TÁCITO SILVA
Engenheiro-Agrônomo
Instituto de Pesquisa Agropecuária do Centro - Oeste
Bolsista do C. N. Pq.
SETE ALGOAS - MG

SOBRE UM MODELO QUADRÁTICO PARA AS ANÁLISES DE COVARIÂNCIA

ORIENTADOR: Prof. Izaias R. Nogueira

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Magister Scientiae" (M.S.)

PIRACICABA — ESTADO DE SÃO PAULO
1972

À meus pais

minha esposa

e meus filhos

D E D I C O

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira, pela dedicação, zelo e esforço despendido na orientação do presente trabalho.

Ao Prof. Dr. Humberto de Campos, pela colaboração que nos foi prestada não somente na realização do presente trabalho, mas também pelas atenções por nós recebidas durante a realização do curso de pós-graduação.

Ao Pesquisador em Agricultura, Engenheiro-Agrônomo Warney Mauro da Costa Val, pela gentileza do fornecimento dos dados dos experimentos de competição de variedades de soja.

Aos Técnicos da Secretaria de Agricultura de Minas Gerais, pelas facilidades oferecidas na obtenção dos dados dos experimentos de competição de variedades de algodão.

À Diretoria do IPEACO pela oportunidade que nos foi oferecida de realizarmos nosso curso de pós-graduação.

Ao Dr. Ronaldo Abreu, pela colaboração no processamento dos dados.

A O.E.A. e C.A.P.E.S. , pelas bolsas de estudos que nos foram concedidas.

Ao CNPq , pelo estímulo que nos oferece ao conceder-nos a bolsa de pesquisa da qual somos portadores.

Somos Gratos.

ÍNDICE

Página

Página

Página

1 - INTRODUÇÃO

No curso de um experimento, muitas vezes é possível tomar-se medidas suplementares que contribuem para aumentar a precisão dos resultados obtidos.

Por meio da análise da covariância, pode-se verificar a influência dessas medidas suplementares nas observações, removendo-se desse modo, do erro experimental a parte atribuída às diferenças causadas por essa fonte de variação.

A variação não controlada, isto é, o erro experimental está muitas vezes associado às variações de outra variável (x). Desse modo medidas suplementares da covariável (x) podem servir para remover diferenças nos efeitos dos tratamentos. A variância $s^2 y$, passa a $s^2 y \cdot x$, uma vez conhecida a influência de x sobre y e tudo se passa como se os x tivessem sido nivelados.

Na análise da covariância são combinados os conceitos da análise da variância e da regressão de maneira a fornecer uma análise mais discriminatória do que qualquer uma dessas duas técnicas isoladamente.

Nos modelos matemáticos utilizados, na maioria das aplicações da análise da covariância são combinados os conceitos da análise da variância e da regressão linear, simples ou múltipla, pressupondo dessa maneira uma relação de linearidade entre os valores observados (y) e aqueles da covariável ou das covariáveis obtidas com auxílio de medidas suplementares.

O uso da covariância linear tem sido criticado por alguns autores, alegando estes que não se pode generalizar a pressuposição de linearidade entre a variável independente (x) e a dependente (y), havendo situações nas quais se torna necessário admitir-se relações não lineares entre as variáveis em estudo.

No presente trabalho é apresentado um estudo sobre a análise da covariância para os delineamentos inteiramente casualizados e blocos casualizados, no qual são combinados os conceitos da análise da variância e da regressão do segundo grau, pressupondo-se uma relação não linear entre os valores observados (y) e dados obtidos com auxílio de medidas adicionais (x).

O trabalho é orientado no sentido de apresenta um caminho simplificado para análise da covariância quando envolve a covariável (x) no segundo grau.

A justificativa para apresentação do presente trabalho se baseia no fato de que, o ajustamento da regressão do segundo grau se mostra muitas vezes mais adequado nas análises de covariância que a regressão linear. Também se mostra eficas no ajustamento dos dados em ensaios com animais. As diferenças de peso inicial, idade, sexo, etc., devem ser eliminados ao se efetuarem as análises e interpretação dos resultados, e as regressões de grau superior ao primeiro tem-se mostrado mais adequadas. Esta afirmação se baseia em trabalhos de melhoramento de animais, ainda não publicados do Departamento de Zootecnia da Escola de Veterinária da Universidade Federal de Minas Gerais.

A dificuldade de ser encontrada na literatura, de trabalhos que tratassem especificamente e com simplifidade da análise da covariância do segundo grau, também contribuiu para que este trabalho fosse realizado.

2 - REVISÃO DA LITERATURA

COCHRAN (1957) sugere o modelo matemático de covariância linear e tece as seguintes considerações:

a - Conferir precisão em experimentos casualizados, sendo esta provavelmente sua mais frequente aplicação. A covariável (x) sendo uma medida suplementar tomada em cada uma das unidades experimentais antes da aplicação dos tratamentos. Cita o autor que a primeira ilustração do método da covariância na literatura foi deste tipo, apresentada por FISHER (1932). A variável (x) constituia a produção de chá por parcela, obtida num período preliminar ao passo que (y) constituiu a produção de chá no fim do ensaio, após a aplicação dos tratamentos. Os ajustamentos nas respostas de $\underline{y}$ removeram os efeitos da produção inicial (x) e no erro experimental. Se a regressão é linear o ganho de precisão pelo uso da covariância depende da grandeza do coeficiente de correlação ρ entre $\underline{y}$ e $\underline{x}$ nas unidades experimentais (parcelas) que recebem o mesmo tratamento. Se σ_y^2 é a variância do erro quando não é utilizada a covariância, o ajustamento reduz esta variância a

$$\sigma_y^2\,(1 - \rho^2)\left[\,1 + \frac{1}{f_{\alpha-2}}\,\right]$$

onde f_α é o número de graus de liberdade do resíduo.

b - Para remover os efeitos de variáveis perturbadoras em estudo de observação. Em áreas de estudos nas quais não é possível a instalação de experimentos casualizados podemos observar dois ou mais grupos diferenciados entre si por algumas características, com objetivo de deter minar se há associação entre essas características e a resposta y . Exemplos são diferenças em altura das crianças das zonas rural e urbana , diferenças entre porcentagens de enfermidades entre os habitantes das residências urbanas e habitantes das favelas, diferenças nas despesas com laser de funcionários de escritórios e trabalhadores braçais. Em estudos de observação é constantemente verificado que uma associação observada, mesmo que estatisticamente significativa pode ser devida total ou parcialmente a outras variáveis perturbadoras, nas quais os grupos diferem.

Em comparação de alturas de crianças, oriundas de dois tipos diferentes de escolas, GREENBERG (1953) encontrou que os dois grupos diferiram ligeiramente, ainda que não significativamente na média das idades. O ajustamento pela covariância levando-se em consideração as diferenças de idade resultou em maior sensibilidade na comparação entre as alturas das crianças.

c - Contribue para oferecer esclarecimentos sobre a natureza dos efeitos dos tratamentos - Esta aplicação está estreitamente relacionada com a anterior. Em um experimento casualizado o efeito de vários fumigantes do solo para combate a nematóides que atacavam culturas de aveia em fazendas da Inglaterra, depois que os tratamentos foram aplicados o número de cistos de nematóides e as produções por parcelas foram ambos registrados. Foram encontrados efeitos significativos tanto para o número de cistos quanto para as produções. Interessou-se em verificar até quando a redução do número de nematóides poderia ser responsabilizada pelas diferenças encontradas nas produções de aveia. Se os efeitos dos tratamentos (produções de aveia) desaparecessem após o ajustamento pela covariância considerando-se o número de cistos como a covariável (x), isto sugeriria, pelo menos à primeira vista, que as diferenças de tratamentos foram simplesmente um reflexo das diferenças produzidas pelos fumigantes no número de cistos de nematóides.

d - Ajustamento de regressões em classificações múltiplas - A situação mais simples discutida em livros texto elementares, envolve uma classificação simples. Por meio de técnicas padronizadas pademos (i) ajustar uma regressão separada de $\underline{Y}$ sobre $\underline{x}$ dentro de cada classe (ii) testar se as declividades ou posições das linhas diferem de uma classe para outra (iii) se aconselhável, fazer uma estimativa combinada para uma declividade comum. Como exemplo de uma classificação linha x coluna a regressão da produção de trigo com alta brotação, número de plantas e número de espigas uma série crescente de estudos foi conduzida na Inglaterra, por COCHRAN (1938).

e - Análise dos dados quado algumas observações são perdidas - Um interessante aspecto do uso da análise da covariância foi utilizado por BARTLETT (1937) no qual o método é usado para computar a exata análise da variância quando algumas observações são perdidas. Para cada observação perdida admitiu qualquer valor conveniente (e.g. 0,5 ou 100) e introduziu uma variável fictícia (x) que toma o valor um para a unidade perdida e 0 (zero) para todas as outras unidades. A análise de covariância tradicional fornece então os corretos testes de F e T. Este método é provavelmente mais trabalhoso do que o do cálculo das parcelas perdidas introduzido por YATES (1933), mas é utilizado com classificações não muito comuns, onde a fórmula de Yates não tem sido muito utilizada, e, quando os testes exatos de F e T são importantes, já que o método de Yates nos dá testes aproximados.

Todas estas considerações feitas por Cochran se referem à covariância linear, isto é, pressupondo uma relação linear entre $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

A seguir COCHRAN (1957) apresenta a técnica de computação para covariância linear a partir do modelo matemático

$$y_{ij} = u + T_i + \rho_j + \beta (x_{ij} - x_{..}) + e_{ij}$$

Pelo método dos quadrados mínimos, estima os parâmetros e determina a função estimadora

$$\hat{y}_{ij} = m + t_i + r_j + b (x_{ij} - x_{..})$$

A seguir mostra a técnica para efetuar-se a análise da covariancia, o teste de F para as médias ajustadas para a regressão linear.

Apresenta finalmente as pressuposições básicas da análise da covariância que podem assim ser resumidas:

i) Os efeitos dos tratamentos, blocos e da regressão devem ser aditivos, como postula o modelo anteriormente apresentado.

ii) Os efeitos residuais (e_{ij}) devem ser normal e independentemente distribuídos, com média zero e variância comu.

Recomenda ainda o mesmo autor que as mesmas precauções a serem tomadas para a análise da variância devem ser igualmente observadas na análise da covariância. Sugere também que a utilização da análise da covariância pressupõe que seja ajustada a EQUAÇÃO DE REGRESSÃO ADEQUADA. Talvez, cita o autor, o erro mais comum constitue no uso de regressões lineares, simples ou múltiplas quando a verdadeira regressão a ajustar é curvilínea.

Finalmente analisa em seu trabalho, alguns aspectos da covariância linear múltipla, apresentando resumidamente a técnica de análise e interpretação de resultados. Não faz nenhuma referência a análise da covariância de grau superior ao primeiro.

PIMENTEL GOMES (1970) ao analisar os resultados de um ensaio de herbicidas na cultura do feijão, afirma que os ajustamentos só se justificam, em geral se as diferenças de stand não forem devidas aos próprios tratamentos. Isto se verifica através de uma análise de variância do "stand".

KEMPTHORNE (1952) fazendo um estudo sobre a análise da covariância, apresenta um modelo matemático com dois critérios de classificação, com uma observação por parcela e ausência de interação. Supõe a presença de um atributo (x) sugeito à variação associada a cada parcela experimental. Admite a segur a ausência do efeito de tratamentos e levanta a hipótese:

$$y_{ij} = u + b_i + \beta\,(x_{ij} - \bar{x}) + e_{ij}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r$$

$$j = 1, 2, \ldots, s$$

e testa o modelo matemático completo,

$$y_{ij} = u + b_i + \beta\,(x_{ij} - \bar{x}) + t_j + e_{ij}$$

Admite a hipótese

$$\sum_i b_i = 0$$

e apresenta o seguinte esquema de análise de variância e consequente teste de F para as diferenças entre médias ajustadas.

Fontes de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
(u, b_i, β)	$r + 1$	$R(u, b_i, \beta)$		
Tratamentos Ajustados	$s - 1$	Diferença (D_1)	$D_1 / s - 1$	$\dfrac{D_1/(s-1)}{D_2/(rs-r-s)}$
(u, b_i, β, t_j)	$r+1+s-1$	$R(u, b_i, \beta, t_j)$		
Resíduo	$sr - s - r - s$	Diferença (D_2)	$\dfrac{D_2}{(rs-r-s)}$	
Total	$r\ s$	$\sum_{i,j} y_{ij}^2$		

A seguir determina os valores de $R(u, b_i, B)$ e $R(u, b_i, \beta, t_j)$ pelo método dos quadrados mínimos, assim como a estimativa de β. Note-se que em todo seu trabalho somente é levada em conta a regressão linear. O ajustamento das médias é feito pela função

$$\hat{\bar{y}}_i = \bar{Y}_i - b\,(\bar{X}_i - \bar{X}) \quad .$$

CRUZ (1971) estuda a influência da perda de plantas na produção da parcela em experimentos de milho e fornece subsíduos a serem considerados ao se processarem as análises estatísticas de ensaios com "stand" final variável.

Com objetivo de estabelecer o grau de influência que as falhas apresentam nos rendimentos devido à ausência de competição em algumas plantas, desenvolve modelos matemáticos adequados a partir dos rendimentos esperados de parcelas com "stand" inicial N e X falhas.

