

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Abordagem de martingais para análise assintótica do passeio aleatório do elefante**

**Milton Miranda Neto**

Dissertação de Mestrado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Milton Miranda Neto**

## Abordagem de martingais para análise assintótica do passeio aleatório do elefante

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Renato Jacob Gava

**USP – São Carlos**  
**Setembro de 2018**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M672a            Miranda Neto, Milton  
                    Abordagem de martingais para análise assintótica  
do passeio aleatório do elefante / Milton Miranda  
Neto; orientador Renato Jacob Gava. -- São Carlos,  
2018.  
                    103 p.

                    Dissertação (Mestrado - Programa  
Interinstitucional de Pós-graduação em Estatística) --  
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,  
Universidade de São Paulo, 2018.

                    1. Passeio aleatório do elefante. 2. Martingais.  
3. Processos estocásticos. I. Jacob Gava, Renato ,  
orient. II. Título.

**Milton Miranda Neto**

Martingale approach for asymptotic analysis of elephant  
random walk

Master dissertation submitted to the Institute of  
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP  
and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar, in  
partial fulfillment of the requirements for the degree of  
the Master Interagency Program Graduate in Statistics.  
*FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Renato Jacob Gava

**USP – São Carlos**  
**September 2018**



*A minha família, em especial a Lourina, Celso, Fernando e Patricia.*





# AGRADECIMENTOS

---

---

Ao meu Deus, Jesus, pela oportunidade, companheirismo, força e por me fazer acreditar que seria possível sempre ir mais longe, sem Ele nada seria possível.

A minha família pelo apoio, dedicação e pela força dada a distância.

Ao professor Renato Gava, por me mostrar o fascinante mundo que é a pesquisa em probabilidade.

Aos professores Cristian Favio Coletti e Márcio Alves Diniz pelas valiosas sugestões na banca de qualificação. O trabalho cresceu muito após as observações atentas sugeridas por eles.

Aos amigos que pude fazer em São Carlos.

A Capes pelo auxílio financeiro.



*“...levantei os olhos ao céu, tornou-me a vir o entendimento, e eu bendisse o Altíssimo, e louvei, e glorifiquei ao que vive para sempre, cujo domínio é sempiterno, e cujo reino é de geração em geração.*

*35 Todos os moradores da terra são por ele reputados em nada; e, segundo a sua vontade, ele opera com o exército do céu e os moradores da terra; não há quem lhe possa deter a mão, nem lhe dizer: Que fazes?”*

*(Nabucodonosor-Rei de Babilônia)*



# RESUMO

NETO, M. M. **Abordagem de martingais para análise assintótica do passeio aleatório do elefante**. 2018. 103 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Neste trabalho, estudamos o passeio aleatório do elefante introduzido em (SCHUTZ; TRIMPER, 2004). Um processo estocástico não Markoviano com memória de alcance ilimitada que apresenta transição de fase. Nosso objetivo é demonstrar a convergência quase certa do passeio aleatório do elefante nos casos subcrítico e crítico. Além destes resultados, também apresentamos a demonstração do Teorema Central do Limite para ambos os regimes. Para o caso supercrítico, vamos demonstrar a convergência do passeio aleatório do elefante para uma variável aleatória não normal com base nos artigos (BAUR; BERTOIN, 2016), (BERCU, 2018) e (COLETTI; GAVA; SCHUTZ, 2017b).

**Palavras-chave:** Passeio Aleatório do Elefante, Martingais, Processos Estocásticos.



# ABSTRACT

NETO, M. M. **Martingale approach for asymptotic analysis of elephant random walk**. 2018. 103 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

In this work we study the elephant random walk introduced in ([SCHUTZ; TRIMPER, 2004](#)), a discrete time, non-Markovian stochastic process with unlimited range memory that presents phase transition. Our objective is to prove the almost sure convergence for the subcritical and critical regimes of the model. We also present a demonstration of the Central Limit Theorem for both regimes. For the supercritical regime we prove the convergence of the elephant random walk to a non-normal random variable based on the articles ([BAUR; BERTOIN, 2016](#)), ([BERCU, 2018](#)) and ([COLETTI; GAVA; SCHUTZ, 2017b](#)).

**Keywords:** Elephant Random Walk, Martingale, Stochastic Process.





# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Função de probabilidade definida para cada possível observação no um lançamento um dado. . . . .	24
Figura 2 – Balança equilibrando o “peso” de um boreliano com as observações do experimento. . . . .	30
Figura 3 – Convergência da frequência relativa das observações com a face seis no lançamento de um dado. . . . .	37
Figura 4 – Convergência da frequência relativa das observações com a face seis em várias realizações do lançamento de um dado. . . . .	38
Figura 5 – Fortuna de um jogador após sete rodadas. . . . .	42
Figura 6 – Difusão de tinta em um solvente. . . . .	50
Figura 7 – Difusão de moléculas através da membrana. . . . .	50
Figura 8 – Movimento de uma partícula em uma dimensão. . . . .	51
Figura 9 – Movimento de doze partículas realizando um passeio aleatório independentes das demais. . . . .	53
Figura 10 – Movimento de uma partícula realizando um passeio aleatório do elefante com $p = 0.65$ . . . . .	57
Figura 11 – Movimento de uma partícula realizando um passeio aleatório do elefante com $p = 0.65$ . . . . .	58
Figura 12 – Movimento de uma partícula realizando um passeio aleatório do elefante com $p = 0.65$ . . . . .	58



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	19
2	ELEMENTOS DE PROBABILIDADE . . . . .	23
2.1	Introdução . . . . .	23
2.2	Modelo probabilístico para lançamento de um dado . . . . .	23
2.3	Espaços de probabilidade para espaços amostrais gerais . . . . .	25
2.4	Variáveis aleatórias e sequências de variáveis aleatórias . . . . .	28
2.5	Esperança matemática . . . . .	33
2.6	Independência . . . . .	35
2.7	Convergência de variáveis aleatórias . . . . .	37
3	MARTINGAL . . . . .	41
3.1	Introdução . . . . .	41
3.2	O problema da ruína e a informação crescente . . . . .	41
3.3	Convergência de martingais . . . . .	46
3.3.1	<i>O problema de ruína</i> . . . . .	48
4	PASSEIO ALEATÓRIO DO ELEFANTE E DIFUSÃO . . . . .	49
4.1	Introdução . . . . .	49
4.2	Difusão em uma dimensão . . . . .	49
4.3	Passeio Aleatório do Elefante . . . . .	53
5	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO PASSEIO ALEATÓRIO DO ELEFANTE . . . . .	59
5.1	Introdução . . . . .	59
5.2	Abordagem de Martingais para o Passeio Aleatório do Elefante . . . . .	59
5.3	Convergência quase certa . . . . .	65
5.3.1	<i>Regime Subcrítico</i> . . . . .	65
5.3.2	<i>Regime Crítico</i> . . . . .	67
5.4	Lei do Logaritmo Iterado e lei forte quadrática . . . . .	68
5.4.1	<i>Regime Subcrítico</i> . . . . .	68
5.4.2	<i>Regime Crítico</i> . . . . .	70
5.5	Convergência no regime super crítico . . . . .	72
5.6	Convergência em distribuição . . . . .	74

5.6.1	<i>Regime Subcrítico</i> . . . . .	74
5.6.2	<i>Regime Crítico</i> . . . . .	75
5.6.3	<i>Regime Supercrítico</i> . . . . .	76
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	85
6.1	Conclusão . . . . .	85
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	87
	<b>APÊNDICE A            FUNÇÕES ESPECIAIS</b> . . . . .	89
A.1	Análise assintótica de funções . . . . .	89
A.2	Função Gama . . . . .	90
A.3	Função Hipergeométrica Generalizada . . . . .	91
	<b>ANEXO A            COMANDOS PARA GERAR FIGURAS</b> . . . . .	93
A.1	Comandos no pacote R . . . . .	93

---

## INTRODUÇÃO

---

Diversos fenômenos físicos como o fluxo de calor em uma barra, a dispersão de eletricidade em uma rede e a diluição de tinta em um solvente apresentam difusão. Mas o que é difusão? Podemos entender por difusão como o fluxo de energia ou moléculas de uma região com alta concentração para uma região com baixa concentração. Quando a relação entre o fluxo e o tempo é linear o movimento das partículas é chamado de difusão normal. Quando esta relação não é linear, então estamos na presença de difusão anômala.

Os primeiros resultados associados aos problemas citados são as leis de Fourier (ver (GHEZ, 2005) p. 31), a lei de Ohm (ver (GHEZ, 2005) p. 34) e a lei de Fick (ver (GHEZ, 2005) p. 7). Todos esses modelos são leis fenomenológicas, isto é, são baseadas na observação de um fenômeno. A ideia básica é que existe uma relação linear entre o fluxo e o tempo. A grande desvantagem dessas leis é que não é possível aplica-las a fenômenos que apresentam difusão anômala (veja (VLADOS *et al.*, 2008), (PEKALSKI; SZNAJD-WERON, 1999)), ou fenômenos com mudança de regime .

No século XIX houve uma grande revolução em Física. Boltzmann introduziu a aleatoriedade na modelagem de um fenômeno, e isto permitiu um grande avanço (veja (GIBBS, 1902)) na construção de modelos físicos.

Em 2004 Schutz e Trimper no artigo (SCHUTZ; TRIMPER, 2004) introduziram um passeio aleatório não-markoviano com memória infinita, o chamado passeio aleatório do elefante. Esta analogia com o elefante se pelo fato do passeio aleatório apresentar memória infinita em associação com o mito de memória dos elefantes. Esse modelo possui a propriedade que a lei de Fick não é capaz de captar: A mudança de regime do comportamento difusivo para o anômalo. Quando o parâmetro de memória  $p$  é menor do que  $3/4$ , o passeio aleatório do elefante apresenta difusão normal. Se  $p \geq 3/4$ , então o passeio aleatório do elefante passa a apresentar difusão anômala. O modelo é dado pela seguinte relação

1. No instante  $n = 0$ , o passeio aleatório do elefante  $S_n$  está na posição  $s_0$ , isto é,  $\mathbf{P}(S_0 = s_0) = 1$ .
2. Em  $n = 1$

$$S_1 = \begin{cases} s_0 + 1, & \text{com probabilidade } q, \\ s_0 - 1, & \text{com probabilidade } 1 - q. \end{cases}$$

3. Para  $n \geq 2$  sorteia-se uniformemente um número  $n'$  de  $\{1, \dots, n\}$ . O próximo passo  $X_{n+1}$  do passeio aleatório do elefante será dado estocasticamente por

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_{n'}, & \text{com probabilidade } p, \\ -X_{n'}, & \text{com probabilidade } 1 - p. \end{cases}$$

Em seguida, fazemos

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

Os primeiros resultados sobre teoremas limite para o passeio aleatório do elefante só apareceram em 2016. Em (COLETTI; GAVA; SCHUTZ, 2017a), utilizando resultados de martingais, obtêm-se a Lei Forte do Grande Números e o Teorema Central do Limite para os casos subcrítico ( $p < 3/4$ ) e crítico ( $p = 3/4$ ). No regime superdifusivo ( $p > 3/4$ ), demonstram que o passeio aleatório do elefante converge quase certamente para uma variável aleatória não Gaussiana.

Em (BAUR; BERTOIN, 2016) apresentam teoremas limite funcionais para o passeio aleatório do elefante utilizando resultados de modelos de urnas generalizados em (JANSON, 2004).

Em (BERCU, 2018) apresenta a Lei Forte dos Grande Números, Teorema Central do Limite, Lei do Logaritmo Iterado e Lei Forte Quadrática para o regime subcrítico ( $p < 3/4$ ) e crítico ( $p = 3/4$ ) utilizando resultados de Martingais apresentados em (DUFLO, 1997). Para o regime supercrítico ( $p > 3/4$ ), Bercu apresenta a convergência quase certa do passeio aleatório do elefante para uma variável aleatória não degenerada que não é Normal. Para provar isto, ele apresenta os quatro primeiros momentos, mostrando que o terceiro momento é diferente de zero.

Em (COLETTI; GAVA; SCHUTZ, 2017b) obtêm-se o limite de escala do passeio aleatório do elefante quando ( $p < 3/4$ ), mostrando que o elefante pode ser aproximado por um movimento Browniano definido no mesmo espaço de probabilidade.

O objetivo deste trabalho é estudar os resultados apresentados em (BERCU, 2018). Para isto o trabalho está dividido em cinco capítulos com um apêndice sobre análise assintótica de funções Gama. No capítulo 1, apresentamos os elementos do cálculo de probabilidades necessários para a compreensão do trabalho. Definimos algumas ferramentas úteis conforme

o rigor exigido pela moderna teoria de probabilidade. No capítulo 3 introduzimos a esperança condicional e a definição de Martingal, e apresentamos alguns teoremas limites que serão preciosas ferramentas para trabalhar com o passeio aleatório do elefante. No Capítulo 4, definimos o passeio aleatório do elefante. Em seguida definimos um modelo de difusão em uma dimensão baseado no passeio aleatório simples. Em seguida, analisamos o comportamento difusivo de passeio aleatório do elefante. No capítulo 5, exploramos em detalhes os resultados apresentados em (BERCU, 2018). Utilizando as ferramentas desenvolvidas no capítulo 3 para construir as demonstrações dos resultados.





---

# ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

---

---

## 2.1 Introdução

Cara! Coroa! Lance um dado! O cotidiano está repleto de situações cujo resultado é incerto. Por exemplo, ao lançar uma moeda ou jogar um dado, não sabemos seu resultado *a priori*. Porém ao lançarmos várias vezes esperamos que a proporção de caras seja aproximadamente a metade do número de lançamentos ou uma face do dado seja obtida em aproximadamente um sexto do número total de lançamentos. Fenômenos aleatórios massificados apresentam leis que formalizam nossa intuição sobre experimentos aleatórios. Essa foi a motivação para o início da probabilidade como uma disciplina puramente matemática. Mas para isso é necessário algumas definições.

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados de probabilidade inspirados nos livros de (BILLIGSLEY, 1995), (JAMES, 1996), (TAYLOR, 1997). Essas definições serão nossa “linguagem” ao longo de todo texto.

## 2.2 Modelo probabilístico para lançamento de um dado

Considere que um indivíduo realize o seguinte experimento: Lança um dado uma vez e anota o número da face voltada para cima. A pergunta que fazemos é: Como podemos modelar matematicamente este experimento?

Na matemática moderna, em geral, uma teoria é definida por meio de um sistema axiomático sobre uma determinada função, seu domínio e sua imagem. Em outras palavras, uma teoria matemática é construída definindo uma função, digamos  $f$ . Em seguida especificamos seu domínio e sua imagem. Sobre esses elementos assumimos algumas afirmações como verdade sem demonstração, estes são os axiomas. A partir daí, toda afirmação sobre  $f$ , ou a imagem de  $f$ , denotada por  $Im(f)$ , será deduzida por meio da lógica de seus axiomas.

Após compreendermos os requisitos necessários para construir um modelo matemático para o experimento do lançamento de um dado precisamos agora responder as seguintes perguntas: Qual será a função? Qual é o domínio dessa função? Qual sua imagem? Quais são os axiomas?

Sabemos que no lançamento de um dado os possíveis resultados são 1, 2, ..., 6. Vamos definir por espaço amostral o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento e denotá-lo pela letra grega  $\Omega$ . Assim, no experimento do lançamento de um dado  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Agora vamos construir o modelo matemático para o experimento. Seja  $\mathbf{P}$  a função, vamos chamar  $\mathbf{P}$  de medida de probabilidade. Será que podemos tomar  $\Omega$  como o domínio da função  $\mathbf{P}$ ? A resposta é não, pois se definirmos

$$\begin{aligned}\mathbf{P} : \Omega &\longrightarrow \text{Im}(\mathbf{P}) \\ \omega &\longmapsto \mathbf{P}(\omega),\end{aligned}$$

isto é, uma função com domínio em  $\Omega$  com o seguinte gráfico,

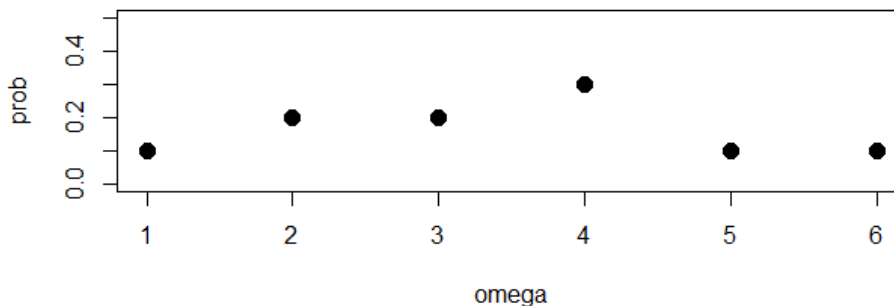


Figura 1 – Função de probabilidade definida para cada possível observação no um lançamento um dado.

Então esta função nos diz apenas a probabilidade de uma face estar voltada para cima, não é possível dizer  $\mathbf{P}$ (A face é par) ou  $\mathbf{P}$ (A face é maior do que 2), isto porque a função  $\mathbf{P}$  não está definida para estes subconjuntos de  $\Omega$ . Portanto, tomar  $\Omega$  como domínio para a função  $\mathbf{P}$  não conduz a um modelo matemático satisfatório. Considere então,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ , os elementos de  $\mathcal{A}$  são todos os subconjuntos de  $\Omega$ . Podemos agora tomar  $\mathcal{A}$  como domínio para a função  $\mathbf{P}$ , pois agora podemos definir a probabilidade de qualquer subconjunto de  $\Omega$ . Assim temos

$$\begin{aligned}\mathbf{P} : \mathcal{A} &\longrightarrow \text{Im}(\mathbf{P}) \\ A \in \mathcal{A} &\longmapsto \mathbf{P}(A).\end{aligned}$$

Definido o domínio, precisamos agora responder: Qual será a imagem de  $\mathbf{P}$ ?

Queremos que nossa medida de probabilidade represente a incerteza de um resultado. Sabemos que em nosso experimento de lançar um dado e verificar a face voltada para cima,  $\mathbf{P}(\Omega)$  deve representar a certeza, pois  $\Omega$  é o evento certo, isto é, sempre ocorrerá um dos elementos de  $\Omega$ . Vamos tomar  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$  para representar a nossa certeza. Mas e quanto ao valor  $\mathbf{P}(\emptyset)$ ? Em outras palavras, qual valor vamos atribuir ao vazio, a não ocorrência de nenhum evento? Esse valor deve representar a impossibilidade de ocorrência. Esse valor será  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ , para representar a impossibilidade de ocorrência, que é obtido diretamente dos axiomas. Assim, tomaremos o intervalo  $[0, 1]$  de números reais como o conjunto imagem da função  $\mathbf{P}$ . Desta forma

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \mathcal{A} &\longrightarrow [0, 1] \\ A \in \mathcal{A} &\longmapsto \mathbf{P}(A). \end{aligned}$$

Após definir a medida de probabilidade, seu domínio e sua imagem, precisamos apresentar os axiomas. Vamos assumi-los como

- *i*)  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ,
- *ii*)  $\mathbf{P}(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ ,
- *iii*) Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ , para  $A, B \in \mathcal{A}$ .

Assim, o espaço amostral  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , a classe de conjuntos  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  e a função  $\mathbf{P}$  definida em (I) que satisfaz o conjunto de axiomas *i*) – *iii*) é um modelo matemático para o experimento do lançamento de um dado e verificar a face voltada para cima. Vamos denotar a tripla  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  de modelo probabilístico.

Uma medida que atribui peso uniforme para cada uma das possíveis faces, isto é,  $\mathbf{P}_H(\{\omega_i\}) = 1/6$ , para  $i = 1, \dots, 6$ , é um modelo para lançamento de um dado honesto. Note que a função fica bem definida se atribuirmos para todo subconjunto  $A \in \mathcal{A}$  a probabilidade  $\mathbf{P}_H(A) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}_H(A \cap \{\omega_i\})$ , utilizando o axioma *iii*). Desta forma,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_H)$  é um modelo probabilístico para o lançamento de um dado honesto.

Se o dado não for honesto, então fazemos  $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i > 0$ , para  $i = 1, \dots, 6$ , com  $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$ . Para qualquer subconjunto  $B \in \mathcal{A}$  utilizamos o axioma *iii*) e definimos  $\mathbf{P}_D(B) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}_D(B \cap \{\omega_i\})$ . Portanto,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_D)$  é um modelo probabilístico para o lançamento de um dado desonesto.

## 2.3 Espaços de probabilidade para espaços amostrais gerais

O modelo probabilístico para o lançamento de um dado é muito útil. Podemos utilizar o mesmo raciocínio para construir um modelo probabilístico para o lançamento de uma moeda e

verificar se a face é cara. Mas e quando  $\Omega$ , o espaço amostral, é infinito e enumerável? Ou não enumerável?

Por exemplo, considere que queremos lançar um dado infinitas vezes. Neste caso,  $\Omega = \{\text{O conjunto de todas as sequências } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } a_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ . O modelo probabilístico definido na Seção 2.2 não é satisfatório para modelar a realização deste experimento. Precisamos fazer algumas mudanças no modelo, para que possamos construir uma estrutura matematicamente rigorosa para este experimento.

Seguindo os passos da seção anterior, devemos apresentar quatro elementos em nossa teoria. Uma função, seu domínio, sua imagem e um conjunto de axiomas. A função é a medida de probabilidade  $\mathbf{P}$ . A imagem, é o intervalo  $[0, 1]$  de números reais. Precisamos agora definir o domínio e os axiomas. O domínio da função  $\mathbf{P}$  será uma classe de subconjuntos de  $\Omega$ , denotada por  $\mathcal{F}$ , que satisfaz as seguintes propriedades

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
2. Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^c \in \mathcal{F}$ ,
3. Se  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ , então  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

Esta classe de subconjuntos de  $\Omega$  é chamada de  $\sigma$ -álgebra. Uma álgebra é quando substituímos a condição 3 pela seguinte condição

$$3'. \text{ Se } A, B \in \mathcal{A} \text{ então } A \cup B \in \mathcal{A}.$$

O leitor interessado pode verificar que a classe  $\mathcal{A}$  do modelo probabilístico da Seção 2.2 é uma álgebra.

Como modificamos a estrutura do domínio de nossa medida de probabilidade  $\mathbf{P}$ , vamos também introduzir uma modificação nos axiomas, a fim de obter um modelo probabilístico mais geral.

Note que no modelo para lançamento de um dado, o axioma *iii)* está diretamente ligado a estrutura do domínio da medida  $\mathbf{P}$ , que no caso era uma álgebra. Agora estamos trabalhando em uma  $\sigma$ -álgebra, então nosso novo axioma *iii)* deve se adequar à estrutura de  $\sigma$ -álgebra. Assim nosso novo conjunto de axiomas é

1.  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ,
2.  $\mathbf{P}(A) \geq 0$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,
3. Se  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$  é uma sequência disjunta dois a dois, então  $\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$ .

A trinca  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , em que  $\Omega$  é o espaço amostral,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  e  $\mathbf{P}$  uma medida de probabilidade com  $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$  que satisfaz o conjunto de axiomas (II) será chamado de espaço de probabilidade.

Antes de prosseguirmos, devemos fazer algumas observações.

