SUPERFÍCIE POLINOMIAL DE RESPOSTA NUM ENSAIO DE ADUBAÇÃO COM NÍVEIS NÃO EQUIDISTANTES

ROBERTO SIMIONATO MORAES

Engenheiro-Agrônomo

Instrutor da Cadeira n.º 16 (Matemática e Estatística)

E. S. A. "Luiz de Queiroz" - U S P

TESE DE DOUTORAMENTO

Apresentada a Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo

PIRACICABA

Estado de São Paulo - Brasil

– 1969 –

A meus pais,

A minha espôsa e

A meu filho

A G R A D E C I M E N T O S

Expressamos os nossos sinceros agradecimentos ao Dr. Frederico Pimentel Gomes, Professor Catedrático da Cadeira nº 16 (Matemática e Estatística) pelo incentivo e segura orientação dada na execução dêste trabalho.

Ao Dr. Otto Jesu Crócomo, pelo fornecimento dos dados.

Aos colegas da Cadeira nº 16 (Matemática e Estatística) pelas sugestões apresentadas.

Ao Centro de Computação Eletrônica de Dados, do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo, pela permissão dada de uso do seu computador eletrônico IBM-1620 , no qual foi realizada parte dos cálculos dêste trabalho.

Agradecemos ainda a todos que, de uma forma ou outra, concorreram para o bom andamento desta pesquisa.

Í N D I C E

1 - INTRODUÇÃO

A regressão polinomial tem sido empregada, em muitos campos da atividade humana para representar relações funcionais entre diversas variáveis.

Êsse método, introduzido por Hotelling e Friedman , e Savage, conforme citação de BOX e WILSON (1951), teve grande desenvolvimento nas pesquisas químicas com Box e outros autores. Mais recentemente passou a ser aplicado no campo agronômico, principalmente na parte referente a adubação.

Como sabemos, a produção é função dos nutrientes, aplicados na forma de adubação, além de outras variáveis mais, que geralmente não são consideradas, por falta de elementos que permitam medi-las, ou por sua pequena contribuição à produção.

Assim é que inúmeros ensaios de adubação têm sido realizados , com posterior adaptação de uma regressão polinomial aos dados obtidos.

Diversos delineamentos são usados para obtenção de dados destinados a adaptação da regressão polinomial, havendo aliás delineamentos imaginados especialmente para êsse fim, como por exemplo os delineamentos compostos, apresentados por BOX e WILSON (1951) para uso em pesquisas químicas.

No caso da produção como função dos fertilizantes, os delineamentos fatoriais, principalmente o 3 x 3 x 3 com níveis equidistantes, são bastante utilizados para fornecimento de dados experimentais aos quais será ajustada a regressão polinomial.

Entretanto, o emprêgo do método da regressão polinomial em um único ensaio sofre sérias restrições, conforme nos mostram PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1966), e CAMPOS (1967) . Apesar disso, há casos em que é vantajoso o uso do método, como podemos ver em PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1966) , sendo um dêles quando as interações são de grande vulto.

Sendo-nos apresentado um caso de um ensaio fatorial de adubação N , P , K na Venezuela, em blocos casualizados, no qual tôdas as interações foram significativas, pareceu-nos preferível estudá-lo através da superfície de resposta, ou melhor, através da regressão polinomial.

Entretanto, o ensaio em questão havia sido realizado com doses não equidistantes, escapando portanto, dos métodos usuais.

Apresentaremos nêste trabalho, o estudo feito através da regressão polinomial, dêsse ensaio fatorial em doses não equidistantes.

São apresentadas as estimativas dos parâmetros da equação, do modêlo:

$$Y = a_0 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 \quad ,$$

das variâncias dêsses parâmetros, bem como dos intervalos de confiança correspondentes.

Um estudo das doses econômicas, bem como uma indicação de adubação no caso de ponto de sela, dentro dos limites do ensaio ,também é exposto.

Para a realização dêste trabalho foi necessário utilizar o computador eletrônico tal a dificuldade dos cálculos. Essa utilização obrigou-nos a elaboração de um programa em linguagem "FORTRAN" .

2 - REVISÃO DA LITERATURA

O emprêgo da regressão polinomial para representar fenômenos causados por uma ou mais variáveis é hoje bastante comum nos diversos campos da atividade humana.

Também no campo agronômico ela é bastante utilizada, principalmente na representação de fenômenos de adubação, onde, normalmente, temos vários nutrientes influenciando a produção. Através dela podemos determinar valores que nos levem a condições ótimas.

Entretanto, essa aplicação restringe-se quase só a experimentos nos quais os níveis das variáveis independentes sejam igualmente espaçados. No que tange a experimentos com níveis desigualmente espaçados, que é o caso por nós abordado, a bibliografia é quase inexistente, conforme podemos ver no que se segue, onde apenas um trabalho em delineamento rotativo apresenta êsse fato.

O problema da obtenção experimental de condições ótimas foi exposto e discutido por Hotelling e Friedman , e Savage conforme citação de BOX e WILSON (1951) .

BOX e WILSON (1951) apresentam também um estudo do método, no qual abordam a técnica de estimação dos parâmetros nos diversos delineamentos experimentais. Essa técnica é determinada através do método dos quadrados mínimos.

Os parâmetros são estimados através da equação:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$$

onde: $\hat{\beta}$ é o vetor das estimativas dos parâmetros

X é a matriz dos coeficientes e

Y é o vetor dos valores observados.

Determinaram também a estimativa da soma de quadrados do resíduo chegando a:

$$(N - L) s^2 = Y' Y - Y' X \hat{\beta} \quad ,$$

sendo $(N - L)$ o número de graus de liberdade do resíduo.

Os autores apresentam também um método para determinar o vício (bias) da estimativa dos parâmetros da equação de regressão. Assim, quando uma função de resposta pode ser representada exatamente por uma equação que envolve L parâmetros, e o experimentador admite uma equação com $M < L$ parâmetros tomando $N \geqslant M$ parcelas para estudá-la, teríamos:

$$Y = X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 \quad ,$$

onde: X_1 é uma matriz de dimensões $N \times M$;

X_2 é uma matriz de dimensões $N \times S$;

β_1 é uma matriz de dimensões $M \times 1$;

β_2 é uma matriz de dimensões $S \times 1$;

$M + S = L$.

Através dos métodos dos quadrados mínimos os autores obtiveram:

$$\hat{\beta}_1 = (X_1' X_1)^{-1} X_1' Y \quad ,$$

e pela esperança matemática de $\hat{\beta}_1$ determinaram o vício:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \beta_2$$

BOX (1954) aborda o problema de uma forma geral, dando maior ênfase à interpretação dos resultados. Para isso apresenta alguns exemplos de aplicação na pesquisa química.

HEADY e PESEK (1954) fizeram um estudo muito interessante sôbre adaptações de funções de resposta a dados de um ensaio de adubação N e P em milho, cada nutriente em cinco níveis. Usaram os tratamentos, apresentados a seguir com um asterisco.

Os autores aplicaram aos dados, vários modêlos de uma ou duas variáveis. Com uma única variável, fixando outra, foram ajustadas 35 equações.

P \ N	0	40	80	120	160	200	240	280	320
0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
40	*	*			*	*			*
80	*		*		*		*		*
120	*			*	*			*	*
160	*	*	*	*	*	*	*	*	*
200	*	*			*	*			*
240	*		*		*		*		*
280	*			*	*			*	*
320	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Os valores de N e P_2O_5 são dados em lb/acre .

Com duas variáveis independentes, diversas equações foram estimadas mas apenas cinco delas apresentadas, as quais foram comparadas através dos respectivos coeficientes de determinação total e pelos valores dos testes t dos parâmetros.

Chegaram à conclusão de que a equação que melhor representa os dados é:

$$Y = 5{,}682 - 0{,}316\ N - 0{,}147\ P + 6{,}3512\ \sqrt{N} + 8{,}5155\ \sqrt{P} + 0{,}3410\ \sqrt{NP}$$

A partir desta equação determinaram o ponto que corresponde à máxima produção. Encontraram os valores, N = 397,6 lb/acre e P_2O_5 = 336,6 lb/acre, que caem fora do intervalo considerado no ensaio. A seguir fizeram diversos cortes na superfície, cujos gráficos representativos são apresentados. Assim, chegaram às seguintes conclusões:

Quando o Nitrogênio foi fixado na dose zero, houve uma queda na produção para doses baixas de P_2O_5 . Para o Nitrogênio fixo nas doses 160 e 320 lb/acre, a produção aumenta ràpidamente para níveis baixos de P_2O_5 , caindo um pouco para doses altas dêsse nutriente. Fenômeno análogo ocorreu para P_2O_5 fixo.

HEADY (1956), tratando dos problemas metodológicos no uso dos fertilizantes, diz que o problema central na adaptação de uma função de produção é a determinação do modêlo matemático e da distribuição probabilística da função resposta, pois considera que não há condições biológicas de determinação de um único modêlo. Isso, devido a grande variações de solo, culturas e situações climáticas.

MASON (1956) aplicou uma regressão polinomial a dados de um ensaio de adubação N , P e K de batata, com 5 níveis para cada nutriente. Utilizou um fatorial incompleto com 17 tratamentos. Obteve para os parâmetros as seguintes estimativas com seus respectivos êrros padrões:

$$\hat{b}_0 = 48{,}590 \pm 2{,}103$$

$$\hat{b}_1 = 6{,}690 \pm 0{,}943$$

$$\hat{b}_2 = 1{,}254 \pm 0{,}943$$

$$\hat{b}_3 = -\ 0{,}270 \pm 0{,}943$$

$$\hat{b}_{11} = -\ 2{,}628 \pm 0{,}832$$

$$\hat{b}_{22} = 1{,}832 \pm 0{,}832$$

$$\hat{b}_{33} = -\ 1{,}231 \pm 0{,}832$$

$$\hat{b}_{12} = -\ 1{,}640 \pm 0{,}858$$

$$\hat{b}_{13} = 0{,}786 \pm 0{,}858$$

$$\hat{b}_{23} = 1{,}850 \pm 0{,}858$$

Portanto a equação estimada foi:

$$\hat{Y} = 48{,}590 + 6{,}690\ N + 1{,}254\ P - 0{,}270\ K - 2{,}628\ N^2 + $$
$$+ 1{,}832\ P^2 - 1{,}231\ K^2 - 1{,}640\ N\ P + 0{,}786\ N\ K + $$
$$+ 1{,}850\ P\ K\ .$$

A análise de variância deu os resultados seguintes.

Causas de Variação	G. L.	Q. M.
Repetições	2	8,14
Tratamentos	16	232,88 **
Regressão Linear	3	882,08 **
Regressão Quadrática	6	145,52 **
Desvios da Regressão	7	29,53 *
Resíduo	32	32,86

Nota-se que, apesar do autor ter obtido significância para Regressão Linear e Quadrática, os êrros padrões dos parâmetros são grandes, o que nos levaria a obter para êles intervalos de confiança muito grandes.

HADER , HARWARD , MASON e MOORE (1957) apresentaram um estudo de delineamentos experimentais e métodos estatísticos para caracterizar a superfície de resposta. Nêsse estudo expõem um exemplo de um ensaio de produção de alface afetada por três elementos menores (cobre , molibdênio e ferro), em delineamento rotativo de segunda ordem.

A variação dos elementos menores foi:

Co :	0,0002 ;	0,00129 ;	0,02 ;	0,3101 ;	2,00 ppm ;
Mo :	0,0002 ;	0,00129 ;	0,02 ;	0,3101 ;	2,00 ppm ;
Fe :	0,0025 ;	0,06419 ;	0,25 ;	3,8760 ;	25,00 ppm .

Essas concentrações dos elementos menores foram calculadas a partir dos valores

$$- 1,68 \; ; \; - 1 \; ; \; 0 \; ; \; 1 \; ; \; 1,68 \quad ,$$

através da equação linear,

$$\log (\text{conc}) = a + b\, x$$

onde:

<u>a</u> e <u>b</u> foram tomados de tal modo que a reta passasse pelos dois valores extremos da concentração, ou sejam, 0,0002 e 2,0 ppm para o cobre e molibdênio e 0,0025 e 25,0 ppm para o ferro.

Entretanto, devido a um êrro de cálculo, a segunda concentração do ferro foi 0,06419 , cujo valor transformado é - 0,5 em vez de - 1 , como planejado.

