

**O EMPREGO DA ANÁLISE HARMÔNICA NO ESTUDO DAS  
PRECIPITAÇÕES MENSIS DO MUNICÍPIO  
DE VIÇOSA (M.G.)**

**JOSÉ TARCISIO LIMA THIÉBAUT**

**Engenheiro-Agrônomo**

**Auxiliar de Ensino do Departamento de Matemática do Instituto de  
Ciências Exatas da Universidade Federal de Viçosa - M.G.**

**Orientador: Prof. Dr. Humberto de Campos**

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Experimentação e Estatística.

**P I R A C I C A B A**

**Estado de São Paulo - Brasil**

**Março - 1976**

À minha esposa

À minha filha

À memória dos meus avós

Aos meus pais

À minha irmã

## A G R A D E C I M E N T O S

Nosso muito obrigado:

- Ao Dr. Humberto de Campos, Professor Adjunto do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pela orientação segura e valiosa na condução deste trabalho;
- Ao Dr. Fábio Ribeiro Gomes, Professor Catedrático da Universidade Federal de Viçosa (MG), pelo estímulo sempre demonstrado;
- Ao Dr. Dêcio Barbin, Professor Assistente-Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo apoio recebido durante o curso;
- Aos demais professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo brilhantismo e sabedoria;
- À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade oferecida para a realização do curso;
- À CAPES, pela ajuda financeira;
- Ao colega Laede Maffia de Oliveira, pela sugestão do tema;
- Ao colega Alcides Reis Condê, pelo convívio durante o curso;
- Ao Prof. Sebastião Lopes de Carvalho, pela revisão deste trabalho;
- Aos demais colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa (MG).

E a todos que direta ou indiretamente concorreram para o bom andamento desse trabalho.

# Í N D I C E

	Página
1 - INTRODUÇÃO .....	1
2 - REVISÃO DA LITERATURA .....	4
3 - MATERIAL E MÉTODO .....	8
3.1 - Material .....	8
3.2 - Método .....	8
3.2.1 - Desenvolvimento teórico .....	9
3.2.1.1 - Estruturação do modelo matemático .....	13
3.2.1.2 - Regressão periódica .....	15
3.2.1.3 - Análise periódica .....	21
3.2.1.3.1 - Teste de normalidade .....	22
3.2.1.3.2 - Quadros de análises .....	24
3.2.1.4 - Coeficientes de correlação e determi- nação .....	30
3.2.1.5 - Intervalos de confiança .....	31
4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	32
4.1 - Estimativa das Precipitações Mensais do Período Chuvoso (Outubro a Março) .....	32
4.1.1 - Análise de variância .....	35
4.1.1.1 - Teste de normalidade .....	35
4.1.1.2 - Quadros das análises de variâncias .....	36

	Página
4.1.2 - Equação de regressão .....	38
4.1.3 - Coeficientes de correlação e determinação ....	44
4.1.4 - Intervalos de confiança .....	45
4.2 - Estimativa das Precipitações Mensais do Período Seco (Abril a Setembro) .....	46
4.2.1 - Análise de variância .....	48
4.2.1.1 - Teste de normalidade .....	48
4.2.1.2 - Quadros das análises de variâncias .....	49
4.2.2 - Equação de regressão .....	51
4.2.3 - Coeficientes de correlação e determinação ....	57
4.2.4 - Intervalos de confiança .....	58
4.3 - Estimativa das Precipitações Mensais do Período Anual (Janeiro a Dezembro) .....	59
4.3.1 - Análise de variância .....	64
4.3.1.1 - Teste de normalidade .....	64
4.3.1.2 - Quadros das análises de variâncias .....	66
4.3.2 - Equação de regressão .....	71
4.3.3 - Coeficientes de correlação e determinação ....	78
4.3.4 - Intervalos de confiança .....	79
5 - CONCLUSÕES .....	82
6 - RESUMO .....	84
7 - ABSTRACT .....	87
8 - BIBLIOGRAFIA .....	89
9 - APÊNDICE .....	92

## 1 - INTRODUÇÃO

Entende-se, por precipitações atmosféricas, o conjunto de águas, originadas do vapor d'água que cai, em estado líquido ou sólido, sobre a superfície da terra.

A precipitação atmosférica, quando ocorre racionalmente em estado líquido, é de vital importância para a agricultura, proporcionando condições favoráveis ao desenvolvimento vegetal.

A água, proveniente das chuvas, atua sobre os sais mineirais provocando a solubilização dos mesmos e, conseqüentemente, facilita a absorção pelas plantas, além de incorporar quantidades apreciáveis de nitrogênio ao solo e funcionar como agente regulador térmico das plantas.

No entanto, sua maior importância não está na atuação direta sobre as plantas, e sim, nas implicações com o balanço hídrico do solo e com o estado higrométrico do ar. As chuvas representam, no ciclo hidrológico, importante papel de elo entre os fenômenos meteorológicos propriamente ditos e os do escoamento superficial, que mais interessam ao campo da engenharia. Deriva daí, sobretudo, a importância do estudo das chuvas.

Discutiremos aqui alguns aspectos relevantes para as atividades agrícolas.

O suprimento de água às culturas, em determinadas épocas e em quantidades adequadas, provoca maior rendimento das colheitas. Assim sendo, quando houver falta de água às plantações, dispositivos outros devem ser colocados em funcionamento para que se supram as deficiências. Uma das maneiras de se fazer isso é estabelecer planos de irrigação e, para tal, deve ser feito um levantamento detalhado das alturas pluviométricas.

O excesso de água nos solos agrícolas pode ser tão ou mais danoso que a falta e, nesse caso, ele deve ser removido por meio dos dispositivos de drenagem. Esse problema ocorre, principalmente, em função de elevadas alturas de chuvas que se verificam em determinados meses do ano. Os inconvenientes das inundações de áreas agrícolas podem ser evitados como a previsão de chuvas.

A necessidade de construções de barragens e açudes é ditada, às vezes, pelas pequenas alturas pluviométricas, ocorridas em determinados períodos. Os reservatórios artificiais, além de controlar inundações, podem abastecer plantações e até mesmo grandes centros urbanos.

A erosão de terras agrícolas, o potencial energético, a construção e manutenção das vias de acesso são altamente influenciados pela intensidade das chuvas.

Em Viçosa (MG), a pesquisa da variabilidade dos fatores climáticos não tem merecido até o momento grande atenção por parte dos estudiosos desses problemas. Dentre os fatores, a precipitação pluviométrica evidencia-se pela sua importância.

Geralmente, as publicações a respeito consistem, quase que exclusivamente, em uma transcrição das observações, quando muito, acompanhadas das médias aritméticas e de algumas medidas de dispersão. Dessa maneira, sente-se a ausência de análises estatísticas mais pormenorizadas.

O presente trabalho visa a preencher, em parte, a lacuna no que diz respeito às alturas pluviométricas mensais de Viçosa, que serão estimadas por meio da análise harmônica, aplicada à série de Fourier, um dos meios de estudo dos fenômenos periódicos.

Pretendemos fornecer com este trabalho, uma pequena contribuição aos estudiosos deste campo, e subsídios aos responsáveis pelo planejamento e execução de práticas agrícolas e de certas atividades da engenharia.



## 2 - REVISÃO DA LITERATURA

COMRAD e POLLAK (1950) apresentam um trabalho sobre a análise harmônica da série de Fourier, aplicada à Climatologia. Justificam o método, relatando que muitos elementos climáticos têm uma tendência periódica, não sendo, por isso, explicados pela regressão polinomial. Ressaltam, no entanto, que "um importante ponto de vista físico não deve ser esquecido nas pesquisas dos fenômenos periódicos".

Apresentam a metodologia e exemplificam, com um estudo bem detalhado, a duração relativa da insolação.

Por fim, advertem os climatologistas no sentido do uso ou da compreensão do método, tão frequentemente aplicado em pesquisas científicas do gênero.

AMARAL (1968) estima as precipitações mensais de Pelotas, Rio Grande do Sul, no período de 1900 a 1951.

No seu trabalho testa a estabilidade das componentes harmônicas pelo método da análise de variância e conclui serem significativas as ondas anual, semestral e quadrimestral. Aplicado o teste de completicidade, determina que 91,2% da variação das precipitações médias mensais corre por conta das três ondas significativas.

Em outro exemplo, usando os dados de precipitações mensais em Morro Velho, Minas Gerais, no período de 1855 a 1951, oriundos do trabalho de MEMÓRIA (1955), discute o problema da transformação dos dados e conclui que 99,3% da variação entre médias mensais corre por conta da onda anual.

Como contribuição original, estabelece a distribuição entre os quadrados de duas amplitudes, introduz o conceito de coeficiente de correlação cíclica e adapta o método de Fuhrich à análise harmônica, proporcionando a seleção das componentes harmônicas de amplitudes relevantes, quando essas componentes ocorrem em grande número.

DUARTE (1974) usa a análise harmônica para estabelecer uma curva epidemiológica, representativa da disseminação da ferrugem do café na Zona da Mata, Minas Gerais, a fim de determinar quais as épocas de aplicação de fungicidas.

FRANCO e GODOY (1946) estudam a precipitação de Campinas (SP.), de 1890 a 1945, e verificam o comportamento das chuvas totais anuais e totais trimestrais. Usam o método das médias móveis e concluem que o regime pluviométrico não foi alterado neste período. As oscilações verificadas ocorrem sempre em torno da média geral e não de maneira unilateral e contínua.

FOSTER (1948) estuda a precipitação anual em Omaha, Nebraska, U.S.A., no período de 1871 a 1940. Verifica, através da regressão linear, a existência de tendência secular, expressa pela equação:

$$P = 33,86 - 0,1785 T,$$

sendo os coeficientes de regressão expressos em polegadas.

POMPEU MEMÓRIA (1955) analisando estatisticamente as precipitações do Município de Nova Lima (MG), no período de 1855 a 1951, usando o método das médias móveis e a regressão linear, conclui não haver tendência secular de acréscimo ou decréscimo das precipitações anuais. Verifica,

também, que a distribuição de frequências, das precipitações anuais não obedecem à curva normal por apresentar assimetria positiva, embora sem manifestação de curtose. Em termos climatológicos, isso significa que os anos muito chuvosos e os moderadamente secos são mais frequentes que os anos muito secos e moderadamente chuvosos, respectivamente.

PIMENTEL GOMES e NOGUEIRA (1959) estudam as precipitações anuais do Município de Pesqueira (PE), no período de 1910 a 1957. Usam os polinômios ortogonais e verificam a inexistência de tendência secular de acréscimo ou decréscimo do primeiro ao quarto grau, conforme mostra o quadro seguinte.

Causa de Variação	G. L.	Q. M.
Regressão linear	1	64.950,2
Regressão quadrática	1	35.901,6
Regressão cúbica	1	13.110,2
Regressão do 4º grau	1	4.385,0
Resíduo	43	43.404,6

ALBUQUERQUE (1964) faz um estudo sobre as precipitações anuais de Fortaleza (CE), no período de 1913 a 1961. Usa o método da regressão polinomial e verifica a inexistência de tendência secular de acréscimo ou decréscimo do primeiro ao quarto grau.

AQUINO (1969) estuda as precipitações anuais e mensais de Belo Horizonte (MG), no período de 1910 a 1966, através da regressão polinomial e determina a natureza das distribuições dos meses e anos.

FERNANDES (1973) estabelece equações de regressão polinomial para dados pluviométricos médios do Estado do Rio Grande do Norte. O modelo usado tem a expressão geral,

$$Y_i = f (X_{1i} , X_{2i} , X_{3i} ) + e_i ,$$

onde  $Y_i$  é a pluviosidade média de um determinado posto ou estação meteorológica ;  $X_{1i}$  ,  $X_{2i}$  ,  $X_{3i}$  representam latitude geográfica, longitude geográfica e altitude, respectivamente, desses postos ou estações ;  $e_i$  é um erro de natureza aleatória. Esse modelo foi conduzido até o quarto grau em cada variável.

#### Conclui:

- a - Das variáveis independentes estudadas, a longitude geográfica foi a que esteve presente em todas as equações ajustadas. Este fato sugere que a distância do oceano aliada aos ventos alísios é um fator de grande importância na ocorrência de chuvas.
- b - Em relação ao grau dos polinômios ajustados, houve predominância absoluta dos polinômios de terceiro e quarto graus.
- c - As equações dos meses mais secos demonstraram maior tendência a serem indefinidas.

### 3 - MATERIAL E MÉTODO

#### 3.1 - MATERIAL

Os dados de alturas pluviométricas foram fornecidos pelo Setor de Meteorologia do Departamento de Engenharia Rural da Escola Superior de Agricultura da Universidade Federal de Viçosa, Estado de Minas Gerais.

O pluviômetro usado na obtenção dos dados é do tipo "Ville de Paris", instalado no Posto Meteorológico de Viçosa e pertencente ao Ministério da Agricultura. O Posto está a 651,00 m de altitude, latitude  $20^{\circ}45' S$  e longitude  $42^{\circ}51' W$ .

Os dados referem-se às precipitações mensais de Viçosa, Minas Gerais, durante cinquenta anos, no período que vai de 1924 a 1973, tomados em milímetros e ajustados para meses de 30 dias. Esse procedimento, usado por TOPIL (1963) e AMARAL (1968), consiste na multiplicação da precipitação mensal pelo fator  $30/31$  nos meses de 31 dias, por  $30/29$  no mês de fevereiro dos anos bissextos e  $30/28$  no mês de fevereiro dos anos não bissextos.

#### 3.2 - MÉTODO

A metodologia usada basea-se nos trabalhos de CONRAD e POLLAK (1950), AMARAL (1968). O método é desenvolvido com auxílio da álgebra matricial, procedimento que facilita a sua exposição e compreensão.

### 3.2.1 - Desenvolvimento Teórico

Uma função  $f(t)$  tem período  $T$  ou é periódica de período  $T$  se, para todo  $t$ , ocorrer  $f(t + T) = f(t)$ , onde  $T$  é uma constante positiva. O menor valor de  $T > 0$  recebe o nome de período mínimo ou período de  $f(t)$ . Nessas condições, infere-se de imediato que:

$$f(t) = f(t + nT) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A função, representada pela série trigonométrica

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{sen}(j W_0 t + A_j)$$

é periódica, de período  $T$ , onde

$$W_0 = \frac{360^\circ}{T} \quad .$$

Séries como esta são chamadas séries trigonométricas de FOURIER.

A representação em série de FOURIER de uma função periódica é uma soma de componentes senoidais de frequências distintas. A componente senoidal de frequência  $W_n = n W_0$  é chamada de  $n$ -ésimo harmônico da função periódica. O primeiro harmônico é chamado de componente ou onda fundamental, porque tem o mesmo período da função e

$$W_0 = \frac{360^\circ}{T}$$

é chamada frequência angular fundamental. Os coeficientes  $a_j$  e os ângulos  $A_j$ , sendo  $a_j > 0$  e  $0 < A_j < 360^\circ$ , são denominados, respectivamente, amplitudes harmônicas e ângulos fase.

Desenvolvendo  $f(t)$ , tem-se:

$$f(t) = a_0 + a_1 \text{sen}(W_0 t + A_1) + a_2 \text{sen}(2 W_0 t + A_2) + \dots + \\ + a_k \text{sen}(K W_0 t + A_k) + \dots$$

$$f(t) = a_0 + a_1 (\text{sen } W_0 t \cos A_1 + \text{sen } A_1 \cos W_0 t) + \\ + a_2 (\text{sen } 2 W_0 t \cos A_2 + \text{sen } A_2 \cos 2 W_0 t) + \dots + \\ + a_k (\text{sen } K W_0 t \cos A_k + \text{sen } A_k \cos K W_0 t) + \dots$$

Fazendo,

$$p_1 = a_1 \text{sen } A_1, \quad p_2 = a_2 \text{sen } A_2, \quad \dots, \quad p_k = a_k \text{sen } A_k, \quad \dots$$

$$q_1 = a_1 \cos A_1, \quad q_2 = a_2 \cos A_2, \quad \dots, \quad q_k = a_k \cos A_k, \quad \dots$$

e substituindo em  $f(t)$ , tem-se:

$$f(t) = a_0 + p_1 \cos W_0 t + p_2 \cos 2 W_0 t + \dots + p_k \cos K W_0 t + \dots + \\ + q_1 \text{sen } W_0 t + q_2 \text{sen } 2 W_0 t + \dots + q_k \text{sen } K W_0 t + \dots$$

Considerando o  $n$ -ésimo harmônico, onde:

$$p_n = a_n \text{sen } A_n \quad \text{e} \quad q_n = a_n \cos A_n$$

tem-se:

$$p_n^2 + q_n^2 = a_n^2 \text{sen}^2 A_n + a_n^2 \cos^2 A_n$$

donde:

$$a_n = \left| \sqrt{p_n^2 + q_n^2} \right|$$

e também

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n \text{sen } A_n}{a_n \cos A_n} = \text{tg } A_n$$

ou ainda

$$A_n = \text{arc tg } \frac{p_n}{q_n}$$

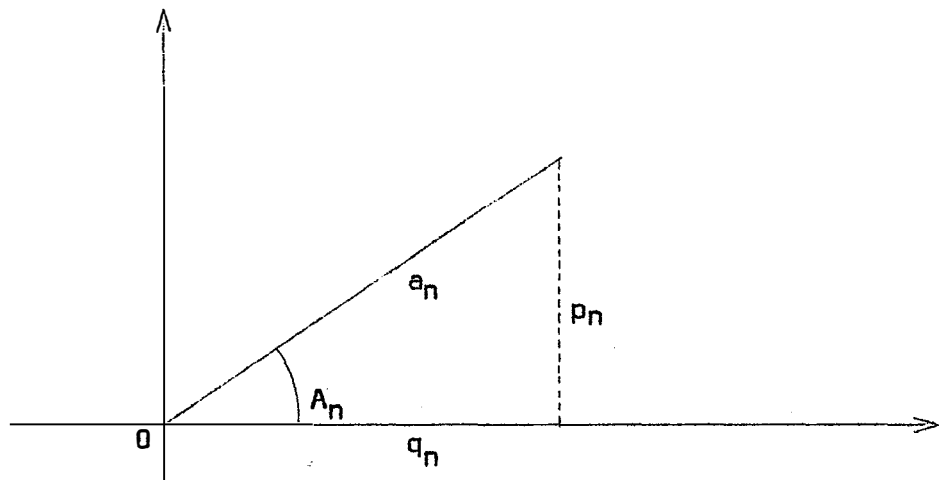


Fig. 1 - Representação gráfica de

$A_n$  ,  $a_n$  ,  $p_n$  e  $q_n$

O quadrante do ângulo fase é localizado facilmente, na Figura 2 , pelos sinais dos componentes harmônicos  $p$  e  $q$  .



