

LAEDE MAFFIA DE OLIVEIRA

Engenheiro-Agrônomo

Professor Assistente do Departamento de Matemática do
Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal
de Viçosa

EFICIÊNCIA DE DELINEAMENTOS PARA AJUSTAMENTO DE SUPERFÍCIES DE RESPOSTA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo, para obtenção do grau de "Mestre".

Orientador: Prof. Dr. Frederico Pimentel Gomes

PIRACICABA

ESTADO DE SÃO PAULO - BRASIL

1974

AGRADECIMENTOS

Desejamos expressar os nossos agradecimentos ao Prof. Frederico Pimentel Gomes, Catedrático da Cadeira nº 16 (Matemática e Estatística), pelo incentivo e valiosa orientação na execução deste trabalho.

Ao Dr. Fábio Ribeiro Gomes, Professor Titular de Estatística Experimental da Universidade Federal de Viçosa, a quem devemos grande parte da nossa formação estatística.

Ao Corpo Docente do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) pela bolsa de estudos concedida.

À Universidade Federal de Viçosa pela oportunidade que nos proporcionou de realizar este trabalho.

Agradecemos ainda a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o bom andamento deste trabalho.

ÍNDICE

	Página
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. DELINEAMENTO DE SEGUNDA ORDEM	6
4. MÉTODOS	10
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	15
5.1. Fatoriais do grupo 3^k	15
5.2. Delineamento composto central rotativo	18
6. CONCLUSÕES	29
7. RESUMO	31
8. SUMMARY	33
9. BIBLIOGRAFIA	35
10. APÊNDICE	37
Quadro 1 - Sistema de equações para os 9 tratamentos de um fatorial 3^2	38
- Matriz X	38
Quadro 2 - Sistema de equações para os 27 tratamentos de um fatorial 3^3	39
- Matriz X	40
Quadro 3 - Sistema de equações para os 27 tratamentos de um fatorial fracionado 3^4	41
- Matriz X	43
Quadro 4 - Sistema de equações para os 9 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	44
- Matriz X	44
Quadro 5 - Sistema de equações para os 11 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	45
- Matriz X	45
Quadro 6 - Sistema de equações para os 13 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	46
- Matriz X	46

Quadro 7 - Sistema de equações para os 15 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	47
- Matriz X	48
Quadro 8 - Sistema de equações para os 17 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	49
- Matriz X	50
Quadro 9 - Sistema de equações para os 20 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	51
- Matriz X	52
Quadro 10 - Sistema de equações para os 25 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	53
- Matriz X	55
Quadro 11 - Sistema de equações para os 27 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	56
- Matriz X	58
Quadro 12 - Sistema de equações para os 31 tratamentos de um delineamento composto central rotativo	59
- Matriz X	61

1. INTRODUÇÃO

De um modo geral, interpreta-se uma superfície de resposta pela relação funcional

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

onde Y é a função de resposta e x_1, x_2, \dots, x_p são as variáveis independentes. Geralmente, os dados são provenientes de N valores de Y , correspondentes a N combinações especificadas dos níveis de x .

A função resposta é geometricamente interpretada como a representação de uma superfície no espaço, cujas coordenadas são constituídas por $p + 1$ variáveis, x_1, x_2, \dots, x_p e Y . As N combinações experimentais dos níveis de x são representadas por pontos no espaço das variáveis independentes. O conjunto destes N pontos é chamado de delineamento de tratamentos.

O estudo das superfícies de resposta tem-se desenvolvido de uma maneira bastante acentuada nos últimos anos, havendo, inclusive, delineamentos imaginados especialmente para este fim, como por exemplo os delineamentos compostos centrais, apresentados por BOX e WILSON (1951) para uso em pesquisas químicas.

PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972), ao fazerem referências sobre este trabalho, informam sobre a afirmativa de COCHRAN e COX (1957) de que os coeficientes dos termos quadráticos da equação de regressão são estimados com precisão relativamente baixa em um fatorial 3^k . Esta a

firmativa, segundo PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972), "tem sido geralmente interpretada como significando que os delineamentos fatoriais dão, para os coeficientes dos termos quadráticos, estimativas de maiores variâncias do que os delineamentos compostos centrais similares".

Estes autores compararam o fatorial 3^3 com o delineamento composto central rotativo para $k = 3$ e com um ponto no centro, e chegaram à conclusão de que essa afirmativa não é verdadeira.

Apresentaremos no presente trabalho um estudo sobre a comparação da precisão das estimativas dos coeficientes dos modelos do grupo fatorial 3^k para $k = 2, 3, 4$, relativamente às estimativas correspondentes, obtidas dos modelos do delineamento composto central rotativo para $k = 2, 3, 4$, usando-se um ou mais pontos no centro.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O estudo das superfícies de resposta evoluiu muito nos últimos anos, isto devido, em grande parte, à importância que tem sido dada à interpretação econômica dos experimentos.

BOX e WILSON (1951) fizeram um estudo detalhado do ajustamento da regressão polinomial aos experimentos fatoriais do campo industrial. Eles dizem que um delineamento poderá ser avaliado parcialmente pela precisão com que os parâmetros da equação são estimados e pela grandeza da tendenciosidade das estimativas.

Segundo esses autores no grupo fatorial 3^k , os termos de 1ª ordem são estimados com boa precisão, mas os termos de ordem mais elevada são estimados com precisão relativamente baixa.

Por esse motivo, criaram novos delineamentos, para ajustar superfícies de resposta de segunda ordem. Seus primeiros delineamentos são chamados de delineamentos compostos e são constituídos pela adição de combinações de tratamentos àquelas que são obtidas de um fatorial 2^k .

Eles desenvolveram um processo de comparação de dois delineamentos quanto à precisão das estimativas dos parâmetros, confrontando

$$N_1 C_1^{-1} \quad \text{com} \quad N_2 C_2^{-1},$$

sendo N_1 e N_2 os números de tratamentos, C_1^{-1} e C_2^{-1} , as matrizes de

dispersão. Se os níveis dos fatores não forem os mesmos, serão determinados os desvios padrões dos níveis para cada delineamento e tomado o seu quociente como um fator médio de redução à mesma escala.

BOX e HUNTER (1957) introduziram os delineamentos rotativos para os estudos de superfícies de resposta. Eles construíram alguns delineamentos rotativos de segunda ordem, usando figuras geométricas.

Posteriormente, BOX e BEHNKEN (1960 a, b), BOSE e DRAPER (1959) e DRAPER (1960) obtiveram esses delineamentos, usando técnicas diferentes.

DAS (1961), DAS e MARASIMAHN (1962) e DAS (1963) apresentaram outros métodos mais gerais que fazem uso dos fatoriais e dos delineamentos em blocos incompletos para construir delineamentos rotativos.

PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972), ao fazerem referências sobre o trabalho de BOX e WILSON (1951), informam sobre a afirmativa de COCHRAN e COX (1957) de que os coeficientes dos termos quadráticos da equação de regressão "são estimados com precisão relativamente baixa em um fatorial 3^k ". Esta afirmativa, segundo PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972), "tem sido geralmente interpretada como significando que os delineamentos fatoriais dão, para os coeficientes dos termos quadráticos, estimativas de maiores variâncias do que os delineamentos compostos centrais similares".

CAMPOS (1967), comparando o delineamento composto central rotativo para $k = 3$ e com um ponto no centro e o fatorial 3^3 , chegou à conclusão de que para ajustamento de superfície de resposta o fatorial é mais preciso do que o delineamento composto central rotativo. Para chegar a essa conclusão, o autor se baseia nas variâncias das estimativas dos parâmetros, depois de reduzi-las à mesma unidade, obtendo:

Parâmetros	Delineamento composto central rotativo	Fatorial
Quadráticos	0,7804	0,1667
Interações	0,6250	0,0833
Lineares	0,1190	0,0555

PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972) discutem detalhadamente a comparação da precisão das estimativas em um fatorial 3^3 com um delineamento composto central rotativo com 15 tratamentos. Os autores acham preferível, no caso específico de ensaios com fertilizantes, simplesmente ter em vista intervalos do mesmo comprimento, para cada fator, nos dois modelos. Assim, o comprimento do intervalo, correspondente aos extremos $(-\sqrt{3}, 0, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0, 0)$, igual a $2\sqrt{3}$, deveria tornar-se igual ao do intervalo (de comprimento 2) do fatorial. Isto pode ser feito simplesmente pela multiplicação, por $1/\sqrt{3}$, das coordenadas dos pontos no delineamento composto central rotativo. Desta maneira, obtiveram as variâncias:

Parâmetros	Delineamento composto central rotativo	Fatorial
Quadráticos	21,07 σ^2	4,50 σ^2
Interações	16,88 σ^2	2,25 σ^2
Lineares	3,21 σ^2	1,50 σ^2

3. DELINEAMENTOS DE SEGUNDA ORDEM

A forma geral do modelo de regressão polinomial do segundo grau com duas variáveis independentes x_{1i} e x_{2i} é dada pela seguinte equação:

$$Y_i = b_0 + b_{11}x_{1i}^2 + b_{22}x_{2i}^2 + b_{12}x_{1i}x_{2i} + b_{11}x_{1i} + b_{22}x_{2i} + e_i$$

onde e_i é uma variável aleatória (com distribuição normal de média 0 (zero) e variância σ^2).

Para que se possam estimar os coeficientes de regressão neste modelo, cada variável x_{ji} deve tomar, pelo menos, três níveis diferentes. Isto sugere o uso dos fatoriais do grupo 3^k . Se os três níveis de cada x se codificarem como -1, 0 e 1, a superfície de segunda ordem se rá fácil de ser ajustada aos resultados de um fatorial 3^k .