Desses estudos resultaram os modelos de covariância múltipla

$$y_{ij} = u + t_i + b_j + \beta_1 x_{ij} + \beta_2 x_{ij}^2 + \beta_3 x_{ij}^3 + e_{ij}$$

para o caso em que se tem duas plantas por cova e

$$y_{ij} = u + t_i + b_j + \delta x_{ij} + \delta_2 x_{ij}^2 + e_{ij} ,$$

no caso de uma só planta por cova, onde se considera o número de falhas X uma variável auxiliar na explicação dos rendimentos observados.

Os aspectos considerados importantes nas análises efetuadas dizem respeito às verificações de hipóteses efetuadas sobre os parâmetros β_1 , β_2 e β_3 do primeiro modelo citado para em seguida propor a fórmula de correção da produção das parcelas para "stand" e competição.

Faz também comparações entre os processos de correção de competição decorrente do modelo introduzido no trabalho e o de ZUBER (1942) atualmente empregado em ensaios com "stand" final variável, e chega as seguintes conclusões:

a - Não é viável a recomendação de uma fórmula única para correção do "stand" e competição em ensaio com "stand" final variável.

b - O modelo recomendado

$$y_{ij} = u + t_i + b_j + \beta_1 x_{ij} + \beta_2 x_{ij}^2 + \beta_3 x_{ij}^3 + e_{ij}$$

pode ser reduzido conforme resultados de verificação de hipóteses sobre os parâmetros β_1 , β_2 e β_3 .

c - Comprovadas as hipóteses

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 ,$$

sugere que o rendimento da parcela seja corrigido apenas para o "stand" inicial.

Foi este o único trabalho na literatura revisada que tratou da análise da covariância onde a covariável $\underline{x}$ é tomada em graus superiores ao primeiro.

3 - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1 - EXPERIMENTO INTEIRAMENTE CASUALIZADO

3.1.1 - Estimativas dos parâmetros

Pela álgebra de matrizes pode apresentar-se um método geral para obtenção das estimativas dos parâmetros e de suas respectivas variâncias e covariâncias. No caso em estudo o conjunto de observações segue o modelo matemático

$$y_{ij} = u + t_i + b_1\, x_{ij} + b_2\, x_{ij}^2 + e_{ij}$$

onde

$i = 1\ ,\ 2\ ,\ldots,\ n$

$j = 1\ ,\ 2\ ,\ldots,\ s$

$x_{ij} = X_{ij} - \bar{X} \quad \text{ou} \quad \sum_{i,j} x_{ij} = 0$

sendo

u = média geral

t_i = efeito aditivo do i-ésino tratamento

b_1 = coeficiente de x_{ij}

b_2 = coeficiente de x_{ij}^2

e_{ij} = efeito residual

Matricialmente tem-se

$$Y = X\,\beta + \xi$$

onde

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1s} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2s} \\ \vdots \\ y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{ns} \end{bmatrix} ; \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & x_{11}^2 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{12} & x_{12}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{1s} & x_{1s}^2 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{21} & x_{21}^2 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{22} & x_{22}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{2s} & x_{2s}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n1} & x_{n1}^2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n2} & x_{n2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{ns} & x_{ns}^2 \end{bmatrix} ;$$

$$\beta = \begin{bmatrix} u \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} ; \qquad \xi = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1s} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{2s} \\ \vdots \\ e_{n1} \\ e_{n2} \\ \vdots \\ e_{ns} \end{bmatrix}$$

Pelo método dos quadrados mínimos, obtém-se o sistema de equações normais

$$X' X \hat{\beta} = X' Y$$

ou

$$\begin{bmatrix} ns & s & s & \dots & s & 0 & \sum_{i,j} x_{ij}^2 \\ s & s & 0 & \dots & 0 & x_{1.} & \sum_j x_{1j}^2 \\ s & 0 & s & \dots & 0 & x_{2.} & \sum_j x_{2j}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s & 0 & 0 & \dots & s & x_{n.} & \sum_j x_{nl}^2 \\ 0 & x_{1.} & x_{2.} & \dots & x_{n.} & \sum_{i,j} x_{ij}^2 & \sum_{i,j} x_{ij}^3 \\ \sum_{i,j} x_{ij}^2 & \sum_j x_{ij}^2 & \sum_j x_{2j}^2 & \dots & \sum_j x_{nj}^2 & \sum_{i,j} x_{ij}^3 & \sum_{i,j} x_{ij}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \vdots \\ \hat{t}_n \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{..} \\ Y_{1.} \\ Y_{2.} \\ \vdots \\ Y_n \\ \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij} \\ \sum_{i,j} x_{ij}^2 y_{ij} \end{bmatrix}$$

Admitindo-se a restrição $\sum_i t_i = 0$, resulta

$$n\,s\,\hat{u} + \qquad\qquad + \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2 = Y_{..}$$

$$s\,\hat{u} + s\,\hat{t}_1 + \qquad + \hat{b}_1 x_{1.} + \hat{b}_2 \sum_j x_{1j}^2 = Y_{1.}$$

$$s\,\hat{u} + \qquad + s\,\hat{t}_2 \qquad + \hat{b}_1 x_{2.} + \hat{b}_2 \sum_j x_{2j}^2 = Y_{2.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s\,u \qquad + s\,\hat{t}_n + \hat{b}_1 x_{n.} + \hat{b}_2 \sum_j x_{nj}^2 = Y_{n.}$$

$$\hat{t}_1 x_{1.} + \hat{t}_2 x_{2.} + \ldots + \hat{t}_n x_{n.} + \hat{b}_1 \sum_{i,j} x_{ij}^2 + \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^3 = \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij}$$

$$\hat{u} \sum_{i,j} x_{ij}^2 + \hat{t}_1 \sum_j x_{1j}^2 + \hat{t}_2 \sum_j x_{2j}^2 + \ldots + \hat{t}_n \sum_j x_{nj}^2 + \hat{b}_1 \sum_{i,j} x_{ij}^3 + \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^4 = \sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij}$$

Obtém-se entao as seguintes estimativas:

$$\hat{u} = \frac{1}{n\,s}\left[Y_{..} - \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2 \right] \qquad \text{(I)}$$

$$\hat{t}_i = (1/s)\left[Y_{i.} - \hat{b}_1 x_{i.} - \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2 \right] - \hat{u} \qquad \text{(II)}$$

Multiplicando II membro a membro por $x_{i.}$ e substituindo os valores encontrados na equação normal de $\hat{b}_1$ virá:

$$\hat{b}_1 \left[\sum_{i,j} x_{ij}^2 - \sum_i \frac{x_{i.}^2}{s} \right] + \hat{b}_2 \left[\sum_{i,j} x_{ij}^3 - (1/s) \sum_i x_{i.} \sum_j x_{ij}^2 \right] =$$

$$= \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} - (1/s) \sum_i x_{i.}\, Y_i$$

ou ainda:

$$\hat{b}_1 \cdot \text{S Q Residual } (x) + \hat{b}_2 \left[\sum_{i,j} x_{ij}^3 - (1/s) \sum_i x_{i.} \sum_j x_{ij}^2 \right] =$$

$$= \text{S. Q. Produtos Residuais} \qquad \text{(III)}$$

Multiplicando (II) membro a membro por $\sum_j x_{ij}^2$ e substituindo estes valores na equação normal de $\hat{b}_2$ virá:

$$\hat{b}_1 \left[\sum_{i,j} x_{ij}^3 - (1/s) \sum_i x_{i.} \sum_j x_{ij}^2 \right] + \hat{b}_2 \left[\sum_{i,j} x_{ij}^4 - (1/s) \sum_i (\sum_j x_{ij}^2)^2 \right] =$$

$$= \sum_{i,j} x_{ij}^2 \, y_{ij} - (1/s) \sum_i Y_{i.} \sum_j x_j^2 \qquad \text{(V)}$$

Tomando-se III e V e chamando-se

$K = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - (1/s) \sum_i x_{i.}^2$ ou soma dos quadrados residuais

$M = \sum_{i,j} x_{ij}^3 - (1/s) \sum_i x_{i.} \sum_j x_{ij}^2$

$N = \sum_{i,j} x_{ij} \, y_{ij} - (1/s) \sum x_{i.} \, y_{i.}$ ou soma dos produtos residuais

$P = \sum_{i,j} x_{ij}^4 - (1/s) \sum_i (\sum_j x_{ij}^2)^2$ (VI)

$Q = \sum_{i,j} x_{ij}^2 \, y_{ij} - (1/s) \sum_i Y_{i.} \sum_j x_{ij}^2$

tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \hat{b}_1 K + \hat{b}_2 M = N \\ \hat{b}_1 M + \hat{b}_2 P = Q \end{cases}$$

que resolvido nos da as estimativas de b_1 e b_2 respectivamente:

$$\hat{b}_1 = \frac{P N - Q M}{P K - M^2} \qquad \text{(VII)}$$

e

$$\hat{b}_2 = \frac{Q K - M N}{P K - M^2} \qquad \text{(VIII)}$$

3.1.2 - Determinação do quadrado médio residual

Uma vez determinadas as estimativas dos parâmetros da equação em estudo, calcula-se o quadrado médio residual pela fórmula de Kempthorne (1952):

$$\text{Q. M. Residual} = \frac{1}{n\,s - p}\left[\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{p} \hat{\beta}_i \; P_i\right]$$

sendo

$$p = (n - 1) + 3$$

e

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{\beta}_i \; P_i = \text{Regressão } (\hat{u} \; , \; \hat{t}_i \; , \; \hat{b}_i \; , \; \hat{b}_2)$$

Tem-se então

$$s^2 = \frac{1}{n\,(s - 1) - 2}\left[\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \text{Regressão } (\hat{u} \; , \; \hat{t}_i \; , \; \hat{n}_1 \; , \; \hat{b}_2)\right]$$

onde

$$\text{Regressão } (\hat{u} \; , \; \hat{t}_i \; , \; \hat{b}_1 \; , \; \hat{b}_2) = \hat{u}\; Y_{..} + \sum_i t_i \; Y_{i.} + \hat{b}_1 \sum_{i,j} x_{ij} \; y_{ij} + \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2 \; y_{ij} \qquad \text{(IX)}$$

3.1.3 - Determinação da soma de quadrados ajustados para a regressão

Admitindo-se o modelo matemático

$$y_{ij} = u' + b_1' \; x_{ij} + b_2' \; x_{ij}^2 + e_{ij}$$

onde $x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}$ ou $\sum_{i,j} x_{ij} = 0$,

no qual é ignorada a presença de tratamentos, tem-se matricialmente

$$Y = X\,\Theta + \Delta \quad ,$$

onde:

$$
Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1s} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{23} \\ \vdots \\ y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{ns} \end{bmatrix}
\quad
X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{11}^2 \\ 1 & x_{12} & x_{12}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1s} & x_{1s}^2 \\ 1 & x_{21} & x_{21} \\ 1 & x_{22} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2s} & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n1} \\ 1 & x_{n2} & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{ns} & x_{ns} \end{bmatrix}
\quad
\Theta = \begin{bmatrix} u' \\ b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix}
\quad
\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \vdots \\ \delta_{1s} \\ \delta_{21} \\ \delta_{22} \\ \vdots \\ \delta_{2s} \\ \vdots \\ \delta_{n1} \\ \delta_{n2} \\ \vdots \\ \delta_{ns} \end{bmatrix}
$$

Pelo método dos quadrados mínimos obtém-se o sistema de equações normais

$$X' \, Y = X' \, X \, \hat{\Theta}$$

$$
\begin{bmatrix} ns & 0 & \sum_{i,j} x_{ij}^2 \\ 0 & \sum_{i,j} x_{ij}^2 & \sum_{i,j} x_{ij}^3 \\ \sum_{i,j} x_{ij}^2 & \sum_{i,j} x_{ij}^3 & \sum_{i,j} x_{ij}^4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{b}'_1 \\ \hat{b}'_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} Y_{..} \\ \sum_{i,j} x_{ij} \, y_{ij} \\ \sum_{i,j} x_{ij}^2 \, y_{ij} \end{bmatrix}
$$

Do sistema de equações

$$
\begin{aligned}
n\,s\,\hat{u}' \qquad\qquad\qquad\qquad &+ \hat{b}'_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2 = Y_{..} \\
\hat{b}'_1 \sum_{i,j} x_{ij}^2 \qquad &+ \hat{b}'_2 \sum_{i,j} x_{ij}^3 = \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} \qquad\qquad (X) \\
\hat{u}' \sum_{i,j} x_{ij}^2 + \hat{b}'_1 \sum_{i,j} x_{ij}^3 &+ \hat{b}'_2 \sum_{i,j} x_{ij}^4 = \sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij}
\end{aligned}
$$

obtém-se

$$
\hat{u}' = \frac{1}{ns} \left[Y_{..} - \hat{b}'_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2 \right] \qquad\qquad (XI)
$$

Substituindo em X , $\hat{u}'$ por seu valor encontrado em XI tem-se o seguinte estema de equações:

$$
\left[
\begin{aligned}
&\hat{b}'_1 \sum_{i,j} x_{ij}^2 + b'_2 \sum_{i,j} x_{ij}^3 = \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} \\
&\hat{b}'_1 \sum_{i,j} x_{ij}^3 + \hat{b}'_2 \left[\sum_{i,j} x_{ij}^4 - \frac{1}{n\,s} \left(\sum_{i,j} x_{ij}^2 \right)^2 \right] = \sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij} - \frac{1}{n\,s} Y_{..} \sum_{i,j} x_{ij}^2
\end{aligned}
\right.
$$

Fazendo-se

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i,j} x_{ij}^2 \\
B &= \sum_{i,j} x_{ij}^3 \qquad\qquad\qquad (XII) \\
C &= \sum_{i,j} x_{ij}^4 - \frac{1}{n\,s} \left(\sum_{i,j} x_{ij}^2 \right)^2 \\
D &= \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} \\
E &= \sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij} - \frac{1}{n\,s} \left(\sum_{i,j} x_{ij}^2 \right)^2
\end{aligned}
$$

Obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \hat{b}_1' A + \hat{b}_2' B = D \\ \hat{b}_1' B + \hat{b}_2' C = E \end{cases}$$

Daí obtem-se:

$$\hat{b}_1' = \frac{DC - BE}{AC - B^2} \qquad (XIII)$$

$$\hat{b}_2' = \frac{AE - BD}{AC - B^2} \qquad (XIV)$$

A soma dos quadrados da regressão será, neste caso

$$S\ Q\ \text{Regressão}\ (\hat{u}' , \hat{b}_1' , \hat{b}_2') = \hat{u}'\ Y_{..} + \hat{b}_1' \sum_{i,j} x_{ij}\ y_{ij} + \hat{b}_2' \sum_{i,j} x_{ij}^2\ y_{ij}$$

A soma dos quadrados de tratamentos ajustados para a regressão é obtida segundo Kempthorne (2) pela fórmula

$$S\ Q\ \text{Trat. Ajustado} = S\ Q\ (\hat{u} , \hat{t} , \hat{b}_1 , \hat{b}_2) - S\ Q\ \text{Regressão}\ (\hat{u}' , \hat{b}_1' , \hat{b}_2')$$

ou seja

$$S\ Q\ \text{Trat. Ajust.} = \hat{u}\ Y_{..} + \sum_i \hat{t}_i\ Y_{i.} + \hat{b}_1 \sum_{i,j} x_{ij}\ y_{ij} + b_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2\ y_{ij} -$$

$$- \left[\hat{u}'\ Y_{..} + \hat{b}_1' \sum_{i,j} x_{ij}\ y_{ij} + \hat{b}_2' \sum_{i,j} x_{ij}^2\ y_{ij} \right]$$

Substituindo na fórmula acima as estimativas de $\hat{u}$, $\hat{t}_i$ por seus valores em I e II e $\hat{u}'$ por seu valor em XI , tem-se

$$S\ Q\ \text{Trat. Ajust.} = \frac{1}{n\ s}\left[Y_{..} - \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2\right] Y_{..} + \sum_i \left\{ (1/S) \left[Y_{i.} - b_1 X_{i.} - \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2 \right] - \hat{u} \right\} Y_{i.} + \hat{b}_1 \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} + \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij} -$$

$$\left\{ \left[\frac{1}{n\ s} (Y_{..} - \hat{b}_2' \sum_{i,j} x_{ij}^2) \right] Y_{..} + \hat{b}_1' \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} + \hat{b}_2' \sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij} \right\}$$

Desenvolvendo e reduzindo os termos semelhantes tem-se

$$S\ Q\ \text{Trat. Ajust.} = (1/s) \sum_i Y_{i.}^2 - \frac{1}{n\ s} Y_{..}^2 + \hat{b}_1 \left[\sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} - (1/s) \sum_i x_{i.} y_{i.} \right] +$$

$$+ \hat{b}_2 \left[\sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij} - (1/s) \sum_i Y_{i.} \sum_j x_{ij}^2 \right] - \hat{b}_2' \left[\sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} - \frac{1}{n\ s} Y_{..} \sum_{i,j} x_{ij}^2 \right] -$$

$$- \hat{b}_1' \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij}$$

Sabendo-se que:

$$\sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} - (1/s) \sum_i x_{i.}\, Y_i = N$$

$$\sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij} - (1/s) \sum_i Y_{i.} \sum_j x_{ij}^2 = Q$$

$$\sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij} - \frac{1}{n\ s} Y_{..} \sum_{i,j} x_{ij}^2 = E$$

$$\sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} = D$$

é substituindo $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ por seus valores em VII e VIII , e $\hat{b}_1'$ e $\hat{b}_2'$ por seus valores em XIII e XIV respetivamente tem-se

$$S\ Q\ \text{Trat. Ajust.} = (1/s) \sum_i Y_{i.}^2 - \frac{1}{n\,s} Y_{..}^2 + \frac{PN - QN}{PK - M^2} \cdot N +$$

$$+ \frac{QK - MN}{PK - M^2} \cdot Q - \frac{AE - BD}{AC - B^2} \cdot E - \frac{DC - BE}{AC - B^2} \cdot D$$

Somando e subtraindo S Q Residual de $\underline{y}$ ignorando o efeito da regressão, ao segundo membro e reduzindo os termos semelhantes vem

$$S\ Q\ \text{Trat. Ajust.} = S\ Q\ (\text{Trat.} + \text{Res.}) - \frac{D^2C - 2\,B\,D\,E + A\,E^2}{A\,C - B^2} -$$

$$- \left[S\ Q\ \text{Resíduo}\ (y) - \frac{N^2\,P - 2\,Q\,M\,N + Q^2\,K}{P\,K - M^2} \right] \qquad \text{XV}$$

3.1.4 - <u>Determinação das variâncias e covariâncias das estimativas $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$</u>

3.1.4.1 - Determinação das variâncias de $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$

As estimativas de b_1 e b_2 são determinadas pelas fórmulas VII e VIII

$$\hat{b}_1 = \frac{PN - MQ}{PK - M^2} \qquad \text{e} \qquad \hat{b}_2 = \frac{QK - MN}{PK - M^2}$$

tem-se então

$$V\,(\hat{b}_1) = \frac{1}{(PK - M^2)^2} \left[M^2\,V\,(Q) + P^2\,V\,(N) - 2\,M\,P\,\text{Cov}\,(Q\,,\,N) \right]$$

e

$$V\,(\hat{b}_2) = \frac{1}{(PK - M^2)^2} \left[K^2\,V\,(Q) + M^2\,V\,(N) - 2\,M\,K\,\text{cov}\,(Q\,,\,N) \right]$$

Substituindo Q e N por suas fórmulas em VI , verifica-se que tanto Q como N são funções lineares de $\underline{y}$.

Assim tem-se:

$$V(Q) = V \left[\sum_{i,j} x_{ij}^2 \, y_{ij} - (1/s) \sum Y_{i.} \sum x_{ij}^2 \right]$$

ou seja

$$V(Q) = V\left(\sum_{i,j} x_{ij}^2 \, y_{ij}\right) + \frac{1}{s^2} V\left(\sum Y_{i.} \sum_{i,j} x_{ij}^2\right) - (2/S) \operatorname{cov}\left(\sum_{i,j} x_{ij}^2 \, y_{ij} \, , \, \sum Y_{i.} \sum x_{ij}^2\right)$$

onde:

$$V\left(\sum_{i,j} x_{ij}^2 \, y_{ij}\right) = \sum_{i,j} x_{ij}^4 \, \sigma^2$$

$$V\left(\sum_i Y_{i.} \sum_{i,j} x_{ij}^2\right) = s \sum_i \left(\sum_j x_{ij}^2 \right)^2 \sigma^2$$

e

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_{i,j} x_{ij}^2 \, y_{ij} \, , \, \sum_i Y_{i.} \sum_j x_{ij}^2\right) = \sum_i \left(\sum_j x_{ij}^2\right)^2 \sigma^2$$

Assim tem-se:

$$V(Q) = \sum_{i,j} x_{ij}^4 \, \sigma^2 + \frac{1}{s^2} \cdot s \sum_i \left(\sum_j x_{ij}^2\right)^2 \sigma^2 - (2/s) \sum_i \left(\sum_j x_{ij}^2\right)^2 \sigma^2$$

ou seja

$$V(Q) = \left[\sum x_{ij}^4 - (1/s) \sum_i \left(\sum_j x_{ij}^2\right)^2 \right] \sigma^2$$

e finalmente:

$$V(Q) = P \, \sigma^2 \qquad \text{(XVI)}$$

$$V(N) = \frac{1}{s^2} V \left[s \sum_{i,j} x_{ij} \, y_{ij} - \sum_i Y_{i.} \, x_{i.} \right]$$

ou seja

$$V(N) = \frac{1}{s^2}\left[V(s\sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij}) + V(\sum Y_{i.}\, x_{i.}) - 2\,\mathrm{cov}(s\sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij}\,,\ \sum_i Y_{i.}\, x_{i.})\right]$$

onde:

$$V(s\sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij}) = s^2 \sum_{i,j} x_{ij}^2\, \sigma^2$$

$$V(\sum_i x_{i.}\, Y_{i.}) = s\sum_i x_{i.}^2\, \sigma^2$$

e

$$\mathrm{Cov}(s\sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij}\,,\ \sum Y_{i.}\, x_{i.}) = s\sum_i x_{i.}^2\, \sigma^2$$

Tem-se então

$$V(N) = \frac{1}{s^2}\left[s^2\sum_{i,j} x_{ij}^2\,\sigma^2 + s\sum_i x_{i.}^2\,\sigma^2 - 2\,s\sum_i x_{i.}^2\,\sigma^2\right]$$

ou

$$V(N) = \sigma^2\left[\sum_{i,j} x_{ij}^2 - (1/s)\sum_i x_{i.}^2\right]$$

e finalmente

$$V(N) = K\,\sigma^2 \qquad \text{(XVII)}$$

$$\mathrm{Cov.}(Q\,,\,N) = \mathrm{Cov}\left[(\sum_{i,j} x_{ij}^2\, y_{ij} - (1/s)\sum_i Y_{i.}\sum_j x_{ij}^2)\ ;\ (\sum_{i,j} y_{ij}\, x_{ij} - (1/s)\sum_i Y_{i.}\, x_{i.})\right]$$

Sendo Q e N funções lineares de $\underline{y}$ e utilizando-se do princípio geral para obtenção da covariância de duas funções lineares ou seja

$$\mathrm{Cov}(f_1\,,\,f_2) = E\,\left[f_1 - E(f_1)\right]\left[f_2 - E(f_2)\right]$$

Se

$$f_1 = a_1\, y_1 + a_2\, y_2$$

e

$$f_2 = b_1\, y_1 + b_2\, y_2$$

tem-se

$$\text{Cov}\ (f_1\ ,\ f_2) = E\ \left[(a_1\ y_1 + a_2\ y_2) - (a_1\ \bar{y}_1 + a_2\ \bar{y}_2) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[(b_1\ y_1 + b_2\ y_2) - (b_1\ \bar{y}_1 + b_2\ \bar{y}_2) \right]$$

$$\text{Cov}\ (f_1\ ,\ f_2) = E \left[a_1\ b_1\ (y_1 - \bar{y}_1)^2 + a_2\ b_2\ (y_2 - \bar{y}_2)^2 + a_1\ b_2\ (y_1 - \bar{y}_1) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\ (y_2 - \bar{y}_2) + a_2\ b_1\ (y_1 - \bar{y}_1)(y_2 - \bar{y}_2) \right]$$

ou seja: (XVIII)

$$\text{Cov.}\ (f_1\ ,\ f_2\ ) = a_1\ b_1\ V\ (y_1) + a_2\ b_2\ V\ (y_2) + a_1\ b_2\ \text{cov}\ (y_1\ y_2) +$$
$$+ a_2\ b_1\ \text{cov}\ (y_1\ y_2)$$

Obteve-se assim, utilizando-se do princípio descrito:

$$\text{Cov}\ (Q\ ,\ N) = \left[\sum_{i,j} x_{ij}^3 - (1/s) \sum_i x_{i.} \sum_j x_{ij}^2 \right] \sigma^2$$

ou seja:

$$\text{Cov}\ (Q\ ,\ N) = M\ \sigma^2 \qquad (XIX)$$

Tem-se então

$$V\ (\hat{b}_1) = \frac{P}{PK - M^2}\ \sigma^2$$

e

$$V\ (\hat{b}_2) = \frac{K}{PK - M^2}\ \sigma^2 \qquad (XX)$$

3.1.4.2 - Determinação da covariância de $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$

Pelas fórmulas VII e VIII para determinação de $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$, respectivamente tem-se

$$Cov(\hat{b}_1 , \hat{b}_2) = \frac{1}{(PK - M^2)^2} Cov \left[(PN - MQ) \; ; (QK - MN) \right]$$

As expressões $(PN - MQ)$ e $(QK - MN)$ são funções lineares de $\underline{y}$, sendo sua covariância obtida pelo mesmo princípio apresentado em (XVIII). Assim

$$Cov \left[(PN - MQ) \; ; (QK - MN) \right] = - M (M^2 - PK) \sigma^2$$

Portanto:

$$Cov(\hat{b}_1 , \hat{b}_2) = - \frac{M}{PK - M^2} \sigma^2 \qquad (XXI)$$

3.1.5 - Ajustamentos das variáveis y_{ij} em relação à regressão

Do ponto de vista da análise da variância, o modelo matemático admitido em estudo transforma-se em

$$y_{ij} - b_1 x_{ij} - b_2 x^2_{ij} = u + t_i + e_{ij}$$

Esta é a equação apropriada para a análise da variância das quantidades

$$y_{ij} - b_1 x_{ij} - b_2 x^2_{ij}$$

isto é, os valores y_{ij} ajustados a regressão curvilínea em relação à covariável x_{ij}. Desse modo a técnica estatística remove a parte do efeito do tratamento que pode ser atribuida a $\underline{x}$. As variáveis e as médias ajustadas serão portanto:

$$\hat{Y}_{ij} = y_{ij} - \hat{b}_1 x_{ij} - \hat{b}_2 x^2_{ij}$$

e

$$\hat{\bar{Y}}_i = \bar{Y}_i - \hat{b}_1 \bar{x}_{i.} - \hat{b}_2 \sum_j \frac{x^2_{ij}}{s} \qquad (XXII)$$