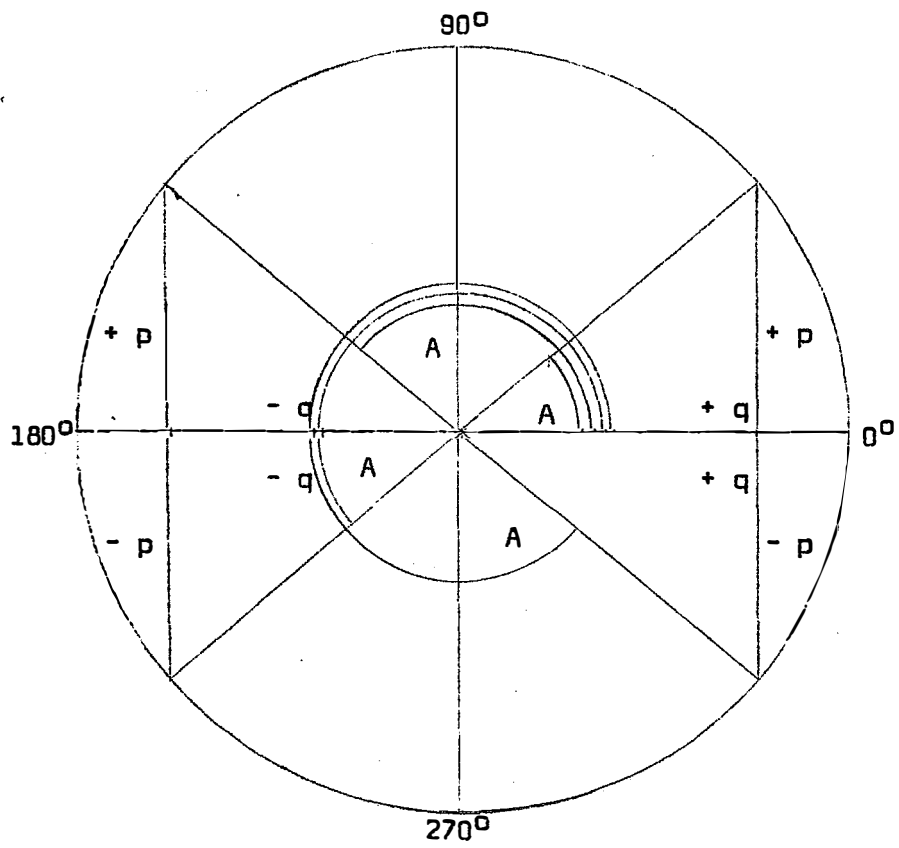


Fig. 2 - Identificação do Ângulo Fase no círculo trigonométrico.

### 3.2.1.1 - Estruturação do modelo matemático

A análise harmônica é um dos métodos de estudo dos fenômenos periódicos. Chamamos fenômenos periódicos aqueles cujos valores da variável dependente são repetidos em iguais intervalos da variável independente, ge - ralmente, tempo. Muitos fenômenos meteorológicos, astronômicos e geofísi - cos, como o número de manchas solares, o curso mensal e anual de elementos climáticos, como a precipitação por exemplo, são fenômenos classificados co - mo periódicos.

Se  $Y_t$  é a precipitação mensal, observada para  $t = 0, 1, 2, \dots, (T - 1)$ , respectivamente precipitações de janeiro, fevereiro, mar - ço, ..., dezembro, e sendo  $T$  o comprimento do período a ser estudado, o modelo matemático será:

$$Y_t = a_0 + p_1 \cos W_0 t + p_2 \cos 2 W_0 t + \dots + p_k \cos K W_0 t + \\ + q_1 \text{sen } W_0 t + q_2 \text{sen } 2 W_0 t + \dots + q_{k-1} \text{sen } (K - 1) W_0 t + e_t$$

onde  $K$  é o maior inteiro que não supera  $T/2$ ;  $(K - 1)$  é o maior inteiro que não supera  $(T - 1)/2$ ;  $e_t$  é o efeito residual da  $t$ -ésima observação, onde  $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ .

Pode-se ainda escrever:

$$Y_t - a_0 = p_1 \cos W_0 t + p_2 \cos 2 W_0 t + \dots + p_k \cos K W_0 t + \\ + q_1 \text{sen } W_0 t + q_2 \text{sen } 2 W_0 t + \dots + q_{k-1} \text{sen } (K-1) W_0 t + e_t$$

Fazendo-se  $y_t = Y_t - a_0$ , tem-se:

$$y_t = p_1 \cos W_0 t + p_2 \cos 2 W_0 t + \dots + p_k \cos K W_0 t + q_1 \text{sen } W_0 t + \\ + q_2 \text{sen } 2 W_0 t + \dots + q_{k-1} \text{sen } (K - 1) W_0 t + e_t$$

Matricialmente, pode-se representar o sistema por

$$Y = X \beta + \epsilon ,$$

onde

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{T-1} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \dots & \cos 0^\circ & \sin 0^\circ & \dots & \sin 0^\circ \\ \cos W_0 & \dots & \cos K W_0 & \sin W_0 & \dots & \sin (K - 1) W_0 \\ \cos 2 W_0 & \dots & \cos 2 K W_0 & \sin 2 W_0 & \dots & \sin 2 (K - 1) W_0 \\ \cos 3 W_0 & \dots & \cos 3 K W_0 & \sin 3 W_0 & \dots & \sin 3 (K - 1) W_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(T-1)W_0 & \dots & \cos K(T-1)W_0 & \sin(T-1)W_0 & \dots & \sin(T-1)(K-1)W_0 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{T-1} \end{pmatrix}$$

### 3.2.1.2 - Regressão periódica

Partindo-se do modelo

$$Y = X \beta + \varepsilon ,$$

obtem-se, aplicando o método dos quadrados mínimos, a solução do sistema

$$\beta = S^{-1} X' Y$$

onde

$\frac{T-1}{t^2_0} \cos^2 t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos t W_0 \cos K t W_0$	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos t W_0 \text{ sen } t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos t W_0 \text{ sen } (K-1) t W_0$
$\frac{T-1}{t^2_0} \cos 2 t W_0 \cos t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos 2 t W_0 \cos K t W_0$	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos 2 t W_0 \text{ sen } t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos 2 t W_0 \text{ sen } (K-1) t W_0$
...	...	...	...	...	...
$\frac{T-1}{t^2_0} \cos K t W_0 \cos t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos^2 K t W_0$	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos K t W_0 \text{ sen } t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \cos K t W_0 \text{ sen } (K-1) t W_0$
$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } t W_0 \cos t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } t W_0 \cos K t W_0$	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen}^2 t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } t W_0 \text{ sen } (K-1) t W_0$
$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } 2 t W_0 \cos t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } 2 t W_0 \cos K t W_0$	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } 2 t W_0 \text{ sen } t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } 2 t W_0 \text{ sen } (K-1) t W_0$
...	...	...	...	...	...
$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } (K-1) t W_0 \cos t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } (K-1) t W_0 \cos K t W_0$	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen } (K-1) t W_0 \text{ sen } t W_0$	...	$\frac{T-1}{t^2_0} \text{sen}^2 (K-1) t W_0$

S = X · X =

$$X' Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos t W_0 \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos 2 t W_0 \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos K t W_0 \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen t W_0 \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen 2 t W_0 \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen (K - 1) t W_0 \end{bmatrix}$$

Sendo

$$W_0 = \frac{360^\circ}{T} \quad \text{e} \quad T \geq 3 ,$$

pode-se comprovar que:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 J t W_0 = T/2 , \quad \text{para } J = 1, 2, \dots, (K - 1)$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 K t W_0 = T$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sen^2 J t W_0 = T/2 , \quad \text{para } J = 1, 2, \dots, (K - 1)$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos I t W_0 \sen J t W_0 = 0 , \quad \text{para } \begin{matrix} I = 1, 2, \dots, K \\ J = 1, 2, \dots, (K - 1) \end{matrix}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos J t W_0 \cos I t W_0 = 0 , \quad \text{para todo } \begin{matrix} J < I \text{ e} \\ J = 0, 1, \dots, (K - 1) \\ I = 1, 2, \dots, K \end{matrix}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sin J t W_0 \sin I t W_0 = 0, \text{ para todo } J < I \text{ e}$$

$$J = 0, 1, \dots, (K-1) - 1$$

$$I = 1, 2, \dots, (K-1)$$

Em vista disto, tem-se:

a) Quando T é par

$$S = X' X = \begin{pmatrix} T/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T/2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & T/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & T/2 \end{pmatrix}$$

e, conseqüentemente:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2/T & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2/T & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2/T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2/T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2/T \end{pmatrix}$$

Sendo

$$\hat{\beta} = S^{-1} X' Y, \quad ,$$

virã:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos t W_0 \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos 2 t W_0 \\ \vdots \\ (1/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos K t W_0 \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \text{sen } t W_0 \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \text{sen } 2 t W_0 \\ \vdots \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \text{sen } (K - 1) t W_0 \end{pmatrix}$$

b) Quanto T é ímpar

$$S = X' X = \begin{pmatrix} T/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T/2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & T/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & T/2 \end{pmatrix}$$

e analogamente ao caso anterior:



$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos t W_0 \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos 2 t W_0 \\ \vdots \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos K t W_0 \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \text{sen } t W_0 \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \text{sen } 2 t W_0 \\ \vdots \\ (2/T) \sum_{t=0}^{T-1} y_t \text{sen } (K - 1) t W_0 \end{pmatrix}$$

Nos dois casos,  $(T - 1)$  contrastes ortogonais são formados, ou

sejam:

$$\hat{\rho}_1 = 2/T \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos t W_0$$

$$\hat{\rho}_2 = 2/T \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos 2 t W_0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos K t W_0, \quad \text{quando } T \text{ é par}$$

ou:

$$p_k = 2/T \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos K t W_0, \quad \text{quando } T \text{ é ímpar}$$

$$q_1 = 2/T \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen t W_0$$

$$q_2 = 2/T \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen 2 t W_0$$

⋮ : ⋮ : ⋮ : ⋮ : ⋮ : ⋮ : ⋮ : ⋮ : ⋮

$$\hat{q}_{k-1} = 2/T \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen (K - 1) t W_0$$

### 3.2.1.3 - Análise de variância

Segundo AMARAL (1968), considerando um conjunto de  $N$  anos, deve ser feita uma análise harmônica para cada ano e uma outra para o conjunto dos anos. Isso significa que os  $2N$  contrastes do primeiro harmônico ou onda fundamental podem ser combinados de tal forma, fornecendo a soma dos quadrados das amplitudes de ondas casuais de mesmo período.

O processo, assim esboçado, equivale a uma análise de cada uma das ondas de períodos  $T, T/2, T/3, \dots, T/K$ , quando  $T$  é par ou  $T, T/2, T/3, \dots, T/(K-1)$ , quando  $T$  é ímpar.

Dividindo todas as precipitações mensais por  $N$  e subtraindo a média geral, fica constituída a matriz  $Z$  de dimensões  $(N \times T)$ . O produto  $Z \times S^{-1}$  será uma outra matriz, chamada  $C$ , que conterà os valores dos contrastes ortogonais para cada ano, ou seja:

$$C = Z X S^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{p}_{11} & \hat{p}_{21} & \cdots & \hat{p}_{K1} & \hat{q}_{11} & \hat{q}_{21} & \cdots & \hat{q}_{K-1, 1} \\ \hat{p}_{12} & \hat{p}_{22} & \cdots & \hat{p}_{K2} & \hat{q}_{12} & \hat{q}_{22} & \cdots & \hat{q}_{K-1, 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{p}_{1N} & \hat{p}_{2N} & \cdots & \hat{p}_{KN} & \hat{q}_{1N} & \hat{q}_{2N} & \cdots & \hat{q}_{K-1, N} \end{bmatrix}$$

Dai calcula-se:

$$\hat{p}_i = \sum_{j=1}^N \hat{p}_{ij}$$

e

$$\hat{q}_i = \sum_{j=1}^N \hat{q}_{ij}$$

É importante salientar que cada elemento  $c_{ij}$ , da matriz  $c$ , é um contraste de norma  $2/T$ , quando  $T$  é ímpar. Para  $T$  par, cada contraste  $\hat{p}_{Kj}$  terá norma  $1/T$  e os demais, norma  $2/T$ .

### 3.2.1.3.1 - Teste de normalidade

A fim de atender a uma das exigências do teste de  $F$ , a ser usado na análise de variância, a normalidade de cada contraste, envolvido na análise harmônica, é verificada.

Além disso, mesmo que todos os contrastes tenham distribuição aproximadamente normal, as suas variâncias residuais podem não ser homogêneas. Então, antes de serem feitas as análises conjuntas, as variâncias residuais são comparadas.

Tratando-se de grandes amostras, o melhor teste de normalidade é apresentado por FISHER (1941).

Segundo aquele autor, quando se trabalha com amostras relativamente grandes, as medidas de assimetria e curtose, respectivamente  $g_1$  e  $g_2$  têm distribuição normal de médias zero e desvios padrões dados pelas fórmulas:

$$s(\hat{g}_1) = \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}}$$

$$s(\hat{g}_2) = \sqrt{\frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}}$$

onde  $N$  é o número de anos.

As medidas  $g_1$  e  $g_2$  são:

$$\hat{g}_1 = \sqrt{\frac{W_3^2}{W_2^3}} \quad \hat{g}_2 = \frac{W_4}{W_2^2}$$

onde, por exemplo, para o contraste  $p_i$

$$W_2 = \frac{N \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{ij} - \bar{p}_i)^2}{N-1}$$

$$W_3 = \frac{N \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{ij} - \bar{p}_i)^3}{(N-1)(N-2)}$$

$$W_4 = \frac{N}{(N-1)(N-2)(N-3)} \left\{ (N+1) \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{ij} - \bar{p}_i)^4 - \frac{3(N-1)}{N} \left[ \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{ij} - \bar{p}_i)^2 \right]^2 \right\}$$

O teste usado para comparar as medidas  $g_1$  e  $g_2$  com as respectivas medidas de assimetria e curtose da distribuição normal, é o teste  $t$ , segundo o autor, com infinitos graus de liberdade.

Para testar  $g_1$ , são consideradas as hipóteses:

$$H_0 : g_1 = 0$$

$$H_1 : g_1 \neq 0$$

$$t_1 = \frac{\hat{g}_1}{s(\hat{g}_1)}$$

Analogamente, para  $g_2$ , temos:

$$H_0 : g_2 = 0$$

$$H_1 : g_2 \neq 0$$

$$t_2 = \frac{\hat{g}_2}{s(\hat{g}_2)}$$

Estabelecido o nível de significância  $\alpha$ , se os valores de  $t$  calculados forem menores que o valor de  $t$  tabelado, são aceitas as hipóteses de nulidade, concluindo-se que a distribuição de  $p_1$  é aproximadamente normal.

### 3.2.1.3.2 - Quadros de análises

Segundo AMARAL (1968), a análise de variância da onda fundamental, por exemplo, será:

a - Análise de Variância da Componente  $\hat{p}_1$

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.
Contraste $\hat{p}_1$	1	$T/2 \left[ \frac{(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{1j})^2}{N} \right] = Q_{11}$	$Q_{11}$
Variação do contraste entre anos	(N - 1)	$T/2 \left[ \sum_{j=1}^N \hat{p}_{1j}^2 - \frac{(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{1j})^2}{N} \right] = Q_{12}$	$\frac{Q_{12}}{(N - 1)}$
Variação total	N	$T/2 (\sum_{j=1}^N \hat{p}_{1j}^2) = Q_{11} + Q_{12}$	

b - Análise de Variância da Componente  $\hat{q}_1$

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.
Contraste $\hat{q}_1$	1	$T/2 \left[ \frac{(\sum_{j=1}^N \hat{q}_{1j})^2}{N} \right] = Q_{13}$	$Q_{13}$
Variação do contraste entre anos	(N - 1)	$T/2 \left[ \sum_{j=1}^N \hat{q}_{1j}^2 - \frac{(\sum_{j=1}^N \hat{q}_{1j})^2}{N} \right] = Q_{14}$	$\frac{Q_{14}}{(N - 1)}$
Variação total	N	$T/2 (\sum_{j=1}^N \hat{q}_{1j}^2) = Q_{13} + Q_{14}$	

As variâncias residuais das componentes da onda fundamental são comparadas, segundo BOX (1954), e, sendo consideradas homogêneas, é feita a análise conjunta, ou seja:

c - Análise de Variância da Amplitude  $\hat{a}_1$

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.
Amplitude $\hat{a}_1$	2	$Q_{11} + Q_{13}$	$\frac{(Q_{11} + Q_{13})}{2}$
Variação da Amplitude entre anos	$2(N - 1)$	$Q_{12} + Q_{14}$	$\frac{(Q_{12} + Q_{14})}{2(N - 1)}$
Variação total	$2N$	$Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14}$	

A análise da amplitude da onda de período  $T/K$ , quando  $T$  é par, é modificada em relação à análise anterior. Sendo

$$\hat{a}_K = \left| \hat{p}_K \right| e \hat{p}_{Kj} ,$$

para  $j = 1, 2, \dots, N$ , contrastes de normas iguais a  $1/T$ , o quadro de análise desta amplitude será:

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.
Amplitude $\hat{a}_K$	1	$T \left[ \frac{(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{Kj})^2}{N} \right] = Q_{K1}$	$Q_{K1}$
Variação da <u>Amplitude</u> entre anos	(N - 1)	$T \left[ \sum_{j=1}^N \hat{p}_{Kj}^2 - \frac{(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{Kj})^2}{N} \right] = Q_{K2}$	$\frac{Q_{K2}}{(N - 1)}$
Variação total	N	$T \left( \sum_{j=1}^N \hat{p}_{Kj}^2 \right) = Q_{K1} + Q_{K2}$	

Realizadas as análises das diversas amplitudes, são comparados os seus quadrados médios residuais. Se estes quadrados médios forem homogêneos, será feita a análise conjunta das K amplitudes, da seguinte forma:



1 - Para T par:

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.
Amplitude $\hat{a}_1$	2	$Q_{11} + Q_{13}$	$\frac{(Q_{11} + Q_{13})}{2}$
Amplitude $\hat{a}_2$	2	$Q_{21} + Q_{23}$	$\frac{(Q_{21} + Q_{23})}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Amplitude $\hat{a}_K$	1	$Q_{K1}$	$Q_{K1}$
Resíduo	$(2K-1)(N-1)$	$Q_{12} + Q_{14} + Q_{22} + Q_{24} + \dots + Q_{K2}$	$\frac{(Q_{12} + Q_{14} + Q_{22} + Q_{24} + \dots + Q_{K2})}{(2K-1)(N-1)}$
Total	$N(2K-1)$	$\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=1}^4 Q_{ij} + Q_{K1} + Q_{K2}$	

2 - Para T ímpar:

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.
Amplitude $\hat{a}_1$	2	$Q_{11} + Q_{13}$	$\frac{(Q_{11} + Q_{13})}{2}$
Amplitude $\hat{a}_2$	2	$Q_{21} + Q_{23}$	$\frac{(Q_{21} + Q_{23})}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Amplitude $\hat{a}_k$	1	$Q_{k1} + Q_{k3}$	$\frac{(Q_{k1} + Q_{k3})}{2}$
Resíduo	$(2K)(N - 1)$	$Q_{12} + Q_{14} + Q_{22} + Q_{24} + \dots + Q_{k2} + Q_{k4}$	$\frac{(Q_{12} + Q_{14} + Q_{22} + Q_{24} + \dots + Q_{k2} + Q_{k4})}{2K(N - 1)}$
Total	$2KN$	$K \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^4 Q_{ij}$	

A análise conjunta das  $K$  amplitudes tem por objetivo mostrar que as ondas harmônicas desdobram o número de graus de liberdade devido a meses, além de possibilitar a determinação dos intervalos de confiança dos contrastes, envolvidos na análise harmônica.

