Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades
Programa de Pós-Graduação em Modelagem de
Sistemas Complexos

Rolf Ezequiel de Oliveira Simões

**Autômatos celulares e o problema da classificação de
densidade: o modelo *Gács-Kurdyumov-Levin* de
quatro estados**

São Paulo
2016

Rolf Ezequiel de Oliveira Simões

**Autômatos celulares e o problema da classificação de
densidade: o modelo *Gács-Kurdyumov-Levin* de
quatro estados**

Versão corrigida

Dissertação apresentada à Escola de Artes,
Ciências e Humanidades da Universidade de
São Paulo para obtenção de título de Mestre
em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação
em Modelagem de Sistemas Complexos.

Área de concentração: Fundamentos de Siste-
mas Complexos

Orientador: Prof. José Ricardo Gonçalves de
Mendonça

São Paulo

2016

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO

(Universidade de São Paulo. Escola de Artes, Ciências e Humanidades. Biblioteca)

Simões, Rolf Ezequiel de Oliveira

Autômatos celulares e o problema da classificação de densidade : o modelo Gács-Kurdyumov-Levin de quatro estados / Rolf Ezequiel de Oliveira Simões ; orientador, José Ricardo Gonçalves de Mendonça. – São Paulo, 2016.

78 f. : il

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos, Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo. Versão corrigida.

1. Autômatos celulares. 2. Sistemas dinâmicos. I. Mendonça, José Ricardo Gonçalves de, orient. II. Título

CDD 22.ed.— 519.23

Rolf Ezequiel de Oliveira Simões

**Autômatos celulares e o problema da classificação de densidade:
o modelo *Gács-Kurdyumov-Levin* de quatro estados**

Dissertação apresentada à Escola de Artes,
Ciências e Humanidades da Universidade de
São Paulo para obtenção de título de Mestre
em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação
em Modelagem de Sistemas Complexos.

Área de concentração: Fundamentos de Siste-
mas Complexos

Aprovado em 30 de agosto de 2016.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mário José de Oliveira
Instituto de Física - Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Masayuki Oka Hase
Escola de Artes Ciências e Humanidades - Universidade de São Paulo

Prof. Dr. José Ricardo Gonçalves de Mendonça (Presidente)
Escola de Artes Ciências e Humanidades - Universidade de São Paulo

Agradecimentos

Esta pesquisa não poderia ter sido realizada sem a ajuda de muitas pessoas: professores, familiares e colegas que me apoiaram de várias formas. Seria impossível mencionar aqui todas elas. Mas, como em qualquer trabalho, existem aquelas pessoas que foram imprescindíveis, seja de um ponto de vista mais técnico, seja de um ponto de vista mais emocional. Assim, não poderia deixar de agradecer primeiramente ao meu orientador, Prof. J. Ricardo Mendonça, que me deu todas as bases teóricas e metodológicas para que esta pesquisa se realizasse. Agradeço aos meus familiares, particularmente à minha esposa e à minha mãe que me deram todo tipo de apoio para que eu pudesse me dedicar a esta pesquisa. Aos meus amigos Angélica Santana, Sandro Sousa, Moshe Cotacallapa, Mikael Peric e Paulo França que me deram muita alegria e motivação ao longo de todo o processo. Por fim, gostaria de agradecer aos meus filhos pela compreensão de minha ausência; é neles que encontro toda a minha motivação de continuar em frente.

R.S.

Quanto mais eu vivo [...] menos eu acredito na eficiência das iluminações súbitas que não são acompanhadas ou apoiadas por um trabalho sério; menos eu acredito na eficiência da conversão, do extraordinário [...] das paixões súbitas [...]

Quanto mais eu vivo, menos eu acredito na eficiência de uma extraordinária revolução social súbita, improvisada, maravilhosa, com ou sem armas [...]

[Quanto mais eu vivo,] mais eu acredito na eficiência do trabalho modesto, lento, molecular, definitivo.

Charles Péguy

Resumo

SIMÕES, Rolf E. O. **Autômatos celulares e o problema da classificação de densidade: o modelo Gács-Kurdyumov-Levin de quatro estados**. 2016. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. Versão corrigida.

No estudo de sistemas complexos interessa capturar a evolução do seu comportamento emergente segundo um conjunto de regras cujas soluções descrevem o seu estado ao longo do tempo. Uma classe particular de modelos matemáticos e computacionais que permite realizar essa investigação são os autômatos celulares. O comportamento global deles é definido apenas por regras locais, o que os tornam um modelo exemplar para estudos de sistemas complexos. Estamos interessados em um tipo especial de autômato celular: os classificadores de densidade unidimensionais. Este tipo de autômato celular está relacionado com o problema da maioria que consiste em fazer convergir uma cadeia de símbolos aleatoriamente distribuídos em um reticulado, para uma cadeia homogênea com um único símbolo final (consenso global), aquele de maioria inicial. Este consenso deve ser obtido exclusivamente a partir de interações locais entre os sítios sem a instância de um controle central. Nesta pesquisa, realizamos alguns experimentos para caracterizar um autômato celular classificador de quatro estados proposto em Gács, Kurdyumov e Levin (1978). Embora seja um classificador imperfeito, este autômato celular é significativamente tolerante a falhas quando o submetemos a níveis de ruídos não nulos. Os resultados corroboram com outros estudos que investigam a robustez deste tipo de autômato celular e lançam luz sobre o entendimento da origem da coordenação global de sistemas que exibem as características aqui descritas.

Palavras-chave: Autômatos celulares. Classificação de densidade. *Gács-Kurdyumov-Levin*. Sistemas complexos.

Abstract

SIMÕES, Rolf E. O. **Cellular automata and the density classification task: the four-states *Gács-Kurdyumov-Levin* model**. 2016. 78 f. Dissertation (Master degree). Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. Reviewed version.