Determinados os parâmetros através do método dos quadrados mínimos chegaram aos valores seguintes:

$$\hat{b}_0 = 24,34 \pm 1,31$$
$$\hat{b}_1 = -\ 4,57 \pm 0,90$$
$$\hat{b}_2 = -\ 0,82 \pm 0,90$$
$$\hat{b}_3 = -\ 0,03 \pm 1,03$$
$$\hat{b}_{11} = -\ 5,28 \pm 0,87$$
$$\hat{b}_{22} = -\ 0,75 \pm 0,87$$
$$\hat{b}_{33} = -\ 5,35 \pm 0,90$$
$$\hat{b}_{12} = -\ 1,31 \pm 1,15$$
$$\hat{b}_{13} = -\ 1,29 \pm 1,50$$
$$\hat{b}_{23} = 0,66 \pm 1,50$$

Os autores determinaram também o ponto de máximo da função, que é:

$$x_1^* = -\ 0,41$$
$$x_2^* = -\ 0,17$$
$$x_3^* = 0,04 \quad .$$

Pela análise de variância obtiveram:

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.
Média	1	6.031,6	6.031,6 **
Regressão Linear	3	344,4	114,8 **
Regressão Quadrática	6	674,4	112,4 **
Desvios da Regressão	5	54,0	10,8
Resíduo	5	52,5	10,5
Total	20	7.156,9	

Observa-se que, apesar do êrro padrão dos parâmetros ser relativamente grande, os autores obtiveram uma significância alta para a regressão, bem como um ponto de máximo que caiu dentro do intervalo em estudo.

ZAGATTO e PIMENTEL GOMES (1960) realizaram um estudo de algumas funções de produção sob o ponto de vista econômico. As funções estudadas mais particularmente foram as equações de Mitscherlich e o trinômio do segundo grau, ambas, portanto, com uma só variável independente. Entretanto, os autores procuraram examinar o fato sob o aspecto de que em condições de capital limitado, para as quais o mais importante não é obter a produção máxima, e sim o mais alto retôrno por cruzeiro dispendido. Assim, procuraram tornar máxima a função:

$$Z = \frac{R - C}{C} \quad ,$$

onde: R é a renda bruta e

C é o custo da produção.

VOSS e PESEK (1962) determinaram uma maneira de estimar a função de produção em relação aos nutrientes provenientes do solo e dos fertilizantes. Estudaram a produção em função de N e P , através da equação:

$$E\ (Y) = B_1\ N_T + B_2\ P_T + B_3\ N_T^2 + B_4\ P_T^2 + B_5\ N_T\ P_T \quad ,$$

onde:

N_T e P_T representam os totais do nitrogênio e do fósforo associados à produção.

TEJEDA (1966) faz aplicação da regressão polinomial a dados de produção de trigo, em função de fertilizantes e concentrações de fósforo assimilável do solo. Usou dados provenientes de 23 ensaios fatoriais de adubação N P realizados durante três anos. Primeiramente tomou sòmente parte dos resultados, ou sejam, aquêles em que a dose de nitrogênio era de 96 kg/ha .

Com êsses dados obteve as seguintes estimativas dos parâmetros.

$$\hat{b}_0 = 29,4381 \pm 4,8354$$
$$\hat{b}_1 = 5,1802 \pm 3,4388$$
$$\hat{b}_2 = 0,6568 \pm 0,6122$$
$$\hat{b}_3 = -0,1936 \pm 0,1214$$
$$\hat{b}_4 = -0,1910 \pm 0,9015$$
$$\hat{b}_5 = -0,0079 \pm 0,0168 \quad .$$

A equação obtida foi:

$$\hat{Y} = 29,4381 + 5,1802\ P + 0,6568\ p - 0,1936\ P^2 - 0,1910\ p^2 - 0,0079\ P\ p$$

onde: $\hat{Y}$ é a estimativa do rendimento em 100 kg/ha ,

P é a quantidade de P_2O_5 em kg/ha e

p é a concentração de fósforo assimilável do solo expresso em ppm de fósforo elementar.

Entretanto, determinando a significância dos parâmetros, observou que nenhum dêles foi significativo, além de obter um valor de R^2 muito baixo. Por êsse motivo abandonou êsse modêlo.

Admitindo que grande parte da variação não explicada poderia ter origem não sòmente no modêlo, mas também na variação das produções da parcela testemunha, decidiu usar um modêlo alternativo que considerasse como variável dependente sòmente o aumento de produção devido à aplicação de fertilizante fosfatado. Empregou o modêlo:

$$Z = b_0 + b_1\ P + b_2\ P^2 + b_3\ P\ p + b_4\ P^2\ p$$

As estimativas dos parâmetros, bem como seus erros padrões foram:

$$\hat{b}_0 = 3,8941 \pm 11,5330$$
$$\hat{b}_1 = 5,8231 \pm 16,2280$$
$$\hat{b}_2 = -0,8823 \pm 1,0356$$
$$\hat{b}_3 = -0,3835 \pm 0,0232$$
$$\hat{b}_4 = 0,0562 \pm 0,0024$$

O coeficiente de determinação total foi $R^2 = 0,301$.

O autor observou efeito significativo ao nível de 1% de probabilidade sòmente para os parâmetros b_3 e b_4 .

A seguir, para determinação da dose econômicamente ótima, tomou os resultados de 4 ensaios fatoriais N,P em trigo, cada nutriente com 5 doses.

A partir dos 25 tratamentos obteve 4 funções de produção, cujo modêlo foi:

$$Y = b_0 + b_1 N + b_2 P + b_3 N^2 + b_4 P^2 + b_5 N P \quad .$$

Para essas equações os valores de R^2 foram:

1º Ensaio: $R^2 = 0,666$

2º Ensaio: $R^2 = 0,481$

3º Ensaio: $R^2 = 0,432$

4º Ensaio: $R^2 = 0,772$.

Nos mesmos ensaios o autor selecionou 13 tratamentos e com êles estimou novas equações.

Nos dois conjuntos de equações obteve valores de Y estimados muito próximos uns dos outros. Entretanto, na determinação das doses ótimas, houve diferenças dignas de consideração, como podemos ver pelo resultado de um dos ensaios.

a) Equação estimada com todos tratamentos

Dose ótima: 760 kg/ha de N e 222 kg/ha de P_2O_5 .

b) Equação estimada só com 13 tratamentos

Dose ótima: 187 kg/ha de N e 120 kg/ha de P_2O_5 .

Sòmente em um dos ensaios não houve diferença grande entre os dois tipos de equações quanto às doses econômicas. Entretanto, quase que a totalidade das doses ótimas para nitrogênio cairam fora do intervalo considerado no ensaio, tornando perigosa qualquer recomendação, pois, haveria uma extrapolação.

SANCHES e outros (1966), procuram adaptar uma regressão polinomial de modêlo:

$$Y = b_0 + b_1 N + b_2 P + b_3 K + b_{11} N^2 + b_{22} P^2 + b_{33} K^2 +$$
$$+ b_{12} N P + b_{13} N K + b_{23} P K \quad .$$

Com essa equação determinam as isóclinas para três níveis fixos de N e diversos rendimentos.

Os autores definem isóclinas como sendo as linhas que unem os pontos das isoquantas que têm igual custo, sendo isoquantas os conjuntos dos pontos de igual rendimento.

PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1966) determinaram, em um grupo grande de ensaios de milho, as doses econômicamente aconselháveis através da equação de Mitscherlich, confrontando sempre os resultados obtidos com os provenientes da regressão polinomial.

Essa preferência pelo método de Mitscherlich é explicada pelos autores, citando êles, que embora o método de regressão polinomial tenha vantagens no caso de interações de certo vulto, é de aplicação pouco aconselhável na maioria dos casos, em ensaios de adubação, porque:

1) Não permite extrapolação.
2) Não permite testes de significância adequados no caso de grupos de ensaios.
3) É de aplicação mais trabalhosa e mais restrita.
4) Nos casos em que tem possibilidade de aplicação conduz a resultados análogos aos do método antes indicado.

Os autores procuram tirar conclusões de âmbito geral, através da reunião de ensaios.

HOFFNAR e JOHNSON (1966) sintetizaram nove anos de pesquisa econômica em Agronomia, realizadas no Estado de Michigan.

Inumeras funções de resposta são apresentadas, e a partir delas os autores calcularam doses econômicas de adubos, para diversas culturas em diversos anos. Entretanto algumas das doses econômicas indicadas, não correspondem a máximos. Êste fato já citado por outros autores, deve-se ao abandono do estudo das derivadas segundas das funções.

Observa-se que as regressões polinomiais determinadas têm tôdas coeficientes de determinação relativamente baixos, ao redor de 0,4 a 0,6, chegando em alguns casos a menos de 0,2.

A FAO (1966) fêz um interessante trabalho sôbre resposta de fertilizantes. Diversas funções são ajustadas, a partir das médias de tratamentos de um número grande de ensaios. Foram obtidos resultados bastante satisfatórios.

ZAGATTO e PIMENTEL GOMES (1967), realizaram num interessante trabalho, um estudo geral das funções de produção sob o ponto de vista econômico. Abordam funções com uma, duas ou mais variáveis independentes. Entre as funções estudadas aparece a regressão polinomial de 2º grau aplicada a ensaios fatoriais $3 \times 3 \times 3$. Numa excelente discussão os autores indicam alguns pontos a serem levados em conta na aplicação dessa função. São êles:

1) Usar sempre grupos de ensaios numerosos ou ensaios isolados com diversas repetições e boa precisão.
2) Não confiar em doses ótimas obtidas a partir de polinômios de coeficientes para os têrmos de 2º grau, que não sejam significativamente diferentes de zero.
3) Verificar sempre se os valores obtidos correspondem realmente a um máximo.
4) Calcular intervalos de confiança para as doses ótimas encontradas, para poder julgar qual o seu real valor.

CAMPOS (1967) apresenta um ótimo trabalho sôbre a regressão polinomial ajustada a ensaios fatoriais de adubação 3 x 3 x 3 . Nêste são abordadas as variâncias e intervalos de confiança dos parâmetros e das estimativas das produções, sob o aspecto teórico. Ainda sob êsse aspecto, é estudado o ponto crítico, para verificar se é máximo , mínimo ou ponto de sela. A seguir é feito um estudo dos cortes, obtendo em cada um dêles a fórmula para cálculo da dose ótima, assim como as variâncias e intervalos de confiança, numa forma aproximada, dessas doses.

Fazendo uma comparação entre o delineamento rotativo de Box e o fatorial, chegou à conclusão de que o fatorial não é menos preciso, como anteriormente foi dito por COCHRAN e COX (1957) . Para chegar a essa conclusão, o autor se baseia nas variâncias dos parâmetros, depois de reduzí-las à mesma unidade, obtendo:

Parâmetros	Delineamento de Box	Fatorial
Quadráticos	0,7804	0,1667
Interações	0,6250	0,0833
Lineares	0,1190	0,0555

Após êsse estudo teórico, fêz a aplicação do método a 50 ensaios de adubação de milho em esquema fatorial 3 x 3 x 3 , procurando dar maior ênfase a determinação da dose econômica.

Dos 50 ensaios individuais, apenas 7 deram, de fato, uma dose econômicamente aconselhável de nutrientes, aparecendo nos demais, um caso de mínimo e 42 de ponto de sela. Quando os ensaios foram grupados, houve um aparecimento maior de pontos de máximo. Isso nos leva a concluir que a aplicação da regressão polinomial a um único ensaio não é aconselhável, a não ser em casos excepcionais.

Outra conclusão obtida é a de que os parâmetros da equação da superfície de resposta, tanto nos ensaios isolados como em grupos de ensaios , possuem intervalos de confiança bastante amplos, traduzindo consequentemente uma grande imprecisão nas estimativas dos rendimentos.

PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1968) discutem em detalhes a comparação da precisão das estimativas, em um fatorial 3^3 com um delineamento central rotativo com 15 tratamentos. Os autores concluem que quando se trata de fertilizantes é melhor termos o mesmo comprimento de intervalo para cada fator, e em ambos os delineamentos. Baseados neste argumento, os autores multiplicaram as coordenadas do delineamento rotativo por $\frac{1}{\sqrt{3}}$, para torná-lo comparável ao fatorial. Desta maneira obtiveram as variâncias

	$V(\hat{a}_{ii})$	$V(\hat{a}_{ij})(i \neq j)$	$V(\hat{a}_i)$
Fatorial	$4,50\ \sigma^2$	$2,55\ \sigma^2$	$1,50\ \sigma^2$
Delineamento Central Rotativo	$21,07\ \sigma^2$	$16,88\ \sigma^2$	$3,21\ \sigma^2$

Isto demonstra que o fatorial é mais eficiente do que o delineamento central rotativo.

PIMENTEL GOMES (1969) , faz um estudo crítico da parte econômica dos ensaios de adubação. O autor aborda o problema da determinação do ponto de máximo, apresentando um estudo muito bem feito da sua existência. Outro fato para o qual é chamada a atenção é o de que mesmo que exista máximo êste só será válido se cair dentro da região explorada pelo experimento.