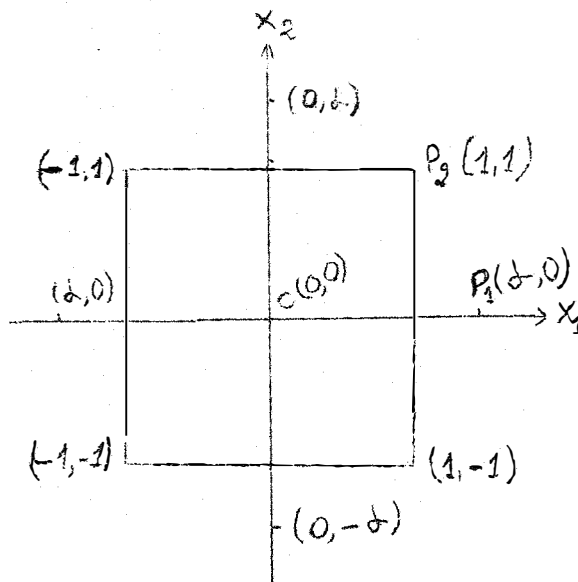
BOX e WILSON (1951) criaram novos delineamentos, para ajustar superfícies de resposta de segunda ordem. Seus primeiros delineamentos, chamados delineamentos compostos, são construídos pela adição de combinações de tratamentos àquelas que são obtidas de um fatorial 2^k . Se os níveis codificados de cada variável x são -1 e +1 no fatorial 2^k , adicionando-se a estes as $(2k + 1)$ combinações:

$$\begin{aligned} &(0, 0, \dots, 0); (-\alpha, 0, \dots, 0); (\alpha, 0, \dots, 0); \\ &\quad (0, -\alpha, \dots, 0); (0, \alpha, \dots, 0); \\ &\quad \dots (0, 0, \dots, -\alpha); (0, 0, \dots, \alpha), \end{aligned}$$

obtemos os delineamentos compostos contrais.

O número total de combinações de tratamentos, usando-se um ponto no centro, é $(2^k + 2k + 1)$. Para 2, 3 e 4 variáveis x , o experimento requer 9, 15 e 25 unidades, respectivamente, comparados com 9, 27 e 81 no grupo 3^k . O valor de α pode ser escolhido para tornar os coeficientes de regressão ortogonais, ou para minimizar o desvio que resulta se a forma verdadeira da superfície de resposta não for quadrática, ou para dar ao delineamento a propriedade de ser rotativo. O critério da rotatividade foi proposto por BOX e HUNTER (1957), surgindo daí os delineamentos compostos centrais rotativos, que se caracterizam por ter todos os seus pontos equidistantes do ponto central. Para duas variáveis independentes, considerando um ponto no centro, teremos 9 tratamentos. Os tratamentos adicionais são: $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(0, \alpha)$, $(-\alpha, 0)$ e $(0, -\alpha)$.

Graficamente temos:



A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, referido a um sistema ortogonal, é:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Assim, para o gráfico anterior temos:

$$\overline{CP_1} = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2} = \alpha,$$

$$\overline{CP}_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

Pela definição de delineamentos rotativos, podemos escrever:

$$\alpha = \sqrt{2}$$

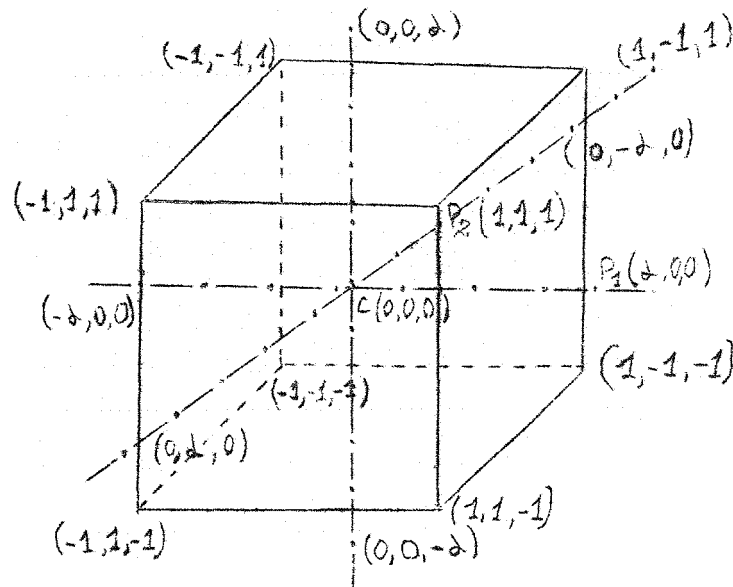
Logo, os tratamentos são:

$$\begin{array}{ccc} (-\sqrt{2}, 0) & (0, \sqrt{2}) & (1, 1) \\ (0, -\sqrt{2}) & (-1, -1) & (-1, 0) \\ (\sqrt{2}, 0) & (1, -1) & (0, 0) \end{array}$$

Para 3 variáveis independentes, considerando um ponto no centro, teremos 15 tratamentos. Os tratamentos adicionais são:

$$\begin{array}{l} (-\alpha, 0, 0), (0, -\alpha, 0), (0, 0, -\alpha), (\alpha, 0, 0) \\ (0, \alpha, 0), (0, 0, \alpha) \text{ e } (0, 0, 0) \end{array}$$

Graficamente temos:



A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, referidos a um sistema triortogonal orientado, é:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

logo,

$$\overline{CP}_1 = \sqrt{(\alpha-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\alpha^2} = \alpha,$$

$$\overline{CP}_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{3}.$$

A definição de "delineamentos rotativos" nos permite escrever que $\alpha = \sqrt{3}$. Os pontos, com exceção do central, se localizam, pois, numa esfera de raio $\alpha = \sqrt{3}$.

Os tratamentos são:

$$\begin{array}{l} (-\sqrt{3}, 0, 0) \quad (0, 0, \sqrt{3}) \quad (1, -1, 1) \\ (0, -\sqrt{3}, 0) \quad (-1, -1, -1) \quad (1, 1, -1) \\ (0, 0, -\sqrt{3}) \quad (-1, -1, 1) \quad (-1, 1, 1) \\ (\sqrt{3}, 0, 0) \quad (-1, 1, -1) \quad (1, 1, 1) \\ (0, \sqrt{3}, 0) \quad (1, -1, -1) \quad (0, 0, 0) \end{array}$$

Para 4 variáveis independentes, considerando um ponto no centro, temos 25 tratamentos. Os tratamentos adicionais são:

$$\begin{array}{l} (-\alpha, 0, 0, 0) \quad (0, 0, 0, -\alpha) \quad (0, 0, \alpha, 0) \\ (0, -\alpha, 0, 0) \quad (\alpha, 0, 0, 0) \quad (0, 0, 0, \alpha) \\ (0, 0, -\alpha, 0) \quad (0, \alpha, 0, 0) \quad (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

Para se obter a rotatividade dos eixos do delineamento composto central, deve-se ter $\alpha = 2^{k/4}$, conseqüentemente para $k = 4$, temos $\alpha = 2$.

Os tratamentos são:

$$\begin{array}{l} (-1, -1, -1, -1) \quad (1, -1, -1, 1) \quad (0, 0, -2, 0) \\ (1, -1, -1, -1) \quad (-1, 1, -1, 1) \quad (0, 0, 0, -2) \\ (-1, 1, -1, -1) \quad (1, 1, -1, 1) \quad (2, 0, 0, 0) \\ (1, 1, -1, -1) \quad (-1, -1, 1, 1) \quad (0, 2, 0, 0) \\ (-1, -1, 1, -1) \quad (1, -1, 1, 1) \quad (0, 0, 2, 0) \\ (1, -1, 1, -1) \quad (-1, 1, 1, 1) \quad (0, 0, 0, 2) \\ (-1, 1, 1, -1) \quad (1, 1, 1, 1) \quad (0, 0, 0, 0) \\ (1, 1, 1, -1) \quad (-2, 0, 0, 0) \\ (-1, -1, -1, 1) \quad (0, -2, 0, 0) \end{array}$$

4. MÉTODOS

A metodologia usada baseia-se nos trabalhos de BOX e WILSON (1951), CAMPOS (1967), PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972).

Para cada delineamento, tendo em vista as diversas equações comumente utilizadas, será obtida a respectiva matriz de dispersão. Pela comparação dos termos das matrizes após conseguir-se conveniente e quiyalência de escala, poderemos avaliar a eficiência dos delineamentos.

Para explicar esta metodologia, vamos comparar a precisão das estimativas dos coeficientes do modelo fatorial 3^3 com as estimativas correspondentes, obtidas do modelo do delineamento composto central rotativo com 15 tratamentos.

Indicaremos por:

$$Y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11}x_{1i}^2 + \hat{a}_{22}x_{2i}^2 + \hat{a}_{33}x_{3i}^2 + \hat{a}_{12}x_{1i}x_{2i} + \hat{a}_{13}x_{1i}x_{3i} + \\ + \hat{a}_{23}x_{2i}x_{3i} + \hat{a}_i x_{1i} + \hat{a}_2 x_{2i} + \hat{a}_3 x_{3i} ,$$

a equação da superfície de resposta relativa ao fatorial.