**Observação 1.** O leitor pode estar se perguntando: Como faremos para definir a medida  $\mathbf{P}$  para todos os elementos da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ ? Este processo é realizado em três etapas. Primeiro definimos a medida de probabilidade numa estrutura de álgebra conveniente. Em seguida utilizamos o Teorema de Extensão de Caratheodory, (veja (ROYDEN, 2010) p. 356), para concluir que existe uma única medida de probabilidade  $\tilde{\mathbf{P}}$  que é a extensão de  $\mathbf{P}$  para a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{A}$ . Por fim, definimos uma regra de extensão, fazendo  $\tilde{\mathbf{P}} = f \circ \mathbf{P}$ . Em que  $f$  é uma função aplicada a  $\mathbf{P}$  nos elementos da  $\sigma$ -álgebra e para os conjuntos da álgebra é a função identidade.

No experimento do lançamento de um dado honesto  $\mathbf{P}_H(\{\omega_i\}) = 1/6$ , para  $i = 1, \dots, 6$ . Como podemos utilizar essa medida e construir um modelo probabilístico (espaço de probabilidade) para o experimento de lançar um dado infinitas vezes? Primeiramente devemos definir uma álgebra adequada. Considere a álgebra formada por

$$\mathcal{A} = \{\{a_n\}_{n \geq 1}; a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$$

isto é, a álgebra do primeiro lançamento. Definimos  $\mathbf{P}_0$  em  $\mathcal{A}$  da seguinte forma

$$\mathbf{P}_0(\{a_1\}) = \frac{1}{6}, \text{ para } a_1 = 1, 2, \dots, 6, \text{ e para todo } B \in \mathcal{A}, \text{ defina } \mathbf{P}_0(B) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}(B \cap \{a_1 = i\}).$$

Claramente  $\mathbf{P}_0$  é uma medida que satisfaz os axiomas (I). O segundo passo, utilizamos o Teorema de Caratheodory (ver (BILLIGSLY, 1995) p. 36, (ROYDEN, 2010) p. 356), para concluir que existe uma única medida  $\mathbf{P}$  na  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{A}$  que é extensão da medida de probabilidade  $\mathbf{P}_0$ . O terceiro passo consiste em especificar  $\mathbf{P}$  por meio de uma função de  $\mathbf{P}_0$ . Primeiramente note que os elementos da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$  são da forma

$$B_n = \{\{a_n\}_{n \geq 1}; a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \text{ para } n \geq 1.$$

Por exemplo,  $B_1 = \{\{a_n\}_{n \geq 1}, a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$  é um elemento da álgebra  $\mathcal{A}$ . O conjunto  $B_2 = \{\{a_n\}_{n \geq 1}, a_1 = 1 \text{ e } a_2 = 4\}$ , é formado por todas as sequências de resultados obtidos no lançamento de um dado, tal que no primeiro lançamento tivemos resultado um e no segundo resultado quatro.

Vamos definir a medida  $\mathbf{P}$  da seguinte forma utilizando a medida  $p_0$  definida em  $\mathcal{A}$ . Como  $\mathbf{P}_0(a_1) = 1/6$ , para  $a_1 = 1, \dots, 6$ . Fazemos

$$\mathbf{P}(B_n) = [\mathbf{P}_0(a_1 = i)]^n = \frac{1}{6^n}. \quad (2.1)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ B &\longmapsto \mathbf{P}(B).\end{aligned}$$

Note que, se  $n = 1$ , então estamos calculando probabilidades nos elementos da álgebra  $\mathcal{A}$ , e  $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_0(B)$ . O leitor interessado pode verificar que a medida  $\mathbf{P}$  definida em (2.1) satisfaz os axiomas (II).

E se o dado não for honesto? Como faremos para construir um espaço de probabilidade para lançamento infinito de um dado desonesto? Procedemos de forma análoga a anterior, porém, devemos tomar o devido cuidado ao definir a medida estendida  $\mathbf{P}$ . Relembrando que no modelo de um dado desonesto tínhamos  $\mathbf{P}_D(\{\omega_i\}) = p_i$ , para  $i = 1, \dots, 6$ . Ou seja, cada face tem uma probabilidade distinta de ocorrência. Esta informação será inserida na construção da medida  $\mathbf{P}$ . Como sabemos os elementos de  $\mathcal{F}$  tem a seguinte forma

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}, a_i \in \{1, \dots, 6\}, \text{ para todo } i \geq 1.$$

Para definir a probabilidade para o conjunto  $B_n$  de  $\mathcal{F}$  fazemos

$$\mathbf{P}(B_n) = \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}, \quad (2.2)$$

em que,  $\sum_{i=1}^n k_i = n$ . A função  $\mathbf{P}$  definida em (2.2) satisfaz os axiomas (II) e, portanto, é uma medida de probabilidade para o lançamento de um dado desonesto infinitas vezes. Perceba que  $\mathbf{P}$  restrita aos elementos de  $\mathcal{A}$  é igual a medida  $\mathbf{P}_D$ .

**Observação 2.** Outra pergunta que pode surgir é: A  $\sigma$ -álgebra associada  $\mathcal{F}$  será sempre o conjunto das partes de  $\Omega$ , isto é,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ? A resposta é não. Quando  $\Omega$  for enumerável a  $\sigma$ -álgebra associada será o conjunto das partes denotado por  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Mas quando  $\Omega$  tem a cardinalidade do contínuo, é impossível construir uma medida de probabilidade consistente, o leitor interessado pode consultar (TAYLOR, 1973) p 93 e (TAYLOR, 1997) p 49 observação 2.2.9. Sempre que estivermos trabalhando com conjuntos cuja cardinalidade é igual a do contínuo, a  $\sigma$ -álgebra associada será, em geral, a  $\sigma$ -álgebra de Borel.

A teoria da probabilidade tem uma forte ligação com a teoria da medida, veja (BILLIGSLEY, 1995), (ROYDEN, 2010), (VESTRUP, 2004), (TAYLOR, 1997) para mais detalhes.

## 2.4 Variáveis aleatórias e sequências de variáveis aleatórias

Quando lançamos um dado algumas vezes, podemos não estar interessados na sequência obtida, mas sim no número de vezes que observamos a face seis, por exemplo. Do mesmo

modo, quando lançamos uma moeda e observamos a face voltada para cima, podemos estar interessados no número de lançamentos realizados até obter coroa, e não no resultado do lançamento. Essas características numéricas associadas ao experimento chamamos de variáveis aleatórias. A definição 1 apresenta o conceito matematicamente rigoroso de variável aleatória.

**Definição 1.** Dizemos que  $X$  é uma variável aleatória (v.a.) se

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega), \end{aligned}$$

e para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , a  $\sigma$ -álgebra de borel de  $\mathbb{R}$ , a imagem inversa de  $X$  for um evento mensurável, isto é, se  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

Em palavras, dizemos que  $X$  é uma variável aleatória se o conjunto das observações  $\omega \in \Omega$  tal que  $X(\omega) \in B$ , estiver no domínio de  $\mathbf{P}$ , ou seja, a medida de probabilidade  $\mathbf{P}$ , deve estar definida para o conjunto  $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$ . Para que isso ocorra, devemos ter  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$  no domínio da medida de probabilidade  $\mathbf{P}$ , isto é,  $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ , para todo  $B$  em  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Note que  $X$  é uma aplicação entre espaços de medida, isto é,

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Vamos agora introduzir uma medida de probabilidade em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  que preserve a mesma estrutura de aleatoriedade do experimento. Isto é, queremos encontrar uma medida de probabilidade em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  que preserve nossa incerteza do resultado do experimento. Vamos definir essa medida por  $\mathbf{P}_X$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow [0, 1] \\ B &\longmapsto \mathbf{P}_X(B). \end{aligned}$$

Queremos construir  $\mathbf{P}_X$  com base na medida  $\mathbf{P}$ . Para isto usamos uma relação para medir o “peso” dos conjuntos. Imagine que temos uma balança para “pesar” os conjuntos  $B$  da  $\sigma$ -álgebra de Borel. Não sabemos o “peso” de  $B$ , mas sabemos o “peso” dos elementos  $\omega$ , então atribuímos a  $B$  o “peso” total dos  $\omega$  utilizados para equilibrar a “balança”.

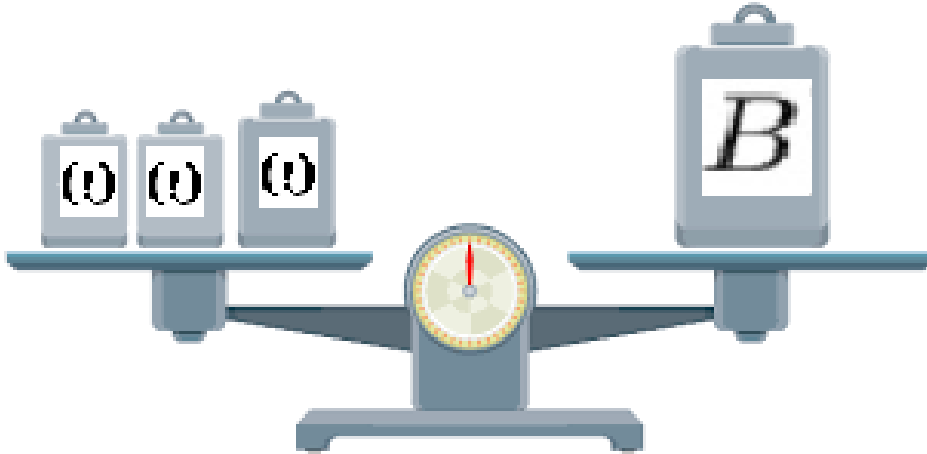


Figura 2 – Balança equilibrando o “peso” de um boreliano com as observações do experimento.

A definição matematicamente rigorosa de  $\mathbf{P}_X$  é dada

$$\mathbf{P}_X(X \in B) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}), \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

A medida de probabilidade  $\mathbf{P}_X$  é chamada medida induzida por  $X$  no espaço  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Alguns autores utilizam a notação  $\mathbf{P} \circ X^{-1}$ , para indicar que  $\mathbf{P}_X$  é a medida de probabilidade  $\mathbf{P}$  aplicada na imagem inversa de  $X$ .

**Exemplo 1.** No experimento de lançamento de um dado honesto temos

$$\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = 1/6, \text{ para } i = 1, \dots, 6.$$

Vamos construir uma variável aleatória para este experimento. Fazemos, para todo  $i = 1, \dots, 6$ ,

$$X(\omega_i) = i,$$

assim,  $\mathbf{P}_X(X \in (-1, 3]) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in (-1, 3]\}) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = 1 \text{ ou } X(\omega) = 2 \text{ ou } X(\omega) = 3\}) = \mathbf{P}(\omega_1) + \mathbf{P}(\omega_2) + \mathbf{P}(\omega_3) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ . Outra possibilidade é fazer  $\mathbf{P}_X(X \in (2, 5/2)) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in (2, 5/2)\}) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .

Associada a cada variável aleatória  $X$ , existe uma função  $F_X$  chamada função de distribuição que caracteriza unicamente o comportamento probabilístico de  $X$ . A Definição 2 apresenta a relação entre  $F_X$  e a medida de probabilidade induzida por  $X$  em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

**Definição 2.** Dizemos que  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$F_X(x) = \mathbf{P}_X(X \in (-\infty, x]) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}),$$

é chamada de função de distribuição da variável aleatória  $X$ .



**Proposição 1.** A função de distribuição  $F_X(x)$  possui as seguintes propriedades

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ ;
3.  $F_X(x)$  é não decrescente;
4.  $F_X(x)$  é contínua à direita.

*Demonstração.* A demonstração dos resultados da proposição faz uso de propriedade da medida de probabilidade  $\mathbf{P}$ , como continuidade, monotonicidade (veja (JAMES, 1996) p. 38-39, (ROYDEN, 2010) p 44).

Para provar 1, tomamos uma seqüência monótona decrescente, com  $x_n \downarrow -\infty$ . Então  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X \leq x_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\cap_{k=1}^n \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_n\})$ . Como os eventos são encaixados podemos comutar a medida de probabilidade com o limite. Assim, temos que  $\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \cap_{k=1}^n \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_n\}) = \mathbf{P}(\cap_{k=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_n\}) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .

A demonstração de 2 é análoga a demonstração de 1. Tomamos agora uma seqüência monótona crescente com  $y_n \uparrow +\infty$ . Assim,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\cup_{k=1}^n \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq y_k\})$ . Como os eventos são encaixados podemos comutar o limite com a medida de probabilidade. Desta forma temos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \cup_{k=1}^n \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq y_k\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$ .

Para demonstrar 3, tomamos  $x, y \in \mathbb{R}$  com  $x < y$ . Então  $F_X(y) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq y\}) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \cup \{\omega \in \Omega; x < X(\omega) \leq y\})$ . Como os eventos são disjuntos, podemos somar as probabilidades. Assim,  $F_X(y) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}) + \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; x < X(\omega) \leq y\}) \geq \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}) = F_X(x)$ .

Para demonstrar 4 fazemos os mesmos passos da demonstração de 1. Tomamos a seqüência  $x_n = x + 1/n$ . Então  $\lim_{y \rightarrow x^+} F_X(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n)$ . Utilizando a definição de função de distribuição  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x + 1/n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\cap_{k=1}^n \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x + 1/k\})$ . Como os eventos são encaixados podemos comutar o limite com a medida de probabilidade. Assim,  $\lim_{y \rightarrow x^+} F_X(y) = \mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \cap_{k=1}^n \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x + 1/k\}) = \mathbf{P}(\cap_{k=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x + 1/k\}) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}) = F_X(x)$  e, portanto,  $F_X(x)$  é contínua à direita.  $\square$

Em probabilidade existem alguns modelos de distribuições muito populares. Por exemplo a distribuição Bernoulli, Binomial, Poisson, Exponencial e Normal. O leitor interessado pode consultar (JAMES, 1996) capítulo 2 para para estes modelos ou mais distribuições. Os autores em geral classificam as distribuições como contínuas ou discretas, ou mistas. Essa classificação carece do conceito de conjunto de medida nula. O leitor interessado pode consultar (ROYDEN, 2010) p 47.

Uma distribuição que nos será muito útil é a distribuição de Rademacher apresentada na Definição 3.

**Definição 3.** Dizemos que a variável aleatória  $X$  tem distribuição de Rademacher com parâmetro  $p \in [0, 1]$  se

$$\mathbf{P}_X(X = 1) = p \text{ e } \mathbf{P}_X(X = -1) = 1 - p,$$

denotamos por  $X \sim \text{Rademacher}(p)$ .

Podemos definir a distribuição de Rademacher(1/2) utilizando o modelo probabilístico para lançamento de um dado honesto. Primeiramente fazemos

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ \omega &\longmapsto X(\omega), \end{aligned}$$

com  $X(\omega)$  definida como

$$X(\omega_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in \{1, 3, 5\} \\ -1, & \text{se } i \in \{2, 4, 6\}. \end{cases}$$

Desta forma  $\mathbf{P}_X(X = -1) = 1/2 = \mathbf{P}_X(X = 1)$ . Assim,  $X \sim \text{Rademacher}(1/2)$ .

Em muitos experimentos nós estamos interessados em modelar não apenas um resultado, mas sim, em uma sequência de fenômenos aleatórios. Para isto fazemos uso de uma sequência de variáveis aleatórias para modelar o experimento. Definimos uma sequência de variáveis aleatórias como

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, n) &\longmapsto X_n(\omega), \end{aligned}$$

tal que, fixado  $n$ ,  $X_n$  é uma variável aleatória sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , fixando  $\omega$  a sequência  $X_n(\omega)$  é uma realização do experimento. Com frequência vamos nos referir a uma sequência de variáveis aleatórias como sendo um processo estocástico, fazendo alusão à sequência observada como ocorrendo ao longo do tempo. Por exemplo, no experimento de lançar um dado infinitas vezes e verificar a face voltada para cima, fazemos

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathbb{N} &\longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ (\omega, n) &\longmapsto X_n(\omega) = i, \end{aligned}$$

em que  $n$  indica o lançamento realizado.

A vantagem de se trabalhar com variáveis aleatórias é que os eventos nos quais estamos interessados podem ser traduzidos por funções da variável aleatória em estudo. Como funções de variáveis aleatórias, em geral, são variáveis aleatórias, nossa análise consiste em especificar esses eventos adequadamente com uso dessas funções.

## 2.5 Esperança matemática

Em muitos experimentos estamos interessados em saber qual o valor esperado do experimento realizado, isto é, qual o resultado esperado do experimento. No caso do dado honesto, qual face espera obter após o lançamento do dado? E se o dado for desonesto, há mudança no número esperado?

Perguntas como estas que procuramos responder nesta seção, com o conceito de esperança matemática de uma variável aleatória.

Para iniciar a construção da esperança matemática precisamos de alguns conceitos. A função indicadora de um conjunto denotada por  $\mathbf{I}(A_n)$ , que será 1 se  $x \in A$  e 0 caso contrário. Em seguida, vamos definir o que são as variáveis aleatórias simples.

**Definição 4.** Dizemos que uma variável aleatória  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathcal{F}$  simples, se pode ser escrita como uma soma de constantes, isto é, se  $Y = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{I}(A_n)$ , com  $a_n \geq 0$  e os conjuntos  $A_n \in \mathcal{F}$ , dois a dois disjuntos.

Uma variável aleatória com distribuição de Rademacher( $p$ ) é uma variável aleatória simples, pois  $X = (-1)\mathbf{I}(x = -1) + \mathbf{I}(x = 1)$ .

Agora definimos o valor esperado de uma variável aleatória simples por

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{P}_Y(A_n) = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in A_n\}).$$

Com a definição de valor esperado de variáveis aleatórias simples, podemos agora definir o valor esperado de uma variável positiva. A definição de valor esperado é construída sobre o Teorema da Convergência Monótona (ver (WILLIAMS, 1991) p 51) e a aproximação de variáveis aleatórias positivas por variáveis aleatórias simples (ver (BILLIGGSLEY, 1995) p 200-201). Então como existe uma sequência de variáveis aleatórias simples  $X_n$  com  $X_n \uparrow X(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Definimos  $\mathbf{E}[X]$  da seguinte forma

$$\mathbf{E}[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = \sup_n \mathbf{E}[X_n],$$

e denotamos  $\mathbf{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega) := \int_{\Omega} X d\mathbf{P}$ .

Agora podemos definir a esperança matemática para uma variável aleatória qualquer. O valor esperado de uma variável aleatória  $X$  é definido em três passos

1. Utilizamos a decomposição (ver (BILLIGGSLEY, 1995) p 200) para escrever

$$X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega),$$

em que  $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$  e  $X^-(\omega) = \max(-X(\omega), 0)$ .

2. Utilizamos variáveis aleatórias simples para definir o valor esperado das variáveis  $X^+$  e  $X^-$ , isto é, seja  $Y_n$  e  $Z_n$  duas sequências de variáveis aleatórias  $\mathcal{F}$  simples, com  $Y_n(\omega) \uparrow X^+(\omega)$  e  $Z_n(\omega) \uparrow X^-(\omega)$ , para todo  $\omega \in \Omega$ . Então fazemos

$$\mathbf{E}[X^+] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\mathbf{E}[X^-] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Z_n].$$

3. Se  $\mathbf{E}[X^+] < \infty$  ou  $\mathbf{E}[X^-] < \infty$ , então definimos

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X^+] - \mathbf{E}[X^-],$$

e caso  $\mathbf{E}[X^+] = \mathbf{E}[X^-] = \infty$ , a esperança de  $X$  não está definida.

O valor  $\mathbf{E}[X]$  será denotado por  $\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega) = \int_{\Omega} X d\mathbf{P}$ .

Com a definição de valor esperado, podemos agora responder as perguntas do início da seção. Para um dado honesto

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \omega &\longmapsto X(\omega), \end{aligned}$$

$X$  é uma variável aleatória simples. Então

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^6 i \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = i\}) = \sum_{i=1}^6 i \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Para um dado desonesto temos

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^6 i p_i.$$

No caso de  $X \sim \text{Rademacher}(p)$ . Como  $X$  é uma variável aleatória simples, então

$$\mathbf{E}[X] = (-1)(1-p) + 1p = 2p - 1.$$

Antes de prosseguirmos precisamos apresentar mais um conceito, o de variáveis aleatórias integráveis. Queremos definir a seguinte integral

$$\mathbf{E}[|X|] = \int_{\Omega} |X| d\mathbf{P}.$$

Para isto precisamos primeiro escrever a decomposição de  $|X|$  (ver (WILLIAMS, 1991) p 51). Então

1. Escreva

$$|X| = |X^+| + |X^-|,$$

em que  $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$  e  $X^-(\omega) = \max(-X(\omega), 0)$ .

2. Definimos os valores esperados de  $|X^+|$  e  $|X^-|$  pelo teorema da convergência Monótona (ver (WILLIAMS, 1991) p. 51)

$$\mathbf{E}[|X^+|] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\mathbf{E}[|X^-|] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Z_n]$$

com  $Y_n$  e  $Z_n$  sequências de variáveis aleatórias  $\mathcal{F}$  simples e  $Y_n \uparrow |X^+|$  e  $Z_n \uparrow |X^-|$ .

3. Definimos o valor esperado de  $|X|$  como

$$\mathbf{E}[|X|] = \mathbf{E}[|X^+|] + \mathbf{E}[|X^-|].$$

Se  $\mathbf{E}[|X|] < \infty$ , então dizemos que  $X$  é integrável.

O operador valor esperado possui duas propriedades importantes. A linearidade e a monotonicidade. Isto é, se  $X$  e  $Y$  são variáveis integráveis e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , então

$$\mathbf{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbf{E}[X] + \beta \mathbf{E}[Y].$$

A demonstração consiste em mostrar que o limite da soma é igual a soma dos limites. Mas isso decorre diretamente de  $X$  e  $Y$  serem integráveis, logo, existem os limites  $\mathbf{E}[X]$  e  $\mathbf{E}[Y]$  são finitos e assim o limite da soma é a soma dos limites.

A monotonicidade para variáveis positivas é consequência de propriedades do limite.

Existem algumas outras propriedades que faremos uso ao longo do texto, o leitor interessado pode consultar (ROYDEN, 2010), (BILLIGSLY, 1995) ou (WILLIAMS, 1991).

## 2.6 Independência

No experimento do lançamento de um dado infinitas vezes, fizemos uso de uma sequência de variáveis aleatórias para a modelagem do experimento. Uma pergunta é: O resultado obtido em cada um dos lançamentos é independentes dos demais? Em outras palavras, o conhecimento dos resultados até o  $n$ -ésimo lançamento altera as probabilidades de se obter uma determinada face no próximo lançamento? E nos próximos dez lançamentos? Para responder a esta pergunta necessitamos saber se os lançamentos são independentes entre si. Ou seja, se as variáveis aleatórias são independentes.

A intuição nos diz que se  $X$  e  $Y$  são independentes, então dado qualquer resultado de  $X$ , este não deve alterar a distribuição de  $Y$ . Surge, então, outra pergunta. Como definir quando duas (ou mais) variáveis aleatórias são independentes?

Queremos uma definição que possibilite responder a seguinte pergunta: Dado que  $X = x$  a probabilidade  $Y = y$  é alterada? Perceba que a definição deve nos permitir responder para todo

$x$  e todo  $y$ . Logo, temos uma classe de eventos que deve ser independente de outra para que  $X$  e  $Y$  sejam independentes.

O primeiro passo para a definição de classe de eventos independentes é primeiro definir o que são eventos independentes. Dizemos que dois eventos  $A$  e  $B$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  são independentes se

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Segue diretamente da definição e da relação  $\mathbf{P}(E) = 1 - \mathbf{P}(E^c)$  que os pares de eventos  $A$  e  $B^c$ ,  $A^c$  e  $B$ ,  $A^c$  e  $B^c$  são todos independentes. Desta forma, as classes  $\mathcal{F}_A = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$  e  $\mathcal{F}_B = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ , que são as  $\sigma$ -álgebras geradas por  $A$  e  $B$ , respectivamente, possuem elementos que são independentes dos elementos da classe oposta. Assim podemos agora definir independência de  $\sigma$ -álgebras.