3 - MATERIAL E MÉTODO

3.1 - Material

Foram utilizados no presente trabalho dados de um ensaio de adubação N , P , K em milho, realizado na Venezuela em delineamento em blocos casualizados com duas repetições, em esquema fatorial 3 x 3 x 3 .

As doses de nutrientes empregadas foram:

N	:	zero , 30 , 50 kg/ha ,
P_2O_5	:	zero , 45 , 60 kg/ha ,
K_2O	:	zero , 30 , 50 kg/ha .

Os preços dos nutrientes e do milho na ocasião do ensaio eram:

Milho	:	0,42 bolívares/kg ,
N	:	1,36 bolívares/kg ,
P_2O_5	:	0,70 bolívares/kg ,
K_2O	:	0,44 bolívares/kg .

3.2 - Método

Utilizamos no nosso trabalho o método da regressão polinomial.

Consiste o método em determinar através de condições experimentais uma função resposta, através da qual possamos estimar produções e determinar níveis de fatores que nos levam a condições ótimas, ou seja, tendo-se fatôres em diversos níveis, o objeto do método é determinar os níveis dos fatôres que dão uma resposta ótima.

4 - A REGRESSÃO POLINOMIAL APLICADA A ESQUEMAS FATORIAIS 3^3 COM NÍVEIS EQUIDISTANTES

Iremos apresentar o método de superfície de resposta aplicado a ensaios de adubação N , P , K , em delineamentos fatoriais 3^3 , com doses equidistantes.

A função representativa dessa superfície de acôrdo com HADER (1957), NEVES e outros (1960) é:

$$Y = a_0 x_0 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 +$$
$$+ a_{23} x_2 x_3 + a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 \quad ,$$

onde: x_1 representa as doses de nitrogênio,
x_2 representa as doses de fósforo, e
x_3 representa as doses de potássio.

Num fatorial 3^3 , temos 27 tratamentos, sendo que cada tratamento nos leva a uma equação do tipo acima, acrescida de um êrro experimental (e) .

Para facilitar os cálculos, costuma-se tomar os valores de x_1 , x_2 e x_3 como sendo - 1 , 0 , 1 isto graças a uma transformação do tipo:

$$x_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{q} \quad ,$$

onde: X_i vem a ser as doses de nutrientes,
$\bar{X}_i$ a média dessas doses, e
q a diferença entre as doses.

Por exemplo, se tivéssemos zero , 20 , 40 kg/ha as quantidades de nitrogênio, teríamos:

$$x_1 = \frac{0 - 20}{20} = - 1 \quad ; \quad x_1 = \frac{20 - 20}{20} = 0 \quad ;$$

$$x_1 = \frac{40 - 20}{20} = 1$$

O mesmo ocorreria para x_2 e x_3 .

4.1 - Estimativa dos Parâmetros

Para obter os parâmetros da equação da superfície devemos montar o sistema:

$$\hat{\beta} = S^{-1} X' Y \quad .$$

Para isso tomamos a matriz X, que é a matriz dos coeficientes, isto é, os valores assumidos por x_1, x_2 e x_3 nos 27 tratamentos.

Fàcilmente se obtém:

$$X' X = S = \begin{bmatrix} 27 & 18 & 18 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 12 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 18 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Invertendo-se essa matriz temos:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 7/27 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/18 \end{bmatrix}$$

A matriz $X'Y$ representada em têrmos de N, P e K é:

$$X'\,Y = \begin{bmatrix} G \\ N_0 + N_2 \\ P_0 + P_2 \\ K_0 + K_2 \\ N' \times P' \\ N' \times K' \\ P' \times K' \\ N' \\ P' \\ K' \end{bmatrix}$$

onde: G representa $\Sigma\, y_i$;

N_0 , P_0 e K_0 representam as somas de tôdas as parcelas em que não aparecem N , P e K respectivamente ;

N_2 , P_2 e K_2 representam as somas de tôdas as parcelas com dose dupla de N , P e K .

$N' \times P'$, $N' \times K'$ e $P' \times K'$ são interações dos efeitos lineares, isto é: $N' \times P' = N_0\,P_0 + N_2\,P_2 - N_0\,P_2 - N_2\,P_0$,

$N' \times K' = N_0\,K_0 + N_2\,K_2 - N_0\,K_2 - N_2\,K_0$ e

$P' \times K' = P_0\,K_0 + P_2\,K_2 - P_2\,K_0 - P_0\,K_2$;

N' , P' e K' representam os efeitos lineares do nitrogênio, fósforo e potássio, ou seja: $N' = N_2 - N_0$,

$P' = P_2 - P_0$,

$K' = K_2 - K_0$.

Multiplicando-se S^{-1} por $X'\,Y$ obtemos a matriz $\hat{\beta}$ que é a matriz das estimativas dos parâmetros. Assim se consegue:

$$\hat{a}_0 = (1/9)(N_1 + P_1 + K_1) - (2/27)\ G$$

$$\hat{a}_{11} = (1/18)(N_0 - 2\ N_1 + N_2) = (1/18)\ N''$$

$$\hat{a}_{22} = (1/18)(P_0 - 2\ P_1 + P_2) = (1/18)\ P''$$

$$\hat{a}_{33} = (1/18)(K_0 - 2\ K_1 + K_2) = (1/18)\ K''$$

$$\hat{a}_{12} = (1/12)(N_0\ P_0 + N_2\ P_2 - N_0\ P_2 - N_2\ P_0) = (1/12)\ N' \times P'$$

$$\hat{a}_{13} = (1/12)(N_0\ K_0 + N_2\ K_2 - N_0\ K_2 - N_2\ K_0) = (1/12)\ N' \times K'$$

$$\hat{a}_{23} = (1/12)(P_0\ K_0 + P_2\ K_2 - P_0\ K_2 - P_2\ K_0) = (1/12)\ P' \times K'$$

$$\hat{a}_{14} = (1/18)(N_2 - N_0) = (1/18)\ N'$$

$$\hat{a}_{24} = (1/18)(P_2 - P_0) = (1/18)\ P'$$

$$\hat{a}_{34} = (1/18)(K_2 - K_0) = (1/18)\ K'$$

4.2 - Análise de Variância da Regressão

A análise de variância teria o seguinte esquema, de acôrdo com NEVES e outros (1960) .

Causa de Variação	G. L.
Média	1
Regressão	10
Redução Devida à Regressão	9
Desvios da Regressão	17
Total	26

Aí a soma de quadrados de desvios da regressão seria dada por:

$$\text{S. Q. D. da Regressão} = Y'\ Y - Y'\ X\ \hat{\beta} = Y'\ Y - \hat{\beta}'\ X'\ Y\ .$$

Desenvolvendo $\hat{\beta}'\ X'\ Y$, temos

$$\hat{\beta}'\ X'\ Y = \text{S. Q. Regressão} = \hat{a}_0\ G + \hat{a}_{11}\ (N_0 + N_2) + \hat{a}_{22}\ (P_0 + P_2) +$$
$$+ \hat{a}_{33}\ (K_0 + K_2) + \hat{a}_{12}\ (N' \times P') + \hat{a}_{13}\ (N' \times K') + \hat{a}_{23}\ (P' \times K') +$$
$$+ \hat{a}_{14}\ N' + \hat{a}_{24}\ P' + \hat{a}_{34}\ K'\ .$$

Substituindo as estimativas dos parâmetros encontradas fica:

$$\text{S.Q. Reg.} = \left[\frac{1}{9} (N_1 + P_1 + K_1) - \frac{2}{27} G \right] G + \frac{1}{18} (N_0 - 2 N_1 + N_2)(N_0 + N_2) +$$

$$+ \frac{1}{18} (P_0 - 2 P_1 + P_2)(P_0 + P_2) + \frac{1}{18} (K_0 - 2 K_1 + K_2)(K_0 + K_2) +$$

$$+ \frac{1}{12} (N' \times P')(N' \times P') + \frac{1}{12} (N' \times K')(N' \times K') +$$

$$+ \frac{1}{12} (P' \times K')(P' \times K') + \frac{1}{18} N' \times N' + \frac{1}{18} P' \times P' + \frac{1}{18} K' \times K'$$

Pela análise de variância usual de esquemas fatoriais 3^3 de ensaios de adubação sabemos que:

$$\text{S. Q. } N'' = \frac{(N_0 - 2 N_1 + N_2)^2}{54}$$

$$\text{S. Q. } P'' = \frac{(P_0 - 2 P_1 + P_2)^2}{54}$$

$$\text{S. Q. } K'' = \frac{(K_0 - 2 K_1 + K_2)^2}{54}$$

$$\text{S. Q. } N' \times P' = \frac{(N_0 P_0 + N_2 P_2 - N_0 P_2 - N_2 P_0)^2}{12}$$

$$\text{S. Q. } N' \times K' = \frac{(N_0 K_0 + N_2 K_2 - N_0 K_2 - N_2 K_0)^2}{12}$$

$$\text{S. Q. } P' \times K' = \frac{(P_0 K_0 + P_2 K_2 - P_0 K_2 - P_2 K_0)^2}{12}$$

$$\text{S. Q. } N' = \frac{(N_2 - N_0)^2}{18}$$

$$\text{S. Q. } P' = \frac{(P_2 - P_0)^2}{18}$$

$$\text{S. Q. } K' = \frac{(K_2 - K_0)^2}{18}$$

Efetuando as multiplicações e substituindo alguns têrmos pelas somas de quadrados, **temos:**

$$S.\ Q.\ Reg. = \frac{1}{9} N_1 G + \frac{1}{9} P_1 G + \frac{1}{9} K_1 G - \frac{2}{27} G^2 + \frac{1}{18} (N_0 + N_2)(N'') +$$

$$+ \frac{1}{18} (P_0 + P_2)(P'') + \frac{1}{18} (K_0 + K_2)(K'') + S.Q.\ N' \times P' +$$

$$+ S.Q.\ N' \times K' + S.Q.\ P' \times K' + S.Q.\ N' + S.Q.\ P' + S.Q.\ K'$$

Dispondo de outra maneira e somando-se e subtraindo-se certos elementos, fica:

$$S.\ Q.\ Reg. = \frac{1}{9} N_1 G + \frac{1}{54} (N_0 - 2 N_1 + N_2)(N'') + \frac{2}{54} (N_0 + N_1 + N_2)(N'') +$$

$$+ \frac{1}{9} P_1 G + \frac{1}{54} (P_0 - 2 P_1 + P_2)(P'') + \frac{2}{54} (P_0 + P_1 + P_2)(P'') +$$

$$+ \frac{1}{9} K_1 G + \frac{1}{54} (K_0 - 2 K_1 + K_2)(K'') + \frac{2}{54} (K_0 + K_1 + K_2)(K'') -$$

$$- \frac{2}{27} G^2 + S.Q.\ N' \times P' + S.Q.\ N' \times K' + S.Q.\ P' \times K' + S.Q.\ N' +$$

$$+ S.Q.\ P' + S.Q.\ K' \quad .$$

Lembrando que,

$$N_0 - 2 N_1 + N_2 = N'' \quad , \quad P_0 - 2 P_1 + P_2 = P'' \quad , \quad K_0 - 2 K_1 + K_2 = K''$$

$$N_0 + N_1 + N_2 = G \quad , \quad P_0 + P_1 + P_2 = G \quad , \quad K_0 + K_1 + K_2 = G \quad ,$$

temos ainda:

$$S.\ Q.\ Reg. = \frac{6}{54} N_1 G + \frac{1}{54} (N'')^2 + \frac{2}{54} G \times N'' + \frac{6}{54} P_1 G + \frac{1}{54} (P'')^2 +$$

$$+ \frac{2}{54} G \times P'' + \frac{6}{54} K_1 G + \frac{1}{54} (K'')^2 + \frac{2}{54} G \times K'' - \frac{2}{27} G^2 +$$

$$+ S.Q.\ N' \times P' + S.Q.\ N' \times K' + S.Q.\ P' \times K' + S.Q.\ N' + S.Q.\ P' +$$

$$+ S.Q.\ K' \quad .$$

Grupando-se alguns têrmos, e substituindo alguns valores, chegaremos a:

$$S.Q.\ Reg. = \frac{G^2}{27} + S.Q.\ N'' + S.Q.\ P'' + S.Q.\ K'' + S.Q.\ N' \times P' + S.Q.\ N' \times K' +$$

$$+ S.Q.\ P' \times K' + S.Q.\ N' + S.Q.\ P' + S.Q.\ K' \quad ,$$

ou finalmente:

$$S.Q.\ Reg. = C + S.Q.\ N'' + S.Q.\ P'' + S.Q.\ K'' + S.Q.\ N' \times P' + S.Q.\ N' \times K' +$$

$$+ S.Q.\ P' \times K' + S.Q.\ N' + S.Q.\ P' + S.Q.\ K' \quad .$$

Vemos então que a S. Q. Regressão calculada através da superfície de resposta é igual a S.Q. de Tratamentos da análise de variância usual, dos delineamentos em esquema fatorial sem confundimento e com uma só repetição, conforme PIMENTEL GOMES (1966). O desvio da regressão fica sendo igual a soma de quadrados do resíduo.