Os 27 tratamentos para o fatorial são:

$$\begin{array}{lll} (-1, -1, -1) & (0, -1, -1) & (1, -1, -1) \\ (-1, -1, 0) & (0, -1, 0) & (1, -1, 0) \\ (-1, -1, 1) & (0, -1, 1) & (1, -1, 1) \\ (-1, 0, -1) & (0, 0, -1) & (1, 0, -1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 (-1, 0, 0) & (0, 0, 0) & (1, 0, 0) \\
 (-1, 0, 1) & (0, 0, 1) & (1, 0, 1) \\
 (-1, 1, -1) & (0, 1, -1) & (1, 1, -1) \\
 (-1, 1, 0) & (0, 1, 0) & (1, 1, 0) \\
 (-1, 1, 1) & (0, 1, 1) & (1, 1, 1)
 \end{array}$$

Aplicando-os à equação anterior, chegamos à matriz:

$$S_1 = X_1' X_1 = \begin{pmatrix}
 27 & 18 & 18 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 18 & 18 & 12 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 18 & 12 & 18 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 18 & 12 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18
 \end{pmatrix}$$

e, conseqüentemente, a matriz de dispersão será:

$$S_1^{-1} \sigma^2 = \begin{pmatrix}
 7/27 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1/9 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1/9 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1/9 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18
 \end{pmatrix} \sigma^2$$

A equação da superfície de resposta, correspondente ao delineamento composto central rotativo será indicada por:

De acordo com as matrizes de dispersão, vistas anteriormente, para $i \neq j$, podemos escrever:

Fatorial:

$$V(\hat{a}_{ii}) = \frac{1}{6}\sigma^2, \quad V(\hat{a}_{ij}) = \frac{1}{12}\sigma^2, \quad V(\hat{a}_i) = \frac{1}{18}\sigma^2,$$

Composto central rotativo:

$$V(\hat{b}_{ii}) = \frac{59}{378}\sigma^2, \quad V(\hat{b}_{ij}) = \frac{1}{8}\sigma^2, \quad V(\hat{b}_i) = \frac{1}{14}\sigma^2.$$

Em virtude do número de tratamentos ser diferente nos dois de lineamentos, não é correto comparar simplesmente as variâncias anteriores. Para resolver este problema, BOX e WILSON (1951) propuseram um processo de comparação quanto à precisão das estimativas dos parâmetros, confrontando

$$N_1 C_1^{-1} \quad \text{com} \quad N_2 C_2^{-1},$$

sendo N_1 e N_2 os números de tratamentos, C_1^{-1} e C_2^{-1} as matrizes de dispersão.

Baseando-se neste processo, no caso presente, temos de multiplicar as variâncias das estimativas do fatorial por 27, e as do composto central rotativo por 15. Obtemos:

Fatoriais:

$$V(\hat{a}_{ii}) = \frac{27}{6}\sigma^2, \quad V(\hat{a}_{ij}) = \frac{27}{12}\sigma^2, \quad V(\hat{a}_i) = \frac{27}{18}\sigma^2,$$

Composto central rotativo:

$$V(\hat{b}_{ii}) = \frac{885}{378}\sigma^2, \quad V(\hat{b}_{ij}) = \frac{15}{8}\sigma^2, \quad V(\hat{b}_i) = \frac{15}{14}\sigma^2$$

Entretanto, mesmo assim a comparação não é correta, pois a amplitude dos intervalos dos níveis não é a mesma nos dois casos. Com efeito, verifica-se que os níveis nos dois delineamentos, são:

Fatoriais:	-1	0	1	
Composto central rotativo:	$-\sqrt{3}$	-1	0	1 $\sqrt{3}$

Segundo PIMENTEL GOMES e CAIPOS (1972) é preferível, no caso de ensaios com fertilizantes, simplesmente ter em vista intervalos do mesmo comprimento, para cada fator, nos dois delineamentos. Assim, o comprimento do intervalo, correspondente aos extremos $(-\sqrt{3}, 0, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0, 0)$, igual a $2\sqrt{3}$, deveria tomar-se igual ao do intervalo (de comprimento 2) do fatorial. Isto pode ser feito, multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{3}}$ as coordenadas dos pontos no delineamento composto central rotativo, logo obtemos:

Fatorial:

$$\begin{aligned} v(\hat{a}_{ii}) &= \frac{27}{6} \sigma^2, & v(\hat{a}_{ij}) &= \frac{27}{12} \sigma^2, & v(\hat{a}_i) &= \frac{27}{18} \sigma^2, \\ &= 4,50 \sigma^2 & &= 2,25 \sigma^2 & &= 1,50 \sigma^2. \end{aligned}$$

Composto central rotativo:

$$\begin{aligned} v(\hat{b}_{ii}) &= \frac{7965}{378} \sigma^2, & v(\hat{b}_{ij}) &= \frac{135}{8} \sigma^2, & v(\hat{b}_i) &= \frac{45}{14} \sigma^2, \\ &= 21,07 \sigma^2 & &= 16,88 \sigma^2 & &= 3,21 \sigma^2. \end{aligned}$$

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1. Fatoriais do grupo 3^k

a) Para $k = 2$, a equação da superfície polinomial de resposta é:

$$Y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11}x_{1i}^2 + \hat{a}_{22}x_{2i}^2 + \hat{a}_{12}x_{1i}x_{2i} + \hat{a}_{12}x_{2i} + \hat{a}_{22}x_{2i}$$

Partindo da equação anterior e considerando os níveis -1, 0 e 1 para os fatores x_1 e x_2 , pela teoria da regressão, obtemos a seguinte matriz de dispersão:

$$\begin{pmatrix} 5/9 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \sigma^2$$

b) Para $k = 3$, a equação da superfície é:

$$Y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11}x_{1i}^2 + \hat{a}_{22}x_{2i}^2 + \hat{a}_{33}x_{3i}^2 + \hat{a}_{12}x_{1i}x_{2i} + \hat{a}_{13}x_{1i}x_{3i} + \\ + \hat{a}_{23}x_{2i}x_{3i} + \hat{a}_{11}x_{1i} + \hat{a}_{22}x_{2i} + \hat{a}_{33}x_{3i}$$

Considerando esta equação e os níveis -1, 0 e 1 para os fato

res x_1 , x_2 e x_3 , temos a matriz de dispersões:

$$\begin{pmatrix} 7/27 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18 \end{pmatrix} \sigma^2$$

c) Para $k = 4$, usaremos o fatorial fracionado com os seguintes tratamentos:

$$\begin{array}{lll} (-1, -1, -1, -1) & (-1, -1, 1, 0) & (-1, -1, 0, 1) \\ (-1, 0, 1, 1) & (-1, 0, 0, -1) & (-1, 0, -1, 0) \\ (-1, 1, 0, 0) & (-1, 1, -1, 1) & (-1, 1, 1, -1) \\ (0, -1, 1, 1) & (0, -1, 0, -1) & (0, -1, -1, 0) \\ (0, 0, 0, 0) & (0, 0, -1, 1) & (0, 0, 1, -1) \\ (0, 1, -1, -1) & (0, 1, 1, 0) & (0, 1, 0, 1) \\ (1, -1, 0, 0) & (1, -1, -1, 1) & (1, -1, -1, -1) \\ (1, 0, -1, -1) & (1, 0, 1, 0) & (1, 0, 0, 1) \\ (1, 1, 1, 1) & (1, 1, 0, -1) & (1, 1, -1, 0) \end{array}$$

A equação da superfície é:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i = & \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} x_{1i}^2 + \hat{a}_{22} x_{2i}^2 + \hat{a}_{33} x_{3i}^2 + \hat{a}_{44} x_{4i}^2 + \hat{a}_{12} x_{1i} x_{2i} + \\ & + \hat{a}_{13} x_{1i} x_{3i} + \hat{a}_{14} x_{1i} x_{4i} + \hat{a}_{23} x_{2i} x_{3i} + \hat{a}_{24} x_{2i} x_{4i} + \\ & + \hat{a}_{34} x_{3i} x_{4i} + \hat{a}_{11} x_{1i} + \hat{a}_{22} x_{2i} + \hat{a}_{33} x_{3i} + \hat{a}_{44} x_{4i} \end{aligned}$$

5.2. Delineamento composto central rotativo

a) Para $k = 2$, a equação da superfície polinomial de resposta é:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{11}x_{1i}^2 + \hat{\beta}_{22}x_{2i}^2 + \hat{\beta}_{12}x_{1i}x_{2i} + \hat{\beta}_{11}x_{1i} + \hat{\beta}_{22}x_{2i}$$

Partindo da equação acima e considerando os níveis $-\sqrt{2}$, -1 , 0 , 1 e $\sqrt{2}$ para os fatores x_1 e x_2 , pela teoria da regressão obtemos as seguintes matrizes de dispersão:

Com um ponto no centro:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 11/32 & 7/32 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 7/32 & 11/32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \sigma^2$$

Com três pontos no centro:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 17/96 & 5/96 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/96 & 17/96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \sigma^2$$

Com cinco pontos no centro:

$$\begin{pmatrix} 1/5 & -1/10 & -1/10 & 0 & 0 & 0 \\ -1/10 & 23/160 & 3/160 & 0 & 0 & 0 \\ -1/10 & 3/160 & 23/160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \sigma^2$$

b) Para $k = 3$, a equação da superfície é:

$$Y_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11}x_{1i}^2 + \hat{b}_{22}x_{2i}^2 + \hat{b}_{33}x_{3i}^2 + \hat{b}_{12}x_{1i}x_{2i} + \hat{b}_{13}x_{1i}x_{3i} + \\ + \hat{b}_{23}x_{2i}x_{3i} + \hat{b}_1x_{1i} + \hat{b}_2x_{2i} + \hat{b}_3x_{3i}$$

Considerando esta equação e os níveis $-\sqrt{3}$, -1 , 0 , 1 e $\sqrt{3}$ para os fatores x_1 , x_2 e x_3 , temos as seguintes matrizes de dispersão:

Com um ponto no centro:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 59/378 & 19/189 & 19/189 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 19/189 & 59/378 & 19/189 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 19/189 & 19/189 & 59/378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 \end{bmatrix} \sigma^2$$

Com três pontos no centro:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} 1/3 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 31/378 & 5/189 & 5/189 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 5/189 & 31/378 & 5/189 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 5/189 & 5/189 & 31/378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 \end{array} \right] \sigma^2$$