Selecionadas as ondas significativas e estabelecida a equação de regressão, para cada caso em estudo, são apresentados os gráficos das ondas significativas, da síntese dessas ondas (soma das ondas significativas) e, por fim, o gráfico das precipitações estimadas.

Os pequenos círculos, encontrados nos gráficos das precipitações estimadas, são os valores das precipitações observadas, em cada tempo.

#### 3.2.1.4 - Coeficiente de correlação e determinação

Em muitos casos, não há razão para se pensar em uma variável como dependente da outra, entretanto é de grande utilidade saber a medida de relação existente entre elas, em outras palavras, do seu grau de associação.

No presente trabalho, tenta-se estabelecer uma relação entre tempo e altura pluviométrica. O grau de associação entre as duas variáveis é medido pelo coeficiente de correlação.

### 3.2.1.5 - Intervalos de confiança

De posse das estimativas  $\hat{p}_1$  e  $\hat{q}_1$  e sendo  $s^2$  o quadrado médio residual, obtido na análise conjunta das amplitudes, com  $\underline{n}$  graus de liberdade, os intervalos de confiança para  $p_1$  e  $q_1$  serão:

$$\hat{p}_1 - t \cdot s \leq p_1 \leq \hat{p}_1 + t s$$

$$\hat{q}_1 - t \cdot s \leq q_1 \leq \hat{q}_1 + t s$$

onde  $\underline{t}$  é obtido na tabela de  $\underline{t}$  para o teste bilateral, com  $\underline{n}$  graus de liberdade e nível de significância  $\alpha$ .

#### 4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

A metodologia exposta foi usada em três casos. Inicialmente, o objetivo foi estimar as precipitações do período chuvoso (outubro a março). A seguir, foram estimadas as precipitações mensais do período seco (abril a setembro) e, finalmente, foram estimadas as precipitações mensais de janeiro a dezembro.

##### 4.1 - ESTIMATIVA DAS PRECIPITAÇÕES MENSIS DO PERÍODO CHUVOSO (Outubro a Março)

Para  $T = 6$ , o modelo matemático tem a forma

$$y_t = p_1 \cos t W_0 + p_2 \cos 2 t W_0 + p_3 \cos 3 t W_0 + q_1 \sin t W_0 + q_2 \sin 2 t W_0 + e_t$$

onde:

$$W_0 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$t = 0, 1, \dots, 5$$

Sendo  $\bar{Y}$  a precipitação média do período, tem-se:

$$a_0 : \bar{Y} = \frac{53.417,80}{300} = 178,06$$

Matricialmente,

$$Y = X \beta + \epsilon$$

onde:

MATRIZ Y

$$Y = \begin{bmatrix} 111,30 - 178,06 \\ 195,80 - 178,06 \\ 247,20 - 178,06 \\ 209,90 - 178,06 \\ 169,60 - 178,06 \\ 134,60 - 178,06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - 66,76 \\ 17,74 \\ 69,14 \\ 31,84 \\ - 8,46 \\ - 43,46 \end{bmatrix}$$

MATRIZ X

$$X = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,500 & - 0,500 & - 1,000 & 0,866 & 0,866 \\ - 0,500 & - 0,500 & 1,000 & 0,866 & - 0,866 \\ - 1,000 & 1,000 & - 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ - 0,500 & - 0,500 & 1,000 & - 0,866 & 0,866 \\ 0,500 & - 0,500 & - 1,000 & - 0,866 & - 0,866 \end{bmatrix}$$

MATRIZ  $\beta$

$$\beta = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

MATRIZ  $S = X' X$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZ X' Y

$$X' Y = \begin{vmatrix} - 141,80 \\ - 52,40 \\ - 12,20 \\ 120,20 \\ - 14,20 \end{vmatrix}$$

A solução do sistema, obtida pelo método dos quadrados mínimos é  $\hat{\beta} = S^{-1} X' Y$ , logo:

$$\hat{\beta} = \begin{vmatrix} - 47,267 \\ - 17,467 \\ - 2,033 \\ 40,067 \\ - 4,733 \end{vmatrix}$$

donde:

$$\hat{p}_1 = - 47,267$$

$$\hat{p}_2 = - 17,467$$

$$\hat{p}_3 = - 2,033$$

$$\hat{q}_1 = 40,067$$

$$\hat{q}_2 = - 4,733$$

Consequentemente, sendo

$$\hat{a}_1 = \left| \sqrt{\hat{p}_1^2 + \hat{q}_1^2} \right| \quad \text{e} \quad \hat{A}_1 = \text{arc tg} \frac{\hat{p}_1}{\hat{q}_1},$$

tem-se:

$$\hat{a}_1 = 61,9640$$

$$\hat{a}_2 = 18,0969$$

$$\hat{a}_3 = 2,0330$$

$$\hat{A}_1 = 310^\circ,29$$

$$\hat{A}_2 = 254^\circ,84$$

$$\hat{A}_3 = 270^\circ,00$$

4.1.1 - Análise de Variância

4.1.1.1 - Teste de normalidade

A matriz  $C$  ou dos contrastes, para o período chuvoso, está no Apêndice II .

As medidas de assimetria e curtose, respectivamente  $g_1$  e  $g_2$  , são apresentadas no Quadro I . O Quadro II contém os valores para a prova de  $t$  .

QUADRO I - Medidas de assimetria e curtose

Contrastes	$W_2$	$W_3$	$W_4$	Medidas	
				$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$
$\hat{p}_1$	1,308	- 0,262	- 1,085	- 0,175	- 0,634
$\hat{p}_2$	0,941	- 0,426	- 0,211	- 0,467	- 0,238
$\hat{p}_3$	0,539	- 0,075	- 0,034	- 0,189	- 0,117
$\hat{q}_1$	1,123	0,224	- 0,120	0,188	- 0,095
$\hat{q}_2$	1,017	0,460	0,733	0,448	0,708

$$s(\hat{g}_1) = \sqrt{\frac{6 \cdot 50 \cdot 49}{48 \cdot 51 \cdot 53}} = 0,337$$

$$s(\hat{g}_2) = \sqrt{\frac{24 \cdot 50 \cdot 49^2}{47 \cdot 48 \cdot 53 \cdot 55}} = 0,662$$



QUADRO II - Valores para a prova de  $\underline{t}$

Contraste	$\underline{t}$ calculado	
	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$
$\hat{p}_1$	0,519	0,958
$\hat{p}_2$	1,386	0,359
$\hat{p}_3$	0,561	0,177
$\hat{q}_1$	0,558	0,143
$\hat{q}_2$	1,329	1,069

O valor de  $\underline{t}$  tabelado, para infinitos graus de liberdade e  $\alpha = 0,05$ , é 1,96. Os  $\underline{t}$  calculados são menores que o  $\underline{t}$  tabelado e, desta forma, aceita-se as hipóteses de nulidade, ou seja:  $g_1 = 0$  e  $g_2 = 0$ . Conclui-se, então, que os parâmetros envolvidos na análise de regressão têm uma distribuição aproximadamente normal.

#### 4.1.1.2 - Quadros das análises de variâncias

##### a - Análise de Variância da onda semestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_1$	1	134,0502	134,0502	34,15 **
Varição do contraste entre anos	49	192,3144	3,9248	
Total	50	326,3646		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{q}_1$	1	96,3219	96,3219	28,59 **
Variação do contraste entre anos	49	165,0873	3,3691	
<b>Total</b>	<b>50</b>	<b>261,4092</b>		

Segundo BOX (1954) as variâncias residuais dos contrastes  $\hat{p}_1$  e  $\hat{q}_1$  são homogêneas, logo pode ser feita a análise conjunta, como se segue:

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_1$	2	230,3721	115,1861	31,58 **
Variação da amplitude entre anos	98	357,4017	3,6470	
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>587,7738</b>		

b - Análise de Variância da onda trimestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_2$	1	18,3057	18,3057	6,48 **
Variação do contraste entre anos	49	138,3531	2,8235	
<b>Total</b>	<b>50</b>	<b>156,6588</b>		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $q_2$	1	1,3440	1,3440	0,44
Variação do contraste entre anos	49	149,5425	3,0519	
Total	50	150,8865		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_2$	2	19,6497	9,8248	3,34 **
Variação da amplitude entre anos	98	287,8956	2,9377	
Total	100	307,5453		

c - Análise de Variância da onda bimestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_3$	1	0,4962	0,4962	0,18
Variação da amplitude entre anos	49	134,2104	2,7390	
Total	50	134,7066		

4.1.2 - Equação de Regressão

Foram significativas as ondas semestral e trimestral, logo a equação de regressão será:

$$\hat{y}_t = 61,9640 \text{ sen } (60 t + 310,29)^\circ + 18,0969 \text{ sen } (120 t + 254,84)^\circ$$

$$\hat{Y}_t - a_0 = 61,9640 \text{ sen } (60 t + 310,29)^\circ + 18,0969 \text{ sen } (120 t + 254,84)^\circ$$

$$\hat{Y}_t = 178,06 + 61,9640 \text{ sen } (60 t + 310,29)^\circ + 18,0969 \text{ sen } (120 t + 254,84)^\circ$$

Os gráficos das ondas significativas, semestral e trimestral, são apresentados a seguir com os gráficos da síntese e das precipitações estimadas. Os pequenos círculos, encontrados na representação gráfica das precipitações estimadas, indicam os valores observados no tempo  $t$ .

Meses	Onda semestral 61,9640 sen (60 t + 310,29) <sup>°</sup>	Onda trimestral 18,0969 sen (120 t + 254,84) <sup>°</sup>	Síntese (Onda semestral + Onda trimestral)
Outubro	- 47,27	- 17,47	- 64,74
Novembro	11,07	4,64	15,71
Dezembro	58,33	12,83	71,16
Janeiro	47,27	- 17,47	29,80
Fevereiro	- 11,07	4,64	- 6,43
Março	- 58,33	12,83	- 45,50