4.3 - Variância e Covariância dos Parâmetros e Variâncias das Estimativas das Produções

As variâncias e covariâncias dos parâmetros seriam dadas através da matriz S^{-1} multiplicada por σ^2, a qual é denominada matriz de variâncias e covariâncias ou matriz de dispersão.

Dessa maneira teríamos:

$$V(\hat{a}_0) = (7/27)\ \sigma^2$$

$$V(\hat{a}_{11}) = V(\hat{a}_{22}) = V(\hat{a}_{33}) = (1/6)\ \sigma^2$$

$$V(\hat{a}_{12}) = V(\hat{a}_{13}) = V(\hat{a}_{23}) = (1/12)\ \sigma^2$$

$$V(\hat{a}_{14}) = V(\hat{a}_{24}) = V(\hat{a}_{34}) = (1/18)\ \sigma^2$$

$$Cov(\hat{a}_0, \hat{a}_{11}) = Cov(\hat{a}_0, \hat{a}_{22}) = Cov(\hat{a}_0, \hat{a}_{33}) = -(1/9)\ \sigma^2$$

As demais covariâncias são tôdas nulas.

Para determinarmos as variâncias dos valores de $\hat{Y}$, tomamos a variância da expressão matricial, $\lambda'\hat{\beta}$. Assim temos,

$$V(\hat{Y}_i) = V(\lambda' \hat{\beta})$$

onde λ é o vetor coluna.

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo a expressão anterior, temos:

$$V(\lambda' \hat{\beta}) = E \left\{ \left[\lambda' \hat{\beta} - E(\lambda' \hat{\beta}) \right] \left[\hat{\beta}' \lambda - E(\hat{\beta}' \lambda) \right] \right\}$$

$$= E \left[(\lambda' \hat{\beta} - \lambda' \beta)(\hat{\beta}' \lambda - \beta' \lambda) \right] = E \left[\lambda' (\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta}' - \beta') \lambda \right]$$

Entretanto,

$$\hat{\beta} - \beta = S^{-1} X' \varepsilon \quad .$$

Assim temos,

$$V(\lambda' \hat{\beta}) = E \left[\lambda' S^{-1} X' \varepsilon \ \varepsilon' X S^{-1} \lambda \right]$$

$$= \sigma^2 \lambda' S^{-1} S S^{-1} \lambda$$

$$= \sigma^2 \lambda' S^{-1} \lambda$$

$$\therefore \quad \hat{V}(\lambda' \hat{\beta}) = s^2 \lambda' S^{-1} \lambda \quad .$$

A partir dessa fórmula podemos estimar as variâncias dos 27 valores de $\hat{Y}_i$ e daí tirarmos os respectivos intervalos de confiança, os quais, como CAMPOS (1967) determinou através de outro caminho, são mostrados no Quadro 1 .

Quadro 1 - Intervalos de confiança para os valôres de $\hat{Y}$

Tratamentos	Intervalo de confiança
000	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{55/108}$
100	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
200	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{55/108}$
010	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
110	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{7/27}$
210	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
020	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{55/108}$
120	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
220	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{55/108}$
001	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
101	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{7/27}$
201	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
011	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{7/27}$
111	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{7/27}$
211	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{7/27}$
021	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
121	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{7/27}$
221	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
002	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{55/108}$
102	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
202	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{55/108}$
012	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
112	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{7/27}$
212	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
022	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{55/108}$
122	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{37/108}$
222	$\hat{Y} \pm t\ s\ \sqrt{55/108}$

Vejamos agora a determinação dos níveis ótimos de nutrientes que nos levam ao rendimento líquido máximo, ou seja, as doses econômicas dos nutrientes que nos conduzem à produção que nos dá o lucro líquido máximo.

A receita líquida é dada por:

$$Z = w\,\hat{Y} - t_1\,x_1 - t_2\,x_2 - t_3\,x_3 - m \quad ,$$

onde:

Z é a receita líquida,

w é o preço de venda do produto,

$\hat{Y}$ é a estimativa da produção,

t_1 é o preço do nutriente x_1 ,

t_2 é o preço do nutriente x_2 ,

t_3 é o preço do nutriente x_3 ,

m são as despesas fixas.

Entretanto a função Z só terá um ponto de máximo se a matriz das derivadas parciais de segunda ordem for negativa definida. Caso se verifique essa condição teremos um máximo no ponto x_1^* , x_2^* e x_3^* . Esses pontos são obtidos através da solução do sistema,

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial x_3} = 0 \quad .$$

De acôrdo com CAMPOS (1967) , uma condição necessária para que tenhamos máximo é que os coeficientes dos têrmos quadráticos sejam todos negativos. Um exame desses coeficientes evita, portanto, verificarmos se a matriz das derivadas parciais de segunda ordem é negativa definida.

5 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 - Justificativa da Aplicação do Método

Conforme foi visto no capítulo Material e Método, é nossa intenção estudar um caso de superfície polinomial aplicada a um ensaio de adubação em esquema fatorial 3 x 3 x 3 , com doses de N , P , K , não equidistantes.

A idéia da aplicação dêsse método, resultou da dificuldade de interpretação dos resultados, através da análise de variância usual.

Essa análise, como podemos ver adiante, nos deu valores significativos de F para tôdas as interações.

Assim, apesar da aplicação da superfície de resposta baseada em um único ensaio, não ser recomendada (CAMPOS , 1967) , ainda nos parece ser o método mais indicado para o caso em estudo.

Análise de Variância pelo Método Usual

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Nitrogênio (N)	2	4.626.320	2.313.160	179,21 **
Fósforo (P)	2	29.423.334	14.711.667	1.139,83 **
Potássio (K)	2	4.445.278	2.222.639	172,20 **
Interação N x P	4	1.034.971	258.743	20,04 **
Interação N x K	4	312.777	78.194	6,05 **
Interação P x K	4	848.888	212.222	16,44 **
Interação N x P x K	8	826.141	103.268	8,00 **
(Tratamentos)	(26)	(41.517.709)		
Blocos	1	31.296	31.296	
Resíduo	26	335.579	12.907	
Total	53	41.884.584		

5.2 - Determinação das Estimativas dos Parâmetros da Equação

Assim sendo , passamos a determinação dos parâmetros da equação.

A equação tomada como modêlo foi:

$$Y = a_0 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 +$$
$$+ a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 \quad .$$

Os valores das produções obtidas no ensaio, e que foram utilizadas na estimativa dos parâmetros são os que aparecem no Quadro 2 .

Para determinarmos a matriz $X' X$, obtemos a matriz X , formada pelos valores assumidos por x_i . As doses dos nutrientes foram tomadas em dezenas de quilos para simplificar, ou seja, as doses usadas no nosso cálculo foram:

x_1 (N) : 0 ; 3,0 ; 5

x_2 (P) : 0 ; 4,5 ; 6

x_3 (K) : 0 ; 3,0 ; 5

Os valores assumidos por x_i nos diversos tratamentos constam do Quadro 3 .

A matriz $X' X$ obtida é dada a seguir.

$$X'X = \begin{bmatrix} 27{,}00 & 306{,}00 & 562{,}50 & 306{,}00 & 264{,}00 & 192{,}00 & 264{,}00 & 72{,}00 & 99{,}00 & 72{,}00 \\ 306{,}00 & 6.354{,}00 & 6.375{,}00 & 3.468{,}00 & 5.016{,}00 & 3.648{,}00 & 2.922{,}00 & 1.368{,}00 & 1.122{,}00 & 816{,}00 \\ 562{,}50 & 6.375{,}00 & 19.756{,}12 & 6.375{,}00 & 8.778{,}00 & 4.000{,}00 & 8.778{,}00 & 1.500{,}00 & 3.291{,}75 & 1.500{,}00 \\ 306{,}00 & 3.468{,}00 & 6.375{,}00 & 6.354{,}00 & 2.992{,}00 & 3.648{,}00 & 5.016{,}00 & 816{,}00 & 1.122{,}00 & 1.368{,}00 \\ 264{,}00 & 5.016{,}00 & 8.778{,}00 & 2.992{,}00 & 6.375{,}00 & 2.992{,}00 & 4.000{,}00 & 1.122{,}00 & 1.500{,}00 & 704{,}00 \\ 192{,}00 & 3.648{,}00 & 4.000{,}00 & 3.648{,}00 & 2.992{,}00 & 3.648{,}00 & 2.992{,}00 & 816{,}00 & 704{,}00 & 816{,}00 \\ 264{,}00 & 2.992{,}00 & 8.778{,}00 & 5.016{,}00 & 4.000{,}00 & 2.992{,}00 & 6.375{,}00 & 704{,}00 & 1.500{,}00 & 1.122{,}00 \\ 72{,}00 & 1.368{,}00 & 1.500{,}00 & 816{,}00 & 1.122{,}00 & 816{,}00 & 704{,}00 & 306{,}00 & 264{,}00 & 192{,}00 \\ 99{,}00 & 1.122{,}00 & 3.291{,}75 & 1.122{,}00 & 1.500{,}00 & 704{,}00 & 1.500{,}00 & 264{,}00 & 562{,}50 & 264{,}00 \\ 72{,}00 & 816{,}00 & 1.500{,}00 & 1.368{,}00 & 704{,}00 & 816{,}00 & 1.122{,}00 & 192{,}00 & 264{,}00 & 306{,}00 \end{bmatrix}$$

Quadro 2 - Produções em kg/ha de grãos de milho

Tratamentos	1º Bloco	2º Bloco	Totais de Tratamentos
000	475	500	975
100	825	950	1.775
200	1.300	1.100	2.400
010	1.500	1.700	3.200
110	2.400	2.350	4.750
210	3.200	3.300	6.500
020	2.900	2.800	5.700
120	3.000	2.900	5.900
220	2.800	3.050	5.850
001	950	1.100	2.050
101	1.350	1.450	2.800
201	2.000	1.800	3.800
011	1.700	1.900	3.600
111	2.800	2.950	5.750
211	2.900	2.950	5.850
021	2.900	3.100	6.000
121	3.350	3.400	6.750
221	3.350	3.500	6.850
002	1.400	1.650	3.050
102	2.100	2.000	4.100
202	2.200	2.350	4.550
012	2.900	2.500	5.400
112	3.000	3.200	6.200
212	3.150	3.000	6.150
022	3.100	3.200	6.300
122	3.500	3.550	7.050
222	3.400	3.500	6.900

Quadro 3 - Valores assumidos pelas variáveis independentes nos 27 tratamentos

Tratamentos	x_0	x_1^2	x_2^2	x_3^2	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_3$	$x_2\ x_3$	x_1	x_2	x_3
000	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	1	9	0	0	0	0	0	3	0	0
200	1	25	0	0	0	0	0	5	0	0
010	1	0	20,25	0	0	0	0	0	4,5	0
110	1	9	20,25	0	13,50	0	0	3	4,5	0
210	1	25	20,25	0	22,50	0	0	5	4,5	0
020	1	0	42,25	0	0	0	0	0	6,5	0
120	1	9	42,25	0	19,50	0	0	3	6,5	0
220	1	25	42,25	0	32,50	0	0	5	6,5	0
001	1	0	0	9	0	0	0	0	0	3
101	1	9	0	9	0	9	0	3	0	3
201	1	25	0	9	0	15	0	5	0	3
011	1	0	20,25	9	0	0	13,50	0	4,5	3
111	1	9	20,25	9	13,50	9	13,50	3	4,5	3
211	1	25	20,25	9	22,50	15	13,50	5	4,5	3
021	1	0	42,25	9	0	0	19,50	0	6,5	3
121	1	9	42,25	9	19,50	9	19,50	3	6,5	3
221	1	25	42,25	9	32,50	15	19,50	5	6,5	3
002	1	0	0	25	0	0	0	0	0	5
102	1	9	0	25	0	15	0	3	0	5
202	1	25	0	25	0	25	0	5	0	5
012	1	0	20,25	25	0	0	22,50	0	4,5	5
112	1	9	20,25	25	13,50	15	22,50	3	4,5	5
212	1	25	20,25	25	22,50	25	22,50	5	4,5	5
022	1	0	42,25	25	0	0	32,50	0	6,5	5
122	1	9	42,25	25	19,50	15	32,50	3	6,5	5
222	1	25	42,25	25	32,50	25	32,50	5	6,5	5