Com seis pontos no centro:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} 1/6 & -1/18 & -1/18 & -1/18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/18 & 4/63 & 1/126 & 1/126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/18 & 1/126 & 4/63 & 1/126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/18 & 1/126 & 1/126 & 4/63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/14 \end{array} \right] \sigma^2$$

c) Para $k = 4$, a equação da superfície é:

$$\begin{aligned} y_i = & \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} x_{1i}^2 + \hat{b}_{22} x_{2i}^2 + \hat{b}_{33} x_{3i}^2 + \hat{b}_{44} x_{4i}^2 + \hat{b}_{12} x_{1i} x_{2i} + \\ & + \hat{b}_{13} x_{1i} x_{3i} + \hat{b}_{14} x_{1i} x_{4i} + \hat{b}_{23} x_{2i} x_{3i} + \hat{b}_{24} x_{2i} x_{4i} + \\ & + \hat{b}_{34} x_{3i} x_{4i} + \hat{b}_1 x_{1i} + \hat{b}_2 x_{2i} + \hat{b}_3 x_{3i} + \hat{b}_4 x_{4i} . \end{aligned}$$

Com três pontos no centro:

1/3	-1/12	-1/12	-1/12	-1/12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1/12	47/1000	2/125	2/125	2/125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1/12	2/125	47/1000	2/125	2/125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1/12	2/125	2/125	47/1000	2/125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1/12	2/125	2/125	2/125	47/1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0	0	0

Com sete pontos no centro:

143/1000	-9/250	-9/250	-9/250	-9/250	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9/250	7/200	1/250	1/250	1/250	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9/250	1/250	7/200	1/250	1/250	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9/250	1/250	1/250	7/200	1/250	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9/250	1/250	1/250	1/250	7/200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21/500

De acordo, com as matrizes de dispersão, vistas anteriormente, podemos escrever:

1 - Para $k = 2$ e $i \neq j$:

1.1 - Fatorial:

$$V(\hat{a}_{ii}) = \frac{1}{2}\sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = \frac{1}{4}\sigma^2, V(\hat{a}_i) = \frac{1}{6}\sigma^2$$

1.2. - Composto central rotativo:

$$\text{Um ponto no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{11}{32}\sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{1}{4}\sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{1}{8}\sigma^2$$

$$\text{Três pontos no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{17}{96}\sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{1}{4}\sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{1}{8}\sigma^2$$

$$\text{Cinco pontos no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{23}{160}\sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{1}{4}\sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{1}{8}\sigma^2$$

2 - Para $k = 3$ e $i \neq j$:

2.1 - Fatorial:

$$V(\hat{a}_{ii}) = \frac{1}{6}\sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = \frac{1}{12}\sigma^2, V(\hat{a}_i) = \frac{1}{18}\sigma^2$$

2.2 - Composto central rotativo:

$$\text{Um ponto no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{59}{378}\sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{1}{8}\sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{1}{14}\sigma^2$$

$$\text{Três pontos no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{31}{378}\sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{1}{8}\sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{1}{14}\sigma^2$$

$$\text{Seis pontos no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{4}{63}\sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{1}{8}\sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{1}{14}\sigma^2$$

3 - Para $k = 4$ e $i \neq j$:

3.1 - Fatorial fracionado:

$$V(\hat{a}_{ii}) = \frac{1}{6}\sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = \frac{1}{9}\sigma^2, V(\hat{a}_i) = \frac{1}{18}\sigma^2$$

3.2.- Composto central rotativo:

$$\text{Um ponto no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{11}{125}\sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{31}{500}\sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{21}{500}\sigma^2$$

$$\text{Três pontos no centro: } V(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{47}{1000}\sigma^2, V(\hat{\beta}_{ij}) = \frac{31}{500}\sigma^2, V(\hat{\beta}_i) = \frac{21}{500}\sigma^2$$

$$\text{Sete pontos no centro: } V(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{7}{200}\sigma^2, V(\hat{\beta}_{ij}) = \frac{31}{500}\sigma^2, V(\hat{\beta}_i) = \frac{21}{500}\sigma^2$$

Mas é necessário, como salientam BOX e WILSON (1951) e CAMPOS (1967), fazer ajustamento para compensar a diferença de tamanho dos experimentos. Isto pode ser conseguido através da multiplicação da matriz de dispersão, em cada caso, pelo respectivo número de tratamentos. Assim, obtemos as variâncias seguintes, com $i \neq j$:

1 - Para $k = 2$:

1.1 - Fatorial:

$$V(\hat{\alpha}_{ii}) = \frac{9}{2}\sigma^2, V(\hat{\alpha}_{ij}) = \frac{9}{4}\sigma^2, V(\hat{\alpha}_i) = \frac{9}{6}\sigma^2$$

1.2 - Composto central rotativo:

$$\text{Um ponto no centro: } V(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{99}{32}\sigma^2, V(\hat{\beta}_{ij}) = \frac{9}{4}\sigma^2, V(\hat{\beta}_i) = \frac{9}{8}\sigma^2$$

$$\text{Três pontos no centro: } V(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{187}{96}\sigma^2, V(\hat{\beta}_{ij}) = \frac{11}{4}\sigma^2, V(\hat{\beta}_i) = \frac{11}{8}\sigma^2$$

$$\text{Cinco pontos no centro: } V(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{299}{160}\sigma^2, V(\hat{\beta}_{ij}) = \frac{13}{4}\sigma^2, V(\hat{\beta}_i) = \frac{13}{8}\sigma^2$$

2 - Para $k = 3$:

2.1 - Fatorial:

$$V(\hat{\alpha}_{ii}) = \frac{27}{6}\sigma^2, V(\hat{\alpha}_{ij}) = \frac{27}{12}\sigma^2, V(\hat{\alpha}_i) = \frac{27}{18}\sigma^2$$

2.2 - Composto central rotativo:

$$\text{Um ponto no centro: } V(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{885}{378}\sigma^2, V(\hat{\beta}_{ij}) = \frac{15}{8}\sigma^2, V(\hat{\beta}_i) = \frac{15}{14}\sigma^2$$

$$\text{Três pontos no centro: } V(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{527}{378}\sigma^2, V(\hat{\beta}_{ij}) = \frac{17}{18}\sigma^2, V(\hat{\beta}_i) = \frac{17}{14}\sigma^2$$

$$\text{Seis pontos no centro: } V(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{80}{63}\sigma^2, V(\hat{\beta}_{ij}) = \frac{20}{80}\sigma^2, V(\hat{\beta}_i) = \frac{20}{14}\sigma^2$$

3 - Para $k = 4$:

3.1 - Fatorial fracionado:

$$V(\hat{a}_{ii}) = \frac{27}{6} \sigma^2, \quad V(\hat{a}_{ij}) = \frac{27}{9} \sigma^2, \quad V(\hat{a}_i) = \frac{27}{18} \sigma^2$$

3.2 - Composto central rotativo:

$$\text{Um ponto no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{275}{125} \sigma^2, \quad V(\hat{b}_{ij}) = \frac{775}{500} \sigma^2, \quad V(\hat{b}_i) = \frac{525}{500} \sigma^2$$

$$\text{Três pontos no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{1269}{1000} \sigma^2, \quad V(\hat{b}_{ij}) = \frac{837}{500} \sigma^2, \quad V(\hat{b}_i) = \frac{567}{500} \sigma^2$$

$$\text{Sete pontos no centro: } V(\hat{b}_{ii}) = \frac{217}{200} \sigma^2, \quad V(\hat{b}_{ij}) = \frac{961}{500} \sigma^2, \quad V(\hat{b}_i) = \frac{651}{500} \sigma^2$$

Entretanto, mesmo assim a comparação não é correta, pois a escala não é a mesma para os fatores.

Segundo PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972), é preferível, no caso de ensaios com fertilizantes, simplesmente, ter em vista intervalos do mesmo comprimento para cada fator, nos dois delineamentos. Assim:

1 - Para $k = 2$, o comprimento do intervalo, correspondente aos extremos $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$ é igual $2\sqrt{2}$, deveria tornar-se igual ao intervalo (de comprimento 2) do fatorial. Isto pode ser feito pela multiplicação, por $\frac{1}{\sqrt{2}}$, das coordenadas dos pontos no delineamento composto central rotativo. Os novos valores das estimativas são dados a seguir:

1.1 - Fatorial:

$$\begin{aligned} V(\hat{a}_{ii}) &= \frac{9}{2} \sigma^2, \quad V(\hat{a}_{ij}) = \frac{9}{4} \sigma^2, \quad V(\hat{a}_i) = \frac{9}{6} \sigma^2 \\ &= 4,50 \sigma^2, \quad = 2,25 \sigma^2, \quad = 1,50 \sigma^2 \end{aligned}$$

1.2 - Composto central rotativo:

$$\begin{aligned} \text{Um ponto no centro: } V(\hat{b}_{ii}) &= \frac{396}{32} \sigma^2, \quad V(\hat{b}_{ij}) = \frac{36}{4} \sigma^2, \quad V(\hat{b}_i) = \frac{18}{8} \sigma^2 \\ &= 12,38 \sigma^2, \quad = 9,00 \sigma^2, \quad = 2,25 \sigma^2 \end{aligned}$$

Três pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = \frac{748}{96} \sigma^2$, $V(\hat{b}_{ij}) = \frac{44}{4} \sigma^2$, $V(\hat{b}_i) = \frac{22}{8} \sigma^2$
 $= 7,79 \sigma^2$, $= 11,00 \sigma^2$, $= 2,75 \sigma^2$

Cinco pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = \frac{1196}{160} \sigma^2$, $V(\hat{b}_{ij}) = \frac{52}{4} \sigma^2$, $V(\hat{b}_i) = \frac{26}{8} \sigma^2$
 $= 7,48 \sigma^2$, $= 13,00 \sigma^2$, $= 3,25 \sigma^2$

2 - Para $k = 3$, o comprimento do intervalo, correspondente aos extremos $(-\sqrt{3}, 0, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0, 0)$, igual a $2\sqrt{3}$, deveria tornar-se igual ao do intervalo (de comprimento 2) do fatorial. Isto pode ser feito multiplicando, por $\frac{1}{\sqrt{3}}$, as coordenadas dos pontos no delineamento composto central rotativo, logo:

2.1 - Fatorial:

$$V(\hat{a}_{ii}) = \frac{27}{6} \sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = \frac{27}{12} \sigma^2, V(\hat{a}_i) = \frac{27}{18} \sigma^2$$

$$= 4,50 \sigma^2, \quad = 2,25 \sigma^2, \quad = 1,50 \sigma^2$$

2.2 - Composto central rotativo:

Um ponto no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = \frac{7965}{378} \sigma^2$, $V(\hat{b}_{ij}) = \frac{135}{8} \sigma^2$, $V(\hat{b}_i) = \frac{45}{14} \sigma^2$
 $= 21,07 \sigma^2$, $= 16,88 \sigma^2$, $= 3,21 \sigma^2$

Três pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = \frac{4743}{378} \sigma^2$, $V(\hat{b}_{ij}) = \frac{153}{8} \sigma^2$, $V(\hat{b}_i) = \frac{51}{14} \sigma^2$
 $= 12,55 \sigma^2$, $= 19,12 \sigma^2$, $= 3,64 \sigma^2$

Seis pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = \frac{720}{63} \sigma^2$, $V(\hat{b}_{ij}) = \frac{180}{8} \sigma^2$, $V(\hat{b}_i) = \frac{60}{14} \sigma^2$
 $= 11,43 \sigma^2$, $= 22,50 \sigma^2$, $= 4,29 \sigma^2$

3 - Para $k = 4$, o comprimento do intervalo, correspondente aos extre-

mos $(-2, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0, 0)$, igual a 4, deveria tornar-se igual ao intervalo (de comprimento 2) do fatorial. Isto pode ser obtido multiplicando as coordenadas dos pontos no delineamento com posto central rotativo por $1/2$, assim:

3.1 - Fatorial fracionado:

$$\begin{aligned} V(\hat{a}_{ii}) &= \frac{27}{6} \sigma^2, & V(\hat{a}_{ij}) &= \frac{27}{9} \sigma^2, & V(\hat{a}_i) &= \frac{27}{18} \sigma^2 \\ &= 4,50 \sigma^2, & &= 3,00 \sigma^2, & &= 1,50 \sigma^2 \end{aligned}$$

3.2 - Composto central rotativo:

Um ponto no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = \frac{4400}{125} \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{12400}{500} \sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{2100}{500} \sigma^2$

$$= 35,20 \sigma^2, \quad = 24,80 \sigma^2, \quad = 4,20 \sigma^2$$

Três pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = \frac{20304}{1000} \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{13392}{500} \sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{2268}{500} \sigma^2$

$$= 20,30 \sigma^2, \quad = 26,78 \sigma^2, \quad = 4,54 \sigma^2$$

Sete pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = \frac{3472}{200} \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = \frac{15376}{500} \sigma^2, V(\hat{b}_i) = \frac{2604}{500} \sigma^2$

$$= 17,36 \sigma^2, \quad = 30,75 \sigma^2, \quad = 5,21 \sigma^2$$

6. CONCLUSÕES

Dos resultados e discussões, pode-se concluir que:

- 6.1 - As variâncias das estimativas dos coeficientes dos termos quadráticos foram sempre menores nos modelos do grupo fatorial 3^k do que nos delineamentos compostos centrais rotativos correspondentes, havendo, inclusive, casos em que a relação entre elas foi superior a 8.
- 6.2 - As variâncias das estimativas dos coeficientes, de interações e lineares, foram sempre maiores nos compostos centrais rotativos quando comparadas com as correspondentes, obtidas no grupo fatorial.
- 6.3 - À medida que se aumenta o número de pontos no centro dos delineamentos compostos centrais rotativos, as variâncias dos termos quadráticos diminuem, mas, mesmo assim, continuam maiores do que no fatorial correspondente.
- 6.4 - O aumento do número de pontos no centro do delineamento composto central rotativo chegou, em alguns casos, a reduzir à metade a variância dos termos quadráticos.
- 6.5 - As variâncias das estimativas dos termos, de interações e lineares, aumentaram com o acréscimo de pontos no centro do delineamento composto central rotativo.

6.6 - Do exposto anteriormente, conclui-se que o grupo fatorial 3^k , para $k = 2, 3, 4$, mostrou-se mais eficiente para o ajustamento de superfícies de resposta do que os delineamentos compostos centrais rotativos correspondentes, pois forneceu variâncias das estimativas dos coeficientes muito menores.

7. RESUMO

O presente trabalho visa a comparar a precisão das estimativas dos coeficientes dos modelos do grupo fatorial 3^k para $k = 2, 3, 4$, relativamente às estimativas correspondentes, obtidas dos modelos de delineamento composto central rotativo para $k = 2, 3, 4$, usando-se um ou mais pontos no centro.

A metodologia usada baseia-se nos trabalhos de BOX e WILSON (1951), CAMPOS (1967), PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972). Para cada delineamento, tendo em vista as diversas equações comumente utilizadas, foram obtidas as respectivas matrizes de dispersão. Pela comparação dos termos destas matrizes, após conseguir-se conveniente equivalência de escala, obtivemos as variâncias seguintes, com $i \neq j$:

1 - Para $k = 2$:

1.1 - Fatorial:

$$V(\hat{a}_{ii}) = 4,50 \sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = 2,25 \sigma^2, V(\hat{a}_i) = 1,50 \sigma^2$$

1.2 - Composto central rotativo:

Um ponto no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 12,38 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 9,00 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 2,25 \sigma^2$

Três pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 7,79 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 11,00 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 2,75 \sigma^2$

Cinco pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 7,48 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 13,00 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 3,25 \sigma^2$

2 - Para $k = 3$:

2.1 - Fatorial:

$$V(\hat{a}_{ii}) = 4,50 \sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = 2,25 \sigma^2, V(\hat{a}_i) = 1,50 \sigma^2$$

2.2 - Composto central rotativo:

Um ponto no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 21,07 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 16,88 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 3,21 \sigma^2$

Três pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 12,55 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 19,12 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 3,64 \sigma^2$

Seis pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 11,43 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 22,50 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 4,29 \sigma^2$

3 - Para $k = 4$:

3.1 - Fatorial fracionado:

$$V(\hat{a}_{ii}) = 4,50 \sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = 3,00 \sigma^2, V(\hat{a}_i) = 1,50 \sigma^2$$

3.2 - Composto central rotativo:

Um ponto no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 35,20 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 24,80 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 4,20 \sigma^2$

Três pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 20,30 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 26,78 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 4,54 \sigma^2$

Sete pontos no centro: $V(\hat{b}_{ii}) = 17,36 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 30,75 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 5,21 \sigma^2$

Logo, o grupo fatorial 3^k , para $k = 2, 3, 4$ é mais eficiente para o ajustamento de superfícies de resposta do que os delineamentos compostos centrais rotativos correspondentes, pois fornece variâncias das estimativas muito menores.

8. SUMMARY

This study aims at comparing the precision of the estimates of the coefficients from the models of factorial series 3^k for $k = 2, 3, 4$ with the corresponding estimates obtained from models of central composite rotatable design for $k = 2, 3, 4$, using one or more points in the center.

The methodology used was based on the works of BOX and WILSON (1951), CAMPOS (1967), PIMENTEL GOMES and CAMPOS (1972). For each design, considering the various equations usually used, the respective dispersion matrices were obtained. The variances for $i \neq j$, after comparing the terms of the matrices and obtaining convenient equivalence of scale were:

1 - For $k = 2$:

1.1 - Factorial:

$$V(\hat{a}_{ii}) = 4,50 \sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = 2,25 \sigma^2, V(\hat{a}_i) = 1,50 \sigma^2$$

1.2 - Central composite rotatable:

One point in the center: $V(\hat{b}_{ii}) = 12,38 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 9,00 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 2,25 \sigma^2$

Three points in the center: $V(\hat{b}_{ii}) = 7,79 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 11,00 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 2,75 \sigma^2$

Five points in the center: $V(\hat{b}_{ii}) = 7,48 \sigma^2, V(\hat{b}_{ij}) = 13,00 \sigma^2, V(\hat{b}_i) = 3,25 \sigma^2$

2 - For $k = 3$

2.1 - Factorial:

$$V(\hat{a}_{ii}) = 4,50\sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = 2,25\sigma^2, V(\hat{a}_i) = 1,50\sigma^2$$

2.2 - Central composite rotatable:

One point in the center: $V(\hat{b}_{ii})=21,07\sigma^2, V(\hat{b}_{ij})=16,88\sigma^2, V(\hat{b}_i)=3,21\sigma^2$

Three points in the center: $V(\hat{b}_{ii})=12,55\sigma^2, V(\hat{b}_{ij})=19,12\sigma^2, V(\hat{b}_i)=3,64\sigma^2$

Six points in the center: $V(\hat{b}_{ii})=11,43\sigma^2, V(\hat{b}_{ij})=22,50\sigma^2, V(\hat{b}_i)=4,29\sigma^2$

3 - For $k = 4$:

3.1 - Fractional replication:

$$V(\hat{a}_{ii}) = 4,50\sigma^2, V(\hat{a}_{ij}) = 3,00\sigma^2, V(\hat{a}_i) = 1,50\sigma^2$$

3.2 - Central composite rotatable:

One point in the center: $V(\hat{b}_{ii})=35,20\sigma^2, V(\hat{b}_{ij})=24,80\sigma^2, V(\hat{b}_i)=4,20\sigma^2$

Three points in the center: $V(\hat{b}_{ii})=20,30\sigma^2, V(\hat{b}_{ij})=26,78\sigma^2, V(\hat{b}_i)=4,54\sigma^2$

Seven points in the center: $V(\hat{b}_{ii})=17,36\sigma^2, V(\hat{b}_{ij})=30,75\sigma^2, V(\hat{b}_i)=5,21\sigma^2$

It is concluded that the factorial series 3^k , for $k = 2, 3, 4$ is more efficient than the corresponding central composite rotatable design because the estimates have smaller variance.