3.1.5.1 - Variâncias das médias ajustadas

De XXII tem-se

$$V(\hat{\bar{Y}}_i) = V(\bar{Y}_i - \hat{b}_1 \bar{x}_i - (1/s)\, \hat{b}_2 \sum_j x_{ij}^2)$$

$$V(\hat{\bar{Y}}) = V(\bar{Y}_i) + \bar{x}_i^2\, V(b_1) + \left[\sum_j \frac{x_{ij}^2}{s}\right]^2 V(\hat{b}_2) - 2\,\bar{x}_i \operatorname{cov}(\bar{Y}_i , \hat{b}_i) -$$

$$- 2\,\frac{\Sigma x_{ij}^2}{s} \operatorname{cov}(\bar{Y}_i , \hat{b}_2) + 2\,\bar{x}_i \sum_j \frac{x_{ij}^2}{s} \operatorname{cov}(\hat{b}_1 , \hat{b}_2)$$

Sabendo-se que $V(\bar{Y}_i) = (\sigma^2 / s)$ e que $\operatorname{cov}(\bar{Y}_1 , \hat{b}_1)$ e $\operatorname{cov}(\bar{Y}_i , \hat{b}_2)$ são nulas, substituindo os valores de $\hat{V}(\hat{b}_1)$ e $\hat{V}(\hat{b}_2)$ e $\operatorname{cov}(\hat{b}_1 , \hat{b}_2)$ obtidos em XX e XXI , obtém-se

$$V(\hat{\bar{Y}}_i) = \sigma^2 \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{PK - M^2} \left[P\,(\bar{x}_i^2 + K\,(\frac{\Sigma x_{ij}^2}{s})^2 - 2\,M\,\bar{x}_i \sum_j \frac{x_{ij}^2}{s}) \right] \right\} \tag{XXIII}$$

3.1.5.2 - Variância de contrastes de médias ajustadas

Consideremos o contraste

$$Z = \hat{\bar{Y}}_i - \hat{\bar{Y}}_k$$

onde $i \neq R$

De XXII tem-se

$$\hat{\bar{Y}}_i = \bar{Y}_i - \hat{b}_i\, \bar{x}_i - b_2 \sum_j \frac{x_{ij}^2}{s}$$

Para o contraste em estudo tem-se então

$$Z = \hat{\bar{Y}}_i - \hat{\bar{Y}}_k = (\bar{Y}_i - \bar{Y}_k) - \hat{b}_1 (\bar{x}_i - \bar{x}_k) - \frac{\hat{b}_2}{s} (\sum_j x_{ij}^2 - \sum_j x_{kj}^2)$$

A variância de Z será portanto

$$V(Z) = V(\bar{Y}_i - \bar{Y}_k) + (\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 V(\hat{b}_1) + \left[\frac{\sum_j x_{ij}^2 - \sum_j x_{Rj}^2}{s} \right]^2 V(\hat{b}_2) +$$

$$+ (2/s)(\bar{x}_i - \bar{x}_k)(\sum_j x_{ij}^2 - \sum_j x_{kj}^2) \operatorname{cov}(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$$

ou seja

$$V(Z) = \sigma^2 \quad \frac{2}{s} + \frac{1}{PK - M^2} \left[P (\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 + K \left(\frac{\sum_j x_{ij}^2 - \sum_j x_{kj}^2}{s} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2 (M/s)(\bar{x}_i - \bar{x}_k)(\sum_j x_{ij}^2 - \Sigma x_{kj}^2) \right] \qquad \text{(XXIV)}$$

3.2 - DELINEAMENTO EM BLOCOS CASUALIZADOS

3.2.1 - Estimativas dos parâmetros

Admitindo-se o modelo matemático aditivo

$$y_{ij} = u + t_i + r_j + b_1 x_{ij} + b_2 x_{ij}^2 + e_{ij} \qquad \text{(XXV)}$$

onde

$$x_{ij} = X_{ij} - \bar{X} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i,j} x_{ij} = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

$$j = 1, 2, \ldots, s$$

sendo:

u = média geral

t_i = efeito aditivo do i-ésimo tratamento

r_j = efeito aditivo do j-ésimo bloco

b_1 = coeficiente de x_{ij}

b_2 = coeficiente de x_{ij}^2

e_{ij} = efeito residual

Procedendo-se do mesmo modo como no modelo para experimento inteiramente casualizado, obtém-se as seguintes estimativas: (XXVI)

$$\hat{u} = \frac{1}{n\ s} \left[Y_{..} - \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2 \right]$$

$$\hat{t}_i = (1/s) \left[Y_{i.} - \hat{b}_1 x_{i.} - \hat{b}_2 \sum_j x_{ij}^2 \right] - \hat{u}$$

$$\hat{r}_j = (1/n) \left[Y_{ij} - \hat{b}_1 x_{.j} - \hat{b}_2 \sum_i x_{ij}^2 \right] - \hat{u}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{PN - QM}{PK - M^2}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{QK - MN}{PK - M^2}$$

Onde:

$$K = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - (1/s) \sum_i x_{i.}^2 - (1/n) \sum_j x_{.j}^2$$

ou soma dos quadrados residuais de $\underline{x}$

$$M = \sum_{i,j} x_{ij}^3 - (1/s) \sum_i x_{i.} \sum_j x_{ij}^2 - (1/n) \sum_j x_{.j} \sum_i x_{ij}^2$$

$$N = \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} - (1/s) \sum_i x_{i.}\, y_{i.} - (1/n) \sum_j Y_{.j}\, x_{.j}$$

ou soma dos produtos residuais

$$P = \sum_{i,j} x_{ij}^4 - (1/s) \sum_i \left[\sum_j x_{ij}^2 \right]^2 - (1/n) \sum_j \left[\sum_i x_{ij}^2 \right]^2 + \frac{1}{n\ s} \left[\sum_{i,j} x_{ij}^2 \right]^2$$

$$Q = \sum_{i,j} x_{ij}^2\ y_{ij} - (1/s) \sum_i Y_{i.} \sum_i x_{ij}^2 - (1/n) \sum_j Y_{ij} \sum_i x_{ij}^2 + \frac{1}{n\ s} Y_{..} \sum_{i,j} x_{ij}^2$$

3.2.2 - Determinação do quadrado médio do resíduo

Procedendo-se de maneira análoga a 3.1.2 , tem-se:

$$Q\ M\ Residual = \frac{1}{n\ s - (n + s + 1)} \left[\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{p} B_i\ P_i \right]$$

Kempthorne (1952)

sendo

$$\sum_{i=1}^{p} B_i\ P_i = S\ Q\ \text{Regressão}\ (\hat{u}\ ,\ \hat{t}\ ,\ \hat{r}\ ,\ \hat{b}_1\ ,\ \hat{b}_2)$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{p} B_i\ P_i = \hat{u}\ Y_{..} + \sum_i \hat{t}_i\ Y_{i.} + \sum_j \hat{r}_j\ Y_{.j} + \hat{b}_1 \sum_{i,1} x_{ij}\ y_{ij} + \hat{b}_2 \sum_{i,j} x_{ij}^2\ y_{ij}$$

3.2.3 - Determinação da soma de quadrados de tratamentos ajustados para a regressão

Admitindo-se o modelo matemático

$$y_{ij} = u' + r'_j + b'_1\ x_{ij} + b'_2\ x_{ij}^2 + e_{ij}$$

no qual é ignorada a presença de tratamentos, e procedendo-se como em 3.1.3, obtém-se

$$S\ Q\ \text{Tratamentos Ajustados} = (S\ Q\ \text{Trat.} + \text{Res.}) - \frac{D^2 C - 2\,B\,D\,E + A\,E^2}{A\,C - B^2} +$$

$$- \left[S\ Q\ \text{Residual de } \underline{y} \text{ ignorando a regressão} - \frac{P\,N^2 - 2\,Q\,M\,N + Q^2\,K}{P\,K - M^2} \right]$$

onde:

$$A = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - (1/n) \sum_j x_{.j}^2$$

$$B = \sum_{i,j} x_{ij}^3 - (1/n) \sum_j x_{ij} \sum_i x_{ij}^2$$

$$C = \sum_{i,j} x_{ij}^4 - (1/n) \sum_j \left[\sum_i x_{ij}^2 \right]^2$$

$$D = \sum_{i,j} x_{ij}\, y_{ij} - (1/n) \sum_j x_{.j}\, Y_{.j}$$

$$E = \sum x_{ij}^2\, y_{ij} - (1/n) \sum_j Y_{.j} \sum_i x_{ij}^2$$

e

K , M , N , P e Q já definidos em XXVII .

3.2.4 - Determinação das variâncias e covariâncias das estimativas $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$

Procedendo-se como em 3.1.4 , tem-se

$$V(\hat{b}_1) = \frac{P}{PK - M^2}\,\sigma^2$$

$$V(\hat{b}_2) = \frac{K}{PK - M^2}\,\sigma^2$$

e

$$\text{Cov}\,(\hat{b}_1 , \hat{b}_2) = - \frac{M}{PK - M^2}\,\sigma^2$$

com P , K e M já definidos em (XXVII)

3.2.5 - Ajustamentos das variáveis em relação à regressão

São válidas as considerações apresentadas em 3.1.5 , assim como as fórmulas (XXII) . Assim tem-se:

3.2.5.1 - Variâncias das médias ajustadas

$$V\,(\hat{\bar{Y}}) = \sigma^2 \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{PK - M^2} \left[P\,\bar{x}_i^2 + K \left[\sum_j \frac{x_{ij}^2}{s} \right]^2 - 2\,\frac{M\,\bar{x}_i}{s} \sum_j x_{ij}^2 \right]$$

3.2.5.2 - Variâncias de contrastes de médias ajustadas

$$V\,(Z) = V\,(\hat{\bar{Y}}_i - \hat{\bar{Y}}_k) = \sigma^2 \quad \frac{2}{s} + \frac{1}{PK - M^2} \left[P\,(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 + K\left(\frac{\sum_j x_{ij}^2 - \sum_j x_{kj}^2}{s}\right) - \frac{2\,M}{s}\,(\bar{x}_i - \bar{x}_k)(\sum_j x_{ij}^2 - \sum_j x_{kj}^2) \right]$$

com $j \neq k$ e P , M e K já definidos em XXVIII .

4 - MATERIAL E MÉTODOS

4.1 - MATERIAL

O material utilizado no presente trabalho consta de 54 ensaios, sendo 38 de competição de variedades de algodão e 16 de competição de variedades de soja, e é proveniente de quatro fontes a saber:

- Estações Experimentais do Instituto de Pesquisa Agropecuária do Centro Oeste (IPEACO). Doze (12) ensaios de competição de variedades de algodão e quinze (15) ensaios de competição de variedades de soja.
- Estações Experimentais do Instituto Agronômico de Minas Gerais (I. A. M. G.). Vinte e quatro (24) ensaios de competição de variedades de algodão.
- Universidade Federal de Viçosa - MG. Dois (2) ensaios de competição de variedades de algodão.
- Propriedade particular. Um (1) ensaio de competição de variedades de soja realizado na localidade de Piracanjuba, Estado de Goiás.

As Estações Experimentais pertencentes à rede do IPEACO estão localizados em: Sete Lagoas , Patos de Minas , Lavras , Uberaba e Pomba , no Estado de Minas Gerais ; Anápolis, no Estado de Goiás e Brasília, no Distrito Federal.

As Estações Experimentais pertencentes ao IAMG , são localizadas em: Pitanguí , Uberlândia , Arcos , São Francisco e Belo Horizonte , todas elas no Estado de Minas Gerais.

Todos os ensaios, tanto os de competição de variedades de algodão como os de competição de variedades de soja, foram instalados em blocos casualizados, variando de um para outro o número de tratamentos e de repetições.

Maiores detalhes sobre os experimentos são encontrados no memorial apresentado no apêndice do presente trabalho.

As análises foram efetuadas com auxílio do computador de mesa "Programa 101 Olivetti", na seção de Estatística e Análise Econômica do Instituto de Pesquisa Agropecuária do Centro Oeste (IPEACO).

4.2 - MÉTODOS

Na determinação das estimativas dos parâmetros b_1 e b_2 do modelo matemático proposto

$$y_{ij} = u + t_i + r_j + b_1 x_{ij} + b_2 x_{ij}^2 + e_{ij} \quad ,$$

já definido em XXV , assim também como na determinação das médias ajustadas, de suas variâncias, e das variâncias de contrastes entre médias ajustadas, foram utilizadas as fórmulas deduzidas no capítulo terceiro do presente trabalho.

Para a análise da covariância e na determinação das somas de quadrados de tratamentos ajustados utilizou-se o motodo do resíduo condicional segundo KEMPTHORNE (1952).

Inicialmente calculam-se as somas de quadrados como mostra o seguinte quadro de análise de variância.

Análise de Variância

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.
(u', r', b_1', b_2')	$s + 2$	Reg. $(\hat{u}', \hat{r}', \hat{b}_1', \hat{b}_2')$
Tratamentos	$n - 1$	Diferença
(u, t, r, b_1, b_2)	$s + n + 1$	Reg. $(\hat{u}, \hat{t}, \hat{r}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$
Resíduo	$(n-1)(s-1) - 2$	Diferença
Total	$n\ s$	$\sum_{i,j} y_{ij}^2$

onde:

(u, t, r, b_1, b_2) é a fonte de variação referente à média, blocos, tratamentos e a covariável $\underline{x}$ em suas potencias $\underline{x}$ e x^2

(u', r', b_1', b_2') é a fonte de variação referente à média geral, blocos, e a covariável $\underline{x}$ em suas potências $\underline{x}$ e x^2, isto é, admitindo-se o modelo matemático no qual é ignorada a presença de tratamentos:

$$y_{ij} = u' + r_j' + b_1' x_{ij} + b_2' x_{ij}^2 + e_{ij}$$

Aplicando o modelo acima exposto e utilizando as fórmulas deduzidas no capítulo terceiro do presente trabalho, organizou-se o seguinte esquema simplificado da análise da covariância.