A matriz $X'Y$ resultante da pós-multiplicação de X' por Y, onde Y é a matriz das observações, obtida a partir dos totais de tratamentos, é

$$X'Y = \begin{bmatrix} 130.200 \\ 1.626.925 \\ 3.380.775 \\ 1.633.550 \\ 1.662.850 \\ 1.085.450 \\ 1.644.900 \\ 379.475 \\ 585.750 \\ 378.850 \end{bmatrix}$$

Obtemos então o sistema de equações normais

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

Para obtermos as estimativas dos parâmetros invertemos a matriz $X'X$, obtendo:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}59100 & 0{,}00741 & 0{,}00380 & 0{,}00741 & 0{,}01160 & 0{,}01480 & 0{,}01160 & -0{,}14100 & -0{,}10400 & -0{,}14100 \\ 0{,}00741 & 0{,}00469 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}02270 & 0 & 0 \\ 0{,}00380 & 0 & 0{,}00216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}01330 & 0 \\ 0{,}00741 & 0 & 0 & 0{,}00469 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}02270 \\ 0{,}01160 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00119 & 0 & 0 & -0{,}00435 & -0{,}00316 & 0 \\ 0{,}01480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00208 & 0 & -0{,}00554 & 0 & -0{,}00554 \\ 0{,}01160 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00119 & 0 & -0{,}00316 & -0{,}00435 \\ -0{,}14100 & -0{,}02270 & 0 & 0 & -0{,}00435 & -0{,}00554 & 0 & 0{,}15000 & 0{,}01160 & 0{,}01480 \\ -0{,}10400 & 0 & -0{,}01330 & 0 & -0{,}00316 & 0 & -0{,}00316 & 0{,}01160 & 0{,}10400 & 0{,}01160 \\ -0{,}14100 & 0 & 0 & -0{,}02270 & 0 & -0{,}00554 & -0{,}00435 & 0{,}01480 & 0{,}01160 & 0{,}15000 \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando-se a matriz acima por $X' Y$, obtemos,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 588,190 \\ -\ 23,240 \\ 1,427 \\ 22,036 \\ -\ 20,767 \\ -\ 22,609 \\ -\ 39,354 \\ 532,090 \\ 694,311 \\ 375,523 \end{bmatrix}$$

Os valores acima referem-se ao dôbro dos parâmetros, pois foram estimados com a soma de duas repetições.

Dessa maneira os parâmetros estimados seriam:

$$\hat{a}_0 = 294,095$$

$$\hat{a}_{11} = -\ 11,620$$

$$\hat{a}_{22} = 0,714$$

$$\hat{a}_{33} = 11,018$$

$$\hat{a}_{12} = -\ 10,384$$

$$\hat{a}_{13} = -\ 11,304$$

$$\hat{a}_{23} = -\ 19,677$$

$$\hat{a}_{14} = 266,045$$

$$\hat{a}_{24} = 347,156$$

$$\hat{a}_{34} = 187,761$$

5.3 - Variâncias , Covariâncias e Intervalos de Confiança das Estimativas dos Parâmetros

Como vimos no Capítulo 4 , as variâncias dos parâmetros bem como as covariâncias, são dadas por $S^{-1}\sigma^2$. No caso de termos mais de uma repetição temos $\frac{\sigma^2}{r}$, em vez de σ^2.

A estimativa s^2 da variância residual pode ser tirada da análise da variância. Assim, da análise apresentada no início dêste capítulo obtemos $s^2 = 12.906$.

As variâncias e covariâncias estimadas dessa maneira, foram:

$\hat{V}(\hat{a}_0) = 3.814,02$ | $\hat{V}(\hat{a}_{13}) = 13,42$
$\hat{V}(\hat{a}_{11}) = 30,26$ | $\hat{V}(\hat{a}_{23}) = 7,68$
$\hat{V}(\hat{a}_{22}) = 13,94$ | $\hat{V}(\hat{a}_{14}) = 968,02$
$\hat{V}(\hat{a}_{33}) = 30,26$ | $\hat{V}(\hat{a}_{24}) = 671,16$
$\hat{V}(\hat{a}_{12}) = 7,68$ | $\hat{V}(\hat{a}_{34}) = 968,02$

$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{11}) = 47,82$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{33} , \hat{a}_{34}) = -146,50$
$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{22}) = 24,52$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{12} , \hat{a}_{14}) = -28,07$
$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{33}) = 47,82$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{12} , \hat{a}_{24}) = -20,40$
$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{12}) = 74,86$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{13} , \hat{a}_{14}) = -35,75$
$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{13}) = 95,51$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{13} , \hat{a}_{34}) = -35,75$
$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{23}) = 74,86$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{23} , \hat{a}_{24}) = -20,40$
$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{14}) = -909,94$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{23} , \hat{a}_{34}) = -28,07$
$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{24}) = -671,16$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{14} , \hat{a}_{24}) = 74,86$
$\hat{Cov}(\hat{a}_0 , \hat{a}_{34}) = -909,94$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{14} , \hat{a}_{34}) = 95,51$
$\hat{Cov}(\hat{a}_{11} , \hat{a}_{14}) = -146,50$ | $\hat{Cov}(\hat{a}_{24} , \hat{a}_{34}) = 74,86$
$\hat{Cov}(\hat{a}_{22} , \hat{a}_{24}) = -85,83$

As demais covariâncias foram tôdas nulas.

A partir das estimativas das variâncias obtidas, podemos determinar os intervalos de confiança dos parâmetros, os quais, ao nível de 95% de probabilidade, acham-se no Quadro 4 .

Êsses intervalos foram calculados a partir do teste $\underline{t}$ com 95% de probabilidade e 26 graus de liberdade pela fórmula:

$$\text{Extremos do Intervalo de Confiança} = \hat{a} \pm t \sqrt{\hat{V}(\hat{a})} \quad .$$

Quadro 4 - Intervalo de confiança dos parâmetros

Estimativa dos Parâmetros	Intervalo de Confiança	
	Extremo Inferior	Extremo Superior
$\hat{a}_0$ = 249,095	121,874	376,316
$\hat{a}_{11}$ = - 11,620	- 22,952	- 0,288
$\hat{a}_{22}$ = 0,714	- 6,977	8,405
$\hat{a}_{33}$ = 11,018	- 0,314	22,350
$\hat{a}_{12}$ = - 10,384	- 16,093	- 4,675
$\hat{a}_{13}$ = - 11,304	- 18,850	- 3,758
$\hat{a}_{23}$ = - 19,677	- 25,386	- 13,968
$\hat{a}_{14}$ = 266,045	201,952	330,138
$\hat{a}_{24}$ = 347,156	293,788	400,530
$\hat{a}_{34}$ = 187,761	123,668	251,854

Observa-se pelos resultados acima que os intervalos de confiança obtidos são relativamente grandes. Dessa maneira as estimativas dos parâmetros que sejam próximas de zero, podem inclusive mudar de sinal, concordando com os resultados obtidos por MASON (1956) , HADER e outros (1957) , CAMPOS (1967) .

Pelas variâncias obtidas nota-se que os parâmetros dos têrmos das interações são estimados com mais precisão do que os dos efeitos quadráticos e êstes com mais precisão do que os parâmetros dos têrmos lineares.

5.4 - Análise de Variância da Regressão , Coeficiente de Determinação Total e Teste t dos Parâmetros

Para determinar se a equação de regressão se ajusta aos dados, é necessário prová-la estatìsticamente. O teste pode ser feito através da análise de variância. Essa análise pode ter o esquema abaixo de acôrdo com NEVES e outros (1960) .

Como vimos no capítulo anterior, a soma de quadrados do resíduo é dada por: S. Q. R. = $Y'Y - \hat{\beta}' X' Y$. Isto, quando não temos efeito de blocos. Quando o temos, como no presente caso, ficará:

S. Q. R. = S. Q. Total - S. Q. Tratamentos - S. Q. Blocos

onde,

S. Q. Trat. = S. Q. Regressão + S. Q. Desvios da Regressão

e

$$\text{S. Q. Devios da Regressão} = \frac{T' T}{2} - \hat{\beta}' X' Y ,$$

sendo T a matriz dos totais de Tratamentos,

$\hat{\beta}' X' Y$ = S. Q. Regressão.

Análise de Variância

Causa de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F
Média	1	313.926.666		
Regressão	10	353.330.772		
Redução Devida à Regressão	9	39.404.106	4.378.234	339,24 **
Desvios da Regressão	17	2.113.603	124.330	9,63 **
Blocos	1	31.296	31.296	2,43
Resíduo	26	335.579	12.906	
Total	53	41.884.584		

Observa-se que houve um efeito altamente significativo para a regressão. O mesmo acontece para os desvios da regressão, o que nos levaria a dizer que a equação não representa bem os dados. Entretanto, como o efeito da regressão foi muito maior que os dos desvios, podemos, apesar da significância dêste, considerar como satisfatória a regressão.

Tanto é assim que o coeficiente de determinação total foi igual a 0,949 , valor calculado através do coeficiente de correlação entre Y_i e $\hat{Y}_i$, ou seja,

$$R = \frac{\Sigma Y_i \hat{Y}_i - \frac{(\Sigma Y_i)(\Sigma \hat{Y}_i)}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma Y_i^2 - \frac{(\Sigma Y_i)^2}{N}\right]\left[\Sigma \hat{Y}_i^2 - \frac{(\Sigma \hat{Y}_i)^2}{N}\right]}}$$

Esta fórmula se reduz, de acôrdo com PIMENTEL GOMES e NOGUEIRA (1964) , a:

$$R = \sqrt{\frac{\text{S. Q. Regressão}}{\text{S. Q. Total}}}$$

Isto no caso do resíduo confundir-se com o desvio da regressão. No caso em que isso não acontece, temos:

$$R = \sqrt{\frac{\text{S. Q. Regressão}}{\text{S. Q. Tratamentos}}}$$

Desta maneira, para o caso em estudo obtemos:

$$R = \sqrt{\frac{39.404.106}{41.517.709}} = 0,974 \quad ,$$

$$R^2 = 0,949 \quad ,$$

O que nos mostra que 94,9% da variação são explicadas pela regressão.

No que tange aos parâmetros, foram realizados testes $\underline{t}$ para determinar sua significância através da fórmula

$$t = \frac{\hat{a} - 0}{\sqrt{\hat{V}(\hat{a})}} ,$$

obtendo-se

Parâmetros	Valor de $\underline{t}$
$\hat{a}_0$	4,033 **
$\hat{a}_{11}$	- 2,112 *
$\hat{a}_{22}$	0,191
$\hat{a}_{33}$	2,003
$\hat{a}_{12}$	- 3,747 **
$\hat{a}_{13}$	- 3,086 **
$\hat{a}_{23}$	- 7,100 **
$\hat{a}_{14}$	8,551 **
$\hat{a}_{24}$	13,400 **
$\hat{a}_{34}$	6,035 **

Isto nos leva a concluir que os parâmetros dos efeitos quadráticos com excessão do a_{11}, que é significativo ao nível de **5%** de probabilidade, não diferem significativamente de zero. Já os parâmetros dos efeitos lineares são altamente significativos, enquanto que os das interações, apesar de significativos, o são em menor escala.

Isso nos leva a concluir, que dentro do intervalo em estudo, a produção reage quase linearmente aos nutrientes, logo, os níveis adotados foram baixos, aparentemente.

5.5 - Intervalo de Confiança das Estimativas das Produções

Através da função de produção obtida, podemos estimar produções para valores de x_1 , x_2 e x_3 que estejam dentro do intervalo do ensaio , pois a extrapolação em superfícies polinomiais é muito perigosa.

Mas, para têrmos uma idéia da precisão dessas estimativas é aconselhável que calculemos seus intervalos de confiança.

Êsses seriam dados pela fórmula:

$$\text{Extremos do Intervalo de Confiança} = \hat{Y} \pm t \sqrt{\hat{V}(\hat{Y})}$$

onde

$$\hat{V}(Y_i) = \hat{V}(\lambda' \hat{\beta}) = \frac{s^2}{2} \lambda' S^{-1} \lambda \quad ,$$

com notação idêntica a do capítulo anterior.

Aplicando, para as 27 combinações de doses de nutrientes usadas no ensaio (tratamentos) , obtivemos os resultados do Quadro 5 , para as produções estimadas, bem como para seus intervalos de confiança ao nível de 95% de probabilidade.

Observa-se,pelos resultados do Quadro 5, que os valores estimados se aproximam bem dos resultados observados, e que os intervalos de confiança são relativamente pequenos, demonstrando que as estimativas são boas.