In the study of complex systems we are interested in capturing their evolution of its emergent behavior under a set of rules whose solutions describe the state of the system over time. A particular class of mathematical and computational model to perform this kind of research is the cellular automaton (CA). Its global behavior is defined by local rules, which makes it an exemplary model to study complex systems. Here, we are interested in a particular type of CA: one-dimensional CA that classifies densities. This kind of CA is related to the problem of the majority task that consists of converging an array of symbols, initially randomly distributed, to a single symbol, the more frequent one in the initial configuration of the array (global consensus). This consensus must be obtained solely out of local interactions, without the instance of a central control. In this research, we conducted some experiments to characterize a four-state CA classifier proposed in Gács, Kurdyumov e Levin (1978). While it is an imperfect classifier, this CA is significantly fault tolerant when submitted to the levels of non-zero noise. Our results corroborate other studies that had investigated the robustness of this type of CA, and shed light on the understanding of the origin of global coordinated systems that exhibit the characteristics described here.

Keywords: Cellular automata. Density classification task. *Gács-Kurdyumov-Levin*. Complex systems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Desempenho da classificação de densidade de GKL4	29
Figura 2 – Desempenho da classificação de densidade de GKL4 com relação ao estado 2	30
Figura 3 – Dinâmica de propagação do tipo $(\dots \mathbf{1\Lambda 0} \dots)$	35
Figura 4 – Dinâmica de propagação do tipo $(\dots \mathbf{0\Lambda 0} \dots)$ e $(\dots \mathbf{1\Lambda 1} \dots)$	36
Figura 5 – Dinâmica de propagação do tipo $(\dots \mathbf{0\Lambda 1} \dots)$	37
Figura 6 – Taxas de recuperação de GKL4	40
Figura 7 – Fluxos de probabilidade de estados de GKL4 segundo suas regras de transição de estado.	42
Figura 8 – Evolução das taxas de recuperação dos estados de GKL4 segundo as equações de recorrência obtidas por aproximação de campo médio.	44
Figura 9 – Probabilidades dos estados-densidade	47
Figura 10 – Exemplos de diagramas espaço-temporais de um autômato celular de tamanho $L = 400$	48
Figura 11 – Diferentes esquemas de vizinhança para autômatos celulares de dimensões $d = 2$ e $d = 2$	58
Figura 12 – Diagrama de espaço-tempo do autômato celular SQR4 $k = 4$ e $r = 1$ de tamanho $L = 331$	69

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Autômatos Celulares	10
1.2	A Tarefa de Classificação de Densidades	10
1.3	Questões de pesquisa e Objetivos	11
2	AUTÔMATOS CELULARES	13
2.1	Aspectos gerais	13
2.2	Regras de transição determinísticas e probabilísticas	14
2.3	Introdução de ruído em autômatos celulares	15
2.4	Aproximação por campo médio em autômatos celulares	16
3	A TAREFA DA CLASSIFICAÇÃO DE DENSIDADES	19
3.1	Definição clássica	19
3.2	Outras definições	20
3.2.1	Tarefa de classificação de densidade sem o critério de convergência	21
3.2.2	Heterogeneidade temporal da regra de transição	21
3.2.3	Classificador binário com estados auxiliares	22
3.3	A eficiência na tarefa de classificação	23
3.4	Tarefa de classificação para autômatos celulares sujeitos a ruído	24
4	O MODELO <i>GÁCS-KURDYUMOV-LEVIN</i> DE QUATRO ESTADOS	26
4.1	Regra de transição ϕ_{GKL4}	26
4.2	Desempenho de classificação de densidade	28
4.3	Mecânica computacional	31
4.3.1	Notação para as regras de composição (RC)	31
4.3.2	RC de propagação/aniquilação de GKL4	33
4.3.3	Mecânica computacional de GKL4	33
4.4	Robustez contra perturbações do estado estacionário	38
4.4.1	Taxas instantâneas de recuperação	39
4.4.2	Aproximação por campo médio	41
4.5	Resistência a ruídos	43
4.5.1	A densidade como medida do estado do sistema	43
4.5.2	As probabilidades das densidades do sistema submetido a ruído	45
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	50

REFERÊNCIAS	52
APÊNDICES	55
APÊNDICE A – SISTEMAS DINÂMICOS E AUTÔMATOS CELULARES	56
APÊNDICE B – NORMA E RAIOS DE VIZINHANÇA	58
APÊNDICE C – NOÇÕES GERAIS DE PROBABILIDADE	59
APÊNDICE D – PROCESSO MARKOVIANO A TEMPO DIS- CRETO	64
APÊNDICE E – REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA DE RE- GRAS DE TRANSIÇÃO	66
APÊNDICE F – PROPOSIÇÃO DE AUTÔMATOS CELU- LARES CLASSIFICADORES DE DENSIDADE	68
APÊNDICE G – CÁLCULOS PARA APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO SIMPLES DE GKL4 SEM RÚIDO.	71

1 Introdução

Muitos sistemas físicos, biológicos, econômicos e sociais exibem propriedades coletivas decorrentes da combinação de múltiplos elementos cujos acoplamentos podem ser diversos. Essas propriedades coletivas ou emergentes de alguns sistemas não são trivialmente previstas a partir das características de seus elementos. Chamamos esse tipo de sistema de *sistema complexo*. No seu estudo, interessa capturar a evolução do comportamento emergente segundo um conjunto de regras cujas soluções descrevem o estado do sistema ao longo do tempo. Uma classe particular de modelos matemáticos e computacionais que permite realizar essa investigação são os autômatos celulares.