**Definição 5.** Dizemos que duas  $\sigma$ -álgebras,  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  são independentes se, para todo  $A \in \mathcal{F}_1$  e  $B \in \mathcal{F}_2$ , tivermos

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Com a definição de  $\sigma$ -álgebra independentes, podemos agora apresentar a definição de independência de variáveis aleatórias.

**Definição 6.** Sejam  $\mathcal{F}_X$  e  $\mathcal{F}_Y$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $X$  e  $Y$ , respectivamente, dizemos que  $X$  e  $Y$  são independentes, se  $\mathcal{F}_X$  e  $\mathcal{F}_Y$  forem independentes.

Note como a definição capta a nossa intuição inicial sobre independência. Isto é, a definição nos diz que qualquer evento  $\{Y = y\}$  não é alterada pela ocorrência de qualquer evento que dependa de  $X$ .

O leitor interessado pode voltar à seção 3 e notar que as medidas de probabilidade construídas para o infinitos lançamentos de um dado honesto ou desonesto são para lançamento independentes entre si.

A noção de independência é muito útil também na construção de espaços produtos. Considere que  $X_1$  é uma variável aleatória definida em  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1)$  e  $X_2$  uma variável em  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$ . Como podemos construir um espaço de probabilidade para o vetor aleatório  $(X_1, X_2)$ ? Esta construção depende da ideia de medida produto (ver (TAYLOR, 1997), Cap 3, seção 3.3). Primeiramente definimos  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  e a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  então a medida de probabilidade no espaço produto será

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A \times B) &\longmapsto \mathbf{P}(A \times B), \end{aligned}$$

a medida de probabilidade é dada por

$$\mathbf{P}(A \times B) = \mathbf{P}_1(A)\mathbf{P}_2(B).$$

Resultados de medida produto serão úteis ao longo do texto. O leitor interessado pode consultar (TAYLOR, 1997) cap. 3 para estes resultados. Precisamos da noção de esperança do produto de duas variáveis aleatórias.

## 2.7 Convergência de variáveis aleatórias

Ao lançar um dado honesto infinitas vezes e observarmos a frequência relativa da face seis podemos notar um comportamento peculiar. A frequência tende a se aproximar de  $1/6$ , como pode ser visto na Figura 1.

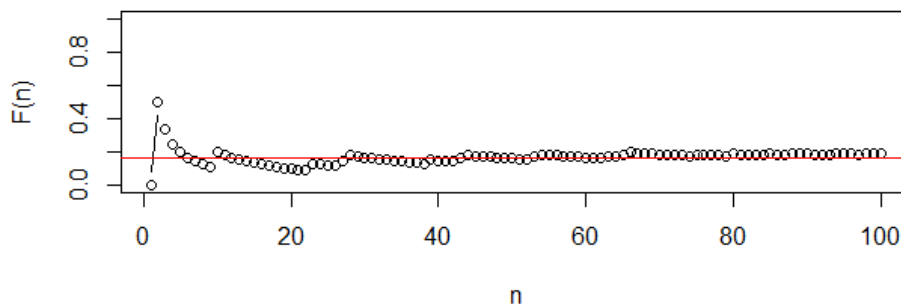


Figura 3 – Convergência da frequência relativa das observações com a face seis no lançamento de um dado.

Este comportamento sintetiza nossa intuição sobre o comportamento da frequência relativa. Isto é, imaginamos que a frequência relativa  $F_n = \frac{\#\{\text{ocorreu face seis}\}}{n}$  satisfaça o seguinte limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \frac{1}{6}. \quad (2.3)$$

A questão é como podemos avaliar essa convergência se  $F_n$  é uma variável aleatória. Perceba que o limite em (2.3) é um evento aleatório. Assim o limite (2.3) deve ser estabelecido por meio probabilístico.

A primeira definição de convergência que apresentamos é a convergência em probabilidade

**Definição 7.** Uma sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  **converge em probabilidade** para a variável aleatória  $X$ , se para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,$$

e denotamos por  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

Com base na definição anterior e comparando com a Figura 1 podemos dizer que  $F_n = \frac{\#\{\text{ocorreu face seis}\}}{n}$  converge em probabilidade para  $1/6$ . A pergunta que podemos fazer é: Este comportamento limite ocorre toda vez que lançamos um dado infinitas vezes? Para responder a essa pergunta é necessário uma definição mais abrangente de convergência.

**Definição 8.** Uma sequência de variáveis aleatória  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  **converge quase certamente** para a variável aleatória  $X$  se

$$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1,$$

e denotamos por  $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ .

A noção de convergência quase certa é mais profunda do que a convergência em probabilidade. Na primeira temos convergência “pontual” das funções  $X_n$ . Na segunda, temos convergência em medida de probabilidade.

No caso da frequência relativa da face seis, se  $F_n$  converge quase certamente para  $1/6$ , então para quase toda realização que fizermos, veremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = 1/6$ , como na Figura 4

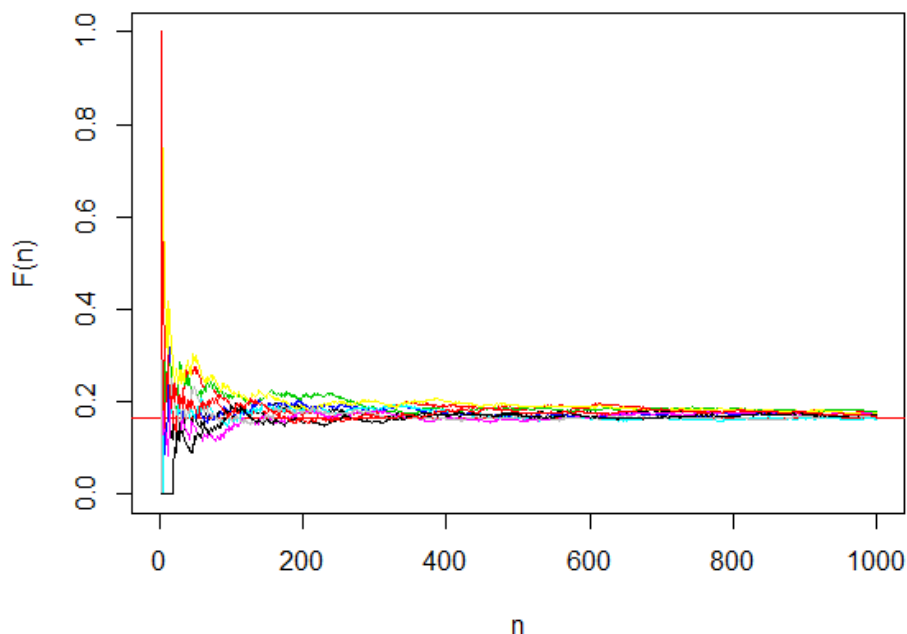


Figura 4 – Convergência da frequência relativa das observações com a face seis em várias realizações do lançamento de um dado.

Existe uma relação entre convergência quase certa e em probabilidade. Se  $X_n$  converge quase certamente para  $X$ , então  $X_n$  converge em probabilidade. Intuitivamente, para todo  $\varepsilon > 0$



existe  $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_0(\omega)$ , temos  $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$ , para quase todo  $\omega \in \Omega$ . Assim  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ .

Dois resultados muito importantes em probabilidade estão associados à convergência quase certa e em probabilidade, são as Leis Forte (ver (WILLIAMS, 1991) p 72) e Fraca (ver (JAMES, 1996) p 197) dos Grandes Números.

Existe em probabilidade um resultado muito popular e de extrema importância prática, o Teorema Central do Limite. Antes de apresentá-lo precisamos definir a convergência em distribuição.

**Definição 9.** Sejam  $X, X_1, X_2, \dots$ , variáveis aleatórias com funções de distribuição  $F, F_1, F_2, \dots$ , respectivamente. Dizemos que a sequência de variáveis aleatória  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  **converge em distribuição** para  $X$ , se  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  para todo  $x$  ponto de continuidade de  $F$ . Denotamos por  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ .

**Teorema 1.** (Teorema Central do Limite). Seja  $X_n$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com  $\mathbf{E}[X_n] = \mu$  e  $\mathbf{Var}[X_n] = \sigma^2 < \infty$ , para todo  $n \geq 1$ . Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

A demonstração do Teorema Central do Limite faz uso do Teorema de Paul Levy (veja (JAMES, 1996) p 237, (WILLIAMS, 1991) p 185). Para convergência de funções características (veja (TAYLOR, 1997) p 263, (JAMES, 1996) p 224). A demonstração consiste em mostrar que

$$\phi_{S_n/(\sigma/\sqrt{n})}(t) = \phi^n \left( \frac{t}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_{N(0,1)}(t),$$

em que  $\phi(t)$  é a função característica de  $X_n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Em seguida, aplicar o Teorema de Paul Levy (veja (JAMES, 1996) p. 237, (WILLIAMS, 1991) p. 185).

A beleza do Teorema Central do Limite está em sua generalidade. Ao afirmar que  $\frac{S_n - n\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  converge em distribuição para uma Normal com média zero e variância um, em nenhum momento especificamos a distribuição das variáveis  $X_n$ , apenas pedimos que  $\mathbf{E}[X_n] = \mu$  e  $\mathbf{Var}[X_n] = \sigma^2$ , para todo  $n \geq 1$ . Este resultado foi primeiramente estudado por DeMoivre, Gauss. Após, houve generalizações desse resultado (ver (JAMES, 1996) cap. 6).

Até aqui falamos de convergência de variáveis no sentido de probabilidades. Mas e com relação à convergência em média, isto é, convergência de valores esperados?

Antes de definir a convergência de médias precisamos de alguns conceitos fundamentais. Seja  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = L^p$ , para  $0 < p < \infty$ , o conjunto das variáveis aleatórias que são  $p$ -integráveis, isto é,

$$\mathbf{E}[|X|^p] < \infty.$$

Vamos definir em  $L^p$  duas operações. A soma denotada por  $+$  e a multiplicação por escalar, denota por  $\cdot$ . Se para  $X$  e  $Y$  em  $L^p$  a soma  $X + Y$  é definida por

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

A multiplicação por escalar é definida para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , com  $|\alpha| < \infty$  e  $Y \in L^p$  como

$$(\alpha X)(\omega) = \alpha(X(\omega)).$$

A trinca  $(L^p, +, \cdot)$  é um espaço vetorial, pois satisfaz todos os axiomas de (LIMA, 2000) p. 1. Vamos denotar apenas por  $L^p$  deixando implícito as funções  $\cdot$  e  $+$ .

No espaço vetorial  $L^p$ , a quantidade

$$\|X\|_p = (\mathbf{E}[|X|^p])^{1/p},$$

é uma norma, pois satisfaz as seguintes propriedades

1.  $\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$ ;
2. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  então  $\|\lambda X\|_p = |\lambda| \|X\|_p$ ;
3.  $\|X\|_p > 0$ ;
4.  $\|X\|_p = 0$  se e somente se  $X = 0$ .

Agora podemos definir a convergência de média como convergência de vetores em  $L^p$ .

**Definição 10.** Sejam  $X, X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias em  $L^p$ . Dizemos que  $X_n$  **converge em média  $p$**  para  $X$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0,$$

e denotamos por  $X_n \xrightarrow{L^p} X$ .

Dois casos particulares de  $L^p$  que são muito importantes são os espaços  $L^1$  e  $L^2$ . Existe uma vasta literatura sobre os espaços  $L^p$  o leitor interessado pode consultar (VESTRUP, 2004) cap 8.

Para desenvolvimento do trabalho estamos interessados nas propriedades de  $L^p$  (ver (ROYDEN, 2010) cap. 7,8).

Existe uma relação entre convergência em  $L^p$  e quase certa. Este resultado é conhecido como Teorema da Convergência Dominada (ver (WILLIAMS, 1991) p 59). Neste teorema temos as condições sob as quais a sequência de variáveis  $X_n$  convergindo quase certamente para  $X$ , também convirja para  $X$  em média  $p$ .

---

## MARTINGAL

---

### 3.1 Introdução

Um jogo honesto, quero um jogo honesto! Diz um jogador ao chegar a um cassino. Mas, o que é um jogo honesto?

Martingal é uma forma muito engenhosa de acomodar dependência, pois no martingal esta é descrita por um relacionamento de médias. Neste capítulo vamos apresentar o martingal e alguns resultados que serão nossas “ferramentas” ao longo do trabalho.

Se o jogo honesto for aquele em que há equilíbrio entre ganho e perda, então o jogador poderia dizer: Quero um jogo que seja martingal!

### 3.2 O problema da ruína e a informação crescente

Em muitos experimentos ou situações práticas, a hipótese de independência não é satisfeita pela sequência de variáveis aleatórias. Por exemplo, imagine que um jogador ao chegar a um cassino decida jogar dados. Se ao lançar os dados apresentar faces iguais, o jogador ganha um real, caso contrário, perde um real. Esse problema é conhecido na literatura por problema da ruína do jogador (veja [\(FELLER, 1971\)](#) p 198).

Vamos modelar o comportamento da fortuna do jogador. Considere  $X_n$  a variável aleatória que indica se o jogador ganhou ou perdeu na  $n$ -ésima jogada, assim

$$X_n = \begin{cases} +1, & \text{se os dados apresentam resultados iguais,} \\ -1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos utilizar o modelo para lançamento de um dado desonesto para que possamos ter a

seguinte relação

$$\mathbf{P}_X(X_n = +1) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) = +1\}) = 1/2$$

$$\mathbf{P}_X(X_n = -1) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) = -1\}) = 1/2.$$

Desta forma podemos modelar a fortuna do jogador no instante  $n$  por  $S_n$ , fazendo

$$S_0 = 0$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

quando  $S_n < 0$ , diremos que o jogador está devendo, quando  $S_n > 0$  o jogador estará ganhando.

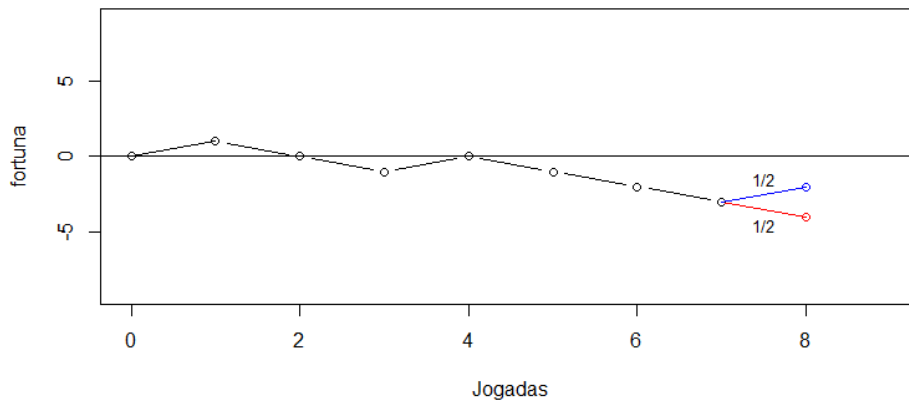


Figura 5 – Fortuna de um jogador após sete rodadas.

O modelo descrito por  $S_n$  é chamado de passeio aleatório simples. Claramente a sequência  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  não é independente, pois para todo  $n \geq 2$  vale

$$\mathbf{P}(\{S_n = x\} \cap \{S_{n-1} = y\}) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } x = y + 1 \\ 1/2, & \text{se } x = y - 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

que é diferente de  $\mathbf{P}(\{S_n = x\})\mathbf{P}(\{S_{n-1} = y\})$ . Então como faremos a análise da fortuna do jogador representada por  $S_n$ ?

A resposta para esta pergunta demanda um espaço de probabilidade com uma estrutura que permita refinar os eventos em estudo. Por exemplo, se sabemos que no instante  $n = 12$ ,  $S_{12} = 4$ , então no instante  $n = 13$ ,  $S_{13} = 5$  ou  $S_{13} = 3$ , não sendo possível nenhum outro resultado. Como podemos construir um espaço de probabilidade para este experimento? Primeiramente

precisamos filtrar a informação dada pelo processo. Conforme o processo evolui, a informação disponível é cada vez maior. Desta forma a estrutura de filtração deve ter um comportamento crescente, no sentido de ser cada vez mais rica de informações. Esta estrutura será apresentada na Definição 11.

**Definição 11.** Uma **filtração** em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  é uma sequência  $\{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, \dots\}$  de sub  $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$  tal que para todo  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ .

No problema da ruína do jogador a filtração será

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Sabemos que  $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(\cup_{i=1}^n X_i^{-1}(\omega))$ . Exemplo se  $n = 2$ , então as primeiras  $\sigma$ -álgebras são

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{+1\}, \{-1\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{+1\}, \{-1\}, \{1, 1\}, \{1, -1\}, \{-1, 1\}, \{-1, -1\}\}.$$

Com a definição de filtração podemos agora apresentar o espaço que vamos utilizar para analisar o comportamento de  $S_n$ , a fortuna do jogador após  $n$  rodadas.

**Definição 12.** Um espaço de probabilidade filtrado é um quarteto  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}, \mathbf{P})$ . Em que

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  é um espaço de probabilidade,

$\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ , é uma filtração em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

No problema da ruína, nosso espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}, \mathbf{P})$  será  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  o espaço de probabilidade para lançamento de um dados infinitas vezes. A filtração  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ , será a filtração gerada por  $X_n$ , isto é,  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

Antes de prosseguirmos no estudo de  $S_n$ , vamos apresentar a definição de sequência adaptada.

**Definição 13.** Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é adaptada à filtração  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ , se para todo  $n \geq 1$ ,  $X_n$  é  $\mathcal{F}_n$  mensurável.

No problema da ruína, claramente a sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é adaptada a  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Mas e a sequência  $\{S_n\}_{n \geq 1}$ , a fortuna do jogador no instante  $n$ ? Perceba que,  $S_n$  é  $\mathcal{F}_n$  adaptada se

$$\{\omega \in \Omega; S_n(\omega) = x\} \in \mathcal{F}_n, \text{ para todo } n.$$

Note que,  $S_n(\omega) = x$ , se e somente se,  $\sum_{i=1}^n X_i(\omega) = x$ . Logo

$$\{\omega \in \Omega; S_n(\omega) = x\} = \{\omega \in \Omega; \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = x\} \in \mathcal{F}_n,$$

portanto,  $S_n$  é  $\mathcal{F}_n$  adaptada. A questão que surge agora é: Como estudar a dependência de  $S_n$ ? Existem duas formas muito comuns. A primeira via Cadeias de Markov (ver (FELLER, 1971), (NORRIS, 1998), (GRIMMETT; STIRZAKER, 2001)) que é baseada na análise das probabilidades condicionais de  $S_n$  dada toda sua história. A outra abordagem é via martingais, que vamos utilizar no texto. Antes de defini-lo precisamos apresentar a esperança condicional.

Qual a fortuna esperado do jogador no instante  $n$  se no instante  $n - 1$  temos  $k$  reais? Sabemos que

$$\mathbf{P}(\{S_n = x\} \cap \{S_{n-1} = k\}) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } x = k + 1 \\ 1/2, & \text{se } x = k - 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos definir a probabilidade condicional de  $S_n$  dado que  $S_{n-1} = k$  por

$$\mathbf{P}(S_n = x | S_{n-1} = k) = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}(\{S_n = x\} \cap \{S_{n-1} = k\})}{\mathbf{P}(S_{n-1} = k)}, & \text{se } \mathbf{P}(S_{n-1} = k) > 0 \\ 0, & \text{se } \mathbf{P}(S_{n-1} = k) = 0. \end{cases}$$

Agora podemos calcular  $\mathbf{P}(S_n = x | S_{n-1} = k)$ . Primeiramente note que  $X_n$  e  $S_{n-1}$  são independentes pois,  $S_{n-1}$  depende somente de  $X_1, \dots, X_{n-1}$ , então

$$\mathbf{P}(S_n = x | S_{n-1} = k) = \frac{\mathbf{P}(S_n = x) \cap \{S_{n-1} = k\}}{\mathbf{P}(S_{n-1} = k)} = \mathbf{P}(X_n = n - k) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } k = n + 1, \\ 1/2, & \text{se } k = n - 1, \end{cases}$$

desta forma, definimos a esperança condicional de  $S_n$  dado  $S_{n-1} = k$  por

$$\mathbf{E}[S_n | S_{n-1} = k] = \sum_{i=-n}^n i \mathbf{P}(S_n = i | S_{n-1} = k) = (k + 1)1/2 + (k - 1)1/2 = k,$$

e logo, conhecendo a fortuna do jogador na última rodada, a fortuna esperada na próxima rodada é a mesma da última. E se não conhecêssemos o resultado da última rodada? A esperança condicional deixa de ser um valor e passa a ser uma variável aleatória que depende de  $S_{n-1}$ . Como  $S_{n-1} \in \{-(n-1), -(n-2), \dots, 0, \dots, n-2, n-1\}$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n | S_{n-1} = -(n-1)] &= -(n-1) \\ \mathbf{E}[S_n | S_{n-1} = -(n-2)] &= -(n-2) \\ &\vdots \\ \mathbf{E}[S_n | S_{n-1} = 0] &= 0 \\ &\vdots \\ \mathbf{E}[S_n | S_{n-1} = n-2] &= n-2 \\ \mathbf{E}[S_n | S_{n-1} = n-1] &= n-1. \end{aligned}$$

Perceba que  $\mathbf{E}[S_n | S_{n-1}]$  é uma variável aleatória, pois

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n | S_{n-1}] : \Omega &\longrightarrow \{-(n-1), -(n-2), \dots, 0, \dots, n-2, n-1\} \\ \omega &\longmapsto \mathbf{E}[S_n | S_{n-1}](\omega) = \mathbf{E}[S_n | S_{n-1}(\omega)]. \end{aligned}$$

Definindo  $\mathbf{E}[S_n | S_{n-1}]$  desta forma, podemos dizer muito mais do que  $\mathbf{E}[S_n | S_{n-1} = k]$  para algum valor  $k$ . Podemos obter o valor de  $\mathbf{E}[S_n | S_{n-1} \in \{k, k-1\}]$ , ou ainda, de  $\mathbf{E}[S_n | S_{n-1} \leq 0]$ . Logo,  $\mathbf{E}[S_n | S_{n-1}]$  está definida para qualquer subconjunto de  $S_{n-1} \in \{-(n-1), -(n-2), \dots, 0, \dots, n-2, n-1\}$ . Assim, vamos denotar  $\mathbf{E}[S_n | S_{n-1}]$  por  $\mathbf{E}[S_n | \mathcal{G}_{n-1}]$ , em que  $\mathcal{G}_{n-1}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $S_{n-1}$ .

A definição matematicamente rigorosa faz uso do Teorema de Radon-Nikodym (ver (ROYDEN, 2010) p. 381, (BILLIGSLY, 1995) p. 419) é dado na definição 14.

**Definição 14.** Seja  $X$  uma variável aleatória em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  que é integrável, e seja  $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$ , uma sub  $\sigma$ -álgebra. A esperança condicional de  $X$  dada  $\mathcal{G}$  é uma variável aleatória  $Y$ ,  $\mathcal{G}$  mensurável tal que

$$\int_G X d\mathbf{P} = \int_G Y d\mathbf{P}, \text{ para todo } G \in \mathcal{G}, \quad (3.1)$$

se  $Y$  é uma variável satisfazendo (3.1), vamos denotar por  $Y = \mathbf{E}[X | \mathcal{G}]$ . Além disso, se existir outra variável  $\tilde{Y}$ ,  $\mathcal{G}$  mensurável que satisfaz (3.1), então  $\mathbf{P}(\tilde{Y} = Y) = 1$  e chamaremos  $\tilde{Y}$  de uma versão de  $\mathbf{E}[X | \mathcal{G}]$ .