5.6 - A Função da Receita Líquida

A receita líquida, como já vimos, é dada pela função

$$Z = w\hat{Y} - t_1 x_1 - t_2 x_2 - t_3 x_3 - m$$

onde:

$\hat{Y}$ = a estimativa da produção

t_1 = 13,6 bolívares / 10 kg de N

Quadro 5 - Produções estimadas e seus respectivos intervalos de confiança

Tratamentos	Produção Observada (Y)	Produção Estimada ($\hat{Y}$)	Intervalo de Confiança	
			Extremo Inferior	Extremo Superior
000	487,5	294,1	166,9	421,3
100	887,5	987,6	885,2	1089,9
200	1200,0	1333,8	1210,2	1457,4
010	1600,0	1870,8	1769,2	1972,4
110	2375,0	2424,1	2337,3	2510,5
210	3250,0	2676,8	2576,0	2777,6
020	2850,0	2580,8	2463,2	2698,4
120	2950,0	3071,8	2974,8	3168,8
220	2925,0	3283,0	3167,4	3398,5
001	1025,0	956,5	854,2	1058,8
101	1400,0	1548,4	1461,3	1635,5
201	1900,0	1826,7	1725,3	1928,1
011	1800,0	2267,6	2180,8	2354,4
111	2875,0	2719,2	2632,1	2806,3
211	2925,0	2904,1	2814,0	2994,2
021	3000,0	2859,5	2762,5	2956,5
121	3375,0	3248,8	3160,4	3337,2
221	3425,0	3392,2	3293,9	3490,5
002	1525,0	1508,4	1384,8	1632,0
102	2050,0	2032,3	1930,9	2133,7
202	2275,0	2265,5	2144,5	2386,5
012	2700,0	2642,3	2541,5	2743,1
112	3100,0	3026,1	2936,0	3116,1
212	3075,0	3165,8	3064,4	3267,2
022	3150,0	3155,5	3040,0	3271,0
122	3525,0	3477,0	3388,7	3575,3
222	3450,0	3575,2	3460,6	3689,8

t_2 = 7,0 bolívares / 10 kg de P_2O_5

t_3 = 4,4 bolívares / 10 kg de K_2O

w = 0,42 bolívares/kg de milho

x_1 , x_2 , x_3 são as quantidades de nutrientes em dezenas de quilos.

Substituindo os valores na equação anterior temos:

$$Z = 123{,}50 - 4{,}880\, x_1^2 + 0{,}300\, x_2^2 + 4{,}628\, x_3^2 - 4{,}361\, x_1 x_2 - 4{,}748\, x_1 x_3 -$$

$$- 8{,}264\, x_2 x_3 + 98{,}139\, x_1 + 138{,}806\, x_2 + 74{,}460\, x_3 - m \quad .$$

Vamos verificar se esta função possuí máximo. Pelo que vimos anteriormente, uma condição necessária para que haja máximo é que os parâmetros dos têrmos quadráticos sejam negativos.

Isto evidentemente não se dá no caso presente, pois apenas um dos coeficientes quadráticos é negativo. Entretanto, examinemos o ponto crítico da função.

Para isso determinamos as derivadas de segunda ordem, obtendo:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} = -9{,}761$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} = 0{,}600$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} = 9{,}255$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1\, \partial x_2} = -4{,}361$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1\, \partial x_2} = -4{,}748$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2\, \partial x_3} = -8{,}264$$

Com estas derivadas escrevemos a matriz

$$M = \begin{bmatrix} -9,761 & -4,361 & -4,748 \\ -4,361 & 0,600 & -8,264 \\ -4,748 & -8,264 & 9,255 \end{bmatrix}$$

Por operações de congruência (PERLIS , 1952) , transformamos a matriz M numa matriz diagonal.

$$M = \begin{bmatrix} -9,761 & 0 & 0 \\ 0 & 2,548 & 0 \\ 0 & 0 & -3,243 \end{bmatrix},$$

a qual nos mostra que a função não possui nem ponto de máximo nem de mínimo, e sim um ponto de sela.

5.7 - Cortes na Superfície

Para uma melhor visualização da superfície, nela realizamos diversos cortes, que foram feitos fixando uma ou duas variáveis, com os seguintes resultados:

a) Fixando uma variável

a.1) Fixando x_1 , obtivemos ponto de sela.

a.2) Fixando x_2 , obtivemos ponto de sela.

a.3) Fixando x_3 , obtivemos ponto de sela.

b) Fixando duas variáveis

b.1) Fixando x_1 e x_2 obtivemos ponto de mínimo.

b.2) Fixando x_1 e x_3 obtivemos ponto de mínimo.

b.3) Fixando x_2 e x_3 obtivemos ponto de máximo.

Quando x_2 e x_3 foram fixados nas doses inicial e intermediária, os pontos de máximo obtidos deram sempre um valor para Z menor do que quando x_2 e x_3 foram fixados nas doses máximas, 6 e 5 respectivamente.

Para essas doses os valores determinados foram:

$$x_1^* = 4{,}94 \qquad \text{e} \qquad Z = 926{,}42$$

Para determinar o intervalo de confiança dessa dose tomamos segundo PIMENTEL GOMES (1963) uma aproximação da variância de x_1^*, obtida através da aplicação da fórmula de Taylor.

Essa dose calculada por

$$x_1^* = \frac{1}{2\,\hat{a}_{11}} \left(\frac{t_1}{w} - 6\,\hat{a}_{12} - 5\,\hat{a}_{13} - \hat{a}_{14}\right),$$

tomada a partir da equação de Z com x_2 igual a 6 e x_3 igual a 5, tem como diferencial,

$$d\,x_1^* = -\frac{6}{2\,\hat{a}_{11}}\,d\,\hat{a}_{12} - \frac{5}{2\,\hat{a}_{11}}\,d\,\hat{a}_{13} - \frac{1}{2\,\hat{a}_{11}}\,d\,\hat{a}_{14} - \frac{1}{2\,\hat{a}_{11}^2}\left(\frac{t_1}{w} - 6\,\hat{a}_{12} - 5\,\hat{a}_{13} - \hat{a}_{14}\right) d\,\hat{a}_{11}$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} V(x_1^*) = {} & \frac{36}{4\,\hat{a}_{11}^2}\,V(\hat{a}_{12}) + \frac{25}{4\,\hat{a}_{11}^2}\,V(\hat{a}_{13}) + \frac{1}{4\,\hat{a}_{11}^2}\,V(\hat{a}_{14}) + \\ & + \frac{1}{4\,\hat{a}_{11}^4}\left(\frac{t_1}{w} - 6\,\hat{a}_{12} - 5\,\hat{a}_{13} - \hat{a}_{14}\right)^2 V(\hat{a}_{11}) + \frac{60}{4\,\hat{a}_{11}^2}\,\mathrm{Cov}(\hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}) + \\ & + \frac{12}{4\,\hat{a}_{11}^2}\,\mathrm{Cov}(\hat{a}_{12}, \hat{a}_{14}) + \frac{12}{4\,\hat{a}_{11}^3}\left(\frac{t_1}{w} - 6\,\hat{a}_{12} - 5\,\hat{a}_{13} - \hat{a}_{14}\right)\mathrm{Cov}(\hat{a}_{12}, \hat{a}_{11}) + \\ & + \frac{10}{4\,\hat{a}_{11}^2}\,\mathrm{Cov}(\hat{a}_{13}, \hat{a}_{14}) + \frac{10}{4\,\hat{a}_{11}^3}\left(\frac{t_1}{w} - 6\,\hat{a}_{12} - 5\,\hat{a}_{13} - \hat{a}_{14}\right)\mathrm{Cov}(\hat{a}_{13}, \hat{a}_{11}) + \\ & + \frac{2}{4\,\hat{a}_{11}^3}\left(\frac{t_1}{w} - 6\,\hat{a}_{12} - 5\,\hat{a}_{13} - \hat{a}_{14}\right)\mathrm{Cov}(\hat{a}_{14}, \hat{a}_{11}) \quad . \end{aligned}$$

Substituindo os valores das estimativas dos parâmetros bem como as das variâncias e covariâncias, temos:

$$\hat{V}\ (x_1^*) = 1,70 \quad .$$

Admitindo-se que a distribuição de x_1^* seja aproximadamente normal e tomando a variância calculada acima, os extremos do intervalo de confiança de x_1^*, dado por

$$x_1^* \pm t \sqrt{\hat{V}\ (x_1^*)}$$

são:

Extremo Inferior do Intervalo de Confiança = 2,25 dezenas de kg/ha

Extremo Superior do Intervalo de Confiança = 7,63 dezenas de kg/ha

Observa-se que a amplitude do intervalo de confiança de x_1^* é relativamente grande, apesar de não ser exagerada, caso comum em grande número de ensaios como podemos ver em CAMPOS (1967) .

5.8 - Determinação do Máximo Absoluto da Função de Receita Líquida

Como já vimos anteriormente, a função de receita líquida possui ponto de sela. Isto não permite que determinemos os níveis ótimos de nutrientes da maneira usual, entretanto, podemos achar o ponto de máximo absoluto dentro do intervalo de variação dos nutrientes, usado no ensaio. Para isso baseamo-nos na representação gráfica dos cortes (gráficos n.os 1 , 2 , 3 , 4 , 5 e 6) bem como nos valores assumidos pela função da receita líquida para diversas combinações de x_1 , x_2 e x_3 . Dessa maneira chegamos a conclusão de que o máximo absoluto dentro do intervalo considerado no ensaio se dá para

$$x_1 = 4,94$$

$$x_2 = 6,00$$

$$x_3 = 5,00$$

Essa conclusão foi tirada com a preocupação de não fazermos extrapolação, pois a regressão polinomial não se presta a êste tipo de estimação, como já foi dito anteriormente.

Pelos resultados, observa-se que o máximo ocorre quase que pràticamente nas doses máximas de nutrientes. Por isso podemos aconselhar quando na realização de um novo ensaio no local deste, o uso de doses mais elevadas, bem como doses iniciais diferentes de zero, devido a pouca fertilidade do solo.

5.9 - Representação Gráfica

Para melhor justificar o que dissemos, apresentamos a seguir diversos gráficos representativos de alguns cortes realizados. Êsses gráficos foram feitos tomando-se as despêsas fixas, representadas por m na função Z , como sendo igual a 400,00 bolívares, o que equivale aproximadamente a 40% da renda bruta. Isto sòmente para facilitar a representação, já que sendo m constante não influi diretamente no comportamento analítico da receita líquida. Desta maneira a equação fica sendo:

$$Z = 276,480 - 4,880\, x_1^2 + 0,300\, x_2^2 + 4,628\, x_3^2 - 4,361\, x_1 x_2 - 4,748\, x_1 x_3 -$$

$$- 8,264\, x_2 x_3 + 98,139\, x_1 + 138,806\, x_2 + 74,460\, x_3 \; .$$

Nos gráficos são representadas curvas de mesma receita líquida, obtidas através da função Z para as variáveis x_1 , x_2 e x_3 , fixadas nas doses intermediária e máxima usadas no ensaio.

Aparecem também os valores de Z observados os quais aparecem representados por um asterisco .

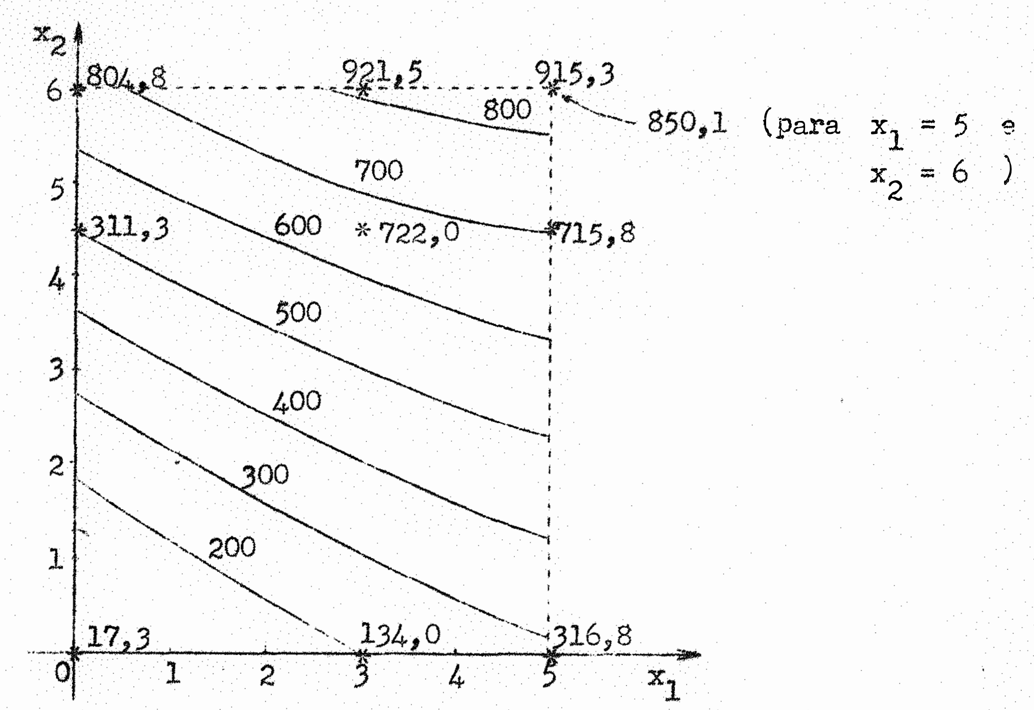

Gráfico 1 - Representação das curvas de mesma receita líquida, calculadas para $x_3 = 3$