1.1 Autômatos Celulares

Podemos visualizar um autômato celular como um modelo computacional, sem uma unidade central de processamento. Seu comportamento global é definido por regras locais bem definidas, o que o torna um modelo exemplar para estudos de sistemas complexos. Os autômatos celulares têm origem na década de 1940 com os estudos de von Neumann e Burks (1966) sobre a auto-reprodução de sistemas biológicos. Nesse trabalho, os autores propõem um autômato celular definido em duas dimensões e 29 estados capaz de replicar-se. A partir das décadas de 1970 e 1980, podemos observar a aplicação de autômatos celulares na investigação de fenômenos em sociologia (SCHELLING, 1969; SCHELLING, 1971) e mecânica estatística (WOLFRAM, 1983) (para uma revisão histórica abrangente veja Sarkar (2000)).

Do ponto de vista de aplicação, os autômatos celulares, juntamente com outros sistemas dinâmicos, formam um arcabouço de técnicas de modelagem e são muito utilizados em pesquisas sobre sistemas complexos que podem ser definidos em termos de estado, espaço e tempo discretos (veja o Apêndice A). De um ponto de vista teórico, os autômatos celulares são estudados particularmente na teoria da computação (KARI, 2005) e na mecânica estatística (TOMÉ; OLIVEIRA, 2014). Esta pesquisa possui uma motivação teórica e se insere na interseção dessas duas áreas, fazendo uso tanto de aspectos computacionais como de sistemas dinâmicos para a investigação de um tipo especial de autômato celular: os *classificadores de densidade*.

1.2 A Tarefa de Classificação de Densidades

O problema da classificação de densidades consiste, em sua definição clássica (DE OLIVEIRA, 2014), em fazer convergir uma cadeia de estados aleatoriamente distribuídos

de um autômato celular de tamanho finito para uma configuração de único estado, aquele em maior número ou densidade na configuração inicial, unicamente por meio de uma regra de transição localmente definida.

Parte do interesse nos autômatos celulares classificadores de densidade se dá pelo fato de encontrarmos na natureza muitos sistemas que compartilham de algumas de suas características, tais como ausência de controle central, e múltiplos agentes (MITCHELL; CRUTCHFIELD; HRABER, 1994; MITCHELL; HRABER; CRUTCHFIELD, 1993; DE OLIVEIRA; BORTOT; OLIVEIRA, 2006; ANDRE; BENNETT III; KOZA, 1996). Por ter uma computação massivamente descentralizada e ser um sistema relativamente simples, os autômatos celulares classificadores de densidade são muito empregados em pesquisas como modelo de fenômeno global que emerge de interações locais (MOREIRA et al., 2004; BANDINI; MAURI; SERRA, 2001).

As investigações sobre os autômatos celulares classificadores de densidade são diversas, mas, de forma resumida, elas têm se concentrado basicamente nos temas sobre a eficiência da classificação, a variabilidade de arquiteturas baseadas em autômatos celulares que permitem resolver o problema e a robustez a ruídos. Nesta pesquisa, abordamos esses temas.

1.3 Questões de pesquisa e Objetivos

Os autômatos celulares classificadores de densidade têm sido objeto de um extenso número de pesquisas ao longo das últimas duas décadas (GÁCS; KURDYUMOV; LEVIN, 1978; GUTOWITZ; VICTOR; KNIGHT, 1987; SÁ; MAES, 1992; MITCHELL; HRABER; CRUTCHFIELD, 1993; CRUTCHFIELD; MITCHELL, 1995; CAPCARRÈRE; SIPPER; TOMASSINI, 1996; MENDONÇA, 2011; DE OLIVEIRA, 2014). O primeiro trabalho que se tem conhecimento a tratar especificamente do problema da classificação de densidades foi Packard (1988). No entanto, os primeiros autômatos celulares classificadores de densidade conhecidos foram propostos por Gács, Kurdyumov e Levin (1978), embora o problema da maioria não tenha sido o objeto de sua pesquisa. Nele, foi investigada a hipótese da ergodicidade de autômatos celulares probabilísticos unidimensionais, na qual todo autômato celular probabilístico unidimensional com probabilidades de transição positivas são ergódicos. Os autores propõem três autômatos celulares que realizam a tarefa da classificação, o primeiro com dois estados, o segundo com quatro e o terceiro com seis estados (denominados aqui por GKL2, GKL4 e GKL6, respectivamente), que convergem para um estado absorvente em um tempo proporcional ao tamanho L do autômato celular.

Desses três modelos apenas o GKL2 foi objeto de investigação de um vasto número de pesquisas. Neste trabalho, estamos interessados no estudo sistemático do GKL4. Por ser um sistema que exibe um comportamento não trivial, muitas propriedades de GKL4 ainda

são desconhecidas. GKL4 é um autômato celular classificador binário, ou seja, é capaz de classificar dois estados, mas possui quatro no total, sendo os outros dois auxiliares. Seu raio de vizinhança é unitário e, ao contrário dos autômatos celulares classificadores de densidade de dois estados, tais como o GKL2, sua regra de transição é composta por 64 entradas e sua lógica subjacente de computação é de fácil compreensão.

As questões de pesquisa que nortearam as investigações aqui realizadas foram: Quais mecanismos estão por trás das regras de transição de GKL4? Qual a sua eficiência de classificação? Como a introdução de ruído interfere na capacidade de classificação de densidade de GKL4?

Nesse sentido, nosso objetivo foi o de realizar alguns experimentos para caracterizar o autômato celular classificador de densidades GKL4. Como veremos ao longo de nossa exposição, alguns desses experimentos priorizaram a captura de características determinísticas do comportamento do autômato celular sem ruído enquanto outros essencialmente procuraram fornecer uma caracterização do sistema visto como um processo *markoviano* submetido a níveis de ruído não nulo.

Tendo em vista nosso objetivo, organizamos a exposição do texto da seguinte forma: primeiro, definimos autômatos celulares e os principais conceitos envolvidos. Em segundo, realizamos uma breve revisão sobre a tarefa de classificação de densidades para, em terceiro, descrevemos o modelo GKL4 e apresentamos os experimentos e discutimos os seus resultados. Por fim, realizamos as considerações finais.