Em (WILLIAMS, 1991) cap 9 existe um Teorema sobre existência e unicidade de esperanças condicionais. A esperança condicional possui muitas propriedades em comum com a esperança usual (veja (WILLIAMS, 1991) p 88). Uma propriedade muito útil é a seguinte

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X | \mathcal{G}]].$$

A demonstração desse resultado faz uso da definição 14. Sabemos que (3.1) vale para todo  $G \in \mathcal{G}$ , em particular, para  $G = \Omega$ , assim temos

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X | \mathcal{G}]] = \int_{\Omega} \mathbf{E}[X | \mathcal{G}] d\mathbf{P} = \int_{\Omega} X d\mathbf{P} = \mathbf{E}[X].$$

Existem muitas aplicações da esperança condicional. O leitor interessado pode consultar (DOOB, 1990) cap 12, onde a esperança condicional é vista como o melhor preditor linear,  $X$ , que minimiza  $\mathbf{E}[(Y - X)^2]$ .

Antes de voltar ao problema da ruína, vamos apresentar a definição de um processo que possui dependência: o Martingal.

**Definição 15.** Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  é um martingal relativo à filtração  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ , se

1.  $M_n$  é  $\mathcal{F}_n$  adaptada,
2.  $\mathbf{E}[|M_n|] < \infty$ ,
3.  $\mathbf{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$  quase certamente.

Note como a dependência é convenientemente acomodada na propriedade 3. Não especificamos a dependência que há na sequência de variáveis aleatórias  $M_n$ , apenas pedimos que a última variável observada seja uma versão da esperança condicional da variável que estamos interessados em analisar. Esta praticidade permite utilizar o martingal no estudo de muitos processos que possuem dependência (veja (WILLIAMS, 1991)).

O passeio aleatório simples é um martingal. Sabemos que  $S_n$  é  $\mathcal{F}_n$  adaptada, em que  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Além disso  $\mathbf{E}[|S_n|] < \infty$ . Por fim, como  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , ou seja,  $S_n$  é função dos  $X_1, \dots, X_n$ , então  $\sigma(S_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ , assim  $S_n$  é  $\mathcal{F}_n$  adaptada. Além disso,  $\mathbf{E}[S_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbf{E}[X_n + S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbf{E}[X_n] + S_{n-1} = S_{n-1}$ .

Associado a um martingal, existe o martingal de diferenças. A grande diferença com relação ao martingal usual é que a propriedade 3 é substituída por

$$3'. \mathbf{E}[\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \text{ quase certamente.}$$

O processo definido por  $\varepsilon_n = S_n - S_{n-1}$  é um martingal de diferenças. Basta notar que  $\mathbf{E}[\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbf{E}[S_n | \mathcal{F}_{n-1}] - S_{n-1} = 0$ .

### 3.3 Convergência de martingais

A grande utilidade dos martingais está em seus teoremas limite. Existem versões da lei forte dos grandes números e teorema central do limite (veja (WILLIAMS, 1991), (DUFLO, 1997), (HALL; HEYDE, 1980)). Os Teoremas 2, 3 e 4 são baseados nos resultados 1.3.15, 1.3.24 e 2.1.10 mais gerais em (DUFLO, 1997).

Antes de apresentar o primeiro resultado devemos introduzir o conceito de variação quadrática.

**Definição 16.** A variação quadrática associada a um martingal é definida da seguinte forma

1.  $\langle M \rangle_0 = 0$ , quase certamente,
2.  $\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$

**Teorema 2.** Seja  $M_n$  um martingal em  $L^2$  com variação quadrática  $\langle M \rangle_n$ . Seja  $\langle M \rangle_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M \rangle_n$ ,

1. Se  $\langle M \rangle_\infty < \infty$ , então  $M_n \rightarrow M_\infty$ , quase certamente,  $M_\infty$  é uma variável aleatória finita.



2. Se  $\langle M \rangle_\infty = \infty$ , então  $\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \rightarrow 0$  quase certamente.

A demonstração do Teorema 2 faz uso do Teorema da Convergência de Martingais limitados em  $L^2$  (veja (HALL; HEYDE, 1980) p. 2). Em seguida, utilizamos o comportamento da variação quadrática. Se  $\langle M \rangle_\infty < \infty$ , então  $M_n/\langle M \rangle_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_\infty$ . Se, por outro lado,  $\langle M \rangle_\infty = \infty$ , então  $\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \leq \frac{K}{\langle M \rangle_n} \rightarrow 0 \rightarrow 0$ , para alguma constante  $K$ .

O leitor interessado pode consultar a demonstração do Teorema 1.3.15 em (DUFLO, 1997) para um caso mais geral.

**Teorema 3.** Seja  $\varepsilon_n$  um martingal de diferenças em  $L^2$  que satisfaz

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbf{E}[\varepsilon_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] &\leq C, \quad C \text{ constante} \\ \sup_n \mathbf{E}[\varepsilon_n^a \mid \mathcal{F}_{n-1}] &< \infty, \quad \text{para algum } a > 2. \end{aligned}$$

Seja  $a_n$  uma sequência de números reais e  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Se  $M_n = \sum_{k=1}^n a_{k-1} \varepsilon_k$ , então

$$\frac{M_n^2}{s_{n-1}} = O(\log s_{n-1}).$$

A demonstração do Teorema 3 faz uso da relação  $M_n^2 = (\sum_{k=1}^n a_{k-1} \varepsilon_k)^2$ .

O leitor interessado pode consultar a demonstração do Teorema 1.3.24 em (DUFLO, 1997) para um caso mais geral.

**Teorema 4.** Seja  $M_n$  um martingal com relação à filtração  $\mathcal{F}_n$ , com  $M_n$  em  $L^2$ . Suponha que existe uma sequência de números reais  $a_n$ , com  $a_n \uparrow \infty$ , tal que

1.  $\frac{\langle M \rangle_n}{a_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2$ ,
2. A condição de Lindeberg condicional esta satisfeita, isto é, para todo  $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[|M_k - M_{k-1}|^2 \mathbf{I}(\{|M_k - M_{k-1}| \leq \varepsilon_n^{1/2}\}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Então

$$\frac{M_n}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2)$$

A demonstração do Teorema 4 segue diretamente dos Teoremas 1 e 2 de (BROWN, 1971).

O leitor interessado pode consultar a demonstração do Teorema 2.1.9 e do Corolário 2.1.10 em (DUFLO, 1997) para casos mais gerais.

### 3.3.1 O problema de ruína

Sabemos da Seção 3.2 que a sequência de variáveis aleatórias  $S_n$  (passeio aleatório simples) é um martingal. A pergunta que fazemos agora é: Como se comporta a fortuna do jogador quando este tende a jogar por um número tão grande quanto se queira de vezes, ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ ? A questão é resumida na existência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}. \quad (3.2)$$

O limite em (3.2) existe quase certamente. O valor do limite em (3.2) é zero. Isto é, o jogador não ganha nem perde, se jogar infinitas vezes! A demonstração é baseada no Teorema 3. Como  $S_n = \sum_{k=1}^n 1X_k$ , com  $a_k = 1$ , para todo  $k \geq 1$  e  $s_n = n$ . Logo, pelo Teorema 3

$$\mathbf{P} \left( \frac{S_n^2}{n} = O(\log n) \right) = 1.$$

Assim, segue que  $\frac{S_n^2}{n} \leq k \log n$ . Logo,  $\frac{S_n^2}{n^2} \leq k \frac{\log n}{n}$ , tomando a raiz temos

$$\frac{|S_n|}{n} \leq k \sqrt{\frac{\log n}{n}}.$$

Desta forma, segue que

$$\mathbf{P} \left( -k \sqrt{\frac{\log n}{n}} \leq \frac{S_n}{n} \leq k \sqrt{\frac{\log n}{n}} \right) = 1,$$

e fazendo  $n \rightarrow \infty$  temos

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \right) = 1.$$

---

# PASSEIO ALEATÓRIO DO ELEFANTE E DIFUSÃO

---

## 4.1 Introdução

“...Se um pingüinho de tinta Cai num pedacinho azul do papel...”  
(Toquinho)

Num instante forma-se uma mancha! Por que isso acontece? Difusão! Mas, o que é difusão? É o que vamos responder neste capítulo.

O movimento de partícula em meio solvente possui características peculiares. Neste capítulo apresentamos alguns modelos que descrevem o comportamento dessas partículas e como esses modelos estão relacionados à mancha de tinta no pedacinho azul de papel.

Na Seção 4.2 apresentamos uma breve construção histórica do modelo de difusão de moléculas em um solvente. Em seguida definimos e construímos um modelo de difusão em uma dimensão baseada no passeio aleatório de uma partícula. Por fim, apresentamos o Passeio Aleatório do Elefante introduzido em (SCHUTZ; TRIMPER, 2004). Esse modelo tem a propriedade de mudança de regime difusivo. Apresentamos uma pequena discussão sobre essa mudança analisando o comportamento de uma partícula cujo movimento é regido por esse processo para diferentes valores de seu parâmetro de memória  $p$ .

## 4.2 Difusão em uma dimensão

A difusão molecular pode ser vista em diversas situações do cotidiano. Por exemplo, quando uma gota de tinta cai em um recipiente com solvente.



Figura 6 – Difusão de tinta em um solvente.

Fonte: <https://www.emsintese.com.br/2012/movimento-em-agua-quente-e-fria/>

A tinta vai diluindo e colorindo todo o solvente uniformemente. No aspecto microscópico há um transporte de moléculas de tinta de regiões com maior concentração para regiões de menor concentração de moléculas de tinta.

No século XIX Adolfo Fick (1829-1901) desenvolveu uma teoria de difusão molecular baseada em ideias similares às da lei de transporte de calor de Fourier e da lei de eletricidade de Ohm (ver (GHEZ, 2005), (GHEZ, 2001)). Ele considerou que um reservatório com um solvente é dividido por uma membrana semi permeável. Cada um dos lados tem uma concentração de um determinado sal. Por causa da diferença de concentração entre os lados do recipiente há um fluxo de moléculas do lado com maior concentração para o lado de menor concentração ao longo do tempo.

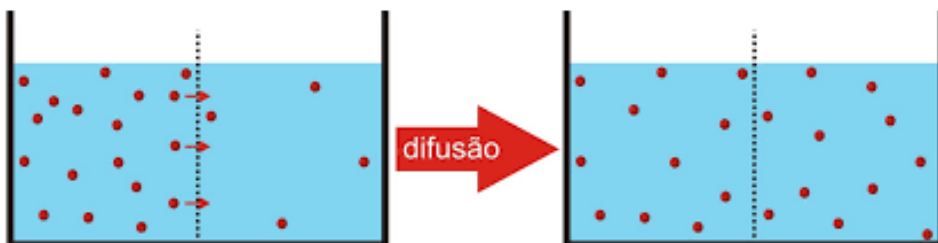


Figura 7 – Difusão de moléculas através da membrana.

Fonte: <https://planetabiologia.com/difusao-atraves-de-uma-membrana/>

Em analogia ao fluxo de calor entre dois polos. Fick propôs uma equação baseada no

fluxo de difusão do soluto (sal), representado pela função  $f(x,t)$ , e a concentração de moléculas,  $c(x,t)$ . Essa equação é chamada de Lei de Fick (ver (GHEZ, 2005) p 7), é dada a seguir

$$f(x,t) = -D \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \quad (4.1)$$

Neste modelo,  $D$  é chamado de coeficiente de difusão, ou difusividade, e é sempre não negativo, isto é,  $D \geq 0$ . O sinal negativo indica um fluxo de uma região de alta concentração de moléculas para uma região com baixa concentração. Uma propriedade importante é que o fluxo é sempre uma função linear do tempo. A interpretação física esta na relação linear entre a área que a mancha de tinta ocupa e o tempo.

Após essa breve apresentação de difusão, a pergunta que fazemos é: Como podemos construir um modelo de difusão em uma dimensão? E como seria a interpretação física do movimento de difusão em uma dimensão? A resposta está em um dos modelos mais populares em probabilidade: O passeio aleatório simples. Vamos utilizar o passeio aleatório para descrever o movimento de uma partícula. Considere que no instante de tempo  $t = 0$  a partícula esteja na origem, após um tempo  $\Delta t$  a partícula move-se  $\Delta x$  unidades para a direita com probabilidade  $1/2$  ou  $\Delta x$  unidades para a esquerda com probabilidade  $1/2$ .

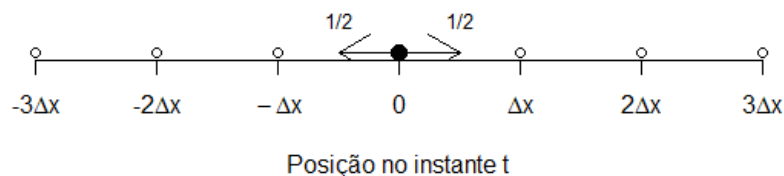


Figura 8 – Movimento de uma partícula em uma dimensão.

Definimos  $p(x,t)$  como a probabilidade da partícula estar no sítio  $x$  no instante  $t$ . Então pela lei da probabilidade total (ver (JAMES, 1996) p 17)

$$p(x,t + \Delta t) = \frac{1}{2}p(x - \Delta x, t) + \frac{1}{2}p(x + \Delta x, t). \quad (4.2)$$

Queremos encontrar a função  $p(x,t)$  que satisfaz (4.2). Para isto vamos derivar uma equação diferencial e utilizar uma condição inicial para resolver a equação (4.2). Em 4.2 subtraía

$p(x, t)$  e divide por  $\Delta t$ , assim

$$\begin{aligned} \frac{p(x, t + \Delta t) - p(x, t)}{\Delta t} &= \frac{1}{2\Delta t} (p(x + \Delta x, t) - 2p(x, t) + p(x - \Delta x, t)) \\ &= \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left( \frac{p(x + \Delta x, t) - 2p(x, t) + p(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} \right), \end{aligned}$$

tomando o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0^+$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $(\Delta x)^2/\Delta t \rightarrow k$ , para alguma constante  $k$ . Temos

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.3)$$

em que  $D = k/2$ , é o coeficiente de difusão. A equação (4.3) é chamada de equação de difusão do passeio aleatório. Para encontrar uma única solução para a equação, precisamos de uma condição inicial. Faremos  $p(x, 0) = \delta(x)$ , a função delta de Dirac, isto é,

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A resolução da equação (4.3) faz uso da transformada de Fourier (função característica). O leitor interessado pode consultar (EVANS, 2010) cap 2 seção 2.3, para ver método de resolução da equação (4.3).

A solução da equação (4.3) é dada por

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt},$$

que é a função densidade de probabilidade de uma Normal com média  $\mu = 0$  e variância  $\sigma^2 = 2Dt$ . Desta forma, podemos agora definir quando um processo estocástico possui a difusão normal.

**Definição 17.** Um processo estocástico  $X_t$  é difusivo se

$$\text{Var}[X_t] = kt, \text{ para algum } k > 0,$$

caso contrário diremos que  $X_t$  possui difusão anômala.

O passeio aleatório simples apresenta difusão normal, pois  $\text{Var}[X_n] = n$ .

A interpretação física é que a dispersão das partículas é uma função linear do tempo. Considere que no instante  $t = 0$  temos  $n$  partículas na origem. Suponha que cada uma das partículas efetue um passeio aleatório independente das demais. Assim dizer que esse modelo apresenta difusão normal é o mesmo que no instante  $t$  a amplitude é proporcional a  $t$ .

Existem várias referências sobre difusão. O leitor interessado pode consultar (GHEZ, 2001), (CRANK, 1975). Para difusão anômala o leitor pode consultar (PEKALSKI; SZNAJD-WERON, 1999). Para processos estocásticos que modelarão o comportamento difusivo a literatura é vasta, as referências mais comuns são (ITÔ; MCKEAN, 1996) e (ROGERS; WILLIAMS, 2000). Em (GRIMMETT; STIRZAKER, 2001) cap. 13 existe uma introdução a estes modelos.

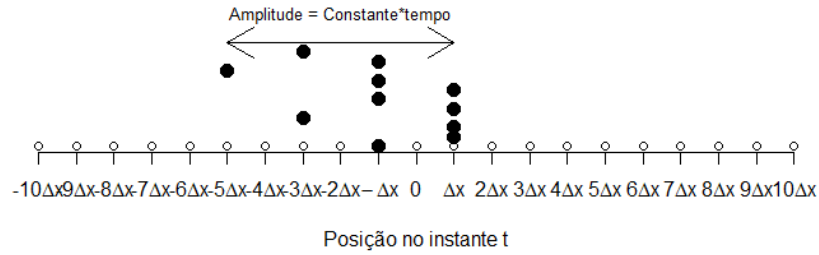


Figura 9 – Movimento de doze partículas realizando um passeio aleatório independentes das demais.

### 4.3 Passeio Aleatório do Elefante

Nesta seção vamos construir um passeio aleatório com efeito de memória que depende de toda a história do processo. Esta influência é mensurada através de um parâmetro  $p \in [0, 1)$  o qual desempenhará papel fundamental no comportamento assintótico do processo. Primeiramente definimos o processo de acordo com a dinâmica apresentada em (SCHUTZ; TRIMPER, 2004). Em seguida calculamos os dois primeiros momentos do processo, que permite observar a dependência do processo com relação ao seu parâmetro de memória  $p$  que determinará o comportamento da evolução do processo.

**Definição 18.** A posição do passeio aleatório no instante  $n + 1$  é dada pela relação

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

Além disso,

1. Inicialmente, o passeio inicia em um ponto  $s_0$ , com  $\mathbf{P}(S_0 = s_0) = 1$ , e move-se para a direita com probabilidade  $q$  ou para a esquerda com probabilidade  $1 - q$ , isto é,

$$\mathbf{P}(S_1 = s_0 + 1) = q,$$

$$\mathbf{P}(S_1 = s_0 - 1) = 1 - q.$$

2. No instante de tempo  $n + 1$ , para  $n \geq 1$ , um número  $n'$  é escolhido uniformemente (com igual probabilidade) do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ ;
3.  $X_{n+1}$  é determinada estocasticamente pela seguinte regra

$$X_{n+1} = X_{n'} \text{ com probabilidade } p,$$

$$X_{n+1} = -X_{n'} \text{ com probabilidade } 1 - p$$

O passeio aleatório recebe o nome de elefante devido ao efeito de memória infinita. Fazemos associado ao mito do elefante possuir uma memória grande.

A questão inicial é para qual extensão da memória do processo há influência na posição da partícula. Se considerarmos  $p < 1/2$  o Passeio Aleatório do Elefante se comporta, metaforicamente, como um reformador, isto é, o processo dá preferência para passos na direção oposta do passo escolhido aleatoriamente do seu passado. Para  $p > 1/2$  o Passeio Aleatório do Elefante é do tipo mais tradicional, ou seja, o processo prefere manter o passo observado no seu passado.

**Observação 3.** Há três casos especiais do modelo:

1. Quando  $p = 1/2$ , o modelo escolhe o valor do passo com a mesma probabilidade, sem importar qual tenha sido sua história pois,  $\mathbf{P}(X_{n+1} = +1 \mid \mathcal{F}_n) = 1/2 = \mathbf{P}(X_{n+1} = -1 \mid \mathcal{F}_n)$ . Logo, pela Lei da Probabilidade total  $\mathbf{P}(X_{n+1} = +1) = 1/2 = \mathbf{P}(X_{n+1} = -1)$  e, portanto, o Passeio Aleatório do Elefante é equivalente a um Passeio Aleatório Simples Simétrico.
2. No caso limite, quando  $p = 1$ , a dinâmica é determinística e o Passeio Aleatório do Elefante efetua o passo na direção do primeiro passo dado.
3. Quando  $q = 1/2$  a posição média do passeio aleatório do elefante é zero para todo  $p$ . De fato, em (SCHUTZ; TRIMPER, 2004) temos que  $\mathbf{E}[S_n] = (2q - 1) \frac{\Gamma(n+2p-1)}{\Gamma(2p)\Gamma(n)}$ , igual a zero se  $q = 1/2$ .

Para estudar o valor esperado de  $X_{n+1}$ , precisamos primeiramente obter a probabilidade condicional de  $X_{n+1}$  dado toda sua história  $\mathcal{F}_n$ . Em (SCHUTZ; TRIMPER, 2004) temos que

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [1 + (2p - 1)x_k x],$$

assim, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid \mathcal{F}_n) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [1 + (2p - 1)x_k 1] \\ &= \frac{1}{2n} \left( n + (2p - 1) \sum_{k=1}^n x_k \right) \end{aligned}$$

lembrando que  $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n x_k$ , temos

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{2} + \frac{(2p - 1)(S_n - S_0)}{2n}. \quad (4.4)$$

Analogamente, obtemos para  $\{X_{n+1} = -1\}$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = -1 \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{2} - \frac{(2p - 1)(S_n - S_0)}{2n}. \quad (4.5)$$

Desta forma, podemos obter  $\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$  utilizando (4.4) e (4.5)

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{(2p - 1)}{n} (S_n - S_0). \quad (4.6)$$



A relação obtida em (4.6) forma a base para análise do processo. Primeiramente definimos os seguintes parâmetros

$$\alpha = 2p - 1, \beta = 2q - 1,$$

associados à memória do processo e ao primeiro passo efetuado, respectivamente. Ambos os parâmetros estão definidos no intervalo  $[-1, 1]$ . Valores positivos de  $\alpha$  correspondem ao modelo tradicional, enquanto os negativos correspondem ao modelo reformador. O caso  $\alpha = 0$  é o modelo sem memória, isto é, um Passeio Aleatório Simples Simétrico.