8. BIBLIOGRAFIA

1. BOSE, R. C. e DRAPER, N. R., 1959. Second order rotatable designs in three dimensions. Ann. Math. Statist. 30, 1097-1112.
2. BOX, G. E. P., 1954. The exploration and exploitation of response surfaces: some general considerations and examples. Biometrics 10, 16-60.
3. BOX, G. E. P. e BEHNKEN, D. W., 1960a. Simplex-Sum-designs: a class of second order rotatable designs derivable from those of first order. Ann. Math. Statist. 31, 838-864.
4. BOX, G. E. P e BEHNKEN, D. W., 1960b. Some new three level designs for the study of quantitative variables. Technometrics. 2, 455-475.
5. BOX, G. E. P. e HUNTER, J. S., 1954. Multifactor experimental designs. Institute of statistics Mimeo Series nº 92, Raleigh, North Carolina.
6. BOX, G. E. P. e HUNTER, J. S., 1957. Multifactorial experimental designs for exploring response surfaces. Ann. Math. Statist. 28, 195-241.
7. BOX, G. E. P. e HUNTER, J. S., 1961. The 2^{k-p} fractional factorial designs. Technometrics 3, 311-351.
8. BOX, G. E. P. e WILSON, K. B., 1951. On the Experimental Attainment of Optimum conditions. Jour. Roy. Stat. Soc. Series B. 13, 1-45.
9. CAMPOS, H., 1967. Aspectos da Aplicação das Superfícies de Resposta a Ensaios Fatoriais 3³ de Adubação (tese). Piracicaba, SP Brasil.
10. COCHRAN, W. G. e COX, G. M., 1957. Experimental Designs (2ª edição). John Wiley and Sons, Inc., 611 p., Nova York.
11. DAS, M. N., 1961. Construction of rotatable designs from factorial designs. J. Indian Soc. Agric. Statist. 13, 169-194.

12. DAS, M. N. e NARASIMAHN, V. L., 1962. Construction of rotatable designs through balanced incomplete block designs. Ann. Math. Statist. 33, 1421-1439.
13. DAS, M. N., 1963. On construction of second order rotatable designs through balanced incomplete block designs with blocks of unequal sizes: Cal. Stat. Assoc. Bult. 12, 31-46.
14. DRAPER, N. R., 1960. Second order rotatable designs in four or more dimensions. Ann. Math. Statist. 31, 23-33.
15. PIMENTEL GOMES, F. e CAMPOS, H., 1972. The Efficiency of Factorial 3^3 Designs as Compared to a Central Composite Rotatable Design. Potash Review, Fevereiro.
16. PIMENTEL GOMES, F. e NOGUEIRA, I. R., 1964. Regressão e Covariância (mimeografado). Piracicaba, SP.

A P Ê N D I C E

Quadro 1 - Sistema de equações para os 9 tratamentos de um fatorial 3^2 :

$$(-1, -1)Y_1 = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{12} - \hat{a}_1 - \hat{a}_2$$

$$(-1, 0)Y_2 = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} - \hat{a}_1$$

$$(-1, 1)Y_3 = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} - \hat{a}_{12} - \hat{a}_1 + \hat{a}_2$$

$$(0, -1)Y_4 = \hat{a}_0 + \hat{a}_{22} - \hat{a}_2$$

$$(0, 0)Y_5 = \hat{a}_0$$

$$(0, 1)Y_6 = \hat{a}_0 + \hat{a}_{22} + \hat{a}_2$$

$$(1, -1)Y_7 = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} - \hat{a}_{12} + \hat{a}_1 - \hat{a}_2$$

$$(1, 0)Y_8 = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_1$$

$$(1, 1)Y_9 = \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{12} + \hat{a}_1 + \hat{a}_2$$

- Matriz X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quadro 2 - Sistema de equações para os 27 tratamentos de um fatorial 3^3 :

$$\begin{aligned}
 (-1, -1, -1)Y_1 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{12} + \hat{a}_{13} + \hat{a}_{23} - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 - \hat{a}_3 \\
 (-1, -1, 0)Y_2 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{12} - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 \\
 (-1, -1, 1)Y_3 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{12} - \hat{a}_{13} - \hat{a}_{23} - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 + \hat{a}_3 \\
 (-1, 0, -1)Y_4 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{13} - \hat{a}_1 - \hat{a}_3 \\
 (-1, 0, 0)Y_5 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} - \hat{a}_1 \\
 (-1, 0, 1)Y_6 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{33} - \hat{a}_{13} - \hat{a}_1 + \hat{a}_3 \\
 (-1, 1, -1)Y_7 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} - \hat{a}_{12} + \hat{a}_{13} - \hat{a}_{23} - \hat{a}_1 + \hat{a}_2 - \hat{a}_3 \\
 (-1, 1, 0)Y_8 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} - \hat{a}_{12} - \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \\
 (-1, 1, 1)Y_9 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} - \hat{a}_{12} - \hat{a}_{13} + \hat{a}_{23} - \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 \\
 (0, -1, -1)Y_{10} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{23} - \hat{a}_2 - \hat{a}_3 \\
 (0, -1, 0)Y_{11} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{22} - \hat{a}_2 \\
 (0, -1, 1)Y_{12} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} - \hat{a}_{23} - \hat{a}_2 - \hat{a}_3 \\
 (0, 0, -1)Y_{13} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{33} - \hat{a}_3 \\
 (0, 0, 0)Y_{14} &= \hat{a}_0 \\
 (0, 0, 1)Y_{15} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{33} + \hat{a}_3 \\
 (0, 1, -1)Y_{16} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} - \hat{a}_{23} + \hat{a}_2 - \hat{a}_3 \\
 (0, 1, 0)Y_{17} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_2 \\
 (0, 1, 1)Y_{18} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{23} + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 \\
 (1, -1, -1)Y_{19} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} - \hat{a}_{12} - \hat{a}_{13} + \hat{a}_{23} + \hat{a}_1 - \hat{a}_2 - \hat{a}_3 \\
 (1, -1, 0)Y_{20} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} - \hat{a}_{12} + \hat{a}_1 - \hat{a}_2 \\
 (1, -1, 1)Y_{21} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} - \hat{a}_{12} + \hat{a}_{13} - \hat{a}_{23} + \hat{a}_1 - \hat{a}_2 + \hat{a}_3 \\
 (1, 0, -1)Y_{22} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{33} - \hat{a}_{13} + \hat{a}_1 - \hat{a}_3 \\
 (1, 0, 0)Y_{23} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_1 \\
 (1, 0, 1)Y_{24} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{13} + \hat{a}_1 + \hat{a}_3 \\
 (1, 1, -1)Y_{25} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{12} - \hat{a}_{13} - \hat{a}_{23} + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 - \hat{a}_3 \\
 (1, 1, 0)Y_{26} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{12} + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \\
 (1, 1, 1)Y_{27} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33} + \hat{a}_{12} + \hat{a}_{13} + \hat{a}_{23} + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3
 \end{aligned}$$

Quadro 3 - Sistema de equações para os 27 tratamentos de um fatorial fracionado 3⁴:

$$\begin{aligned}
 (-1, -1, -1, -1)Y_1 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{22} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} + \hat{\alpha}_{12} + \hat{\alpha}_{13} + \hat{\alpha}_{14} + \hat{\alpha}_{23} + \hat{\alpha}_{24} + \hat{\alpha}_{34} - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_4 \\
 (-1, 0, 1, 1)Y_2 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} - \hat{\alpha}_{13} - \hat{\alpha}_{14} + \hat{\alpha}_{34} - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 \\
 (-1, 1, 0, 0)Y_3 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{22} - \hat{\alpha}_{12} \\
 (0, -1, 1, 1)Y_4 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{22} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} - \hat{\alpha}_{23} - \hat{\alpha}_{24} + \hat{\alpha}_{34} - \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 \\
 (0, 0, 0, 0)Y_5 &= \hat{\alpha}_0 \\
 (0, 1, -1, -1)Y_6 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{22} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} - \hat{\alpha}_{23} - \hat{\alpha}_{24} + \hat{\alpha}_{34} + \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_4 \\
 (1, -1, 0, 0)Y_7 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{22} - \hat{\alpha}_{12} \\
 (1, 0, -1, -1)Y_8 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} - \hat{\alpha}_{13} - \hat{\alpha}_{14} + \hat{\alpha}_{34} + \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_4 \\
 (1, 1, 1, 1)Y_9 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{22} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} + \hat{\alpha}_{12} + \hat{\alpha}_{13} + \hat{\alpha}_{14} + \hat{\alpha}_{23} + \hat{\alpha}_{24} + \hat{\alpha}_{34} + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 \\
 (-1, -1, 1, 0)Y_{10} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{22} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} + \hat{\alpha}_{12} - \hat{\alpha}_{13} - \hat{\alpha}_{14} - \hat{\alpha}_{23} - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 \\
 (-1, 0, 0, -1)Y_{11} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{44} - \hat{\alpha}_{14} + \hat{\alpha}_{44} - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_4 \\
 (-1, 1, -1, 1)Y_{12} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{22} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} - \hat{\alpha}_{12} + \hat{\alpha}_{13} - \hat{\alpha}_{14} - \hat{\alpha}_{23} + \hat{\alpha}_{24} - \hat{\alpha}_{34} - \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 \\
 (0, -1, 0, -1)Y_{13} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{22} + \hat{\alpha}_{44} + \hat{\alpha}_{24} - \hat{\alpha}_4 \\
 (0, 0, -1, 1)Y_{14} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} - \hat{\alpha}_{34} - \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 \\
 (0, 1, 1, 0)Y_{15} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{22} + \hat{\alpha}_{33} + \hat{\alpha}_{44} + \hat{\alpha}_{23} + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3
 \end{aligned}$$