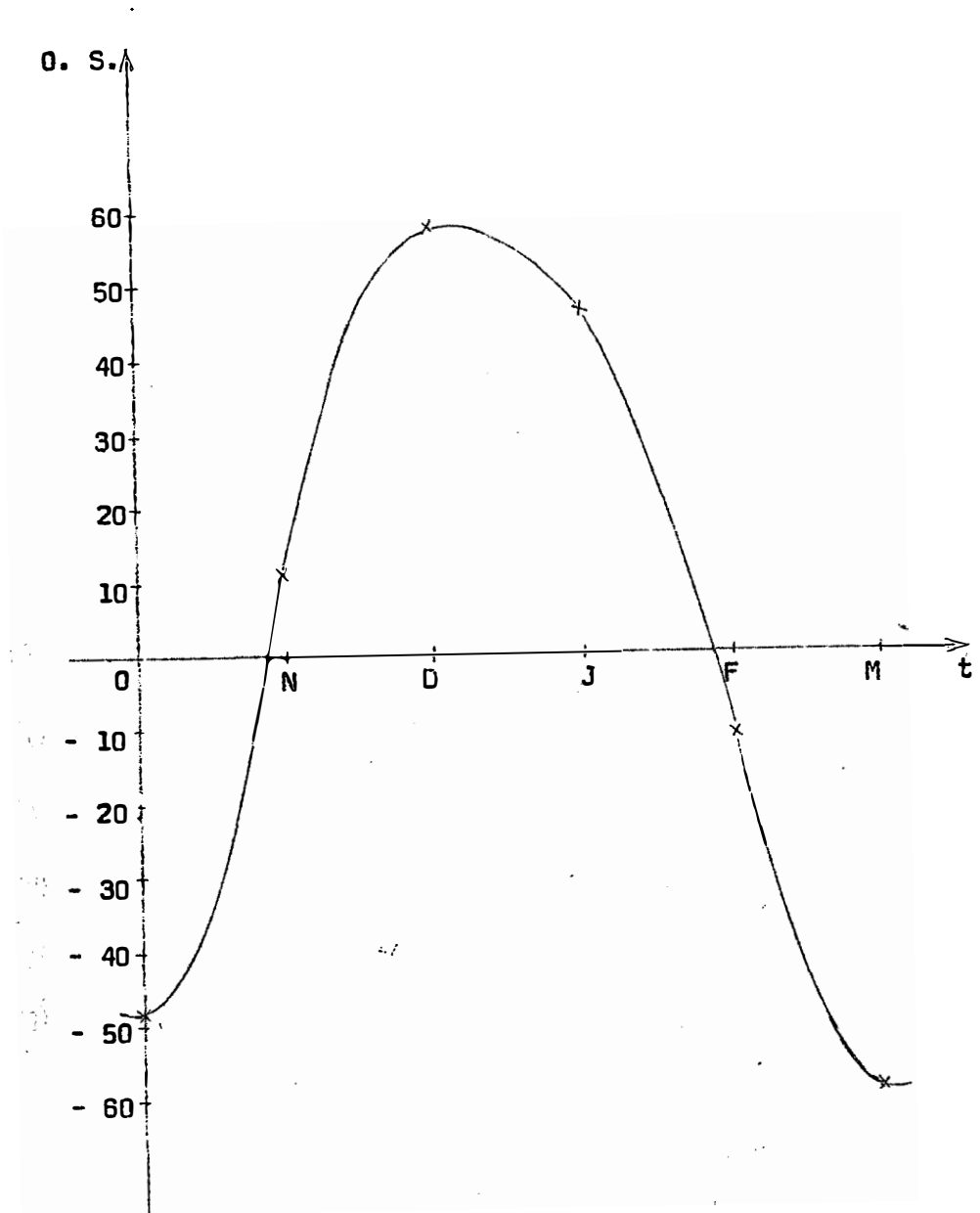


Fig. 3 - Gráfico da Onda Semestral

$$O.S.(t) = 61,9640 \text{ sen } (60 t + 310,29)^\circ$$

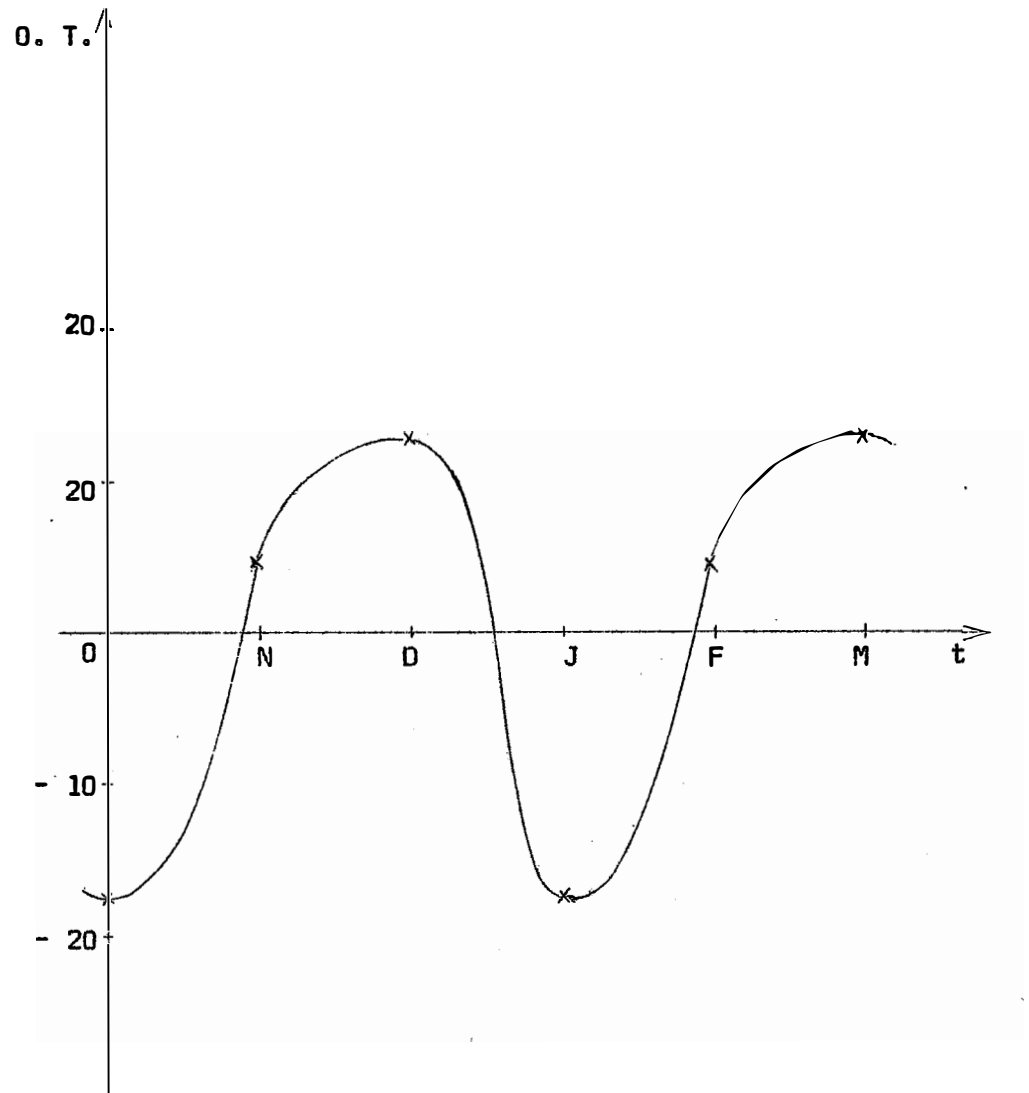


Fig. 4 - Gráfico da Onda Trimestral

$$O.T. (t) = 18,0969 \text{ sen } (120 t + 254,84)^\circ$$

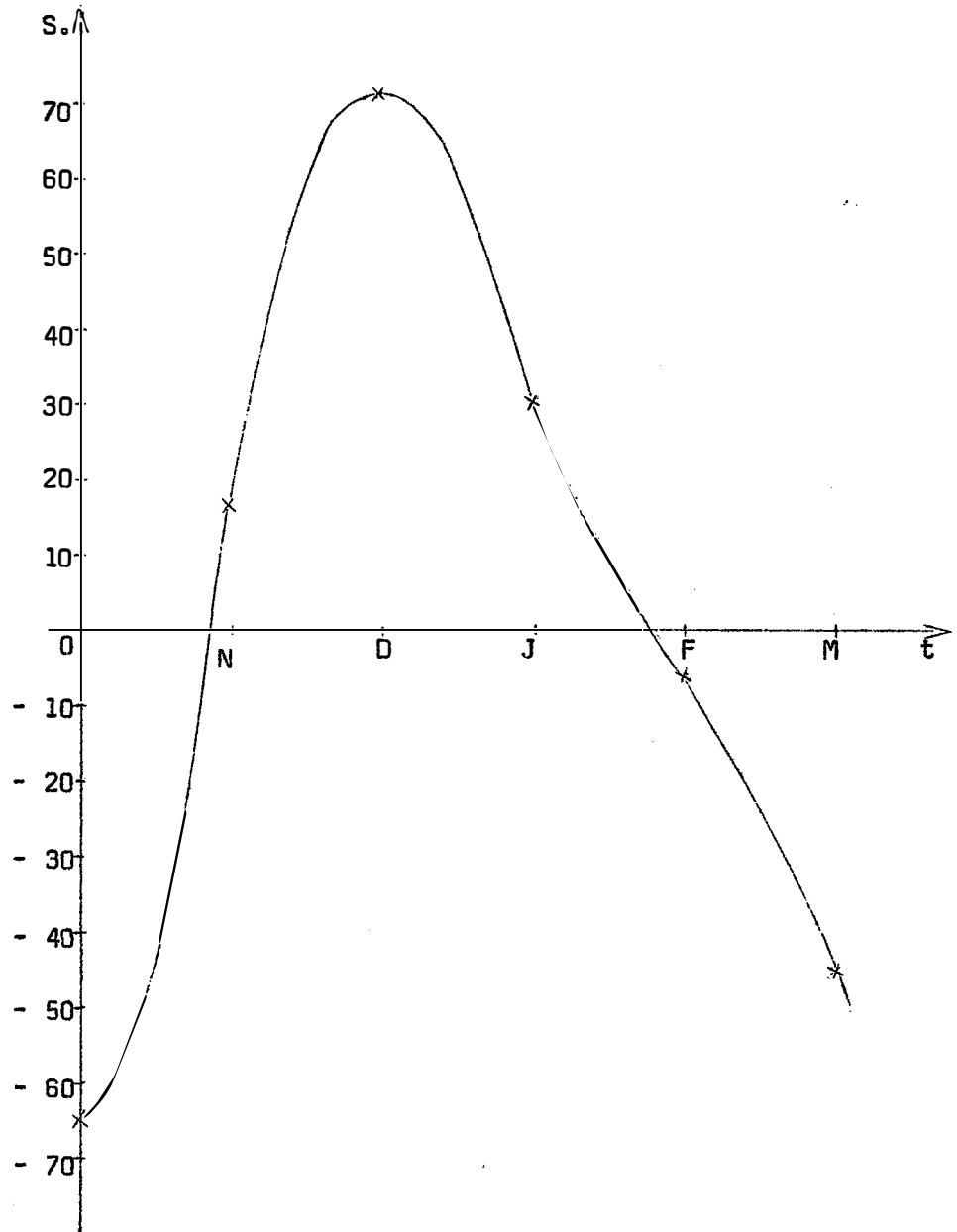


Fig. 5 - Síntese das Duas Ondas

$$S_c(t) = 61,9640 \text{ sen } (60 t + 310,29)^\circ + \\ + 18,0969 \text{ sen } (120 t + 254,84)^\circ$$

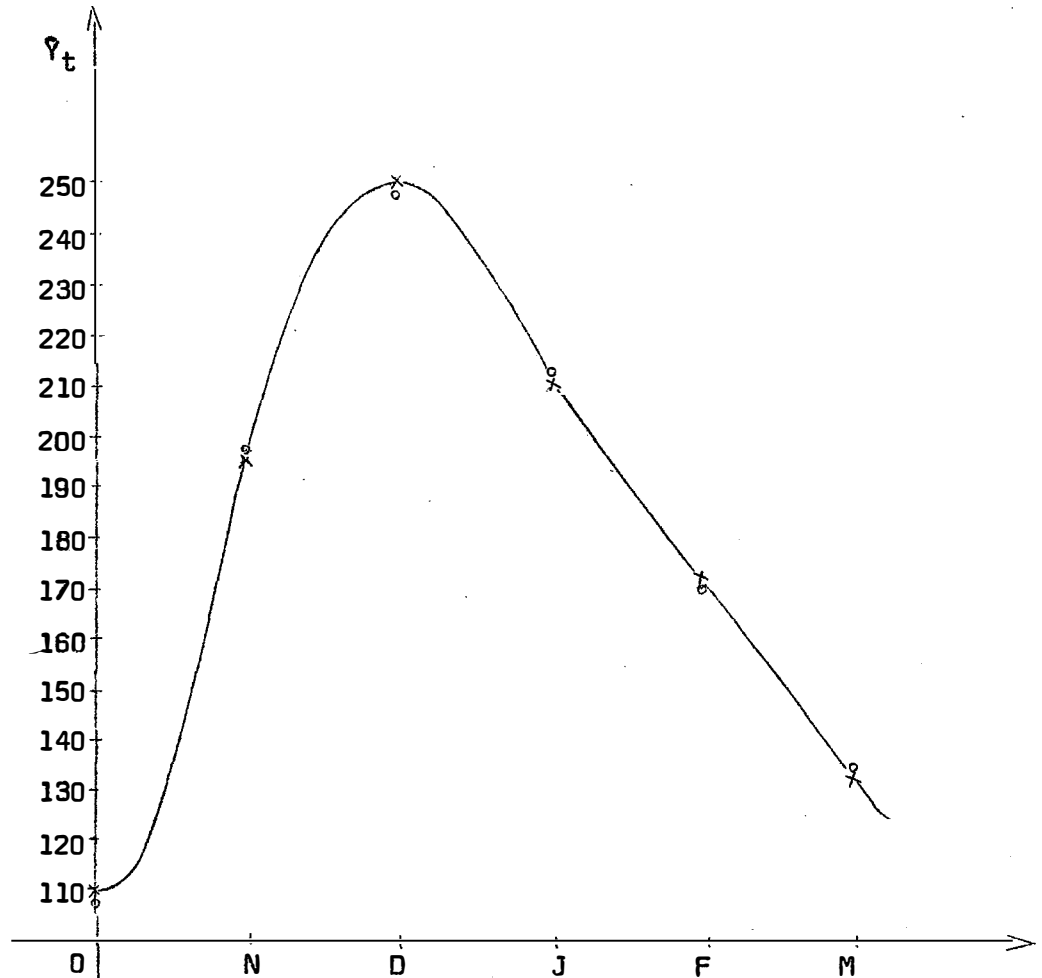


Fig. 6 - Gráfico da Equação de Regressão

$$\varphi_t = 178,06 + 61,9640 \text{ sen } (60 t + 310,29)^\circ + 18,0969 \text{ sen } (120 t + 254,84)^\circ$$

o Valores observados

x Valores estimados



4.1.3 - Coefficientes de Correlação e Determinação

Meses	t	$Y_t$ (mm)	$\hat{Y}_t$ (mm)	$Y_t - \bar{Y}$	$\hat{Y}_t - \bar{Y}$
Outubro	0	111,3	113,3	- 66,76	- 64,76
Novembro	1	195,8	193,8	17,74	15,74
Dezembro	2	247,2	249,2	69,14	71,14
Janeiro	3	209,9	207,9	31,84	29,84
Fevereiro	4	169,6	171,6	- 8,46	- 6,46
Março	5	134,6	132,6	- 43,46	- 45,46

$$\sum_{t=0}^5 (Y_t - \bar{Y})^2 = (- 66,76)^2 + (17,74)^2 + \dots + (- 43,46)^2 = 12.526,0736$$

$$\sum_{t=0}^5 (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 = (- 64,76)^2 + (15,74)^2 + \dots + (- 45,46)^2 = 12.501,2736$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^5 (Y_t - \bar{Y})(\hat{Y}_t - \bar{Y}) &= (- 66,76)(- 64,76) + (17,74)(15,74) + \dots + \\ &+ (- 43,46)(- 45,46) = 12.501,6736 \end{aligned}$$

$$r = \frac{\sum_{t=0}^5 (Y_t - \bar{Y})(\hat{Y}_t - \bar{Y})}{\sqrt{\left[ \sum_{t=0}^5 (Y_t - \bar{Y})^2 \right] \left[ \sum_{t=0}^5 (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 \right]}} = \frac{12.501,6736}{12.513,6675}$$

$$r = 0,9990$$

$$r^2 = 0,9980$$

4.1.4 - Intervalos de Confiança

Comparando os quadrados médios residuais das três amplitudes, usando o F bilateral, conclui-se que são homogêneos, podendo ser feita a análise conjunta das três amplitudes.

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_1$	2	230,3721	115,1861	36,20
Amplitude $\hat{a}_2$	2	19,6497	9,8248	3,09
Amplitude $\hat{a}_3$	1	0,4962	0,4962	0,16
Resíduo	245	779,5077	3,1817	
<b>Total</b>	<b>250</b>	<b>1.030,0257</b>		

A matriz dispersão é  $D = S^{-1} \hat{\sigma}^2$

$$D = \begin{vmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} \cdot 3,1817$$

logo:

$$\hat{V}(\hat{p}_1) = \hat{V}(\hat{p}_2) = \hat{V}(\hat{q}_1) = \hat{V}(\hat{q}_2) = 1,0610$$

$$\hat{V}(\hat{p}_3) = 0,5303$$

$$s(\hat{p}_1) = s(\hat{p}_2) = s(\hat{q}_1) = s(\hat{q}_2) = 1,0300$$

$$s(\hat{p}_3) = 0,7282$$

Os intervalos de confiança de  $p_i$  e  $q_i$  serão, respectivamente:

$$\hat{p}_i - t s (\hat{p}_i) \leq p_i \leq \hat{p}_i + t s (\hat{p}_i)$$

$$\hat{q}_i - t s (\hat{q}_i) \leq q_i \leq \hat{q}_i + t s (\hat{q}_i)$$

sendo

$$t_{0,05} (245) = 1,96$$

virá:

$$- 49,286 \leq p_1 \leq - 45,248$$

$$- 19,486 \leq p_2 \leq - 15,448$$

$$- 3,460 \leq p_3 \leq - 0,606$$

$$38,048 \leq q_1 \leq 42,086$$

$$- 6,752 \leq q_2 \leq - 2,714$$

Isto significa que, em 95% dos casos, os intervalos de confiança estimados cobrirão os verdadeiros valores dos contrastes.

#### 4.2 - ESTIMATIVA DAS PRECIPITAÇÕES MENSAIS DO PERÍODO SECO (Abril a Setembro)

Analogamente ao caso anterior,

$$y_t = p_1 \cos W_0 t + p_2 \cos 2 W_0 t + p_3 \cos 3 W_0 t + q_1 \sen W_0 t + \\ + q_2 \sen 2 W_0 t + e_t$$

onde:

$$W_0 = 60^\circ .$$

A média geral do período é

$$\bar{Y} = a_0 = 28,92 .$$

MATRIZ Y

$$Y = \begin{vmatrix} 60,60 - 28,92 \\ 25,30 - 28,92 \\ 17,10 - 28,92 \\ 13,20 - 28,92 \\ 13,80 - 28,92 \\ 43,60 - 28,92 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 31,68 \\ - 3,62 \\ - 11,82 \\ - 15,72 \\ - 15,12 \\ 14,68 \end{vmatrix}$$

As matrizes X ,  $\beta$  , S são iguais às do caso anterior.

$$X' Y = \begin{vmatrix} 66,40 \\ 23,90 \\ 9,40 \\ - 12,99 \\ - 18,71 \end{vmatrix}$$

A solução do sistema é

$$\hat{\beta} = \begin{vmatrix} 22,133 \\ 7,967 \\ 1,567 \\ - 4,330 \\ - 6,237 \end{vmatrix}$$

onde:

$$\hat{p}_1 = 22,133$$

$$\hat{p}_2 = 7,967$$

$$\hat{p}_3 = 1,567$$

$$\hat{q}_1 = - 4,330$$

$$\hat{q}_2 = - 6,237$$

Sendo

$$\hat{a}_i = \left| \sqrt{\hat{p}_i^2 + \hat{q}_i^2} \right| \quad e$$

$$\hat{A}_i = \text{arc tg } \frac{\hat{p}_i}{\hat{q}_i} ,$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= 22,5526 & \hat{A}_1 &= 101^{\circ},07 \\ \hat{a}_2 &= 10,1180 & \hat{A}_2 &= 128^{\circ},06 \\ \hat{a}_3 &= 1,5670 & \hat{A}_3 &= 90^{\circ},00 \end{aligned}$$

4.2.1 - Análise de Variância

4.2.1.1 - Teste de normalidade

QUADRO III - Medidas de assimetria e curtose

Contrastes	W <sub>2</sub>	W <sub>3</sub>	W <sub>4</sub>	Medidas	
				$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$
$\hat{p}_1$	0,100	- 0,004	- 0,003	- 0,126	- 0,300
$\hat{p}_2$	0,084	- 0,002	- 0,005	- 0,082	- 0,071
$\hat{p}_3$	0,050	- 0,002	0,003	- 0,179	1,200
$\hat{q}_1$	0,093	- 0,010	- 0,002	- 0,352	- 0,231
$\hat{q}_2$	0,093	- 0,002	0,011	- 0,071	1,271

$$s(\hat{g}_1) = \sqrt{\frac{6 \cdot 50 \cdot 49}{48 \cdot 51 \cdot 53}} = 0,337$$

$$s(\hat{g}_2) = \sqrt{\frac{24 \cdot 50 \cdot 49^2}{47 \cdot 48 \cdot 53 \cdot 55}} = 0,662$$

QUADRO IV - Valores para a prova de  $\underline{t}$

Contraste	$\underline{t}$ calculado	
	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$
$\hat{p}_1$	0,374	0,453
$\hat{p}_2$	0,243	0,107
$\hat{p}_3$	0,531	1,813
$\hat{q}_1$	1,044	0,349
$\hat{q}_2$	0,211	1,920

O valor de  $\underline{t}$  tabelado, para infinitos graus de liberdade e  $\alpha = 0,05$ , é 1,96. Os  $\underline{t}$  calculados são menores que o  $\underline{t}$  tabelado. São aceitas, desta forma, as hipóteses de nulidade e conclui-se que os contrastes se distribuem normalmente.

#### 4.2.1.2 - Quadros das análises de variâncias

a - Análise de variância da onda semestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_1$	1	29,3922	29,3922	99,40 **
Variação do contraste entre anos	49	14,4912	0,2957	
Total	50	43,8834		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{q}_1$	1	1,1250	1,1250	4,05 *
Variação do contraste entre anos	49	13,6014	0,2776	
Total	50	14,7264		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_1$	2	30,5172	15,2586	53,22 **
Variação da amplitude entre anos	98	28,0926	0,2867	
Total	100	58,6098		

b - Análise de variância da onda trimestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_2$	1	3,8085	3,8085	14,95 **
Variação do contraste entre anos	49	12,4809	0,2547	
Total	50	16,2894		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{q}_2$	1	2,3340	2,3340	8,38 **
Variação do contraste entre anos	49	13,6452	0,2785	
Total	50	15,9792		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_2$	2	6,1425	3,0713	11,52 **
Variação da amplitude entre anos	98	26,1261	0,2666	
Total	100	32,2686		

c - Análise de variância da onda bimestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_3$	1	0,2946	0,2946	0,99
Variação da amplitude entre anos	49	14,6286	0,2985	
Total	50	14,9232		

4.2.2 - Equação de Regressão

Foram significativas as ondas semestral e trimestral.

A equação de regressão é

$$\hat{y}_t = 22,5526 \text{ sen } (60 t + 101,07)^\circ + 10,1180 \text{ sen } (120 t + 128,06)^\circ$$

$$\hat{y}_t = a_0 = 22,5526 \text{ sen } (60 t + 101,07)^\circ + 10,1180 \text{ sen } (120 t + 128,06)^\circ$$

$$\hat{y}_t = 28,92 + 22,5526 \text{ sen } (60 t + 101,07)^\circ + 10,1180 \text{ sen } (120 t + 128,06)^\circ$$



Meses	Onda semestral 22,5526 sen (60 t + 101,07) <sup>0</sup>	Onda trimestral 10,1180 sen (120 t + 128,06) <sup>0</sup>	Síntese (Onda semestral + Onda trimestral)
Abril	22,13	7,97	30,10
Maió	7,32	- 9,38	- 2,06
Junho	- 14,82	1,42	- 13,40
Julho	- 22,13	7,97	- 14,16
Agosto	- 7,32	- 9,38	- 16,70
Setembro	14,82	1,42	16,24