De (4.6) obtemos a seguinte relação de momentos

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = \frac{\alpha}{n}(\mathbf{E}(S_n) - S_0).$$

Defina  $Y_n = S_n - S_0 = \sum_{k=1}^n X_k$  a trajetória do processo, então

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = \frac{\alpha}{n}\mathbf{E}(Y_n), \quad (4.7)$$

por outro lado  $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$ , logo

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}) = \mathbf{E}(Y_n) + \mathbf{E}(X_{n+1}), \quad (4.8)$$

olhando  $\mathbf{E}(X_{n+1})$  em (4.8) via (4.7) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_{n+1}) &= \mathbf{E}(Y_n) + \frac{\alpha}{n}\mathbf{E}(Y_n) \\ &= \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\mathbf{E}(Y_n) \text{ para } n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Realizando um raciocínio recursivo em (4.9) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_n) &= \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n-2}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha}{1}\right) \mathbf{E}(Y_1) \\ &= \frac{(n-1+\alpha)(n-2+\alpha) \dots (2+\alpha)(1+\alpha)}{(n-1)!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \mathbf{E}(Y_1) \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n)} \mathbf{E}(Y_1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

relembrando que  $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(X_1) = 2q - 1 = \beta$ , por definição e junto com a fórmula de Stirling (veja (FELLER, 1971) p. 52) temos

$$\mathbf{E}(Y_n) \sim \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+1)} n^\alpha.$$

Para obter o segundo momento, fazemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_{n+1}^2) &= \mathbf{E}((Y_n + X_{n+1})^2) \\ &= \mathbf{E}(Y_n^2) + 2\mathbf{E}(Y_n)\mathbf{E}(X_{n+1}) + \mathbf{E}(X_{n+1}^2), \end{aligned}$$

agora note que  $\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = 1$ , para todo  $n \geq 1$  e,  $\mathbf{E}(Y_n X_{n+1}) = \mathbf{E}(Y_n \mathbf{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = \frac{\alpha}{n} \mathbf{E}(Y_n^2)$  pela equação (4.6), logo temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_{n+1}^2) &= 1 + \mathbf{E}(Y_n^2) + \frac{2\alpha}{n} \mathbf{E}(Y_n^2) \\ &= 1 + \left(1 + \frac{2\alpha}{n}\right) \mathbf{E}(Y_n^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aplicando um raciocínio recursivo em (4.11) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_n^2) &= 1 + \left(1 + \frac{2\alpha}{n-1}\right) \left[1 + \left(1 + \frac{2\alpha}{n-2}\right) \mathbf{E}(Y_{n-2}^2)\right] \\ &\vdots \\ &= 1 + \left(\frac{n-1+2\alpha}{n-1}\right) + \left(\frac{n-1+2\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+2\alpha}{n-2}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{n-1+2\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+2\alpha}{n-2}\right) \dots \left(\frac{2+2\alpha}{2}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{n-1+2\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+2\alpha}{n-2}\right) \dots \left(\frac{2+2\alpha}{2}\right) \left(\frac{1+2\alpha}{1}\right) \mathbf{E}(Y_1^2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como  $\mathbf{E}(Y_1^2) = 1$  e utilizando a relação multiplicativa da função Gama em (4.12) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_n^2) &= 1 + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1+2\alpha)} + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n-2+2\alpha)} + \dots \\ &\quad + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+2\alpha)} + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+2\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

colocando  $\Gamma(n+2\alpha)/\Gamma(n)$  em evidência na equação (4.13) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_n^2) &= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \left[ \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+2\alpha)} + \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1+2\alpha)} + \dots + \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right] \\ &= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+2\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Agora se  $p = 3/4$  temos que  $2\alpha = 1$  e assim  $\sum_{k=1}^n \Gamma(k)/\Gamma(k+2\alpha) = \sum_{k=1}^n \Gamma(k)/\Gamma(k+1) = \sum_{k=1}^n 1/k$ . Por outro lado, se  $p \neq 3/4$  temos pelo Lema da soma de razões Gama dado em A.2 no Apêndice

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_n^2) &= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \left[ \frac{\Gamma(n+1)}{(\alpha-1)\Gamma(n+2\alpha)} \left( \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{n}{2\alpha-1} \left( \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Primeiro, note que o segundo momento não depende da parametrização inicial de  $q$  pois,  $\mathbf{E}(Y_1^2) = 1$ , para todo  $q$ . Assintoticamente nós temos em (4.15), para  $p \neq 3/4$

$$\mathbf{E}(Y_n^2) \sim \frac{n}{2\alpha-1} \left( \frac{n^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} - 1 \right), \quad (4.16)$$

e, para  $p = 3/4$  temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_n^2) &= n \sum_{k=1}^n 1/k \\ &\sim n \log(n). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Lembrando que  $2\alpha - 1 = 4p - 3$ , assim (4.16) fica

$$\mathbf{E}(Y_n^2) \sim \frac{n^{4p-2}}{(4p-3)\Gamma(2\alpha)} + \frac{n}{3-4p}, \tag{4.18}$$

para  $p < 3/4$  temos que  $4p - 2 < 1$  em consequência temos para  $n \rightarrow \infty$  que  $n \gg n^{4p-2}$ . Por outro lado se  $p > 3/4$  temos que  $4p - 2 > 1$ . Em consequência temos para,  $n \rightarrow \infty$ , que  $n \ll n^{4p-2}$  temos de (4.17) e (4.18) para  $n$  grande que

$$\mathbf{E}(Y_n^2) \sim \begin{cases} \frac{n}{3-4p} & \text{para } p < 3/4 \\ n \log(n) & \text{para } p = 3/4 \\ \frac{n^{4p-2}}{(4p-3)\Gamma(2\alpha)} & \text{para } p > 3/4. \end{cases} \tag{4.19}$$

Podemos ver que há mudança de regime no valor  $p = 3/4$ . Para  $p < 3/4$  temos difusão normal, isto é, a variância evolui como função linear de  $n$ . Já para  $p \geq 3/4$  temos difusão anômala, isto é, quando a variância cresce mais rapidamente que uma função linear de  $n$ .

**Movimento da partícula quando  $p=0.65$**

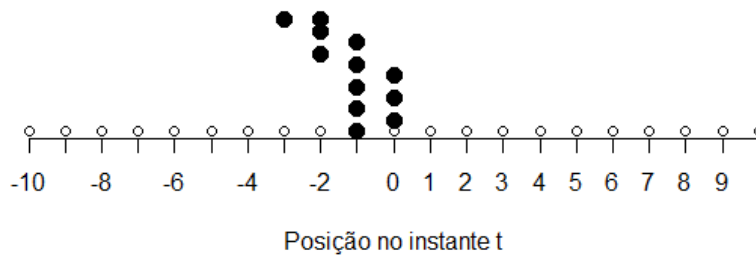


Figura 10 – Movimento de uma partícula realizando um passeio aleatório do elefante com  $p = 0.65$ .

### Movimento da partícula quando $p=0.75$

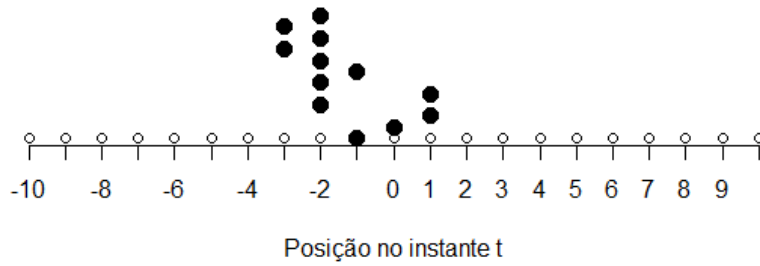


Figura 11 – Movimento de uma partícula realizando um passeio aleatório do elefante com  $p = 0.65$ .

### Movimento da partícula quando $p=0.85$

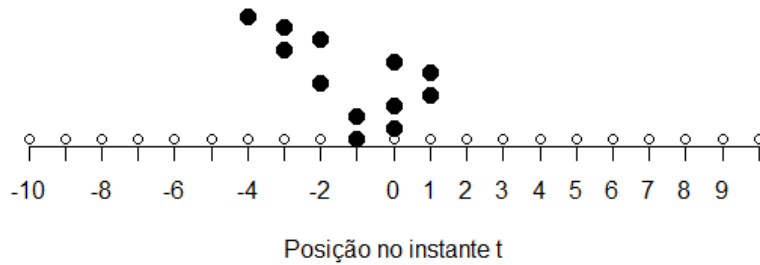


Figura 12 – Movimento de uma partícula realizando um passeio aleatório do elefante com  $p = 0.65$ .

# COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO PASSEIO ALEATÓRIO DO ELEFANTE

---

## 5.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar os teoremas limite de (BERCU, 2018) e analisar como o parâmetro de memória  $p$  influencia no comportamento do processo. Essa análise vai nos permitir responder se os jovens elefantes se dispersarão ou se os elefantes mais velhos vão se reencontrar.

## 5.2 Abordagem de Martingais para o Passeio Aleatório do Elefante

Nesta seção vamos apresentar a abordagem de martingais apresentada em (BERCU, 2018). Primeiramente vamos construir o Passeio Aleatório do Elefante como uma soma aleatória. A partir desta definição vamos construir dois martingais, um martingal  $M_n$  e um outro de diferenças  $\varepsilon_n$ , para aplicar os resultados de martingais apresentados no Capítulo 3. A partir disso, podemos fazer a análise assintótica do Passeio Aleatório do Elefante.

**Definição 19.** (Passeio Aleatório do Elefante). A posição do Passeio Aleatório do Elefante é dado por

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1},$$

em que  $X_{n+1}$  é determinada estocasticamente por

$$X_{n+1} = \theta_n X_{U_n}, \text{ em que}$$

1.  $\theta_n$ : Tem distribuição Rademacher( $p$ );

2.  $U_n$ : tem distribuição uniforme sobre  $\{1, \dots, n\}$
3.  $\theta_n$  e  $U_n$  são independentes;
4.  $\theta_n$  e  $U_n$  são independentes de  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

Seja  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$  uma seqüência crescente de  $\sigma$ -álgebras,  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  então para qualquer tempo  $n \geq 1$  temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[\theta_n X_{U_n} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{E}[\theta_n] \mathbf{E}[X_{U_n} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (2p-1) \frac{S_n}{n}, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[S_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= S_n + (2p-1) \frac{S_n}{n} \\ &= S_n \left( 1 + \frac{(2p-1)}{n} \right). \end{aligned}$$

Definindo  $\gamma_n = \left( 1 + \frac{(2p-1)}{n} \right)$  temos a seguinte relação

$$\mathbf{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \gamma_n S_n. \quad (5.1)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k &= \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{(2p-1)}{k} \right) \\ &= \frac{(2p+n-1)(2p+n-2) \dots 2p}{n!}, \end{aligned}$$

e utilizando a relação multiplicativa da função Gama em  $(2p+n-1)(2p+n-2) \dots 2p = (2p+n-1)(2p+n-2) \dots 2p \Gamma(2p) / \Gamma(2p) = \Gamma(n+2p) / \Gamma(2p)$ , podemos então construir uma seqüência de constantes  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  em que,  $a_1 = 1$  e  $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1}$ . Assim pode-se definir uma nova seqüência de variáveis aleatórias  $\{M_n\}_{n \geq 1}$ , com  $M_n = a_n S_n$ . Agora note que

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{(2p-1)}{k} \right)^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+2p-1} = \frac{(n-1)!}{(n+2p-2)(n+2p-3) \dots (2p)} \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(2p)} \\ &= \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\gamma_n}{\gamma_n} \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} \\
 &= \gamma_n \prod_{k=1}^n \gamma_k^{-1} \\
 &= \gamma_n a_{n+1}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Agora perceba que  $M_n$  é um martingal, pois  $\mathbf{E}[M_n] \leq \infty$ , para todo  $n \geq 1$ ,  $M_n = a_n S_n \in \mathcal{F}_n$  e  $\mathbf{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = a_{n+1} \gamma_n S_n = a_n S_n = M_n$  quase certamente. O martingal  $\{M_n\}$  pode ser reescrito de forma aditiva como  $M_n = \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k$ , onde  $\varepsilon_k = S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1}$ . Os incrementos de  $M_n$  satisfazem

$$\begin{aligned}
 \Delta M_n &= a_n S_n - a_{n-1} S_{n-1} \\
 &= a_n \varepsilon_n.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Com estes resultados vamos obter os primeiros quatro momentos de  $S_n$  necessários para estudar o comportamento do processo de incremento  $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ . Desta forma podemos então estudar o comportamento em larga escala do passeio aleatório do elefante, isto é, quando  $n \rightarrow \infty$ , para cada um dos regimes do Passeio aleatório de Elefante. Assim, obtemos para  $S_{n+1}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= S_n + \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\
 &= S_n + \frac{(2p-1)}{n} S_n \text{ por (4.6) com } S_0 = 0 \\
 &= \left(1 + \frac{(2p-1)}{n}\right) S_n \\
 &= \gamma_n S_n \text{ pela definição de } \gamma_n.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Para o segundo momento segue que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[(S_n + X_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] \\
 &= S_n^2 + 2S_n \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n],
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

agora note que,  $\mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \frac{(2p-1)}{n} S_n$  por (4.6) e que  $\mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1$ . Assim podemos escrever (5.6) da seguinte forma

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1 + 2 \frac{(2p-1)}{n} S_n^2 + S_n^2. \tag{5.7}$$

Somando e subtraindo  $S_n^2$  podemos reescrever (5.7) da seguinte forma

$$1 + 2 \frac{(2p-1)}{n} S_n^2 + 2S_n^2 - S_n^2 = 1 + 2 \left(1 + \frac{(2p-1)}{n}\right) S_n^2 - S_n^2 \tag{5.8}$$

e lembrando a definição de  $\gamma_n = \left(1 + \frac{(2p-1)}{n}\right)$ , podemos simplificar a expressão em (5.8). Então o segundo momento do Passeio Aleatório do Elefante é dado por

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1 + (2\gamma_n - 1)S_n^2. \quad (5.9)$$

Seguindo o mesmo raciocínio do segundo momento obtemos o terceiro

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[(S_n + X_{n+1})^3 | \mathcal{F}_n] \\ &= S_n^3 + 3S_n^2\mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + 3S_n\mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[X_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Lembrando que  $\mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (2p-1)S_n/n$ ,  $\mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1$  e  $\mathbf{E}[X_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (2p-1)S_n/n$  substituindo esses valores em (5.10) obtemos

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] = S_n^3 + 3S_n^2 \frac{(2p-1)}{n} S_n + 3S_n + \frac{(2p-1)}{n} S_n, \quad (5.11)$$

de onde segue que

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] = \left(1 + 3 \frac{(2p-1)}{n}\right) S_n^3 + \left(2 + 1 + \frac{(2p-1)}{n}\right) S_n. \quad (5.12)$$

Podemos reescrever a relação obtida em (5.12) da seguinte forma

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] = (-2 + 3\gamma_n)S_n^3 + (2 + \gamma_n)S_n. \quad (5.13)$$

Seguindo as mesmas linhas do terceiro momento condicional obtemos o quarto momento

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[(S_n + X_{n+1})^4 | \mathcal{F}_n] \\ &= S_n^4 + 4S_n^3\mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + 6S_n^2\mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \\ &\quad + 4S_n\mathbf{E}[X_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[X_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n], \end{aligned} \quad (5.14)$$

lembrando que  $\mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (2p-1)S_n/n$ ,  $\mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1$ ,  $\mathbf{E}[X_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (2p-1)S_n/n$  e  $\mathbf{E}[X_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] = 1$  substituindo esses valores em (5.14) obtemos

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] = S_n^4 + 4S_n^3 \frac{(2p-1)}{n} S_n + 6S_n^2 + 4S_n \frac{(2p-1)}{n} S_n + 1, \quad (5.15)$$

e utilizando a definição de  $\gamma_n = \left(1 + \frac{(2p-1)}{n}\right)$  podemos escrever a relação obtida em (5.15) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] &= \left(-3 + 4 + 4 \frac{(2p-1)}{n}\right) S_n^4 + \left(2 + 4 + 4 \frac{(2p-1)}{n}\right) S_n^2 + 1 \\ &= (4\gamma_n - 3)S_n^4 + (4\gamma_n + 2)S_n^2 + 1. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Com estes resultados podemos agora obter o segundo e quarto momentos do martingal de diferenças  $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$  para que possamos fazer a análise assintótica do martingal  $M_n = \gamma_n S_n$



e, assim, avaliar o comportamento assintótico do Passeio Aleatório do Elefante  $S_n$ . O segundo momento condicionado em toda a história do processo  $\mathcal{F}_n$  de  $\varepsilon_n$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[(S_{n+1} - \gamma_n S_n)^2 | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - 2\gamma_n S_n \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \gamma_n^2 S_n^2.\end{aligned}\quad (5.17)$$

De (5.9) temos  $\mathbf{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1 + (2\gamma_n - 1)S_n^2$  e por (5.5) temos  $\mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \gamma_n S_n$  substituindo em (5.17), assim

$$\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1 + (2\gamma_n - 1)S_n^2 + 2\gamma_n^2 S_n^2 - \gamma_n^2 S_n^2, \quad (5.18)$$

simplificando  $2\gamma_n^2 S_n^2$  com  $-\gamma_n^2 S_n^2$  e colocando  $-S_n^2$  em evidência temos  $1 - (1 - 2\gamma_n + \gamma_n^2)S_n^2$ . O produto notável pode ser rescrito de forma conveniente a obter  $1 - (\gamma_n - 1)^2 S_n^2$ , lembrando que  $\gamma_n = 1 + \frac{2p-1}{n}$  e, substituindo seu valor temos  $1 - \frac{(2p-1)^2}{n^2} S_n^2$ , donde segue que

$$\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1 - (2p-1)^2 \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 \text{ quase certamente.} \quad (5.19)$$

De forma análoga à obtenção do segundo momento condicional do martingal de diferenças  $\varepsilon_n$ , faremos o quarto. Assim

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\varepsilon_n^4 | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[(S_{n+1} - \gamma_n S_n)^4 | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{E}[S_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] - 4\gamma_n S_n \mathbf{E}[S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] + 6\gamma_n^2 S_n^2 \mathbf{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] + \\ &\quad - 4\gamma_n^3 S_n^3 \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \gamma_n^4 S_n^4,\end{aligned}\quad (5.20)$$

os valores de  $\mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ ,  $\mathbf{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n]$ ,  $\mathbf{E}[S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n]$  e  $\mathbf{E}[S_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n]$  são obtidos das equações (5.5), (5.9), (5.13) e (5.16) respectivamente. Assim, substituindo estes valores em (5.20) obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] &= (4\gamma_n - 3)S_n^4 + (4\gamma_n + 2)S_n^2 + 1 - 4\gamma_n S_n [(-2 + 3\gamma_n)S_n^3 + (2 + \gamma_n)S_n] + \\ &\quad + 6\gamma_n^2 S_n^2 [1 + (2\gamma_n - 1)S_n^2] - 4\gamma_n^3 S_n^3 \gamma_n S_n + \gamma_n^4 S_n^4.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Simplificando e colocando  $S_n^4$  e  $S_n^2$  em evidência em (5.21) obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] &= S_n^4 (-3\gamma_n^4 + 12\gamma_n^3 - 18\gamma_n - 3) + S_n^2 (2\gamma_n^2 - 4\gamma_n + 2) + 1 \\ &= 1 + 2(\gamma_n - 1)^2 S_n^2 - 3(\gamma_n - 1)^4 S_n^4.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Relembrando que  $\gamma_n - 1 = \frac{2p-1}{n}$ , portanto (5.22) fica

$$\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] = 1 - 3(2p-1)^4 \frac{S_n^4}{n^4} + 2(2p-1) \frac{S_n^2}{n^2}, \text{ quase certamente.} \quad (5.23)$$

Agora note que, se  $p = 1/2$ , então  $\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1$  e  $\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n]$ , quase certamente. Perceba ainda que os momentos são superiormente limitados para isto basta notar que

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \leq 1, \quad (5.24)$$

pois,  $\inf_{n \geq 1} (S_n/n)^2 \geq 0$ . Além disso temos

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] = \sup_{n \geq 1} 1 - 3(2p-1)^4 \frac{S_n^4}{n^4} + 2(2p-1) \frac{S_n^2}{n^2}. \quad (5.25)$$

Note que podemos maximizar o quarto momento condicional se olharmos este como um polinômio do segundo grau na variável  $t = S_n^2/n^2$  com cavidade voltada para baixo, isto é, com  $a = -3(2p-1)^4 < 0$ . Para isto escrevemos

$$f(t) = 1 - 3(2p-1)t^2 + 2(2p-1)t \quad (5.26)$$

com máximo em

$$t' = \frac{1}{3(2p-1)^2}, \text{ se } p \neq 1/2. \quad (5.27)$$

Avaliando a função (5.26) no valor de  $t$  dado em (5.27) obtemos

$$\begin{aligned} f(t') &= 1 - 3(2p-1) \left( \frac{1}{3(2p-1)^2} \right)^2 + 2(2p-1)^2 \frac{1}{3(2p-1)^2} \\ &= \frac{4}{3}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

e portanto,

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \leq \frac{4}{3}. \quad (5.29)$$

Agora podemos deduzir de  $\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$  lendo o valor esperado via (5.4) junto com (5.19) segue que

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=2}^n a_k^2 \left( 1 - (2p-1)^2 \left( \frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^2 \right) + a_1^2.$$

Assim temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^{k-1} a_{k+1}^2 \left( \frac{S_k}{k} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \zeta_n, \end{aligned} \quad (5.30)$$

em que  $\zeta_n = \sum_{k=1}^{k-1} a_{k+1}^2 \left( \frac{S_k}{k} \right)^2$ . Agora a análise do martingal  $M_n$  dependerá do comportamento de  $\sum_{k=1}^n a_k^2$ . Já sabemos que a variância do passeio aleatório do elefante apresenta transição de fase como pode ser visto na identidade (4.19) e assim vamos estudar a evolução da série para os três regimes do modelo.

Para  $p < 3/4$  temos que  $v_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$  lendo  $a_k$  via a identidade (5.2) temos

$$v_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)} \right)^2, \quad (5.31)$$

o que nos dá, pela de análise assintótica de função Gama de Euler, que para  $p < 3/4$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n^{3-4p}} = \frac{(\Gamma(2p))^2}{3-4p}. \quad (5.32)$$

Para  $p = 3/4$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\log n} = \frac{\pi}{4}. \quad (5.33)$$

Por fim, para  $3/4 < p < 1$ ,  $v_n$  converge para um valor finito, conhecida como função hipergeométrica generalizada, dada na Definição 24 no Apêndice A

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p)} \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k (1)_k}{(2p)_k (2p)_k k!}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

## 5.3 Convergência quase certa

O que aconteceria em média se elefantes jovens caminhassem aleatoriamente? Veremos nos Teoremas 5 e 6 que todos eles tenderiam a ir para o mesmo ponto. Ou seja, se encontrariam uma um mesmo lugar.

### 5.3.1 Regime Subcrítico

**Teorema 5.** Seja  $S_n$  o passeio aleatório do elefante, com parâmetro de memória  $p < 3/4$ , então

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \right) = 1.$$

A demonstração do Teorema 5 faz uso dos teoremas limite para martingais apresentados no Capítulo 3. Os passos da demonstração são os seguintes

1. Utilizamos (5.32) junto com o Teorema 2 para concluir que

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

2. Em seguida, utilizamos as desigualdades (5.24) e (5.29) junto com o Teorema 3 para concluir que

$$\frac{M_n^2}{s_{n-1}} = O(\log s_{n-1}),$$

em que  $s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ .

3. Por fim, aplicamos a Proposição 6.7 em (JAMES, 1996) p. 250 na relação  $a_n S_n = M_n$

*Demonstração.* Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M \rangle_n = \langle M \rangle_\infty = \infty,$$

então pelo Teorema 2

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

Por outro lado segue de  $\sup_n \mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \leq 1$  e  $\sup_n \mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] \leq 3/4$  junto com o Teorema 3 que

$$\mathbf{P} \left( \frac{M_n^2}{s_{n-1}} = O(\log s_{n-1}) \right) = 1,$$

em que  $s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ .

Então pela proposição 6.7 em (JAMES, 1996) p.250 temos que

$$\mathbf{P} \left( \frac{a_n^2 S_n^2}{s_{n-1}} = O(\log s_{n-1}) \right) = 1,$$

note que  $\frac{M_n^2}{v_n} \leq \frac{M_n^2}{s_{n-1}}$ . Além disso,  $\log s_{n-1} \leq \log n$ . Desta forma, utilizando a fórmula de Stirling (ver (FELLER, 1971) p 52), temos

$$\frac{M_n^2}{v_n} \sim \frac{M_n^2}{n^{3-4p}} = O(\log n).$$

Como  $M_n = a_n S_n$  e utilizando a relação  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 n}{n^{3-4p}} = (\Gamma(2p))^2$ . Temos que

$$\mathbf{P} \left( \frac{S_n^2}{n} = O(\log n) \right) = 1.$$

Logo,

$$\frac{S_n^2}{n^2} \leq k \frac{\log n}{n}, \text{ quase certamente.}$$

Tomando a raiz quadrada segue

$$\frac{|S_n|}{n} \leq k^{1/2} \frac{(\log n)^{1/2}}{n^{1/2}}.$$

Assim, segue que

$$\mathbf{P} \left( -k^{1/2} \frac{(\log n)^{1/2}}{n^{1/2}} \leq \frac{S_n}{n} \leq k^{1/2} \frac{(\log n)^{1/2}}{n^{1/2}} \right) = 1,$$

tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  temos

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \right) = 1.$$

□

### 5.3.2 Regime Crítico

**Teorema 6.** Seja  $S_n$  um passeio aleatório do elefante, com parâmetro de memória  $p = 3/4$ , então

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n} = 0 \right) = 1.$$

A demonstração do Teorema segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 5.

