OBTENÇÃO DE FRAÇÕES DE FATORIAIS DE RESOLUÇÃO V

IVONE VENANZI LIMA

Orientador: Prof. Dr. CÁSSIO ROBERTO DE MELO GODOI

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Fevereiro - 1985

A meu pai, Orlando,

A minha mãe, Iracema,

Ao Luiz e à Camila,

DEDICO.

Í N D I C E

Pág.

OBTENÇÃO DE FRAÇÕES DE FATORIAIS DE RESOLUÇÃO V

Candidata: Ivone Venanzi Lima

Orientador: Prof. Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi

R E S U M O

No presente trabalho fazemos um estudo sobre os experimentos de resolução V. Mostramos como obter geradores tais, que efeitos principais e interações de 2 fatores não sejam confundidos.

Inicialmente obtemos tais geradores sem nenhum método específico, ou seja, através de tentativas, observando o porquê de alguns autores denominarem tais experimentos de planos de 5 letras. Obtidos os geradores adequados, apresentamos os tipos possíveis de experimentos por eles gerados. Isso tudo é feito através de exemplos para a série fatorial 2^n, n = 3, 4, ..., 8. Em seguida, apresentamos um método através do qual obtemos diretamente tais geradores. Exemplificamos através dos fatoriais 2^n, n = 8, 9, 10, 11, apresentando para cada caso, uma relação identidade para cada uma das frações de fatoriais possíveis e o quadro da análise da variância correspondente. Após isso mos

tramos como obter experimentos de resolução V em blocos casualizados, e finalmente apresentamos um exemplo numérico utilizando a fração de fatorial 2_V^{6-1}.

Para a série de fatorial 3^n generalizamos o que vimos para a série 2^n, utilizando os fatoriais 3^5 e 3^6 e as frações de fatoriais possíveis correspondentes.

Quanto à série 4^n apresentamos apenas como os Corpos de Galois são tratados para a obtenção de experimentos de resolução V.

No final concluimos que o fatorial fracionado deve ser utilizado sempre com muita cautela, e que o experimentador deve tomar certos cuidados, entre outros, na escolha dos geradores e conhecimento dos aliados dos efeitos fatoriais.

Observamos também que entre os experimentos de menor ordem, o 2_V^{5-1} e o 3_V^{5-1} são dos que apresentam maior valor prático.

OBTAINING FRACTIONS OF FACTORIAL DESIGNS OF RESOLUTION V

Candidate: Ivone Venanzi Lima

Adviser: Prof. Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi

S U M M A R Y

In this dissertation a study is made about resolution V experiments. We show techniques to obtain such designs with generators where main effects and 2 factor interaction are not confounded.

Inicially generators are obtain without any specific method, or, in other words, through trial and error principle, showing why some authors call such design 5 letters plans. After finding the generators, we present the possible types of designs generated by them. All this is done through examples for the 2^n, n = 3, 4, ..., 8 serie. Furthermore we show a method to find directly the generators. Examples are the 2^n, n = 8, 9, 10 and 11 factorial experiments, presenting for each case an identity relation for each one of the fraction of the possible factorial and the analysis of variance generated by the design. After

that we deal with how to obtain resolution V experiments in blocks and finally, a numerical example is detailed using a 2_V^{6-1} fraction.

For the 3^n serie we present the corresponding generalization using 3^5 and 3^6 factorial experiments and its possible fractions.

In the 4^n series only the necessary Galois field stuff is considered when fractions of resolution V are to be obtained.

At the end we have concluded that the fractional factorial must be utilized with much caution, and the researchers must be careful, for instance, in choosing the generators and the knowledge of the factorial effects aliases.

We have also observed that among the experiments of small order, the 2_V^{5-1} and the 3_V^{5-1} are those presenting the best practical value.

1. INTRODUÇÃO

Um problema bastante frequente em experimentação é o estudo de cada um dos fatores presentes no experimento, feito através de experimentos fatoriais. Esses experimentos apesar de serem de grande valia nas mais diversas áreas de pesquisa, foram utilizados inicialmente em experimentos de produção agrícola. Para se determinar, por exemplo, o aumento da produção de café em determinada região, pode-se tentar medir os efeitos sobre a produção de quantias diferentes de nutrientes adicionados ao solo, como por exemplo, nitrogênio, fósforo e potássio.

Os experimentos fatoriais são altamente eficientes, pois toda observação contém informação sobre todos os fatores incluídos no experimento, além do fato de estudarem o relacionamento entre efeitos de fatores distintos.

Porém, à medida que aumenta o número de fatores em estudo, cresce, e muito rapidamente, o número de combinações de trata mentos, acarretando uma série de problemas para o experimentador, dentre os quais a perda de eficiência, já que à medida que aumenta o tamanho do bloco, aumenta também a heterogeneidade dentro dele. Por exemplo, 10 fatores testados em 2 níveis cada, nos dão 1024 combinações de tratamentos, sendo que apenas 10 dos graus de liberdade correspondem a efeitos principais, e 45 a interações de 2 fatores. O número de graus de liberdade restante corresponde a interações de alta ordem que não raro são atribuídas ao resíduo. Nesse caso, portanto, o resíduo conta com 969 graus de liberdade, o que representa um número bem superior ao necessário para uma estimativa adequada da variância residual. Além disso, dificilmente se consegue concluir experimentos envolvendo tantas parcelas, e é justamente para se reduzir o número de parcelas que o fracionamento do fatorial é utilizado. Através dele certas interações são consideradas insignificantes (entendendo-se por interações insignificantes aquelas de mesma ordem de grandeza dos efeitos atribuídos ao resíduo, e portanto não necessariamente nulas), e apenas uma seleção das possíveis combinações de tratamentos é utilizada no experimento. Convém observar, que quando isso não acontece, a estrutura fatorial completa é uma maneira lógica de descrever os resultados experimentais.

Quando o objetivo do experimentador é determinar quais os fatores que produzem certo resultado, e qual sua importância relativa, ele deve, através de observação e bom-senso, obter uma idéia de quais os fatores que podem ter alguma influência na característica de seu interesse.

Uma vez determinados esses fatores, é feito um estudo detalhado sobre eles, a fim de se obter as respostas aos tratamentos.

Em tais casos a utilização dos fatoriais fracionados de resolução V tem sido feita com bastante sucesso, principalmente em se tratando de fatoriais da série 2^n .

Isto posto, pretendemos em nosso trabalho mostrar como obter de forma sistemática as frações de fatoriais.

No caso do experimentador deparar-se com um experimento no qual o número de combinações de tratamentos é bastante elevado, ou ainda, um experimento no qual interessam os efeitos de apenas algumas das combinações de tratamentos em estudos, ele poderá, sem nenhuma dificuldade, obter a fração desejada, ou seja, aquela que inclui as combinações de tratamentos de seu interesse.

Esperamos com isso poder contribuir com os experimentadores que fazem uso dos fatoriais fracionados.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. Experimentos Fatoriais

COCHRAN e COX (1957) citam as vantagens e desvantagens da utilização de tais experimentos. Apresentam método para cálculo de efeitos principais e interações, ilustrando para os fatoriais 2^2 e 2^3, e generalizando para o 2^n. Apresentam e ilustram o método de Yates para cálculo dos efeitos fatoriais totais. Sobre os fatoriais da série 3^n apresentam um exemplo numérico para o 3^2 e generalizam o método de análise para o 3^n.

FISHER (1971) mostra as vantagens resultantes da combinação dos diferentes fatores em estudo em determinado experimento e comenta o confundimento.

PIMENTEL GOMES (1978) comenta que os experimentos fatoriais são, em geral, mais eficientes do que os experimentos simples com um único conjunto de tratamentos, e permitem tirar conclusões mais gerais. Afirma que o principal defeito de tais experimentos é que o número de tratamentos aumenta rapidamente, o que faz com que percam bastante sua eficiência. A fim de contornar tal dificuldade sugere o uso de blocos incompletos juntamente com o sistema de confundimento. Exemplifica através de um 2^3 e de um 2^2.

JOHN (1971) apresenta os experimentos com 2 fatores e generaliza para casos em que aparecem 2 ou mais fatores, comentando porém, que os experimentos fatoriais da série 2^n, $n \geq 10$, apenas ocasionalmente apresentam algum valor. Sobre o termo "replicação", utilizado com bastante frequência nos textos sobre experimentos fatoriais com replicação fracionada, explica que ele ocorre na nomenclatura de delineamento experimental, geralmente, com mais de um significado. Porém, no contexto de experimento fatorial uma replicação significa uma cópia completa, repetição, ou cópia do delineamento básico com uma observação por parcela. Cita como exemplo o caso em que se deseja testar 5 variedades de sementes, utilizando 4 fertilizantes distintos, e tendo 3 parcelas para cada combinação semente-fertilizante. Num experimento completamente aleatorizado são 60 parcelas distribuídas aleatoriamente e não faz sentido falar em replicação. Dizer que o experimento tem 3 replicações implica que existem 3 grupos de 20 parcelas. Cada um desses grupos constitui uma replicação, pois consiste de uma simples parcela para cada combinação semente-fertilizante.

Comenta sobre os efeitos fatoriais representados por uma mesma comparação e denominados "aliados".

Apresenta o algorítmo de Yates para cálculo de efeitos fatoriais totais no caso geral 2^n.

Com respeito aos fatoriais da série 3^n, apresenta a análise da variância e um exemplo numérico para o 3^2.

KEMPTHORNE (1975) inicia falando nos experimentos que envolvem vários fatores. Em seguida fala no 2^2, no 2^3 e generaliza para o 2^n. Faz o mesmo com os experimentos fatoriais da série 3^n, através do 3^2 e do 3^3.

SNEDECOR e COCHRAN (1978) dizem que a experimentação fatorial é um método que os experimentadores gostam de utilizar para investigar os relacionamentos entre os efeitos de fatores distintos. Apresentam um estudo teórico e numérico sobre o 2^2.

2.2. Confundimento

BOSE (1947a) ilustra, a partir do teorema de Fisher, o procedimento para se determinar o número máximo possível de fatores que se pode acomodar num fatorial simétrico onde cada fator aparece em $s = p^n$ níveis (p: primo ou potência de primo; n: inteiro positivo) e cada bloco tem tamanho s^r(r: inteiro positivo), quando não se deseja confundir graus de liberdade correspondentes a efeitos principais ou interações de t ou menos fatores.

BOSE e KISHEN (1940) falam sobre o problema do confundimento nos delineamentos fatoriais simétricos s^m (s: primo ou potência de primo; m: inteiro qualquer). Enunciam o princípio de intera ção generalizada. Apresentam o procedimento para obtenção de arranjos confundidos em blocos de s^{m-k} ($k < m$) parcelas, e ilustram para os casos em que $m = 3$, 4 em blocos de s^2 e s parcelas. Em cada caso apresentam tabelas com os tipos possíveis de confundimento e partição dos graus de liberdade.

COCHRAN e COX (1957) apresentam o 2^3 em blocos de 4 unidades, confundindo a interação de 3 fatores; o 2^4 em blocos de 8 unidades, confundindo a interação de 4 fatores. Com relação aos fatoriais da série 3^n, apresentam o 3^2 em blocos de 3 unidades, confundindo os 2 graus de liberdade da interação de 2 fatores AB, e o 3^3 em blocos de 9 unidades, confundindo os 2 graus de liberdade correspondentes à interação ABC. Dizem que as possibilidades para confundimento são muito mais restritas com o sistema 3^n do que com o sistema 2^n.

PIMENTEL GOMES (1978) fala no confundimento de um 2^3 em blocos de 4 unidades, confundindo a interação de 3 fatores. No caso da série 3^n, confunde o 3^2 em blocos de 3 unidades, através de 2 graus de liberdade da interação de 2 fatores, e o 3^3 em blocos de 9 unidades através de 2 graus de liberdade da interação de 3 fatores NPK.

JOHN (1971) apresenta o confundimento e ilustra com o 2^3 em blocos de 4 unidades. Em seguida expõe o problema teoricamente, falando do confundimento nos fatoriais 2^n (n: inteiro positivo; $k < n$) em blocos de 2^{n-k} unidades. Com relação aos fatoriais da série 3^n, apresenta o 3^3 em blocos de 9 unidades, confundindo os 2 graus de liberdade correspondentes a AB^2C^2. Comenta sobre o 3^3 em blocos de 3 unidades confundindo 4 graus de liberdade correspondentes a interações de 3 fatores, mostrando que dessa forma também fica confundido um efeito principal; ou, confundindo os componentes das interações de 2 fatores e portanto um efeito principal também.

KEMPTHORNE (1975) destina um capítulo ao confundimento nos experimentos fatoriais 2^n. Cita tal técnica como sendo de muita utilidade na redução dos tamanhos dos blocos. Apresenta o 2^3 em blocos de 4 unidades, confundindo a interação de 3 fatores. Ilustra, numericamente, através de 3 replicações de um 2^3 em blocos de 4 unidades, confundindo com blocos o grau de liberdade correspondente à interação de 3 fatores. Resume em uma tabela os tipos possíveis de confundimento para sistemas fatoriais 2^n, e apresenta a composição de blocos para vários casos. Em outro exemplo ilustra a utilização do procedimento de Yates no cálculo de efeitos fatoriais totais.

No caso dos fatoriais da série 3^n, define interação generalizada, e exemplifica o método de construção dos blocos através de um 3^3 em blocos de 3 unidades. Estuda o 3^2 em blocos de 3 unidades, utilizando 4 replicações, o 3^3 em blocos de 9 e 3 unidades. Apresenta ainda o 3^4 em blocos de 27, 9 e 3 unidades. Sobre os fatoriais 3^5 diz que contêm um número bastante grande de parcelas, e por isso são de pouco interesse, a não ser quando se considera os experimentos confundidos. Mesmo assim explica que blocos de 81 unidades são considerados grandes, e de 27 unidades não são utilizados com muita frequência, além do fato de não ser possível a obtenção de um experimento de resolução V em tal caso. Diz ainda que os experimentos 3^5 que apresentam maior utilidade são aqueles confundidos em blocos de 9 unidades. Porém, apresentam a desvantagem de não permitirem a obtenção de experimentos de resolução V, pois não se consegue evitar o confundimento de um efeito principal ou interação de 2 fatores.

2.3. Fatoriais Fracionados

BOX e HUNTER (1961) classificam os experimentos fatoriais fracionados em:

i) Experimentos de resolução III: aqueles constituídos de frações nas quais alguns dos efeitos principais são aliados de interações de 2 fatores, sendo portanto estimáveis apenas quando essas são omitidas;

ii) Experimentos de resolução IV: aqueles constituídos de frações nas quais todos os efeitos principais são estimáveis, independente das interações de 2 fatores serem ou não omitidas, mas onde algumas dessas interações constituem pares de aliados.

iii) Experimentos de resolução V: aqueles constituídos de frações nas quais todos os efeitos principais e interações de 2 fatores são estimáveis.

Chamam de fração principal aquela na qual todos os geradores aparecem com sinal positivo.

COCHRAN e COX (1957) a respeito dos fatoriais fracionados em que alguns ou todos os fatores aparecem em mais de 2 níveis, afirmam que a maior parte de tais experimentos tem interações de 2 fatores confundidas. Apresentam vários planos, dentre os quais o 3^{5-1} em blocos de 81, 27 e 9 unidades. Exemplificam o último caso através de um exemplo de Chinloy *et alii* sobre a adubação da cana-de-açúcar. Apresentam também um experimento de Fisher e Kempthorne, um 3^{7-2} em blocos de 27 unidades, para o estudo de 7 fatores que podem alterar a atuação do consistômetro Adams, instrumento utilizado para medir a consistência de comida enlatada. Falam também sobre o perigo de conclusões errôneas ao se considerar insignificantes interações que na realidade apresentam efeito significativo, e concluem dizendo que para se usar a replicação fracionada com o menor risco possível de conclusões errôneas é importante conhecer os aliados dos efeitos fatoriais nos quais estamos interessados. Mostram a análise estatística para um 2^{6-1}, utilizando o procedimento de Yates para cálculo dos efeitos fatoriais totais. Falam em redução do tamanho dos blocos (no caso, frações) pelo confundimento, e exemplificam para o 2^{6-1} em blocos de 8 e 16 unidades. Sobre o 2^{5-1} afirmam ser um bom experimento e citam 3 maneiras distintas para sua utilização:

i) No caso em que todas as interações de 3 ou mais fatores são consideradas insignificantes, ele fornece estimativas independentes de todos os efeitos principais e interações de 2 fatores. Dizem que o principal defeito de tal experimento é não fornecer nenhum grau de liberdade para estimativa do resíduo. Porém, no caso do experimento já ter sido realizado outras vezes, e as estimativas da variância residual terem mantido certa estabilidade, elas podem ser usadas como desvio-padrão em testes de significância.

ii) No caso em que todas as interações de 2 fatores podem ser consideradas insignificantes, o experimento pode ser usado para estimar apenas os 5 efeitos principais, enquanto que os 10 graus de liberdade atribuídos às interações de 2 fatores são usados na estimativa do resíduo.

iii) No caso em que apenas algumas das interações de 2 fatores são de interesse para o experimentador, por exemplo, AB, AC e BC, pode-se estimar todos os efeitos principais e essas interações de 2 fatores, utilizando os 7 graus de liberdade restantes na estimativa do resíduo.

Com relação às situações (ii) e (iii) observam que o experimentador não deve se deixar levar apenas pelas aparências, destinando à estimativa do resíduo, sem uma análise mais detalhada, as interações consideradas sem nenhum interesse. Agindo assim, o experimentador corre o risco de provocar uma séria subestimativa da variância residual.

FINNEY (1945) introduz a noção de fatoriais fracionados para os fatoriais da série 2^n (n: inteiro positivo). Mostra como determinar a medida de um efeito pertencente a um subgrupo 2^p $(p < n)$ das combinações de tratamentos do fatorial completo 2^n. Introduz a noção de relação identidade mostrando que, se na obtenção de determinada interação todos os elementos são tomados com mesmo sinal, ela é igual a da à identidade. Fala também em aliados e exemplifica através de um 2^{4-2}. Introduz o conceito de ortogonalidade de 2 elementos num mesmo grupo, ou em grupos distintos. Chama a atenção para o fato que, se os elementos escolhidos para geradores são interações de alta ordem não importantes, a replicação fracionada pode ser bastante útil. Isso se deve ao fato das interações tomadas para geradores terem seus efeitos totalmente perdidos. Apresenta um 2^{8-4} e um experimento com batatas 4x2 . Utiliza apenas 32 dessas parcelas, ou seja, uma fração 2^{-1}. Sobre os fatoriais 3^n apresenta uma discussão análoga àquela feita para os fatoriais 2^n. Sobre o 3^{5-1} diz que em casos nos quais interações de alta ordem podem ser ignoradas, tais arranjos podem ser de algum valor prático. Diz ainda, que não é possível o confundimento de tal arranjo em blocos de 9 unidades tal que nenhum dos graus de liberdade confundidos sejam interações de 2 fatores, mas que existem arranjos nos quais apenas 2 graus de liberdade de uma interação de 2 fatores são perdidos.

JOHN (1971) apresenta um experimento com gasolina através de um 2^{4-1}, e utiliza o procedimento de Yates para cálculo dos efeitos fatoriais totais. Apresenta também o 2^{5-1}.

KEMPTHORNE (1975) introduz o conceito de replicação fracionada através de um 2^{3-1}. Em seguida apresenta o 2^{6-1}, o 2^{6-1} em blocos de 16 unidades, o 2^{5-4}, o 2^{8-4}, e o 2^{8-4} em blocos de 8 e 16 unidades. No caso de se querer trabalhar com $n \geq 10$, afirma que é possível estimar efeitos principais e interações de 2 fatores através da fração de fatorial 2^{n-3}, sempre que as interações de 3 ou mais fatores são consideradas insignificantes. Apresenta uma relação identidade ade quada para um 2^{10-3} em blocos de 32 unidades, confundindo ABJ, ADF e BDFJ, e mostra que com n = 10 essa é a menor fração de fatorial possível para se obter delineamentos de resolução V. Após isso faz uma generalização para replicação fracionada, particularizando para o 3^{4-1} e o 3^{5-1} em blocos de 9 e 27 unidades.

2.4. Teoria de Corpos de Galois

BOSE (1938) fala em geometria finita aplicada às séries 2^n e 3^n. Introduz a noção de interação generalizada e ilustra a aplicação da teoria de Corpos de Galois na construção de quadrados hiper-greco-latinos nos casos em que s = 4,5 (s = número de níveis).

BOSE e KISHEN (1940) falam rapidamente sobre a teoria de corpos de Galois para poderem construir as propriedades da geometria finita.

BOSE (1947a) dá um tratamento matemático aos experimentos fatoriais. Mostra a utilização da geometria finita e da teoria de corpos de Galois na construção de tais delineamentos.

KEMPTHORNE (1975) dedica um ítem à teoria de corpos de Galois, mostrando a importância e necessidade de sua aplicação.

Comentários

Lendo as citações dos autores, observamos que dentro de cada um dos três assuntos abordados nos ítens 2.1, 2.2 e 2.3, os resultados apresentados são exatamente os mesmos, inclusive confirmados também em nossos estudos.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1. Série 2^n

3.1.1. Generalidades

Inicialmente apresentamos, de acordo com PIMENTEL GOMES (1978) os resultados de um experimento fatorial de adubação 2^3, em blocos casualizados, onde os fatores são N, P e K, em 2 níveis cada, o que significa que cada fator pode ou não estar presente no experimento.

TABELA 1 - Produções em t/ha.

	(1)	N	P	NP	K	NK	PK	NPK	Totais de Blocos
1º bloco	1,32	1,80	1,66	1,72	2,58	2,72	2,26	2,95	17,01
2º bloco	2,12	2,20	2,66	3,85	3,56	3,20	2,08	3,28	22,95
3º bloco	1,75	2,95	1,73	2,62	2,86	2,25	1,95	2,40	18,51
4º bloco	2,35	2,96	2,58	3,00	2,75	2,75	2,70	3,35	22,44
	7,54	9,91	8,63	11,19	11,75	10,92	8,99	11,98	80,91

TABELA 2 - Análise da variância.

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	3	3,2011		
(Tratamentos)	(7)	(4,5246)		
N	1	1,5709	1,5709	9,430**
P	1	0,0140	0,0140	0,084
K	1	1,2680	1,2680	7,620*
NP	1	0,5025	0,5025	3,020
NK	1	0,2398	0,2398	1,440
PK	1	0,5177	0,5177	3,110
NPK	1	0,4118	0,4118	2,470
Resíduo	21	3,4955	0,1665	
T o t a l	31	11,2212		

De acordo com a tabela 2 concluímos que apenas os efeitos do nitrogênio e do potássio são significativos, ou seja, não há reação da planta à adubação fosfatada, e que as interações não são significativas.

Um meio de reduzir o tamanho do bloco de forma que a perda de eficiência seja mínima, é fazer o confundimento da interação NPK com blocos.

Voltando ao exemplo inicial, vamos distribuir os tratamentos em blocos de 4 parcelas, de acordo com os sinais na interação NPK.

TABELA 3 - Quadro de contrastes.

Efeitos Fatoriais	Combinações de Tratamentos (1)	n	p	np	k	nk	pk	npk
N	−	+	−	+	−	+	−	+
P	−	−	+	+	−	−	+	+
K	−	−	−	−	+	+	+	+
NP	+	−	−	+	+	−	−	+
NK	+	−	+	−	−	+	−	+
PK	+	+	−	−	−	−	+	+
NPK	−	+	+	−	+	−	−	+

Com isso reduzimos a 4 parcelas o tamanho dos blocos, notando que os tratamentos são distribuídos aleatoriamente dentro de cada um, como ilustra a figura a seguir.

Bloco 1	(1)	np	nk	pk
Bloco 2	n	p	k	npk

A expressão para estimar N é dada por:

$$\frac{1}{4}\left[-(1) + n - p + np - k + nk - pk + npk\right]$$

Observamos então, que as 4 parcelas que aparecem com sinal positivo estão duas em cada bloco, o mesmo ocorrendo com aquelas com sinal negativo. Logo, a estimativa de N não contém nenhum efeito aditivo de bloco. Isso é válido para todos os efeitos principais e interações de 2 fatores. A interação de 3 fatores, NPK, tem por estimativa

$$\frac{1}{4}\left[-(1) + n + p - np + k - nk - pk + npk\right]$$

que, como se vê, mede não apenas a interação, mas também o efeito de blocos (Bloco 2 - Bloco 1). Como não é possível separar a interação da diferença de blocos, dizemos que elas estão totalmente confundidas.

Vamos supor que a interação NPK possa ser considerada insignificante (o que constatamos na tabela 2), e realizar o experimento nos dois blocos da figura acima, ou seja, com NPK totalmente confundida com blocos. Os dados podem ser dispostos, por exemplo, de acordo com a tabela 4.

TABELA 4 - Produções em t/ha.

I		II		III		IV	
np	nk	nk	(1)	n	p	np	(1)
1,72	2,72	3,20	2,12	2,95	1,73	3,00	2,35
pk	(1)	pk	np	npk	k	nk	pk
2,26	1,32	2,08	3,85	2,40	2,86	2,75	2,70
k	npk	p	npk	pk	nk	p	n
2,58	2,95	2,66	3,28	1,95	2,25	2,58	2,96
p	n	k	n	(1)	np	k	npk
1,66	1,80	3,56	2,20	1,75	2,62	2,75	3,35
V		VI		VII		VIII	

Os resultados experimentais estão na tabela 5.