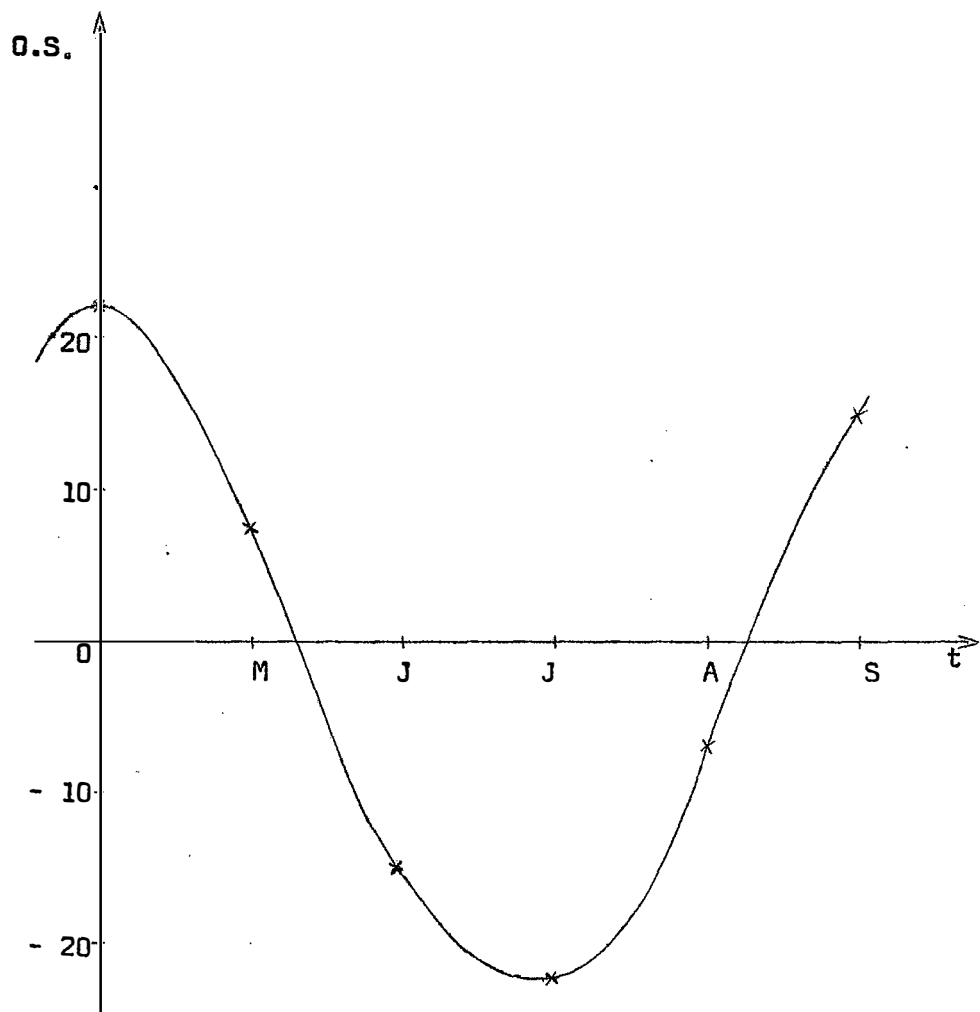


Fig. 7 - Gráfico da Onda Semestral

$$O.S.(t) = 22,5526 \text{ sen } (60 t + 101,07)^\circ$$

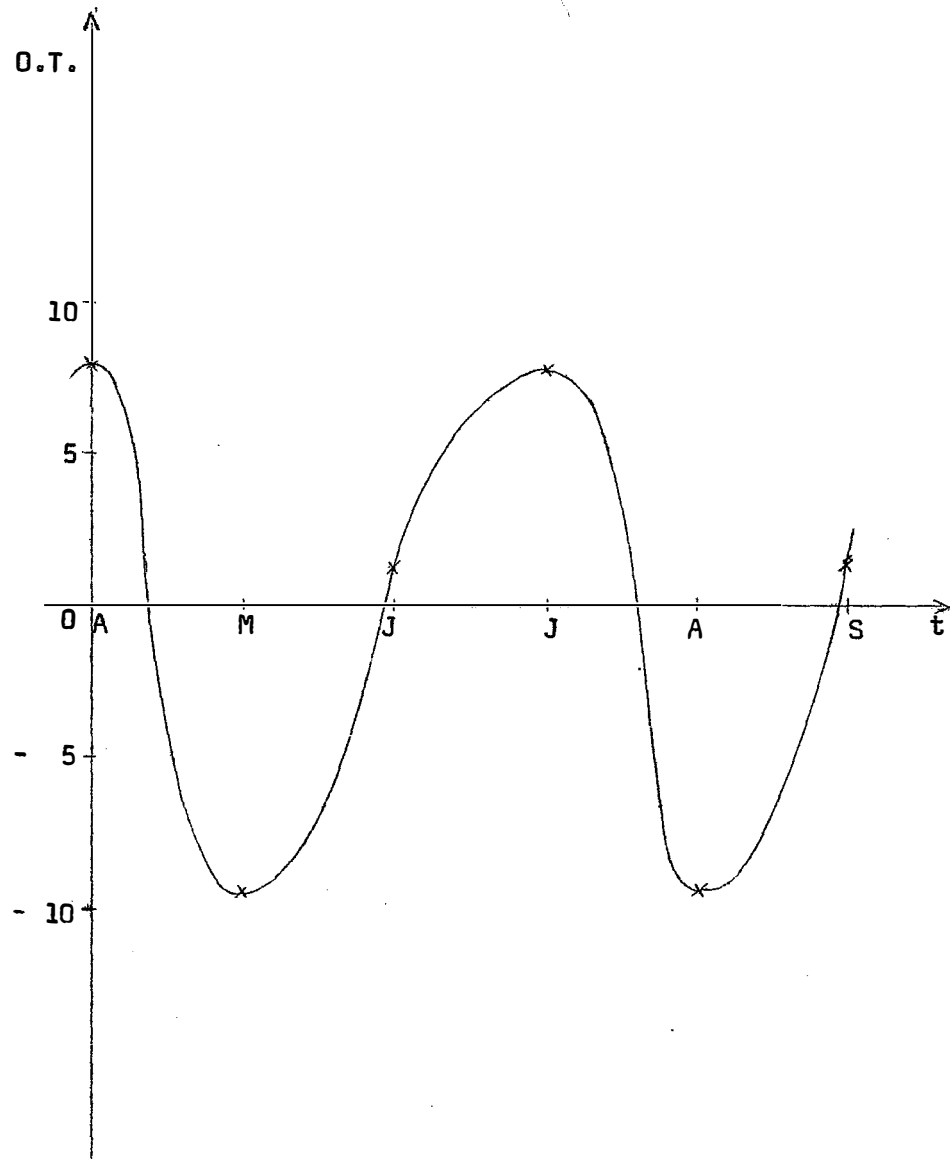


Fig. 8 - Gráfico da Onda Trimestral

$$O.T.(t) = 10,1180 \text{ sen } (120 t + 128,06)^\circ$$

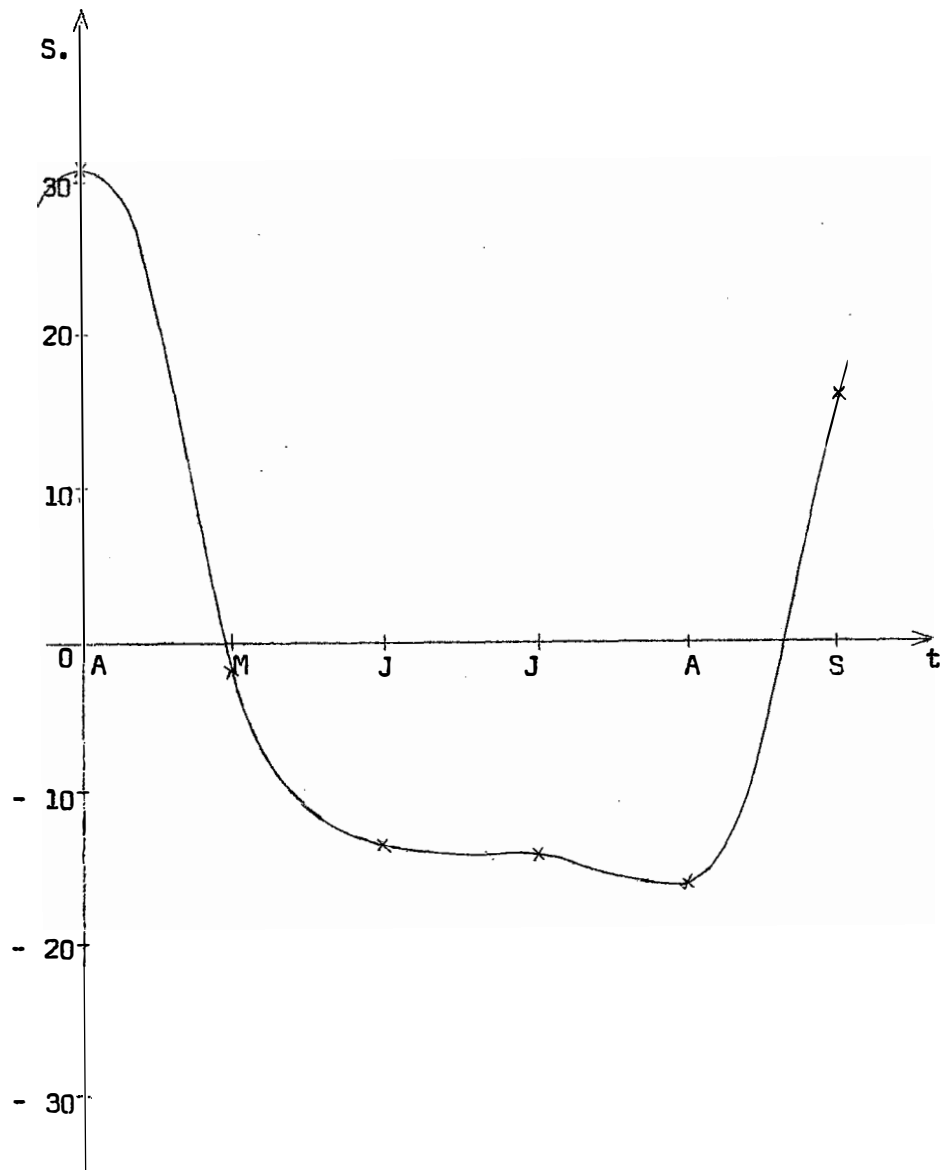


Gráfico 9 - Síntese das Duas Ondas

$$S.(t) = 22,5526 \text{ sen } (60 t + 101,07)^\circ + \\ + 10,1180 \text{ sen } (120 t + 128,06)^\circ$$

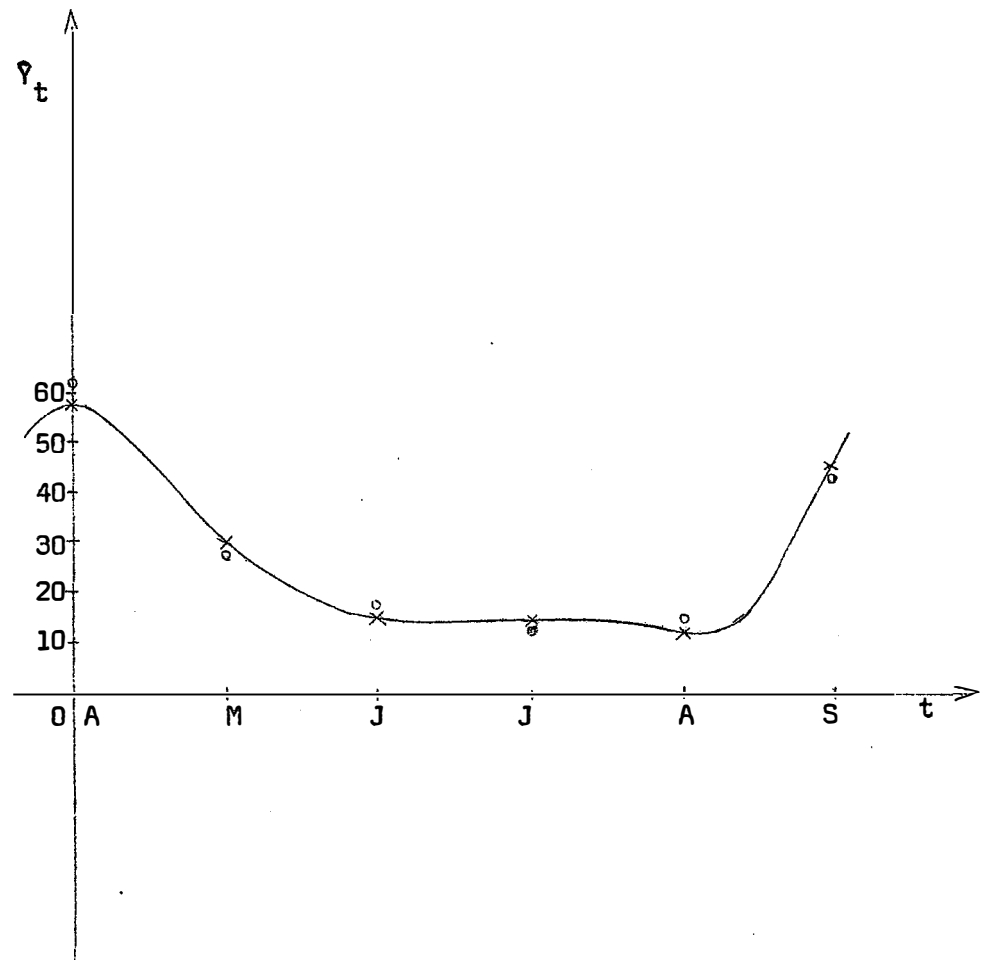


Fig. 10 - Gráfico da Equação de Regressão

$$Y_t = 28,92 + 22,5526 \text{ sen } (60 t + 101,07)^\circ + \\ + 10,1180 \text{ sen } (120 t + 128,06)^\circ$$

4.2.3 - Coefficientes de Correlação e Determinação

Meses	t	$Y_t$ (mm)	$\hat{Y}_t$ (mm)	$Y_t - \bar{Y}$	$\hat{Y}_t - \bar{Y}$
Abril	0	60,6	59,0	31,68	30,08
Maio	1	25,3	26,8	- 3,62	- 2,12
Junho	2	17,1	15,5	- 11,82	- 13,42
Julho	3	13,2	14,8	- 15,72	- 14,12
Agosto	4	13,8	12,2	- 15,12	- 16,72
Setembro	5	43,6	45,2	14,68	16,28

$$\sum_{t=0}^5 (Y_t - \bar{Y})^2 = (31,68)^2 + (- 3,62)^2 + \dots + (14,68)^2 = 1.847,6744$$

$$\sum_{t=0}^5 (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 = (30,08)^2 + (- 2,12)^2 + \dots + (16,28)^2 = 1.833,3684$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^5 (Y_t - \bar{Y})(\hat{Y}_t - \bar{Y}) &= (31,68)(30,08) + (- 3,62)(- 2,12) + \dots + \\ &+ (14,68)(16,28) = 1.832,9964 \end{aligned}$$

$$r = \frac{\sum_{t=0}^5 (Y_t - \bar{Y})(\hat{Y}_t - \bar{Y})}{\sqrt{\left[ \sum_{t=0}^5 (Y_t - \bar{Y})^2 \right] \left[ \sum_{t=0}^5 (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 \right]}}$$

$$r = 0,9959$$

$$r^2 = 0,9918$$

4.2.4 - Intervalos de Confiança

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_1$	2	30,5172	15,2586	54,30 **
Amplitude $\hat{a}_2$	2	6,1425	3,0713	10,93 **
Amplitude $\hat{a}_3$	1	0,2946	0,2946	1,05
Resíduo	245	68,8473	0,2810	
Total	250	105,8016		

A matriz de dispersão

$$D = S^{-1} \hat{\sigma}^2$$

é

$$D = \begin{vmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} \cdot 0,2810$$

logo:

$$V(\hat{p}_1) = V(\hat{p}_2) = V(\hat{q}_1) = V(\hat{q}_2) = 0,0937$$

$$V(\hat{p}_3) = 0,0468$$

$$s(\hat{p}_1) = s(\hat{p}_2) = s(\hat{q}_1) = s(\hat{q}_2) = 0,3061$$

$$s(\hat{p}_3) = 0,2163$$

Para

$$\alpha = 0,05$$

tem-se

$$\begin{aligned} 21,533 &\leq p_1 \leq 22,733 \\ 7,367 &\leq p_2 \leq 8,567 \\ - 1,143 &\leq p_3 \leq 1,991 \\ - 4,930 &\leq q_1 \leq - 3,730 \\ - 6,837 &\leq q_2 \leq - 5,637 \end{aligned}$$

#### 4.3 - ESTIMATIVA DAS PRECIPITAÇÕES MENSAIS DO PERÍODO ANUAL (Janeiro a Dezembro)

Para o período anual,  $T = 12$ , o modelo matemático é:

$$y_t = a_1 \text{ sen } (W_0 t + A_1) + a_2 \text{ sen } (2 W_0 t + A_2) + \dots + \\ + a_6 \text{ sen } (6 W_0 t + A_6) + e_t$$

$$y_t = p_1 \cos W_0 t + p_2 \cos 2 W_0 t + \dots + p_6 \cos 6 W_0 t + q_1 \text{ sen } W_0 t + \\ + q_2 \text{ sen } 2 W_0 t + \dots + q_5 \text{ sen } 5 W_0 t + e_t$$

onde:

$$W_0 = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$t = 0, 1, \dots, 11$$

A precipitação média do período é

$$\bar{Y} = a_0 = 103,49 \quad .$$



MATRIZ Y

$$Y = \begin{array}{l} 209,90 - 103,49 \\ 169,60 - 103,49 \\ 134,60 - 103,49 \\ 60,60 - 103,49 \\ 25,30 - 103,49 \\ 17,10 - 103,49 \\ 13,20 - 103,49 \\ 13,80 - 103,49 \\ 43,60 - 103,49 \\ 111,30 - 103,49 \\ 195,80 - 103,49 \\ 247,20 - 103,49 \end{array} = \begin{array}{l} 106,41 \\ 66,11 \\ 31,11 \\ - 42,89 \\ - 78,19 \\ - 86,39 \\ - 90,29 \\ - 89,69 \\ - 59,89 \\ 7,81 \\ 92,31 \\ 143,71 \end{array}$$

MATRIZ  $\beta$

$$\beta = \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{array}$$

MATRIZ X

---

1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,866	0,500	0,000	- 0,500	- 0,866	- 1,000	0,500	0,866	1,000	0,866	1,000	0,866	1,000	0,866	0,500
0,500	- 0,500	- 1,000	- 0,500	0,500	1,000	0,866	0,866	0,866	0,866	0,000	- 0,866	- 1,000	- 0,866	- 0,866
0,000	- 1,000	0,000	1,000	0,000	- 1,000	1,000	0,866	- 0,866	0,000	- 1,000	0,000	0,000	0,000	1,000
- 0,500	- 0,500	1,000	- 0,500	- 0,500	1,000	0,866	- 0,866	- 1,000	0,866	- 0,866	0,000	0,866	- 0,866	- 0,866
- 0,866	0,500	0,000	- 0,500	0,866	- 1,000	0,500	- 0,866	1,000	- 0,866	1,000	- 0,866	1,000	- 0,866	0,500
- 1,000	1,000	- 1,000	1,000	- 1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
- 0,866	0,500	0,000	- 0,500	0,866	- 1,000	0,500	- 0,866	- 1,000	0,866	- 1,000	0,866	- 1,000	0,866	- 0,500
- 0,500	- 0,500	1,000	- 0,500	- 0,500	1,000	1,000	1,000	1,000	0,866	0,866	0,000	- 0,866	- 0,866	0,866
0,000	- 1,000	0,000	1,000	0,000	- 1,000	0,000	- 1,000	- 1,000	0,000	1,000	1,000	0,000	0,000	- 1,000
0,500	- 0,500	- 1,000	- 0,500	0,500	1,000	0,866	- 0,866	1,000	- 0,866	0,000	0,866	0,000	0,866	0,866
0,866	0,500	0,000	- 0,500	- 0,866	- 1,000	- 0,866	- 1,000	- 0,500	- 0,866	- 1,000	- 0,866	- 1,000	- 0,866	- 0,500

---

X =

MATRIZ S = X' X

$$S = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

MATRIZ X' Y

$$\begin{vmatrix} 661,662 \\ 75,390 \\ - 64,752 \\ - 28,440 \\ - 6,780 \\ 2,820 \\ - 156,732 \\ - 107,232 \\ - 23,712 \\ - 32,940 \\ - 19,056 \end{vmatrix}$$

A solução do sistema, obtida pelo método dos quadrados mínimos,

é

$$\hat{\beta} = S^{-1} X' Y ,$$

logo:

$$\beta = \begin{array}{|l} 110,277 \\ 12,565 \\ - 10,792 \\ - 4,740 \\ - 1,118 \\ 0,235 \\ - 26,122 \\ - 17,872 \\ - 3,952 \\ - 5,490 \\ - 3,176 \end{array}$$

sendo:

$$\begin{array}{ll} \hat{p}_1 = 110,277 & \hat{q}_1 = - 26,122 \\ \hat{p}_2 = 12,565 & \hat{q}_2 = - 17,872 \\ \hat{p}_3 = - 10,792 & \hat{q}_3 = - 3,952 \\ \hat{p}_4 = - 4,740 & \hat{q}_4 = - 5,490 \\ \hat{p}_5 = - 1,118 & \hat{q}_5 = - 3,176 \\ \hat{p}_6 = 0,235 & \end{array}$$