Análise da covariância XXVIII

F. V.	G. L.	S. Q.
Total	n s - 1	$\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{1}{n\ s} Y_{..}^2$
Blocos	s - 1	$(1/n) \sum_j Y_{i.j}^2 - \frac{1}{n\ s} Y_{..}^2$
Tratamentos	n - 1	$(1/s) \sum_i Y_{i.}^2 - \frac{1}{n\ s} Y_{..}^2$
Resíduo	(n - 1)(s - 1)	$\sum_{i,j} y_{ij}^2 - (1/n) \sum_j Y_{.j}^2 - (1/s) \sum Y_{i.}^2 + \frac{1}{n\ s} Y_{..}^2$
Tratamento + Resíduo	s (n - 1)	$\sum_{i,j} y_{ij}^2 - (1/n) \sum_j Y_{.j}^2$
Trat. + Resid. Ajust.	s(n-1) - 2	$(W_1)\ \sum_{i,j} y_{ij}^2 - (1/n) \sum_j Y_{.j}^2 - \frac{D^2C - 2\ B\ D\ E + A\ E^2}{A\ C - B^2}$
Resíduo Ajustado	(n-1)(s-1)-2	$(W_2)\ \sum_{i,j} y_{ij}^2 - (1/s) \sum_i Y_{i.}^2 - (1/n) \sum_j Y_{.j}^2 + \frac{1}{n\ s} Y_{..}^2 - \frac{P\ N^2 - 2\ Q\ M\ N + Q^2\ K}{P\ K - M^2}$
Tratamento Ajustado	n - 1	$W_k - W_2$

onde N, M, P, Q, K e A, B, C, D, e E já foram definidos no capítulo terceiro do presente trabalho em VI e XII, respectivamente.

A verificação da existência de contrastes significativas entre médias ajustadas para a regressão conjunta se fez pelo teste de F .

$$F = \frac{(W_1 - W_2) / (n - 1)}{\dfrac{W_2}{(n - 1)(s - 1) - 2}}$$

A verificação da hipótese da nulidade $(b_1$ e $b_2) = 0$ também se fez pelo teste de F como se segue:

Admitindo-se o modelo matemático

$$y_{ij} = u' + t'_i + r'_j + e_{ij}$$

no qual é ignorada a presença da covariável $\underline{x}$ em suas potências $\underline{x}$ e x^2 , e utilizando o método dos resíduos condicionais, e de acordo com as deduções do capítulo terceiro do presente trabalho temos o seguinte quadro de análise da variância: XXIX

F. V.	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
$(u'\ r'\ t')$	$n+s-1$	Reg $(\hat{u}', \hat{r}', \hat{t}')$		
Efeito conjunto (b_1 e b_2)	2	$(W_3)\ \dfrac{PN^2-2QMN+Q^2K}{PK-M^2}$	$W_3/2$	$\dfrac{W_3/2}{W_2/[(n-1)(s-1)-2]}$
(u,t,r,b_1,b_2)	$n+s+1$	Reg $(\hat{u}, \hat{t}, \hat{r}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$		
Resíduo	$(n-1)(s-1)-2$	(W_2)	$W_2/[(n-1)(s-1)-2]$	
Total	n s	$\sum_{i,j} y_{ij}^2$		

onde:

M , N , P , Q e K já foram definidos no capítulo terceiro em VI e W_2 também já definido em (XXVIII) , ou seja a soma dos quadrados do resíduo ajustado.

A confirmação da hipótese (b_1 e b_2) = 0 nos leva a admitir que a covariável $\underline{x}$, nas suas potências $\underline{x}$ e x^2 não contribua significativamente para explicar as variações de $\underline{y}$. Pode-se assim eliminá-la do modelo proposto e admitir-se o novo modelo matemático.

$$Y_{ij} = u + t_i + r_j + e_{ij} ,$$

para ensaios em blocos ao acaso.

No caso da regeição da hipótese (b_1 e b_2) = 0 há necessidade então de se verificar a contribuição do termo do segundo grau na explicação da variação de $\underline{y}$. Ignorando-se b_2 no modelo matemático proposto tem-se o novo modelo

$$y_{ij} = u'' + t''_i + r''_j + b''_1 x_{ij} + e_{ij}$$

Utilizando-se novamente do método dos resíduos condicionais e de acordo com as deduções apresentadas no capítulo terceiro, tem-se o seguinte quadro da análise da variância (XXX).

F. V.	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
(u'', t'', r'', b''_1)	$n + s$	$Reg\ (\hat{u}'', \hat{t}'', \hat{r}'', \hat{b}''_1)$		
Efeito b_2	1	$(W_4)\ \dfrac{(QK - MN)^2}{K\ (PK - M^2)}$	W_4	$\dfrac{W_4}{\dfrac{W_2}{(n-1)(s-1) - 2}}$
(u, t, r, b_1, b_2)	$n + s + 1$	$Reg\ (\hat{u}, \hat{t}, \hat{r}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$		
Resíduo	$(n-1)(s-1)-2$	W_2	$W_2 / (n-1)(s-1) - 2$	
Total	$n\ s$	$\sum_{i,j} y^2_{ij}$		

onde M , N , P , Q e K já foram definidos e VI e W_2 , também já definido em (XXVIII) .

No caso da regeição da hipótese $b_2 = 0$ elege-se então a função

$$y_{ij} = \hat{u} + \hat{t}_i + \hat{r}_j + \hat{b}_1 x_{ij} + \hat{b}_2 x^2_{ij} \quad .$$

A não regeição da hipótese $b_2 = 0$ implica na necessidade da verificação da contribuição do termo linear, eliminaodo-se previamen te o termo x^2 do modelo matemático proposto. Assim, eliminando-se x^2 do modelo inicial tem-se

$$y_{ij} = u'' + t''_i + r''_j + b''_1 x_{ij} + e_{ij}$$

Admitindo-se novamente o modelo

$$y_{ij} = u + t_i + r_j + e_{ij}$$

no qual é ignorada a presença da covariável $\underline{x}$ em suas potências $\underline{x}$ e x^2 e procedendo-se como no caso anterior, tem-se o seguinte quadro de análise de variância. XXXI

F. V.	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
(u', t', r')	$n + s - 1$	$Reg\ (\hat{u}', \hat{t}', \hat{r}')$		
Efeito $\hat{b}_1$	1	$(W_5)\ \dfrac{N^2}{K}$	(W_5)	$\dfrac{W_5}{\dfrac{W_6}{(n-1)(s-1)-1}}$
(u'', t'', r'', b''_1)	$n + s$	$Reg\ (\hat{u}'', \hat{t}'', \hat{r}'', \hat{b}''_1)$		
Resíduo	$(n-1)(s-1)-1$	W_6	$W_6 / (n-1)(s-1) - 1$	
Total	$n\ s$	$\sum_{i,j} y^2_{ij}$		

onde N e K já foram definidos em VI e

$$W_6 = \sum_{i,j} y^2_{ij} - (1/s) \sum Y^2_{i.} - (1/n) \sum_j Y^2_{.j} + \frac{1}{n\ s} Y^2_{..} - \frac{N^2}{K}$$

seja, a soma de quadrados do resíduo ajustado para a regressão linear.

No caso da regeição da hipótese $b_1 = 0$ adota-se o modelo matemático linear

$$y_{ij} = u'' + t''_i + r''_j + b''_1 x_{ij} + e_{ij}$$

cujos métodos para determinação das estimativas dos parâmetros e subsequentes testes de hipóteses são os comuns da análise da covariância linear.

A regeição da hipótese $(b_1 \text{ e } b_2) = 0$ e a não regeição das hipóteses isoladas $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$ indica que individualmente os termos $\underline{x}$ e x^2 não contribuem para explicar a variação de $\underline{y}$, mas agem conjuntamente. Neste caso mantém-se os dois parâmetros no modelo, ou seja

$$y_{ij} = u + t_i + r_j + b_1 x_{ij} + b_2 x^2_{ij} + e_{ij} \quad .$$

5 - ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

São apresentadas, resumidamente as análises estatísticas de 38 ensaios de competição de variedades de algodão e de 16 ensaios de competição de variedades de soja.

No sentido de mostrar a metodologia dos cálculos foram selecionados dois ensaios de algodão para os quais foram obtidas funções estimadoras diferentes, entre si, e um ensaio de competição de variedades de soja, pois para esta cultura os ajustamentos das médias quando necessários, foram feitos atravez da função estimadora completa, isto é, contendo a covariável $\underline{x}$ em suas potências $\underline{x}$ e x^2 .

Foram determinadas as estimativas dos parâmetros b_1 e b_2 para cada ensaio e verificadas as significâncias de ambas, em conjunto e separadamente, pelo teste de F . Também pelo teste de F foi testada a significância de contrastes entre tratamentos ajustados e determinados os desvios padrões de $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ para cada caso. Nos três ensaios analisados integralmente são apresentadas também as médias ajustadas para cada caso. Os dados originais para estes três ensaios encontram-se em apêndice nos quadros I , II e III , e, como nos demais experimentos utilizados, $\underline{x}$ represente o "stand" final por parcela e $\underline{y}$ as produções.

5.1 - ENSAIO Nº 1

Este ensaio de competição de variedades de algodão foi realizado na Escola Superior de Agricultura de Viçosa, hoje Universidade Federal de Viçosa, no ano agrícola de 1943/44 . Foi instalado em blocos ao acaso com oito tratamentos e seis repetições.

5.1.1 - Estimativa do parâmetros b_1 e b_2

Para obtenção dessas estimativas, determinaram-se inicialmente os valores de K , M , N , P e Q definidos em XXVII , ou seja:

$$K = 55.563,40$$

$$M = - 863.971,53$$

$$P = 164.729.524,81$$

$$N = 98.640,62$$

$$Q = - 4.267.460,79$$

A seguir foram obtidos para $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ os seguintes valores

$$\hat{b}_1 = 1,4943$$

$$\hat{b}_2 = - 0,0180$$

5.1.2 - Verificação das hipóteses $(\hat{b}_1 \text{ e } \hat{b}_2) = 0$ e $\hat{b}_2 = 0$

A verificação das hipóteses foi feita pelo teste de F ao nível de 5% de probabilidade. Com essa finalidade procedeu-se a análise de variância segundo o esquema exposto em (XXIX) obtendo-se os seguintes resultados:

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
$(\hat{u}, \hat{r}, \hat{t})$	13	9.519.447,08		
Efeito conjunto $(\hat{b}_1 \text{ e } \hat{b}_2)$	2	224.510,00	112.225,00	13,46 **
$(\hat{u}, \hat{r}, \hat{t}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$	15	9.294.937,08		
Resíduo	33	275.162,92	8.338,27	
Total	48	9.570.100,00		

Regeitada a hipótese $(b_1 \text{ e } b_2) = 0$ a verificação da hipótese $b_2 = 0$ também se fez pelo teste de F segundo (XXX) , obtendo-se os seguintes resultados:

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
$(\hat{u}'', \hat{t}'', \hat{r}'', \hat{b}_1'')$	14	9.245.731,04		
Efeito $\hat{b}_2$	1	49.206,04	49.206,04	5,90 *
$(\hat{u}, \hat{t}, \hat{r}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$	15	9.294.937,08		
Resíduo	33	275.162,92	8.338,27	
Total	48	9.570.100,00		

Regeitadas as hipóteses $(b_1 \text{ e } b_2) = 0$ e $b_2 = 0$ admite-se a função estimadora

$$y_{ij} = \hat{u} + \hat{t}_r + \hat{r}_j + \hat{b}_1 x_{ij} + \hat{b}_2 x_{ij}^2$$

Os ajustamentos das médias foram feitos segundo XXII por:

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{x}_i - \hat{b}_2 \sum_j \frac{x_{ij}^2}{s}$$

ou seja, no presente caso por

$$\hat{\bar{Y}} = 425{,}625 - 1{,}4943\ \bar{x}_i + 0{,}0180 \sum_j \frac{x_{ij}^2}{6}$$

A verificação da significância dos contrastes entre médias ajustadas foi feita pelo teste de F através da análise da covariância segundo (XXVIII) obtendo-se o seguinte resultado:

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Total	47	874.581,25		
Blocos	5	145.143,75		
Tratamentos	7	229.764,58		
Resíduo	35	499.672,92		
Trat. + Resíduo	42	729.437,50		
Trat. + Res. Ajust.	40	482.368,50		
Resíduo Ajustado	33	275.162,92	8.388,27	
Tratam. Ajustado	7	207.202,58	29.600,80	3,55 **

C. V. = 21,47% (ajustado)

C. V. = 28,07% (não ajustado)

Há pois, pelo menos um contraste significativo entre as médias ajustadas.

As estimativas das variâncias de $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ e a covariância de $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ foram determinadas de acordo com XX e XXI , respectivamente obtendo-se os seguintes resultados:

$$\hat{V}(\hat{b}_1) = 0{,}1626 \qquad \hat{V}(\hat{b}_2) = 0{,}00005$$

$$\text{e} \qquad \hat{Cov}(\hat{b}_1 , \hat{b}_2) = 0{,}00085$$

e os desvios padrões

$$s(\hat{b}_1) = 0{,}40324 \qquad \text{e} \qquad s(\hat{b}_2) = 0{,}00707$$

No quadro 1 são mostradas as médias de tratamentos ajustados, com erros padrões, e as médias não ajustadas.