Quadro 3 - continuação

(1, -1, -1, 1)Y ₁₆	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{22} + \hat{\epsilon}_{33} + \hat{\epsilon}_{44} - \hat{\epsilon}_{12} - \hat{\epsilon}_{13} + \hat{\epsilon}_{14} + \hat{\epsilon}_{23} - \hat{\epsilon}_{24} - \hat{\epsilon}_{34} + \hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_3 + \hat{\epsilon}_4$
(1, 0, 1, 0)Y ₁₇	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{33} + \hat{\epsilon}_{13}$
(1, 1, 0, -1)Y ₁₈	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{22} + \hat{\epsilon}_{44} + \hat{\epsilon}_{12} - \hat{\epsilon}_{14} - \hat{\epsilon}_{24} + \hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_4$
(-1, -1, 0, 1)Y ₁₉	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{22} + \hat{\epsilon}_{44} + \hat{\epsilon}_{12} - \hat{\epsilon}_{14} - \hat{\epsilon}_{24} + \hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2 + \hat{\epsilon}_4$
(-1, 0, -1, 0)Y ₂₀	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{33} + \hat{\epsilon}_{13}$
(-1, 1, 1, -1)Y ₂₁	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{22} + \hat{\epsilon}_{33} + \hat{\epsilon}_{44} - \hat{\epsilon}_{12} + \hat{\epsilon}_{13} + \hat{\epsilon}_{14} + \hat{\epsilon}_{23} - \hat{\epsilon}_{24} - \hat{\epsilon}_{34} - \hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_2 + \hat{\epsilon}_3 - \hat{\epsilon}_4$
(0, -1, -1, 0)Y ₂₂	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{22} + \hat{\epsilon}_{33}$
(0, 0, 1, -1)Y ₂₃	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{33} + \hat{\epsilon}_{44} - \hat{\epsilon}_{34} + \hat{\epsilon}_3 - \hat{\epsilon}_4$
(0, 1, 0, 1)Y ₂₄	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{22} + \hat{\epsilon}_{44} + \hat{\epsilon}_{24} + \hat{\epsilon}_2 + \hat{\epsilon}_4$
(1, -1, -1, -1)Y ₂₅	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{22} + \hat{\epsilon}_{33} + \hat{\epsilon}_{44} - \hat{\epsilon}_{12} + \hat{\epsilon}_{13} - \hat{\epsilon}_{14} - \hat{\epsilon}_{23} + \hat{\epsilon}_{24} - \hat{\epsilon}_{34} + \hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2 + \hat{\epsilon}_3 - \hat{\epsilon}_4$
(1, 0, 0, 1)Y ₂₆	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{44}$
(1, 1, -1, 0)Y ₂₇	=	$\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{22} + \hat{\epsilon}_{33} + \hat{\epsilon}_{12} - \hat{\epsilon}_{13} - \hat{\epsilon}_{23} + \hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_3$

Quadro 3 - continuação

- Matriz X:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	0	1	1	0	-1	-1	0	0	1	-1	0	1	1
1	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	-1	-1	1	0	-1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	-1	-1	1	0	1	-1	-1
1	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
1	1	0	1	1	0	-1	-1	0	0	1	1	0	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1
1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	-1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	-1	0	-1	0	1	1	0	-1
1	1	1	0	1	1	0	-1	0	-1	0	-1	-1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	-1	0	-1	0	0	1	1	-1	0

Quadro 4 - Sistema de equações para os 9 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$$\begin{aligned}
 (-\sqrt{2}, 0)Y_1 &= \hat{b}_0 + 2\hat{b}_{11} && -\sqrt{2}\hat{b}_1 \\
 (0, -\sqrt{2})Y_2 &= \hat{b}_0 && + 2\hat{b}_{22} && -\sqrt{2}\hat{b}_2 \\
 (\sqrt{2}, 0)Y_3 &= \hat{b}_0 + 2\hat{b}_{11} && +\sqrt{2}\hat{b}_1 \\
 (0, \sqrt{2})Y_4 &= \hat{b}_0 && + 2\hat{b}_{22} && +\sqrt{2}\hat{b}_2 \\
 (-1, -1)Y_5 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 \\
 (1, -1)Y_6 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 \\
 (1, 1)Y_7 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \\
 (-1, 1)Y_8 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \\
 (0, 0)Y_9 &= \hat{b}_0
 \end{aligned}$$

- Matriz X:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\
 1 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Quadro 5 - Sistema de equações para os 11 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$$\begin{aligned}
 (-\sqrt{2}, 0)Y_1 &= \hat{\beta}_0 + 2\hat{\beta}_{11} && -\sqrt{2}\hat{\beta}_1 \\
 (0, -\sqrt{2})Y_2 &= \hat{\beta}_0 + 2\hat{\beta}_{22} && -\sqrt{2}\hat{\beta}_2 \\
 (\sqrt{2}, 0)Y_3 &= \hat{\beta}_0 + 2\hat{\beta}_{11} && +\sqrt{2}\hat{\beta}_1 \\
 (0, \sqrt{2})Y_4 &= \hat{\beta}_0 + 2\hat{\beta}_{22} && +\sqrt{2}\hat{\beta}_2 \\
 (-1, -1)Y_5 &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22} + \hat{\beta}_{12} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\
 (1, -1)Y_6 &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22} - \hat{\beta}_{12} + \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\
 (1, 1)Y_7 &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22} + \hat{\beta}_{12} + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \\
 (-1, 1)Y_8 &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22} + \hat{\beta}_{12} - \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \\
 (0, 0)Y_9 &= \hat{\beta}_0 \\
 (0, 0)Y_{10} &= \hat{\beta}_0 \\
 (0, 0)Y_{11} &= \hat{\beta}_0
 \end{aligned}$$

- Matriz X:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\
 1 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Quadro 6 - Sistema de equações para os 13 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$$\begin{aligned}
 (-\sqrt{2}, 0)Y_1 &= \hat{b}_0 + 2\hat{b}_{11} && -\sqrt{2}\hat{b}_1 \\
 (0, -\sqrt{2})Y_2 &= \hat{b}_0 && + 2\hat{b}_{22} && -\sqrt{2}\hat{b}_2 \\
 (\sqrt{2}, 0)Y_3 &= \hat{b}_0 + 2\hat{b}_{11} && + \sqrt{2}\hat{b}_1 \\
 (0, \sqrt{2})Y_4 &= \hat{b}_0 && 2\hat{b}_{22} && + \sqrt{2}\hat{b}_2 \\
 (-1, -1)Y_5 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 \\
 (1, -1)Y_6 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 \\
 (1, 1)Y_7 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \\
 (-1, 1)Y_8 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \\
 (0, 0)Y_9 &= \hat{b}_0 \\
 (0, 0)Y_{10} &= \hat{b}_0 \\
 (0, 0)Y_{11} &= \hat{b}_0 \\
 (0, 0)Y_{12} &= \hat{b}_0 \\
 (0, 0)Y_{13} &= \hat{b}_0
 \end{aligned}$$

- Matriz X:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\
 1 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Quadro 7 - Sistema de equações para os 15 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$$\begin{aligned}
 (-\sqrt{3}, 0, 0)Y_1 &= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{11} & -\sqrt{3}\hat{b}_1 \\
 (0, \sqrt{3}, 0)Y_2 &= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{22} & -\sqrt{3}\hat{b}_2 \\
 (0, 0, \sqrt{3})Y_3 &= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{33} & -\sqrt{3}\hat{b}_3 \\
 (\sqrt{3}, 0, 0)Y_4 &= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{11} & +\sqrt{3}\hat{b}_1 \\
 (0, \sqrt{3}, 0)Y_5 &= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{22} & +\sqrt{3}\hat{b}_2 \\
 (0, 0, \sqrt{3})Y_6 &= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{33} & +\sqrt{3}\hat{b}_3 \\
 (-1, -1, -1)Y_7 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} & -\hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 \\
 (-1, -1, 1)Y_8 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} - \hat{b}_{33} & -\hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 \\
 (-1, 1, -1)Y_9 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} - \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} & -\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 \\
 (1, -1, -1)Y_{10} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} - \hat{b}_{22} - \hat{b}_{33} & -\hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 \\
 (1, -1, 1)Y_{11} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} - \hat{b}_{33} & -\hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 \\
 (1, 1, -1)Y_{12} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} - \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} & -\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 \\
 (-1, 1, 1)Y_{13} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} & -\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 \\
 (1, 1, 1)Y_{14} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} & +\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 \\
 (0, 0, 0)Y_{15} &= \hat{b}_0 &
 \end{aligned}$$

Quadro 8 - Sistema de equações para os 17 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$(-\sqrt{3}, 0, 0)Y_1$	$= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{11}$	$-\sqrt{3}\hat{b}_1$	
$(0, -\sqrt{3}, 0)Y_2$	$= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{22} + 3\hat{b}_{33}$	$-\sqrt{3}\hat{b}_2$	$-\sqrt{3}\hat{b}_3$
$(0, 0, -\sqrt{3})Y_3$	$= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{11}$	$+\sqrt{3}\hat{b}_1$	$+\sqrt{3}\hat{b}_2 + \sqrt{3}\hat{b}_3$
$(\sqrt{3}, 0, 0)Y_4$	$= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{22} + 3\hat{b}_{33}$	$+\sqrt{3}\hat{b}_1$	$+\sqrt{3}\hat{b}_2 + \sqrt{3}\hat{b}_3$
$(0, \sqrt{3}, 0)Y_5$	$= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{11}$	$+\sqrt{3}\hat{b}_1$	$+\sqrt{3}\hat{b}_2 + \sqrt{3}\hat{b}_3$
$(0, 0, \sqrt{3})Y_6$	$= \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{22} + 3\hat{b}_{33}$	$+\sqrt{3}\hat{b}_1$	$+\sqrt{3}\hat{b}_2 + \sqrt{3}\hat{b}_3$
$(-1, -1, -1)Y_7$	$= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33}$	$-\hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3$	$-\hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3$
$(-1, -1, 1)Y_8$	$= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33}$	$-\hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3$	$-\hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3$
$(-1, 1, -1)Y_9$	$= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33}$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3$
$(1, -1, -1)Y_{10}$	$= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33}$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3$
$(1, -1, 1)Y_{11}$	$= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33}$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3$
$(1, 1, -1)Y_{12}$	$= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33}$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3$
$(-1, 1, 1)Y_{13}$	$= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33}$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3$
$(1, 1, 1)Y_{14}$	$= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33}$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3$	$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3$
$(0, 0, 0)Y_{15}$	$= \hat{b}_0$		
$(0, 0, 0)Y_{16}$	$= \hat{b}_0$		
$(0, 0, 0)Y_{17}$	$= \hat{b}_0$		