2 Autômatos celulares

Os autômatos celulares são sistemas dinâmicos com estados discretos e finitos, espacialmente dispostos em sítios localmente acoplados a vizinhos formando um reticulado geralmente finito e sob condição periódica de contorno e que evoluem no tempo, também discreto, segundo uma função de transição local aplicada a cada um dos sítios de forma independente e simultânea, que altera o estado de cada sítio com base nos estados de sua respectiva vizinhança. Quando a regra de transição está associada a uma probabilidade para que ela ocorra dizemos que o autômato celular é *probabilístico*, caso contrário, dizemos que o autômato celular é *determinístico*. Nesta pesquisa, examinamos GKL4 sob ambos pontos de vista. Os tópicos deste capítulo estão assim organizados: primeiramente, discorreremos sobre os aspectos gerais da teoria dos autômatos celulares, em seguida tratamos das regras de transição determinísticas e probabilísticas para, então, discorreremos sobre a introdução de ruídos no sistema. Por fim, discorreremos sobre campo médio em autômatos celulares.

2.1 Aspectos gerais

Seja $\mathbb{Z}_L$ o espaço dos inteiros módulo L . Dizemos que um autômato celular satisfaz a condição periódica de contorno (periodicidade espacial) quando os sítios do seu reticulado estão definidos sobre o conjunto $\mathbb{Z}_L$ para algum $L \geq 1$ e finito. Denotamos os estados $s \in S$ dos sítios $l \in \{0, \dots, L-1\}$ em um dado tempo t por ω_l^t . Aqui, S é conjunto finito dos $k \geq 2$ estados possíveis de um autômato celular. Os autômatos celulares de interesse desta pesquisa possuem reticulado unidimensional finito com periodicidade espacial. Nesse caso, dizemos que $\forall l, \omega_l = \omega_{l+iL}$, com $i \in \mathbb{Z}$, o que é o mesmo que dizer que os sítios estão definidos num espaço $\mathbb{Z}_L$. De forma geral, os elementos do conjunto S podem ser representados por quaisquer símbolos. Como veremos adiante, é útil convencionar uma ordem lexicográfica para esses símbolos. Aqui, usaremos os símbolos s_0, s_1 para denotar estados genéricos de S , e os símbolos $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots$ para representar os estados do sistema.

Uma das características dos autômatos celulares é a regularidade espacial dos acoplamentos que se realizam localmente em cada um dos sítios com seus vizinhos mais próximos, tanto para a direita quanto para a esquerda, segundo um raio de vizinhança $r \geq 1$. Denotamos a vizinhança de um sítio l no tempo t por

$$\eta_l^t = \left(\omega_{l-r}^t, \omega_{l-r+1}^t, \dots, \omega_{l-1}^t, \omega_l^t, \omega_{l+1}^t, \dots, \omega_{l+r-1}^t, \omega_{l+r}^t \right), \quad (2.1)$$

isto é, pelos estados, no tempo t , dos sítios cuja distância seja inferior ou igual a r (para uma maior explicação sobre a definição de distância entre dois sítios veja o Apêndice B). Em um reticulado unidimensional, o total de vizinhos de um sítio l é dado por $|\eta_l^t| = 2r + 1$

e independe de l e de t . Uma vez definido sobre um reticulado com condição periódica de contorno, os acoplamentos de vizinhança formam um anel.

Denominamos por *configuração* o estado global de um autômato celular, isto é, um elemento do conjunto ordenado S^L cujos componentes são os estados dos sítios do reticulado. A partir de uma configuração inicial, a dinâmica dos autômatos celulares consiste na transição de estado de cada sítio segundo uma regra previamente estipulada. Essa regra leva em consideração a vizinhança η_i^{t-1} de um sítio para efetuar a transição no tempo t . Veremos essa dinâmica com maiores detalhes no tópico seguinte.

2.2 Regras de transição determinísticas e probabilísticas

As diferenças entre um autômato celular determinístico e um autômato celular probabilístico se dão pelo modo como definimos a sua regra de transição. Seja $\phi : S^{|\eta|} \mapsto S$ o mapa que denota a regra de transição determinística de um autômato celular. O domínio $\mathcal{D}(\phi)$ da função ϕ consiste no conjunto ordenado de todos os estados possíveis de uma vizinhança η e o seu tamanho pode ser obtido por $|\mathcal{D}(\phi)| = k^{|\eta|}$, onde k representa a quantidade de estados em S . É possível determinar a quantidade total de mapas distintos por $k^{|\mathcal{D}(\phi)|}$, onde cada mapa pode ser representado por uma tabela de $|\mathcal{D}(\phi)|$ entradas do tipo $\eta \mapsto s$. Dizemos que um estado s é absorvente quando a regra de transição satisfaz as condições $\phi(s, \dots, s) = s$. Quando os sítios são atualizados de forma simultânea e independente, dizemos que a regra de transição é *síncrona*. Assim, temos

$$\omega_i^t = \phi(\eta_i^{t-1}). \quad (2.2)$$

Definimos o estado global (ou a *configuração*) de um autômato celular no tempo t como

$$\Omega^t = (\omega_0^t, \omega_1^t, \dots, \omega_{L-1}^t) \in S^L \quad (2.3)$$

e, desse modo, podemos denotar uma função de transição global $\Phi : S^L \mapsto S^L$, tal que $\Omega^t = \Phi(\Omega^{t-1})$, que representa a transição da configuração do autômato celular no tempo t . De forma geral, usamos a notação Ω^t para indicar que o mapa global foi iterado t vezes a partir da configuração inicial, isto é,

$$\Omega^t = \Phi^t(\Omega^0). \quad (2.4)$$

Podemos dizer que uma configuração é temporalmente periódica se $\exists \Omega' \in S^L \mid \Omega' = \Phi^{\Delta t}(\Omega')$, com $\Delta t > 0$. A função de transição local determina completamente a global, assim, é possível identificar o comportamento de um autômato celular apenas por sua regra de transição local.