Como

$$\hat{a}_i = \left| \sqrt{\hat{p}_i^2 + \hat{q}_i^2} \right| \quad \text{e} \quad \hat{A}_i = \text{arc tg} \frac{\hat{p}_i}{\hat{q}_i} ,$$

tem-se:

$$\begin{array}{ll} \hat{a}_1 = 113,3286 & \hat{A}_1 = 103^{\circ},33 \\ \hat{a}_2 = 21,8469 & \hat{A}_2 = 144^{\circ},89 \\ \hat{a}_3 = 11,4928 & \hat{A}_3 = 149^{\circ},89 \\ \hat{a}_4 = 7,2531 & \hat{A}_4 = 220^{\circ},81 \\ \hat{a}_5 = 3,3670 & \hat{A}_5 = 199^{\circ},39 \\ \hat{a}_6 = 0,2350 & \end{array}$$

4.3.1 - Análise de Variância

4.3.1.1 - Teste de normalidade

QUADRO V - Medidas de assimetria e curtose

Contrastes	W <sub>2</sub>	W <sub>3</sub>	W <sub>4</sub>	Medidas	
				$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$
$\hat{p}_1$	0,545	0,052	- 0,220	0,129	- 0,741
$\hat{p}_2$	0,342	0,016	- 0,085	0,080	- 0,727
$\hat{p}_3$	0,311	0,019	- 0,051	0,109	- 0,527
$\hat{p}_4$	0,272	- 0,068	0,006	- 0,479	0,008
$\hat{p}_5$	0,311	0,013	- 0,053	0,075	- 0,548
$\hat{p}_6$	0,145	- 0,003	0,001	- 0,054	0,005
$\hat{q}_1$	0,232	- 0,003	0,015	- 0,027	0,279
$\hat{q}_2$	0,306	- 0,029	- 0,018	- 0,171	- 0,192
$\hat{q}_3$	0,208	- 0,015	0,011	- 0,158	0,254
$\hat{q}_4$	0,271	0,076	0,035	0,538	0,476
$\hat{q}_5$	0,261	0,097	0,126	0,727	1,849

$$s(\hat{g}_1) = \sqrt{\frac{6 \cdot 50 \cdot 49}{48 \cdot 51 \cdot 53}} = 0,337$$

$$s(\hat{g}_2) = \sqrt{\frac{24 \cdot 50 \cdot 49^2}{47 \cdot 48 \cdot 53 \cdot 55}} = 0,662$$

QUADRO VI - Valores para a prova de  $\underline{t}$

Contrastes	$\underline{t}$ calculado	
	$\tilde{g}_1$	$\tilde{g}_2$
$\hat{p}_1$	0,383	1,119
$\hat{p}_2$	0,237	1,098
$\hat{p}_3$	0,323	0,796
$\hat{p}_4$	1,421	0,012
$\hat{p}_5$	0,222	0,828
$\hat{p}_6$	0,160	0,008
$\hat{q}_1$	0,080	0,421
$\hat{q}_2$	0,507	0,290
$\hat{q}_3$	0,469	0,384
$\hat{q}_4$	1,596	0,712
$\hat{q}_5$	2,157	2,793

Para o contraste  $\hat{q}_5$ , a medida de assimetria não difere de zero ao nível  $\alpha = 0,01$  e infinitos graus de liberdade. O mesmo não ocorre com a medida de curtose que, de acordo com a prova de  $\underline{t}$ , difere de zero. No entanto, como o valor de  $\underline{t}$ , calculado para essa medida es tá próximo do valor de  $\underline{t}$  tabelado para  $\alpha = 0,01$  e infinitos graus de liberdade, conclui-se que esse contraste tem uma distribuição aproximadamente normal, ao nível de 1%.

Os demais contrastes se distribuem normalmente ao nível de 5% de probabilidade.

4.3.1.2 - Quadros das análises de variâncias

a - Análise de variância da onda anual

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_1$	1	1.459,3218	1.459,3218	446,29 **
Variação do contraste entre anos	49	160,2270	3,2699	
<b>Total</b>	<b>50</b>	<b>1.619,5488</b>		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{q}_1$	1	81,8832	81,8832	58,79 **
Variação do contraste entre anos	49	68,2428	1,3927	
<b>Total</b>	<b>50</b>	<b>150,1260</b>		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_1$	2	1.541,2050	770,6025	330,55 **
Variação da amplitude entre anos	98	228,4698	2,3313	
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>1.769,6748</b>		

b - Análise de variância da onda semestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_2$	1	18,9456	18,9456	9,22 **
Variação do contraste entre anos	49	100,6566	2,0542	
Total	50	119,6022		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{q}_2$	1	38,3292	38,3292	20,88 **
Variação do contraste entre anos	49	89,9508	1,8357	
Total	50	128,2800		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_2$	2	57,2748	28,6374	14,72 **
Variação da amplitude entre anos	98	190,6074	1,9450	
Total	100	247,8822		



c - Análise de variância da onda quadrimestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_3$	1	13,9758	13,9758	7,49 **
Variação do contraste entre anos	49	91,3914	1,8651	
Total	50	105,3672		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{q}_3$	1	1,8744	1,8744	1,50
Variação do contraste entre anos	49	61,0632	1,2462	
Total	50	62,9376		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_3$	2	15,8502	7,9251	5,09 **
Variação da amplitude entre anos	98	152,4546	1,5557	
Total	100	168,3048		

d - Análise de variância da onda trimestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_4$	1	2,6964	2,6964	1,65
Variação do contraste entre anos	49	80,0976	1,6346	
<b>Total</b>	<b>50</b>	<b>82,7940</b>		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{q}_4$	1	3,6168	3,6168	2,16
Variação do contraste entre anos	49	82,2312	1,6782	
<b>Total</b>	<b>50</b>	<b>85,8480</b>		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_4$	2	6,3132	3,1566	1,90
Variação da amplitude entre anos	98	162,3288	1,6564	
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>168,6420</b>		

e - Análise de variância da onda de 72 dias

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{p}_5$	1	0,1500	0,1500	0,07
Variação do contraste entre anos	49	99,0648	2,0217	
Total	50	99,2148		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Contraste $\hat{q}_5$	1	1,2102	1,2102	0,77
Variação do contraste entre anos	49	76,6878	1,5651	
Total	50	77,8980		

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_5$	2	1,3620	0,6801	0,38
Variação da amplitude entre anos	98	175,7526	1,7934	
Total	100	177,1128		

f - Análise de variância da onda bimestral

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_6$	1	0,0132	0,0132	0,008
Variação da amplitude entre anos	49	85,3512	1,7419	
Total	50	85,3644		

4.3.2 - Equação de Regressão

Foram significativas as ondas anual, semestral e quadrimestral.

A equação de regressão será:

$$\hat{y}_t = 113,3286 \text{ sen } (30 t + 103,33)^\circ + 21,8469 \text{ sen } (60 t + 144,89)^\circ + 11,4928 \text{ sen } (90 t + 249,89)^\circ$$

$$\hat{Y}_t - \hat{a}_0 = 113,3286 \text{ sen } (30 t + 103,33)^\circ + 21,8469 \text{ sen } (60 t + 144,89)^\circ + 11,4928 \text{ sen } (90 t + 249,89)^\circ$$

$$\hat{Y}_t = 103,49 + 113,3286 \text{ sen } (30 t + 103,33)^\circ + 21,8469 \text{ sen } (60 t + 144,89)^\circ + 11,4928 \text{ sen } (90 t + 249,89)^\circ$$

Os gráficos das ondas anual, semestral e quadrimestral, são apresentados a seguir com os gráficos da síntese e das precipitações estimadas.

Os pequenos círculos, encontrados na representação gráfica das precipitações estimadas, indicam os valores observados no tempo t .

Meses	Onda anual	Onda semestral	Onda quadrimestral	Síntese Onda anual + onda semestral + onda quadrimestral
Janeiro	110,275	12,565	- 10,792	112,048
Fevereiro	82,437	- 9,195	- 3,951	69,291
Março	32,509	- 21,760	10,792	21,541
Abril	- 26,129	- 12,565	3,951	- 34,743
Maiο	- 77,766	9,195	- 10,792	- 79,363
Junho	- 108,566	21,760	- 3,951	- 90,757
Julho	- 110,275	12,565	10,792	- 86,918
Agosto	- 82,437	- 9,195	3,951	- 87,681
Setembro	- 32,509	- 21,760	- 10,792	- 65,061
Outubro	26,129	- 12,565	- 3,951	9,613
Novembro	77,766	9,195	10,792	97,753
Dezembro	108,566	21,760	3,951	134,277