TABELA 5 - Análise da variância.

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
(Blocos)	(7)	(3,6669)		
Repetições	3	3,2011		
NPK	1	0,4118		
Repetições x NPK	3	0,0540		
(Tratamentos)	(6)	(4,1128)		
N	1	1,5709	1,5709	8,22**
P	1	0,0140	0,0140	0,07
K	1	1,2680	1,2680	6,63**
NP	1	0,5025	0,5025	2,63
NK	1	0,2398	0,2398	1,25
PK	1	0,5177	0,5177	2,71
Resíduo	18	3,4415	0,1912	
Total	31	11,2212		

Ao dividirmos o fatorial 2^3 em 2 blocos de 4 unidades usamos o fatorial fracionado 2^{3-1}, ou seja, dividimos o fatorial completo 2^3 em 2 blocos confundindo exatamente 1 efeito.

Generalizando, uma fração 2^{n-m} (n: inteiro positivo; $m < n$) pode ser definida como um conjunto de 2^{n-m} elementos distintos, que constituem um subgrupo do grupo de combinações de tratamentos do fatorial completo 2^n.

3.1.2. Frações de fatoriais

Obter uma fração de um fatorial completo, ou obter um fatorial fracionado, consiste em selecionar um bloco de um fatorial com efeitos confundidos com blocos. No caso particular da série 2^n se I denota a média μ do modelo, e = denota "está confundida com", para obtermos uma fração

i) 2^{-1} devemos ter $I = X$,

ii) 2^{-2} devemos ter $I = \underline{X} = \underline{Y} = XY$,

iii) 2^{-3} devemos ter $I = \underline{X} = \underline{Y} = XY = \underline{Z} = XZ = YZ = XYZ$.

DEFINIÇÃO: As interações sem o traço embaixo são definidas como generalizadas das suas anteriores, e a ordem acima descrita denomina-se "ordem-padrão".

Generalizando, obter uma fração 2^{-m} implica em obter m geradores, dando, no máximo, $n.2^{m-1}$ letras na relação identidade de I.

Vejamos o que acontece quando o experimento consiste de apenas metade das combinações de tratamentos presentes no fatorial completo.

<u>EXEMPLO 1.</u> Seja o fatorial 2^3 onde os fatores são A, B, e C, e suponhamos que são testadas apenas as 4 combinações de tratamentos a, b, c, e abc, ou seja, exatamente a metade do fatorial completo. Os efeitos principais e as interações são estimadas de acordo com a tabela 6.

TABELA 6 - Contrastes estimadores dos efeitos para a fração de fatorial 2^{3-1}.

Efeitos Fatoriais	Combinações de Tratamentos a	b	c	abc
A	+	-	-	+
B	-	+	-	+
AB	-	-	+	+
C	-	-	+	+
AC	-	+	-	+
BC	+	-	-	+
ABC	+	+	+	+

Para o efeito principal A somamos as produções que contêm a e subtraímos aquelas que não o contém, ou seja

$$\hat{A} = abc + a - b - c$$

e analogamente para B e C.

Ainda de acordo com a tabela 6 observamos que A, B, e C, são mutuamente ortogonais, ou seja, as estimativas dos 3 efeitos principais são independentes sob normalidade.

Para calcularmos a interação AB somamos as produções que contêm um número par das letras a e b, e subtraímos aquelas com número ímpar, isto é:

$$\widehat{AB} = abc + c - a - b \ .$$

Observamos que essa quantidade é a mesma utilizada na estimativa do efeito principal C. Assim, C e AB são aliados, e escrevemos C = AB. Analogamente para B = AC e A = BC. Existem 2^{n-m} conjuntos de aliados, incluindo o próprio subgrupo definidor, com 2^m elementos cada um. Cada efeito é aliado dos demais efeitos no mesmo conjunto, e de nenhum dos outros efeitos.

A interação ABC não pode ser estimada. Se todas as 8 combinações de tratamentos estivessem no mesmo bloco, ABC seria dada por

$$\hat{ABC} = abc + a + b + c - ab - ac - bc - (1) .$$

Porém, como para a fração 2^{-1} escolhemos para um bloco as 4 combinações de tratamentos com sinal +, é impossível qualquer comparação. Nesse caso, ABC é chamado <u>gerador,</u> pois é o contraste usado para dividir o fatorial em duas partes. Resumindo, o uso da fração 2^{-1} acarreta na perda total da interação ABC, e confunde totalmente cada efeito principal com uma interação de 2 fatores.

Uma confusão sempre presente nos experimentos fatoriais fracionados aparece no caso em que o experimento apresenta, por exemplo, um efeito aparente de A. Nesse caso não temos como descobrir se esse efeito é devido a A, a BC, ou a ambos. O motivo da confusão é devido ao fato de todo efeito fatorial ter sempre 1 ou mais aliados. Entretanto, há alguns casos onde a própria natureza dos resultados estabelece uma explicação mais plausível dos dados. Se, por exemplo, a comparação A apresenta um efeito bastante evidente, enquanto que B e C não apresentam efeitos aparentes, o efeito, no experimento, é atribuído apenas a A. Analogamente, o experimento pode apresentar efeitos bem evidentes de B e C, e um efeito bem menor de A. Nesse caso o efeito é atribuído apenas a BC.

No caso de concluirmos o experimento num tempo relativamente pequeno, podemos realizar um novo experimento utilizando as 4 combinações de tratamentos omitidas no primeiro experimento, ou seja, ab, ac, bc e (1). Juntando os resultados dos dois experimentos obtemos uma repetição completa, com estimativas de A e BC diferentes daquelas já encontradas.

A fim de reduzir os riscos de conclusões errôneas é que devemos conhecer os efeitos fatoriais nos quais estamos interessados. Para isso apresentamos a regra seguinte, de grande utilidade.

<u>REGRA 1</u> (COCHRAN e COX, 1957): "No sistema 2^n o aliado de qualquer efeito fatorial é sua interação generalizada com o gerador".

Logo, no caso do exemplo 1 o aliado de A é a interação AxABC = A^2BC. Porém, em uma interação generalizada qualquer sem perda de generalidade, todo termo quadrado é cancelado, donde A^2BC ser lida como BC.

Outro ponto de importância relevante é a escolha da fração a ser utilizada. Supondo que em vez de abc, a, b, e c escolhemos a outra metade ab, ac, bc, e (1), o efeito principal de A e a interação BC são dados respectivamente por

$$\hat{A} = ab + ac - bc - (1)$$

$$\widehat{BC} = bc + (1) - ab - ac \ .$$

Observamos que nesse caso A é igual à interação BC com sinal trocado, ou seja, A = -BC, enquanto que com a fração usada inicialmente, A = BC.

Vamos admitir aqui que todas as interações de 3 ou mais fatores são insignificantes, e que todos os efeitos principais e interações de 2 fatores devem ser incluídas no experimento.

Na série 2^n a menor fração possível é a 2^{3-1}, pois no caso do 2^2 além de termos apenas 4 combinações de tratamentos para serem testadas, não temos interações de alta ordem para confundir.

No exemplo 1, quando falamos em trabalhar apenas com as combinações de tratamentos a, b, c e abc, estamos utilizando uma fração de fatorial 2^{3-1}. Desse modo obtemos 2 tipos possíveis de experimentos dados pelos grupos de combinações abaixo:

$$I = \pm ABC$$

FRAÇÃO 1 +ABC	FRAÇÃO 2 -ABC
a	(1)
b	ab
c	ac
abc	bc

<u>DEFINIÇÃO:</u> A fração 2 será o subgrupo intrabloco, e será sempre a fração que contiver o tratamento controle, denotado por (1), isto é, todas as combinações de tratamentos com número par de letras em comum com o gerador.

A partir desse subgrupo podemos determinar as combinações de tratamentos da outra fração tomando uma qualquer dentre as combinações de tratamentos restantes e somando seu número modular ao daquelas no subgrupo intrabloco. Veremos que o procedimento é válido para qualquer número de frações e que as combinações de tratamentos no subgrupo intrabloco devem figurar na "ordem-padrão".

Para determinarmos o sinal do gerador, notamos que na fração contendo a combinação de tratamentos em que aparecem todas as letras (abc, no fatorial 2^3), ele leva sinal +, e portanto na outra fração leva sinal −.

Se não quisermos pensar em termos de subgrupo intrabloco, basta observarmos que as combinações de tratamentos na fração correspondente a + ABC têm todas um número ímpar das letras a, b e c, e aquelas no bloco correspondente a − ABC um número par dessas letras.

Após determinarmos o gerador podemos encontrar os aliados de todos os efeitos através da regra 1.

TABELA 7 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{3-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = \pm ABC$

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS
A	BC
B	AC
C	AB

Vemos através da tabela 7, que todo efeito principal tem por aliado uma interação de 2 fatores, ou seja, os efeitos principais e as interações de 2 fatores confundem-se mutuamente nesse experimento. Portanto, a fração de fatorial 2^{3-1} não é de nosso interesse, pois contraria nossa suposição inicial de não confundir efeitos principais e interações de 2 fatores.

EXEMPLO 2: Seja o fatorial 2^4, onde os fatores são A, B, C e D. Nesse caso são 16 combinações de tratamentos possíveis, e a fração de fatorial 2^{4-1} as divide em 2 grupos de 8 unidades. Se tomamos para gerador a interação ABCD, temos:

$$I = \pm ABCD$$

FRAÇÃO 1 +ABCD	FRAÇÃO 2 -ABCD
(1)	a
ab	b
ac	c
bc	abc
ad	d
bd	abd
cd	acd
abcd	bcd

Vemos, através da tabela 8, que todo efeito principal tem por aliado uma interação de 3 fatores, e que as interações de

2 fatores dividem-se em 3 pares de aliados, ou seja, confundem-se mutuamente: AB com CD, AC com BD e AD com BC. Assim, concluímos que esse experimento também não é de nosso interesse.

Porém, se soubermos de antemão que um dos 4 fatores não interage com qualquer um dos outros, as interações envolvendo esse fator podem ser omitidas, e as outras três interações de 2 fatores passam a ser estimáveis. Esse é um caso particular em que a fração de fatorial 2^{4-1} não confunde efeitos principais nem interações duplas.

Se tomarmos para gerador qualquer uma das interações de 3 fatores, três dos efeitos principais ficam confundidos com interações de 2 fatores, o que também não nos interessa.

TABELA 8 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{4-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = \pm ABCD$

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	BCD	AB	CD
B	ACD	AC	BD
C	ABD	AD	BC
D	ABC		

EXEMPLO 3: Seja o fatorial 2^5, onde os fatores são A, B, C, D e E. Temos 32 combinações de tratamentos possíveis. Através da fração de fatorial 2^{5-1} dividimos essas combinações de tratamentos em 2 blocos de

16 unidades. Para escolher um gerador observamos que se tomamos uma interação de 3 fatores, três dos efeitos principais ficam confundidos com interações de 2 fatores; se tomamos uma interação de 4 fatores, 12 dentre as 16 interações de 2 fatores se dividem em 6 pares de aliados; se tomamos a interação de 5 fatores, ABCDE, vemos pela tabela 9, que todo efeito principal tem por aliado uma interação de 4 fatores, e toda interação de 2 fatores tem por aliado uma de 3 fatores. Logo, nesse último caso temos um bom experimento ou seja, um experimento que se adapta ao nosso objetivo de não confundir efeitos principais nem interações de 2 fatores. Os dois tipos possíveis de experimentos são dados por:

$$I = \pm ABCDE$$

FRAÇÃO 1 +ABCDE	FRAÇÃO 2 -ABCDE
a	(1)
b	ab
c	ac
abc	bc
d	ad
abd	bd
acd	cd
bcd	abcd
e	ae
abe	be
ace	ce
bce	abce
ade	de
bde	abde
cde	acde
abcde	bcde

Observamos também que os sinais dos aliados são obtidos pelas leis usuais da álgebra. Assim, a interação de A com -ABCDE é -BCDE, a de -BC com -CDE é BDE.

TABELA 9 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{5-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: I = $\pm$ ABCDE

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	BCDE	AB	CDE
B	ACDE	AC	BDE
C	ABDE	AD	BCE
D	ABCE	AE	BCD
E	ABCD	BC	ADE
		BD	ACE
		BE	ACD
		CD	ABE
		CE	ABD
		DE	ABC

Antes de falarmos na fração 2^{5-2} vamos enunciar duas regras que generalizam o procedimento para obtenção de geradores e aliados da fração de fatorial 2^{n-2}, $n \geq 3$.

REGRA 2 (COCHRAN e COX, 1957): "No sistema 2^n, dois efeitos fatoriais quaisquer podem ser usados como geradores, com o objetivo de se obter a fração de fatorial 2^{n-2}. A interação generalizada desses dois efei tos fatoriais completará o conjunto de efeitos confundidos com blocos que não serão estimáveis numa fração de fatorial".

REGRA 3 (COCHRAN e COX, 1957): "Na fração de fatorial 2^{n-2} qualquer efeito fatorial que não seja um gerador tem 3 aliados dados pelas suas interações generalizadas com os 2 geradores e a sua generalizada".

EXEMPLO 3.1 - Obter a fração de fatorial 2^{5-2} é o mesmo que dividir ao meio a fração de fatorial 2^{5-1}, pois $2^{5-2} = \frac{1}{2} \times 2^{5-1}$. De acordo com nosso intento de não confundirmos efeitos principais nem interações de 2 fatores, não conseguimos encontrar um experimento satisfatório para a fração de fatorial 2^{5-2}.

Vejamos o porquê dessa afirmativa. A fim de obtermos a fração de fatorial 2^{5-2}, devemos inicialmente encontrar dois geradores. Se escolhermos para geradores uma interação de 5 fatores e uma de 4, confundiremos também um efeito principal; uma interação de 5 e uma de 3 fatores, confundiremos uma interação de 2 fatores; duas interações de 4 fatores com 3 letras em comum, confundiremos uma interação de 2 fatores; uma interação de 4 fatores e uma de 3, com 3 letras em comum, confundiremos um efeito principal; uma interação de 4 fatores e uma de 3, com duas letras em comum, confundiremos uma interação de 3 fatores; duas interações de 3 fatores, com uma única letra em comum, confundiremos uma interação de 4 fatores. De todas essas possibilidades, apenas as duas últimas parecem ser de nosso interesse. Porém,através das tabelas 10 e 11 vemos, respectivamente, que no primeiro caso 6 das interações de 2 fatores são aliados de efeitos principais, e 4 se confundem mutuamente; no segundo caso, temos novamente 6 das interações de 2 fatores como aliados dos efeitos principais e 4 confundidas mutuamente.

Os pares possíveis de geradores estão exemplificados na tabela 12.

TABELA 10 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{5-2}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = \pm ABCD = \pm ABE = \pm CDE$

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	BCD, BE, ACDE	AC	BD, BCE, ADE
B	ACD, AE, BCDE	AD	BC, BDE, ACE
C	ABD, ABCE, DE		
D	ABC, ABDE, CE		
E	ABCDE, AB, CD		

TABELA 11 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{5-2}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = \pm ABC = \pm ADE = \pm BCDE$

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	BC, DE, ABCDE	BD	ACD, ABE, CE
B	AC, ABDE, CDE	BE	ACE, ABD, CD
C	AB, ACDE, BDE		
D	ABCD, AE, BCE		
E	ABCE, AD, BCD		

TABELA 12 - Exemplos de pares de geradores para obtenção da fração de fatorial 2^{5-2}.

1º GERADOR	2º GERADOR	INTERAÇÃO GENERALIZADA
ABCDE	ABCD	E
ABCDE	ABC	DE
ABCD	ABCE	DE
ABCD	ABC	D
ABCD	ABE	CDE
ABC	ADE	BCDE

Concluímos, pois, que no caso do fatorial 2^5, apenas a fração de fatorial 2^{5-1} não confunde nenhum dos efeitos principais e interações de 2 fatores. Tal plano diz-se saturado, pois, observamos que não existe nenhum grau de liberdade para estimativa do erro. De fato, temos 5 graus de liberdade para efeitos principais e 10 para interações de 2 fatores, totalizando 15, que é o número de graus de liberdade total.

EXEMPLO 4 - Seja o fatorial 2^6, onde os fatores são A, B, C, D, E e F. Nesse caso são 64 combinações de tratamentos possíveis. Através da fração de fatorial 2^{6-1} vamos dividi-las em 2 grupos de 32 unidades. Para gerador escolhemos a interação de mais alta ordem, no caso ABCDEF. Observando a tabela 13 concluimos ser esse um bom experimento, pois os efeitos principais têm por aliados interações de 5 fatores, e as interações de 2 fatores têm por aliados interações de 4 fatores.

TABELA 13 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{6-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: I = $\pm$ ABCDEF

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 3 FATORES	ALIADOS
A	BCDEF	AB	CDEF	ABC	DEF
B	ACDEF	AC	BDEF	ABD	CEF
C	ABDEF	AD	BCEF	ABE	CDF
D	ABCEF	AE	BCDF	ABF	CDE
E	ABCDF	AF	BCDE	ACD	BEF
F	ABCDE	BC	ADEF	ACE	BDF
		BD	ACEF	ACF	BDE
		BE	ACDF	ADE	BCF
		BF	ACDE	ADF	BCE
		CD	ABEF	AEF	BCD
		CE	ABDF		
		CF	ABDE		
		DE	ABCF		
		DF	ABCE		
		EF	ABCD		

Para a estimativa do erro temos, de acordo com a tabela 14, 10 graus de liberdade relativos às 20 interações de 3 fatores que se dividem em 10 pares de aliados.

TABELA 14 - Análise da variância para a fração de fatorial 2^{6-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = \pm ABCDEF$

C.V.	G.L.
Efeitos principais	6
Interações de 2 fatores	15
Resíduo	10
TOTAL	31

Os dois tipos possíveis de experimentos são dados por:

$I = \pm ABCDEF$

FRAÇÃO 1 + ABCDEF		FRAÇÃO 2 - ABCDEF	
(1)	af	a	f
ab	bf	b	abf
ac	cf	c	acf
bc	abcf	abc	bcf
ad	df	d	adf
bd	abdf	abd	bdf
cd	acdf	acd	cdf
abcd	bcdf	bcd	abcdf
ae	ef	e	aef
be	abef	abe	bef
ce	acef	ace	cef
abce	bcef	bce	abcef
de	adef	ade	def
abde	bdef	bde	abdef
acde	cdef	cde	acdef
bcde	abcdef	abcde	bcdef

Portanto, o plano pode ser obtido de duas maneiras distintas: i) escolhendo a fração correspondente a + ABCDEF, ou seja, escolhendo as 32 combinações de tratamentos com um número par das letras a, b, c, d, e, f; ii) escolhendo a fração correspondente a -ABCDEF, ou seja, escolhendo as combinações de tratamentos com um número ímpar das letras a, b, c, d, e, f.

EXEMPLO 4.1 - Vamos supor que estamos interessados em trabalhar com a fração de fatorial 2^{6-2}. Nesse caso devemos dividir ao meio qualquer um dos dois grupos obtidos para a fração de fatorial 2^{6-1}. Em seguida, fazemos uma breve discussão acerca dos dois geradores possíveis para obtenção da fração de fatorial 2^{6-2}.

1. Se escolhermos para gerador a interação de 6 fatores e:
   - 1.1 - uma de 5 fatores,confundiremos também um efeito principal;
   - 1.2 - uma de 4 fatores, confundiremos também uma de 2 fatores;
   - 1.3 - uma de 3 fatores, confundiremos também uma de 3 fatores.
2. Se escolhermos para gerador uma interação de 5 fatores e:
   - 2.1 - uma outra interação de 5 fatores, com quatro letras em comum, confundiremos também uma interação de 2 fatores;
   - 2.2 - uma de 4, com três letras em comum, confundiremos também uma de 3 fatores;
   - 2.3 - uma de 4, com quatro letras em comum, confundiremos também um efeito principal;
   - 2.4 - uma de 3, com duas letras em comum, confundiremos também uma de 4 fatores;
   - 2.5 - uma de 3, com três letras em comum, confundiremos também uma de 2 fatores.

3. Se escolhermos para gerador uma interação de 4 fatores e:

   3.1 - uma outra interação de 4 fatores, com três letras em comum, confundiremos também uma interação de 2 fatores;

   3.2 - uma outra interação de 4 fatores, com duas letras em comum, confundiremos também outra interação de 4 fatores;

   3.3 - uma de 3, com três letras em comum, confundiremos também um efeito principal;

   3.4 - uma de 3, com duas letras em comum, confundiremos também uma de 3 fatores;

   3.5 - uma de 3, com uma letra em comum, confundiremos também uma de 5 fatores.

4. Se escolhermos para geradores duas interações de 3 fatores com:

   4.1 - duas letras em comum, confundiremos também uma interação de 2 fatores;

   4.2 - uma letra em comum, confundiremos também uma interação de 4 fatores;

   4.3 - nenhuma letra em comum, confundiremos também a interação de 6 fatores.

A discussão acima está ilustrada na seguinte tabela.

TABELA 15 - Exemplos de pares de geradores para obtenção da fração de fatorial 2^{6-2}.

EXEMPLOS	1º GERADOR	2º GERADOR	INTERAÇÃO GENERALIZADA	
1.1	ABCDEF	ABCDE	F	
1.2	ABCDEF	ABCD	EF	
1.3	ABCDEF	ABC	DEF	*
2.1	ABCDE	ABCDF	EF	
2.2	ABCDE	ABCF	DEF	*
2.3	ABCDE	ABCD	E	
2.4	ABCDE	ABF	CDEF	*
2.5	ABCDE	ABC	DE	
3.1	ABCD	ABCE	DE	
3.2	ABCD	ABEF	CDEF	*
3.3	ABCD	ABC	D	
3.4	ABCD	ABE	CED	*
3.5	ABCD	AEF	BCDEF	*
4.1	ABC	ABD	CD	
4.2	ABC	ADE	BCDE	*
4.3	ABC	DEF	ABCDEF	*

Observando a tabela 15, vemos, à primeira vista, que apenas os casos assinalados parecem ser de nosso interesse.

Porém, através da regra 3 concluímos que em nenhum desses casos conseguimos experimentos tais que efeitos principais e interações de 2 fatores não são confundidas.

Portanto, para o fatorial 2^6 a menor fração de fatorial possível, tal que efeitos principais e interações de 2 fatores não sejam confundidas, é a 2^{6-1}.

EXEMPLO 5 - Seja o fatorial 2^7, onde os fatores são A, B, C, D, E, F e G. Temos então 128 combinações de tratamentos possíveis. Esse é um número bastante grande e podemos querer trabalhar com apenas metade dessas combinações de tratamentos, ou seja, com a fração de fatorial 2^{7-1}. Uma escolha óbvia para o gerador recai sobre a interação de 7 fatores ABCDEFG. Através da tabela 16 vemos que, nesse caso, cada efeito principal tem por aliado uma interação de 6 fatores, e cada uma das 21 interações de 2 fatores tem por aliado uma interação de 5 fatores. As 35 interações de 3 fatores têm por aliados interações de 4 fatores, ficando, portanto, disponíveis para estimativa do erro 35 graus de liberdade, conforme a tabela 17.

TABELA 16 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{7-1}.
INTERAÇÃO GENERALIZADA: I = $\pm$ ABCDEFG

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	BCDEFG	AB	CDEFG
B	ACDEFG	AC	BDEFG
C	ABDEFG	AD	BCEFG
D	ABCEFG	AE	BCDFG
E	ABCDFG	AF	BCDEG
F	ABCDEG	AG	BCDEF
G	ABCDEF	BC	ADEFG
		BD	ACEFG
		BE	ACDFG
		BF	ACDEG
		BG	ACDEF
		CD	ABEFG
		CE	ABDFG
		CF	ABDEG
		CG	ABDEF
		DE	ABCFG
		DF	ABCEG
		DG	ABCEF
		EF	ABCDG
		EG	ABCDF
		FG	ABCDE

Os dois tipos de experimentos possíveis são aqueles compostos das 64 combinações de tratamentos de qualquer uma das frações a seguir:

$$I = \pm ABCDEFG$$

FRAÇÃO 1 +ABCDEFG		FRAÇÃO 2 -ABCDEFG	
a	g	(1)	ag
b	abg	ab	bg
c	acg	ac	cg
abc	bcg	bc	abcg
d	adg	ad	dg
abd	bdg	bd	abdg
acd	cdg	cd	acdg
bcd	abcdg	abcd	bcdg
e	aeg	ae	eg
abe	beg	be	abeg
ace	ceg	ce	aceg
bce	abceg	abce	bceg
ade	deg	de	adeg
bde	abdeg	abde	bdeg
cde	acdeg	acde	cdeg
abcde	bcdeg	bcde	abcdeg
f	afg	af	fg
abf	bfg	bf	abfg
acf	cfg	cf	acfg
bcf	abcfg	abcf	bcfg
adf	dfg	df	adfg
bdf	abdfg	abdf	bdfg
cdf	acdfg	acdf	cdfg
abcdf	bcdfg	bcdf	abcdfg
aef	efg	ef	aefg
bef	abefg	abef	befg
cef	acefg	acef	cefg
abcef	bcefg	bcef	abcefg
def	adefg	adef	defg
abdef	bdefg	bdef	abdefg
acdef	cdefg	cdef	acdefg
bcdef	abcdefg	abcdef	bcdefg

TABELA 17 - Análise da variância para a fração de fatorial 2^{7-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = \pm ABCDEFG$

C.V.	G.L.
Efeitos principais	7
Interações de 2 fatores	21
Resíduo	35
TOTAL	63

No caso de querermos trabalhar com apenas a metade das combinações de tratamentos em qualquer um dos 2 experimentos obtidos pela fração de fatorial 2^{7-1}, devemos utilizar a fração de fatorial 2^{7-2}. Porém, através de procedimento análogo ao utilizado nos exemplos 3.1 e 4.1, verificamos que não conseguimos obter tais experimentos sem confundir efeitos principais ou interações de 2 fatores.