Quadro 1 - Médias de produção em decagrama, dos tratamentos não ajustados ($\bar{Y}$) e ajustados ($\hat{\bar{Y}}$)

Tratamentos	$\bar{Y}$	$\hat{\bar{Y}} \pm s(\hat{\bar{Y}})$
1	356,67	508,37 ± 57,09
2	373,33	372,96 ± 48,96
3	450,00	544,69 ± 53,04
4	500,00	494,88 ± 49,24
5	385,00	389,80 ± 55,30
6	376,67	421,89 ± 50,05
7	556,67	549,58 ± 57,24
8	436,67	468,42 ± 49,85
	3.426,01	3.750,61

Os ajustamentos efetuados alteraram razoavelmente as médias mostrando que as diferenças observadas entre as médias antes dos ajustamentos estavam altamente afetadas pelas diferenças do "stand" final, sendo que em alguns tratamentos já verificou-se, embora em pequena escala efeito de competição entre plantas. O coeficiente de variação de 28,07% para o resíduo não ajustado passou a 21,47 depois dos ajustamentos, aumentando consideravelmente a precisão do ensaio.

5.2 - ENSAIO Nº 7

Trata-se de um ensaio de competição da variedade de algodão, realizado na Estação Experimental de Sete Lagoas, no ano agrícola 1955/56, em blocos ao acaso com nove (9) tratamentos e seis (6) repetições. Área da parcela: 30 m^2 .

5.2.1 - Estimativas dos parâmetros b_1 e b_2

Para obtenção dessas estimativas, foram determinados inicialmente os valores K, M, P, N e Q já definidos anteriormente, isto é:

$$K = 8.018,74$$
$$M = -\ 58.808,15$$
$$P = 15.147.861,94$$
$$N = 15.469,44$$
$$Q = -\ 355.469,17$$

Obtiveram-se assim as estimativas

$$\hat{b}_1 = 1,8085 \qquad e \qquad \hat{b}_2 = -\ 0,0164$$

5.2.2 - Verificação das hipóteses $(b_1$ e $b_2) = 0$ e $b_2 = 0$

A verificação das hipóteses foi feita pelo teste de F ao nível de 5% de probabilidade. Procedeu-se então a análise de variância seguindo o já exposto anteriormente obtendo-se os seguintes resultados.

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
$(\hat{u}, \hat{r}, \hat{t})$	14	136.689,65		
Efeito conjunto $(\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2)$	2	33.822,32	16.911,16	6,41 *
$(\hat{u}, \hat{r}, \hat{t}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$	16	170.511,97		
Resíduo	38	100.311,29	2.639,77	
Total	54	270,823,26		

Regeitada a hipótese b_1 e $b_2 = 0$ torna-se necessária a verificação da hipótese $b_2 = 0$. Procedendo da maneira indicada, obtém-se pela análise da variância o seguinte quadro e consequente teste de F, segundo o esquema apresentado em (XXX).

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
$(\hat{u}'', \hat{t}'', \hat{r}'', \hat{b}_1'')$	15	4.623.657,58		
Efeito $\hat{b}_2$	1	3.969,13	3.969,13	1,50
$(\hat{u}, \hat{t}, \hat{r}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$	16	4.627.626,71		
Resíduo	38	100.311,29	2.639,77	
Total	54	4.727.938,00		

Com a regeição da hipótese $(b_1$ e $b_2) = 0$ e a não regeição da hipótese $b_2 = 0$ há necessidade da verificação da hipótese $b_1 = 0$, que é feita pelo teste de F, ignorando-se b_2 no modelo original, obtendo-se o seguinte quadro de análise de variância, segundo esquema exposto em (XXXI).

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
$(\hat{u}', \hat{t}', \hat{r}')$	14	4.593.804,37		
Efeito $(\hat{b}_1)$	1	29.842,19	29.842,19	11,16 **
$(\hat{u}'', \hat{t}'', \hat{r}'', \hat{b}'')$	15	4.623,646,56		
Resíduo	39	104.291,44	2.674,14	
Total	54	4.727.938,00		

Regeitadas as hipóteses $(b_1 \text{ e } b_2) = 0$ e $b_1 = 0$ admite-se a função estimadora

$$y_{ij} = \hat{u} + \hat{t}_i + \hat{r}_j + \hat{b}\, x_{ij}$$

sendo o ajustamento das médias feito pela fórmula

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{Y} - \hat{b}_1\, \bar{x}_i$$

ou seja, no caso presente

$$\hat{\bar{Y}} = 287{,}00 - 1{,}8085\, \bar{x}_i \qquad \text{XXXII}$$

A verificação das significâncias dos contrastes entre médias ajustadas foi feita pelo teste de F atravéz da análise da covariância, segundo XXVIII , obtendo-se os seguintes resultados.

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Total	53	270.823,26		
Blocos	5	120.747,03		
Tratamentos	8	15.942,59		
Resíduo	40	134.133,64		
Trat. + Residuo	48	150.076,23		
Trat. + Res. Ajust.	46	111.333,23		
Resíduo Ajustado	38	100.311,32	2.639,77	
Trat. Ajustado	8	11.021,96	1.377,74	0,52

C. V. = 17,88% (ajustado)

C. V. = 20,15% (não ajustado)

As estimativas das variâncias e covariâncias de $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ foram determinadas de acordo com XX e XXI , respectivamente.

$$\hat{V}(\hat{b}_1) = 0,3386 \qquad \hat{V}(\hat{b}_2) = 0,000177$$

$$\hat{Cov}(\hat{b}_1 , \hat{b}_2) = - 0,00131$$

Consequentemente tem-se as estimativas dos desvios padrões de $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$, respectivamente

$$s(\hat{b}_1) = 0,5818 \qquad s(\hat{b}_2) = 0,0133$$

No quadro 2 são mostradas as médias dos tratamentos não ajustados, e ajustados pela função estimadora (XXXII) . Também são apresentados os erros padrões das médias ajustadas.

Quadro 2 - Médias de produção em decagrama, dos tratamentos não ajustados ($\bar{Y}$) e ajustados ($\hat{\bar{Y}}$)

Tratamentos	$\bar{Y}$	$\hat{\bar{Y}} \pm s(\hat{\bar{Y}})$
1	283,17	286,65 ± 21,14
2	244,00	277,02 ± 23,60
3	284,00	268,77 ± 22,49
4	299,17	305,06 ± 21,21
5	291,83	305,72 ± 22,26
6	291,67	289,11 ± 21,12
7	299,33	283,44 ± 22,62
8	308,83	309,28 ± 21,11
9	282,33	267,71 ± 21,62
	2.584,83	2.592,73

Os ajustamentos efetuados não alteraram substancialmente as médias originais, indicando que as produções não foram grandemente afetadas pelas diferenças no "stand" final. O coeficiente de variação de 20,15% para o resíduo não ajustado passou a 17,88 melhorando a precisão do experimento.

5.3 - ENSAIO Nº 14

Apresenta-se neste caso um ensaio de competição de variedades de soja executado no iIPEACO , no ano agrícola 1969/70 , delineado em blocos ao acaso com 16 (dezesseis) variedades e 3 (três) repetições.

5.3.1 - Estimativas dos parâmetros b_1 e b_2

Inicialmente foram determinados os seguintes valores defenidos em XXVIII .

$$K = 18.253,34$$

$$M = -432.532,32$$

$$P = 97.528.696,39$$

$$N = 12.897,42$$

$$Q = -827.513,59$$

Foram a seguir estimados os parâmetros b_1 e b_2 obtendo-se os resultados

$$\hat{b}_1 = 0,5648 \qquad \hat{b}_2 = -0,0059$$

5.3.2 - Verificação das hipóteses $(b_1 \text{ e } b_2) = 0$ e $b_2 = 0$

Como nos dois casos anteriores, a verificação das hipóteses foi realizada pelo teste de F , ao nível de 5% de probabilidade. A análise da variância foi feita segundo o esquema exposto em XXIX com os seguintes resultados.

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
$(\hat{u}, \hat{t}, \hat{r})$	18	716.525,10		
Efeito conjunto $(\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2)$	2	12.233,76	6.116,88	10,18 **
$(\hat{u}, \hat{t}, \hat{r}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$	20	728.758,86		
Resíduo	28	16.815,58	600,56	
Total	48	745.574,44		

Regeitada a hipótese $(b_1$ e $b_2) = 0$ a verificação da hipótese $b_2 = 0$ foi feita pelo teste de F como se segue:

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
$(\hat{u}'', \hat{t}'', \hat{r}'', \hat{b}_1'')$	19	725.679,68		
Efeito $\hat{b}_2$	1	3.079,18	3.079,18	5,13 *
$(\hat{u}, \hat{t}, \hat{r}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$	20	728.758,86		
Resíduo	28	16.815,58	600,56	
Total	48	745.574,44		

Regeitadas as hipóteses $(b_1$ e $b_2) = 0$ e $b_2 = 0$ admite-se como função estimadora a função completa

$$y_{ij} = \hat{u} + \hat{t}_i + \hat{r}_j + \hat{b}_1 x_{ij} + \hat{b}_2 x_{ij}^2$$

Os ajustamentos das médias foram feitos segundo XXII, por

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{x}_i - \hat{b}_2 \sum_j \frac{x_{ij}^2}{s}$$

ou seja, no caso presente por

$$\hat{\bar{Y}} = 120{,}04 - 0{,}5648\ \bar{x}_i + 0{,}0059 \sum_j \frac{x_{ij}^2}{3}$$

A verificação da significância dos contrastes entre médias ajustadas foi feita, como nos casos anteriores, pelo teste de F , ao nível de 5% de probabilidade, através da análise da covariância segundo mostra o esquema (XXVIII) obtendo-se os seguintes resultados.

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Total	47	53.870,36		
Blocos	2	451,35		
Tratamentos	15	24.369,66		
Resíduo	30	29.049,34		
Trat. + Resíduo	45	53.419,00		
Trat. + Res. Ajust.	43	41.704,97		
Resíduo Ajustado	28	16.815,58	600,56	
Trat. Ajustado	15	24.889,39	1.659,29	2,76

C. V. = 25,00% (não ajustado)

C. V. = 20,42% (ajustado)

As estimativas das variâncias e covariâncias de $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ foram determinadas de acordo com XX e XXI respectivamente, obtendo-se

$\hat{V}(\hat{b}_1) = 0{,}03676$ $\hat{V}(\hat{b}_2) = 0{,}0000066$

$\hat{Cov}(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = 0{,}0001627$

e as estimativas dos desvios padrões foram:

$$s\ (\hat{b}_1) = 0{,}11917 \qquad e \qquad s\ (\hat{b}_2) = 0{,}00257$$

No quadro 3 são mostradas as médias dos tratamentos não ajustadas, e ajustadas pela função estimadora proposta em XXII , assim também como os erros padrões das médias ajustadas.

Quadro 3 - Médias de produção em decagrama por parcela, não ajustadas $\bar{Y}$ e ajustadas $\hat{\bar{Y}}$

Tratamentos	$\bar{Y}$	$\hat{\bar{Y}} \pm s\ (\hat{\bar{Y}})$
1	146,80	133,90 ± 20,16
2	128,80	154,57 ± 18,89
3	137,97	134,79 ± 18,18
4	132,90	127,46 ± 18,22
5	167,63	161,47 ± 18,40
6	122,40	125,55 ± 17,96
7	92,73	125,59 ± 19,46
8	89,20	77,02 ± 19,75
9	86,97	101,99 ± 18,28
10	99,33	160,94 ± 24,11
11	132,07	123,53 ± 18,72
12	116,43	116,42 ± 18,90
13	112,67	109,46 ± 18,18
14	132,50	130,65 ± 18,80
15	131,50	165,53 ± 19,57
16	93,13	90,84 ± 18,25
	1.923,30	2.039,71

Os ajustamentos efetuados alteraram substancialmente as médias originais, mostrando que as produções foram bastantes afetadas pelas diferenças no "stand" final. O coeficiente de variação passou de 25% para 20,42% , melhorando a precisão dos resultados, já que a utilização do modelo de covariância múltipla reduziu consideravelmente o efeito residual. A soma das médias ajustadas foi superior à das médias não ajustadas em apenas 6% .

5.4 - ANÁLISE RESUMIDA DOS TRINTA E OITO (38) ENSAIOS DE COMPETIÇÃO DE VARIEDADES DE ALGODÃO

Foram determinadas as estimativas dos parâmetros b_1 e b_2 para estes trinta e oito (38) ensaios, assim como os respectivos desvios padrões para cada estimativa, através da função estimadora completa, ou seja

$$y_{ij} = \hat{u} + \hat{t}_i + \hat{r}_j + \hat{b}_1 x_{ij} + \hat{b}_2 x_{ij}^2$$

Os resultados estão expostos no quadro n.º IV do apêndice do presente trabalho.

A seguir, através da covariância múltipla segundo esquema exposto em (XXVIII) e subsequentes análise de variância foram testadas as hipóteses $(b_1 \text{ e } b_2) = 0$, $\hat{b}_2 = 0$ e $\hat{b}_1 = 0$, assim como verificada a significância de contrastes entre as médias dos tratamentos ajustados para a regressão segundo o mesmo modelo (completo). Os resultados dessas análises estão expostos no quadro n.º V do apêndice do nosso trabalho.