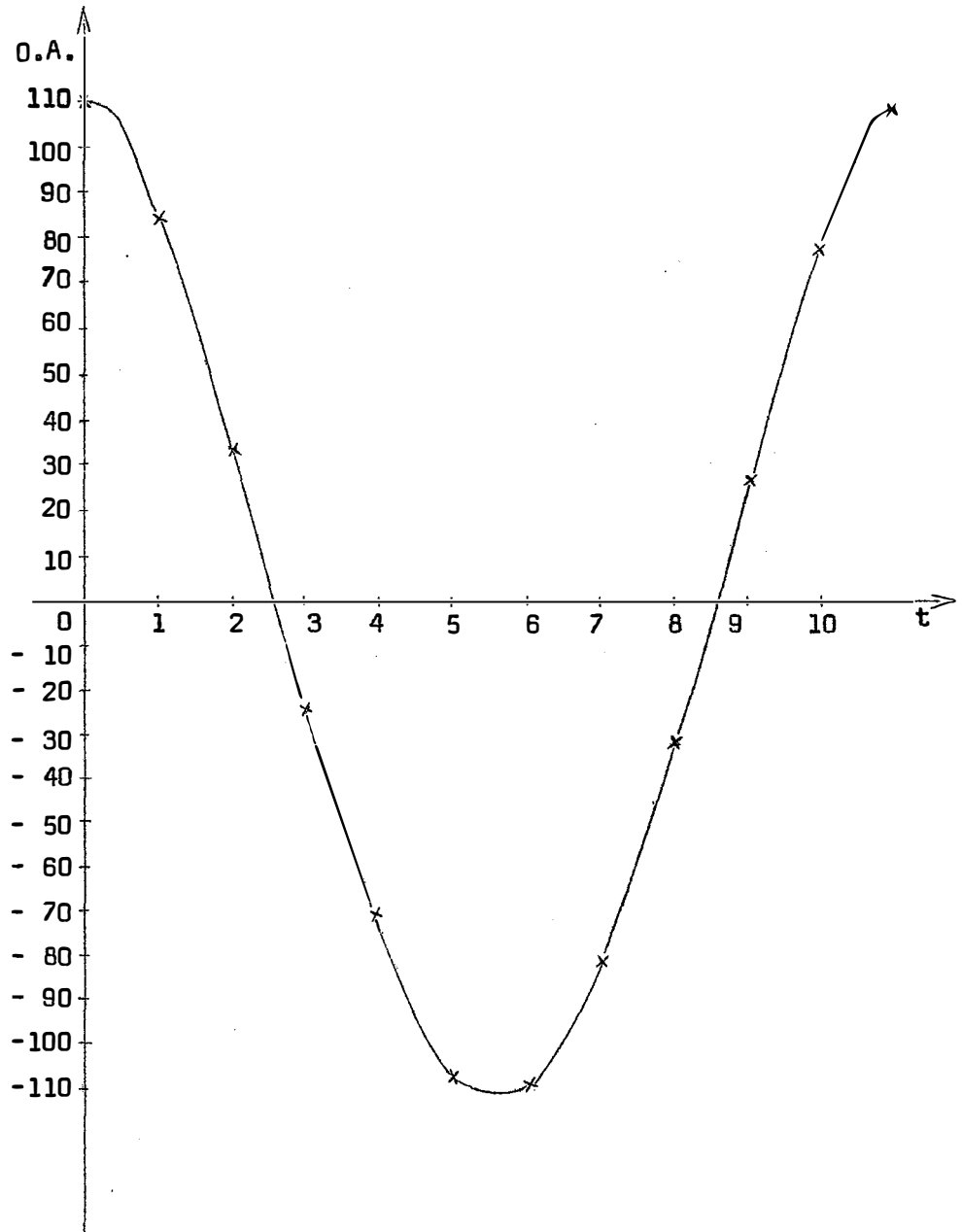


Fig. 11 - Gráfico da Onda Anual

$$O.A.(t) = 113,3286 \text{ sen } (30 t + 103,33)^\circ$$

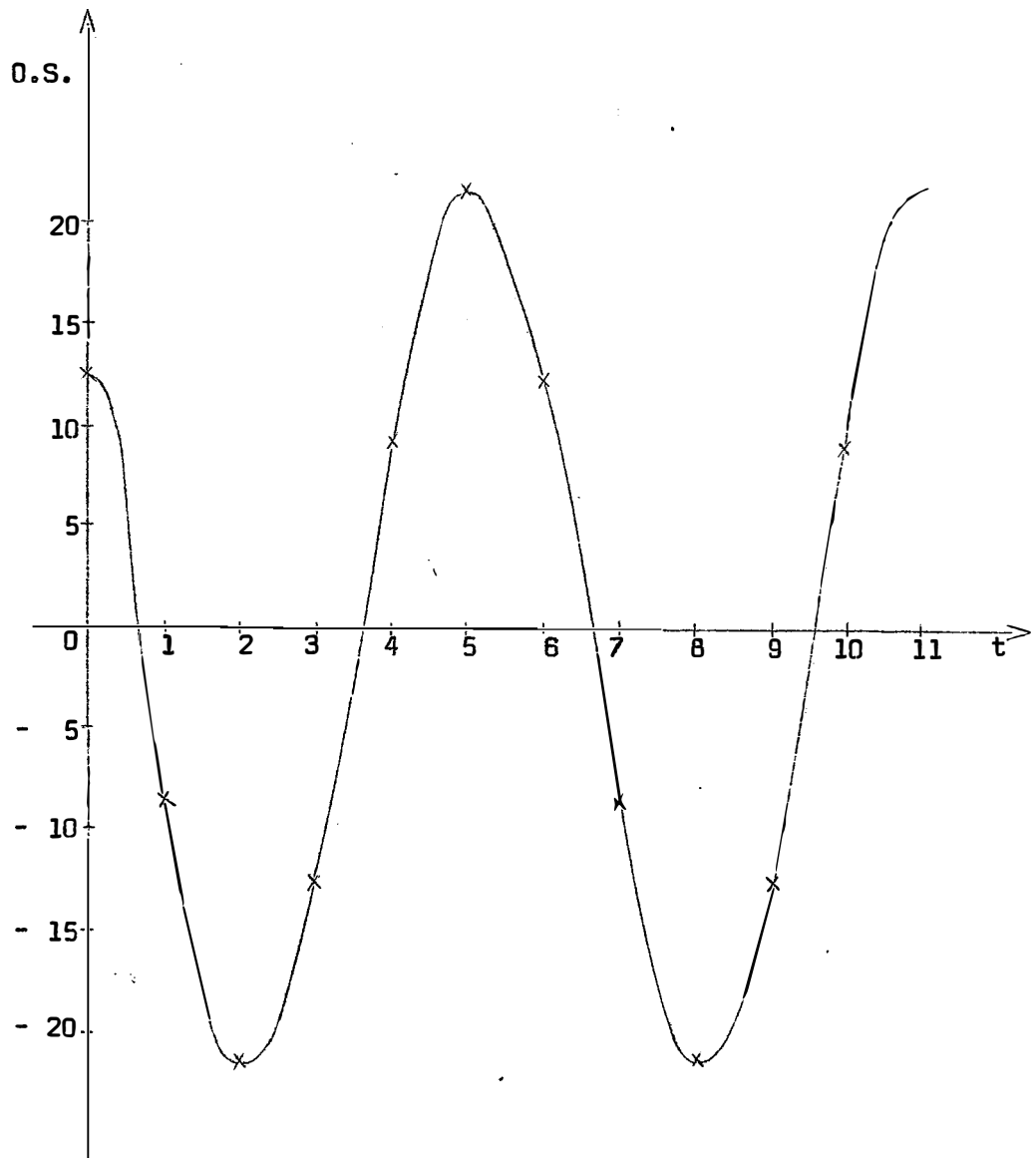


Fig. 12 - Gráfico da Onda Semestral

$$O.S. (t) = 21,8469 \text{ sen } (60 t + 144,89)^\circ$$

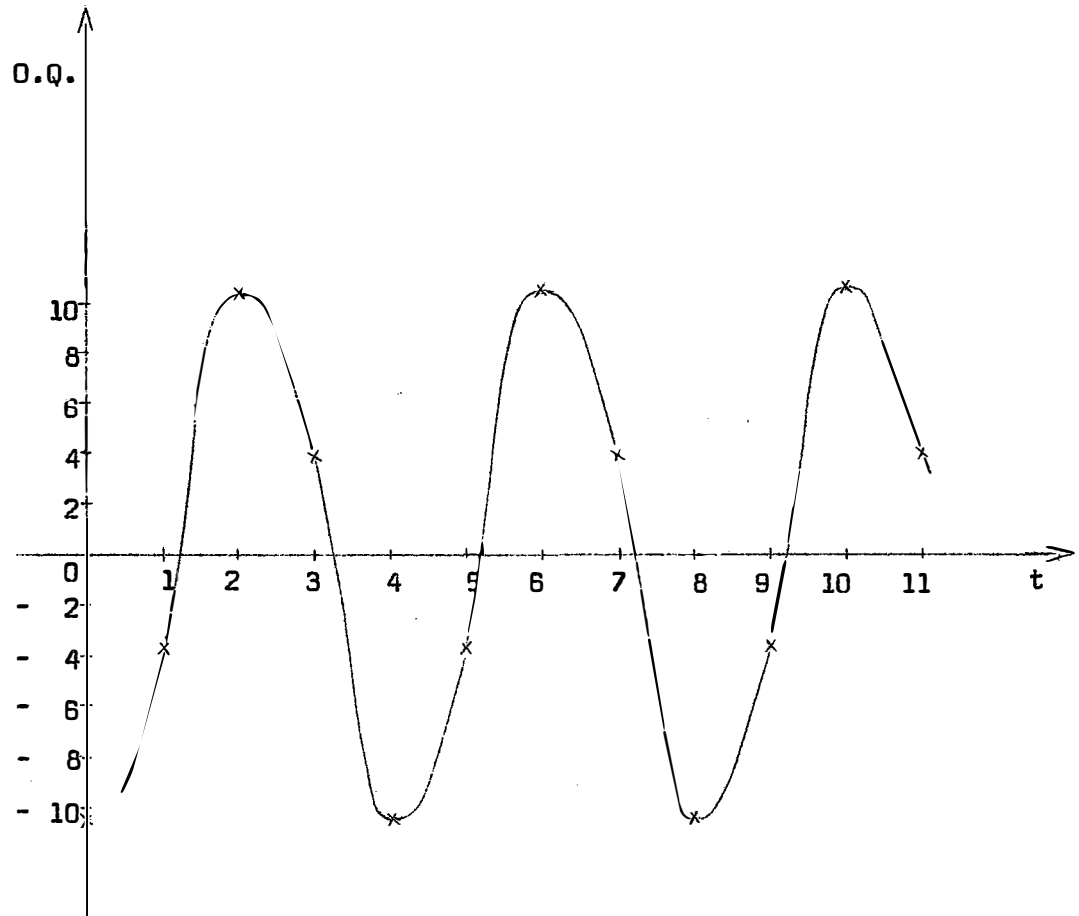


Fig. 13 - Gráfico da Onda Quadrimestral

$$O.Q.(t) = 11,4928 \text{ sen } (90 t + 249,89)^{\circ}$$



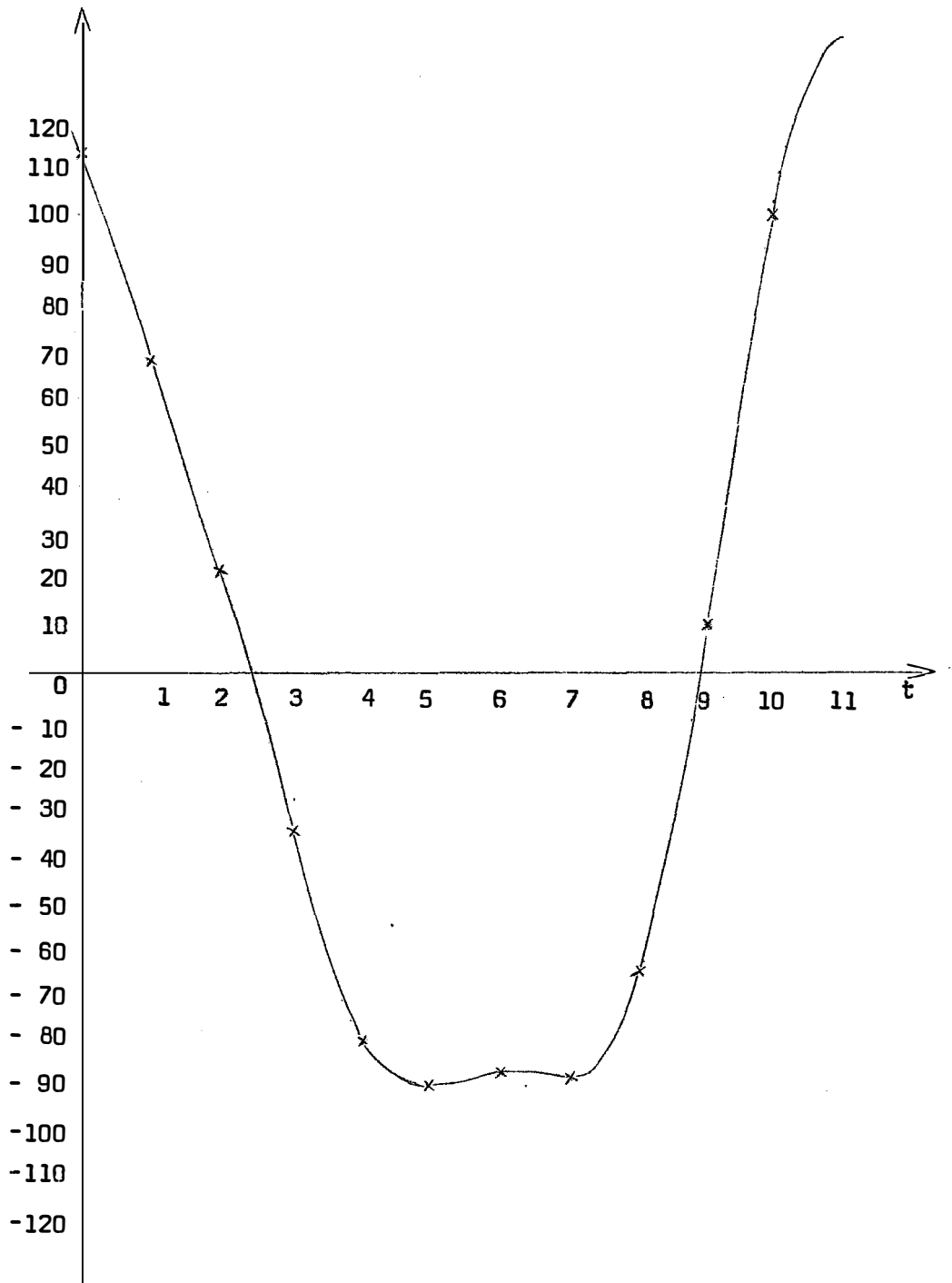


Fig. 14 - Gráfico da Síntese das Três Ondas

$$S_{(t)} = 113,3286 \text{ sen } (30 t + 103,33)^{\circ} + \\ + 21,8469 \text{ sen } (60 t + 144,89)^{\circ} + \\ + 11,4928 \text{ sen } (90 t + 249,89)^{\circ}$$

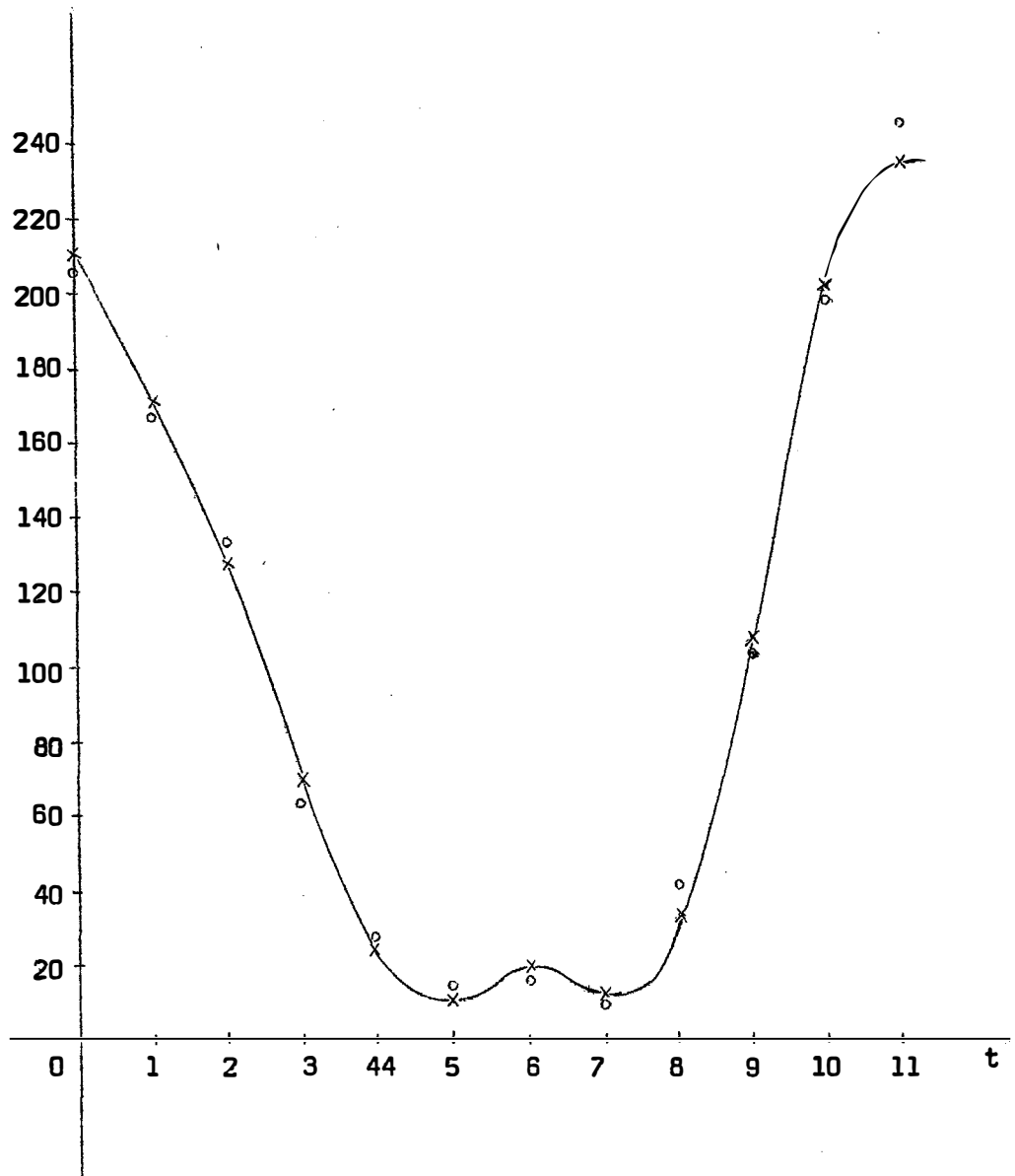


Fig. 15 - Gráfico da Equação de Regressão

$$\hat{Y}_t = 103,49 + 113,3286 \text{ sen } (30 t + 103,33)^\circ + \\ + 21,8469 \text{ sen } (60 t + 144,89)^\circ + \\ + 11,4928 \text{ sen } (90 t + 249,89)^\circ$$

4.3.3 - Coefficientes de Correlação e Determinação

Meses	t	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$(Y_t - \bar{Y})$	$(\hat{Y}_t - \bar{Y})$
Janeiro	0	209,9	215,5	106,43	112,01
Fevereiro	1	169,6	172,8	66,55	69,31
Março	2	134,6	125,0	31,10	21,51
Abril	3	60,6	68,7	- 42,88	- 34,79
Maió	4	25,3	24,1	- 78,20	- 79,39
Junho	5	17,1	12,7	- 86,42	- 90,79
Julho	6	13,2	16,6	- 90,31	- 86,89
Agosto	7	13,8	15,8	- 89,69	- 87,69
Setembro	8	43,6	38,4	- 59,90	- 65,09
Outubro	9	111,3	113,1	7,81	9,61
Novembro	10	195,8	201,2	92,29	97,71
Dezembro	11	247,2	237,8	143,73	134,31

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{11} (Y_t - \bar{Y})^2 &= (106,43)^2 + (66,55)^2 + \dots + (143,73)^2 \\ &= 81.170,7635 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{11} (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 &= (112,01)^2 + (69,31)^2 + \dots + (134,31)^2 \\ &= 80.723,6252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{11} (Y_t - \bar{Y})(\hat{Y}_t - \bar{Y}) &= (106,43)(112,01) + (66,55)(69,31) + \dots + \\ &\quad + (143,73)(134,31) \\ &= 80.756,8601 \end{aligned}$$

$$r = \frac{\sum_{t=0}^{11} (Y_t - \bar{Y})(\hat{Y}_t - \bar{Y})}{\sqrt{\left[ \sum_{t=0}^{11} (Y_t - \bar{Y})^2 \right] \left[ \sum_{t=0}^{11} (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 \right]}}$$

$$r = 0,9977$$

$$r^2 = 0,9954$$

#### 4.3.4 - Intervalos de Confiança

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Amplitude $\hat{a}_1$	2	1.541,2050	770,6025	417,47 **
Amplitude $\hat{a}_2$	2	57,2748	28,6374	15,51 **
Amplitude $\hat{a}_3$	2	15,8502	7,9251	4,29 *
Amplitude $\hat{a}_4$	2	6,3132	3,1566	1,71
Amplitude $\hat{a}_5$	2	1,3602	0,6801	0,37
Amplitude $\hat{a}_6$	1	0,0132	0,0132	0,007
Resíduo	539	994,9644	1,8459	
<b>Total</b>	<b>550</b>	<b>2.616,9810</b>		

A matriz de dispersão

$$D = S^{-1} \sigma^2$$

é

$$D = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \quad \bullet \quad 1,8459$$

logo:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{p}_1) = \hat{V}(\hat{p}_2) = \dots = \hat{V}(\hat{p}_5) = \hat{V}(\hat{q}_1) = \hat{V}(\hat{q}_2) = \dots = \hat{V}(\hat{q}_5) \\ = 0,3076 \end{aligned}$$

$$\hat{V}(\hat{p}_6) = 0,1538$$

$$\begin{aligned} \hat{s}(\hat{p}_1) = \hat{s}(\hat{p}_2) = \dots = \hat{s}(\hat{p}_5) = \hat{s}(\hat{q}_1) = \hat{s}(\hat{q}_2) = \dots = \hat{s}(\hat{q}_5) \\ = 0,5546 \end{aligned}$$

$$\hat{s}(\hat{p}_6) = 0,3922$$

Para

$$\alpha = 0,05 \quad ,$$

tem-se:

$$\begin{aligned} 109,190 &\leq p_1 \leq 111,364 \\ 11,478 &\leq p_2 \leq 13,652 \\ - 11,879 &\leq p_3 \leq - 9,705 \\ - 5,827 &\leq p_4 \leq - 3,653 \\ - 2,205 &\leq p_5 \leq - 3,031 \\ - 0,534 &\leq p_6 \leq 1,004 \\ - 27,209 &\leq q_1 \leq - 25,035 \\ - 18,959 &\leq q_2 \leq - 16,785 \\ - 5,039 &\leq q_3 \leq - 2,865 \\ - 6,577 &\leq q_4 \leq - 4,403 \\ - 4,263 &\leq q_5 \leq - 2,089 \end{aligned}$$

## 5 - CONCLUSÕES

De um modo geral pode-se concluir:

5.1 - Viçosa apresenta um período chuvoso (outubro a março) e um período seco (abril a setembro) bem definidos. O período chuvoso é responsável por 86,02% da precipitação anual e dezembro é o mês mais chuvoso, com média de 247,2 mm, que corresponde a 19,90% da queda anual. O mês de julho é o mais seco, com uma precipitação média de 13,2 mm.

5.2 - Para o período chuvoso, a equação de regressão estimada foi:

$$\hat{Y}_t = 178,06 + 61,9640 \text{ sen } (60 t + 310,29)^\circ + \\ + 18,0969 \text{ sen } (120 t + 254,84)^\circ \\ (t = 0, 1, \dots, 5)$$

A onda semestral, altamente significativa, foi responsável por 91,96% da variação devida a meses.

5.3 - Para o período seco, a equação de regressão foi:

$$\hat{Y}_t = 28,92 + 22,5526 \text{ sen } (60 t + 101,07)^\circ + \\ + 10,1180 \text{ sen } (120 t + 128,06)^\circ \\ (t = 0, 1, \dots, 5)$$

A onda semestral, neste período, foi responsável por 82,58% da variação devida a meses.

5.4 - Para o período anual (janeiro a dezembro) a equação estimada foi:

$$\hat{Y}_t = 103,49 + 113,3286 \text{ sen } (30 t + 103,33)^\circ + 21,8469 \text{ sen } (60 t + 144,89)^\circ + 11,4928 \text{ sen } (90 t + 249,89)^\circ$$

$$(t = 0, 1, \dots, 11)$$

A onda anual foi responsável por 95,02% da variação devida a me  
ses.



## 6 - RESUMO

A análise harmônica de um elemento climático permite decompor a sua variação total, no período de comprimento  $T$ , em ondas senoidais.

O objetivo desse trabalho é estimar as precipitações médias mensais de Viçosa (MG), baseando-se em dados de 50 anos (1924-1973), através da análise harmônica, aplicada à série de Fousier, um dos métodos de estudo dos fenômenos periódicos.

A representação de uma função periódica, em série de Fousier, é uma soma de componentes senoidais de frequências distintas, ou seja:

$$f(t) = a_0 + a_1 \operatorname{sen}(W_0 t + A_1) + a_2 \operatorname{sen}(2 W_0 t + A_2) + \dots + \\ + a_k \operatorname{sen}(K W_0 t + A_k) + \dots,$$

onde  $W_0 = 360^\circ/T$  é a frequência angular fundamental; os coeficientes  $a_j$  e os ângulos  $A_j$ , respectivamente, são amplitudes harmônicas e ângulos fase.

Fazendo

$$p_j = a_j \operatorname{sen} A_j \quad \text{e} \quad q_j = a_j \operatorname{cos} A_j,$$

chega-se à expressão básica do modelo matemático:

$$y_t = Y_t - a_0 = p_1 \operatorname{cos} W_0 t + p_2 \operatorname{cos} 2 W_0 t + \dots + p_k \operatorname{cos} K W_0 t + \\ + q_1 \operatorname{sen} W_0 t + q_2 \operatorname{sen} 2 W_0 t + \dots + q_{K-1} \operatorname{sen}(K-1) W_0 t + \\ + e_t$$

onde  $Y_t$  é a precipitação média mensal no tempo  $t = 0, 1, \dots, (T-1)$ ;  $a_0$  é a precipitação média geral do período;  $p_1$  e  $q_1$  são contrastes ortogo-

nais ;  $e_t$  efeito residual da  $t$ -ésima observação, com distribuição normal de média zero e variância  $\sigma^2$ .

Desta forma, três equações de regressão são estimadas, uma para cada período estudado, ou seja: período chuvoso, período seco e período anual.

A estabilidade das componentes harmônicas é testada através da análise de variância, depois de comprovada a normalidade dos contrastes envolvidos na análise ( $p_1$  e  $q_1$ ), segundo FISHER (1950).

São apresentados os gráficos das ondas senoidais significativas, da síntese dessas ondas (soma das ondas significativas) e da equação de regressão estimada.

A seguir, para cada um dos casos, são determinados os intervalos de confiança dos contrastes  $p_1$  e  $q_1$ .

A variável independente tempo ( $t$ ) mostra-se relevante para os três casos, na explicação do fenômeno estudado e as equações estimadas são:

a - Período Chuvoso (outubro a março)

$$\hat{Y}_t = 178,06 + 61,9640 \text{ sen } (60 t + 310,29)^\circ + 18,0969 \text{ sen } (120 t + 254,84)^\circ$$

( $t = 0, 1, \dots, 5$ )

b - Período Seco (abril a setembro)

$$\hat{Y}_t = 28,92 + 22,5526 \text{ sen } (60 t + 101,07)^\circ + 10,1180 \text{ sen } (120 t + 128,06)^\circ$$

( $t = 0, 1, \dots, 5$ )

c - Período Anual (janeiro a dezembro)

$$\hat{Y}_t = 103,49 + 113,3286 \text{ sen } (30 t + 103,33)^\circ + 21,8469 \text{ sen } (60 t + 144,89)^\circ + 11,4928 \text{ sen } (90 t + 249,89)^\circ$$

$$t = 0, 1, \dots, 11) \cdot .$$

7 - SUMMARY

The harmonic analysis of a climatic element allows the partition of its total variation in a period of length  $T$ , in sine waves.

The purpose of this study was to estimate monthly mean precipitations of Viçosa (MG) based on data collected during fifty years (1924 - 1973) using a harmonic analysis applied to the Fourier series which is one of the methods used to study periodic phenomena.