Concluímos, pois, que no caso do fatorial 2^7, a menor fração de fatorial possível é a 2^{7-1}, quando não quisermos confundir efeitos principais nem interações de 2 fatores.

EXEMPLO 6 - Seja o fatorial 2^8, onde os fatores são, A, B, C, D, E, F, G e H. Nesse caso são 256 combinações de tratamentos possíveis. Se queremos trabalhar com apenas metade dessas combinações de tratamentos usamos a fração de fatorial 2^{8-1}. Para sua obtenção escolhemos para gerador a interação de mais alta ordem, ou seja, ABCDEFGH.

Os aliados dos efeitos fatoriais estão na tabela 18, através da qual observamos que os efeitos principais têm por aliados as interações de 7 fatores, e as 28 interações de 2 fatores têm por aliados as interações de 6 fatores. Existem 56 interações de 3 fatores que têm por aliados as interações de 5 fatores, e 70 interações de 4 fatores que se dividem em 35 pares de aliados. Como estamos supondo insignificantes as interações de 3 ou mais fatores, temos, de acordo com a tabela 19, 91 graus de liberdade para o resíduo.

Os dois tipos possíveis de experimentos são dados pelas duas frações abaixo:

$I = \pm ABCDEFGH$

FRAÇÃO 1: +ABCDEFGH				FRAÇÃO 2: -ABCDEFGH			
(1)	ag	ah	gh	a	g	h	agh
ab	bg	bh	abgh	b	abg	abh	bgh
ac	cg	ch	acgh	c	acg	ach	cgh
bc	abcg	abch	bcgh	abc	bcg	bch	abcgh
ad	dg	dh	adgh	d	adg	adh	dgh
bd	abdg	abdh	bdgh	abd	bdg	bdh	abdgh
cd	acdg	acdh	cdgh	acd	cdg	cdh	acdgh
abcd	bcdg	bcdh	abcdgh	bcd	abcdg	abcdh	bcdgh
ae	eg	eh	aegh	e	aeg	aeh	egh
be	abeg	abeh	begh	abe	beg	beh	abegh
ce	aceg	aceh	cegh	ace	ceg	ceh	acegh
abce	bceg	bceh	abcegh	bce	abceg	abceh	bcegh
de	adeg	adeh	degh	ade	deg	deh	adegh
abde	bdeg	bdeh	abdegh	bde	abdeg	abdeh	bdegh
acde	cdeg	cdeh	acdegh	cde	acdeg	acdeh	cdegh
bcde	abcdeg	abcdeh	bcdegh	abcde	bcdeg	bcdeh	abcdegh
af	fg	fh	afgh	f	afg	afh	fgh
bf	abfg	abfh	bfgh	abf	bfg	bfh	abfgh
cf	acfg	acfh	cfgh	acf	cfg	cfh	acfgh
abcf	bcfg	bcfh	abcfgh	bcf	abcfg	abcfh	bcfgh
df	adfg	adfh	dfgh	adf	dfg	dfh	adfgh
abdf	bdfg	bdfh	abdfgh	bdf	abdfg	abdfh	bdfgh
acdf	cdfg	cdfh	acdfgh	cdf	acdfg	acdfh	cdfgh
bcdf	abcdfg	abcdfh	bcdfgh	abcdf	bcdfg	bcdfh	abcdfgh
ef	aefg	aefh	efgh	aef	efg	efh	aefgh
abef	befg	befh	abefgh	bef	abdfg	abefh	befgh
acef	cefg	cefh	acefgh	cef	acefg	acefh	cefgh
bcef	abcefg	abcefh	bcefgh	abcef	bcefg	bcefh	abcefgh
adef	defg	defh	adefgh	def	adefg	adefh	defgh
bdef	abdefg	abdefh	bdefgh	abdef	bdefg	bdefh	abdefgh
cdef	acdefg	acdefh	cdefgh	acdef	cdefg	cdefh	acdefgh
abcdef	bcdefg	bcdefh	abcdefgh	bcdef	abcdefg	abcdefh	bcdefgh

TABELA 18 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{8-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: I = ± ABCDEFGH

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	BCDEFGH	AB	CDEFGH
B	ACDEFGH	AC	BDEFGH
C	ABDEFGH	AD	BCEFGH
D	ABCEFGH	AE	BCDFGH
E	ABCDFGH	AF	BCDEGH
F	ABCDEGH	AG	BCDEFH
G	ABCDEFH	AH	BCDEFG
H	ABCDEFG	BC	ADEFGH
		BD	ACEFGH
		BE	ACDFGH
		BF	ACDEGH
		BG	ACDEFH
		BH	ACDEFG
		CD	ABEFGH
		CE	ABDFGH
		CF	ABDEGH
		CG	ABDEFH
		CH	ABDEFG
		DE	ABCFGH
		DF	ABCEGH
		DG	ABCEFH
		DH	ABCDGH
		EF	ABCDGH
		EG	ABCDFH
		EH	ABCDFG
		FG	ABCDEH
		FH	ABCDEG
		GH	ABCDEF

TABELA 19 - Análise da variância para a fração de fatorial 2^{8-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: I = ± ABCDEFGH

C.V.	G.L.
Efeitos principais	8
Interações de 2 fatores	28
Resíduo	91
TOTAL	127

Se quisermos trabalhar com apenas metade das combinações de tratamentos de qualquer um dos dois experimentos possíveis, utilizamos a fração de fatorial 2^{8-2}.

Utilizando, mais uma vez, procedimento análogo ao utilizado nos exemplos 3.1 e 4.1, encontramos dois casos que se adaptam ao nosso objetivo, e que resumindo implica em termos, na relação identidade, duas interações de 5 fatores com duas letras em comum, confundindo também a interação generalizada, que no caso é uma interação de 6 fatores.

EXEMPLO 7 - Seja o fatorial 2^8 do exemplo acima, e vamos encontrar a fração de fatorial 2^{8-2}. Para geradores escolhemos as interações ABCDE e ABFGH, de acordo com o que acabamos de ver.

Na tabela 20 estão os aliados dos efeitos fatoriais. Observamos então, que cada um deles tem 3 aliados, que no caso dos efeitos principais são interações de, no mínimo, 4 letras, e no caso das interações de 2 fatores são interações de, no mínimo, 3 letras. A divisão dos graus de liberdade aparece na tabela 21 e justifica-se como segue: das $70 = \binom{8}{4}$ interações de 4 fatores, 10 são aliados de efeitos principais, 15 de interações de 2 fatores e 45 de interações de 3 fatores; das $56 = \binom{8}{5}$ interações de 5 fatores, duas aparecem na relação identidade, 6 são aliados de efeitos principais, 30 de interações de 2 fatores e 18 de interações de 3 fatores; das $28 = \binom{8}{6}$ interações de 6 fatores, uma aparece na relação identidade, 6 são aliados de efeitos principais, 12 de interações de 2 fatores e 9 de interações de 3 fatores; das

$8 = \binom{8}{7}$ interações de 7 fatores, duas são aliados de efeitos principais e 6 de interações de 2 fatores; das $56 = \binom{8}{3}$ interações de 3 fatores, 20 são aliados de interações de 2 fatores e das 36 restantes, 18 dividem-se em 9 conjuntos de aliados, donde os 27 graus de liberdade atribuídos ao resíduo.

A fim de obtermos os 4 tipos possíveis de experimentos de acordo com os geradores escolhidos, devemos inicialmente obter os 2 experimentos relativos à fração de fatorial 2^{8-1}, tendo para gerador a interação de 5 fatores ABCDE (ou ABFGH).

Em seguida, utilizando o segundo gerador ABFGH (ou ABCDE), dividimos ao meio cada um dos 2 conjuntos de 128 combinações de tratamentos, obtendo os 4 tipos possíveis de experimentos correspondentes à fração de fatorial 2^{8-2}.

FRAÇÃO DE FATORIAL 2^{8-1}

$I = \pm ABCDE$

FRAÇÃO 1: +ABCDE				FRAÇÃO 2: -ABCDE			
a	ag	ah	agh	(1)	g	h	gh
b	bg	bh	bgh	ab	abg	abh	abgh
c	cg	ch	cgh	ac	acg	ach	acgh
abc	abcg	abch	abcgh	bc	bcg	bch	bcgh
d	dg	dh	dgh	ad	adg	adh	adgh
abd	abdg	abdh	abdgh	bd	bdg	bdh	bdgh
acd	acdg	acdh	acdgh	cd	cdg	cdh	cdgh
bcd	bcdg	bcdh	bcdgh	abcd	abcdg	abcdh	abcdgh
e	eg	eh	egh	ae	aeg	aeh	aegh
abe	abeg	abeh	abegh	be	beg	beh	begh
ace	aceg	aceh	acegh	ce	ceg	ceh	cegh
bce	bceg	bceh	bcegh	abce	abceg	abceh	abcegh
ade	adeg	adeh	adegh	de	deg	deh	degh
bde	bdeg	bdeh	bdegh	abde	abdeg	abdeh	abdegh
cde	cdeg	cdeh	cdegh	acde	acdeg	acdeh	acdegh
abcde	abcdeg	abcdeh	abcdegh	bcde	bcdeg	bcdeh	bcdegh
af	afg	afh	afgh	f	fg	fh	fgh
bf	bfg	bfh	bfgh	abf	abfg	abfh	abfgh
cf	cfg	cfh	cfgh	acf	acfg	acfh	acfgh
abcf	abcfg	abcfh	abcfgh	bcf	bcfg	bcfh	bcfgh
df	dfg	dfh	dfgh	adf	adfg	adfh	adfgh
abdf	abdfg	abdfh	abdfgh	bdf	bdfg	bdfh	bdfgh
acdf	acdfg	acdfh	acdfgh	cdf	cdfg	cdfh	cdfgh
bcdf	bcdfg	bcdfh	bcdfgh	abcdf	abcdfg	abcdfh	abcdfgh
ef	efg	efh	efgh	aef	aefg	aefh	aefgh
abef	abefg	abefh	abefgh	bef	befg	befh	befgh
acef	acefg	acefh	acefgh	cef	cefg	cefh	cefgh
bcef	bcefg	bcefh	bcefgh	abcef	abcefg	abcefh	abcefgh
adef	adefg	adefh	adefgh	def	defg	defh	defgh
bdef	bdefg	bdefh	bdefgh	abdef	abdefg	abdefh	abdefgh
cdef	cdefg	cdefh	cdefgh	acdef	acdefg	acdefh	acdefgh
abcdef	abcdefg	abcdefh	abcdefgh	bcdef	bcdefg	bcdefh	bcdefgh

FRAÇÃO DE FATORIAL 2^{8-2}

$I = \pm \underline{ABCDE} = \pm \underline{ABFGH} = \pm CDEFGH$

FRAÇÃO 1 +ABCDE, +ABFGH (+BCDEFGH)		FRAÇÃO 2 -ABCDE, +ABFGH (-BCDEFGH)		FRAÇÃO 3 +ABCDE, -ABFGH (-BCDEFGH)		FRAÇÃO 4 -ABCDE, -ABFGH (+BCDEFGH)	
a	ch	ac	h	c	ah	(1)	ach
b	abch	bc	abh	abc	bh	ab	bch
acd	dh	ad	cdh	d	acdh	cd	adh
bcd	abdh	bd	abcdh	abd	bcdh	abcd	bdh
ace	eh	ae	ceh	e	aceh	ce	aeh
bce	abeh	be	abceh	abe	bceh	abce	beh
ade	cdeh	acde	deh	cde	adeh	de	acdeh
bde	abcdeh	bcde	abdeh	abcde	bdeh	abde	bcdeh
cf	afh	f	acfh	af	cfh	acf	fh
abcf	bfh	abf	bcfh	bf	abcfh	bcf	abfh
df	acdfh	cdf	adfh	acdf	dfh	adf	cdfh
abdf	bcdfh	abcdf	bdfh	bcdf	abdfh	bdf	abcdfh
ef	acefh	cef	aefh	acef	efh	aef	cefh
abef	bcefh	abcef	befh	bcef	abefh	bef	abcefh
cdef	adefh	def	acdefh	adef	cdefh	acdef	defh
abcdef	bdefh	abdef	bcdefh	bdef	abcdefh	bcdef	abdefh
cg	agh	g	acgh	ag	cgh	acg	gh
abcg	bgh	abg	bcgh	bg	abcgh	bcg	abgh
dg	acdgh	cdg	adgh	acdg	dgh	adg	cdgh
abdg	bcdgh	abcdg	bdgh	bcdg	abdgh	bdg	abcdgh
eg	acegh	ceg	aegh	aceg	egh	aeg	cegh
abeg	bcegh	abceg	begh	bceg	abegh	beg	abcegh
cdeg	adegh	deg	acdegh	adeg	cdegh	acdeg	degh
abcdeg	bdegh	abdeg	bcdegh	bdeg	abcdegh	bcdeg	abdegh
afg	cfgh	acfg	fgh	cfg	afgh	fg	acfgh
bfg	abcfgh	bcfg	abfgh	abcfg	bfgh	abfg	bcfgh
acdfg	dfgh	adfg	cdfgh	dfg	acdfgh	cdfg	adfgh
bcdfg	abdfgh	bdfg	abcdfgh	abdfg	bcdfgh	abcdfg	bdfgh
acefg	efgh	aefg	cefgh	efg	acefgh	cefg	aefgh
bcefg	abefgh	befg	abcefgh	abefg	bcefgh	abcefg	befgh
adefg	cdefgh	acdefg	defgh	cdefg	adefgh	defg	acdefgh
bdefg	abcdefgh	bcdefg	abdefgh	abcdefg	bdefgh	abdefg	bcdefgh

Para se determinar corretamente as combinações de tratamentos de cada uma das frações, o procedimento é análogo ao utilizado para a fração de fatorial 2^{n-1}.

Como vimos anteriormente, para obtenção da fração cujo gerador leva sinal +, no caso da 2^{8-1} escolhemos as combinações de tratamentos com número ímpar de letras em comum com ABCDE, pois sabemos, devido ao sinal+, que abcde pertence a essa fração, e é uma combinação de tratamentos com número ímpar de letras. Portanto, no caso da 2^{8-2}, na fração relativa a +ABCDE e -ABFGH, por exemplo, estão as combinações de tratamentos com número ímpar e par de letras em comum, respectivamente, com o primeiro e o segundo gerador.

Para concluir, podemos afirmar que essa é a menor fração possível para obtermos um experimento que não confunda efeitos principais nem interações de 2 fatores. De fato, pois, para obtermos a fração de fatorial 2^{8-3} precisamos de 3 geradores na relação identidade, e através do procedimento utilizado anteriormente, observamos não ser possível a determinação de tais geradores sem confundirmos efeitos principais nem interações de 2 fatores.

Generalizando o que vimos, quando trabalhamos com uma fração 2^m de um fatorial 2^n, estamos testando 2^{n-m} combinações de tratamentos com $2^{n-m} - 1$ graus de liberdade. Dos $2^n - 1$ efeitos e interações do modelo completo, temos $2^m - 1$ confundidos e os $2^n - 2^m$ restantes mutuamente confundidos em $2^{n-m} - 1$ grupos de 2^m elementos. A relação identidade tem a forma:

$$I = \underline{X} = \underline{Y} = XY = \underline{Z} = XZ = YZ = XYZ = \underline{W} = \ldots$$

com p interações X, Y, Z, W, etc.

TABELA 20 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 2^{8-2}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = \pm ABCDE = \pm ABFGH = \pm CDEFGH$

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	BCDE, BFGH, ACDEFGH	AB	CDE, FGH, ABCDEFGH
B	ACDE, AFGH, BCDEFGH	AC	BDE, BCFGH, ADEFGH
C	ABDE, ABCFGH, DEFGH	AD	BCE, BDFGH, ACEFGH
D	ABCE, ABDFGH, CEFGH	AE	BCD, BEFGH, ACDFGH
E	ABCD, ABEFGH, CDFGH	AF	BCDEF, BGH, ACDEGH
F	ABCDEF, ABGH, CDEGH	AG	BCDEG, BFH, ACDEFH
G	ABCDEG, ABFH, CDEFH	AH	BCDEH, BFG, ACDEFG
H	ABCDEH, ABFG, CDEFG	BC	ADE, ACFGH, BDEFGH
		BD	ACE, ADFGH, BCEFGH
		BE	ACD, AEFGH, BCDFGH
		BF	ACDEF, AGH, BCDEGH
		BG	ACDEG, AFH, BCDEFH
		BH	ACDEH, AFG, BCDEFG
		CD	ABE, ABCDFGH, EFGH
		CE	ABD, ABCEFGH, DFGH
		CF	ABDEF, ABCGH, DEGH
		CG	ABDEG, ABCFH, DEFH
		CH	ABDEH, ABCFG, DEFG
		DE	ABC, ABDEFGH, CFGH
		DF	ABCEF, ABDGH, CEGH
		DG	ABCEG, ABDFH, CEFH
		DH	ABCEH, ABDFG, CEFG
		EF	ABCDF, ABEGH, CDGH
		EG	ABCDG, ABEFH, CDFH
		EH	ABCDH, ABEFG, CDFG
		FG	ABCDEFG, ABH, CDEH
		FH	ABCDEFH, ABG, CDEG
		GH	ABCDEGH, ABF, CDEF

Tabela 21 - Análise da variância para a fração de fatorial 2^{8-2}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = \pm ABCDE = \pm ABFGH = \pm CDEFGH$

C.V.	G.L.
Efeitos principais	8
Interações de 2 fatores	28
Resíduo	27
TOTAL	63

Dos exemplos que acabamos de estudar, observamos que a fim de obtermos experimentos tais que efeitos principais nem interações de 2 fatores sejam confundidas, os geradores devem ser palavras(ou interações) de no mínimo 5 letras, donde alguns autores denominarem tais planos de "Planos de 5 Letras", e outros de "Experimentos de Resolução V".

3.1.3 - Experimentos de resolução V

Vimos no item anterior que nos interessa trabalhar com experimentos gerados por palavras de no mínimo 5 letras, ou seja, com os experimentos de resolução V, de acordo com a classificação de Box e Hunter. A partir daí podemos dizer que a resolução de um plano experimental é o número de letras na menor palavra da relação identidade, sendo que o número máximo possível de letras na mesma é $n \cdot 2^{m-1}$.

Antes porém de abordarmos o problema da construção de experimentos de resolução V, vamos apresentar um exemplo de experimento de resolução III e um de resolução IV para o caso da fração de fatorial 2^{8-2}, de acordo com MANSON (1976).

Vamos denotar uma fração de fatorial 2^{n-m} por 2^{n-m}_{III}, 2^{n-m}_{IV} e 2^{n-m}_{V} para indicar resolução III, IV e V, respectivamente.

EXEMPLO 1 - Obtenção de um plano de resolução III para a fração de fatorial 2^{8-2}, ou seja, obtenção de um 2^{8-2}_{III}.

Para facilidade de notação, vamos chamar:

$$\begin{cases} n = 8 \\ n - m = 2 \implies m = 6 \end{cases}$$

Logo, teremos 2^2 blocos com 2^6 unidades cada. Seja o conjunto de efeitos e interações para o 2^6 completo:

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_6, X_1X_2, X_1X_3, \ldots, X_5X_6, X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, \ldots,$$
$$X_4X_5X_6, X_1X_2X_3X_4, X_1X_2X_3X_5, \ldots, X_3X_4X_5X_6, X_1X_2X_3X_4X_5,$$
$$X_1X_2X_3X_4X_6, \ldots, X_2X_3X_4X_5X_6, X_1X_2X_3X_4X_5X_6\}$$

Dentre os 63 efeitos e interações acima, devemos escolher n (=8), a fim de determinarmos os 2 geradores adequados ao nosso caso. Selecionamos, então, os seguintes: X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_1X_3, X_2X_5, e a cada um deles atribuímos uma das letras que representam os 8 fatores em estudo, no caso, A, B, C, D, E, F, G e H, como segue:

A	B	C	D	E	F	G	H
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_1X_3	X_2X_5

A partir daí obtemos a relação identidade:

$$I = \pm \underline{ACG} = \pm \underline{BEH} = \pm ABCEGH \quad .$$

A obtenção dos 4 experimentos é feita como mostramos no item 3.1.2.

OBSERVAÇÕES:

1. Das três letras de cada um dos geradores, as duas primeiras representam efeitos fatoriais e a terceira a interação generalizada dos mesmos, pois dessa forma obtemos a unidade e portanto o que está confundido com blocos.

   Exemplo: ACG $\Longleftrightarrow$ $X_1X_3(X_1X_3) = X_1^2X_3^2 = 1$.

2. Selecionamos m(=6) quaisquer dentre os efeitos e interações do fatorial completo, e n-m(=2) interações generalizadas, sendo cada uma delas o produto de duas quaisquer das m selecionadas inicialmente.

3. Existem, portanto, muitas formas distintas de apresentarmos a relação identidade. No caso do nosso exemplo, podemos escolher por exemplo:

A	B	C	D	E	F	G(AB)	H(DF)
$X_1X_2X_3$	$X_1X_2X_4$	$X_1X_2X_5$	$X_1X_2X_6$	$X_1X_3X_4$	$X_1X_3X_5$	X_3X_4	$X_2X_3X_5X_6$

obtendo a relação identidade:

$$I = \pm \underline{ABG} = \pm \underline{DFH} = \pm ABDFGH \quad .$$

4. Todas as letras na relação identidade aparecem exatamente duas vezes, sendo uma em um dos geradores e outra na interação generalizada.

NOTA: As quatro observações acima são válidas para os delineamentos de resolução III e se generalizam para aqueles de resolução IV e V, sendo que para os últimos casos temos alguma modificação na observação 2.

EXEMPLO 2 - Obtenção da fração de fatorial 2_{IV}^{8-2}.

Os passos a seguir para obtenção de uma relação identidade adequada são os seguintes:

a) Escrevemos o fatorial completo 2^m, que no caso implica no 2^6 (ver exemplo 1).

b) Desse conjunto de $2^m - 1$ (=63) efeitos e interações selecionamos um subconjunto tal que a representação de qualquer um de seus membros não seja a interação generalizada de 2 quaisquer dos outros. A fim de obtermos um subconjunto adequado selecionamos os 32 efeitos e interações com número ímpar de letras:

$\{X_1, X_2, \ldots, X_6, X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, \ldots, X_4X_5X_6, X_1X_2X_3X_4X_5, X_1X_2X_3X_4X_6, \ldots, X_2X_3X_4X_5X_6\}$

c) Desse subconjunto selecionamos n (=8) elementos, de acordo com a observação 2. Seja, por exemplo:

A	B	C	D	E	F	G	H
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$X_1X_2X_3$	$X_3X_5X_6$

A relação identidade, nesse caso, é dada por:

$$I = \pm \underline{ABCG} = \pm \underline{CEFH} = \pm ABEFGH \quad .$$

No caso do 2_{III}^{8-2} temos interações de 2 fatores como aliados de efeitos principais, e vice-versa; no caso do 2_{IV}^{8-2} nenhum dos efeitos principais tem por aliado interações de 2 fatores (eles se aliam apenas com interações de alta ordem), porém algumas se confundem mutuamente.

Portanto, nos planos de resolução III para que todos os efeitos principais sejam estimáveis, é necessário considerarmos insignificantes algumas interações de 2 fatores. Nos planos de resolução IV, todos os efeitos principais são estimáveis, desde que as interações de ordem maior ou igual a 3 sejam consideradas insignificantes.

Assim sendo, a fim de estimarmos todos os efeitos principais e interações de 2 fatores, precisamos de um plano de resolução V. O procedimento para sua obtenção consiste em generalizar o que acabamos de ver.

Vejamos então, no caso da fração de fatorial 2^{8-2}, como encontrar uma relação identidade tal que todos os efeitos principais e interações de 2 fatores sejam estimáveis, ou seja, como obter um plano de resolução V.

EXEMPLO 3 - Obtenção de um 2_{V}^{8-2}.