Os ensaios (14) nos quais foi **regeitada** a **hipótese** $(b_1 \text{ e } b_2) = 0$, mas não foi regeitada a hipótese $b_2 = 0$ foi feita análise de covariância, utilizando-se o modelo matemático

$$y_{ij} = u' + \hat{t}'_i + \hat{r}'_j + b'_1 x_{ij} + e_{ij} \quad ,$$

no qual é preliminarmente eliminada a variável $\underline{x}$ em sua segunda potência.

Foi também estimado o parâmetro b_1' para cada caso, assim também como seus desvios padrões. Os resultados das análises de covariância contendo os quadrados médios dos tratamentos ajustados e os valores de F para teste da hipótese $b_1' = 0$ estão expostos no quadro VI do apêndice do presente trabalho. O quadro n.º VII do mesmo apêndice mostra as estimativas do parâmetro b_1' para cada ensaio com seu respectivo desvio padrão.

5.5 - ANÁLISE RESUMIDA DE DEZESSEIS (16) ENSAIOS DE COMPETIÇÃO DE VARIEDADES DE SOJA

Foram determinadas as estimativas $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ nos dezesseis (16) ensaios, assim como os respectivos desvios padrões, através da função estimadora completa

$$y_{ij} = \hat{u} + \hat{t}_i + \hat{r}_j + \hat{b}_1 x_{ij} + \hat{b}_2 x_{ij}^2$$

A seguir, através da covariância múltipla e subsequente análise da variância foram testadas as hipóteses $(b_1$ e $b_2) = 0$ e $b_2 = 0$, assim como verificadas as significâncias dos contrastes entre médias ajustadas. Os resultados dessas análises estão expostos no quadro n.º VIII do apêndice do presente trabalho.

5.6 - DISCUSSÃO FINAL

Em desenove (19) dos trinta e oito (38) ensaios de competição de variedades de algodão analisados, foi regeitada a hipótese

$(b_1$ e $b_2) = 0$ e em cinco destes foi também regeitada a hipótese $b_2 = 0$. Há pois evidente contribuição de $\hat{b}_2$, na explicação da variação de $\underline{y}$ para estes cinco ensaios.

Para os demais ensaios, onde foi regeitada a hipótese $(b_1$ e $b_2) = 0$ mas não foi regeitada a hipótese $b_2 = 0$, houve pois necessidade de verificar-se a hipótese $b_1 = 0$. Para isto preliminarmente eliminou-se do modelo matemático inicial a covariável $\underline{x}$ em sua segunda potência (x^2) e fez-se o estudo do ajustamento do modelo linear.

$$y_{ij} = u' + t_i' + r_j' + b_1' x_{ij} + e_{ij}$$

Dos quatorze (14) ensaios nos quais foi regeitada a hipótese $(b_1$ e $b_2) = 0$ e não foi regeitada a hipótese $b_2 = 0$ foi regeitada a hipótese $b_1' = 0$ mostrando assim que a contribuição da covariável $\underline{x}$ em sua primeira potência mostrou-se bastante mais efetiva na explicação da variação de $\underline{y}$, sendo que grande parte das diferenças entre tratamentos está condicionada as diferenças no "stand" final, e isto de forma linear.

Nos dezesseis (16) ensaios de competição de variedades de soja em 4 foram regeitadas as hipóteses $(b_1$ e $b_2) = 0$ e $b_2 = 0$. Nos demais ensaios (12) doze, não foi regeitada a hipótese $(b_1$ e $b_2) = 0$. A contribuição da covariável (x) em sua segunda potência foi efetiva na explicação da variação de $\underline{y}$.

Os ensaios de competição de variedades de soja apresentaram coeficientes de variação em média de 20% a não ser em dois casos (experimentos 10 e 5) que apresentaram maior heterogeneidade.

Os experimentos com algodão também apresentaram coeficiente de variação em média de 20% exceção feita aos experimentos de nº 10 , 11, 27 , 20 , 35 e 14 que apresentaram maior heterogeneidade.

As fórmulas para aplicação do teste de Tukey embora não tenham sido apresentadas, serão facilmente obtidas, uma vez que já são conhecidas as variâncias de contrastes de duas médias ajustadas, no capítulo terceiro do presente trabalho (3.2.5.2).

No capítulo terceiro, no desenvolvimento dos modelos matemáticos, por simplicidade foi dada ênfase ao modelo matemático para experimentos inteiramente casualizados, e apresentado apenas resumidamente todo o esquema para blocos casualizados, já a marcha das operações e essencialmente a mesma.

Nas aplicações, só foram utilizados experimentos em blocos ao acaso, já que o esquema inteiramente casualizado é de pouco uso, e os dados são escassos.

6 - CONCLUSÕES

a - O ajustamento da equação de regressão linear não pode ser generalizado em análises de covariância, pois há casos em que a adequada regressão a ajustar-se é curvilínea (2º grau).

b - Nos experimentos de competição de variedades de algodão houve predominância dos ajustamentos lineares, enquanto que com os experimentos de competição de variedades de soja, quando houve necessidade de ajustamentos estes o foram pela regressão do 2º grau.

c - Finalmente, é recomendável, o ajustamento da covariância do segundo grau, pois como se pode verificar nos quadros dos resumos das análises efetuadas, houve alguns casos em que o coeficiente b_2 foi significativo, embora seja necessário frizar que haja necessidade para os cálculos de equipamento eletrônico para processamento dos dados, uma vez que a covariância curvilínea envolve calculos bastantes complexos.

7 - RESUMO

O presente trabalho foi orientado no sentido de apresentar um estudo simplificado da análise da covariância curvilínea, com ajustamento de uma equação de regressão do segundo grau. A partir do modelo matemático

$$y_{ij} = u + t_i + r_j + b_1\, x_{ij} + b_2\, x_{ij}^2 + e_{ij}$$

foram deduzidas fórmulas para determinação das estimativas dos parâmetros b_1 e b_2, assim também como foram deduzidas fórmulas simples para determinação das variâncias de $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ e sua covariância.

A análise da covariância é apresentada de modo semelhante à da covariância linear, sendo os efeitos tratamentos + resíduo e resíduo ajustados também por meio de fórmulas de fácil execução.

Os testes de hipóteses são realizados utilizando-se o método recomendado por KEMPTHORNE (1952) pelo teste de F.

Como aplicação são utilizados os dados de 38 experimentos de competição de variedades de algodão e de 16 experimentos de competição de variedades de soja.

São apresentadas com detalhes as análises de covariância e testes de hipóteses em dois ensaios de competição de algodão e em um ensaio de competição de variedades de soja.

Finalmente são apresentadas conclusões cuja principal, pelos resultados obtidos é a de que não pode ser generalizado o ajustamento da equação de regressão linear na análise da covariância pois em 25% dos ensaios de soja e em 10% dos ensaios com algodão a regressão que se mostrou mais adequada foi a curvilínea (2º grau).

8 - BIBLIOGRAFIA

FISHER, R. A. - 1932 - Statistical Methods of Research Workus. Oliver and Boyd - Edinburg - 4.ª Edição.

BARTLET, M. S. - 1937 - Some Exemples of Statistical Methods of Research in Agriculture. J. of. Stat. Soc. Supple. 5: 12-16 .

KEMPTHORNE, O. - 1952 - The Designs and Analysis of Experiments. John Wiley and Sons, Nova York. 631 pp.

GREENBERG, B. G. - 1953 - The Uses of Analyses of Covariance and Balancing in Analytical Surveys. Am. J. of Pub. Health 43: 692-699.

COCHRAN, W. G. - 1957 - Analysis of Covariance. Its Nature and Uses. Biometrics 13: 261-281 .

PIMENTEL GOMES , F. e NOGUEIRA, I. R. - 1966 - Curso de Estatística Matemática. (mimeografado). Piracicaba.

PIMENTEL GOMES, F. - 1966 - Curso de Estatística Experimental. Escola Sup. de Agr. "Luiz de Queiroz". Piracicaba , São Paulo. 404 pp.

CRUZ, F. V. - 1971 - Estudo sobre a Correção de Produções de Parcelas em Ensaios de Milho. Tese Apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", para obtenção do Título de Doutor em Agronomia. Piracicaba , S. Paulo.

9 - APÊNDICE

APÊNDICE

Relação dos Experimentos cujos dados fôram utilizados no presente trabalho:

I - Ensaios de competição de variedades de algodão

1 - Local: Universidade Federal de Viçosa - MG
Ano Agrícola: 1943/44
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 52%

2 - Local: Belo Horizonte (I. A. M. G.) - MG
Ano Agrícola: 1943/44
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 42%

3 - Local: Estação Experimental de Uberlândia - MG
Ano Agrícola: 1957/58
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 82%

4 - Local: Estação Experimental de Patos de Minas - MG
Ano Agrícola: 1943/44
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 36%

5 - Local: Estação Experimental de Lavras - MG
Ano Agrícola: 1946/47
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 53%

6 - Local: Belo Horizonte (I. A. M. G.) - MG
Ano Agrícola: 1962/63
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 40%

7 - Local: Estação Experimental de Sete Lagoas - MG
Ano Agrícola: 1955/56
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 58%

8 - Local: Belo Horizonte (I. A. M. G.) - MG
Ano Agrícola: 1958/59
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 59%

9 - Local: Estação Experimental de Uberlândia - MG
Ano Agrícola: 1953/54
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 52%

10 - Local: Estação Experimental de Uberlândia - MG
Ano Agrícola: 1954/55
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 79%

11 - Local: Estação Experimental de Pitanguí - MG
Ano Agrícola: 1954/55
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 61%

12 - Local: Estação Experimental de Sete Lagoas - MG
Ano Agrícola: 1946/47
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 75%

13 - Local: Belo Horizonte (I. A. M. G.) - MG
Ano Agrícola: 1947/48
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 77%

14 - Local: Estação Experimental de Pitanguí - MG
Ano Agrícola: 1956/57
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 46%

15 - Local: Estação Experimental de Pitanguí - MG
Ano Agrícola: 1944/45
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio fianl: 76%

16 - Local: Estação Experimental de Uberaba - MG
Ano Agrícola: 1946/47
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 82%

17 - Local: Estação Experimental de Sete Lagoas - MG
Ano Agrícola: 1947/48
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 49%

18 - Local: Estação Experimental de Uberlândia - MG
Ano Agrícola: 1955/56
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 75%

19 - Local: Estação Experimental de Uberlândia - MG
Ano Agrícola: 1958/59
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 65%

20 - Local: Estação Experimental de Pitangui - MG
Ano Agrícola: 1958/59
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 68%

21 - Local: Estação Experimental de Petanguí - MG
Ano Agrícola: 1954/55
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 51%

22 - Local: Estação Experimental de Pitanguí - MG
Ano Agrícola: 1954/55
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 90%

23 - Local: Estação Experimental de São Francisco - MG
Ano Agrícola: 1947/48
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 75%

24 - Local: Estação Experimental de Pitanguí - MG
Ano Agrícola: 1946/47
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 80%

25 - Local: Estação Experimental de Patos de Minas - MG
Ano Agrícola: 1946/47
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 71%

26 - Local: Universidade Federal de Viçosa - MG
Ano Agrícola: 1944/45
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 36%

27 - Local: Estação Experimental de Lavras - MG
Ano Agrícola: 1947/48
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 63%

28 - Local: Estação Experimental de Sete Lagoas - MG
Ano Agrícola: 1958/59
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 61%

29 - Local: Belo Horizonte (I. A. M. G.) - MG
Ano Agrícola: 1946/47
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 87%

30 - Local: Estação Experimental de Uberlândia - MG
Ano Agrícola: 1953/54
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 54%

31 - Local: Estação Experimental de Pomba - MG
Ano Agrícola: 1946/47
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 86%

32 - Local: Estação Experimental de Sete Lagoas - MG
Ano Agrícola: 1956/57
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final 69%

33 - Local: Estação Experimental de Pitanguí - MG
Ano Agrícola: 1957/58
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 43%

34 - Local: Estação Experimental de Patos de Minas - MG
Ano Agrícola: 1954/55
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 88%

35 - Local: Estação Experimental de Pitanguí - MG
Ano Agrícola: 1953/54
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 61%

36 - Local: Estação Experimental de Arcos - MG
Ano Agrícola: 1957/58
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 60%

37 - Local: Belo Horizonte (I. A. M. G.) - MG
Ano Agrícola: 1956/57
Delineamento: Blocos ao acaso com 9 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 20%

38 - Local: Estação Experimental de Uberlândia
Ano Agrícola: 1947/48
Delineamento: Blocos ao acaso com 8 tratamentos e 6 repetições
"Stand" médio final: 85%

II - Ensaios de competição de variedades de soja

1 - Local: Piracanjuba - Estado de Goias
Ano Agrícola: 1969/70
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 3 repetições
"Stand" médio final: 66%

2 - Local: Estação Experimental de Patos de Minas - MG
Ano Agrícola: 1967/68
Delineamento: Blocos ao acaso com 12 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 47%

3 - Local: Estação Experimental de Uberaba - MG
Ano Agrícola: 1967/68
Delineamento: Blocos ao acaso com 12 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 73%

4 - Local: Estação Experimental de Uberaba - MG
Ano Agrícola: 1966/67
Delineamento: Blocos ao acaso com 12 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 47%

5 - Local: .I.P.E.A.C.O. - Sede - MG
Ano Agrícola: 1970/71
Delineamento: Blocos ao acaso com 14 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 58%

6 - Local: Estação Experimental de Lavras - MG
Ano Agrícola: 1968/69
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 64%

7 - Local: Estação Experimental de Patos de Minas - MG
Ano Agrícola: 1970/71
Delineamento: Blocos ao acaso com 14 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 72%

8 - Local: Estação Experimental de Brasília - D.F.
Ano Agrícola: 1968/69
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 72%

9 - Local: Estação Experimental de Brasília - D.F.
Ano Agrícola: 1969/70
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 3 repetições
"Stand" médio final: 80%

10 - Local: Estação Experimental de Uberaba - MG
Ano Agrícola: 1964/65
Delineamento: Blocos ao acaso com 25 tratamentos e 3 repetições
"Stand" médio final: 91%

11 - Local: Estação Experimental de Uberaba - MG
Ano Agrícola: 1969/70
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 3 repetições
"Stand" médio final: 78%

12 - Local: I.P.E.A.C.O. - sede - MG
Ano Agrícola: 1968/69
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 77%

13 - Local: Estação Experimental de Anápolis - Goiás
Ano Agrícola: 1968/69
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 55%

14 - Local: I.P.E.A.C.O. - sede - MG
Ano Agrícola: 1969/70
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 3 repetições
"Stand" médio final: 60%

15 - Local: Estação Experimental de Uberaba - MG
Ano Agrícola: 1968/69
Delineamento: Blocos ao acaso com 16 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 90%

16 - Local: Estação Experimental de Rio Pomba - MG
Ano Agrícola: 1967/68
Delineamento: Blocos ao acaso com 12 tratamentos e 4 repetições
"Stand" médio final: 68%

Quadro I - Experimento nº 1 - Produção em Dag/parcela (y) e Stand (x).
Competição de Variedades de Algodão. Universidade Federal de Viçosa. Ano Agrícola: 1943/44.
Área da parcela 60 m^2.