The representation of a periodic function, by Fourier series, is the summation of sine waves of distinct frequencies, that is:

$$f(t) = a_0 + a_1 \text{ sen } (W_0 t + A_1) + a_2 \text{ sen } (2 W_0 t + A_2) + \dots + \\ + a_k \text{ sen } (K W_0 t + A_k) + \dots ,$$

where  $W_0 = 360^\circ/T$  is the angle frequency,  $a_j$  are harmonic amplitudes and  $A_j$  are phase angles.

$$\text{Letting } p_j = a_j \sin A_j \text{ and } q_j = a_j \cos A_j .$$

We get the following basic mathematic model

$$y_t = Y_t - a_0 = p_1 \cos W_0 t + p_2 \cos 2 W_0 t + \dots + p_k \cos K W_0 t + \\ + q_1 \text{ sen } W_0 t + q_2 \text{ sen } 2 W_0 t + \dots + \\ + q_{k-1} \text{ sen } (K - 1) W_0 t + e_t ,$$

where  $Y_t$  values are monthly mean precipitations for  $t = 0, 1, \dots, (T - 1)$ ,  $a_0$  is the overall mean precipitation,  $p_j$  and  $q_j$  are orthogonal contrasts,  $e_t$  is the error associated with the  $t^{\text{th}}$  observation, which is normally distributed with zero mean and variance  $\sigma^2$ .

Three regression equations were estimated, one for each of the following periods: rainy season, dry season and the whole year.

The stability of the harmonic components is shown from an analysis of variance, after a test for normality of the contrasts in the analysis ( $p_j$  and  $q_j$ ), as recommended by FISHER (1950).

The significant sine waves, the summation of the significant sine waves and the estimated regression equations are presented grafically.

On every case the confidence intervals of the contrasts involved in the analysis are determined.

The independent variable time ( $t$ ) was a relevant factor in every case in the explanation of the phenomenon.

8 - BIBLIOGRAFIA

- 1 - ALBUQUERQUE, J. J. - 1964 - Uma Contribuição ao Estudo de Climas. Bo1. Soc. Cear. Agron., 5: 41-44.
- 2 - AMARAL, E. - 1968 - Análise Harmônica. Pesq. Agrop. Bras. 3: 7-43.
- 3 - AQUINO, L. H. - 1969 - Análise Estatística de Dados Pluviométricos com Auxílio da Programação Fortran (tese). Piracicaba, SP.
- 4 - BLISS, C. I. - 1958 - Periodic Regression in Biology and Climatology. Connecticut Agr. Exp. Sta. n<sup>o</sup> 615. New Haven.
- 5 - BOX, G. E. P. e JENKINS, G. M. - 1970 - Times Series Analysis. (1.<sup>a</sup> Edição). Holden Day, Inc., 553 p., San Francisco.
- 6 - CHURCHILL, R. V. - 1963 - Fourier Series and Bondary Value Problems. (2.<sup>a</sup> Edição). McGraw-Hill Book Company, Inc., 248 p. , Nova York.
- 7 - CONRAD, V. e POLLAK, L. W. - 1950 - Methods in Climatology. (2.<sup>a</sup> Edição). Havard University Press, 459 p., Cambridge, Mas-sachusetts.
- 8 - COCHRAN, W. C. e COX, G. M. - 1957 - Experimental Designs. (2.<sup>a</sup> E-dição). John Wiley and Sons, Inc., 611 p. , Nova York.
- 9 - COX, D. R. e MILLER, H. D. - 1968 - The Theory of Stochastic Proces-ses. (2.<sup>a</sup> Edição). John Willey and Sons, Inc. 500 p. , Nova York.

- 10 - CRAMER, H. - 1963 - Metodos Matematicos de Estadística. (3.<sup>a</sup> Edição). Aguilar, S. A. de Ediciones, 660 p., Madrid.
- 11 - DRAPER, N. P. e SMITH, H. - 1966 - Applied Regression Analysis. (1.<sup>a</sup> Edição). John Willey and Sons, Inc., 407 p., Nova York.
- 12 - DUARTE, G. S. - 1974 - Curva Epidemiológica da Ferrugem Alaranjada do Cafeeiro na Zona da Mata - Minas Gerais (Tese). Piracicaba, São Paulo.
- 13 - FELLER, W. - 1966 - An Introduction to Probability Theory and its Applications. Volume II, (2.<sup>a</sup> Edição). John Willey and Sons, Inc., 626 p. Nova York.
- 14 - FERNANDES, M. B. - 1973 - Análise de Dados Pluviométricos em Função das Coordenadas Geográficas (Tese). Piracicaba, São Paulo.
- 15 - FISHER, R. A. - 1936 - Statistical Methods for Research Workers. (6.<sup>a</sup> Edição). Olivier and Boyd, 339 p., Edinburgh.
- 16 - FOSTER, E. E. - 1948 - Rainfall and Runoff, Macmillan Co. Nova York.
- 17 - FRANCO, C. M. e GODOY, H. - 1946 - Chuvvas e Umidade Relativa do Ar em Campinas, de 1890 a 1945. Bragantia 6: 217-237.
- 18 - HSV, H. P. - 1973 - Análise de Fourier. (1.<sup>a</sup> Edição). Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 274 p., Rio de Janeiro.
- 19 - KENDAL, M. G. e STUART, A. - 1968 - The Advanced Theory of Statistics. Volume III (2.<sup>a</sup> Edição). Hafner Publishing Company, 557 p., Nova York.

- 20 - LAPIERRE, A. B. - 1963 - Modèles Statistiques Pour L'Etude de Phénomènes de Fluctuations. (1.<sup>a</sup> Edição), Masson et Cie, 148 p. , Paris.
- 21 - MAVERICK, L. A. - 1945 - Time Series Analysis. (1.<sup>a</sup> Edição), Paul Anderson Company, 153 p. , San Antonio, Texas.
- 22 - MISES, R. V. - 1957 - Probability, Statistics and Truth. (2.<sup>a</sup> Edição). The Macmillan Company, 244 p. , Nova York.
- 23 - PIMENTEL GOMES, F. - 1970 - Curso de Estatística Experimental. (4.<sup>a</sup> Edição), Livraria Nobel S. A., 430 p. + Tabelas, São Paulo.
- 24 - PIMENTEL GOMES, F. e NOGUEIRA, I. R. - 1959 - O Regime de Chuvas em Pesqueira. Anais da E. S. A. "Luiz de Queiroz" 16: 135-138.
- 25 - PIMENTEL GOMES, F. e NOGUEIRA, I. R. - 1964 - Regressão e Covariância. (Mimeografado). Piracicaba, São Paulo.
- 26 - POMPEU MEMÓRIA, J. M. - 1955.a - Estudo Estatístico da Precipitação Pluviométrica Anual de Morro Velho (MG). Boletim de Agricultura da Secretaria da Agricultura do Estado de Minas Gerais, n<sup>os</sup> 1 e 2 . Janeiro e fevereiro.
- 27 - POMPEU MEMÓRIA, J. M. - 1956.b - Análise Estatística das Precipitações Pluviométricas Mensais de Morro Velho (MG). Boletim de Agricultura da Secretaria da Agricultura do Estado de Minas Gerais, n<sup>os</sup> 5 e 6 . Maio e junho.
- 28 - WALLIS, W. A. e ROBERTS, H. V. - 1956 - Statistics: a New Approach. (1.<sup>a</sup> Edição), Free Press, 646 p. , Nova York.



9 - A P E N D I C E

9.1 - MATRIZ C DO PERÍODO CHUVOSO

- 2,670	1,037	- 0,448	0,373	0,105
1,100	- 0,476	- 1,453	0,753	- 0,123
- 1,230	- 0,370	- 0,193	- 0,253	0,382
0,237	- 0,950	- 0,370	0,599	- 0,023
- 2,738	- 0,173	0,648	2,199	- 1,639
- 1,385	0,038	- 1,234	- 0,763	0,216
- 0,399	- 1,694	0,566	1,433	1,277
- 1,036	0,005	- 0,257	1,182	0,109
- 0,703	0,043	0,780	1,435	- 0,890
- 2,767	1,346	0,582	1,992	- 1,239
- 1,114	- 0,160	0,216	2,293	- 1,026
- 3,480	0,425	0,556	- 0,516	0,047
- 0,325	- 1,199	0,607	- 0,218	0,506
- 2,733	0,871	0,076	0,964	0,342
- 0,107	- 1,467	1,091	1,395	- 0,107
- 0,831	- 0,084	- 0,766	1,070	0,089
0,965	- 0,238	- 1,691	1,383	1,289
- 1,749	0,132	- 0,087	0,992	- 0,438
- 1,643	0,171	0,536	3,432	- 2,063
- 1,809	0,210	0,140	1,209	- 0,607
- 1,365	- 0,944	0,706	- 0,064	- 1,030
- 2,095	0,704	- 1,234	0,664	- 1,769
0,660	- 1,270	- 0,609	0,527	- 0,606
- 0,074	0,604	- 0,250	0,243	- 0,929
- 1,426	- 2,978	1,071	0,553	0,275
- 2,726	0,591	1,140	0,102	0,958
- 0,981	0,231	- 1,187	1,924	0,798
- 1,781	- 1,942	0,208	- 1,349	- 1,759
- 1,953	1,139	- 0,516	- 0,449	0,239
- 0,315	- 1,681	0,357	- 0,038	1,124
- 0,197	- 1,391	0,206	0,369	- 0,152
- 1,106	- 0,336	- 0,325	2,106	0,091
0,247	- 1,423	- 0,241	1,240	- 1,402
- 0,299	- 2,145	- 0,139	1,712	- 0,611
0,718	- 0,228	0,441	0,848	0,178
- 0,520	0,215	- 0,375	0,390	- 0,703
- 1,817	- 1,617	0,088	0,753	- 1,126
- 2,216	1,026	- 0,560	- 0,846	1,217
- 2,764	0,448	0,945	- 0,077	- 0,316
0,057	- 1,097	0,185	0,339	0,739
- 1,301	- 0,107	1,631	1,423	- 1,160
- 0,104	- 0,236	0,351	- 1,072	1,597
- 1,126	0,364	- 0,383	2,010	- 0,285
- 0,730	- 1,624	- 1,518	2,212	3,100
- 1,036	- 0,124	0,607	- 0,313	- 0,260
- 0,647	0,112	- 0,183	1,467	- 0,936
0,450	0,881	- 0,204	0,837	1,171
0,470	- 1,258	- 0,474	3,203	0,106
0,265	- 0,923	- 0,419	1,161	1,176
0,862	0,075	- 0,651	- 0,762	- 0,665

9.2 - MATRIZ C DO PERÍODO SECO

0,028	- 0,058	0,085	0,081	- 0,230
0,812	0,496	- 0,094	- 0,241	- 0,348
0,713	0,373	0,352	0,215	0,385
0,191	- 0,560	0,009	- 0,559	- 0,358
0,190	- 0,004	- 0,138	0,264	0,208
0,307	- 0,254	0,046	- 0,014	0,707
0,558	<b>0,336</b>	0,033	- 0,262	- 0,192
0,543	0,267	0,075	- 0,204	- 0,070
0,355	- 0,055	0,209	0,447	- 0,365
0,633	0,483	0,160	- 0,241	- 0,290
0,860	0,265	- 0,011	- 0,006	- 0,064
0,730	0,604	0,162	- 0,195	- 0,272
0,675	- 0,001	- 0,060	- 0,784	- 0,536
0,617	- 0,069	- 0,158	0,431	0,154
0,783	0,075	0,182	- 0,192	0,439
0,286	- 0,023	- 0,120	- 0,297	- 0,427
0,482	- 0,114	- 0,130	- 0,200	- 0,376
0,576	0,350	- 0,417	- 0,175	- 0,414
0,854	0,403	- 0,040	0,128	0,181
0,097	0,009	0,279	- 0,058	- 0,071
0,135	0,101	0,108	0,080	- 0,114
0,725	0,364	0,398	0,435	- 0,143
0,447	0,209	0,057	- 0,172	- 0,458
- 0,283	- 0,299	0,290	- 0,700	0,405
- 0,036	- 0,150	- 0,025	0,004	- 0,186
0,828	0,728	0,642	0,424	- 0,258
0,680	0,492	0,302	- 0,270	- 0,066
0,316	0,123	0,026	- 0,139	- 0,173
0,771	0,024	- 0,048	- 0,402	- 0,394
0,797	0,356	0,230	0,159	- 0,188
0,419	0,342	0,202	0,098	0,208
0,372	0,224	0,110	0,169	0,088
0,268	0,450	0,010	0,327	- 0,014
1,195	0,003	- 0,359	- 0,657	- 0,688
0,411	0,127	- 0,638	- 0,143	- 0,312
0,069	- 0,010	- 0,007	- 0,089	- 0,047
0,426	- 0,281	- 0,180	- 0,123	- 0,439
0,340	0,257	0,122	0,097	0,050
0,400	0,189	0,166	0,053	- 0,077
0,119	- 0,048	- 0,057	0,141	0,147
- 0,104	<b>0,414</b>	- 0,992	0,069	0,162
0,749	0,236	- 0,076	0,100	- 0,005
- 0,132	0,174	- 0,211	0,091	0,058
0,833	0,763	0,364	- 0,038	- 0,038
0,663	- 0,241	- 0,273	- 0,657	- 0,357
0,104	0,124	<b>0,113</b>	0,024	- 0,144
0,506	0,260	<b>0,223</b>	- 0,496	- 0,145
0,492	- 0,409	- 0,161	- 0,450	- 1,071
0,215	0,704	- 0,173	- 0,502	- 0,167
0,118	0,216	0,086	0,099	0,066

3.129	1.321	0.490	0.490	0.600	0.182	-0.480	-0.227	0.342	-0.063	-0.166
1.731	-0.956	-1.088	0.010	0.759	0.774	-0.517	-0.256	-0.121	-0.236	0.093
3.398	0.259	-0.464	0.001	0.258	-0.079	-0.049	0.019	0.359	0.383	-0.286
1.249	-0.214	-0.535	-0.755	0.238	0.180	-0.698	-0.020	-0.032	-0.191	0.048
2.730	1.274	0.497	-0.688	-0.556	-0.255	-0.737	-1.231	-0.923	-0.715	-0.693
2.577	-0.539	-0.128	-0.108	0.914	0.594	0.217	0.368	0.205	0.462	-0.442
2.114	-0.080	-0.750	-0.679	-0.723	-0.300	-0.796	-0.566	0.017	0.542	0.686
2.603	0.247	-0.210	-0.136	0.249	0.091	-0.796	-0.489	0.118	0.319	-0.013
1.828	0.174	0.047	-0.906	-0.281	-0.494	-0.796	-0.941	-0.068	-0.628	-0.471
3.147	1.067	0.836	0.915	-0.098	-0.371	-1.083	-0.875	-0.616	-0.764	-0.441
1.871	0.127	0.177	0.053	-0.258	-0.102	-0.820	-1.144	-0.927	-0.545	-0.152
3.583	1.375	0.704	0.515	-0.353	-0.359	0.054	0.355	0.224	-0.112	0.053
1.614	-0.175	-0.315	-0.600	-0.652	-0.273	-0.438	0.501	0.242	-0.015	0.366
3.026	1.058	0.844	0.401	0.032	0.042	-0.492	-0.697	0.162	0.248	-0.131
1.280	-0.338	-0.340	-0.696	-0.897	-0.637	-0.589	-0.602	-0.595	0.166	-0.068
1.673	0.272	-0.108	-0.053	0.411	0.446	-0.643	-0.387	-0.196	-0.169	0.298
2.731	-0.723	-1.203	-0.176	1.171	0.919	-1.341	-0.591	0.564	0.457	0.284
1.898	0.587	0.390	0.241	-0.298	0.252	-0.456	-0.408	-0.345	-0.426	0.116
3.354	0.394	0.192	0.287	-0.363	-0.248	-1.454	-1.780	-1.218	-0.953	-0.936
3.197	0.656	-0.063	0.110	0.215	-0.210	-0.878	-0.575	-0.086	-0.339	-0.512
2.365	0.615	-0.281	-0.421	-0.558	-0.407	-0.054	-0.008	-0.015	-0.572	-0.584
3.275	0.685	0.089	0.534	0.106	0.418	0.075	-0.549	-0.530	-0.956	-0.623
1.657	-0.554	-1.100	-0.531	0.207	0.278	-0.362	-0.178	-0.142	-0.532	-0.086
-0.945	1.500	0.178	-0.282	0.153	0.668	-0.020	-0.749	0.228	-0.139	-0.262
2.601	0.730	-0.876	-1.564	-1.255	-0.523	-0.324	-0.278	0.034	0.044	0.181
3.076	0.949	0.628	0.663	-0.400	-0.891	-0.960	-0.827	0.503	0.350	0.387
2.517	0.151	-0.333	0.361	0.913	-0.442	-0.728	-0.621	-0.404	0.371	0.586
2.762	0.732	-0.540	-0.910	-0.555	-0.117	0.728	0.744	-0.191	-0.966	-0.671
3.566	0.591	0.400	0.582	0.593	0.282	-0.504	0.426	0.652	-0.077	-0.211
1.671	-0.241	-0.635	-0.662	-0.517	-0.294	-0.095	-0.061	0.280	0.468	0.652
1.423	-0.111	-0.688	-0.525	-0.350	0.016	0.016	-0.234	-0.258	0.028	-0.038
2.630	0.367	-0.366	-0.056	0.214	0.107	-0.932	-1.137	-0.370	0.089	0.018
1.467	-0.257	1.023	-0.487	-0.174	0.115	-0.219	-0.783	-0.658	-0.708	-0.457
1.621	-0.455	-0.486	-1.071	-0.635	0.249	-0.684	-0.522	-0.927	-0.650	0.544
0.591	-0.564	-0.222	-0.051	-0.685	0.099	-0.786	-0.353	0.209	-0.067	-0.955
1.817	0.226	-0.240	0.103	0.365	0.191	-0.448	-0.151	0.030	-0.375	-0.536
2.640	0.696	-0.194	-0.949	-0.463	0.046	-0.262	-0.315	-0.462	-0.783	-0.168
2.327	0.938	0.523	0.641	0.570	0.188	0.188	0.375	0.670	0.633	0.300
2.427	1.193	0.799	0.319	-0.494	-0.555	-0.040	0.012	0.085	-0.196	-0.225
0.949	-0.088	0.525	-0.573	-0.330	-0.064	-0.232	-0.241	0.205	0.443	0.163
2.251	0.795	-0.021	0.162	-1.115	-0.770	-0.939	-0.746	-0.226	-0.499	-0.924
1.763	-0.322	-0.220	0.000	-0.313	-0.137	0.025	0.486	1.069	0.796	0.240
1.858	0.629	-0.073	0.269	0.298	0.297	-0.996	-1.050	-0.377	-0.113	-0.208
3.075	-0.052	1.255	-0.431	0.710	0.577	-0.914	-1.087	-0.349	1.531	1.700
1.866	0.187	0.343	-0.183	-0.515	-0.167	-0.458	0.485	0.221	-0.308	-0.217
1.867	0.272	-0.252	0.115	0.258	0.035	-0.761	-0.746	-0.369	-0.540	-0.435
1.231	-0.478	-0.177	0.571	0.492	-0.010	-1.019	-0.170	0.349	0.514	0.315
1.688	-0.481	-0.761	-0.834	0.116	0.318	-1.807	-1.384	-0.484	-0.483	0.616
1.791	-0.240	-1.054	-0.110	-0.093	0.296	-0.947	-0.330	-0.055	0.508	0.553
1.493	-0.490	-0.853	0.147	0.588	0.282	-0.005	-0.331	0.449	-0.299	-0.791