Na obtenção de planos de resolução V, os passos a seguir são os seguintes:

a) Escrevemos o fatorial completo 2^m ($=2^6$) [ver exemplo 1];

b) Desse conjunto de $2^m - 1$ (=63) efeitos e interações, selecionamos um subconjunto tal que a representação de qualquer um de seus membros não seja a interação generalizada de 2 ou 3 quaisquer dos outros membros.

b.1) Nesse subconjunto devemos ter n (=8) elementos. De acordo com a observação 2, selecionamos m dentre o total de efeitos e interações do fatorial 2^m completo, lembrando que no caso de planos de resolução V esses elementos devem ser os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 .$$

Temos obtido, então, um 2^6_V com 63 combinações de tratamentos.

b.2) O 7º membro do subconjunto não pode ser nenhuma das interações de 2 ou 3 fatores, pois qualquer uma delas pode ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 membros do subconjunto, respectivamente. Vamos escolher, então, uma interação de 4 fatores, que não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 quaisquer dos membros do subconjunto. Seja, por exemplo, a interação:

$$[1] \qquad X_1 X_2 X_3 X_4$$

Temos agora um 2^7_V com 63 combinações de tratamentos.

b.3) O 8º membro do subconjunto também deve ser uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com aquelas em [1], pois se tomarmos interações de 2 ou 3 fatores, podemos, como vimos no item b.2, escrevê-las como generalizadas de 2 ou 3 membros quaisquer do subconjunto, respectivamente. Se tomamos uma interação de 4 fatores com 3 letras em comum com aquelas em [1], conseguimos escreve-la como a generalizada da interação [1] com dois efeitos principais adequados. Assim, escolhemos:

$$[2] \quad X_1\, X_2\, X_5\, X_6 \quad .$$

Devemos considerar também a generalizada:

$$[1] \times [2]: \quad X_3\, X_4\, X_5\, X_6 \quad .$$

Temos finalmente um 2_V^8 com 63 combinações de tratamentos, ou seja, um 2_V^{8-2}.

Para obtenção da relação identidade temos:

A	B	C	D	E	F	G	H
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X	$X_1X_2X_3X_4$	$X_1X_2X_5X_6$

donde:

$$I = \pm \underline{ABCDG} = \pm \underline{ABEFH} = \pm CDEFGH \quad .$$

A análise da variância para um 2_V^{8-2} é aquela apresentada na tabela 21, pois naquele caso também temos um plano de resolução V para a fração de fatorial 2^{8-2}.

EXEMPLO 4 - Obtenção de um 2_V^{9-2}.

a) Escrevemos o fatorial completo 2^7:

$\{X_1, X_2, \ldots X_7, X_1X_2, X_1X_3, \ldots, X_6X_7, X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, \ldots,$
$X_5X_6X_7, X_1X_2X_3X_4, X_1X_2X_3X_5, \ldots, X_4X_5X_6X_7, X_1X_2X_3X_4X_5,$
$X_1X_2X_3X_4X_6, \ldots, X_3X_4X_5X_6X_7, X_1X_2X_3X_4X_5X_6, X_1X_2X_3X_4X_5X_7, \ldots,$
$X_2X_3X_4X_5X_6X_7, X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7\}$

b) Desse conjunto de 127 elementos selecionamos um subconjunto com 9, tal que a representação de qualquer um de seus membros não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 quaisquer dos demais membros.

b.1) Para os 7 primeiros membros do subconjunto escolhemos os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \quad ,$$

obtendo um 2_V^7 com 127 combinações de tratamentos.

b.2) O 8º membro do subconjunto deve ser qualquer uma das 35 interações de 4 fatores existentes no conjunto do item a, por exemplo:

$$[1] \quad X_1\ X_3\ X_5\ X_7 \quad ,$$

obtendo assim um 2_V^8 com 127 combinações de tratamentos.

b.3) Para o 9º membro do subconjunto também devemos ter uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com aquelas em [1]. Seja por exemplo:

$$[2] \quad X_1\ X_2\ X_5\ X_6 \quad ,$$

obtendo assim um 2_V^9 com 127 combinações de tratamentos, lembrando da generalizada:

$$[1] \times [2]: \; X_2 \, X_3 \, X_6 \, X_7$$

Logo, o subconjunto completo é dado por:

A	B	C	D	E	F	G	H	J
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	$X_1X_3X_5X_7$	$X_1X_2X_5X_6$

donde obtemos a relação identidade:

$$I = \pm \underline{ACEGH} = \pm \underline{ABEFJ} = \pm BCFGHJ$$

TABELA 22 - Análise da variância para a fração de fatorial 2_V^{9-2}.

C.V.	G.L.
Efeitos principais	9
Interações de 2 fatores	36
Resíduo	82
TOTAL	127

EXEMPLO 5 - Obtenção de um 2_V^{9-3} .

a) Escrevemos o fatorial completo 2^6 [ver exemplo 1].

b) Desse conjunto de 63 efeitos e interações, selecionamos um subconjunto de 9 elementos, tal que a representação de qualquer um de seus membros não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 quaisquer dos outros membros.

b.1) Os 6 primeiros elementos do subconjunto são efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \quad .$$

e dão um 2_V^6 com 63 combinações de tratamentos.

b.2) O 7º elemento do subconjunto é qualquer uma das 15 interações de 4 fatores do conjunto do item a, por exemplo:

$$[1] \qquad X_1\, X_4\, X_5\, X_6$$

Temos então um 2_V^7 com 63 combinações de tratamentos.

b.3) Para o 8º membro do subconjunto escolhemos outra interação de 4 fatores que tenha no máximo duas letras em comum com aquelas em [1], por exemplo:

$$[2] \qquad X_1\, X_2\, X_3\, X_6$$

obtendo um 2_V^8 com 63 combinações de tratamentos. A generalizada de [1] e [2] é dada por:

$$[1] \times [2]: \; X_2\, X_3\, X_4\, X_5 \quad .$$

b.4) Para o 9º membro do subconjunto devemos considerar, também, uma interação que não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 quaisquer dentre os 8 elementos já selecionados. Vamos então examinar todas as interações de 4 ou mais fatores, a fim de determinarmos aquela(s) que satisfaça(m) a condição exigida.

$$X_1X_2X_3X_4 = (X_1X_2X_3X_6)(X_4)(X_6)$$
$$X_1X_2X_3X_5 = (X_1X_2X_3X_6)(X_5)(X_6)$$
$$X_1X_2X_4X_5 = (X_1X_4X_5X_6)(X_2)(X_6)$$
$$X_1X_2X_4X_6 = (X_1X_4X_5X_6)(X_2)(X_5)$$
$$X_1X_2X_5X_6 = (X_1X_2X_3X_6)(X_3)(X_5)$$
$$X_1X_3X_4X_5 = (X_1X_4X_5X_6)(X_3)(X_6)$$
$$X_1X_3X_4X_6 = (X_1X_2X_3X_6)(X_2)(X_4)$$
$$X_1X_3X_5X_6 = (X_1X_2X_3X_6)(X_2)(X_5)$$
$$X_2X_3X_4X_6 = (X_1X_2X_3X_6)(X_1)(X_4)$$
$$X_2X_3X_5X_6 = (X_1X_2X_3X_6)(X_1)(X_5)$$
$$X_2X_4X_5X_6 = (X_1X_4X_5X_6)(X_1)(X_2)$$
$$X_3X_4X_5X_6 = (X_1X_4X_5X_6)(X_1)(X_3)$$
$$X_1X_2X_3X_4X_5 = (X_1X_4X_5X_6)(X_1X_2X_3X_6)(X_1) = (X_2X_3X_4X_5)(X_1)$$
$$X_1X_2X_3X_4X_6 = (X_1X_2X_3X_6)(X_4)$$
$$X_1X_2X_3X_5X_6 = (X_1X_2X_3X_6)(X_5)$$
$$X_1X_2X_4X_5X_6 = (X_1X_4X_5X_6)(X_2)$$
$$X_1X_3X_4X_5X_6 = (X_1X_4X_5X_6)(X_3)$$
$$X_2X_3X_4X_5X_6 = (X_1X_4X_5X_6)(X_1X_2X_3X_6)(X_6) = (X_2X_3X_4X_5)(X_6)$$
$$X_1X_2X_3X_4X_5X_6 = (X_1X_4X_5X_6)(X_2)(X_3) = (X_1X_2X_3X_6)(X_4)(X_5)$$

Portanto, como vemos, não existe nenhuma interação de 4 ou mais fatores no conjunto do item a, que não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 dos 8 membros já selecionados para o subconjunto.

Concluímos, pois, que para $n = 9$, 2^7 é o número mínimo de unidades experimentais que suporta resolução V.

EXEMPLO 6 - Obtenção do 2_V^{10-2}.

a) Escrevemos o fatorial 2^8 completo. Esse conjunto, cujos elementos não vamos listar por ser muito extenso, possui 255 combinações de tratamentos, sendo: $8 = \binom{8}{1}$ efeitos principais, $28 = \binom{8}{2}$ interações de 2 fatores, $56 = \binom{8}{3}$ interações de 3 fatores, $70 = \binom{8}{4}$ interações de 4 fatores, $56 = \binom{8}{5}$ interações de 5 fatores, $28 = \binom{8}{6}$ interações de 6 fatores, $8 = \binom{8}{7}$ interações de 7 fatores e uma interação de 8 fatores.

b) Desse conjunto selecionamos 10 elementos de tal forma que a representação de qualquer um deles não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 membros dentre os demais.

b.1) Os 8 primeiros elementos do subconjunto são os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 \quad ,$$

e dão um 2_V^8 com 255 combinações de tratamentos.

b.2) O 9º membro do subconjunto é uma interação de 4 fatores, por exemplo:

$$[1] \quad X_2 X_5 X_7 X_8 \quad ,$$

dando um 2_V^9 com 255 combinações de tratamentos.

b.3) O 10º elemento do subconjunto é uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com aquelas em [1], por exemplo:

$$[2] \quad X_1\, X_3\, X_7\, X_8 .$$

Temos agora um 2_V^{10} com 255 combinações de tratamentos. Não podemos esquecer da generalizada de [1] e [2], dada por:

$$X_1\, X_2\, X_3\, X_5 \quad .$$

Finalmente, temos o subconjunto procurado:

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	$X_2X_5X_7X_8$	$X_1X_3X_7X_8$

donde tiramos a relação identidade:

$$I = \pm \underline{BEGHJ} = \pm \underline{ACGHK} = \pm ABCEJK \quad .$$

TABELA 23 - Análise da variância para a fração de fatorial 2_V^{10-2}.

C.V.	G.L.
Efeitos principais	10
Interações de 2 fatores	45
Resíduo	200
TOTAL	255

EXEMPLO 7 - Obtenção do 2_V^{10-3}.

a) Escrevemos o fatorial completo 2^7 [ver exemplo 4].

b) Desse conjunto selecionamos 10 elementos tal que a representação de qualquer de seus membros não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 quaisquer dos outros membros.

b.1) Os 7 primeiros elementos são os efeitos principais

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$$

dando um 2_V^7 com 127 combinações de tratamentos.

b.2) O 8º membro do subconjunto é uma interação de 4 fatores, por exemplo:

$$[1] \quad X_4 X_5 X_6 X_7$$

Temos agora um 2_V^8 com 127 combinações de tratamentos.

b.3) O 9º membro do subconjunto, de acordo com o que vimos anteriormente pode ser, por exemplo:

$$[2] \quad X_1 X_2 X_5 X_6 \quad ,$$

dando um 2_V^9 com 127 combinações de tratamentos. A generalizada de [1] e [2] é dada por:

$$[1] \times [2]\colon X_1 X_2 X_4 X_7 \ .$$

b.4) O 10º membro do subconjunto deve ser uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com cada uma das anteriores, por exemplo:

$$[3] \quad X_2\, X_3\, X_5\, X_7$$

Com isso temos um 2_V^{10} com 127 combinações de tratamentos.

As generalizadas agora são:

$$[1] \times [3]: \quad X_2\, X_3\, X_4\, X_6$$

$$[2] \times [3]: \quad X_1\, X_3\, X_6\, X_7$$

$$[1] \times [2] \times [3]: \quad X_1\, X_3\, X_4\, X_5$$

O subconjunto completo é dado então, por:

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	$X_4X_5X_6X_7$	$X_1X_2X_5X_6$	$X_2X_3X_5X_7$

e a relação identidade é:

$$I = \pm\, \underline{DEFGH} = \pm\, \underline{ABEFJ} = \pm\, ABDGHJ = \pm\, \underline{BCEGK} = \pm\, BCDFHK =$$
$$= \pm\, ACFGJK = \pm\, ACDEHJK$$

TABELA 24 - Análise da variância para a fração de fatorial 2_V^{10-3}.

C.V.	G.L.
Efeitos principais	10
Interações de 2 fatores	45
Resíduo	72
TOTAL	127

EXEMPLO 8: Obtenção do 2_V^{10-4}.

a) Escrevemos o fatorial completo 2^6 [ver exemplo 1].

b) Desse conjunto selecionamos 10 elementos tal como nos exemplos anteriores.

b.1) Os 6 primeiros elementos desse subconjunto são os efeitos principais

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$$

e nos dão um 2_V^6 com 63 combinações de tratamentos.

b.2) O 7º elemento é uma interação de 4 fatores, por exemplo:

$$[1] \quad X_1 X_2 X_3 X_5$$

Temos agora um 2_V^7 com 63 combinações de tratamentos.

b.3) O 8º elemento procurado também é uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com aquelas em [1], por exemplo:

$$[2] \quad X_3 X_4 X_5 X_6$$

dando um 2_V^8 com 63 combinações de tratamentos.

A generalizada de [1] e [2] é dada por:

$$[1] \times [2]: X_1 X_2 X_4 X_6 \quad .$$

b.4) O 9º elemento do subconjunto é uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com cada uma das anteriores, como vimos anteriormente.

Porém, se examinarmos todas as demais interações de 4 ou mais fatores, não conseguimos encontrar nenhuma que não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 dos 8 membros já determinados para o subconjunto.

Portanto, a fração de fatorial 2^{10-4} não se adapta a um delineamento de resolução V, donde concluimos que 2^7, quando n = 10, é o nº mínimo de unidades experimentais que suporta resolução V.

EXEMPLO 9 - Obtenção do 2_V^{11-2}.

a) Escrevemos o fatorial completo 2^9. Não vamos listar as 511 combinações de tratamentos por ser esse um número bastante grande. Lembramos porém, que dentre essas 511 combinações de tratamentos existem $9 = \binom{9}{1}$ efeitos principais, $36 = \binom{9}{2}$ interações de 2 fatores, $84 = \binom{9}{3}$ interações de 3 fatores, $126 = \binom{9}{4}$ interações de 4 fatores, $126 = \binom{9}{5}$ interações de 5 fatores, $84 = \binom{9}{6}$ interações de 6 fatores, $36 = \binom{9}{7}$ interações de 7 fatores, $9 = \binom{9}{8}$ interações de 8 fatores e uma interação de 9 fatores.

b) Desse conjunto selecionamos 11 elementos obtendo um subconjunto tal como foi explicado anteriormente.

b.1) Os 9 primeiros elementos do subconjunto são os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$$

que nos dão um 2_V^9 com 511 combinações de tratamentos.

b.2) Para o 10º elemento do subconjunto, escolhemos a interação de 4 fatores

$$[1] \quad X_1\ X_5\ X_6\ X_9$$

obtendo um 2_V^{10} com 511 combinações de tratamentos.

b.3) O 11º elemento do subconjunto pode ser, por exemplo, a interação de 4 fatores

$$[2] \quad X_1\ X_3\ X_7\ X_9$$

com duas letras em comum com aquelas em [1].

Obtemos assim, um 2_V^{11} com 511 combinações de tratamentos, e a generalizada

$$[1] \times [2]: X_3\ X_5\ X_6\ X_7 \quad .$$

Finalmente temos todos os elementos para o subconjunto:

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	$X_1X_5X_6X_9$	$X_1X_3X_7X_9$

A partir daí obtemos a relação identidade:

$$I = \pm \underline{AEFJK} = \pm \underline{ACGJL} = \pm CEFGKL$$

TABELA 25 - Análise da variância para a fração de fatorial 2_V^{11-2}.

C.V.	G.L.
Efeitos principais	11
Interações de 2 fatores	55
Resíduo	455
TOTAL	511

EXEMPLO 10 - Obtenção do 2_V^{11-3}.

a) Escrevemos o fatorial 2^8 completo. Como no caso anterior, aqui também não vamos listar os elementos do conjunto que possui $8 = \binom{8}{1}$ efeitos principais, $28 = \binom{8}{2}$ interações de 2 fatores, $56 = \binom{8}{3}$ interações de 3 fatores, $70 = \binom{8}{4}$ interações de 4 fatores, $56 = \binom{8}{5}$ interações de 5 fatores, $28 = \binom{8}{6}$ interações de 6 fatores, $8 = \binom{8}{7}$ interações de 7 fatores e uma interação de 8 fatores.

b) Desse conjunto selecionamos um subconjunto com 11 elementos tal como nos exemplos anteriores.

b.1) Os 8 primeiros elementos do subconjunto são os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 ,$$

que nos dão um 2_V^8 com 255 combinações de tratamentos.

b.2) O 9º elemento pode ser qualquer uma das 28 interações de 4 fatores, por exemplo:

$$[1] \quad X_1\, X_2\, X_3\, X_4$$

Temos assim um 2_V^9 com 255 combinações de tratamentos.

b.3) O 10º elemento é uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com aquelas em [1], por exemplo:

$$[2] \quad X_1\, X_2\, X_7\, X_8$$

dando um 2_V^{10} com 255 combinações de tratamentos. A generalizada de [1] e [2] é dada por:

$$[1] \times [2]: \; X_3\, X_4\, X_7\, X_8$$

b.4) O 11º elemento deve ser uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com cada uma das anteriores,por exemplo:

$$[3] \quad X_1\, X_3\, X_6\, X_7$$

gerando um 2_V^{11} com 255 combinações de tratamentos. As generalizadas são:

$$[1] \times [3]: \; X_2\, X_4\, X_6\, X_7$$
$$[2] \times [3]: \; X_2\, X_3\, X_6\, X_8$$
$$[1] \times [2] \times [3]: \; X_1\, X_4\, X_6\, X_8$$

Observamos que as generalizadas também têm no máximo duas letras em comum cada uma das anteriores.

Os elementos do subconjunto completo são então:

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	$X_1X_2X_3X_4$	$X_1X_2X_7X_8$	$X_1X_3X_6X_7$

que dão origem à relação identidade:

$$I = \pm \underline{ABCDJ} = \pm \underline{ABGHK} = \pm CDGHJK = \pm \underline{ACFGL} = \pm BDFGJL =$$
$$= \pm BCFHKL = \pm ADFHJKL$$

TABELA 26 - Análise da variância para a fração de fatorial 2_V^{11-3}.

C.V.	G.L.
Efeitos principais	11
Interações de 2 fatores	55
Resíduo	189
TOTAL	255

EXEMPLO 11: Obtenção do 2_V^{11-4}.

a) Escrevemos o fatorial completo 2^7 [ver exemplo 4].

b) Desse conjunto selecionamos 11 elementos formando um subconjunto tal como o visto anteriormente.

b.1) Os 7 primeiros elementos desse subconjunto são os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$$

que nos dão um 2_V^7 com 127 combinações de tratamentos.

b.2) O 8º elemento, de acordo com nossa escolha, é

$$[1] \quad X_1 X_2 X_3 X_4$$

e nos dá um 2_V^8 com 127 combinações de tratamentos.

b.3) O 9º elemento é uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com aquelas em [1], por exemplo:

$$[2] \quad X_1 X_2 X_5 X_6$$

Temos assim um 2_V^9 com 127 combinações de tratamentos e a generalizada:

$$[1] \times [2]: X_3 X_4 X_5 X_6$$

b.4) O 10º elemento deve ser uma interação de 4 fatores com no máximo duas letras em comum com cada uma das anteriores, por exemplo:

$$[3] \quad X_1 X_3 X_5 X_7$$

Isso nos dá um 2_V^{10} com 127 combinações de tratamentos e as generalizadas:

$$[1] \times [3]: X_2 X_4 X_5 X_7$$

$$[2] \times [3]: X_2 X_3 X_6 X_7$$

$$[1] \times [2] \times [3]: X_1 X_4 X_6 X_7$$

b.5) A fim de encontrarmos adequadamente o 11º membro do nosso subconjunto, examinamos todas as demais interações de 4 ou mais fatores e concluímos que uma interação que não possa ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 membros quaisquer do subconjunto deve ter, no máximo, 3 letras em comum com cada uma das anteriores, não esquecendo das generalizadas. Assim, escolhemos

$$[4] \quad X_2 \; X_4 \; X_6 \; X_7$$

obtendo um 2_V^{11} com 127 combinações de tratamentos, e as generalizadas:

$$
\begin{aligned}
[1] \times [4]&: X_1 \; X_3 \; X_6 \; X_7 \\
[2] \times [4]&: X_1 \; X_4 \; X_5 \; X_7 \\
[1] \times [2] \times [4]&: X_2 \; X_3 \; X_5 \; X_7 \\
[3] \times [4]&: X_1 \; X_2 \; X_3 \; X_4 \; X_5 \; X_6 \\
[1] \times [3] \times [4]&: X_5 \; X_6 \\
[2] \times [3] \times [4]&: X_3 \; X_4 \\
[1] \times [2] \times [3] \times [4]&: X_1 \; X_2
\end{aligned}
$$

Como vemos, as três últimas interações generalizadas são interações de 2 fatores, e porisso concluímos que a fração de fatorial 2^{11-4} não se adapta a um experimento de resolução V, ou seja, para n = 11, o 2^8 é o número mínimo de unidades experimentais que suporta resolução V.

Não achamos necessário apresentar exemplos para o caso da fração de fatorial 2^{n-1} ($n \geq 5$), pois nesse caso podemos tomar para gerador qualquer interação de 5 ou mais fatores. Lembramos, porém, que em geral costumamos escolher a interação de mais alta ordem, por exemplo, para o 2_V^{7-1} temos:

$$I = \pm ABCDEFG \quad .$$

3.1.4 - Fatoriais fracionados em blocos

Se adaptarmos, por exemplo, a fração de fatorial 2^{8-2} a um experimento completamente aleatorizado, trabalhamos com 64 unidades experimentais, que no caso de não serem muito semelhantes nos obrigam a utilizar um experimento em blocos casualizados.

Nesse item vamos mostrar como obter as interações a serem confundidas com blocos, num plano de resolução V.

A fim de facilitar nosso trabalho, recordamos um teorema de Fisher, cujo resultado, de acordo com MANSON (1976), é o seguinte:

> "Para um fatorial 2^n em 2^{n-m} blocos de 2^m unidades cada, tal que nenhum efeito principal ou interação de 2 fatores sejam confundidos com blocos, deve-se ter
>
> $n \leq 2^m - 1$ (tamanho do bloco - 1)
>
> e, para que nenhum efeito principal, nem interação de 2 ou 3 fatores sejam confundidos com blocos,
>
> $n \leq 2^{m-1}$ (metade do tamanho do bloco)".

Logo, pelo teorema acima, para construirmos blocos de:

2^2 unidades, precisamos ter $n \leq 3$ (é evidente que esse caso não é do nosso interesse),
2^3 unidades, precisamos ter $n \leq 7$,
2^4 unidades, precisamos ter $n \leq 15$,
2^5 unidades, precisamos ter $n \leq 31$,
....
2^m unidades, precisamos ter $n \leq 2^m - 1$,

a fim de não confundirmos efeitos principais nem interações de 2 fatores.

Convém salientarmos que essa é uma condição apenas necessária, não sendo, porém, suficiente.

EXEMPLO 1 - Seja o 2_{V}^{8-2}. Pelo teorema de Fisher sabemos que são três tipos possíveis de confundimento, ou seja, podemos confundir o 2_{V}^{8-2} em:

2 blocos de 2^5 unidades, ou

2^2 blocos de 2^4 unidades, ou

2^3 blocos de 2^3 unidades.

Vamos escolher o segundo caso. Precisamos, então, de duas interações para confundir com blocos.

Consideramos aqui a relação identidade do exemplo 7 da secção 3.1.2, e escolhemos o delineamento em que os 2 geradores levam o sinal +, ou seja,

$$I = +\underline{ABCDE} = +\underline{ABFGH} = +CDEFGH \quad .$$

As duas interações a serem confundidas com blocos devem ser tais que as suas generalizadas com as interações presentes na relação identidade não sejam efeitos principais nem interações de 2 fatores. Devemos observar também se a generalizada entre as duas interações escolhidas, com aquelas presentes na relação identidade, não resulta em efeitos principais ou interações de 2 fatores.