Tratamentos	I Bloco		II Bloco		III Bloco		IV Bloco		V Bloco		VI Bloco	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
A	124	380	110	300	133	620	126	400	64	310	60	130
B	131	280	147	280	164	480	186	360	162	340	208	500
C	144	410	102	300	74	420	169	590	208	660	86	320
D	144	460	179	430	152	350	168	660	199	640	177	460
E	238	400	197	380	190	430	194	380	210	310	98	230
F	110	280	163	400	90	200	190	300	182	610	123	470
G	210	430	126	470	182	720	219	590	210	570	240	560
H	153	260	178	400	209	550	96	320	149	640	191	450

Quadro II - Experimento nº 7 - **Produção** em Dag/parcela (y) e Stand (x).
Competição de Variedade de Algodão. Estação Experimental de Sete Lagoas. Ano Agrícola: 1955/56 .
Área da parcela 30,0 m^2

Tratamentos	I Bloco		II Bloco		III Bloco		IV Bloco		V Bloco		VI Bloco	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
A	92	217	109	228	105	323	78	383	62	281	66	267
B	86	207	74	195	75	250	65	224	67	292	47	301
C	120	176	118	300	90	226	112	221	98	416	66	365
D	77	191	74	190	94	414	94	269	79	390	84	344
E	81	220	93	264	104	332	78	376	29	213	65	346
F	88	185	96	194	118	323	76	303	82	390	68	355
G	118	266	118	195	113	320	77	336	97	353	85	326
H	119	268	89	237	103	363	82	388	50	244	79	353
I	85	160	121	308	94	192	98	346	93	354	81	334

Quadro III - Experimento nº 14 - Produção em Dag/parcela (y) e Stand (x).
Competição de Variedade de Soja. Estação Experimental de IPEACO - Sede. Ano Agrícola: 1969/70.
Área da parcela 5,60 m^2

Tratamentos	I Bloco		II Bloco		III Bloco	
	x	y	x	y	x	y
1	160	146	160	146	155	148
2	64	121	103	134	99	132
3	121	128	160	121	114	165
4	141	129	148	123	114	148
5	156	162	143	199	114	142
6	99	132	132	128	120	107
7	100	138	80	41	62	100
8	160	98	145	83	160	87
9	74	112	120	81	111	68
10	11	39	132	195	41	65
11	124	124	160	137	146	136
12	96	122	184	111	131	116
13	120	109	160	145	115	84
14	92	105	160	141	162	151
15	85	112	73	132	78	151
16	160	130	135	72	101	70

Quadro IV - Estimativas de b_1 e b_2 e seus respectivos erros obtidos através da função estimadora

$$y_{ij} = \mu + \hat{t}_i + \hat{r}_j + \hat{b}_1 x_{ij} + \hat{b}_2 x_{ij}^2$$

Número do Experimento	$\hat{b}_1$	$s(\hat{b}_1)$	$\hat{b}_2$	$s(\hat{b}_2)$
1	1,4943	0,4032	- 0,0180	0,0071
2	3,1702	0,6421	- 0,0357	0,0079
3	5,1838	0,8262	0,0279	0,0106
4	2,5947	0,7380	- 0,0041	0,0074
5	1,2483	0,2153	- 0,0036	0,0029
6	1,7796	0,5565	- 0,0202	0,0580
7	1,8085	0,5818	- 0,0164	0,0133
8	- 0,8558	1,3879	0,0812	0,0598
9	1,3524	0,3022	0,0636	0,0223
10	- 0,6753	3,7171	0,0118	0,3368
11	0,7470	0,2882	0,0381	0,0144
12	- 0,1394	0,9916	- 0,0048	0,0225
13	2,1554	0,6088	0,0150	0,0205
14	- 0,1306	0,2277	0,0149	0,0107
15	- 0,5473	0,7905	- 0,0272	0,0214
16	1,1164	0,8161	- 0,0079	0,0199
17	0,2095	0,3921	- 0,0058	0,0111
18	0,5921	0,7735	- 0,0073	0,0146
19	1,7466	0,6772	- 0,0066	0,0278
20	0,1449	0,6376	0,0523	0,0260
21	0,6554	0,7729	0,0711	0,0527
22	1,2368	1,9472	0,0191	0,0253
23	1,7908	0,9460	- 0,0068	0,0436

(continua...)

Quadro IV - (continuação)

Número do Experimento	$\hat{b}_1$	$s(\hat{b}_1)$	$\hat{b}_2$	$s(\hat{b}_2)$
24	0,2337	1,9635	0,0420	0,0493
25	- 1,9047	1,0435	0,0321	0,0280
26	0,8244	1,1073	- 0,0319	0,0266
27	0,2905	0,7716	- 0,0484	0,0229
28	1,1181	0,5550	- 0,0330	0,0253
29	1,1068	0,8563	- 0,0085	0,0179
30	0,6611	0,4082	- 0,0064	0,0171
31	5,8262	1,1749	0,0267	0,0210
32	1,1959	0,5669	0,0114	0,0164
33	2,2246	0,6493	0,0143	0,0213
34	1,4158	0,4362	0,0217	0,0512
35	1,3603	0,4825	0,0286	0,0263
36	0,3878	0,1075	0,0029	0,0032
37	4,6192	1,3842	- 0,0132	0,0435
38	3,2793	0,6743	0,0082	0,0210

Quadro V - Resultados das análises de variância de 38 ensaios de competição de variedades de algodão utilizando o modelo de covariância múltipla

$$y_{ij} = \mu + t_i + r_j + b_1 x_{ij} + b_2 x_{ij}^2 + e_{ij}$$

Experimento Número	G. L. Resíduo ajustado	Q. M. Tratamento Ajustado	F (b_1 e b_2)	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$
1	34	29.600,80 *	13,46 **	1,4943	- 0,0180 *
2	34	38.826,78	21,30 **	3,1702	- 0,0357 *
3	39	89.536,76 **	19,48 **	5,1838	0,0279 *
4	34	37.409,85	6,49 **	2,5947	- 0,0041
5	34	4.245,69	17,13 **	1,2483	- 0,0036
6	20	209,79	5,13 *	1,7796	- 0,0202
7	39	1.380,25	6,41 *	1,8085	- 0,0164
8	39	17.372,59	1,57	- 0,8558	0,0812
9	39	805,71	14,37 *	1,3524	0,0636 *
10	39	11.888,77	0,02	- 0,6753	0,0118
11	39	1.473,43	6,45 **	0,7470	0,0381 *
12	34	34.500,55 **	0,03	- 0,1394	- 0,0048
13	34	5.070,63	7,82 **	2,1554	0,0150
14	39	301,36	1,04	- 0,1306	0,0149
15	34	28.482,13	1,30	- 0,5473	- 0,0272
16	34	12.804,42	1,15	1,1164	- 0,0079
17	34	45.362,31	0,31	0,2095	- 0,0058
18	39	1.404,01	0,71	0,5921	- 0,0073
19	39	2.006,07	4,10 **	1,7466	- 0,0066
20	39	3.679,25	2,23	0,1449	0,0523
21	39	241,96	2,10	0,6554	0,0711
22	34	550,01	0,48	1,2368	0,0191
23	34	2.969,78	2,19	1,7908	- 0,0068

(continua...)

Quadro V - (continuação)

Experimento Número	G. L. Resíduo Ajustado	Q. M. Tratamento Ajustado	F (b_1 e b_2)	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$
24	34	17.585,37	0,37	0,2337	0,0420
25	34	28.640,31 **	2,68	- 1,9047	0,0321
26	34	12.761,91 *	1,12	0,8244	- 0,0319
27	34	6.078,46	2,96	0,2905	- 0,0484
28	39	4.595,51	3,63 *	1,1181	- 0,0330
29	34	20.303,55	1,28	1,1068	- 0,0085
30	39	714,55	1,51	0,6611	- 0,0064
31	34	30.637,34	14,26 **	5,8262	0,0267
32	39	3.789,33	2,01	1,1359	0,0114
33	39	2.264,04	6,23 **	2,2246	0,0143
34	39	839,17	5,29 **	1,4158	0,0217
35	39	2.039,34	4,35 **	1,3603	0,0286
36	39	564,91 **	6,52 **	0,3878	0,0029
37	39	7.822,42	6,02 **	4,6192	- 0,0132
38	34	550,14	12,95 **	3,2793	0,0082

* significativo ao nível de 5% de probabilidade

** significativo ao nível de 1% de probabilidade

Quadro VI - Resultados das análises de variância de 14 ensaios de competição de variedades de algodão utilizando o modelo matemático de covariância linear

$$y_{ij} = \mu' + t_i' + r_j' + b_1' x_{ij} + e_{ij}$$

Experimento Número	G. L. Resíduo Ajustado	Q. M. Tratamento Ajustado	F (b_1')
4	34	37.720,54	15,45 *
5	34	4.682,83	32,89 *
6	20	222,54	10,60 *
7	39	1.720,47	11,16 *
13	34	5.067,86	15,31 **
18	39	2.065,44	8,34 *
27	34	7.957,70	4,18 *
28	39	4.497,81	5,54 *
31	34	28.688,17	26,45 **
34	39	851,64	10,61 **
35	39	1.064,81	7,48 *
36	39	579,94	12,22 **
37	39	7.875,17	12,23 **
38	34	6.617,37	21,57 **

* Significativo ao nível de 5% de probabilidade

** Significativo ao nível de 1% de probabilidade

Quadro VII - Estimativas e desvios padrões do parâmetro b_1', em 14 ensaios de competição de variedades de algodão.

Experimento Número	$\hat{b}_1'$	$s(\hat{b}_1')$
4	2,4645	0,6870
5	1,2322	0,2148
6	1,7680	0,5431
7	1,9291	0,5773
13	1,8862	0,4820
18	0,7571	0,6934
27	1,2725	0,6223
28	1,2757	0,5418
31	4,9640	0,9651
34	1,4022	0,4304
35	1,3185	0,4821
36	1,3586	0,1026
37	4,4686	1,2776
38	3,1888	0,2038

Quadro VIII - Resultado das análises de variância de 16 ensaios de competição de variedades de soja utilizando o modelo de covariância múltipla

$$y_{ij} = \mu + t_i + r_j + b_1 x_{ij} + b_2 x_{ij}^2 + e_{ij}$$

Experimento Número	G. L. do resíduo	Q.M. Total Ajustado	$F(b_1 \text{ e } b_2)$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$s(\hat{b}_1)$ $\pm$	$s(\hat{b}_2)$ $\pm$
1	28	542,35	1,53	0,3602	0,0027	0,2199	0,0082
2	31	1.071,10	2,55	0,4231	- 0,0051	0,1894	0,0033
3	31	643,94 *	4,36 *	- 0,6340	- 0,0317 *	0,3317	0,0116
4	31	1.045,23	1,35	0,3378	- 0,0024	0,2203	0,0034
5	37	9.434,77	0,48	- 0,1890	0,0024	0,2527	0,0045
6	43	1.244,19 *	9,64**	0,0375	- 0,0086**	0,1074	0,0021
7	37	2.392,64 *	0,31	0,2397	- 0,0042	0,3202	0,0137
8	43	484,74	0,74	0,4249	0,0067	0,3501	0,0068
9	43	913,42**	0,53	- 0,2437	- 0,0030	0,3220	0,0095
10	46	3.735,58	0,30	0,4525	0,0053	0,5877	0,0107
11	43	16.161,84	1,49	0,7584	- 0,0268	1,0151	0,0200
12	43	487,04 *	1,91	- 0,1880	- 0,0032	0,1033	0,0022
13	43	115,32	2,45	0,0642	- 0,0025	0,0654	0,0012
14	43	1.672,63 *	10,18**	0,5648	- 0,0059 *	0,1192	0,0026
15	43	1.632,57 *	6,70**	0,1337	- 0,0104 *	0,2363	0,0042
16	31	5.056,39**	1,52	- 0,5527	- 0,0001	0,3202	0,0044

* significativo ao nível de 5% de probabilidade

** significativo ao nível de 1% de probabilidade