*Demonstração.* Pela identidade (5.33) junto com o Teorema 2 temos que

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

Pelo Teorema 3 segue que

$$\mathbf{P} \left( \frac{M_n^2}{\log n} = O(\log \log n) \right) = 1.$$

Lembrando que  $M_n = a_n S_n$ . Então  $\frac{a_n^2 S_n^2}{\log n} \leq k \log \log n$ , para alguma constante  $k$ . Logo,

$$\frac{a_n^2 S_n^2}{n(\log n)^2} \leq k \frac{\log \log n}{n \log n}, \text{ quase certamente,}$$

simplificando

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n} \log n} \leq C \frac{\sqrt{a_n^2 S_n^2}}{a_n \sqrt{n} \log n}, \text{ quase certamente.}$$

Mas  $a_n \sqrt{n} \sim \sqrt{v_n} \sim \sqrt{n \log n}$ . Desta forma

$$\mathbf{P} \left( -C \frac{\sqrt{\log \log n}}{\sqrt{n} \log n} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n} \log n} \leq C \frac{\sqrt{\log \log n}}{\sqrt{n} \log n} \right) = 1.$$

tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , temos o resultado. □

## 5.4 Lei do Logaritmo Iterado e lei forte quadrática

Sabemos dos Teoremas 5 e 6 que os elefantes jovens tendem em média a morver-se para o mesmo lugar quando caminham aleatoriamente. Mas o que acontece com a manada? Veremos nos Teoremas 7, 9, 8 e 10 que embora todos caminhem para o mesmo lugar o espaço ocupado pela manada cresce segundo limites de memória do elefantes.

### 5.4.1 Regime Subcrítico

**Teorema 7.** (Lei forte quadrática). Suponha que  $S_n$  seja uma passeio aleatório do elefante com parâmetro de memória  $p < 3/4$ , então

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{S_k}{k} \right)^2 = \frac{1}{3-4p} \right) = 1$$

A demonstração possui cinco passos.

1. Primeiramente devemos mostrar que

$$\frac{a_n^2}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2. Em seguida devemos obter o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = l.$$

3. Obtemos um limitante superior para  $\sup_n \mathbf{E}[\varepsilon^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}]$ .

4. Aplicamos o Teorema 3 de (BERCU, 2004) para obter

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log v_n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 M_k^2}{v_k^2} = l \right) = 1.$$

5. Por fim, aplicamos a Proposição 6.7 em (JAMES, 1996) p. 250 e na relação  $a_n S_n = M_n$ .

*Demonstração.* Como

$$\frac{a_n^2}{v_n} \sim \frac{n^{(-2p+1)2}}{n^{3-4p}} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \text{ A primeira condição esta satisfeita.}$$

Da desigualdade (5.24) junto com o Teorema 5 temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = 1 \text{ quase certamente.}$$

Além disso, segue de (5.29) que  $\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n] < \infty$ .

Desta forma, pelo Teorema 3 de (BERCU, 2004) temos

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 M_k^2}{v_k^2} = 1 \right) = 1,$$

assim,

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log v_n} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^4 k^2 S_k^2}{v_k^2 k^2} = 1 \right) = 1.$$

Como  $\log v_n / \log n \sim 3 - 4p$  e  $n^4 a_n^2 / v_n^2 \sim (3 - 4p)^2$ . Então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log v_n / \log n}{n^4 a_n^2 / v_n^2} = \frac{3 - 4p}{(3 - 4p)^2} = \frac{1}{3 - 4p}.$$

Portanto,

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k^2} = \frac{1}{3 - 4p} \right) = 1.$$

□

**Teorema 8.** Suponha que  $S_n$  seja um passeio aleatório do elefante com parâmetro de memória  $p < 3/4$ , então

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} S_n = \frac{1}{\sqrt{3 - 4p}} \right) = 1.$$

A demonstração possui três passos.

1. Primeiramente devemos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^4}{v_k^2} < \infty.$$

2. Em seguida, aplicamos a Lei do logaritmo Iterado apresentada em (STOUT, 1974) para  $M_n$ .

3. Por fim, aplicamos a Proposição 6.7 em (JAMES, 1996) p. 250 na relação  $a_n S_n = M_n$ .

*Demonstração.* Como  $a_n^2 \sim n^{-4p+2}$  e  $v_n \sim kn^{3-4p}$ , para alguma constante  $k$ . Logo

$$\left( \frac{a_n^2}{v_n} \right)^2 \sim \frac{1}{n^2},$$

mas  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi/6$ . Portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_n^2}{v_n} \right)^2 < \infty.$$

Então pela Lei do Logaritmo Iterado (veja (STOUT, 1974)) temos

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2v_n \log \log v_n} \right)^{1/2} M_n = 1 \right) = 1$$

Utilizamos a relação  $M_n = a_n S_n$  junto com a Proposição 6.7 de (JAMES, 1996) para obter

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2v_n \log \log v_n} \right)^{1/2} a_n S_n = 1 \right) \\ &= \mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sup \left( \frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} S_n \right] \frac{a_n \sqrt{n} (\log \log n)^{1/2}}{\sqrt{v_n} (\log \log v_n)^{1/2}} = 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Como  $a_n \sqrt{n}/v_n \sim \sqrt{3-4p}$  e  $\log n \log n \sim \log n \log v_n$ . Desta forma

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{v_n}}{a_n \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{3-4p}},$$

portanto

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} S_n = \frac{1}{\sqrt{3-4p}} \right) = 1.$$

□

### 5.4.2 Regime Crítico

**Teorema 9.** (Lei forte quadrática). Suponha que  $S_n$  seja uma passeio aleatório do elefante com parâmetro de memória  $p = 3/4$ , então

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \log n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{S_k}{k \log k} \right)^2 = 1 \right) = 1$$

A demonstração do Teorema 9 segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 7.

*Demonstração.* Como

$$\frac{a_n^2}{v_n} \sim \frac{n^{(-2p+1)2}}{\log n} = \frac{n^{-1/2}}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ a primeira condição esta satisfeita.}$$



Da desigualdade 5.24 junto com o Teorema (5) temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = 1 \text{ quase certamente.}$$

Além disso, segue de (5.29) que  $\mathbf{E}[\varepsilon_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n] < \infty$ .

Desta forma, pelo Teorema 3 de (BERCU, 2004) temos

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log v_n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 M_k^2}{v_k^2} = 1 \right) = 1.$$

Assim,

$$\mathbf{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log n}{\log v_n} \frac{1}{\log \log n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^4 (k \log k)^2}{v_k^2} \frac{S_k^2}{(k \log k)^2} = 1 \right) = 1.$$

Como  $\log v_n \sim \log \log n$  e  $a_n^4 v_n^{-2} \sim (n \log n)^{-2}$ . Portanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \log n} \sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{(k \log k)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log v_n}{\log \log n} \frac{(n \log n)^{-2}}{a_n^4 v_n^{-2}} = 1, \text{ quase certamente.}$$

□

**Teorema 10.** Suponha que  $S_n$  seja um passeio aleatório do elefante com parâmetro de memória  $p < 3/4$ , então

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n \log n \log \log \log n} \right)^{1/2} S_n = 1 \right) = 1.$$

A demonstração do Teorema 10 segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 8.

*Demonstração.* Como  $a_n^2 \sim n^{-1}$  e  $v_n \sim \log n$ . Logo

$$\left( \frac{a_n^2}{v_n} \right)^2 \sim \frac{1}{(n \log n)^2} < \infty,$$

desta forma,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)^2} < \infty$ .

Então pela Lei do Logaritmo Iterado (veja (STOUT, 1974)) temos

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2v_n \log n \log v_n} \right)^{1/2} M_n = 1 \right) = 1.$$

Utilizamos a relação  $M_n = a_n S_n$  junto com a Proposição 6.7 de (JAMES, 1996) para obter

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2v_n \log n \log v_n} \right)^{1/2} a_n S_n = 1 \right) = 1.$$

Assim

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{2n \log n \log \log \log n} \right)^{1/2} a_n S_n \right] \left( a_n \frac{2n \log n \log \log \log n}{2v_n \log n \log v_n} \right)^{1/2} = 1 \right) = 1,$$

Como  $a_n \sim n^{-1/2} \sqrt{\pi}/2$ ,  $\log n/v_n \sim 4/\pi$  e  $\log \log \log n \sim \log \log v_n$ . Então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n \log n \log \log \log n} \right)^{1/2} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log n \log n}{\log \log v_n} \frac{\log n}{v_n} 2na_n = 1, \text{ quase certamente.}$$

□

## 5.5 Convergência no regime super crítico

No regime supercrítico, quando  $p > 3/4$ , o passeio aleatório  $S_n$  converge para uma variável aleatória finita. Nesta seção vamos mostrar que essa convergência também ocorre em  $L^4$ .

**Teorema 11.** Seja  $S_n$  um passeio aleatório do elefante com parâmetro de memória  $p > 3/4$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ \left| \frac{S_n}{n^{2p-1}} - S \right|^4 \right] = 0,$$

em que  $S = \frac{1}{\Gamma(2p)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k$ .

A demonstração do Teorema 11 possui três passos

1. Primeiro aplicamos o Teorema 2.
2. Em seguida, obtemos um limitante superior para  $\mathbf{E}[M_n^4]$ . Com isso limitamos superiormente  $\mathbf{E}[(S_n/n^{2p-1})^4]$ .
3. Por fim, aplicamos o Teorema da convergência dominada em (WILLIAMS, 1991) p. 54.

*Demonstração.* Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M \rangle_n = \langle M \rangle_{\infty} < \infty,$$

logo  $M_n$  converge para uma variável aleatória finita  $M$ , com  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k$ . Como  $n^{2p-1} a_n \sim \Gamma(2p)$ , segue pela Proposição 6.7 de (JAMES, 1996) p. 250 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{2p-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n n^{2p-1}} M_n = \frac{1}{\Gamma(2p)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k, \text{ quase certamente.}$$

Para mostrar que  $\mathbf{E}[|M_n|^4] < \infty$ , para todo  $n \geq 1$ , fazemos

$$\mathbf{E}[M_n^4 | \mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{j=1}^4 \binom{n}{j} M_{n-1}^{4-j} a_n^j \mathbf{E}[\varepsilon_n^j | \mathcal{F}_{n-1}].$$

Como

$$\mathbf{E}[\varepsilon_n^j | \mathcal{F}_{n-1}] = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 0, \\ 0, & \text{se } j = 1, \\ \leq 1, & \text{se } j = 2, \\ 0, & \text{se } j = 3, \\ < 6, & \text{se } j = 4, \end{cases}$$

segue que,  $\mathbf{E}[M_n^4 | \mathcal{F}_{n-1}] \leq M_{n-1}^4 + 6M_{n-1}^2 a_n^2 + a_n^4$ . Tomando o valor esperado temos, para todo  $n \geq 1$

$$\mathbf{E}[M_n^4] \leq \mathbf{E}[M_{n-1}^4] + \mathbf{E}[M_{n-1}^2] a_n^2 + a_n^4.$$

Aplicamos uma recursão em  $n$  e obtemos a seguinte desigualdade

$$\mathbf{E}[M_n^4] \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[M_{k-1}^2] a_k^2 + \sum_{k=1}^n a_k^4,$$

agora note que,  $\mathbf{E}[M_{n-1}^2] = \mathbf{E}[(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \varepsilon_k)^2] \leq \sum_{k=1}^n a_k^2$ , pois  $\varepsilon_k$  é martingal de diferenças e  $\sup \mathbf{E}[\varepsilon_k] < 1$ . Desta forma

$$\mathbf{E}[M_n^4] < \sum_{k=1}^n a_k^4 + 6 \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Sabemos que  $a_k = \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)} < 1$ , logo  $\sum_{k=1}^n a_k^4 < \sum_{k=1}^n a_k^2$ . Portanto

$$\mathbf{E}[M_n^4] < \left(1 + 6 \sum_{k=1}^n a_k^2\right) \sum_{k=1}^n a_k^2 < \infty,$$

já que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ , então  $\mathbf{E}[M_n^4] < \infty$ , para todo  $n \geq 1$ .

Por outro lado,  $M_n = a_n S_n$ , logo

$$\mathbf{E} \left[ \left( \frac{S_n}{n^{2p-1}} \right)^4 \right] = \frac{1}{(a_n n^{2p-1})} \mathbf{E}[M_n^4].$$

Como  $\mathbf{E}[M_n^4] < \infty$ , para todo  $n \geq 1$ . Além disso,  $a_n n^{2p-1} \sim \Gamma(2p) < \infty$ . Assim, segue que  $\mathbf{E} \left[ \left( \frac{S_n}{n^{2p-1}} \right)^4 \right] < \infty$ . Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (veja (WILLIAMS, 1991) p 54), temos que

$$\frac{S_n}{n^{2p-1}} \xrightarrow{L^4} S = \frac{1}{\Gamma(2p)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k.$$

□

## 5.6 Convergência em distribuição

### 5.6.1 Regime Subcrítico

**Teorema 12.** Seja  $S_n$  o passeio aleatório do elefante com  $p < 3/4$ , então

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N \left( 0, \frac{1}{3-4p} \right).$$

A demonstração possui quatro passos.

1. Primeiramente devemos mostrar que

$$\frac{\langle M \rangle_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

2. Em seguida, devemos mostrar que  $M_n$  satisfaz a condição de Lindeberg condicional, isto é, para todo  $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[|M_k - M_{k-1}|^2 \mathbf{I}(\{|M_k - M_{k-1}| \leq \varepsilon_n^{1/2}\}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

3. Após demonstrarmos os Passos um e dois, podemos aplicar o Teorema 4 para o martingal  $M_n$ .
4. Por fim, aplicamos a Proposição 6.7 em (JAMES, 1996) p. 250 na relação  $a_n S_n = M_n$ .

*Demonstração.* Primeiramente temos do Teorema 5 junto com a identidade (5.32) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle M \rangle_n}{v_n} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left( \frac{S_k}{k} \right)^2}{v_n} \rightarrow 1.$$

Precisamos agora verificar a condição de Lindeberg para o martingal  $M_n$ . Seja  $\varepsilon > 0$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[|M_k - M_{k-1}| \mathbf{I}(|M_k - M_{k-1}| \geq \varepsilon \sqrt{n}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\ \leq \frac{1}{v_n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[a_k^4 \varepsilon_k^4 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \text{ pois } M_k - M_{k-1} = a_k \varepsilon_k \\ \leq \frac{3}{4v_n} \sum_{k=1}^n a_k^4 \text{ pois } \sup_k \mathbf{E}[\varepsilon_k^4 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \leq 3/4. \end{aligned}$$

Agora note que  $a_n^4 \sim n^{(-2p+1)4} \leq n^{-2}$ , para  $p < 3/4$ . Como  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 < \infty$  e  $v_n \sim n^{3-4p} \rightarrow \infty$ . Temos que

$$\frac{3}{4v_n} \sum_{k=1}^n a_k^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

portanto  $M_n$  satisfaz a condição de Lindeberg.

Pelo Teorema 3 de (BERCU, 2004) temos que

$$\frac{M_n}{\sqrt{v_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1);$$

Como  $M_n = a_n S_n$  e  $a_n \sqrt{n} / \sqrt{v_n} \sim (3 - 4p)^{1/2}$ , segue que

$$\frac{a_n \sqrt{n}}{\sqrt{v_n}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim (3 - 4p)^{1/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1),$$

Como  $\text{Var}[S_n/\sqrt{n}] = \sqrt{v_n}/a_n \sqrt{n} \sim 1/(3 - 4p)$ . Portanto, pela Proposição 6.7 de (JAMES, 1996) p. 250 temos

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{1}{3 - 4p}\right).$$

□

## 5.6.2 Regime Crítico

**Teorema 13.** Seja  $S_n$  o passeio aleatório do elefante com  $p = 3/4$ , então

$$\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

A demonstração do Teorema 13 segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 12.

*Demonstração.* Primeiramente temos do Teorema 6 junto com a identidade (5.33) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle M \rangle_n}{v_n} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left(\frac{S_k}{k}\right)^2}{v_n} \rightarrow 1.$$

Pelo Teorema 3 de (BERCU, 2004) temos

$$\frac{M_n}{\sqrt{v_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

Como  $M_n = a_n S_n$  e  $a_n \sqrt{n \log n} \sim \sqrt{v_n}$ . Segue que

$$\frac{a_n \sqrt{n \log n}}{\sqrt{v_n}} \frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \sim \frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

□

### 5.6.3 Regime Supercrítico

O Teorema 14 apresenta os primeiros quatro momentos da variável aleatória limite do passeio aleatório do elefante quando  $p > 3/4$ . Podemos notar que o terceiro momento é diferente de zero o que diferencia essa variável aleatória de uma outra com distribuição Normal padrão.

**Teorema 14.** Os primeiros quatro momentos de  $S$  são dados por

1.  $\mathbf{E}(S) = \frac{2q-1}{\Gamma(2p)},$
2.  $\mathbf{E}(S^2) = \frac{1}{(4p-3)\Gamma(2(2p-1))},$
3.  $\mathbf{E}(S^3) = \frac{2p(2q-1)}{(2p-1)(4p-3)\Gamma(3(2p-1))},$
4.  $\mathbf{E}(S^4) = \frac{6(8p^2-4p-1)}{(8p-5)(4p-3)^2\Gamma(4(2p-1))}.$

*Demonstração.* Denote por  $\alpha = 2p - 1$ ,  $\beta = 2q - 1$ ,  $L_n = M_n/\Gamma(2p)$  e  $S = M/\Gamma(2p)$ . Segue do Teorema 11 que, para  $d = 1, 2, 3, 4$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[L_n^d] = \mathbf{E}[S^d]. \quad (5.35)$$

Sabemos de (5.5) que para todo  $n \geq 1$

$$\mathbf{E}[S_{n+1}] = \left(\frac{n+\alpha}{n}\right) \mathbf{E}[S_n]. \quad (5.36)$$

Resolvendo recursivamente e lembrando que  $\mathbf{E}[X_1] = 2q - 1 = \beta$  temos que

$$\mathbf{E}[S_n] = \frac{\beta}{a_n}. \quad (5.37)$$

Então, de (5.35) segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\Gamma(2p)} \frac{\beta}{a_n} \\ &= \frac{2q-1}{\Gamma(2p)}.\end{aligned}$$

Para obter o segundo momento tomamos a esperança em (5.9) e, assim

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^2] = 1 + (2\gamma_n - 1)\mathbf{E}[S_n^2]. \quad (5.38)$$

Lembrando que  $\gamma_n = (1 + \frac{\alpha}{n})$ , temos  $(2\gamma_n - 1) = \frac{2(n+\alpha)}{n} - 1$  e, simplificando,  $(2\gamma_n - 1) = (\frac{n+2\alpha}{n})$ , assim

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^2] = 1 + \left(\frac{n+2\alpha}{n}\right) \mathbf{E}[S_n^2]. \quad (5.39)$$

Para obter o valor esperado de  $S_n^2$  utilizamos a relação obtida em (5.39) e, resolvendo recursivamente, segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S_n^2] &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j \left(\frac{n-j+2\alpha}{n-j}\right) + \\ &+ \left(\frac{n-1+2\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+2\alpha}{n-2}\right) \dots \left(\frac{1+2\alpha}{1}\right) \mathbf{E}[S_1^2].\end{aligned} \quad (5.40)$$

Na igualdade (5.40) utilizamos a propriedade multiplicativa da função Gama. Escrevemos  $\frac{k-1+2\alpha}{k-1} = \frac{\Gamma(k+2\alpha)\Gamma(k-1)}{\Gamma(k)\Gamma(k-1+2\alpha)}$  e, lembrando que  $\mathbf{E}[S_1^2] = \mathbf{E}[X_1^2] = 1$  obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S_n^2] &= 1 + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1+2\alpha)} + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n-2+2\alpha)} + \dots + \\ &+ \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)}.\end{aligned} \quad (5.41)$$

Em seguida, multiplicamos (5.41) por  $\Gamma(2\alpha+1)/\Gamma(2\alpha+1)$  e colocando  $\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)}$  em evidência

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S_n^2] &= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)} \left[ \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(n-1+2\alpha)} + \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(n-1+2\alpha)} + \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(n-2)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(n-2+2\alpha)} + \dots + \frac{\Gamma(1+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(1+2\alpha+1)} + 1 + 1 \right].\end{aligned} \quad (5.42)$$

Observe que, se  $k = 0$ , então temos  $\Gamma(1)\Gamma(2\alpha+1)/\Gamma(2\alpha+1) = 1$ , assim podemos reescrever a igualdade (5.42) da seguinte forma

$$\mathbf{E}[S_n^2] = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(k+2\alpha+1)} \right). \quad (5.43)$$

Definindo  $j = k + 1$ , temos que para  $j = 0$  então  $\frac{\Gamma(1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} = 1$ , o que nos permite escrever (5.43) da seguinte forma

$$\mathbf{E}[S_n^2] = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(j)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(j+2\alpha)}. \quad (5.44)$$

Simplificando, obtemos  $\mathbf{E}[S_n^2] = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+2\alpha)}$ , e utilizando o Lema da soma de razão de funções Gama dado no Teorema A.2 com  $a = 0$  e  $b = 2\alpha$  temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n^2] &= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)} \left[ \frac{\Gamma(n+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+2\alpha)} \left( \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{n}{2\alpha-1} \left( \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)} - 1 \right), \end{aligned} \quad (5.45)$$

obtendo  $L_n^2 = \frac{a_n^2 S_n^2}{(\Gamma(2p))^2}$  e lembrando que  $a_n^2 = \frac{\Gamma(n)^2 \Gamma(2p)^2}{\Gamma(n+2p-1)^2}$  segue que

$$\mathbf{E}[S^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(2\alpha-1)} \left( \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 \left( \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)} - 1 \right). \quad (5.46)$$

Lembrando que  $\Gamma(n)/\Gamma(n+\alpha) \sim n^{-\alpha}$  e  $\Gamma(n+2\alpha)/\Gamma(n+1) \sim n^{2\alpha-1}$  para  $n \gg 1$ , e que  $\alpha = 2p - 1$ , a identidade (5.46) para  $n$  grande é

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(2(2p-1)-1)} \frac{1}{n^{2(2p-1)}} \left( \frac{n^{2(2p-1)-1}}{\Gamma(2(2p-1))} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(4p-3)\Gamma(2(2p-1))} - \frac{1}{(4p-3)n^{4p-1}}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Como  $p \in (3/4, 1)$  segue  $4p - 1 > 0$ , e logo  $1/n^{4p-1}$  tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$  e, portanto,

$$\mathbf{E}[S^2] = \frac{1}{(4p-3)\Gamma(2(2p-1))},$$

o que prova *ii*).