Podemos obter um autômato celular probabilístico atribuindo uma probabilidade para que a transição da Eq. (2.2) ocorra, o que significa definir o autômato celular como

um processo *markoviano* em que seus sítios podem ser vistos como variáveis estocásticas (TOMÉ; OLIVEIRA, 2014). Podemos denotar a transição de um autômato celular probabilístico associando uma medida de probabilidade ψ à função ϕ de tal modo que

$$\psi(s \in S | \eta \in S^{|\eta|}) \geq 0 \quad (2.5)$$

é a probabilidade condicional de que transição de estado $\phi(\eta) \mapsto s \in S$ ocorra, onde $\sum_s \psi(s | \eta) = 1$ (Para uma breve revisão de Probabilidade, veja (veja o Apêndice C)). Dessa forma, para os autômatos celulares probabilísticos, todos os sítios são atualizados segundo um *processo markoviano discreto*, em que o estado no tempo t depende apenas do estado do tempo imediatamente anterior do sistema (veja o Apêndice D):

$$\omega_l^t = \phi_\psi(\eta_l^{t-1}). \quad (2.6)$$

Repare que ϕ_ψ é uma regra estocástica cuja distribuição de probabilidades é determinada unicamente por ψ . Daremos uma definição para ϕ_ψ no tópico a seguir, onde abordaremos especificamente os ruídos em autômatos celulares.

2.3 Introdução de ruído em autômatos celulares

Sabemos que uma das características dos autômatos celulares classificadores de densidade imperfeitos é a sua capacidade de tolerar ruídos que possam comprometer a sua função de classificação (MENDONÇA, 2011). É possível encontrar ruídos em sistemas computacionais decorrentes de mau funcionamento de seus componentes ou quando são expostos a ambientes hostis. Os ruídos podem ser introduzidos na dinâmica de autômatos celulares de três formas típicas: por erro de leitura; por erro de transição ou; por erro de omissão. O erro de leitura ocorre quando a dinâmica do autômato celular entende, com uma probabilidade α , que o estado de um sítio é qualquer estado de S escolhido ao acaso. O erro de transição ou de gravação consiste na alteração, com uma probabilidade α , do estado s resultante da regra aplicada a um sítio para qualquer estado de S escolhido ao acaso. O erro de omissão consiste em não realizar a transição de um sítio qualquer com uma probabilidade α . Aqui, o parâmetro α é chamado de nível de ruído.

Nesta pesquisa, adotamos o tipo de erro de transição para a realização dos experimentos com ruído. Para obter as medidas de probabilidade ψ da Eq. (2.5) relativas a esse tipo de ruído, precisamos extrair o componente estocástico da parte determinística da regra de transição ϕ . Assim, seja $s \in S$ o estado para o qual está mapeada uma entrada qualquer η do mapa ϕ . Na dinâmica com erro de transição, o estado do sítio ω_l^t será dado por:

$$\omega_l^t = \phi_\psi(\eta_l^{t-1}) = \begin{cases} s, & \text{com probabilidade } \psi(s | \eta_l^{t-1}) = 1 - \alpha \\ s_\alpha, & \text{com probabilidade } \psi(s_\alpha | \eta_l^{t-1}) = \alpha/k, \quad \forall s_\alpha \in S \end{cases}, \quad (2.7)$$

onde $s_\alpha \in S$ é um estado aleatório e $k = |S|$ é a quantidade de estados possíveis do sistema. É fácil notar que uma regra de transição determinística é um caso particular da regra probabilística expressa na equação acima para probabilidades $\psi \in \{0, 1\}$. Repare que apenas a fração $\frac{k-1}{k}$ do ruído se efetiva em alteração de estado uma vez que $s_\alpha \in S$ pode assumir eventualmente o mesmo valor de s .

Podemos traduzir a transição probabilística definida em (2.7) como a composição de dois operadores, um sendo a própria transição determinística Φ ; e o outro sendo o operador de ruído $\mathcal{R}_\alpha$ definido como a transição de estado de cada sítio do reticulado, com uma probabilidade α , para um estado escolhido aleatoriamente. Assim, a transição de GKL4 será dada por

$$\Omega^t = \mathcal{R}_\alpha \left[\Phi \left(\Omega^{t-1} \right) \right]. \quad (2.8)$$

A introdução de um nível de ruído $\alpha > 0$ em autômatos celulares determinísticos implica transformá-los em autômatos celulares probabilísticos, bastando, para isso, identificar as probabilidades inerentes a cada transição. Nesse caso, interessa investigar a dinâmica da distribuição de probabilidade dos estados na configuração Ω^t . Numericamente, é possível obter a probabilidade calculando a frequência relativa dos estados em simulações. No entanto, se estamos interessados em examinar esses valores de forma analítica, uma técnica de aproximação bastante útil é o *campo médio*, assunto para o qual nos voltamos a seguir.