Quadro 9 - Sistema de equações para os 20 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$$\begin{array}{r}
 (-\sqrt{3}, 0, 0)Y_1 = \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{11} \\
 (0, -\sqrt{3}, 0)Y_2 = \hat{b}_0 \\
 (0, 0, -\sqrt{3})Y_3 = \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{22} + 3\hat{b}_{33} \\
 (\sqrt{3}, 0, 0)Y_4 = \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{11} \\
 (0, \sqrt{3}, 0)Y_5 = \hat{b}_0 \\
 (0, 0, \sqrt{3})Y_6 = \hat{b}_0 + 3\hat{b}_{22} + 3\hat{b}_{33} \\
 (-1, -1, -1)Y_7 = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{33} \\
 (-1, -1, 1)Y_8 = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{22} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{33} \\
 (-1, 1, -1)Y_9 = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{22} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{33} \\
 (1, -1, -1)Y_{10} = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{33} \\
 (1, -1, 1)Y_{11} = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{22} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{33} \\
 (1, 1, -1)Y_{12} = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{22} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{33} \\
 (-1, 1, 1)Y_{13} = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{33} \\
 (1, 1, 1)Y_{14} = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{33} \\
 (0, 0, 0)Y_{15} = \hat{b}_0 \\
 (0, 0, 0)Y_{16} = \hat{b}_0 \\
 (0, 0, 0)Y_{17} = \hat{b}_0 \\
 (0, 0, 0)Y_{18} = \hat{b}_0 \\
 (0, 0, 0)Y_{19} = \hat{b}_0 \\
 (0, 0, 0)Y_{20} = \hat{b}_0
 \end{array}$$

Quadro 10 - Sistema de equações para os 25 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$$\begin{aligned}
 (-1, -1, -1, -1)Y_1 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, -1, -1, -1)Y_2 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, -1, -1)Y_3 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, 1, -1, -1)Y_4 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, 1, -1)Y_5 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, -1, 1, -1)Y_6 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, 1, -1)Y_7 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, 1, 1, -1)Y_8 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, 1, 1)Y_9 &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (1, -1, 1, 1)Y_{10} &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, -1, 1)Y_{11} &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (1, 1, -1, 1)Y_{12} &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, 1, 1)Y_{13} &= \hat{b}_o + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4
 \end{aligned}$$

Quadro 10 - continuação

(1, -1, 1, 1)Y ₁₄	= b ₀ + b ₁₁ + b ₂₂ + b ₃₃ + b ₄₄ - b ₁₂ + b ₁₃ + b ₁₄ - b ₂₃ - b ₂₄ + b ₃₄ + b ₁ - b ₂ + b ₃ + b ₄
(-1, 1, 1, 1)Y ₁₅	= b ₀ + b ₁₁ + b ₂₂ + b ₃₃ + b ₄₄ - b ₁₂ - b ₁₃ - b ₁₄ + b ₂₃ + b ₂₄ + b ₃₄ - b ₁ + b ₂ + b ₃ + b ₄
(1, 1, 1, 1)Y ₁₆	= b ₀ + b ₁₁ + b ₂₂ + b ₃₃ + b ₄₄ + b ₁₂ + b ₁₃ + b ₁₄ + b ₂₃ + b ₂₄ + b ₃₄ + b ₁ + b ₂ + b ₃ + b ₄
(-2, 0, 0, 0)Y ₁₇	= b ₀ + 4b ₁₁ - 2b ₁
(0, -2, 0, 0)Y ₁₈	= b ₀ + 4b ₂₂ - 2b ₂
(0, 0, -2, 0)Y ₁₉	= b ₀ + 4b ₃₃ - 2b ₃
(0, 0, 0, -2)Y ₂₀	= b ₀ + 4b ₄₄ - 2b ₄
(2, 0, 0, 0)Y ₂₁	= b ₀ + 4b ₁₁ + 2b ₁
(0, 2, 0, 0)Y ₂₂	= b ₀ + 4b ₂₂ + 2b ₂
(0, 0, 2, 0)Y ₂₃	= b ₀ + 4b ₃₃ + 2b ₃
(0, 0, 0, 2)Y ₂₄	= b ₀ + 4b ₄₄ + 2b ₄
(0, 0, 0, 0)Y ₂₅	= b ₀

Quadro 11 - Sistema de equações para os 27 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$$\begin{aligned}
 (-1, -1, -1, -1)Y_1 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, -1, -1, -1)Y_2 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, -1, -1)Y_3 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, 1, -1, -1)Y_4 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, 1, -1)Y_5 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, -1, 1, -1)Y_6 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, 1, -1)Y_7 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, 1, 1, -1)Y_8 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, -1, 1)Y_9 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (1, -1, -1, 1)Y_{10} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, -1, 1)Y_{11} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (1, 1, -1, 1)Y_{12} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, 1, 1)Y_{13} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4
 \end{aligned}$$

Quadro 11 - continuação

(1, -1, 1, 1)	$1)Y_{14} = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4$
(-1, 1, 1, 1)	$1)Y_{15} = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4$
(1, 1, 1, 1)	$1)Y_{16} = \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4$
(-2, 0, 0, 0)	$0)Y_{17} = \hat{b}_0 + 4\hat{b}_{11} + 2\hat{b}_1$
(0, -2, 0, 0)	$0)Y_{18} = \hat{b}_0 + 4\hat{b}_{22} + 2\hat{b}_2$
(0, 0, -2, 0)	$0)Y_{19} = \hat{b}_0 + 4\hat{b}_{33} + 2\hat{b}_3$
(0, 0, 0, -2)	$0)Y_{20} = \hat{b}_0 + 4\hat{b}_{44} + 2\hat{b}_4$
(2, 0, 0, 0)	$0)Y_{21} = \hat{b}_0 + 4\hat{b}_{11} + 2\hat{b}_1$
(0, 2, 0, 0)	$0)Y_{22} = \hat{b}_0 + 4\hat{b}_{22} + 2\hat{b}_2$
(0, 0, 2, 0)	$0)Y_{23} = \hat{b}_0 + 4\hat{b}_{33} + 2\hat{b}_3$
(0, 0, 0, 2)	$0)Y_{24} = \hat{b}_0 + 4\hat{b}_{44} + 2\hat{b}_4$
(0, 0, 0, 0)	$0)Y_{25} = \hat{b}_0$
(0, 0, 0, 0)	$0)Y_{26} = \hat{b}_0$
(0, 0, 0, 0)	$0)Y_{27} = \hat{b}_0$

Quadro 12 - Sistema de equações para os 31 tratamentos de um delineamento composto central rotativo:

$$\begin{aligned}
 (-1, -1, -1, -1)Y_1 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, -1, -1, -1)Y_2 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, -1, -1)Y_3 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, 1, -1, -1)Y_4 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, 1, -1)Y_5 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, -1, 1, -1)Y_6 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, 1, -1)Y_7 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (1, 1, 1, -1)Y_8 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 - \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, 1, 1)Y_9 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (1, -1, -1, 1)Y_{10} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, -1, 1)Y_{11} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (1, 1, -1, 1)Y_{12} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} - \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (-1, -1, 1, 1)Y_{13} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} + \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (1, -1, 1, 1)Y_{14} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} + \hat{b}_{13} + \hat{b}_{14} - \hat{b}_{23} - \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} + \hat{b}_1 - \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4 \\
 (-1, 1, 1, 1)Y_{15} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} + \hat{b}_{33} + \hat{b}_{44} - \hat{b}_{12} - \hat{b}_{13} - \hat{b}_{14} + \hat{b}_{23} + \hat{b}_{24} + \hat{b}_{34} - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4
 \end{aligned}$$

Quadro 12 - continuação

(1, 1, 1, 1, 1)Y ₁₆	=	b ₀	+	b ₁₁	+	b ₂₂	+	b ₃₃	+	b ₄₄	+	b ₁₂	+	b ₁₃	+	b ₁₄	+	b ₂₃	+	b ₂₄	+	b ₃₄	+	b ₁	+	b ₂	+	b ₃	+	b ₄					
(-2, 0, 0, 0, 0)Y ₁₇	=	b ₀	+	4b ₁₁																				- 2b ₁											
(0, -2, 0, 0, 0)Y ₁₈	=	b ₀	+	4b ₂₂																					- 2b ₂										
(0, 0, -2, 0, 0)Y ₁₉	=	b ₀	+	4b ₃₃																															
(0, 0, 0, -2, 0)Y ₂₀	=	b ₀	+	4b ₄₄																															
(2, 0, 0, 0, 0)Y ₂₁	=	b ₀	+	4b ₁₁																															
(0, 2, 0, 0, 0)Y ₂₂	=	b ₀	+	4b ₂₂																															
(0, 0, 2, 0, 0)Y ₂₃	=	b ₀	+	4b ₃₃																															
(0, 0, 0, 2, 0)Y ₂₄	=	b ₀	+	4b ₄₄																															
(0, 0, 0, 0, 0)Y ₂₅	=	b ₀																																	
(0, 0, 0, 0, 0)Y ₂₆	=	b ₀																																	
(0, 0, 0, 0, 0)Y ₂₇	=	b ₀																																	
(0, 0, 0, 0, 0)Y ₂₈	=	b ₀																																	
(0, 0, 0, 0, 0)Y ₂₉	=	b ₀																																	
(0, 0, 0, 0, 0)Y ₃₀	=	b ₀																																	
(0, 0, 0, 0, 0)Y ₃₁	=	b ₀																																	