Para obter o terceiro momento toma-se a esperança de (5.13) e lembrando que  $\gamma_n = \frac{n+\alpha}{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{n+1}^3] &= \left( 3 \frac{n+\alpha}{n} - 2 \right) \mathbf{E}[S_n^3] + \left( \frac{n+\alpha}{n} + 2 \right) \mathbf{E}[S_n] \\ &= \left( \frac{n+3\alpha}{n} \right) \mathbf{E}[S_n^3] + \left( \frac{3n+\alpha}{n} \right) \mathbf{E}[S_n]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Como  $\mathbf{E}[S_n] = \beta/a_n$ , para  $n \geq 1$ , é possível resolver recursivamente obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n^3] &= \left( \frac{3(n-1)+\alpha}{n-1} \right) \frac{\beta}{a_{n-1}} + \left( \frac{n-1+3\alpha}{n-1} \right) \left( \frac{3(n-2)+\alpha}{n-2} \right) \frac{\beta}{a_{n-2}} + \\ &+ \left( \frac{n-1+3\alpha}{n-1} \right) \left( \frac{n-2+3\alpha}{n-2} \right) \left( \frac{3(n-3)+\alpha}{n-3} \right) \frac{\beta}{a_{n-3}} + \dots + \\ &+ \prod_{i=2}^{n-1} \left( \frac{i+3\alpha}{i} \right) \left( \frac{3+\alpha}{1} \right) \frac{\beta}{a_1} + \prod_{i=1}^{n-1} \left( \frac{i+3\alpha}{i} \right) \mathbf{E}[S_1^3]. \end{aligned} \quad (5.49)$$



Como  $\mathbf{E}[S_1^3] = \mathbf{E}[X_1^3] = \mathbf{E}[X_1] = 2q - 1 = \beta$  e  $a_k = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p)}$ , para  $k = 1, \dots, n-1$ , segue da propriedade multiplicativa de funções Gama que

$\prod_{i=2}^{n-1} \left(\frac{i+3\alpha}{i}\right) \frac{\Gamma(k+3\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+3\alpha)}$ , para  $k = 1, \dots, n-1$ . Substituindo em (5.49)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n^3] &= (3(n-1) + \alpha) \frac{\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(n-1+\alpha)}{\Gamma(n-1+3\alpha)} \beta + \dots + \\ &+ (3 + \alpha) \frac{\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(3\alpha+1)} \beta + \frac{\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(3\alpha+1)} \beta. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Colocando  $\frac{\Gamma(n+3\alpha)\beta}{\Gamma(n)\Gamma(3\alpha)}$  em evidência na soma em (5.50) do qual segue que a expressão fica  $1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k + \alpha) \frac{k+\alpha\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(k+3\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} = 1 + \frac{3\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{\alpha}{3}\right) \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+3\alpha+1)}$ . Somando e subtraindo  $2\alpha/3$  temos a seguinte relação  $1 + 3 \frac{\Gamma(3\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+\alpha)\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+3\alpha+1)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+3\alpha+1)} \right)$ . Lembrando da relação multiplicativa da função Gama temos que  $(k+\alpha)\Gamma(k+\alpha) = \Gamma(k+\alpha+1)$  e utilizando o Lema A.2 em  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+\alpha)\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+3\alpha+1)}$  e  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+3\alpha+1)}$  segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n^3] &= \frac{\Gamma(n+3\alpha)\beta}{\Gamma(n)\Gamma(3\alpha+1)} \left[ 1 + \right. \\ &+ 3 \frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \left( \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+3\alpha)} \left( \frac{\Gamma(n+3\alpha)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} - 1 \right) + \right. \\ &\left. \left. - \frac{2\alpha}{3} \left( \frac{\Gamma(n+3\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(3\alpha+1)} - 1 \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

simplificando a expressão entre colchetes em (5.51) temos

$$\mathbf{E}[S_n^3] = \frac{\beta\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(3\alpha+1)} \left[ \frac{3(\alpha+1)}{2\alpha-1} - \frac{3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(2\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+3\alpha)} + \frac{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+3\alpha)} \right]$$

colocando  $-\frac{3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(2\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+3\alpha)}$  e  $\frac{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+3\alpha)}$  sobre o mesmo denominador, e lembrando que  $\Gamma(n+\alpha+1) = (n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)$ , em seguida colocamos  $\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)$  em evidência no numerador, assim obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n^3] &= \frac{\beta\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(3\alpha+1)} \left[ \frac{3(\alpha+1)}{2\alpha-1} + \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(3\alpha+1)(-3(n-\alpha)+2\alpha-1)}{(2\alpha-1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+3\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

simplificando  $(-3(n-\alpha)+2\alpha-1) = -(3n+\alpha+1)$ , distribuindo  $\Gamma(n+3\alpha)/\Gamma(3\alpha+1)$  e colocando  $1/(2\alpha-1)$  em evidência na expressão entre colchetes em (5.52) segue que

$$\mathbf{E}[S_n^3] = \frac{\beta}{(2\alpha-1)\Gamma(n)} \left( 3(\alpha+1) \frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(3\alpha+1)} - (3n+\alpha+1) \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right). \quad (5.53)$$

Do Teorema 11 temos que  $\mathbf{E}[L_n]$  converge para  $\mathbf{E}[S]$  em  $L^4$ . Logo, temos que  $\mathbf{E}[L_n^3] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[L_n^3]$  e assim basta obter o valor do terceiro momento de  $L_n$ . Como  $L_n = M_n/\Gamma(2p)$  e

lembrando que  $2p = \alpha + 1$  e que  $M_n = a_n S_n$ , segue que

$$\mathbf{E}[L_n^3] = \frac{a_n^3}{(\Gamma(\alpha + 1))^3} \mathbf{E}[S_n^3], \quad (5.54)$$

substituindo em (5.54) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[L_n^3] &= \frac{\left(\frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^3}{(\Gamma(\alpha+1))^3} \frac{\beta}{(2\alpha-1)\Gamma(n)} \left(3(\alpha+1)\frac{\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(3\alpha+1)} - (3n+\alpha+1)\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ &= \frac{\beta(\Gamma(n))^2}{(2\alpha-1)(\Gamma(n+\alpha))^3} \left(\frac{3(\alpha+1)\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(3\alpha+1)} + \right. \\ &\quad \left. - \left(3n+\alpha+1\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\alpha+1}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.55)$$

e simplificando (5.55) segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[L_n^3] &= \frac{\beta}{(2\alpha-1)} \frac{3(\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)} \left(\frac{n+3\alpha}{n+\alpha}\right)^2 \frac{\Gamma(n+3\alpha)}{n+\alpha} + \\ &\quad - \frac{\beta}{(2\alpha-1)} \left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^2 \frac{(3n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Avaliando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  em (5.56) temos que  $\left(\frac{\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^2 \sim n^{-2\alpha}$  e  $\frac{\Gamma(n+3\alpha)}{n+\alpha} \sim n^{2\alpha}$ . Portanto,  $\frac{\beta}{(2\alpha-1)} \frac{3(\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)} \left(\frac{\Gamma(n+3\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^2 \frac{\Gamma(n+3\alpha)}{n+\alpha} \rightarrow \frac{\beta}{(2\alpha-1)} \frac{3(\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}$ . Por outro lado, na segunda parcela do lado direito de (5.56) temos  $\left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^2 \sim n^{-2\alpha}$  e, lembrando que  $\alpha = 2p - 1$ , com  $3/4 < p < 1$  temos  $\alpha > 1$ . Logo, para  $n \gg 1$  temos que  $n^{2\alpha} \gg n$  e, portanto,  $\frac{\beta}{(2\alpha-1)} \left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^2 \frac{(3n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Desta forma temos que

$$\mathbf{E}[S^3] = \frac{\beta}{(2\alpha-1)} \frac{3(\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}.$$

Lembrando que  $\beta = 2q - 1$ ,  $\alpha = 2p - 1$  e simplificando  $\Gamma(3\alpha + 1) = 3\alpha\Gamma(3\alpha)$ , obtemos

$$\mathbf{E}[S^3] = \frac{(2q-1)2p}{(2p-1)(4p-3)\Gamma(3(2p-1))},$$

o que prova *iii*).

Para determinar o quarto momento partimos de  $S_{n+1}^4 = (S_n + X_{n+1})^4$ . Assim

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^4] = 1 + 2 \left(\frac{3n+2\alpha}{n}\right) \mathbf{E}[S_n^2] + \left(\frac{(n-1)+4\alpha}{n-1}\right) \mathbf{E}[S_{n-1}^4] \quad (5.57)$$

do qual segue

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^4] = 1 + 2 \left(\frac{3(n-1)+2\alpha}{n-1}\right) \mathbf{E}[S_{n-1}^2] + \left(\frac{n+4\alpha}{n}\right) \mathbf{E}[S_n^4] \quad \text{para } n \geq 2 \quad (5.58)$$

é possível resolver recursivamente substituindo  $\mathbf{E}[S_n^4]$  pela sua respectiva relação. Assim obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_{n+1}^4] &= 1 + \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) + \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+4\alpha}{n-2}\right) + \\
&+ \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+4\alpha}{n-2}\right) \dots \left(\frac{1+4\alpha}{1}\right) + 2 \left(\frac{3(n-1)+2\alpha}{n-1}\right) \mathbf{E}[S_{n-1}^2] + \\
&+ 2 \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{3(n-2)+2\alpha}{n-2}\right) \mathbf{E}[S_{n-2}^2] + \\
&+ 2 \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+4\alpha}{n-2}\right) \left(\frac{3(n-3)+2\alpha}{n-3}\right) \mathbf{E}[S_{n-3}^2] + \\
&+ 2 \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+4\alpha}{n-2}\right) \dots \left(\frac{2+4\alpha}{2}\right) \left(\frac{3+2\alpha}{1}\right) \mathbf{E}[S_1^2] + \\
&+ \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+4\alpha}{n-2}\right) \dots \left(\frac{1+4\alpha}{1}\right) \mathbf{E}[S_1^4] \tag{5.59}
\end{aligned}$$

e como  $\mathbf{E}[S_j^2] = \frac{j}{2\alpha-1} \left( \frac{\Gamma(j+2\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(2\alpha)} - 1 \right)$ , para  $j = 2, \dots, n-1$ , então  $\mathbf{E}[S_1^2] = \mathbf{E}[S_1^4] = 1$ . Substituindo em (5.59) temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_{n+1}^4] &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^j \left(\frac{n-i+4\alpha}{n-i}\right) + \\
&+ 2 \left(\frac{3(n-1)+2\alpha}{n-1}\right) \frac{n-1}{2\alpha-1} \left(\frac{\Gamma(n-1+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha)} - 1\right) + \\
&+ 2 \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{3(n-2)+2\alpha}{n-2}\right) \frac{n-2}{2\alpha-1} \left(\frac{\Gamma(n-2+2\alpha)}{\Gamma(n-1)\Gamma(2\alpha)} - 1\right) + \\
&+ 2 \prod_{i=1}^2 \left(\frac{n-i+4\alpha}{n-i}\right) \left(\frac{3(n-3)+2\alpha}{n-3}\right) \frac{n-3}{2\alpha-1} \left(\frac{\Gamma(n-3+2\alpha)}{\Gamma(n-2)\Gamma(2\alpha)} - 1\right) + \\
&+ \dots + 2 \prod_{i=1}^{n-2} \left(\frac{n-i+4\alpha}{n-i}\right) \left(\frac{3+2\alpha}{1}\right) + 2 \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{n-i+4\alpha}{n-i}\right). \tag{5.60}
\end{aligned}$$

Escrevendo  $\left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \dots \left(\frac{k+4\alpha}{k}\right) \frac{\Gamma(k+4\alpha)\Gamma(k)}{\Gamma(k)\Gamma(k+4\alpha)} = \frac{\Gamma(n+4\alpha)\Gamma(k)}{\Gamma(n)\Gamma(k+4\alpha)}$  e  $3k+2\alpha = 3\left(k + \frac{2}{3}\alpha\right)$  em

(5.60) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_n^4] &= 1 + \frac{\Gamma(n+4\alpha)}{\Gamma(n)} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+4\alpha)} + \frac{6}{2\alpha-1} \left(n-1 + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(n-1+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha)} + \\
&+ \frac{6}{2\alpha-1} \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(n-2 + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(n-2+2\alpha)}{\Gamma(n-1)\Gamma(2\alpha)} + \\
&+ \frac{6}{2\alpha-1} \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+4\alpha}{n-2}\right) \left(n-3 + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(n-3+2\alpha)}{\Gamma(n-2)\Gamma(2\alpha)} + \\
&+ \dots + \frac{6}{2\alpha-1} \prod_{i=3}^{n-1} \left(\frac{i+4\alpha}{i}\right) \left(2 + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(2+2\alpha)}{\Gamma(3)\Gamma(2\alpha)} + \\
&+ \frac{6}{2\alpha-1} \prod_{i=2}^{n-1} \left(\frac{i+4\alpha}{i}\right) \left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(2)\Gamma(2\alpha)} + \\
&- \frac{6}{2\alpha-1} \left(n-1 + \frac{2}{3}\alpha\right) - \frac{6}{2\alpha-1} \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(n-2 + \frac{2}{3}\alpha\right) + \\
&- \frac{6}{2\alpha-1} \left(\frac{n-1+4\alpha}{n-1}\right) \left(\frac{n-2+4\alpha}{n-2}\right) \left(n-3 + \frac{2}{3}\alpha\right) + \dots + \\
&- \frac{6}{2\alpha-1} \prod_{i=3}^{n-1} \left(\frac{i+4\alpha}{i}\right) \left(2 + \frac{2}{3}\alpha\right) - \frac{6}{2\alpha-1} \prod_{i=2}^{n-1} \left(\frac{i+4\alpha}{i}\right) \left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right) + \\
&+ \frac{\Gamma(n+4\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(4\alpha+1)}. \tag{5.61}
\end{aligned}$$

Colocando  $\frac{\Gamma(n+4\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(4\alpha+1)}$  em evidência e escrevendo  $\frac{\Gamma(4\alpha-1)}{(2\alpha-1)\Gamma(2\alpha)}$  na expressão resultante, assim obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_n^4] &= \frac{\Gamma(n+4\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(4\alpha+1)} \left[ 1 + \frac{\Gamma(4\alpha+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(2\alpha)} \left[ (2\alpha-1)\Gamma(2\alpha) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+4\alpha+1)} + \right. \right. \\
&+ 6 \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(k+2\alpha)}{\Gamma(k+4\alpha+1)} + \\
&\left. \left. - 6\Gamma(2\alpha) \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+4\alpha+1)} \right] \right]. \tag{5.62}
\end{aligned}$$

Note que podemos utilizar o Lema A.2 em  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+4\alpha+1)}$  diretamente com  $a = 1$  e  $b = 4\alpha + 1$ . Para a segunda somatória primeiro fazemos  $\sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(k+2\alpha)}{\Gamma(k+4\alpha+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+2\alpha+1)}{\Gamma(k+4\alpha+1)} - \frac{4}{3}\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+2\alpha)}{\Gamma(k+4\alpha+1)}$  e, então aplicamos o Lema A.2 nos dois somatórios. No último fazemos  $\sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{2}{3}\alpha\right) \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+4\alpha+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+4\alpha+1)} + \left(\frac{2}{3}\alpha - 1\right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+4\alpha+1)}$  e aplicamos o Lema

A.2 nos somatórios. Assim a igualdade em (5.62) após aplicação destes resultados nos dá

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n^4] &= \frac{\Gamma(n+4\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(4\alpha+1)} \left[ 1 + \frac{\Gamma(4\alpha+1)}{(2\alpha)\Gamma(2\alpha)} \left( \frac{\Gamma(n+4\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(4\alpha+1)} - 1 \right) + \right. \\ &\quad + 6 \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+4\alpha)} \left( \frac{\Gamma(n+4\alpha)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} - 1 \right) + \\ &\quad - 6 \frac{4\alpha\Gamma(n+2\alpha)}{6\Gamma(n+4\alpha)} \left( \frac{\Gamma(n+4\alpha)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha)\Gamma(4\alpha+1)} - 1 \right) + \\ &\quad - 6 \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(n+2)}{(4\alpha-2)\Gamma(n+4\alpha)} \left( \frac{\Gamma(n+4\alpha)\Gamma(3)}{\Gamma(n+2)\Gamma(4\alpha+1)} - 1 \right) + \\ &\quad \left. - 6\Gamma(2\alpha) \left( \frac{2}{3}\alpha - 1 \right) \left( \frac{\Gamma(n+4\alpha)\Gamma(3)}{\Gamma(n+1)\Gamma(4\alpha+1)} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Após algumas manipulações algébricas em (5.63) obtemos a seguinte relação para o quarto momento de  $S_n$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n^4] &= \frac{\Gamma(n+4\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(4\alpha+1)} \left[ \frac{24\alpha(2\alpha(\alpha+1)-1)}{(2\alpha-1)^2(4\alpha-1)} - \frac{\Gamma(4\alpha+1)}{(2\alpha-1)^2} \left( \frac{2(3n+2(\alpha+1))\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \frac{1}{\Gamma(n+4\alpha)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3n(4\alpha-1)+2(2\alpha^2+1)}{(4\alpha-1)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+4\alpha)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Finalmente temos do Teorema 11 que  $\mathbf{E}[S^4] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[L_n^4]$ , mas lembrando que  $L_n = \frac{a_n S_n}{\Gamma(2p)}$ , temos a seguinte relação  $\mathbf{E}[S^4] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4}{\Gamma(\alpha+1)} \mathbf{E}[S_n^4]$ . Substituindo  $\mathbf{E}[S_n^4]$  pela expressão obtida em (5.64) e lembrando que  $a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}$  temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S^4] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^4 \frac{\Gamma(n+4\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(4\alpha+1)} \left[ \frac{24\alpha(2\alpha(\alpha+1)-1)}{(2\alpha^2-1)(4\alpha-1)} + \right. \\ &\quad - \frac{\Gamma(4\alpha+1)}{(2\alpha-1)^2} \left( \frac{2(3n+2(\alpha+1))\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \frac{1}{\Gamma(n+4\alpha)} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(4\alpha-1)(-3n)+2(2\alpha^2+1)}{4\alpha-1} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+4\alpha)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Então para  $n \gg 1$  podemos simplificar a expressão em (5.65) utilizando a fórmula de Stirling (veja (FELLER, 1971) p 52) obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S^4] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{4\alpha}} \frac{n^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} \left[ \frac{24\alpha(2\alpha(\alpha+1)-1)}{(2\alpha^2-1)(4\alpha-1)} - \frac{\Gamma(4\alpha+1)}{(2\alpha-1)^2} \left( \frac{2(3n+2(\alpha+1))}{\Gamma(2\alpha)} \frac{1}{n^{2\alpha}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(4\alpha-1)(-3n)+2(2\alpha^2+1)}{4\alpha-1} n^{1-4\alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Como  $p \in (3/4, 1)$  temos que  $\alpha = 2p - 1 > 1$  e logo,  $n^{1-4\alpha} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto

$$\mathbf{E}[S^4] = \frac{24\alpha(2\alpha(\alpha+1)-1)}{(2\alpha^2-1)(4\alpha-1)}. \quad (5.67)$$

Utilizando a propriedade da função Gama em  $\Gamma(4\alpha + 1) = 4\alpha\Gamma(4\alpha)$ , substituindo  $\alpha$  por  $2p - 1$  e simplificando em (5.67) temos

$$\mathbf{E}[S^4] = \frac{6(8p^2 - 4p - 1)}{(8p - 5)(4p - 3)^3\Gamma(4(2p - 1))},$$

o que prova *iv*).

□

---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

### 6.1 Conclusão

Neste trabalho buscamos modelar o fenômeno de difusão de moléculas de um soluto em um solvente por meio de um processo estocástico não Markoviano com memória de alcance ilimitado. O passeio aleatório do elefante apresenta transição de fase do comportamento difusivo, quando  $p < 3/4$ , para o comportamento superdifusivo, quando  $p \geq 3/4$ . Este fenômeno presente no modelo altera seu comportamento assintótico. Quando  $p \leq 3/4$ , demonstramos, utilizando alguns resultados de teoria de martingais em tempo discreto, que o passeio aleatório do elefante satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números, o Teorema Central do Limite e as Leis do Logaritmo Iterado e Forte Quadrática. Quando  $p > 3/4$  demonstramos que o passeio aleatório do elefante converge para uma variável aleatória não Gaussiana e obtemos os quatro primeiros momentos da variável limite.

A ideia de utilizar martingais para obter teoremas limites para processos com dependência não é inédita na literatura. Em (COLETTI; GAVA; SCHUTZ, 2017a), utiliza-se martingais para obter o Teorema Central do Limite e a Lei Forte dos Grande Números para o passeio aleatório do elefante. Em (COLETTI; GAVA; SCHUTZ, 2017b) utiliza-se novamente a abordagem de martingais para obter o limite de escala do passeio aleatório do elefante.

Em nosso trabalho exploramos a abordagem de martingais apresentada por (BERCU, 2018). A construção de um martingal que é função direta do passeio aleatório do elefante,  $S_n$ , possibilitou a utilização de muitos resultados de martingais presentes em (BROWN, 1971), (BERCU, 2004), (DUFLO, 1997), (HALL; HEYDE, 1980) e (WILLIAMS, 1991) na análise assintótica de  $S_n$ . Desta forma, pudemos estabelecer os resultados análogos para o passeio aleatório do elefante utilizando a Proposição 6.7 em (JAMES, 1996) e, assim, compreender como o efeito de memória afeta o comportamento limite do passeio aleatório do elefante.





## REFERÊNCIAS

---



---

BAILEY, W. **Generalized Hipergeometric Series**. New York-London: Cambridge University Press, 1964. Citado na página 92.

BAUR, E.; BERTOIN, J. Elephant random walks and their connection to pólia-type urns. **Physical Review E**, p. 16, 2016. Citado nas páginas 11, 13 e 20.

BERCU, B. On the convergence of moments in the almost sure central limit theorem for martingales with statistical applications. **Stochastic Processes and their Applications**, p. 157–173, 2004. Citado nas páginas 68, 69, 71, 75, 76 e 85.

\_\_\_\_\_. A martingale approach for the elephant random walk. **Journal of Physics A: Mathematical Theory**, v. 51, 2018. Citado nas páginas 11, 13, 20, 21, 59 e 85.

BILLIGSLEY, P. **Probability and Measure**. New York: Wiley-Blackwell, 1995. Citado nas páginas 23, 27, 28, 33, 35 e 45.

BROWN, B. M. Martingale central limit theorems. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 42, p. 59–66, 1971. Citado nas páginas 47 e 85.

COLETTI, C.; GAVA, R.; SCHUTZ, G. Central limit theorem and related results for the elephant random walk. **Journal of Mathematical Physics**, v. 58, 2017. Citado nas páginas 20 e 85.

\_\_\_\_\_. A strong invariance principle for the elephant random walk. **Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment**, v. 2017, 2017. Citado nas páginas 11, 13, 20 e 85.

CRANK, J. **The Mathematics of Diffusion**. Oxford: Clarendon Press, 1975. Citado na página 52.

DOOB, J. L. **Stochastic Process**. New York: Wiley-Blackwell, 1990. Citado na página 45.

DUFLO, M. **Random Iterative Models**. Berlin: Springer-Verlag, 1997. Citado nas páginas 20, 46, 47 e 85.

EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Providence: American Mathematical Society, 2010. Citado na página 52.

FELLER, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**. New York: John Wiley, 1971. Citado nas páginas 41, 44, 55, 66 e 83.

GHEZ, R. **Diffusion Phenomena**. New York: Springer, 2001. Citado nas páginas 50 e 52.