2.4 Aproximação por campo médio em autômatos celulares

A aproximação por campo médio é uma técnica exploratória que nos permite obter as probabilidades de encontrarmos os estados nas configurações de um autômato celular ao longo do tempo. Aqui, interessa investigar a dinâmica da distribuição de probabilidade $P_t(\Lambda)$ de encontrarmos determinada sequência de estados, de comprimento n , $\Lambda \in S^n$, onde $0 < n \leq L$, no passo t . Podemos obter essa probabilidade a partir da seguinte equação markoviana:

$$P_t(\Lambda) = \sum_{\eta^\Lambda} \Psi \left(\Lambda | \eta^\Lambda \right) P_{t-1} \left(\eta^\Lambda \right), \quad (2.9)$$

onde o somatório ocorre sobre todas as combinações de estados possíveis da sequência estendida $\eta^\Lambda \in S^{n+2r}$ necessária para gerar a sequência Λ no tempo t , ou seja, a sequência de estados no tempo $t-1$ cujo tamanho é o mesmo de Λ acrescentado de r vizinhos para a direita e r para a esquerda. O somatório sobre η^Λ nos garante que todas as pré-imagens serão consideradas. Como a transição do autômato celular é síncrona, $\Psi \left(\Lambda | \eta^\Lambda \right)$ é a probabilidade conjunta das probabilidades condicionais $\psi \left(\Lambda_i | \eta^{\Lambda_i} \right)$ de transição $\eta^{\Lambda_i} \rightarrow \Lambda_i$, onde $\Lambda_i \in S$ é o i -ésimo componente do bloco Λ , η^{Λ_i} é a sua vizinhança correspondente em η^Λ e $i = 0, 1, \dots, n-1$. A forma específica de η^{Λ_i} depende de η (isto é, a vizinhança

do autômato celular). Assim,

$$\Psi(\Lambda | \eta^\Lambda) = \prod_{i=0}^{n-1} \psi(\Lambda_i | \eta^{\Lambda_i}), \quad (2.10)$$

$$\sum_{\Lambda_i} \psi(\Lambda_i | \eta^{\Lambda_i}) = 1, \quad (2.11)$$

que, substituindo na Eq. (2.9), resulta em

$$P_t(\Lambda) = \sum_{\eta^\Lambda} \left[\prod_{i=0}^{n-1} \psi(\Lambda_i | \eta^{\Lambda_i}) \right] P_{t-1}(\eta^\Lambda). \quad (2.12)$$

Note que a probabilidade do termo $P_{t-1}(\eta^\Lambda)$ é desconhecida, e precisa ser calculada pela Eq. (2.9), iterativamente, fazendo o novo valor de Λ como η^Λ . Eventuais simplificações podem ser realizadas considerando as seguintes relações:

$$\sum_{s \in S} P_t(\Lambda s) = \sum_{s \in S} P_t(s \Lambda) = P_t(\Lambda), \quad (2.13)$$

para qualquer bloco de estados Λ .

A Eq. (2.12) é exata, entretanto, sabemos que a aplicação recorrente da regra de transição de um autômato celular gera uma correlação de estados entre sítios próximos, uma vez que o estado de um sítio no período atual depende dos estados de seus vizinhos no período anterior, isto é, essa correlação é tanto menor quanto mais afastados estão dois sítios do autômato celular. A aproximação por campo médio assume a inexistência de correlações entre os sítios para algum nível de proximidade. A aproximação mais simples é aquela que assume a correlação apenas para sítios vizinhos, isto é, que a transição de estados é um evento independente para os sítios fora do raio de vizinhança.

Toda aproximação inicia fazendo Λ uma sequência de tamanho unitário. Da aplicação da Eq. (2.12), obtemos para o termo η^Λ sequências de tamanho $|\eta|$. Note que, neste ponto, o termo $P_{t-1}(\eta^\Lambda)$ é desconhecido e precisa ser determinado. A aproximação simples consiste em truncar $P_{t-1}(\eta^\Lambda)$ em termos mais simples e já conhecidos. Por exemplo, de acordo com a *teoria da estrutura local* (GUTOWITZ; VICTOR; KNIGHT, 1987; BOCCARA, 2010), se assumirmos um autômato celular de raio de vizinhança $r = 1$, essa aproximação se dará por

$$P(\eta^\Lambda = (s_{i_0} s_{i_1} s_{i_2})) \approx \frac{P(s_{i_0} s_{i_1}) P(s_{i_1} s_{i_2})}{P(s_{i_1})}. \quad (2.14)$$

Para aproximação ao nível de dupla, o truncamento de $P_{t-1}(\eta^\Lambda)$ não ocorre e procuramos determiná-lo iterando-o na Eq. (2.12). Se assumirmos o mesmo autômato celular de raio $r = 1$, essa segunda iteração terá sequências η^Λ de tamanho $|\eta| + 2r = 5$. O truncamento de $P_{t-1}(\eta^\Lambda)$ será dado por

$$P(\eta^\Lambda = (s_{i_0} s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} s_{i_4})) \approx \frac{P(s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} s_{i_4}) P(s_{i_0} s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3})}{P(s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3})}. \quad (2.15)$$

Repare que esses truncamentos removem o primeiro e o último elemento de η^Λ . Isto está fundamentado no fato de que a correlação entre sítios distantes pode ser desprezada para um certo nível de aproximação (BOCCARA, 2010; TOMÉ; OLIVEIRA, 2014). Para encontrarmos a distribuição de probabilidade estacionária (se houver) da sequência Λ , uma vez determinado $P_t(\Lambda)$, igualamos $P_t(\Lambda) = P_{t-1}(\Lambda) = P(\Lambda)$ e resolvemos o polinômio resultante.

Usaremos esta técnica para examinarmos o comportamento aproximado de GKL4 em sua tarefa de classificação. A seguir, discorreremos sobre o que é a tarefa de classificação de densidade e como ela é formalmente definida na literatura.

3 A Tarefa da classificação de densidades

A tarefa da classificação de densidades é tradicionalmente definida sobre um alfabeto de dois estados. Um autômato celular cujos sítios partam de uma sequência qualquer desses estados deve convergir para aquele estado de maior frequência inicial em um tempo finito. Embora seja a mais conhecida, esta não é a única forma de definir o problema. A seguir, veremos como a tarefa de classificação de densidade é formalmente definida na literatura e de como essas definições são traduzidas em medidas de eficiência. Em seguida, propomos uma definição formal para a tarefa de classificação de densidades para o caso probabilístico do problema. Por fim, discorremos sobre as medidas de eficiência dos autômatos celulares classificadores.