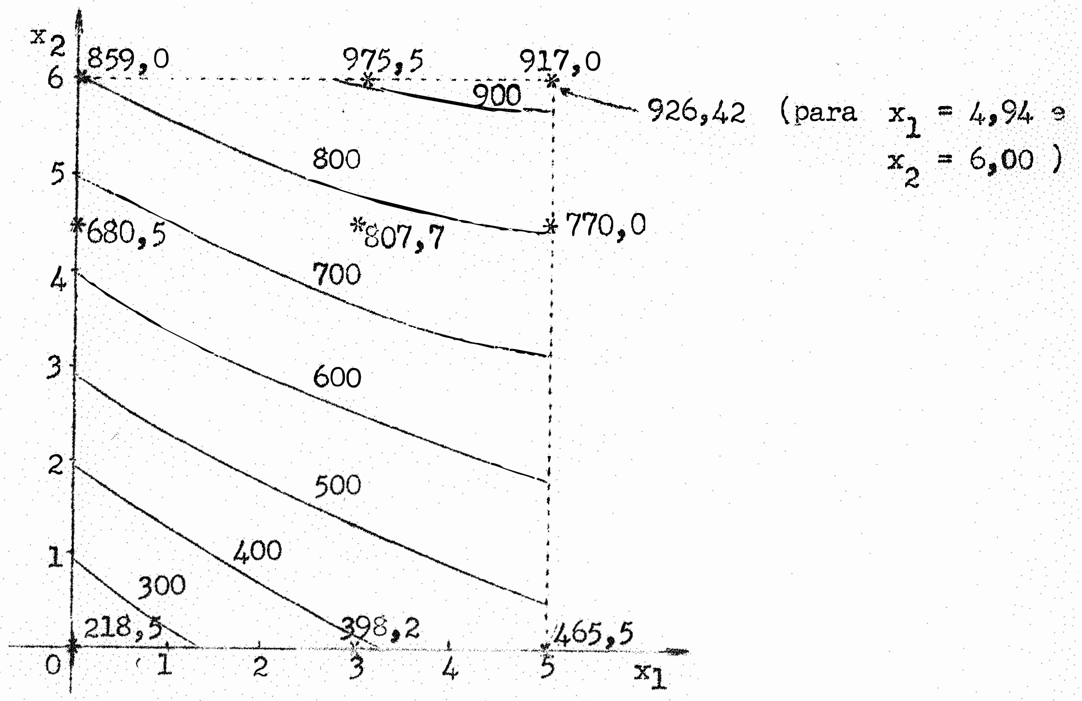

Gráfico 2 - Representação das curvas de mesma receita líquida, calculadas para $x_3 = 5$

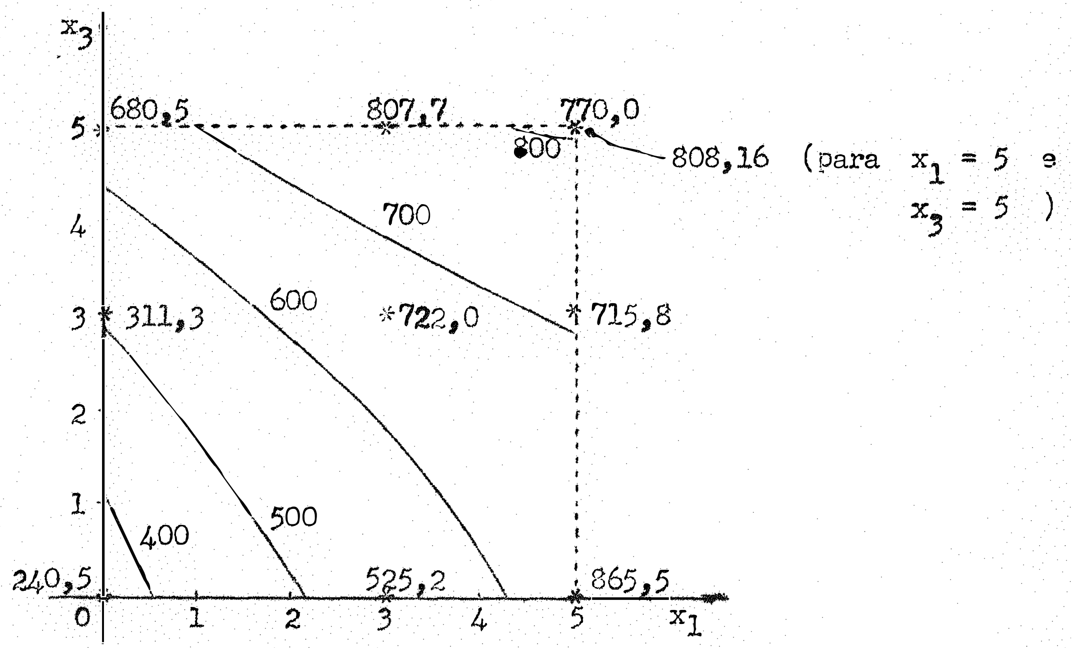

Gráfico 3 - Representação das curvas de mesma receita líquida, calculadas para x_2 = 4,5

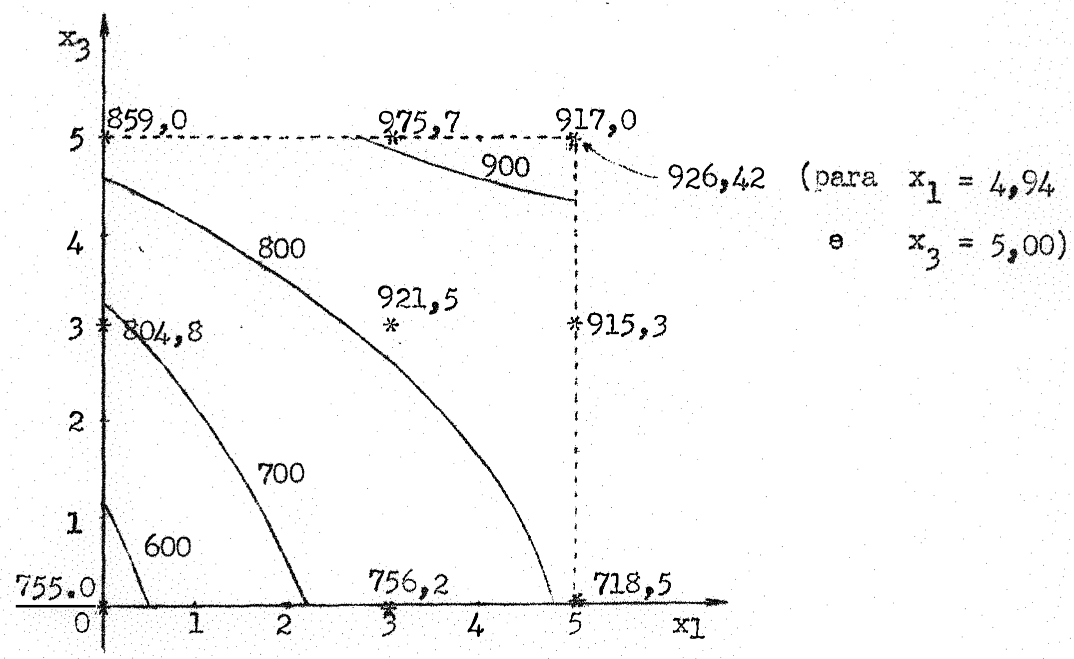

Gráfico 4 - Representação das curvas de mesma receita líquida, calculadas para x_2 = 6,00

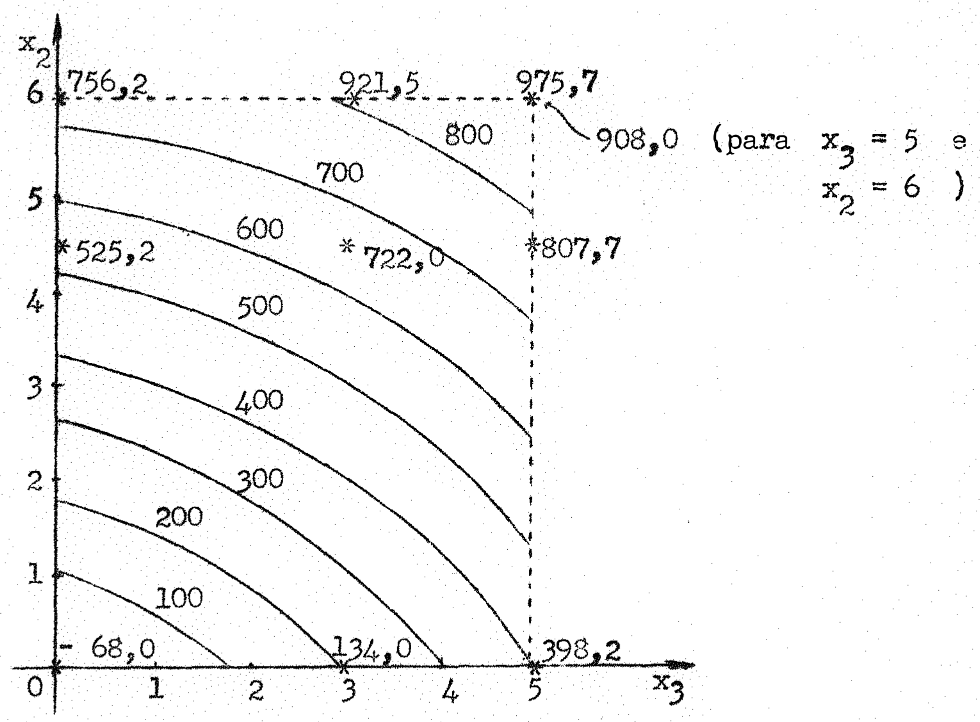

Gráfico 5 - Representação das curvas de mesma receita líquida, calculadas para $x_1 = 3$

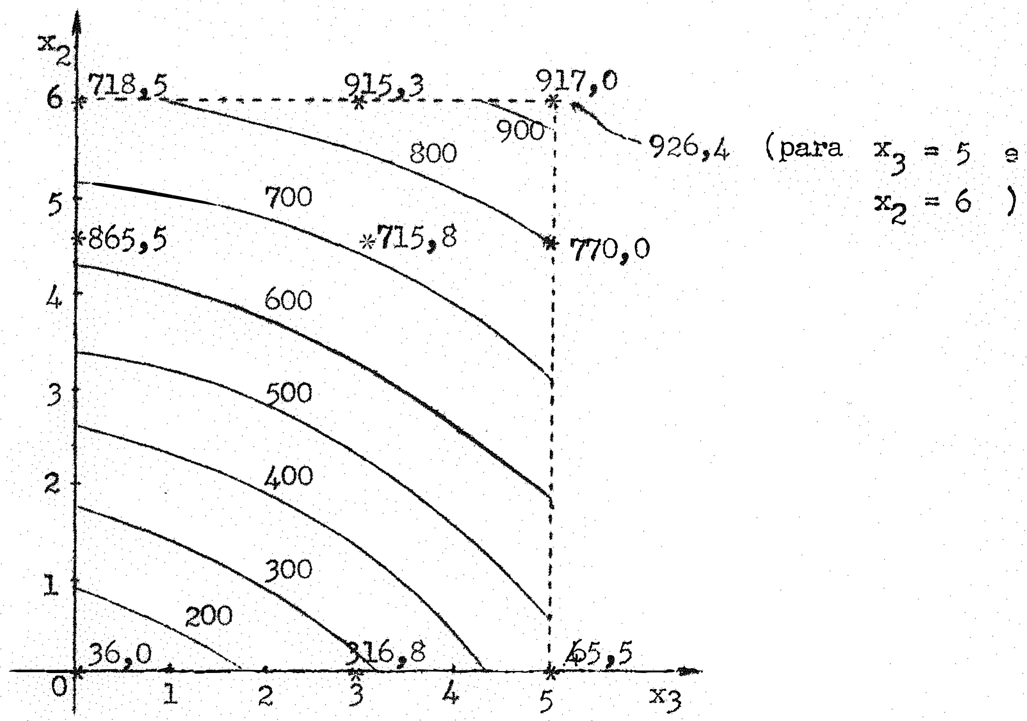

Gráfico 6 - Representação das curvas de mesma receita líquida, calculadas para $x_1 = 5$

6 - CONCLUSÕES

Do presente trabalho podemos concluir que:

6.1 - Quando as doses não são equidistantes, sua transformação, geralmente chamada codificação, não traz simplificação de cálculos, razão pela qual é preferível usá-las na forma original.

