beta(10)*res{1}*ref{1} + %beta(13)*hsf{1}
set rzgarchci = hsfFe4/hffFe4
compute garchci = %funcval
*          ----- *
*          previsão fora da amostra          *
*          ----- *
compute fora = gend - out
nlparsubits=50,criterion=value,cvcrit=0.000001)
maximize(method=simplex,noprint,recursive,itors=15) glogl gstart fora
maximize(method=bhhh,recursive,itors=70) glogl gstart fora

declare real conver
display 'n converged funcval cvcrit'

```

```

do i = gend - out, gend
nlpar(subits=50,criterion=value,cvcrit=0.00005)
maximize(method=bhhh,recursive,noprint,itors=70) glogl gstart i
compute conver = %converged
while conver <> 1.0 {
nlpar(subits=50,criterion=value,cvcrit=0.000001)
maximize(method=simplex,noprint,recursive,itors=20) glogl gstart i
maximize(method=bhhh,noprint,recursive,itors=40) glogl gstart i
display %converged
compute conver = %converged
}
display %nobs ' ' %converged %funcval
set frse4 i i = rs - %beta(1) - %beta(3)*termo{1}
set frfe4 i i = rf - %beta(2) - %beta(4)*termo{1}
set fhssFe4 i i = %beta(5) + %beta(8)*res{1}**2 + %beta(11)*hss{1}
set fhffFe4 i i = %beta(6) + %beta(9)*ref{1}**2 + %beta(12)*hff{1}
set fhstFe4 i i = %beta(7) + %beta(10)*res{1}*ref{1} + %beta(13)*hsf{1}
set frzgarchci i i = fhstFe4/fhffFe4
compute a0=%beta(1), b0=%beta(2), a1=%beta(3), b1=%beta(4), d0=%beta(5), e0=%beta(6), f0=%beta(7),
d1=%beta(8), e1=%beta(9), f1=%beta(10), d2=%beta(11), e2=%beta(12), f2=%beta(13)
end do
display '*****COMPARAÇÃO ATRAVÉS DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA*****'
display 'Razão de verossimilhança d1=e1=f1=d2=e2=f2=0 dado a1 = b1 = 0'
compute ratio = 2*(garch - conv)
cdf chisquare ratio 6
*
display 'Razão de Verossimilhança a1 = b1 = 0 dado d1=e1=f1=d2=e2=f2=0'
compute ratio = 2*(convci - conv)
cdf chisquare ratio 2
*
display 'Razão de Verossimilhança a1 = b1 = 0'
compute ratio = 2*(garchci - garch)
cdf chisquare ratio 2
*
display 'Razão de verossimilhança d1=e1=f1=d2=e2=f2=0'
compute ratio = 2*(garchci - convci)
cdf chisquare ratio 6
display '*****REDUÇÃO PERCENTUAL DA VARIÂNCIA*****'
* retorno do ingênuo
set reting = rs - rf
* retorno do convencional
set retconv = rs - rzconv*rf
* retorno do convencional com co-integração
set retconvci = rs - rzconvci*rf
* retorno do garch com co-integração
set retgarchci = rs - rzgarchci*rf

```



```

* variâncias
statistics(noprint) reting
compute varing = %variance
statistics(noprint) retconv
compute varconv = %variance
statistics(noprint) retconvci
compute varconvci = %variance
statistics(noprint) retgarchci
compute vargarchci = %variance

* redução percentual da variância
compute redgarchci = 1 - (vargarchci/varing)
display 'redgarchci' redgarchci
compute redconvci = 1 - (varconvci/varing)
display 'redconvci' redconvci
compute redconv = 1 - (varconv/varing)
display 'redconv' redconv

display '*****REDUÇÃO PERCENTUAL DA VARIÂNCIA FORA DA AMOSTRA*****'

* retorno do ingênuo
set freting = rs - rf
* retorno do convencional
set fretconv = rs - frzconv*rf
* retorno do convencional com co-integração
set fretconvci = rs - frzconvci*rf
* retorno do garch com co-integração
set fretgarchci = rs - frzgarchci*rf
* variâncias
statistics(noprint) freting
compute fvaring = %variance
statistics(noprint) fretconv
compute fvarconv = %variance
statistics(noprint) fretconvci
compute fvarconvci = %variance
statistics(noprint) fretgarchci
compute fvargarchci = %variance

* redução percentual da variância
compute fredgarchci = 1 - (fvargarchci/fvaring)
display 'fredgarchci' fredgarchci
compute fredconvci = 1 - (fvarconvci/fvaring)
display 'fredconvci' fredconvci
compute fredconv = 1 - (fvarconv/fvaring)
display 'fredconv' fredconv

```

```
*-----*  
*                SÉRIES DE SAÍDA                *  
*-----*
```

OPEN COPY c:\vary\outputs\algodao11.xls

COPY(FORMAT=xls,ORG=OBS,DATES) / hssFe4 hsfFe4 hffFe4 rzgarchci fhssFe4 fhsfFe4 fhffFe4 frzgarchci

open copy c:\vary\outputs\algograf.xls

copy(format=xls,org=obs,dates) / rzconv rzconvci rzgarchci frzconv frzconvci frzgarchci