Exemplificando, se escolhemos para confundir com blocos as interações ACEGH, ADEFG, e, portanto, CDFH, confundimos uma interação de 2 fatores, pois multiplicando cada uma delas pela relação identidade obtemos interações generalizadas que também ficam confundidas com blocos, como vemos:

$$I = + \underline{ABCDE} = + \underline{ABFGH} = + CDEFGH \Longrightarrow$$

$$\underline{ACEGH} = BDGH = BCEF = ADF$$

$$\underline{ADEFG} = BCFG = BDEH = ACH$$

$$CDFH = ABEFH = ABCDG = EG$$

Por outro lado, se escolhemos para confundir com blocos as interações ACDFG, BCEFH, e, portanto, ABDEGH, confundimos também

$$\underline{ACDFG} = BEFG = BCDH = AEH$$

$$\underline{BCEFH} = ADFH = ACEG = BDG$$

$$ABDEGH = CGH = DEF = ABCF$$

Logo, nesse caso não confundimos nenhum efeito principal ou interação de 2 fatores, e os 4 blocos são dados por:

BLOCO 1	BLOCO 2	BLOCO 3	BLOCO 4
$ACDFG_0$, $BCEFH_0$ ($ABDEGH_0$)	$ACDFG_1$, $BCEFH_0$ ($ABDEGH_1$)	$ACDFG_0$, $BCEFH_1$ ($ABDEGH_1$)	$ACDFG_1$, $BCEFH_1$ ($ABDEGH_0$)
A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H
0 1 1 1 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0	1 0 1 1 0 0 0 0
1 0 1 0 1 0 0 0	0 1 0 1 1 0 0 0	1 0 0 1 1 0 0 0	0 1 1 0 1 0 0 0
0 0 1 0 0 1 0 0	1 1 0 1 0 1 0 0	0 0 0 1 0 1 0 0	1 1 1 0 0 1 0 0
1 1 1 1 1 1 0 0	0 0 0 0 1 1 0 0	1 1 0 0 1 1 0 0	0 0 1 1 1 1 0 0
0 0 0 1 0 0 1 0	1 1 1 0 0 0 1 0	0 0 1 0 0 0 1 0	1 1 0 1 0 0 1 0
1 1 0 0 1 0 1 0	0 0 1 1 1 0 1 0	1 1 1 1 1 0 1 0	0 0 0 0 1 0 1 0
0 1 0 0 0 1 1 0	1 0 1 1 0 1 1 0	0 1 1 1 0 1 1 0	1 0 0 0 0 1 1 0
1 0 0 1 1 1 1 0	0 1 1 0 1 1 1 0	1 0 1 0 1 1 1 0	0 1 0 1 1 1 1 0
1 1 0 1 0 0 0 1	0 0 1 0 0 0 0 1	1 1 1 0 0 0 0 1	0 0 0 1 0 0 0 1
0 0 0 0 1 0 0 1	1 1 1 1 1 0 0 1	0 0 1 1 0 0 0 1	1 1 0 0 1 0 0 1
1 0 0 0 0 1 0 1	0 1 1 1 0 1 0 1	1 0 1 1 0 1 0 1	0 1 0 0 0 1 0 1
0 1 0 1 1 1 0 1	1 0 1 0 1 1 0 1	0 1 1 0 1 1 0 1	1 0 0 1 1 1 0 1
1 0 1 1 0 0 1 1	0 1 0 0 0 0 1 1	1 0 0 0 0 0 1 1	0 1 1 1 0 0 1 1
0 1 1 0 1 0 1 1	1 0 0 1 1 0 1 1	0 1 0 1 1 0 1 1	1 0 1 0 1 0 1 1
1 1 1 0 0 1 1 1	0 0 0 1 0 1 1 1	1 1 0 1 0 1 1 1	0 0 1 0 0 1 1 1
0 0 1 1 1 1 1 1	1 1 0 0 1 1 1 1	0 0 0 0 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1

No primeiro bloco estão as combinações de tratamentos que têm número par de letras em comum com ACDFG e BCEFH e, portanto, número par de letras em comum com ABDEGH. No segundo bloco aquelas com número ímpar de letras em comum com ACDFG, número par de letras em comum com BCEFH e, portanto, número ímpar de letras em comum com ABDEGH. No terceiro bloco estão as que têm número par de letras em comum com BCEFH e, portanto, número ímpar de letras em comum com ABDEGH. No quarto bloco aquelas com número ímpar de letras em comum com ACDFG e BCEFH e, portanto, número par de letras em comum com ABDEGH.

Como o experimento escolhido não inclui entre suas combinações de tratamentos o tratamento controle, denotado por (1), nenhum dos 4 blocos é o subgrupo intrabloco. Mesmo assim, podemos, a partir do primeiro bloco construído, obter os três blocos restantes, como segue.

Construímos o primeiro bloco, procurando, no experimento selecionado, as combinações de tratamentos adequadas, e dispondo-as na "ordem-padrão". Para construirmos o segundo bloco escolhemos uma das combinações de tratamentos que não estão no bloco 1. Feito isso verificamos qual o número modular que somado à primeira combinação de tratamentos do bloco 1 nos dá essa combinação de tratamentos. Somando esse número modular a todas as combinações de tratamentos do bloco 1, obtemos as do bloco 2. No nosso caso, por exemplo, escolhemos para primeira combinação de tratamentos do bloco 2 o a, e o número modular que somado à primeira combinação de tratamentos do bloco 1 nos dá a, é 1 1 1 1 0 0 0 0. Portanto, esse número somado a todas as combinações de tratamentos do bloco 1 nos dá todas as do bloco 2.

Para obtenção dos outros blocos o procedimento é análogo. Assim, para obtenção do bloco 3, inicialmente escolhemos b para ser sua primeira combinação de tratamentos e, portanto, somando o número modular 0 0 1 1 0 0 0 0 a todas as combinações de tratamentos do bloco 1, obtemos o bloco 3 completo. Para a primeira combinação de tratamentos do bloco 4 escolhemos acd, e o número modular que devemos somar às combinações de tratamentos do bloco 1 a fim de completarmos o bloco 4 é, portanto, 1 1 0 0 0 0 0 0.

Se preferirmos trabalhar com apenas 2 blocos de 2^5 unidades, podemos escolher para confundir com blocos, por exemplo, a interação ACDFG. Como vimos anteriormente, confundimos, também, devido à relação identidade,

$$ACDFG = -BEFG = BCDH = -AEH \ .$$

Nesse caso, temos o delineamento confundido nos dois blocos abaixo, sendo que escolhemos para trabalhar, o delineamento dado por -ABCDE e +ABFGH.

BLOCO 1		BLOCO 2	
$ACDFG_o$		$ACDFG_1$	
A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H
1 0 1 0 0 0 0 0	0 1 1 1 1 1 1 0	0 1 1 0 0 0 0 0	1 0 1 1 1 1 1 0
1 0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 1	0 1 0 1 0 0 0 0	1 1 0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0 0 0 1	1 0 0 0 1 0 0 0	1 1 1 1 0 0 0 1
0 1 1 1 1 0 0 0	1 1 1 0 1 0 0 1	1 0 1 1 1 0 0 0	0 0 1 0 1 0 0 1
1 1 0 0 0 1 0 0	1 1 0 1 1 0 0 1	0 0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 1 1 0 0 1
1 1 1 1 0 1 0 0	0 1 1 0 0 1 0 1	0 0 1 1 0 1 0 0	1 0 1 0 0 1 0 1
0 0 1 0 1 1 0 0	0 1 0 1 0 1 0 1	1 1 1 0 1 1 0 0	1 0 0 1 0 1 0 1
0 0 0 1 1 1 0 0	1 0 0 0 1 1 0 1	1 1 0 1 1 1 0 0	0 1 0 0 1 1 0 1
1 1 0 0 0 0 1	1 0 1 1 1 1 0 1	0 0 0 0 0 0 1 0	0 1 1 1 1 1 0 1
1 1 1 1 0 0 1 0	0 1 1 0 0 0 1 1	0 0 1 1 0 0 1 0	1 0 1 0 0 0 1 1
0 0 1 0 1 0 1 0	0 1 0 1 0 0 1 1	1 1 1 0 1 0 1 0	1 0 0 1 0 0 1 1
0 0 0 1 1 0 1 0	1 0 0 0 1 0 1 1	1 1 0 1 1 0 1 0	0 1 0 0 1 0 1 1
1 0 1 0 0 1 1 0	1 0 1 1 1 0 1 1	0 1 1 0 0 1 1 0	0 1 1 1 1 0 1 1
1 0 0 1 0 1 1 0	0 0 0 0 0 1 1 1	0 1 0 1 0 1 1 0	1 1 0 0 0 1 1 1
0 1 0 0 1 1 1 0	0 0 1 1 0 1 1 1	1 0 0 0 1 1 1 0	1 1 1 1 0 1 1 1
	1 1 1 0 1 1 1 1		0 0 1 0 1 1 1 1
	1 1 1 1 1 1 1 1		0 0 0 1 1 1 1 1

Já no caso de querermos confundir as 64 combinações de tratamentos do delineamento, em 2^3 blocos de 2^3 unidades, precisamos encontrar 3 geradores, sem confundir efeitos principais e interações de 2 fatores. Porém, não conseguimos obter 3 geradores de tal forma que nenhum dos graus de liberdade confundidos sejam efeitos principais ou interações de 2 fatores. Esse fato vem apenas confirmar a não suficiência do teorema de Fisher.

Com relação ao 2_V^{8-2} em 2 blocos de 2^5 unidades, que acabamos de ver, observamos que fica muito simples confundi-lo em 2^2 blocos de 2^4 unidades. Para isso basta encontrarmos outro gerador, que como já vimos, pode ser o BCEFH, e dividir em dois cada um dos dois blocos construídos.

EXEMPLO 2 - Seja o 2_V^{7-1}. Pelo teorema de Fisher podemos confundi-lo em:

2 blocos de 2^5 unidades, ou

2^2 blocos de 2^4 unidades, ou

2^3 blocos de 2^3 unidades.

No primeiro caso precisamos de um único gerador, e trabalhando com o delineamento do exemplo 5, da secção 3.1.2, dado pela relação identidade I = -ABCDEFG, devemos escolher uma interação de 3 ou 4 fatores a fim de não confundirmos efeito principal, nem interação de 2 fatores. Assim, podemos tomar por exemplo, a interação ABC, ou ABCD, e dividir o delineamento selecionado em 2 blocos através de procedimento análogo ao que acabamos de ver. Vamos, então, confundir com blocos a interação ABCD:

$$I = -ABCDEFG \implies$$

$$ABCD = EFG$$

BLOCO 1 ABCD$_o$	BLOCO 2 ABCD$_1$
A B C D E F G	A B C D E F G
0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 1 0 0
1 1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 1 0 0
1 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 1 0 0
0 1 1 0 0 0 0	1 1 1 0 1 0 0
1 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 1 0 0
0 1 0 1 0 0 0	1 1 0 1 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0	1 0 1 1 1 0 0
1 1 1 1 0 0 0	0 1 1 1 1 0 0
0 0 0 0 1 1 0	1 0 0 0 0 1 0
1 1 0 0 1 1 0	0 1 0 0 0 1 0
1 0 1 0 1 1 0	0 0 1 0 0 1 0
0 1 1 0 1 1 0	1 1 1 0 0 1 0
1 0 0 1 1 1 0	0 0 0 1 0 1 0
0 1 0 1 1 1 0	1 1 0 1 0 1 0
0 0 1 1 1 1 0	1 0 1 1 0 1 0
1 1 1 1 1 1 0	0 1 1 1 0 1 0
0 0 0 0 1 0 1	1 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 1 0 1	0 1 0 0 0 0 1
1 0 1 0 1 0 1	0 0 1 0 0 0 1
0 1 1 0 1 0 1	1 1 1 0 0 0 1
1 0 0 1 1 0 1	0 0 0 1 0 0 1
0 1 0 1 1 0 1	1 1 0 1 0 0 1
0 0 1 1 1 0 1	1 0 1 1 0 0 1
1 1 1 1 1 0 1	0 1 1 1 0 0 1
0 0 0 0 0 1 1	1 0 0 0 1 1 1
1 1 0 0 0 1 1	0 1 0 0 1 1 1
1 0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1 1
0 1 1 0 0 1 1	1 1 1 0 1 1 1
1 0 0 1 0 1 1	0 0 0 1 1 1 1
0 1 0 1 0 1 1	1 1 0 1 1 1 1
0 0 1 1 0 1 1	1 0 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1	0 1 1 1 1 1 1

No caso de querermos confundir o 2_V^{7-1} em 2^2 blocos de 2^4 unidades, precisamos de duas interações para confundir com blocos, e com o fim de aproveitarmos o que acabamos de fazer, procuramos uma interação no experimento com o qual estamos trabalhando, que juntamente com ABCD não confunda efeitos principais nem interações de 2 fatores, e dividimos ao meio cada um dos 2 blocos anteriores.

Seja, por exemplo, a interação ABFG. Verificamos que ABCD e ABFG satisfazem nossa condição, pois

$$I = -ABCD\,EFG \Longrightarrow$$

$$\underline{ABCD} = -EFG$$

$$\underline{ABFG} = -CD\,E$$

$$CD\,FG = -AB\,E$$

O s4 blocos são os seguintes:

BLOCO1 $ABCD_0$, $ABFG_0$ $(CD\,FG)_0$	BLOCO2 $ABCD_0$, $ABFG_1$ $(CD\,FG)_1$	BLOCO3 $ABCD_1$, $ABFG_0$ $(CD\,FG)_1$	BLOCO4 $ABCD_1$, $ABFG_1$ $(CD\,FG)_0$
A B C D E F G	A B C D E F G	A B C D E F G	A B C D E F G
0 0 0 0 0 0 0	1 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 1 0 0	1 0 0 0 1 0 0
1 1 0 0 0 0 0	0 1 1 0 0 0 0	1 1 1 0 1 0 0	0 1 0 0 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0	1 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 1 0 0	1 0 1 1 1 0 0
1 1 1 1 0 0 0	0 1 0 1 0 0 0	1 1 0 1 1 0 0	0 1 1 1 1 0 0
1 0 1 0 1 1 0	0 0 0 0 1 1 0	1 0 0 0 0 1 0	0 0 1 0 0 1 0
0 1 1 0 1 1 0	1 1 0 0 1 1 0	0 1 0 0 0 1 0	1 1 1 0 0 1 0
1 0 0 1 1 1 0	0 0 1 1 1 1 0	1 0 1 1 0 1 0	0 0 0 1 0 1 0
0 1 0 1 1 1 0	1 1 1 1 1 1 0	0 1 1 1 0 1 0	1 1 0 1 0 1 0
1 0 1 0 1 0 1	0 0 0 0 1 0 1	1 0 0 0 0 0 1	0 0 1 0 0 0 1
0 1 1 0 1 0 1	1 1 0 0 1 0 1	0 1 0 0 0 0 1	1 1 1 0 0 0 1
1 0 0 1 1 0 1	0 0 1 1 1 0 1	1 0 1 1 0 0 1	0 0 0 1 0 0 1
0 1 0 1 1 0 1	1 1 1 1 1 0 1	0 1 1 1 0 0 1	1 1 0 1 0 0 1
0 0 0 0 0 1 1	1 0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1 1	1 0 0 0 1 1 1
1 1 0 0 0 1 1	0 1 1 0 0 1 1	1 1 1 0 1 1 1	0 1 0 0 1 1 1
0 0 1 1 0 1 1	1 0 0 1 0 1 1	0 0 0 1 1 1 1	1 0 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1	0 1 0 1 0 1 1	1 1 0 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1 1

Para confundirmos o 2_V^{7-1} em 2^3 blocos de 2^3 unidades, precisamos de 3 interações para confundir com blocos, lembrando sempre que não queremos confundir efeitos principais nem interações de 2 fatores. Assim, para aproveitarmos os 4 blocos que acabamos de montar, escolhemos, por exemplo, a interação ACEF que satisfaz a nossa condição, como vemos:

$$I = -ABCDEFG \Longrightarrow$$

$$\underline{ABCD} = -EFG$$

$$\underline{ABFG} = -CDE$$

$$CDFG = -ABE$$

$$\underline{ACEF} = -BDG$$

$$BDEF = -ACG$$

$$BCEG = -ADF$$

$$ADEG = -BCF$$

Os 8 blocos do delineamento confundido seguem abaixo:

BLOCO 1							BLOCO 2						
$ABCD_o$, $ABFG_o$, $ACEF_o$							$ABCD_o$, $ABFG_1$, $ACEF_o$						
($CDFG_o$, $BDEF_o$, $BCEG_o$, $ADEG_o$)							($CDFG_1$, $BDEF_o$, $BCEG_1$, $ADEG_1$)						
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1

B L O C O 3

$ABCD_1$, $ABFG_o$, $ACEF_o$

($CDFG_1$, $BDEF_1$, $BCEG_o$, $ADEG_1$)

A	B	C	D	E	F	G
0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1

B L O C O 4

$ABCD_1$, $ABFG_1$, $ACEF_o$

($CDFG_o$, $BDEF_1$, $BCEG_1$, $ADEG_o$)

A	B	C	D	E	F	G
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1

B L O C O 5

$ABCD_o$, $ABFG_o$, $ACEF_1$

($CDFG_o$, $BDEF_1$, $BCEG_1$, $ADEG_1$)

A	B	C	D	E	F	G
1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

B L O C O 6

$ABCD_o$, $ABFG_1$, $ACEF_1$

($CDFG_1$, $BDEF_1$, $BCEG_o$, $ADEG_o$)

A	B	C	D	E	F	G
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

BLOCO 7							BLOCO 8						
$ABCD_1$, $ABFG_o$, $ACEF_1$							$ABCD_1$, $ABFG_1$, $ACEF_1$						
($CDFG_1$, $BDEF_o$, $BCEG_1$, $ADEG_o$)							($CDFG_o$, $BDEF_o$, $BCEG_o$, $ADEG_1$)						
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1

Nos três casos que acabamos de ver, o primeiro bloco é o subgrupo intrabloco, pois contém o tratamento controle. Logo, a construção dos demais blocos é feita a partir dele, como segue. Selecionamos uma combinação de tratamentos dentre aquelas que ainda não foram utilizadas, e somamos seu número modular ao daquelas no bloco 1. Lembramos, ainda, que no subgrupo intrabloco estão as combinações de tratamentos com número par de letras em comum com todas as interações confundidas, e que essas combinações de tratamentos apresentam-se na "ordem-padrão".

3.1.5 - Um exemplo numérico de análise estatística

Os dados que vamos utilizar referem-se a um experimento fatorial 2^{6-1}, realizado com o fim de determinar o efeito de certos fertilizantes sobre a produção de mangas em determinada região.

A metade da replicação utilizada é aquela dada por I = +ABCDEF [ver exemplo 4, sec. 3.1.2].

Os 6 fatores são dados por:

A: sulfato de amônia (67,31 kg/ha);

B: superfosfato (56,09 kg/ha);

C: cloridrato de potássio (112,18 kg/ha);

D: agricultural salt (560,9 kg/ha);

E: esterco animal (19.767,73 kg/ha);

F: novo fertilizante, sendo testado (448,72 kg/ha).

Inicialmente, verificamos que os 6 graus de liberdade para efeitos principais e os 15 para interações de 2 fatores têm interações de 3 ou mais fatores como aliados, e são todos estimáveis. Os 10 graus de liberdade restantes destinam-se à estimativa do erro.

A fim de calcularmos as somas de quadrados para os efeitos principais e interações de 2 fatores, vamos utilizar um método que nada mais é do que uma adaptação do procedimento de Yates para os experimentos fatoriais fracionados, de acordo com COCHRAN e COX (1957).

Como o experimento tem 32 combinações de tratamentos, se ignorarmos o fator F vamos ter uma replicação completa dos 5 primeiros fatores. Arranjamos esses 5 fatores na "ordem-padrão" necessária para a aplicação do método de Yates, e procedemos como se o experimento fosse uma repetição completa do 2^5.

Com o fator F ausente, vamos ter na coluna (5) do nosso quadro de cálculos, os efeitos fatoriais totais para os efeitos principais e interações dos fatores A, B, C, D e E.

Feito isso, reintroduzimos o fator F. Com isso, cada efeito passa a ter um aliado envolvendo F, isto é, A = BCDEF; B = = ACDEF; C = ABDEF; e assim por diante. Os efeitos envolvendo F que vão ser estimados são: o efeito principal F, e as interações AF, BF, CF, DF e EF, cujos aliados são, respectivamente: F = ABCDE; AF = BCDE, BF = ACDE, CF = ABDE, DF = ABCE, EF = ABCD.

Na coluna (6) do quadro está feita a identificação atribuída a cada um dos 32 efeitos fatoriais totais. Aqueles efeitos que aparecem acompanhados do sinal (+) são atribuídos ao resíduo, pois são interações de 3 ou mais fatores em cujos efeitos não estamos interessados. Os 16 primeiros números na coluna 1 são as somas dos pares de produções, em ordem crescente, enquanto que os 16 últimos são obtidos subtraindo-se o número superior do inferior em cada par, por exemplo: 1.908 = 800 + 1.108, ..., 2.513 = 1.005 + 1.508, 308 = 1.108 - 800, ..., 503 = 1.508 - 1.005. A coluna 2 é obtida da mesma forma, a partir da coluna 1, e assim por diante, até obtermos n = 5 colunas. A coluna 5 nos dá os totais de efeitos, enquanto que na última coluna estão as somas de quadrados. Os totais nos rodapés do quadro são usados para conferir os cálculos.

QUADRO DE CÁLCULOS

c.t!s	PRODUÇÃO (kg)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	S.Q.
(1)	800	1.908	3.943	7.611	16.507	36.660	G=ABCDEF	41.998.612,5
a(f)	1.108	2.035	3.668	8.896	20.153	3.498	A=BCDEF	382.375,125
b(f)	1.315	1.784	3.776	8.505	989	-138	B=ACDEF	585,125
ab	720	1.884	5.120	11.648	2.509	-2.596	AB=CDEF	210.600,5
c(f)	840	1.731	3.701	-75	757	4.350	C=ABDEF	591.328,125
ac	944	2.045	4.804	1.064	-895	1.780	AC=BDEF	99.012,5
bc	888	2.452	4.735	591	-1.177	-1.876	BC=ADEF	109.980,5
abc(f)	996	2.668	6.913	1.918	-1.419	-990	ABC=DEF(+)	30.628,125
d(f)	816	1.654	-287	227	1.069	4.428	D=ABCEF	612.724,5
ad	915	2.047	212	530	3.281	2.466	AD=BCEF	190.036,125
bd	730	2.120	684	957	195	-2.506	BD=ACEF	196.251,125
abd(f)	1.315	2.684	380	-1.852	1.585	-404	ABD=CEF(+)	5.100,5
cd	940	2.350	207	-899	-125	2.694	CD=ABEF	226.801,125
acd(f)	1.512	2.385	384	-278	-1.751	428	ACD=BEF(+)	5.724,5
bcd(f)	1.430	4.400	255	-197	-343	-2.164	BCD=AEF(+)	146.340,5
abcd	1.238	2.513	1.663	-1.222	-647	-1.694	ABCD=EF	89.676,125
		36.660	40.158	37.424	40.688	43.936		
e(f)	820	308	127	-275	1.285	3.646	E=ABCDF	415.416,125
ae	834	-595	100	1.344	3.143	1.520	AE=BCDF	72.200,0
be	927	104	314	1.103	1.139	-1.652	BE=ACDF	85.284,5
abe(f)	1.120	108	216	2.178	1.327	-242	ABE=CDF(+)	1.830,125
ce	870	99	393	499	303	2.212	CE=ABDF	152.904,5
ace(f)	1.250	585	564	-304	-2.809	1.390	ACE=BDF(+)	60.378,125
bce(f)	1.340	572	35	177	621	-1.626	BCE=ADF(+)	82.621,125
abce	1.344	-192	-1.887	1.408	-1.025	-304	ABCE=DF	2.888,0
de	970	14	-903	-27	1.619	1.858	DE=ABCF	107.880,125
ade(f)	1.380	193	4	-98	1.075	188	ADE=BCF(+)	1.104,5
bde(f)	1.270	380	486	171	-803	-3.112	BDE=ACF(+)	302.642,0
abde	1.115	4	-764	-1.922	1.231	-1.646	ABDE=CF	84.666,125
cde(f)	1.620	410	179	907	-71	-544	CDE=ABF(+)	9.248,0
acde	2.780	-155	-376	-1.250	-2.093	2.034	ACDE=BF	129.286,125
bcde	1.005	1.160	-565	-555	-2.157	-2.022	BCDE=AF	127.765,125
abcde(f)	1.508	503	-657	-92	463	2.620	ABCDE=F	214.512,5
	36.660	40.158	37.424	40.688	43.963	48.256		

OBSERVAÇÃO: No quadro apresentado,o símbolo de tratamento f é colocado entre parêntesis para lembrar que ele não desempenha nenhum papel na "ordem-padrão".

O quadrado médio residual pode ser calculado diretamente, dos 10 efeitos fatoriais destinados à estimativa do erro, sem a construção de uma tabela de variância, como segue:

$$QMR = \frac{(-990)^2 + (-404)^2 + (428)^2 + (-2.164)^2 + (-242)^2 + (1.390)^2 + (-1.626)^2 + (188)^2 + (-3.112)^2 + (-544)^2}{32 \times 10}$$

$$QMR = 64.561,75$$

O divisor é dado pelo produto entre o número de unidades no experimento e o número de graus de liberdade do resíduo.

Os valores do teste F aos níveis 5% e 1% de significância são dados, respectivamente, por 4,96 e 10,04.

Portanto, apenas os efeitos principais A, C, D e E são significativos ao nível de 5%, ou seja, o solo reagiu apenas à aplicação do sulfato de amônia, do cloridrato de potássio, do "agricultural salt" e do esterco animal, quando feita separadamente.

O método de Yates se aplica a todos os fatoriais fracionados da série 2^n, incluindo delineamentos do tipo 2^{n-2} e 2^{n-3}. Para isso basta selecionar um subconjunto dos fatores para os quais o experimento é uma repetição completa. Em delineamentos do tipo 2^{n-2}, 2 fatores são ignorados temporariamente, enquanto que naqueles do tipo 2^{n-3}, 3 fatores. Os efeitos fatoriais totais do subconjunto são calculados pelo método de Yates. Feito isso, são introduzidos os outros fatores, escrevendo-se os conjuntos de aliados com as devidas identificações.

Arranjos desse tipo, ou seja, com 32 unidades, podem se mostrar imprecisos se tivermos, por exemplo, diferenças de solo capazes de provocar alteração na produção de mangas, independente dos tratamentos utilizados. Em casos assim é necessário realizar o experimento em blocos menores, confundindo certos efeitos fatoriais com blocos.