\_\_\_\_\_. **A Primer of Diffusion Problem**. New York: John Wiley, 2005. Citado nas páginas 19, 50 e 51.

GIBBS, J. **Elementary Principles in Statistical Mechanics**. New York: Charles Scribner Sons., 1902. Citado na página 19.

- GRIMMETT, G.; STIRZAKER, D. **Probability and Random Processes**. Oxford: Oxford University Press, 2001. Citado nas páginas 44 e 52.
- HALL, P.; HEYDE, C. **Martingale Limit Theory and Its Application**. New York-London: Academic Press, 1980. Citado nas páginas 46, 47 e 85.
- ITô, K.; MCKEAN, H. P. J. **Diffusion Processes and their Sample Paths (Classics in Mathematics)**. Berlin: Springer, 1996. Citado na página 52.
- JAMES, B. **Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário**. Rio de Janeiro: IMPA, 1996. Citado nas páginas 23, 31, 39, 51, 66, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75 e 85.
- JANSON, S. Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized pólya urns. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 110, p. 177–245, 2004. Citado na página 20.
- LEBEDEV, N. **Special Functions and Their Applications**. New Jersey: Prentice-Hall, 1965. Citado nas páginas 91 e 92.
- LIMA, E. L. **Algebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2000. Citado na página 40.
- NORRIS, J. **Markov Chains**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. Citado na página 44.
- PEKALSKI, A.; SZNAJD-WERON, K. **Anomalous Diffusion from Basics to Applications**. Berlin: Springer, 1999. Citado nas páginas 19 e 52.
- ROGERS, L. C. G.; WILLIAMS, D. **Diffusions, Markov Processes and Martingales**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Citado na página 52.
- ROYDEN, H. **Real Analysis**. Boston: Prentice-Hall, 2010. Citado nas páginas 27, 28, 31, 35, 40 e 45.
- SCHUTZ, G.; TRIMPER, S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. **Physical Review E**, v. 70, p. 045101, 2004. Citado nas páginas 11, 13, 19, 49, 53 e 54.
- STOUT, W. F. **Almost Sure Convergence**. New York-London: Academic Press, 1974. Citado nas páginas 69, 70 e 71.
- TAYLOR, J. **An Introduction to Measure and Probability**. New York: Springer-Verlag, 1997. Citado nas páginas 23, 28, 36, 37 e 39.
- TAYLOR, S. J. **Introduction to Measure and Integration**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. Citado na página 28.
- VESTRUP, E. M. **The Theory of Measures and Integration**. New Jersey: Wiley Interscience, 2004. Citado nas páginas 28 e 40.
- VLADOS, L.; ISLIKER, H.; KOMINIS, Y.; HIZANIDIS, K. Normal and anomalous diffusion: A tutorial. **Order and Chaos**, v. 10, 2008. Citado na página 19.
- WILLIAMS, D. **Probability with Martingales**. New York: Cambridge University Press, 1991. Citado nas páginas 33, 34, 35, 39, 40, 45, 46, 72, 74 e 85.

# FUNÇÕES ESPECIAIS

## A.1 Análise assintótica de funções

Nesta seção apresentamos conceitos associados à análise e aproximação assintótica de função. A terminologia utilizada neste caso faz uso de notações peculiares apresentadas nas Definições 21 e 22.

**Definição 20.** (“o” pequeno). Diremos que uma função  $f(x)$  é  $o(h)$ , e denotaremos por  $f(x) = o(h)$ , se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

**Definição 21.** (“O” Grande). Diremos que uma função  $f(n)$  é  $O(g(n))$ , e denotaremos por  $f(n) = O(g(n))$ , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

**Exemplo 2.** Considere  $f(n) = kn$ , para alguma constante  $k$ , e  $g(n) = n$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} kn/n = \lim_{n \rightarrow \infty} k = k$ , portanto  $kn = O(n)$ .

**Definição 22.** Diremos que uma função  $f(n)$  é “da ordem de”  $g(n)$ , e denotaremos por  $f(n) \sim g(n)$ , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

**Exemplo 3.** Considere  $f(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$  e  $g(n) = n^2/2$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ , portanto  $\sum_{i=1}^n i \sim n^2/2$ .

## A.2 Função Gama

Nesta seção vamos apresentar um importante Lema para a soma de razões de funções Gama.

**Lema 1.** Para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ , com  $b \neq a + 1$  e, para todo  $n \geq 1$ , nós temos

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{\Gamma(n+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(n+b)} \left( \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)\Gamma(b)} - 1 \right) \quad (\text{A.1})$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar por indução. A igualdade é direta para  $n = 1$ , provemos inicialmente para  $n = 2$ . Assim

$$\frac{\Gamma(2+a)}{\Gamma(2+b)} + \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1+b)} = \frac{\Gamma(2+a) + (1+b)\Gamma(1+a)}{\Gamma(2+b)} \quad (\text{A.2})$$

multiplique o lado direito de (A.2) por  $(2+a)/(2+a)$  e  $(b-a-1)/(b-a-1)$ , em seguida aplique a propriedade multiplicativa da função Gama em  $(2+a)\Gamma(2+a) = \Gamma(2+a+1)$ , assim a expressão à direita em (A.2) fica

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2+a+1)(b-a-1) + (b-a-1)(2+a)(1+b)\Gamma(1+a)}{(2+a)(b-a-1)\Gamma(2+b)} = \\ & = \frac{\Gamma(2+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(2+b)} \left[ \frac{b-a-1}{2+a} + \frac{(b-a-1)(2+a)(1+b)\Gamma(1+a)}{\Gamma(2+a+1)(2+a)} \right] \\ & = \frac{\Gamma(2+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(2+b)} \left[ \frac{\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)}{\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)} \left( \frac{b-a-1}{2+a} \frac{\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(b-a-1)(1+b)\Gamma(b)}{\Gamma(2+b)} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

escreva a primeira fração na expressão do lado direito de (A.3) da seguinte forma  $b-a-1 = (b+1) - (2+a)$  e, simplificando obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(2+b)} \left[ \frac{\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)}{\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)} \left( \frac{(1+b)\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)}{(2+a)\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(2+a)\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)}{(2+a)\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)} + \frac{(b-a-1)(1+b)\Gamma(b)}{\Gamma(2+b)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

escreva  $\Gamma(2+a+1) = (2+a)(1+a)\Gamma(1+a)$  e após uma simplificação em (A.4) temos

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(2+b)} \left[ \frac{\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)}{\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)} \left( \frac{(1+b)(1+a)\Gamma(b) + (b-(1+a))(1+b)\Gamma(b)}{\Gamma(2+b)} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)} \right) \right] \\ & = \frac{\Gamma(2+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(2+b)} \left[ \frac{\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)}{\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)} \left( \frac{b-(1+a)+1+a}{b} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

simplificando (A.5) obtemos

$$\frac{\Gamma(2+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(2+b)} \left[ \frac{\Gamma(2+b)\Gamma(1+a)}{\Gamma(2+a+1)\Gamma(b)} - 1 \right].$$

Agora suponhamos que a igualdade (A.2) vale para  $n > 2$  e, então provemos para  $n+1$ . Primeiramente partimos de

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{\Gamma(n+1+a)}{\Gamma(n+1+b)} + \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)}, \quad (\text{A.6})$$

aplicamos a hipótese de indução em  $\sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)}$ . Assim a expressão à direita em (A.6) fica

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(n+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(n+b)} \left( \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)\Gamma(b)} - 1 \right) + \frac{\Gamma(n+1+a)}{\Gamma(n+1+b)} = \\ &= \frac{(n+b)\Gamma(n+1+a+1)}{(n+a+1)(b-a-1)\Gamma(n+1+b)} \left[ \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)\Gamma(b)} - 1 \right] + \frac{\Gamma(n+1+a)}{\Gamma(n+1+b)} \\ &= \frac{\Gamma(n+1+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(n+1+b)} \left[ \left( \frac{n+b}{n+a+1} \right) \left( \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)\Gamma(b)} - 1 \right) + \frac{b-a-1}{n+1+a} \right] \\ &= \frac{\Gamma(n+1+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(n+1+b)} \left[ \frac{\Gamma(n+1+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+1+a+1)\Gamma(b)} + \frac{b-a-1-n-b}{n+1+a} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

simplificando a expressão entre colchetes em (A.7) temos

$$\frac{\Gamma(n+1+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(n+1+b)} \left[ \frac{\Gamma(n+1+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+1+a+1)\Gamma(b)} - 1 \right]$$

□

Para mais resultados sobre a função Gama recomendamos ao leitor interessado consultar o Capítulo 1 de (LEBEDEV, 1965).

### A.3 Função Hipergeométrica Generalizada

Nesta seção introduzimos o conceito de função Hipergeométrica generalizada. Nosso objetivo será estender o conceito da Função Hipergeométrica de Gauss. Primeiramente vamos apresentar a definição da função hipergeométrica de Gauss.

**Definição 23.** A função hipergeométrica é definida como

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k \text{ para } |z| < 1 \text{ e } c \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (\text{A.8})$$

em que  $(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1)$ , se  $k \geq 1$  e  $(\lambda)_0 = 1$ . Nesta definição, 2 denota o número de parâmetros do numerador e 1 o número de parâmetro do denominador.

Com a definição da função hipergeométrica de Gauss em mãos podemos agora estender esse conceito para valores arbitrários  $q$  e  $p$  do numerador e denominador.

**Definição 24.** A função hipergeométrica generalizada é definida como

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_p; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_q)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_p)_k k!} z^k \quad (\text{A.9})$$

para  $|z| < 1$  e  $b_i \in \{1, 2, \dots\}$  para  $i = 1, \dots, p$ . Novamente o símbolo de Pochmater  $(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1)$ , se  $k \geq 1$  e  $(\lambda)_0 = 1$ .

A questão, que segue diretamente da Definição 24, é para quais valores de  $z$  a série apresentada em (A.9) converge. O raio de convergência da série depende da razão entre os valores  $p$  e  $q$  de (BAILEY, 1964) ou do Capítulo 9 de (LEBEDEV, 1965) temos

$$\rho = \begin{cases} \infty, & \text{se } p < q + 1 \\ 1, & \text{se } p = q + 1 \\ 0, & \text{se } p > q + 1. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Para o caso  $p = q + 1$  temos que  $|z| = 1$  é um caso especial. A série hipergeométrica  ${}_{q+1}F_q(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_p; z)$  com  $|z| = 1$  converge, quando  $\sum_i b_i - \sum_j a_j > 0$ . A série é condicionalmente convergente se  $-1 < \sum_i b_i - \sum_j a_j < 0$  e divergente se  $\sum_i b_i - \sum_j a_j \leq 0$ .

Para mais resultados e exemplos sobre função hipergeométrica generalizada recomendamos ao leitor interessado consultar (BAILEY, 1964) ou do Capítulo 9 de (LEBEDEV, 1965).

---

## COMANDOS PARA GERAR FIGURAS

---

### A.1 Comandos no pacote R

```
##### FIGURAS #####
#####
##### GRAFICO DA PROBABILIDADE
omega <- seq(1,6,1)
prob <- c(1/10,2/10,2/10,3/10,1/10,1/10)
plot(omega, prob, type = "p", ylabel = "Probabilidade",
xlabel = "omega", ylim = c(0,0.5))

#####
##### CONVERGENCIA EM PROBABILIDADE
freq <- rbinom(100,1,1/6)
n <- seq(1,100, by=1)
prop <- cumsum(freq)/n

plot(n,prop, type = "b", ylab = "F(n)", ylim = 0:1)
abline(h=1/6, col="red" )

#####
##### Convergencia quase certa
matrizAmostra <- matrix(rep(NA, 10000), 1000,10)
matrizProp <- matrix(rep(NA, 10000), 1000,10)
n <- seq(1,1000, by=1)
```

```

for(j in 1:10){
  matrizAmostra[,j] <- rbinom(1000,1,1/6)
  #p      <- rep(NA, 1000)
  matrizProp[,j] <- cumsum(matrizAmostra[,j])/n
}

plot(n,matrizProp[,1], type = "l", ylab = "F(n)", ylim = 0:1.1)
abline(h=1/6, col="red" )
for(j in 2:10){
  lines(n,matrizProp[,j], col = j)
}
text(o,y= 1/6, labels = "1/6", cex = 0.8)

```

```
##### MOVIMENTO DE UMA PARTICULA
```

```

require(latex2exp)
x <- seq(-3,3,by=1)
y <- rep(0, length(x))

plot(x,y,axis = F, frame.plot = F, dty = "n", yaxt = "n",
xaxt = "n", ylim = c(0,0.1),
ylab = " ", xlab = "Posição no instante t")

axis(1, at=-3:3,labels = c(TeX('$-3\\Delta x$'),
TeX('$-2\\Delta x$'),TeX('$-\\Delta x$'),TeX('$0$'),
TeX('$\\Delta x$'),TeX('$2\\Delta x$'),TeX('$3\\Delta x$')) )

#abline(v=0, col ="red")
arrows(0,0,-0.5,0)
arrows(0,0,0.5,0)

text(0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)
text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

points(0,0, pch = 19, cex = 1.5)

```

```
#####
##### MOVIMENTO DE N PARTICULAS
```



```

x <- seq(-10,10,by=1)
y <- rep(0, length(x))

##### INSTANTE T=0
plot(x,y,axis = F, frame.plot = F, dty = "n", yaxt = "n", xaxt = "n",
      ylim = c(0,2.5), ylab = " ", xlab = "Posição no instante t")

axis(1, at=-10:10,labels = c(TeX('$-10\\Delta x$'),TeX('$-9\\Delta x$'),
TeX('$-8\\Delta x$'),TeX('$-7\\Delta x$'),TeX('$-6\\Delta x$'),TeX('$-5\\Delta x$')
TeX('$-4\\Delta x$'),TeX('$-3\\Delta x$'),TeX('$-2\\Delta x$'),TeX('$-\\Delta x$'),
      TeX('$0$'),
      TeX('$\\Delta x$'),TeX('$2\\Delta x$'),TeX('$3\\Delta x$')
      TeX('$4\\Delta x$'),TeX('$5\\Delta x$'),TeX('$6\\Delta x$')
      TeX('$7\\Delta x$'),TeX('$8\\Delta x$'),TeX('$9\\Delta x$')
      TeX('$10\\Delta x$')) )

#abline(v=0, col = "red")
arrows(0,0,-0.5,0)
arrows(0,0,0.5,0)

text(0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)
text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

points(0,0.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,0.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,0.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,0.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,0.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,1.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,1.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,1.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,1.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,1.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,2.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(0,2.2, pch = 19, cex = 1.5)

part1 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))

```

```

part2 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part3 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part4 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part5 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part6 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part7 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part8 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part9 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part10 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part11 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))
part12 <- cumsum(sample(c(-1,1), 30, replace = T))

#####
##### INSTANTE T=2
plot(x,y,axis = F, frame.plot = F, dtv = "n", yaxt = "n", xaxt = "n",
     ylim = c(0,2.5), ylab = " ", xlab = "Posição no instante t")

axis(1, at=-10:10,labels = c(TeX('$-10\\Delta x$'),TeX('$-9\\Delta x$'),
TeX('$-8\\Delta x$'),TeX('$-7\\Delta x$'),TeX('$-6\\Delta x$'),
TeX('$-5\\Delta x$'),TeX('$-4\\Delta x$'),TeX('$-3\\Delta x$'),
TeX('$-2\\Delta x$'),TeX('$-\\Delta x$'),
     TeX('$0$'),
     TeX('$\\Delta x$'),TeX('$2\\Delta x$'),
     TeX('$3\\Delta x$'),TeX('$4\\Delta x$'),
     TeX('$5\\Delta x$'),
     TeX('$6\\Delta x$'),TeX('$7\\Delta x$'),
     TeX('$8\\Delta x$'),
     TeX('$9\\Delta x$'),TeX('$10\\Delta x$')) )

#abline(v=0, col ="red")
#arrows(0,0,-0.5,0)
#arrows(0,0,0.5,0)
#text(0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)
#text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

points(part1[2],0.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(part2[2],0.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(part3[2],0.4, pch = 19, cex = 1.5)

```

```

points(part4[2],0.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(part5[2],0.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(part6[2],1.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(part7[2],1.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(part8[2],1.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(part9[2],1.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(part10[2],1.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(part12[2],2.0, pch = 19, cex = 1.5)

#####
##### INSTANTE T=2
plot(x,y,axis = F, frame.plot = F, dty = "n", yaxt = "n", xaxt = "n",
      ylim = c(0,3.0), ylab = " ", xlab = "Posição no instante t")

axis(1, at=-10:10,labels = c(TeX('$-10\\Delta x$'),TeX('$-9\\Delta x$'),
TeX('$-8\\Delta x$'),TeX('$-7\\Delta x$'),TeX('$-6\\Delta x$'),
TeX('$-5\\Delta x$'),TeX('$-4\\Delta x$'),TeX('$-3\\Delta x$'),
TeX('$-2\\Delta x$'),TeX('$-\\Delta x$'),
      TeX('$0$'),
      TeX('$\\Delta x$'),TeX('$2\\Delta x$'),
      TeX('$3\\Delta x$'),TeX('$4\\Delta x$'),
      TeX('$5\\Delta x$'),TeX('$6\\Delta x$'),
      TeX('$7\\Delta x$'),TeX('$8\\Delta x$'),
      TeX('$9\\Delta x$'),TeX('$10\\Delta x$')) )

#abline(v=0, col = "red")
#arrows(0,0,-0.5,0)
#arrows(0,0,0.5,0)
#text(0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)
#text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

points(part1[11],0.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(part2[11],0.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(part3[11],0.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(part4[11],0.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(part5[11],0.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(part6[11],1.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(part7[11],1.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(part8[11],1.4, pch = 19, cex = 1.5)

```

```

points(part9[11],1.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(part10[11],1.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(part12[11],2.0, pch = 19, cex = 1.5)

arrows(0,2.2,-5,2.2)
arrows(0,2.2,1,2.2)

text(-2,y= 2.8, labels = "Amplitude = Constante*tempo", cex = 0.8)
text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

#####
##### RELALIZAÇÃO DO PAS
ganho  <- sample(c(-1,1), 7, replace = T)
fortuna <- cumsum(ganho)

plot(fortuna, type="b",xlab = "Jogadas", xlim = c(0,9), ylim = c(-9,9))
abline(h=0)
points(8,-4,type = "b", col="red")
points(8,-2,type = "b", col="blue")
points(0,0,type = "b")

lines(7:8,-c(3:4), col = "red")
lines(7:8,-c(3:2), col = "blue")
lines(0:1,c(0:1))

text(7.5,y= -1.5, labels = "1/2", cex = 0.8)
text(7.5,y= -4.5, labels = "1/2", cex = 0.8)

#####
##### REALIZACAO DE PAE PARA DIFERENTES VALORES DE P E Q=1/2
##### REGIME SUBCRITICO
paesub  <- c(sample(c(-1,1), 1, replace = T),rep(NA, 99))
passo    <- c(paesub[1],rep(NA, 99))

for(i in 1:99){
  nl <- sample(seq(1,i,by=1),1)

```

```

x <- passo[n1]
u <- runif(1,0,1)
if(u <= 0.65){
  paesub[i+1] <- paesub[i]+x
  passo[i+1] <- x
}else{
  paesub[i+1] <- paesub[i]-x
  passo[i+1] <- -x
}
}
#####
##### INSTANTE T=2 REGIME SUBCRITICO
x <- seq(-10,10,by=1)
y <- rep(0, length(x))

plot(x,y,axis = F, frame.plot = F, dty = "n", yaxt = "n", xaxt = "n",
      ylim = c(0,3.0), ylab = " ", xlab = "Posição no instante t",
      main = "Movimento da particula quando p=0.65")

axis(1, at=-10:10,labels = -10:10)
#abline(v=0, col = "red")
#arrows(0,0,-0.5,0)
#arrows(0,0,0.5,0)
#text(0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)
#text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

points(paesub[1],0.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[2],0.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[3],0.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[4],0.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[5],0.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[6],1.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[7],1.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[8],1.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[9],1.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[10],1.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[11],2.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesub[12],2.0, pch = 19, cex = 1.5)

```

```

arrows(0,2.2,-5,2.2)
arrows(0,2.2,1,2.2)

text(-2,y= 2.8, labels = "Amplitude = Constante*tempo", cex = 0.8)
text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

#####
##### REGIME CRITICO
paecrit  <- c(sample(c(-1,1), 1, replace = T),rep(NA, 99))
passo    <- c(paecrit[1],rep(NA, 99))

for(i in 1:99){
  nl <- sample(seq(1,i,by=1),1)
  x  <- passo[nl]
  u  <- runif(1,0,1)
  if(u <= 0.75){
    paecrit[i+1] <- paesub[i]+x
    passo[i+1] <- x
  }else{
    paecrit[i+1] <- paesub[i]-x
    passo[i+1] <- -x
  }
}

#####
##### INSTANTE T=2 REGIME CRITICO
x <- seq(-10,10,by=1)
y <- rep(0, length(x))

plot(x,y,axis = F, frame.plot = F, dtv = "n", yaxt = "n", xaxt = "n",
      ylim = c(0,3.0), ylab = " ", xlab = "Posição no instante t",
      main = "Movimento da partícula quando p=0.75")

axis(1, at=-10:10,labels = -10:10)
#abline(v=0, col ="red")

```

```

#arrows(0,0,-0.5,0)
#arrows(0,0,0.5,0)
#text(0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)
#text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

points(paecrit[1],0.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[2],0.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[3],0.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[4],0.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[5],0.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[6],1.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[7],1.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[8],1.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[9],1.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[10],1.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[11],2.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paecrit[12],2.2, pch = 19, cex = 1.5)

arrows(0,2.2,-5,2.2)
arrows(0,2.2,1,2.2)

text(-2,y= 2.8, labels = "Amplitude = Constante*tempo", cex = 0.8)
text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

#####
##### REGIME SUPERCRITICO
paesuper <- c(sample(c(-1,1), 1, replace = T),rep(NA, 99))
passo <- c(paesuper[1],rep(NA, 99))

for(i in 1:99){
  nl <- sample(seq(1,i,by=1),1)
  x <- passo[nl]
  u <- runif(1,0,1)
  if(u <= 0.85){
    paesuper[i+1] <- paesub[i]+x
    passo[i+1] <- x
  }
}

```

```

}else{
  paesuper[i+1] <- paesub[i]-x
  passo[i+1] <- -x
}
}

#####
##### INSTANTE T=2 REGIME SUPERCRITICO
x <- seq(-10,10,by=1)
y <- rep(0, length(x))

plot(x,y,axis = F, frame.plot = F, dty = "n", yaxt = "n", xaxt = "n",
      ylim = c(0,3.0), ylab = " ", xlab = "Posição no instante t",
      main = "Movimento da partícula quando p=0.85")

axis(1, at=-10:10,labels = -10:10)
#abline(v=0, col ="red")
#arrows(0,0,-0.5,0)
#arrows(0,0,0.5,0)
#text(0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)
#text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)

points(paesuper[1],0.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[2],0.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[3],0.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[4],0.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[5],0.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[6],1.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[7],1.2, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[8],1.4, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[9],1.6, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[10],1.8, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[11],2.0, pch = 19, cex = 1.5)
points(paesuper[12],2.2, pch = 19, cex = 1.5)

arrows(0,2.2,-5,2.2)

```



```
arrows(0,2.2,1,2.2)
```

```
text(-2,y= 2.8, labels = "Amplitude = Constante*tempo", cex = 0.8)
```

```
text(-0.5,y= 0.02, labels = "1/2", cex = 0.8)
```