6.2 - Para ajustamento da regressão polinomial nêsses casos em que não é feita a codificação, torna-se conveniente o uso de computadores eletrônicos, pela complexidade dos cálculos.

6.3 - A regressão polinomial no presente trabalho possui intervalos de confiança relativamente amplos para os parâmetros, razão pela qual os que têm estimativas próximas de zero , podem até mudar de sinal dentro do intervalo de confiança.

6.4 - As estimativas das produções, obtidas através da regressão, deram valores que, dentro das limitações do método, podem ser consideradas boas.

6.5 - A regressão foi altamente significativa, dando um coeficiente de determinação total igual a 0,949 , ou seja, 94,9% da variação é explicada pela regressão.

6.6 - Os parâmetros dos têrmos quadráticos não déferiram significativamente de zero com excessão do $\hat{a}_{11}$, enquanto os dos lineares o fizeram, o que nos leva a concluir que dentro do intervalo considerado a produção reage quase linearmente aos nutrientes.

6.7 - O ensaio deveria ter doses mais elevadas, para que pudéssemos constatar melhor os efeitos dos parâmetros quadráticos.

6.8 - A função da receita líquida não possui máximo e sim ponto de sela.

6.9 - Nos diversos cortes, só foi constatado máximo para a variável x_1 correspondente ao nitrogênio, quando x_2 e x_3 estavam fixos. O ponto de máximo no corte com $x_2 = 6$ e $x_3 = 5$, foi obtido para $x_1 = 4,94$.

6.10 - A receita líquida máxima dentro da região explorada pelo ensaio é obtida para $x_1 = 4,94$; $x_2 = 6$ e $x_3 = 5$ dezenas de kg/ha.

6.11 - O intervalo de confiança da dose $x_1 = 4,94$ fixados x_2 e x_3, obtido aproximadamente, nos deu 2,25 dezenas de kg/ha para o extremo inferior e 7,63 dezenas de kg/ha para o extremo superior.

7 - RESUMO

A regressão polinomial é comumente aplicada em ensaios de adubação, mas quase sempre com níveis equidistantes de fertilizantes. Neste trabalho estudamos um ensaio fatorial de $3 \times 3 \times 3$ com N, P, K, em níveis não equidistantes, que eram os seguintes:

N : zero, 30, 50 kg/ha ,

P_2O_5 : zero, 45, 60 kg/ha ,

K_2O : zero, 30, 50 kg/ha .

Parte da teoria, mostrada para o caso de níveis igualmente espaçados, foi adaptada para sua aplicação no caso estudado.

A equação de regressão obtida foi:

$$\hat{Y} = 294{,}095 - 11{,}620\, x_1^2 + 0{,}714\, x_2^2 + 11{,}018\, x_3^2 - 10{,}384\, x_1 x_2 -$$

$$- 11{,}304\, x_1 x_3 - 19{,}677\, x_2 x_3 + 266{,}045\, x_1 + 347{,}156\, x_2 + 187{,}761\, x_3 \, ,$$

onde,

x_1 representa dezenas de kg de N ,

x_2 representa dezenas de kg de P_2O_5 ,

x_3 representa dezenas de kg de K_2O .

Os intervalos de confiança obtidos para os parâmetros foram relativamente grandes, o que concorda com grande parte dos trabalhos constantes da bibliografia.

As estimativas das produções obtidas através da equação de regressão foram relativamente boas, com intervalos de confiança bem pequenos. A análise de variância mostrou efeito altamente significativo para a regressão.

O coeficiente de determinação foi de 0,949 , ou seja, 94,9% da variação foi explicada pela regressão.

Os testes dos parâmetros foram altamente significativos em todos os casos, com exceção para os parâmetros a_{22} e a_{33}. Isto mostra, que para P e K a produção cresce de modo aproximadamente linear dentro dos limites do ensaio.

A receita líquida, dada pela equação

$$Z = w\,\hat{Y} - t_1\,x_1 - t_2\,x_2 - t_3\,x_3 - m$$

foi também estudada, com os valores seguintes:

w (preço do milho) : 0,42 bolivares/kg ,
t_1 (preço do N) : 13,6 bolivares/kg ,
t_2 (preço do P_2O_5) : 7,0 bolivares/kg ,
t_3 (preço do K_2O) : 4,4 bolivares/kg .

Esta função, para o ensaio estudado, não possui máximo, mas sim um ponto de sela. Entretanto, se considerarmos sòmente os valores contidos dentro dos intervalos usados no experimento, há um máximo absoluto na função da receita líquida, para $x_1 = 4,94$, $x_2 = 6,00$ e $x_3 = 5,00$. Assim podemos recomendar no presente caso, as seguintes doses de nutrientes:

49,4 kg/ha de N ,
60,0 kg/ha de P_2O_5 ,
50,0 kg/ha de K_2O .

8 - ABSTRACT

Polynomial regression is commonly applied in the analysis of fertilizer experiments, but almost always with equally spaced levels. The author studies a $3 \times 3 \times 3$ N, P, K factorial trial with unequally spaced levels, which were the following:

N : zero, 30, 50 kg./ha. ,

P_2O_5 : zero, 45, 60 kg./ha. ,

K_2O : zero, 30, 50 kg./ha. .

First of all the theory, shown for the case of equally spaced levels, was modified in order to be applied to the case under study.

The regression equation obtained was:

$$\hat{Y} = 294{,}095 - 11{,}620\, x_1^2 + 0{,}714\, x_2^2 + 11{,}018\, x_3^2 - 10{,}384\, x_1 x_2 -$$

$$- 11{,}304\, x_1 x_3 - 19{,}677\, x_2 x_3 + 266{,}045\, x_1 + 347{,}156\, x_2 + 187{,}761\, x_3 ,$$

where

x_1 indicates tens of kilograms of N ,

x_2 indicates tens of kilograms of P_2O_5 ,

x_3 indicates tens of kilograms of K_2O .

The confidence intervals for the parameters were relatively large, which is in good agreement with many of the references.

The harvest estimates obtained by the use of the regression equation were good, with rather short confidence intervals. The analysis of variance gave a highly significant F for regression.

The coefficient of determination was 0.949, that is, 94.9% of the variation were explained by the regression equation.

Tests for the parameters were highly significant in all cases, except for a_{22} and a_{33}. This shows, of course, that for P and K the response is approximately linear within the limits of fertilization in the experiment.

The net income, given by equation

$$Z = w\,\hat{Y} - t_1\,x_1 - t_2\,x_2 - t_3\,x_3 - m$$

was studied also, with the following values:

w	(price of maize) :	0.42	bolivars/kg.	,
t_1	(price of N) :	13.6	bolivars/kg.	,
t_2	(price of P_2O_5) :	7.0	bolivars/kg.	,
t_3	(price of K_2O) :	4.4	bolivars/kg.	.

The net income function has no maximum, but a saddle point. However, if we consider only the values within the intervals used in the experiment, there is an absolute maximum income for $x_1 = 4.94$, $x_2 = 6.00$, $x_3 = 5.00$. So, we should recommend, in the present case, the following levels of nutrients:

49.4 kg./ha. of N ,

60.0 kg./ha. of P_2O_5 ,

50.0 kg./ha. of K_2O .

9 - BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BAUM, E. L. , E. O. HEADY e J. BLACKMORE - 1956 - Methodological Procedures in the Economic Analysis of Fertilizer Use Data. Iowa State Univ. Press. 218 pp. Ames , Iowa .

BOX , G. E. P. e K. B. WILSON - 1951 - On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. Jour. Roy. Stat. Soc. Series B. 13: 1-45.

BOX , G. E. P. - 1954 - The Exploration and Exploitation of Response Surfaces : Some General Considerations and Examples. Biometrics 10: 16-60 .

BOX , G. E. P. e J. S. HUNTER - 1957 - Multifactor Experimental Designs. Ann. Math. Stat. 28: 195-241 .

CAMPOS, H. - 1967 - Aspectos da Aplicação das Superfícies de Resposta a Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação (tese) . 82 pp. Piracicaba.

COCHRAN, W. G. e G. M. COX - 1957 - Experimental Designs. 2ª ed. , John Wiley and Sons, Inc. 611 pp. Nova York.

DAVIES, O. L. - 1956 - Design and Analysis of Industrial Experiments. 2ª ed. Hafner Publisching Co. 636 pp. Nova York.

F A O - 1966 - Statistics of Crop Responses to Fertilizers. 112 pp. Roma.

HADER, R. J. , M. E. HARWARD , D. D. MASON e D. P. MOORE - 1957 - An Investigation of Some of the Relationships of Cooper , Iron and Molybdenum in the Growth and Nutrition of Lettuce : I. Experimental Design and Statistical Methods for Characterizing the Response Surface. Soil. Sci. Amer. Proc. 21: 59-64 .

HEADY, E. O. - 1956 - Methodological Problems in Fertilizer Use. Em BAUM , HEADY and BLACKMORE , Methodological Procedures in the Economic Analysis of Fertilizer Use Data: 3-21 . Ames , Iowa.

HEADY, E. O. e J. T. PESEK - 1954 - A Fertilizer Production Surface with Specification of Economic Optima for Corn Grown on Calcareous Ida Silt Loam. Jour. Farm. Econ. 36: 466-482 .

HOFFNAR, B. R. e G. L. JOHNSON - 1966 - Summary and Evaluation of the Cooperative Agronomic - Economic Experimentation at Michigan University. Agricultural Experiment Station. Michigan State University , Research Bulletin 11 .

MASON, D. D. - 1956 - Functional Models and Experimental Designs for Caracterizing Response Curve and Surfaces. Em BAUM , HEADY e BLACKMORE , Methodological Procedures in the Economic Analysis of Fertilizer Use Data: 76-98 . Ames , Iowa.

NEVES, O. S. e Outros - 1960 - Ensaios de Adubação do Algodoeiro. Boletim nº 114 do Instituto Agronômico de Campinas. 33 pp. Campinas.

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES - NATIONAL RESEARCH COUNCIL - 1961 - Status and Methods of Research in Economic and Agronomic Aspects of Fertilizer Response and Use. Publication 918 . Washington.

PERLIS, S. - 1952 - Theory of Matrices. 3ª ed. Addison Wesley Publishing Company, Inc. 237 pp. Cambridge , Mass .

PIMENTEL GOMES, F. - 1963 - The Use of Mitscherlich's Law in the Analysis of Experiments with Fertilizers. Biometrics 9: 498-517 .

PIMENTEL GOMES, F. - 1966 - Curso de Estatística Experimental. 3ª ed. 404 pp. + 15 tabelas. Piracicaba.

PIMENTEL GOMES, F. - 1969 - Novos Aspectos do Estudo Econômico de Ensaios de Adubação. Em publicação na Fertilité.

PIMENTEL GOMES, F. e H. CAMPOS - 1966 - Resultados de Ensaios de Adubação. Em Cultura e Adubação do Milho : 429-449 . Instituto Brasileiro da Potassa. São Paulo.

PIMENTEL GOMES, F. e H. CAMPOS - 1968 - The Efficiency of Factorial 3^3 Designs as Compared to a Central Composite Rotatable Design. (em publicação).

PIMENTEL GOMES, F. e I. R. NOGUEIRA - 1964 - Regressão e Covariância, (mimeografado), 45 pp. Piracicaba.

PIMENTEL GOMES, F. e I. R. NOGUEIRA - 1967 - Análise Matemática, (mimeografado), 307 pp. Piracicaba

SAHCHEZ, A., E. LAZO, J. P. ZAMAVILDES e J. MOLFINO - 1966 - Analisis Cuantitativa del Uso Económica de Fertilizantes. Seminario Internacional sôbre Investigación Económica y Experimentatión Agrícola. Santiago, Chile.

TEJEDA, H. - 1966 - Evaluación de Algunos Aspectos de la Metodologia para Determinar Funciones de Resposta a la Fertilización y su Utilización Económica. Seminario Internacional sôbre Investigación Económica y Experimentación Agrícola. Santiago, Chile.

VOSS, R. e J. PESEK - 1962 - Estimation of Effect Coefficients Relating Soil Test Values and Units of Added Fertilizer. Agron. Jour. 54: 339-341.

ZAGATTO, A. G. e F. PIMENTEL GOMES - 1967 - Aspectos Econômicos da Adubação. Em MALAVOLTA, E., Manual de Química Agrícola - Adubos e Adubação. 2ª ed. Ed. Agronômica "Ceres". São Paulo.

ZAGATTO, A. G. e F. PIMENTEL GOMES - 1960 - O Problema Técnico-Econômico da Adubação. Anais da E. S. A. "Luiz de Queiroz" 17: 149-164.