Para dividirmos as 32 combinações de tratamentos do 2^{6-1} em 2 blocos de 2^4 unidades, procedemos de acordo com a secção3.1.4 escolhendo um efeito fatorial tal que nenhum efeito principal ou interação de 2 fatores fique confundido com blocos, e lembrando que tal efeito não pode ser aquele escolhido para gerador. Toda informação sobre esse efeito fatorial e seu aliado é totalmente perdida, pois ambos ficam confundidos com blocos.

No nosso caso, uma escolha adequada recai, é óbvio, sobre um par de interações de 3 fatores, por exemplo, ABD=CEF. Assim, vamos ter:

I = +ABCDEF

BLOCO 1 ABD_o(=CEF_o)	BLOCO 2 ABD_1(=CEF_1)
(1)	ac
ab	bc
ad	cd
bd	abcd
ce	ae
abce	be
acde	de
bcde	abde
cf	af
abcf	bf
acdf	df
bcdf	abdf
ef	acef
abef	bcef
adef	cdef
bdef	abcdef

A partição dos graus de liberdade é a seguinte:

C.V.	G.L.
Blocos	1
Efeitos principais	6
Interações de 2 fatores	15
Resíduo	9
TOTAL	31

3.2 - Série 3^n

3.2.1 - Generalidades

A replicação fracionada tem sido utilizada com bastante sucesso em experimentos fatoriais da série 2^n, sendo que às vezes pode ser útil para experimentos fatoriais da série 3^n. Por esse motivo vamos apresentar o método de construção de planos de resolução V para essa série, embora de forma bem mais resumida do que aquela apresentada para a série 2^n. Antes, porém, vamos recordar alguns aspectos importantes dos fatoriais em 3 níveis.

Seja o fatorial 3^2, sendo os fatores A e B nos níveis 0, 1 e 2. Para cada fator temos dois efeitos, que no caso de A são dados por:

Efeito linear de A: $A' = a_2 - a_o$

Efeito quadrático de A: $A'' = \frac{1}{2}(a_2 - 2a_1 + a_o)$

A interação de dois fatores A e B pode ser dada pela tabela 3 x 3:

		B		
		0	1	2
A	0	(1)	B	B^2
	1	A	AB	AB^2
	2	A^2	A^2B	A^2B^2

Portanto, como vemos, são (3-1) . (3-1) = 4 graus de liberdade para contrastes. As partições mais importantes em contrastes de um único grau de liberdade são aquelas dadas por:

$$A'B' = \frac{1}{2}(a_2 - a_o)(b_2 - b_o)$$

$$A''B' = \frac{1}{4}(a_2 - 2a_1 + a_o)(b_2 - b_o)$$

$$A'B'' = \frac{1}{4}(a_2 - a_o)(b_2 - 2b_1 + b_o)$$

$$A''B'' = \frac{1}{8}(a_2 - 2a_1 + a_o)(b_2 - 2b_1 + b_o)$$

Assim, para o fatorial 3^2 a partição dos graus de liberdade é dada por:

EFEITO	CONTRASTE	G.L.
A	$X_1 = 0, 1, 2 \pmod 3$	2
B	$X_2 = 0, 1, 2 \pmod 3$	2
AB	$X_1 + X_2 = 0, 1, 2 \pmod 3$	2
AB^2	$X_1 + 2X_2 = 0, 1, 2 \pmod 3$	2

e a justificativa, no caso, por exemplo, de AB, é a seguinte:

AB_o $X_1 + X_2 = 0$	AB_1 $X_1 + X_2 = 1$	AB_2 $X_1 + X_2 = 2$
0 0	0 1	1 1
1 2	1 0	0 2
2 1	2 2	2 0

o que significa que AB é um contraste entre esses 3 conjuntos, tendo, de fato, 2 graus de liberdade.

Para A^2B^2, os três grupos de confundimento são os seguintes:

$A^2B^2_o$ $2X_1 + 2X_2 = 0$	$A^2B^2_1$ $2X_1 + 2X_2 = 1$	$A^2B^2_2$ $2X_1 + 2X_2 = 2$
0 0	0 1	1 1
1 2	1 0	0 2
2 1	2 2	2 0

Observamos então que são os mesmos de AB, ou em outras palavras, AB e A^2B^2 nos dão os mesmos contrastes, o mesmo ocorrendo com AB^2 e A^2B. Vem daí a convenção: "o expoente da 1ª letra de uma interação é sempre 1".

Outra maneira de expressarmos isso, é dizer que, o quadrado de qualquer efeito, ou interação, nos dá o próprio efeito, ou interação.

DEFINIÇÃO: Dados dois efeitos, ou interações, X e Y, suas interações generalizadas são dadas por XY e XY^2, de acordo com COCHRAN e COX (1957).

Seja, por exemplo, ABC e ACDE. Suas generalizadas são dadas por:

$$(ABC) \times (ACDE) = A^2BC^2DE = (A^2BC^2DE)^2 = AB^2CD^2E^2$$

e

$$(ABC) \times (ACDE)^2 = A^3BC^3D^2E^2 = BD^2E^2 \ .$$

3.2.2 - Confundimento

Como vimos inicialmente, o objetivo do confundimento é diminuir o número de unidades nos blocos. Vejamos rapidamente, como isso é feito no caso da série 3^n.

EXEMPLO 1. Vamos confundir o fatorial 3^4 em 3^2 blocos de 3^2 unidades cada.

A fim de não confundirmos efeitos principais nem interações de 2 fatores, procedemos como para o sistema 2^n, ou seja:

a) Escrevemos o 3^2 completo;

b) Formamos as interações generalizadas por colunas.

A	B	AB=C	AB^2=D
X_1	X_2	X_1X_2	$X_1X_2^2$
0	0	0	0
0	1	1	2
0	2	2	1
1	0	1	1
1	1	2	0
1	2	0	2
2	0	2	2
2	1	0	1
2	2	1	0
		$X_1 + X_2$ (mod 3)	$X_1 + 2X_2$ (mod 3)

O bloco assim obtido é o subgrupo intrabloco, ou seja, aquele que contém o tratamento controle (1), e a partir do qual podemos obter os demais blocos, como vimos anteriormente.

Para determinarmos quais as interações confundidas, devemos obter a identidade:

$$I = (AB)(AB)^2 = A^3B^3 = ABC^2$$

$$I = (AB^2)(AB^2)^2 = A^3B^6 = AB^2D^2$$

Logo,

$$I = \underline{ABC^2} = \underline{AB^2D^2} = ACD = BCD^2$$

OBSERVAÇÃO: O subgrupo intrabloco, por ser o bloco que contém (1), é a combinação das interações cuja soma dos números modulares dos fatores resulta em 0 (mod 3). No caso acima, ABC^2_o e $AB^2D^2_o$.

EXEMPLO 2 - Seja agora o fatorial 3^4 em blocos de 3^3 unidades.

a) Escrevemos o 3^3 completo, com colunas correspondentes às letras A, B e C.

b) Escrevemos em seguida todas as possíveis interações generalizadas, obtendo as colunas: AB, AB^2, AC, AC^2, BC, BC^2, ABC, ABC^2, AB^2C, AB^2C^2 que chamamos, respectivamente, de D, E, F, G, H, J, K, L, M e N.

c) As treze colunas, de A a N, nos dão o subgrupo intrabloco correspondente a um 3^{13} em 3^{10} blocos de 3^3 unidades, onde 10 é o número de geradores. Portanto, para um 3^4 em blocos de 3^3 unidades, obtemos um subgrupo intrabloco para um fatorial 3^n tal que $n \leq 13$.

d) A relação identidade é obtida a partir de:

A	B	C	AB=D	AB^2=E	AC=F	AC^2=G	BC=H	BC^2=J	ABC=K
X_1	X_2	X_3	X_1X_2	$X_1X_2^2$	X_1X_3	$X_1X_3^2$	X_2X_3	$X_2X_3^2$	$X_1X_2X_3$

ABC^2=L	AB^2C=M	AB^2C^2=N
$X_1X_2X_3^2$	$X_1X_2^2X_3$	$X_1X_2^2X_3^2$

e) Se desejamos trabalhar com menos de 13 fatores, isto é, $n < 13$, eliminamos desse modelo o número necessário de colunas. No caso por exemplo, de um 3^5 em 3^2 blocos de 3^3 unidades, ficamos com apenas duas das colunas correspondentes às interações generalizadas, ou seja, duas quaisquer escolhidas dentre as 10, de D a N. Seja, por exemplo:

A	B	C	AB=D	AB^2C=E
X_1	X_2	X_3	X_1X_2	$X_1X_2^2X_3$

A relação identidade, nesse caso, será da forma:

$$I = \underline{ABD^2} = \underline{AB^2CE^2} = AC^2DE = BCDE^2 \ .$$

Generalizando o que acabamos de ver: "Para um fatorial 3^n em 3^{n-m} blocos de 3^m unidades, devemos ter (n-m) geradores" (MANSON, 1976).

Assim, no caso de um fatorial:

3^n em 3^{n-1} blocos de 3 unidades, devemos ter n-1 geradores,

3^n em 3^{n-2} blocos de 3^2 unidades, devemos ter n-2 geradores,

3^n em 3^{n-3} blocos de 3^3 unidades, devemos ter n-3 geradores,

....

3^n em 3^{n-m} blocos de 3^m unidades, devemos ter n-m geradores.

Continuando, se no sistema 3^n acima ($n \leq 13$), em 3^{n-3} blocos de 3^3 unidades não queremos confundir efeitos principais nem interações de 2 ou 3 fatores, temos que obter um subconjunto de efeitos e interações, tal que, nenhum de seus membros possa ser escrito como a generalizada de dois outros de seus membros. Tal subconjunto é dado por:

$$\{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_1X_2X_3,\ X_1X_2X_3^2,\ X_1X_2^2X_3,\ X_1X_2^2X_3^2\} \ .$$

Nesse caso, obtemos, no máximo, um fatorial 3^4 em 3 blocos de 3^3 unidades, e uma possível relação identidade é dada, por exemplo, por:

$$I = AB^2CF^2 \quad .$$

Generalizando, seja um fatorial geral s^n, onde $s=p^t$ (p, s = primo ou potência de primo; n, t: inteiro qualquer), então,"para agruparmos um fatorial s^n em s^{n-m} blocos de s^m unidades ($m \leq n$), devemos ter, de acordo com o teorema de Fisher:

$$n \leq \frac{s^m - 1}{s - 1} = \frac{\text{tamanho do bloco} - 1}{\text{número de níveis} - 1} \quad ,$$

a fim de não termos efeitos principais nem interações de 2 fatores confundidos com blocos" (MANSON, 1976).

Por que, no caso de querermos confundir em blocos de 3^3 unidades, tal que nem efeitos principais nem interações de 2 fatores se confundam com blocos, o maior fatorial é o 3^{13}?

Se tomarmos, por exemplo, o 3^{14} vamos ter

$$14 > \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 13 \quad ,$$

o que contraria o resultado acima.

3.2.3 - Experimentos de Resolução V

Como sabemos, quando o número de fatores cresce, o número de combinações de tratamentos a serem testadas aumenta rapidamente, tornando, não raro, o experimento impraticável por uma série de motivos, alguns já enumerados anteriormente. Nesses casos, lançamos mão de frações de fatoriais, ou seja, trabalhamos com apenas algumas das combinações de tratamentos do fatorial completo. Como só nos interessam aquelas frações nas quais são confundidas apenas interações de alta ordem, ou seja, como vamos trabalhar com planos de resolução V, temos que obter relações identidades cujas palavras tenham, no mínimo, 5 letras. O procedimento para obtenção de tais relações identidades é análogo àquele visto para a série 2^n.

Pelo fato de trabalharmos com planos de resolução V, o menor fatorial possível é o 3^5.

Embora nesse caso sejam evidentes as possíveis relações identidades, vamos ilustrar o procedimento para encontrá-las.

EXEMPLO 1 - Obtenção de um 3_V^{5-1}.

a) Escrevemos o conjunto de todos os efeitos e interações para o fatorial 3^4:

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_1X_2, X_1X_2^2, X_1X_3, X_1X_3^2, \ldots, X_3X_4^2, X_1X_2X_3, X_1X_2X_3^2, \ldots, X_2X_3^2X_4^2, X_1X_2X_3X_4, X_1X_2X_3X_4^2, \ldots, X_1X_2^2X_3^2X_4^2\}$$

b) Desse conjunto selecionamos um subconjunto com $n = 5$ elementos, tal que a representação de qualquer de seus membros não seja a generalizada de 2 ou 3 quaisquer dos outros membros.

b.1) Os $m = 4$ primeiros elementos desse subconjunto devem ser os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4$$

nos dando um 3^4_V com 80 combinações de tratamentos.

b.2) O 5º elemento do subconjunto não pode ser nenhuma interação de 2 ou 3 fatores, pois qualquer uma delas pode ser escrita como a generalizada de 2 ou 3 membros do subconjunto, respectivamente. Portanto, devemos escolher uma dentre as 8 interações de 4 fatores do conjunto inicial. Seja por exemplo:

$$[1] \quad X_1 \, X_2^2 \, X_3 \, X_4$$

Dessa forma, obtemos um 3^5_V com 80 combinações de tratamentos.

Temos então:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_1X_2^2X_3X_4 \end{array} ,$$

que nos dá a relação identidade:

$$I = AB^2CDE^2 \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

Observamos que para o 3_V^{5-1} podemos utilizar qualquer uma das relações identidades:

$$I = AB^pC^qD^rE^s \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \qquad (p, q, r, s = 1, 2)$$

TABELA 28 - Análise da variância para um 3_V^{5-1}.

C.V.	G.L.
Efeitos principais	5
Interações de 2 fatores	20
Resíduo	55
TOTAL	80

Os três tipos possíveis de delineamentos são aqueles compostos das 81 combinações de tratamentos de qualquer uma das 3 frações seguintes.

F R A Ç Ã O 1

$I = AB^2CDE^2_0$

(1)	$a_2c_2d_2$	acd_2e	d_2e_2
ab	bc_2d_2	a_2bcd_2e	abd_2e_2
a_2b_2	$ab_2c_2d_2$	b_2cd_2e	$a_2b_2d_2e_2$
a_2c	ae	c_2d_2e	$a_2cd_2e_2$
bc	a_2be	abc_2d_2e	bcd_2e_2
ab_2c	b_2e	$a_2b_2c_2d_2e$	$ab_2cd_2e_2$
ac_2	ce	a_2e_2	$ac_2d_2e_2$
a_2bc_2	$abce$	be_2	$a_2bc_2d_2e_2$
b_2c_2	a_2b_2ce	ab_2e_2	$b_2c_2d_2e_2$
a_2d	a_2c_2e	ace_2	
bd	bc_2e	a_2bce_2	
ab_2d	ab_2c_2e	b_2ce_2	
acd	de	c_2e_2	
a_2bcd	$abde$	abc_2e_2	
b_2cd	a_2b_2de	$a_2b_2c_2e_2$	
c_2d	a_2cde	ade_2	
abc_2d	$bcde$	a_2bde_2	
$a_2b_2c_2d$	ab_2cde	b_2de_2	
ad_2	ac_2de	cde_2	
a_2bd_2	a_2bc_2de	$abcde_2$	
b_2d_2	b_2c_2de	$a_2b_2cde_2$	
cd_2	a_2d_2e	$a_2c_2de_2$	
$abcd_2$	bd_2e	bc_2de_2	
$a_2b_2cd_2$	ab_2d_2e	$ab_2c_2de_2$	

F R A Ç Ã O 2

$I = AB^2CDE^2_1$

a	a_2e	e_2
a_2b	be	abe_2
b_2	ab_2e	$a_2b_2e_2$
c	ace	a_2ce_2
abc	a_2bce	bce_2
a_2b_2c	b_2ce	ab_2ce_2
a_2c_2	c_2e	ac_2e_2
bc_2	abc_2e	$a_2bc_2e_2$
ab_2c_2	$a_2b_2c_2e$	$b_2c_2e_2$
d	ade	a_2de_2
abd	a_2bde	bde_2
a_2b_2d	b_2de	ab_2de_2
a_2cd	cde	$acde_2$
bcd	$abcde$	a_2bcde_2
ab_2cd	a_2b_2cde	b_2cde_2
ac_2d	a_2c_2de	c_2de_2
a_2bc_2d	bc_2de	abc_2de_2
b_2c_2d	ab_2c_2de	$a_2b_2c_2de_2$
a_2de	d_2e	ad_2e_2
bd_2	abd_2e	$a_2bd_2e_2$
ab_2d_2	$a_2b_2d_2e$	$b_2d_2e_2$
acd_2	a_2cd_2e	cd_2e_2
a_2bcd_2	bcd_2e	$abcd_2e_2$
b_2cd_2	ab_2cd_2e	$a_2b_2cd_2e_2$
c_2d_2	ac_2d_2e	$a_2c_2d_2e_2$
abc_2d_2	$a_2bc_2d_2e$	$bc_2d_2e_2$
$a_2b_2c_2d_2$	$b_2c_2d_2e$	$ab_2c_2d_2e_2$

F R A Ç Ã O 3

$I = AB^{2}CDE^{2}_{2}$

a_2	e	ae_2
b	abe	a_2be_2
ab_2	a_2b_2e	b_2e_2
ac	a_2ce	ce_2
a_2bc	bce	$abce_2$
b_2c	ab_2ce	$a_2b_2ce_2$
c_2	ac_2e	$a_2c_2e_2$
abc_2	a_2bc_2e	bc_2e_2
$a_2b_2c_2$	b_2c_2e	$ab_2c_2e_2$
ad	a_2de	de_2
a_2bd	bde	$abde_2$
b_2d	ab_2de	$a_2b_2de_2$
cd	$acde$	a_2cde_2
$abcd$	a_2bcde	$bcde_2$
a_2b_2cd	b_2cde	ab_2cde_2
a_2c_2d	c_2de	ac_2de_2
bc_2d	abc_2de	$a_2bc_2de_2$
ab_2c_2d	$a_2b_2c_2de$	$b_2c_2de_2$
d_2	ad_2e	$a_2d_2e_2$
abd_2	a_2bd_2e	bd_2e_2
$a_2b_2d_2$	b_2d_2e	$ab_2d_2e_2$
a_2cd_2	cd_2e	acd_2e_2
bcd_2	$abcd_2e$	$a_2bcd_2e_2$
ab_2cd_2	$a_2b_2cd_2e$	$b_2cd_2e_2$
ac_2d_2	$a_2c_2d_2e$	$c_2d_2e_2$
$a_2bc_2d_2$	bc_2d_2e	$abc_2d_2e_2$
$b_2c_2d_2$	$ab_2c_2d_2e$	$a_2b_2c_2d_2e_2$

EXEMPLO 2 - Obtenção de um 3_V^{5-2}.

a) Escrevemos o conjunto de todos os efeitos e interações para o fatorial 3^3:

$\{X_1, X_2, X_3, X_1X_2, X_1X_2^2, X_1X_3, X_1X_3^2, X_2X_3, X_2X_3^2, X_1X_2X_3,$
$X_1X_2X_3^2, X_1X_2^2X_3, X_1X_2^2X_3^2\}$.

b) Desse conjunto selecionamos um subconjunto com 5 elementos tal como visto anteriormente.

b.1) Os 3 primeiros elementos desse subconjunto devem ser os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3$$

que nos dão um 3_V^3 com 26 combinações de tratamentos.

Porém, não existe nenhum outro elemento que não possa ser escrito como a generalizada de 2 ou 3 dos membros já determinados do subconjunto. Isso significa que a fração de fatorial 3_V^{5-2} não se adapta a um delineamento de resolução V.

Concluindo, quando n = 5, 3^4 é o número mínimo de unidades experimentais que suporta resolução V.

EXEMPLO 3 - Obtenção de um 3_V^{6-1}.

a) Escrevemos o conjunto de todos os efeitos e interações para o fatorial 3^5:

$\{X_1, X_2, \ldots, X_5, X_1X_2, X_1X_2^2, \ldots, X_4X_5^2, X_1X_2X_3, X_1X_2X_3^2, \ldots, X_3X_4^2X_5^2, X_1X_2X_3X_4, X_1X_2X_3X_4^2, \ldots, X_2X_3^2X_4^2X_5^2, X_1X_2X_3X_4X_5, X_1X_2X_3X_4X_5^2, \ldots, X_1X_2^2X_3^2X_4^2X_5^2\}$

b) Desse conjunto selecionamos um subconjunto com 6 elementos tal como visto anteriormente.

b.1) Os 5 primeiros elementos desse subconjunto são os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$$

que nos dão um 3_V^5 com 242 combinações de tratamentos.

b.2) O 6º elemento do subconjunto deve ser tal que não possa ser escrito como a generalizada de 2 ou 3 dos membros já determinados. Logo, não pode ser uma interação de 2 nem uma de 3 fatores. Tomemos, por exemplo:

$$[1] \quad X_1 X_2^2 X_3^2 X_4 X_5$$

obtendo um 3_V^6 com 242 combinações de tratamentos.

O subconjunto procurado pode, então, ser dado pelos elementos:

A	B	C	D	E	F
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$X_1X_2^2X_3^2X_4X_5$

donde obtemos a relação identidade:

$$I = AB^2C^2DEF^2 \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

Generalizando, a relação identidade pode ser qualquer uma dentre aquelas dadas por

$$I = AB^pC^qD^rE^sF^t \qquad (p, q, r, s, t = 1,2) \ .$$

Observamos que geralmente utilizamos interações de 6 fatores que são as de mais alta ordem. Porém, não devemos esquecer que qualquer interação de 5 fatores também pode ser tomada para gerador.

TABELA 29 - Análise da variância para um 3_V^{6-1}.

C.V.	G.L.
Efeitos principais	6
Interações de 2 fatores	30
Resíduo	206
TOTAL	242

Os 3 tipos de delineamentos possíveis são dados a seguir.