3.1 Definição clássica

O problema da maioria pode ser descrito com a seguinte analogia: imagine um grupo suficientemente grande de agentes dispostos linearmente, formando um anel, de tal modo que um agente possui um número limitado de vizinhos com os quais pode manter contato. Cada agente assume inicialmente uma dentre duas opiniões possíveis (esse é o voto ou o estado de cada agente). O problema consiste em definir processo ou regra de interação entre os agentes fazendo-os mudar seu voto ou opinião de modo que a opinião ou o voto inicial da maioria torne-se, após um período de tempo finito, um consenso para todos os agentes. Este processo deve ser realizado exclusivamente a partir de interações locais (simultâneas e independentes entre vizinhos) sem a instância de um controle central.

O problema da maioria, tal como esse aqui descrito, é facilmente modelado em autômatos celulares unidimensionais. Embora possa parecer uma tarefa trivial, neste tipo de sistema, o problema da maioria não possui uma solução perfeita (LAND; BELEW, 1995). Essa limitação para a solução do problema tem origem na natureza descentralizada dos autômatos celulares, que processam e propagam informações de uma forma diferente de sistemas computacionais com memória e processamento centrais. A computação necessária para encontrar o estado majoritário é realizada pela cooperação local de sítios que ignoram o estado global do sistema. Esse processo de obtenção de um consenso é espacialmente distribuído e a comunicação entre dois sítios não vizinhos se realiza por intermédio de propagações de informações codificadas na própria distribuição de estados do reticulado. Inevitavelmente, a comunicação entre dois sítios não vizinhos do sistema torna-se *assíncrona* (não confundir com a transição *síncrona* do autômato celular) e esta é a fonte de toda a dificuldade no processo de classificação.

Não existe um autômato celular de dois estados, definido em quaisquer dimensões,

que resolva perfeitamente esse problema de classificação tal como está definido (LAND; BELEW, 1995). Ainda que tentemos generalizar o problema de classificação para n estados (classificadores n -ários) o problema continua sem solução perfeita (CHAU; SIU; YAN, 1999). Embora a prova para autômatos celulares classificadores n -ários tenha sido feita apenas para uma única dimensão, acredita-se que este é o caso para qualquer número de dimensões (DE OLIVEIRA, 2014). No entanto, existem milhares de soluções imperfeitas conhecidas para o problema em autômatos celulares classificadores binários unidimensionais com raio de vizinhança $r = 3$ e quase todas elas foram encontradas por algoritmos com técnicas evolucionárias sofisticadas (WOLZ; DE OLIVEIRA, 2008).

Considere este tipo de autômato celular unidimensional com raio de vizinhança $r = 3$. Mitchell, Crutchfield e Hraber (1994) definem a tarefa de classificação de densidade $\mathbf{T}$ como se segue:

$$\mathbf{T}[L, \tau] := \begin{cases} \Phi^\tau(\Omega^0) = \mathbf{0}^L & \text{se } \rho_{\mathbf{1}}(\Omega^0) < \frac{1}{2} \\ \Phi^\tau(\Omega^0) = \mathbf{1}^L & \text{se } \rho_{\mathbf{1}}(\Omega^0) > \frac{1}{2} \\ \text{indefinido} & \text{se } \rho_{\mathbf{1}}(\Omega^0) = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $\rho_{\mathbf{1}}$ é a densidade de sítios cujo estado é $\mathbf{1}$, $\frac{1}{2}$ é a densidade crítica para o problema da maioria, L é o tamanho do reticulado, τ é o número de passos para que a dinâmica do autômato celular efetue a classificação e Ω^0 é a configuração inicial.

Agora considere ρ_s a densidade do estado $s \in S$. Podemos generalizar esta definição para um autômato celular classificador n -ário na seguinte forma:

$$\mathbf{T}[L, \tau] := \begin{cases} \Phi^\tau(\Omega^0) = s^L & \text{se } \rho_s(\Omega^0) > \max_{k \in S \setminus s} \{\rho_k(\Omega^0)\} \\ \text{indefinido} & \text{se } \rho_s(\Omega^0) = \max_{k \in S \setminus s} \{\rho_k(\Omega^0)\} \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde $S \setminus s$ é o conjunto dos estados possíveis excluído o estado s . O critério de sucesso ou fracasso na classificação de ambas definições é o da convergência dos estados dos sítios para o estado de maior densidade inicial dentro de um tempo máximo limite, cujo valor, geralmente usado na literatura, é $10L$.

3.2 Outras definições

Entretanto, existem outras formas de definição da tarefa de classificação de densidade. Descrevemos aqui três delas: a primeira é a que dispensa o critério da convergência de todos os sítios para um único estado; a segunda é a composição da regra de transição do autômato celular em duas fases temporalmente distintas e em cada uma delas é empregada uma regra de transição distinta; por fim, a última estratégia consiste no emprego de estados auxiliares que não são classificados e que somente participam da mecânica computacional

do autômato celular. Esta última estratégia é a mesma empregada em GKL4 e, portanto, é a de nosso interesse aqui.

3.2.1 Tarefa de classificação de densidade sem o critério de convergência

Se relaxarmos o critério da convergência para um estado único, existem duas soluções perfeitas e simples para o problema da classificação de densidade: os autômatos celulares elementares de regra 184 e sua simétrica 226 (CAPCARRÈRE; SIPPER; TOMASSINI, 1996) (para mais informações sobre a representação numérica de regra de transição, veja o Apêndice E). Dada uma configuração aleatória inicial, o autômato celular fornece o resultado em, no máximo, $\tau \leq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$ passos. Se na configuração inicial $\rho_1 > \frac{1}{2}$, então a configuração final consistirá de dois ou mais sítios adjacentes com estado **1** seguidos por sítios de estados alternados entre **0** e **1**. Se $\rho_1 < \frac{1}{2}$, então a configuração final terá dois ou mais sítios consecutivos com estado **0** que são seguidos por sítios alternados entre **1** e **0**. Finalmente, se $\rho_1 = \frac{1}{2}$ então a configuração final consistirá apenas de estados alternados entre **0** e **1**. A quantidade de **0** ou **1** consecutivos na configuração final é a diferença entre a contagem inicial dos estados. Uma vez alcançado esse padrão, o autômato celular passa a ter uma periodicidade temporal de período L .