F R A Ç Ã O   1

$I = AB^2C^2DEF^2_o$

(1)	ab_2e	bce_2	c_2f	ab_2c_2ef
ab	ce	ab_2ce_2	abc_2f	a_2def
a_2b_2	$abce$	c_2e_2	$a_2b_2c_2f$	$bdef$
ac	a_2b_2ce	abc_2e_2	df	ab_2def
a_2bc	ac_2e	$a_2b_2c_2e_2$	$abdf$	$cdef$
b_2c	a_2bc_2e	de_2	a_2b_2df	$abcdef$
a_2c_2	b_2c_2e	$abde_2$	$acdf$	a_2b_2cdef
bc_2	ade	$a_2b_2de_2$	a_2bcdf	ac_2def
ab_2c_2	a_2bde	$acde_2$	b_2cdf	a_2bc_2def
a_2d	b_2de	a_2bcde_2	a_2c_2df	b_2c_2def
bd	a_2cde	b_2cde_2	bc_2df	ad_2ef
ab_2d	$bcde$	$a_2c_2de_2$	ab_2c_2df	a_2bd_2ef
cd	ab_2cde	bc_2de_2	a_2b_2f	b_2d_2ef
$abcd$	c_2de	$ab_2c_2de_2$	bd_2f	a_2cd_2ef
a_2b_2cd	abc_2de	$a_2d_2e_2$	ab_2d_2f	bcd_2ef
ac_2d	$a_2b_2c_2de$	bd_2e_2	cd_2f	ab_2cd_2ef
a_2bc_2d	d_2e	$ab_2d_2e_2$	$abcd_2f$	c_2d_2ef
b_2c_2d	abd_2e	cd_2e_2	$a_2b_2cd_2f$	abc_2d_2ef
ad_2	$a_2b_2d_2e$	$abcd_2e_2$	ac_2d_2f	$a_2b_2c_2d_2ef$
a_2bd_2	acd_2e	$a_2b_2cd_2e_2$	$a_2bc_2d_2f$	a_2e_2f
b_2d_2	a_2bcd_2e	$ac_2d_2e_2$	$b_2c_2d_2f$	be_2f
a_2cd_2	b_2cd_2e	$a_2bc_2d_2e_2$	ef	ab_2e_2f
bcd_2	$a_2c_2d_2e$	$b_2c_2d_2e_2$	$abef$	ce_2f
ab_2cd_2	bc_2d_2e	af	a_2b_2ef	$abce_2f$
c_2d_2	$ab_2c_2e_2e$	a_2bf	$acef$	$a_2b_2ce_2f$
abc_2d_2	ae_2	b_2f	a_2bcef	ac_2e_2f
$a_2b_2c_2d_2$	a_2be_2	a_2cf	b_2cef	$a_2bc_2e_2f$
a_2e	b_2e_2	bcf	a_2c_2ef	$b_2c_2e_2f$
be	a_2ce_2	ab_2cf	bc_2ef	abe_2f

a_2bde_2f

b_2de_2f

a_2cde_2f

$bcde_2f$

ab_2cde_2f

c_2de_2f

abc_2de_2f

$a_2b_2c_2de_2f$

d_2e_2f

abd_2e_2f

$a_2b_2d_2e_2f$

acd_2e_2f

$a_2bcd_2e_2f$

$b_2cd_2e_2f$

$a_2c_2d_2e_2f$

$bc_2d_2e_2f$

$ab_2c_2d_2e_2f$

a_2f_2

bf_2

ab_2f_2

cf_2

$abcf_2$

$a_2b_2cf_2$

ac_2f_2

$a_2bc_2f_2$

$b_2c_2f_2$

adf_2

a_2bdf_2

b_2df_2

a_2cdf_2

$bcdf_2$

ab_2cdf_2

c_2df_2

abc_2df_2

$a_2b_2c_2df_2$

b_2f_2

abd_2f_2

$a_2b_2d_2f_2$

acd_2f_2

$a_2bcd_2f_2$

$b_2cd_2f_2$

$a_2c_2d_2f_2$

$bc_2d_2f_2$

$ab_2c_2d_2f_2$

aef_2

b_2ef_2

a_2cef_2

$bcef_2$

ab_2cef_2

c_2ef_2

abc_2ef_2

$a_2b_2c_2ef_2$

def_2

$abdef_2$

$a_2b_2def_2$

$acdef_2$

a_2bcdef_2

b_2cdef_2

$a_2c_2def_2$

bc_2def_2

$ab_2c_2def_2$

$a_2d_2ef_2$

bd_2ef_2

$ab_2d_2ef_2$

cd_2ef_2

$abcd_2ef_2$

$a_2b_2cd_2ef_2$

$ac_2d_2ef_2$

$a_2bc_2d_2ef_2$

$b_2c_2d_2ef_2$

e_2f_2

abe_2f_2

$a_2b_2e_2f_2$

ace_2f_2

$a_2bce_2f_2$

$b_2ce_2f_2$

$a_2c_2e_2f_2$

$bc_2e_2f_2$

$ab_2c_2e_2f_2$

$a_2de_2f_2$

bde_2f_2

$ab_2de_2f_2$

cde_2f_2

$abcde_2f_2$

$a_2b_2cde_2f_2$

$ac_2de_2f_2$

$a_2bc_2de_2f_2$

$b_2c_2de_2f_2$

$ad_2e_2f_2$

$a_2bd_2e_2f_2$

$b_2d_2e_2f_2$

$acd_2e_2f_2$

$bcd_2e_2f_2$

$ad_2cd_2e_2f_2$

$c_2d_2e_2f_2$

$bc_2d_2e_2f_2$

$abc_2d_2e_2f_2$

$a_2b_2c_2d_2e_2f_2$

F R A Ç Ã O 2

$I = AB^2C^2DEF^2_1$

a	a_2be	ce_2	a_2b_2cf	abc_2ef
a_2b	a_2b_2e	$abce_2$	ac_2f	$a_2b_2c_2ef$
b_2	ace	$a_2b_2ce_2$	a_2bc_2f	def
a_2c	a_2bce	ac_2e_2	b_2c_2f	$abdef$
bc	b_2ce	$a_2bc_2e_2$	abf	a_2b_2def
ab_2c	a_2c_2e	$b_2c_2e_2$	a_2bdf	$acdef$
c_2	bc_2e	ade_2	b_2df	a_2bcdef
abc_2	ab_2c_2e	a_2bde_2	a_2cdf	b_2cdef
$a_2b_2c_2$	a_2de	b_2de_2	$bcdf$	a_2c_2def
d	bde	a_2cde_2	ab_2cdf	bc_2def
abd	ab_2de	$bcde_2$	c_2df	ab_2c_2def
a_2b_2d	cde	ab_2cde_2	abc_2df	a_2d_2ef
acd	$abcde$	c_2de_2	$a_2b_2c_2df$	bd_2ef
a_2bcd	a_2b_2cde	abc_2de_2	d_2f	ab_2d_2ef
b_2cd	ac_2de	$a_2b_2c_2de_2$	abd_2f	cd_2ef
a_2c_2d	a_2bc_2de	d_2e_2	$a_2b_2d_2f$	$abcd_2ef$
bc_2d	b_2c_2de	abd_2e_2	acd_2f	$a_2b_2cd_2ef$
ab_2c_2d	ab_2e	$a_2b_2d_2e_2$	a_2bcd_2f	ac_2d_2ef
a_2d_a	a_2bd_2e	acd_2e_2	b_2cd_2f	$a_2bc_2d_2ef$
bd_2	b_2d_2e	$a_2bcd_2e_2$	$a_2c_2d_2f$	$b_2c_2d_2ef$
ab_2d_2	a_2cd_2e	$b_2cd_2e_2$	bc_2d_2f	e_2f
cd_2	bcd_2e	$a_2c_2d_2e_2$	$ab_2c_2d_2f$	abe_2f
$abcd_2$	ab_2cd_2e	$bc_2d_2e_2$	aef	$a_2b_2e_2f$
$a_2b_2cd_2$	c_2d_2e	$ab_2c_2d_2e_2$	a_2bef	ace_2f
ac_2d_2	abc_2d_2e	a_2f	b_2ef	a_2bce_2f
$a_2bc_2d_2$	$a_2b_2c_2d_2e$	bf	a_2cef	b_2ce_2f
$b_2c_2d_2$	a_2e_2	ab_2f	$bcef$	$a_2c_2e_2f$
e	be_2	cf	ab_2cef	bc_2e_2f
abe	ab_2e_2	$abcf$	c_2ef	$ab_2c_2e_2f$

a_2de_2f	$a_2b_2f_2$	$a_2cd_2f_2$	ab_2cdef_2	$abc_2e_2f_2$
bde_2f	acf_2	bcd_2f_2	c_2def_2	$a_2b_2c_2e_2f_2$
ab_2de_2f	a_2bcf_2	$ab_2cd_2f_2$	abc_2def_2	be_2f_2
cde_2f	b_2cf_2	$c_2d_2f_2$	$a_2b_2c_2def_2$	$abde_2f_2$
$a_2b_2cde_2f$	$a_2c_2f_2$	$abc_2d_2f_2$	d_2ef_2	$a_2b_2de_2f_2$
ac_2de_2f	bc_2f_2	$a_2b_2c_2d_2f_2$	abd_2ef_2	$acde_2f_2$
$a_2bc_2de_2f$	$ab_2c_2f_2$	a_2ef_2	$a_2b_2d_2ef_2$	$a_2bcde_2f_2$
$b_2c_2de_2f$	a_2df_2	bef_2	acd_2ef_2	$b_2cde_2f_2$
ad_2e_2f	bdf_2	ab_2ef_2	$a_2bcd_2ef_2$	$a_2c_2de_2f_2$
$a_2bd_2e_2f$	ab_2df_2	cef_2	$b_2cd_2ef_2$	$bc_2de_2f_2$
$b_2d_2e_2f$	cdf_2	$abcef_2$	$a_2c_2d_2ef_2$	$ab_2c_2de_2f_2$
$a_2cd_2e_2f$	$abcdf_2$	$a_2b_2cef_2$	$bc_2d_2ef_2$	$a_2d_2e_2f_2$
bcd_2e_2f	$a_2b_2cdf_2$	ac_2ef_2	$ab_2c_2d_2ef_2$	$bd_2e_2f_2$
$ab_2cd_2e_2f$	ac_2df_2	$a_2bc_2ef_2$	ae_2f_2	$ab_2d_2e_2f_2$
$c_2d_2e_2f$	$a_2bc_2df_2$	$b_2c_2ef_2$	$a_2be_2f_2$	$cd_2e_2f_2$
$abc_2d_2e_2f$	$b_2c_2df_2$	$adef_2$	$b_2e_2f_2$	$abcd_2e_2f_2$
$a_2b_2c_2d_2e_2f$	ad_2f_2	a_2bdef_2	$a_2ce_2f_2$	$a_2b_2cd_2e_2f_2$
f_2	$a_2bd_2f_2$	b_2def_2	bce_2f_2	$ac_2d_2e_2f_2$
abf_2	$b_2d_2f_2$	a_2cdef_2	$ab_2ce_2f_2$	$a_2bc_2d_2e_2f_2$
		$bcdef_2$	$c_2e_2f_2$	$b_2c_2d_2e_2f_2$

F R A Ç Ã O 3

$I = AB^2C^2DEF^2_2$

a_2	a_2ce	b_2ce_2	bc_2f	$adef$
b	bce	$a_2c_2e_2$	ab_2c_2f	a_2bdef
ab_2	ab_2ce	bc_2e_2	a_2bf	b_2def
c	c_2e	$ab_2c_2e_2$	bdf	a_2cdef
abc	abc_2e	a_2de_2	ab_2df	$bcdef$
a_2b_2c	$a_2b_2c_2e$	bde_2	cdf	ab_2cdef
ac_2	de	ab_2de_2	$abcdf$	c_2def
a_2bc_2	$abde$	cde_2	a_2b_2cdf	abc_2def
b_2c_2	a_2b_2de	$abcde_2$	ac_2df	$a_2b_2c_2def$
ad	$acde$	$a_2b_2cde_2$	a_2bc_2df	d_2ef
a_2bd	a_2bcde	ac_2de_2	b_2c_2df	abd_2ef
b_2d	b_2cde	$a_2bc_2de_2$	ad_2f	$a_2b_2d_2ef$
a_2cd	a_2c_2de	$b_2c_2de_2$	a_2bd_2f	acd_2ef
bcd	bc_2de	ad_2e_2	b_2d_2f	a_2bcd_2ef
ab_2cd	ab_2c_2de	$a_2bd_2e_2$	a_2cd_2f	b_2cd_2ef
c_2d	a_2d_2e	$b_2d_2e_2$	bcd_2f	$a_2c_2d_2ef$
abc_2d	bd_2e	$a_2cd_2e_2$	ab_2cd_2f	bc_2d_2ef
$a_2b_2c_2d$	ab_2d_2e	bcd_2e_2	c_2d_2f	$ab_2c_2d_2ef$
d_2	cd_2e	$ab_2cd_2e_2$	abc_2d_2f	ae_2f
abd_2	$abcd_2e$	$c_2d_2e_2$	$a_2b_2c_2d_2f$	a_2be_2f
$a_2b_2d_2$	$a_2b_2cd_2e$	$abc_2d_2e_2$	a_2ef	b_2e_2f
acd_2	ac_2d_2e	$a_2b_2c_2d_2e_2$	bef	a_2ce_2f
a_2bcd_2	$a_2bc_2d_2e$	f	ab_2ef	bce_2f
b_2cd_2	$b_2c_2d_2e$	abf	cef	ab_2ce_2f
$a_2c_2d_2$	e_2	a_2b_2f	$abcef$	c_2e_2f
bc_2d_2	abe_2	acf	a_2b_2cef	abc_2e_2f
$ab_2c_2d_2$	$a_2b_2e_2$	a_2bcf	ac_2ef	$a_2b_2c_2e_2f$
ae	ace_2	b_2cf	a_2bc_2ef	de_2f
b_2e	a_2bce_2	a_2c_2f	b_2c_2ef	$abde_2f$

$a_2b_2de_2f$	b_2f_2	cd_2f_2	$abcdef_2$	$ac_2e_2f_2$
$acde_2f$	a_2cf_2	$abcd_2f_2$	$a_2b_2cdef_2$	$a_2bc_2e_2f_2$
a_2bcde_2f	bcf_2	$a_2b_2cd_2f_2$	ac_2def_2	$b_2c_2e_2f_2$
b_2cde_2f	ab_2cf_2	$ac_2d_2f_2$	$a_2bc_2def_2$	ade_2f_2
$a_2c_2de_2f$	c_2f_2	$a_2bc_2d_2f_2$	$b_2c_2def_2$	$a_2bde_2f_2$
bc_2de_2f	abc_2f_2	$b_2c_2d_2f_2$	ad_2ef_2	$b_2de_2f_2$
$ab_2c_2de_2f$	$a_2b_2c_2f_2$	ef_2	$a_2bd_2ef_2$	$a_2cde_2f_2$
$a_2b_2e_2f$	df_2	$abef_2$	$b_2d_2ef_2$	$bcde_2f_2$
bd_2e_2f	$abdf_2$	a_2bef_2	$a_2cd_2ef_2$	$ab_2cde_2f_2$
$ab_2d_2e_2f$	$a_2b_2df_2$	$a_2b_2ef_2$	bcd_2ef_2	$c_2de_2f_2$
cd_2e_2f	$acdf_2$	$acef_2$	$ab_2cd_2ef_2$	$abc_2de_2f_2$
$abcd_2e_2f$	a_2bcdf_2	a_2bcef_2	$c_2d_2ef_2$	$a_2b_2c_2de_2f_2$
$a_2b_2cd_2e_2f$	b_2cdf_2	b_2cef_2	$abc_2d_2ef_2$	$d_2e_2f_2$
$ac_2d_2e_2f$	$a_2c_2df_2$	$a_2c_2ef_2$	$a_2b_2c_2d_2ef_2$	$abd_2e_2f_2$
$a_2bc_2d_2e_2f$	bc_2df_2	bc_2ef_2	$a_2e_2f_2$	$a_2b_2d_2e_2f_2$
$b_2c_2d_2e_2f$	$ab_2c_2df_2$	$ab_2c_2ef_2$	be_2f_2	$acd_2e_2f_2$
f_2	$a_2d_2f_2$	a_2def_2	$ab_2e_2f_2$	$a_2bcd_2e_2f_2$
af_2	bd_2f_2	$bdef_2$	ce_2f_2	$b_2cd_2e_2f_2$
a_2bf_2	$ab_2d_2f_2$	ab_2def_2	$abce_2f_2$	$a_2c_2d_2e_2f_2$
		$cdef_2$	$a_2b_2ce_2f_2$	$a_2b_2c_2d_2e_2f_2$

EXEMPLO 4 - Obtenção de um 3_V^{6-2}.

a) Escrevemos o conjunto de todos os efeitos e interações para o fatorial 3^4 [ver exemplo 1].

b) Desse conjunto selecionamos um subconjunto com n = 6 elementos, tal como visto anteriormente.

b.1) Os m = 4 primeiros elementos desse subconjunto devem ser os efeitos principais:

$$X_1, X_2, X_3, X_4$$

que nos dão um 3_V^4 com 80 combinações de tratamentos.

b.2) O 5º elemento do subconjunto deve ser, como sabemos, uma interação de 4 fatores, por exemplo:

$$[1] \quad X_1 X_2 X_3 X_4$$

nos dando um 3_V^5 com 80 combinações de tratamentos.

Porém, não existe no conjunto um outro elemento que não possa ser escrito como a generalizada de 2 ou 3 membros do subconjunto, ou seja, a fração de fatorial 3^{6-2} não se adapta a um plano de resolução V.

Concluindo, para n = 6, 3^5 é o número mínimo de unidades que suporta resolução V. Daí para a frente, ou seja, para os fatoriais 3^n, com $n \geq 7$, temos conjuntos de efeitos e interações com números muito grandes de elementos. Para obtenção, por exemplo, do 3^{7-1}, o conjunto de efeitos e interações constitui-se de 364 elementos, bem como cada um dos 3 tipos possíveis de delineamentos . A isso se deve o pouco uso das frações de fatoriais dessa série, e por isso nos restringimos a esses dois casos, ou seja, 3^5 e 3^6, lembrando que para os outros casos a obtenção de frações é análoga àquela para a série 2^n.

Não falamos em aliados, mas podemos observar, através das tabelas 30 e 31, que, de fato, todos os efeitos principais e interações de 2 fatores têm por aliados interações de 3 ou mais fatores.

Tabela 30 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 3_V^{5-1}.

$$\text{RELAÇÃO IDENTIDADE: } I = AB^2CDE^2 \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	ABC^2D^2E; BC^2D^2E	AB	AC^2D^2E; $BCDE^2$
B	$ACDE^2$; $ABCDE^2$	AB^2	$AB^2C^2D^2E$; CDE^2
C	$AB^2C^2DE^2$; AB^2DE^2	AC	$ABCD^2E$; BD^2E
D	$AB^2CD^2E^2$; AB^2CE^2	AC^2	ABD^2E^2; BCD^2E
E	AB^2CD; AB^2CDE	AD	ABC^2DE; BC^2E
		AD^2	ABC^2E; BC^2DE
		AE	ABC^2D^2; $BC^2D^2E^2$
		AE^2	$ABC^2D^2E^2$; BC^2D^2
		BC	AC^2DE^2; $ABDE^2$
		BC^2	ADE^2; ABC^2DE^2
		BD	ACD^2E^2; $ABCE^2$
		BD^2	ACE^2; $ABCD^2E^2$
		BE	ACD; ABCDE
		BE^2	ACDE; ABCD
		CD	$AB^2C^2D^2E^2$; AB^2E^2
		CD^2	$AB^2C^2E^2$; $AB^2D^2E^2$
		CE	AB^2C^2D; AB^2DE
		CE^2	AB^2C^2DE; AB^2D
		DE	AB^2CD^2; AB^2CE
		DE^2	AB^2CD^2E; AB^2C

TABELA 31 - Aliados de efeitos para a fração de fatorial 3_V^{6-1}.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = AB^2C^2DEF^2 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right.$

EFEITOS PRINCIPAIS	ALIADOS	INTERAÇÕES DE 2 FATORES	ALIADOS
A	$ABCD^2E^2F$; BCD^2E^2F	AB	ACD^2E^2F; BC^2DEF^2
B	AC^2DEF^2; ABC^2DEF^2	AB^2	$AB^2CD^2E^2F$; CD^2E^2F
C	AB^2DEF^2; AB^2CDEF^2	AC	ABD^2E^2F; $BC^2D^2E^2F$
D	$AB^2C^2D^2EF^2$; $AB^2C^2EF^2$	AC^2	$ABC^2D^2E^2F$; BD^2E^2F
E	$AB^2C^2DE^2F^2$; $AB^2C^2DF^2$	AD	$ABCDE^2F$; BCE^2F
F	AB^2C^2DE; AB^2C^2DEF	AD^2	$ABCE^2F$; $BCDE^2F$
		AE	$ABCD^2EF$; $BCDF$
		AE^2	$ABCD^2F$; BCD^2EF
		AF	$ABCD^2E^2$; $BCD^2E^2F^2$
		AF^2	$ABCD^2E^2F^2$; BCD^2E^2
		BC	$ADEF^2$; $ABCDEF^2$
		BC^2	$ACDEF^2$; $ABDEF^2$
		BD	$AC^2D^2EF^2$; ABC^2EF^2
		BD^2	AC^2EF^2; $ABC^2D^2EF^2$
		BE	$AC^2DE^2F^2$; ABC^2DF^2
		BE^2	AC^2DF^2; $ABC^2DE^2F^2$
		BF	AC^2DE; ABC^2DEF
		BF^2	AC^2DEF; ABC^2DE
		CD	$AB^2D^2EF^2$; AB^2CEF^2
		CD^2	AB^2EF^2; $AB^2CD^2EF^2$
		CE	$AB^2DE^2F^2$; AB^2CDF^2
		CE^2	AB^2DF^2; $AB^2CDE^2F^2$
		CF	AB^2DE; AB^2CDEF
		CF^2	AB^2DEF; AB^2CDE
		DE	$AB^2C^2D^2E^2F^2$; $AB^2C^2F^2$
		DE^2	$AB^2C^2D^2F^2$; $AB^2C^2E^2F^2$
		DF	$AB^2C^2D^2E$; AB^2C^2EF
		DF^2	$AB^2C^2D^2EF$; AB^2C^2E
		EF	$AB^2C^2DE^2$; AB^2C^2DF
		EF^2	$AB^2C^2DE^2F$; AB^2C^2D

3.2.4 - Fatoriais fracionados em blocos

No caso da série 3^n, como vamos trabalhar necessariamente com $n \geq 5$, os experimentos são compostos por um número bastante elevado de combinações de tratamentos, o que nos leva a lançar mão de delineamentos em blocos casualizados.

Pelo teorema de Fisher (MANSON, 1976), sabemos de antemão que para construirmos blocos de

3^2 unidades precisamos ter $n \leq 4$,

3^3 unidades precisamos ter $n \leq 13$,

3^4 unidades precisamos ter $n \leq 40$,

3^5 unidades precisamos ter $n \leq 121$,

....

3^m unidades precisamos ter $n \leq \dfrac{3^m - 1}{2}$

a fim de não confundirmos efeitos principais nem interações de 2 fatores.

No entanto, não podemos esquecer que essa é uma condição apenas necessária, não sendo, portanto, suficiente.

EXEMPLO 1 - Seja o 3_V^{5-1} em 3 blocos de 3^3 unidades. Precisamos de apenas uma interação para confundir com blocos, e vamos escolher o experimento dado pela relação identidade $I = AB^2CDE_2^2$, ou seja, aquele em que a soma dos números modulares das combinações de tratamentos é igual a 2 (mod 3).

Analogamente ao que vimos para a série 2^n, devemos selecionar uma dentre as 81 combinações de tratamentos do delineamento escolhido e confundir com blocos. Porém, não podemos esquecer que a interação escolhida não deve ser efeito principal nem interação de 2 fatores, e as suas generalizadas com aquela na relação identidade também deve ser uma interação de 3 ou mais fatores. Isto posto vamos escolher por exemplo, a interação BC^2D. Verificamos que ela satisfaz a nossa condição, pois,

$$I = AB^2CDE_2^2 \Longrightarrow$$

$$BC^2D = AD^2E^2 = ABC^2E^2$$

Os 3 blocos são dados a seguir.

BLOCO 1					BLOCO 2					BLOCO 3				
BC^2D_o					BC^2D_1					BC^2D_2				
$(AD^2E_2^2,\ ABC^2E_2^2)$					$(AD^2E_o^2,\ ABC^2E_1^2)$					$(AD^2E_1^2,\ ABC^2E_o^2)$				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	0	0	0
2	1	1	0	0	0	2	1	0	0	1	0	1	0	0
2	2	2	0	0	0	0	2	0	0	1	1	2	0	0
0	2	0	1	0	1	0	0	1	0	2	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	2	2	1	1	0
0	1	2	1	0	1	2	2	1	0	0	0	2	1	0
1	1	0	2	0	2	2	0	2	0	0	0	0	2	0
1	2	1	2	0	2	0	1	2	0	0	1	1	2	0
1	0	2	2	0	2	1	2	2	0	0	2	2	2	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	2	2	0	0	1
0	1	1	0	1	1	2	1	0	1	2	0	1	0	1
0	2	2	0	1	1	0	2	0	1	2	1	2	0	1
1	2	0	1	1	2	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	2	1	1	1	1	0	2	1	1	1
1	1	2	1	1	2	2	2	1	1	0	0	2	1	1
2	1	0	2	1	0	2	0	2	1	1	0	0	2	1
2	2	1	2	1	0	0	1	2	1	1	1	1	2	1
2	0	2	2	1	0	1	2	2	1	1	2	2	2	1
1	0	0	0	2	2	1	0	0	2	0	2	0	0	2
1	1	1	0	2	2	2	1	0	2	0	0	1	0	2
1	2	2	0	2	2	0	2	0	2	0	1	2	0	2
2	2	0	1	2	0	0	0	1	2	1	1	0	1	2
2	0	1	1	2	0	1	1	1	2	1	2	1	1	2
2	1	2	1	2	0	2	2	1	2	1	0	2	1	2
0	1	0	2	2	1	2	0	2	2	2	0	0	2	2
0	2	1	2	2	1	0	1	2	2	2	1	1	2	2
0	0	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2

OBSERVAÇÕES:

i) A construção dos blocos é análoga àquela vista para a série 2^n, ou seja, nos blocos 1, 2 e 3 estão, respectivamente, as combinações de tratamentos com 0, 1, 2 (mod 3) letras em comum com BC^2D_0, BC^2D_1 e BC^2D_2, respectivamente. Ou, então, construímos o primeiro bloco procurando no experimento escolhido as combinações de tratamentos adequadas, e dispondo-as na "ordem-padrão". Para a construção dos demais blocos selecionamos para primeira combinação de tratamentos uma que ainda não tenha sido atribuída a nenhum dos blocos já construídos. Feito isso verificamos qual a combinação de tratamentos cujo número modular somado à primeira do bloco 1 nos dá o número modular da combinação de tratamentos em questão. A partir daí somamos esse número modular a todos os das combinações de tratamentos no bloco 1, determinando, dessa forma, aquelas do bloco desejado. No nosso caso, se escolhemos b para ser a primeira combinação de tratamentos do bloco 2, o número modular que devemos somar àquelas do bloco 1, a fim de completarmos o bloco 2, é 1 1 0 0 0. Se escolhemos ab_2 para primeira combinação de tratamentos do bloco 3, devemos somar 2 2 0 0 0 aos números modulares daquelas no bloco 1, pois 2 2 0 0 0 + 2 0 0 0 0 (sendo 2 0 0 0 0 o número modular correspondente a a_2, primeira combinação de tratamentos do bloco 1) nos dá 1 2 0 0 0 que é o número modular de ab_2.

ii) O índice da interação a ser confundida bem como o daquela na relação identidade, é pré-determinado, enquanto que os índices das generalizadas são determinados como segue.

Seja X a interação a ser confundida com blocos.

$$X.I = (BC^2D_o) \times (AB^2CDE^2_2) \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & X_2 + 2X_3 + X_4 \equiv 0 \pmod 3 \\ + & X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 \equiv 2 \pmod 3 \\ \hline & X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 2X_4 + 2X_5 \equiv 2 \pmod 3 \Longrightarrow AD^2E^2_2 \end{array}$$

$$X.I^2 = (BC^2D_o) \times (A^2BC^2D^2E_1) \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & X_2 + 2X_3 + X_4 \equiv 0 \pmod 3 \\ + & 2X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 \equiv 1 \pmod 3 \\ \hline & 2X_1 + 2X_2 + X_3 + 0X_4 + X_5 \equiv 1 \pmod 3 \xRightarrow{x} 2 \pmod 3 \end{array}$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_5 \equiv 2 \pmod 3 \Longrightarrow ABC^2E^2_2$$

Logo, para BC^2D_o temos $AD^2E^2_2$ e $ABC^2E^2_2$

$$X.I = (BC^2D_1) \times (AB^2CDE^2_2) \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & X_2 + 2X_3 + X_4 \equiv 1 \pmod 3 \\ & X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 \equiv 2 \pmod 3 \\ \hline & X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 2X_4 + 2X_5 \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow AD^2E^2_o \end{array}$$

$X.I^2 = (BC^2D_1) \times (A^2BC^2D^2E_1) \Longrightarrow$

$$
\begin{array}{rl}
 & X_2 + 2X_3 + X_4 \equiv 1 \pmod 3 \\
+ & 2X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 \equiv 1 \pmod 3 \\
\hline
 & 2X_1 + 2X_2 + X_3 + 0X_4 + X_5 \equiv 2 \pmod 3 \quad \xrightarrow[]{x\ 2 \pmod 3}
\end{array}
$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_5 \equiv 1 \pmod 3 \Longrightarrow \quad ABC^2E_1^2$$

Logo, para BC^2D_1 temos $AD^2E_o^2$ e $ABC^2E_1^2$.

$X.I = (BC^2D_2) \times (AB^2CDE_2^2) \Longrightarrow$

$$
\begin{array}{rl}
 & X_2 + 2X_3 + X_4 \equiv 2 \pmod 3 \\
+ & X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 \equiv 2 \pmod 3 \\
\hline
 & X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 2X_4 + 2X_5 \equiv 1 \pmod 3 \quad \Longrightarrow \quad AD^2E_1^2
\end{array}
$$

$X.I^2 = (BC^2D_2) \times (A^2BC^2D^2E_1) \Longrightarrow$

$$
\begin{array}{rl}
 & X_2 + 2X_3 + X_4 \equiv 2 \pmod 3 \\
+ & 2X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 \equiv 1 \pmod 3 \\
\hline
 & 2X_1 + 2X_2 + X_3 + 0X_4 + X_5 \equiv 0 \pmod 3 \quad \xrightarrow[]{x\ 2 \pmod 3}
\end{array}
$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_5 \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow \quad ABC^2E_o^2$$

Logo, para BC^2D_2 temos $AD^2E_1^2$ e $ABC^2E_o^2$.

TABELA 32 - Análise da variância para o 3_V^{5-1} confundido em 3 blocos.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = AB^2CDE_2^2$

C.V.	G.L.
Blocos	2
Efeitos principais	5
Interações de 2 fatores	20
Resíduo	53
TOTAL	80

Ainda de acordo com o teorema de Fisher, o confundimento do 3_V^{5-1} também pode ser feito em 3^2 blocos de 3^2 unidades. Porém, não conseguimos fazer esse confundimento de tal forma que nenhum dos graus de liberdade confundidos seja interação de 2 fatores. Isso se justifica se lembrarmos que o teorema de Fisher é uma condição apenas necessária para fazermos um confundimento em blocos, confundindo apenas interações de alta ordem.

No entanto, algumas vezes temos em nossos experimentos interações de 2 fatores em cujos efeitos não estamos interessados, ou então, cujos efeitos são da mesma ordem de grandeza daqueles que atribuímos ao resíduo. Em casos como esses, podemos confundir tais interações de 2 fatores, obtendo o 3_V^{5-1} em 9 blocos de 9 unidades.

EXEMPLO 2 - Seja o 3_V^{5-1} e suponhamos que é sabido que não existe interesse no efeito produzido pela interação dos fatores B e E. Vamos então, confundir tal experimento em 9 blocos de 9 unidades, utilizando o experimento dado por $I = AB^2CDE_2^2$. Vamos confundir com blocos as interações ABC^2 e BCD^2. Se chamarmos a primeira de X e a segunda de Y, de acordo com o que vimos para a série 2^n, devemos ter XY, XYI, XYI^2, XY^2, XY^2I, XY^2I^2, XI, XI^2, YI e YI^2 também confundidas com blocos, ou seja:

$$I = AB^2CDE_2^2 \Longrightarrow$$

$$\underline{ABC^2} = AD^2E = BC^2D^2E$$

$$\underline{BCD^2} = AC^2E^2 = ABD^2E^2$$

$$AB^2D^2 = AB^2C^2E = CD^2E^2$$

$$ACD = ABCDE = BE$$

são todas confundidas com blocos.

Os 9 blocos são os seguintes:

BLOCO 1					BLOCO 2					BLOCO 3				
ABC_o^2, BCD_o^2					ABC_o^2, BCD_1^2					ABC_o^2, BCD_2^2				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1	1	2	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	0	0
2	1	0	1	0	2	0	2	1	0	2	2	1	1	0
0	1	1	2	0	0	0	0	2	0	0	2	2	2	0
0	0	0	0	1	0	2	2	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	2	0	1	1	1	1	2	1	1
2	0	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	0	2	1
2	2	1	0	2	2	1	0	0	2	2	0	2	0	2
0	2	2	1	2	0	1	1	1	2	0	0	0	1	2
1	2	0	2	2	1	1	2	2	2	1	0	1	2	2

BLOCO 4 ABC_1^2, BCD_o^2					BLOCO 5 ABC_1^2, BCD_1^2					BLOCO 6 ABC_1^2, BCD_2^2				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
0	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0
1	2	2	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
2	2	0	2	0	2	1	2	2	0	2	0	1	2	0
0	2	2	0	1	2	0	1	0	1	2	2	0	0	1
1	2	0	1	1	0	0	2	1	1	0	2	1	1	1
2	2	1	2	1	1	0	0	2	1	1	2	2	2	1
2	1	0	0	2	1	2	2	0	2	1	1	1	0	2
0	1	1	1	2	2	2	0	1	2	2	1	2	1	2
1	1	2	2	2	0	2	1	2	2	0	1	0	1	2

BLOCO 7 ABC_2^2, BCD_o^2					BLOCO 8 ABC_2^2, BCD_1^2					BLOCO 9 ABC_2^2, BCD_2^2				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
2	0	0	0	0	2	2	2	0	0	2	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	2	0	1	0	0	1	2	1	0
1	0	2	2	0	1	2	1	2	0	1	1	0	2	0
1	2	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	2	0	1
2	2	2	1	1	2	1	1	1	1	2	0	0	1	1
0	2	0	2	1	0	1	2	2	1	0	0	1	2	1
0	1	2	0	2	0	0	1	0	2	0	2	0	0	2
1	1	0	1	2	1	0	2	1	2	1	2	1	1	2
2	1	1	2	2	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2

Os índices das interações generalizadas são determinados de maneira análoga àquela vista no exemplo anterior.

A análise da variância para este caso está dada na tabela 33 a seguir.

TABELA 33 - Análise da variância para o 3_V^{5-1} confundido em 9 blocos.

RELAÇÃO IDENTIDADE: $I = AB^2CDE_2^2$

C.V.	G.L.
Blocos	8
Efeitos principais	5
Interações de 2 fatores	18
Resíduo	49
TOTAL	80

3.3 - Série 4^n

Como só nos interessam os experimentos com no mínimo 5 fatores, a probabilidade de utilização dos experimentos fatoriais da série 4^n é mínima, pois o menor fatorial dessa série, que podemos utilizar é o 4^5. Nesse caso, são 1.024 combinações de tratamentos para serem testadas. Se utilizarmos o 4^{5-1} são 512 combinações de tratamentos, o que ainda constitui um número extremamente grande de combinações de tratamentos.

Por esse motivo, os experimentos fracionados de resolução V para a série 4^n, $n \geq 5$, são praticamente impossíveis de serem utilizados.

Outro inconveniente é que a aritmética modular não se aplica a esses casos, sendo necessário utilizar a teoria de corpos de Galois.

Apenas para efeito de informação vamos mostrar, rapidamente, como utilizar tal teoria (MANSON, 1976), através de um 4^{5-3}, que no caso não se adapta aos experimentos em estudo.

3.3.1 - Teoria de corpos de Galois

Um corpo de Galois de p^m elementos (p: primo, m: inteiro positivo) é uma representação especial de um corpo finito, e é obtido como segue.

Seja P(x) um polinômio em x, de grau m e com coeficientes inteiros, isto é:

$$P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

$$(a_i=0,1,2,\dots, p-1;\ a_m \neq 0).$$

Seja F(x) um polinômio qualquer em x com coeficientes inteiros. Então, F(x) pode ser expresso por

$$F(x) = P(x) \,.\, Q(x) + p.q(x) + f(x) \qquad [1]$$

onde q(x) e Q(x) são polinômios em x com coeficientes inteiros, e f(x), chamado resíduo, é escrito como segue:

$$f(x) = b_o + b_1x + b_2x_2^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1}$$

$$(b_i=0,1,2,\dots,p-1) .$$

O relacionamento em [1] é escrito como

$$F(x) = f(x) \bmod p,\ P(x)$$

significando que f(x) é o resíduo de F(x) módulo p e P(x).

As funções F(x)'s que satisfazem essa relação quando f(x), p e P(x) são mantidos fixos, formam uma classe.

Se p e P(x) são fixos, mas f(x) é variável, pode-se formar p^m classes, pois cada coeficiente em f(x) pode tomar qualquer um dos valores 0, 1, 2, ..., p-1.

Pode-se verificar que as classes definidas pelos f(x)'s formam um corpo, pois se $F_i(x)$ pertence à classe correspondente a $f_i(x)$, e $F_j(x)$ à classe correspondente a $f_j(x)$, então $F_i(x) + F_j(x)$ pertence à classe correspondente a $f_i(x) + f_j(x)$. Da mesma forma, todas as outras operações definidas por um corpo também são satisfeitas. Qualquer função obtida por operações algébricas ordinárias é substituída por seu resíduo módulo p e P(x). Para que essa divisão seja única é necessário que P(x) não possa ser escrito na forma

$$P(x) = P_1(x) \ .\ P_2(x) + p \ .\ P_3(x) \quad .$$

Isso significa que P(x) deve ser irredutível módulo p, onde $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são polinômios com coeficientes inteiros,de grau positivo e menor que o de P(x).

O corpo finito formado pelas p^m classes de resíduos chama-se corpo de Galois de ordem p^m, e denota-se por $GF(p^m)$. Prova-se que as classes são as mesmas, apesar da escolha de P(x) sujeito às restrições impostas anteriormente, e que o GF (p^m) existe se p é um primo e m um inteiro positivo. As classes de resíduos podem ser representadas por possíveis funções distintas $f_i(x)$, e podem ser representadas por $u_o, u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$, onde $s = p^m$.

EXEMPLO 1 - Obtenção do corpo de Galois de 3^2 elementos.

Nesse caso temos p = 3 e m = 2.

Os possíveis resíduos f(x)'s são do tipo:

$$f(x) = b_o + b_1 x \qquad (b_i=0,1,2)$$

ou seja, existem 9 classes de resíduos representadas por 9 funções distintas f(x)'s:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \rightarrow & u_o \\ 1 & \rightarrow & u_1 \\ 2 & \rightarrow & u_2 \\ x & \rightarrow & u_3 \\ 1+x & \rightarrow & u_4 \\ 2+x & \rightarrow & u_5 \\ 2x & \rightarrow & u_6 \\ 1+2x & \rightarrow & u_7 \\ 2+2x & \rightarrow & u_8 \end{cases}$$

Os possíveis polinômios P(x) de grau m e com coeficientes inteiros são dados por:

$$P(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (a_i=0,1,2;\ a_2 \neq 0) .$$

$P(x)$ deve ser irredutível módulo 3, portanto podemos excluir casos em que $a_o = 0$, pois nesse caso

$$P(x) = a_1x + a_2x^2 = x(a_1 + a_2x)$$

e observando os possíveis $f(x)$'s, vemos que $P(x)$ assim construído é redutível módulo 3.

Porém, para facilitar o trabalho vamos determinar quais, dentre os $P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2$, são irredutíveis módulo 3.

$$P(x) = \begin{cases} x^2 = x \cdot x = u_3 \cdot u_3 \\ 2x^2 = 2x \cdot x = u_3 \cdot u_6 \\ x + x^2 = x(1+x) = u_3 \cdot u_4 \\ x + 2x^2 = x(1+2x) = u_3 \cdot u_7 \\ 2x + x^2 = x(2+x) = u_3 \cdot u_5 \\ 2x + 2x^2 = 2x(1+x) = u_6 \cdot u_4 \\ 1 + x^2 = \text{irredutível} \\ 1 + 2x^2 = (1+x)(1+2x) = u_4 \cdot u_7 \\ 1 + x + x^2 = (2+x)^2 = u_5 \cdot u_5 \\ 1 + x + 2x^2 = \text{irredutível} \\ 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2 = u_4 \cdot u_4 \\ 1 + 2x + 2x^2 = \text{irredutível} \\ 2 + x^2 = (2+x)(1+x) = u_4 \cdot u_5 \\ 2 + 2x^2 = \text{irredutível} \\ 2 + x + x^2 = \text{irredutível} \\ 2 + x + 2x^2 = 2(1+x)^2 = u_2 \cdot u_4 \cdot u_4 \\ 2 + 2x + x^2 = \text{irredutível} \\ 2 + 2x + 2x^2 = 2(1+2x)^2 = u_2 \cdot u_7 \cdot u_7 \end{cases}$$

Tomemos aquele dado por $P(x) = x^2 + 1$.

Consideremos agora um polinômio qualquer $F(x)$, por exemplo:

$$F(x) = 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{array}{rrrrl|l}
 & 5x^3 & + 2x^2 & + 4x & + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{6-6}
+ & -5x^3 & & - 5x & & 5x + 2 \\ \cline{1-5}
 & & 2x^2 & - x & + 1 & \\
 & & -2x^2 & & - 2 & \\ \cline{3-5}
 & & & - x & - 1 &
\end{array}$$

Então,

$$F(x) = (x^2 + 1)(5x + 2) + 3(-x - 1) + (2x + 2) .$$

Existe um teorema que diz que todos os elementos do corpo, exceto o elemento zero u_o , podem ser representados como potências de um elemento de tipo especial, chamado "marca primitiva". As representações em termos dos u_i's ou dos x's, podem ser usadas para formar a tabela da adição, e aquela em termos dos y's para formar a tabela de multiplicação.

$$P(x) = 1 + x^2 \Longrightarrow P(x) = 0 \Longrightarrow 1 + x^2 = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 = -1 \Longrightarrow x^2 = 2 \pmod 3$$

Verificamos que $y = 1 + x$ é uma marca primitiva, pois:

$y = 1 + x \Longrightarrow$

$y^2 = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + 2x + 2 = 2x$

$y^3 = y \cdot y^2 = (1 + x)(2x) = 2x + 2x^2 = 2x + 4 = 2x + 1$

$y^4 = y \cdot y^3 = (1 + x)(2x + 1) = 2x + 1 + 2x^2 + x = 3x + 1 + 4 = 2$

$y^5 = y \cdot y^4 = (1 + x) \cdot 2 = 2 + 2x$

$y^6 = y \cdot y^5 = (1 + x)(2 + 2x) = 2 + 2x + 2x + 2x^2 = 2 + x + 1 = x$

$y^7 = y \cdot y^6 = (1 + x)(x) = x + x^2 = x + 2$

$y^8 = y \cdot y^7 = (1 + x)(2 + x) = 2 + x + 2x + x^2 = 2 + 2 = 1$

Resumindo, temos:

PARA A TABELA DE ADIÇÃO		PARA A TABELA DE MULTIPLICAÇÃO
$u_o = 0$		
$u_1 = 1$	$\longleftrightarrow$	y^8
$u_2 = 2$	$\longleftrightarrow$	y^4
$u_3 = x$	$\longleftrightarrow$	y^6
$u_4 = 1 + x$	$\longleftrightarrow$	y
$u_5 = 2 + x$	$\longleftrightarrow$	y^7
$u_6 = 2x$	$\longleftrightarrow$	y^2
$u_7 = 1 + 2x$	$\longleftrightarrow$	y^3
$u_8 = 2 + 2x$	$\longleftrightarrow$	y^5

Um relacionamento importante é aquele dado por

$$y^{p^m - 1} = 1$$

e que no nosso caso nos dá:

$$y^{p^m - 1} = y^{3^2 - 1} = y^8 = 1 .$$

Feito isso podemos obter as tabelas de adição e multiplicação.

Tabela de Adição

+		u_o 0	u_1 1	u_2 2	u_3 3	u_4 4	u_5 5	u_6 6	u_7 7	u_8 8
u_o	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_1	1		2	0	4	5	3	7	8	6
u_2	2			1	5	3	4	8	6	7
u_3	3				6	7	[8]	0	1	2
u_4	4					8	6	1	2	0
u_5	5						7	2	0	1
u_6	6							3	4	5
u_7	7								5	3
u_8	8									4

Os valores são obtidos, por exemplo, como segue:

$u_3 + u_5 = x + 2 + x = 2x + 2 = u_8 = 8$

Tabela de Multiplicação

$\cdot$		u_o 0	u_1 1	u_2 2	u_3 3	u_4 4	u_5 5	u_6 6	u_7 7	u_8 8
u_o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y^8 \leftrightarrow u_1$	1		[1]	2	3	4	5	6	7	8
$y^4 \leftrightarrow u_2$	2			1	6	8	7	[3]	5	4
$y^6 \leftrightarrow u_3$	3				2	5	8	1	4	7
$y \leftrightarrow u_4$	4					6	1	7	2	3
$y^7 \leftrightarrow u_5$	5						3	4	[6]	2
$y^2 \leftrightarrow u_6$	6							2	8	5
$y^3 \leftrightarrow u_7$	7								3	1
$y^5 \leftrightarrow u_8$	8									6

Lembrando que $y^{p^m-1} = 1 \Longrightarrow y^{9-1} = y^8 = 1$, obtemos os produtos como segue:

$$u_1 \cdot u_1 = y^8 \cdot y^8 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$u_2 \cdot u_6 = y^4 \cdot y^2 = y^6 = u_3 = 3$$

$$u_7 \cdot u_5 = y^3 \cdot y^7 = y^{10} = y^8 \cdot y^2 = 1 \cdot y^2 = u_6 = 6$$

EXEMPLO 2 – Obtenção do corpo de Galois de 2^2 elementos.

Nesse caso temos $p = 2$ e $m = 2$.

Os possíveis resíduos f(x)'s são do tipo:

$$f(x) = b_o + b_1 x \qquad (b_i = 0,1)$$

ou seja, existem 4 classes de resíduos representadas por 4 funções distintas f(x)'s.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \rightarrow & u_o \\ 1 & \rightarrow & u_1 \\ \quad x & \rightarrow & u_2 \\ 1 + x & \rightarrow & u_3 \end{cases}$$

Os possíveis P(x)'s de grau m e com coeficientes inteiros são dados por:

$$P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 \qquad (a_i=0,1;\ a_2\neq 0)\ .$$

$$P(x) = \begin{cases} \quad\quad x^2 = x \,.\, x = u_2 \,.\, u_2 \\ \quad x + x^2 = x(1 + x) = u_2 \,.\, u_3 \\ 1 + \quad x^2 = (1 + x)(1 + x) = u_3 \,.\, u_3 \\ 1 + x + x^2 = \text{irredutível} \end{cases}$$

Tomemos $P(x) = 1 + x + x^2$.

$P(x) = 0 \Longrightarrow \quad 1 + x + x^2 = 0 \Longrightarrow \quad x^2 = x + 1$

Verificamos que $y = x$ é uma marca primitiva, pois

$y = x \Longrightarrow$

$y^2 = x^2 = x + 1$

$y^3 = y \,.\, y^2 = x(x + 1) = x^2 + x = x + 1 + x = 2x + 1 = 1$

Resumindo, temos:

PARA A TABELA DA ADIÇÃO		PARA A TABELA DA MULTIPLICAÇÃO
$u_o = 0$		
$u_1 = 1$	$\leftrightarrow$	y^3
$u_2 = x$	$\leftrightarrow$	y
$u_3 = 1 + x$	$\leftrightarrow$	y^2

$$y^{p^m-1} = y^{2^2-1} = y^3 = 1$$

Tabela de Adição

$+$	u_o 0	u_1 1	u_2 2	u_3 3
$u_o = 0$	0	1	2	3
$u_1 = 1$		0	3	2
$u_2 = 2$			0	1
$u_3 = 3$				0

Tabela de Multiplicação

$\cdot$	u_o 0	u_1 1	u_2 2	u_3 3
$u_o = 0$	0	0	0	0
$y^3 \leftrightarrow u_1 = 1$		1	2	3
$y \leftrightarrow u_2 = 2$			3	1
$y^2 \leftrightarrow u_3 = 3$				2

3.3.2 - Uso da teoria de corpos de Galois

Suponhamos um fatorial 4^5. Se estamos interessados em testar apenas 16 das 1.024 combinações de tratamentos do fatorial, ou seja, se vamos trabalhar com um experimento 4^{5-3}, utilizamos um $GF(2^2)$, pois $4^{5-3} = (2^2)^2 = (p^m)^n$.

Em seguida vamos escrever todas as combinações de tratamentos para 2 fatores, A e B, em 4 níveis cada.

A	B	C=AB	D=AB²	E=AB³
X_1	X_2	$X_1 + X_2$	$X_1 + 2X_2$	$X_1 + 3X_2$
0	0	0	0	0
0	1	1	2	3
0	2	2	3	1
0	3	3	1	2
1	0	1	1	1
1	1	0	3	2
1	2	3	2	0
1	3	2	0	3
2	0	2	2	2
2	1	3	0	1
2	2	0	1	3
2	3	1	3	0
3	0	3	3	3
3	1	2	1	0
3	2	1	0	2
3	3	0	2	1

Observamos que as colunas 3, 4 e 5 são obtidas através das tabelas de adição e multiplicação para o $GF(2^2)$.

Uma relação identidade, nesse caso, é dada por:

$$I = ABC_o = AB^2D_o = AB^3E_o \quad .$$

Como vemos, esse não é um experimento de resolução V, pois na relação identidade temos palavras de 3 letras.

No caso de querermos um 4^{5-1}, obtemos experimentos de resolução V, mas com um número extremamente grande de combinações de tratamentos, ou seja, com 512 combinações de tratamentos. Um experimento desse tipo não apresenta interesse prático, e portanto, não vamos exemplificá-lo. Adiantamos apenas que, nesse caso, trabalhamos com $4^{5-1} = (2^2)^4 = (p^m)^n$, ou seja, com 4 fatores em 4 níveis cada, utilizando também um $GF(2^2)$.

4. CONCLUSÕES

Observamos, no decorrer de nosso trabalho, que a fração de um fatorial deve ser usada sempre com muita cautela. Os principais cuidados a serem tomados pelo experimentador estão na escolha dos elementos tomados para geradores e no conhecimento dos aliados dos efeitos fatoriais.

No caso específico de experimentos de resolução V, não podemos ter efeitos principais nem interações de 2 fatores confundidos, ou, em outras palavras, os efeitos confundidos devem ser interações de alta ordem. Isto posto, podemos obter experimentos que proporcionam um risco de interpretação errônea muito menor que nos outros casos, pois os geradores têm seus efeitos totalmente perdidos, e as interações de 3 ou mais fatores costumam ser de menor interesse do que os efeitos principais e as interações de alta ordem.

Dentre os experimentos de menor ordem que apresentam valor prático, citamos o 2_V^{5-1} e o 3_V^{5-1}, embora outros, de ordem maior, também possam ser usados com sucesso em vários tipos de experimentos.

5. BIBLIOGRAFIA CITADA

BOSE, R.C., 1938. On the Application of the Properties of Galois Fields to the Problem of the Construction of Hyper-Graeco-Latin Squares. Sankhyã: The Indian Journal of Statistics, Statistical Publishing Society. Calcutá, 3: 323-328.

BOSE, R.C., 1947a. Mathematical Theory of the Symmetrical Factorial Design. Sankhyã: The Indian Journal of Statistics, Statistical Publishing Society. Calcutá, 8: 107-166.

BOSE, R.C. e K. KISHEN, 1940. On the Problem of Confounding in the General Symmetric Factorial Design. Sankhyã: The Indian Journal of Statistics, Statistical Publishing Society. Calcutá, 5: 21-36.

BOX, G.E.P. e J.S. HUNTER, 1961. The 2^{n-k} Fractional Factorial Designs. Technometrics, American Statistical Association. Washington, 3: 311--352 (Part I), 3:449-458 (Part II).

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Designs. John Wiley and Sons, 2ª edição, Nova York. 611 p.

FINNEY, D.J., 1945. The Fractional Replication of Factorial Arrangements. Annals of Eugenics, 12: 291-301.

FISHER, R.A., 1971. The Design of Experiments. Oliver and Boyd, 8ª edição, Edinburgh. 249 pp.

JOHN, P.W.M., 1971. Statistical Design and Analysis of Experiments. The Macmillan Co., Nova York.

KEMPTHORNE, O., 1975. The Design and Analysis of Experiments. John Wiley and Sons, Nova York. 631 p.

MANSON, A.R., 1976. Notas de Aulas. Curso ST674. Advanced Design Construction and Analysis. Universidade da Carolina do Norte, Raleigh. [Comunicação pessoal com o Prof. Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, ESALQ/USP].

PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. Livraria Nobel. 8ª edição, São Paulo. 430 pp.

SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1978. Statistical Methods. The Iowa State University Press Ames. 6ª edição, Iowa. 593 pp.