Denotando a expressão regular $(s_0 \dots s_k)^n$ para representar as n justaposições da sequência de estados $s_0 \dots s_k$, podemos formalizar a tarefa de classificação realizada por CA184 (ou CA226) como:

$$\mathbf{T} \left[L, \tau \leq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor \right] := \begin{cases} \Phi^\tau(\Omega^0) = (\mathbf{0}^a (\mathbf{10})^b) & \text{se } \rho_1(\Omega^0) < \frac{1}{2} \\ \Phi^\tau(\Omega^0) = (\mathbf{1}^a (\mathbf{10})^b) & \text{se } \rho_1(\Omega^0) > \frac{1}{2}, \\ \Phi^\tau(\Omega^0) = (\mathbf{10})^b & \text{se } \rho_1(\Omega^0) = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (3.3)$$

Em que $a > 0$ e $b \geq 0$ com a e b inteiros. Repare que, ao contrário das definições anteriores, esta definição lida apropriadamente com o caso em que $\rho_1 = \frac{1}{2}$. No entanto, esta definição da tarefa de classificação é questionável uma vez que depende de uma informação global (DE OLIVEIRA, 2013).

3.2.2 Heterogeneidade temporal da regra de transição

A combinação temporal de regras de transição distintas foi uma estratégia encontrada por Fukè (1997) para resolver o problema da classificação de densidade e que produziu um autômato celular classificador perfeito. O classificador proposto é uma combinação de dois autômatos celulares elementares que são ativados em duas fases distintas. Na primeira fase da dinâmica, o autômato celular obedece à regra 184 tal como descrito acima. O papel dessa regra é o de reordenar a configuração inicial de modo a deixar o estado majoritário em um bloco contíguo de sítios. Em seguida, após $\tau = \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$ passos, o autômato celular

entra em sua segunda fase, a fase de convergência que obedece à regra 232, a regra da maioria local. O tempo total necessário para concluir o processamento é $\tau \leq L - 2$.

A definição da tarefa de classificação deste autômato celular é a mesma para os classificadores binários discutidos anteriormente, com exceção do fato de que ele lida com o caso particular em que $\rho_1 = \frac{1}{2}$. Assim,

$$\mathbf{T}[L, \tau \leq L - 2] := \begin{cases} \Phi^\tau(\Omega^0) = \mathbf{0}^L & \text{se } \rho_1(\Omega^0) < \frac{1}{2} \\ \Phi^\tau(\Omega^0) = \mathbf{1}^L & \text{se } \rho_1(\Omega^0) > \frac{1}{2} \\ \Phi^\tau(\Omega^0) = (\mathbf{10})^a & \text{se } \rho_1(\Omega^0) = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (3.4)$$

com $a > 0$. Denominamos este autômato celular classificador por CA_{232}^{184} .

3.2.3 Classificador binário com estados auxiliares

Nesta definição, o problema da maioria é o mesmo que na definição clássica descrita no início deste capítulo, mas com a diferença de que o autômato celular está definido sobre um alfabeto de quatro estados dos quais dois são estados auxiliares (DE OLIVEIRA, 2014). Os estados auxiliares não são estados classificáveis do sistema. Eles participam do processo de classificação de forma intermediária, porém, ao fim da dinâmica, o autômato celular deve convergir para um dos dois estados classificáveis $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$. Podemos definir a sua tarefa de classificação de densidades da seguinte forma:

$$\mathbf{T}(L, \tau) := \begin{cases} \Phi^\tau(\Omega^0) = \mathbf{0}^L & \text{se } \rho_0(\Omega^0) < \rho_1(\Omega^0) \\ \Phi^\tau(\Omega^0) = \mathbf{1}^L & \text{se } \rho_1(\Omega^0) > \rho_0(\Omega^0) \\ \text{indefinido} & \text{se } \rho_0(\Omega^0) = \rho_1(\Omega^0) \end{cases}. \quad (3.5)$$

Os estados auxiliares permitem que esse tipo de autômato celular classificador tenha um raio de vizinhança menor que o raio de vizinhança de autômatos celulares classificadores de dois estados. Isso é razoável uma vez que há uma maior concentração de informação por sítio, o que reduz a necessidade de obter a mesma informação em sítios mais esparsos. Essa mudança também pode se traduzir numa maior conveniência para se estudar a dinâmica computacional do autômato celular sem o emprego de técnicas sofisticadas de filtros baseados em autômatos finitos (HORDIJK; CRUTCHFIELD; MITCHELL, 1996), uma vez que os domínios tendem a ser representados por um único estado, como veremos no próximo capítulo.

Apesar de ser um classificador perfeito, o CA_{232}^{184} é menos robusto que o autômato celular classificador imperfeito GKL2 (MENDONÇA, 2011) quando sujeito a ruídos. A propriedade de robustez é desejável e particularmente importante para sistemas computacionais em ambientes hostis sujeitos a interferências. Discorreremos a seguir sobre a tarefa de classificação em autômatos celulares classificadores submetidos a ruído.

3.3 A eficiência na tarefa de classificação

A eficiência é uma grandeza importante para o estudo dos autômatos celulares classificadores de densidade imperfeitos. Podemos encontrar o uso dessa medida, por exemplo, como função *fitness* em algoritmos evolutivos de busca de autômatos celulares classificadores (WOLZ; DE OLIVEIRA, 2008). Uma medida de eficiência depende da definição da tarefa de classificação e geralmente é obtida como a proporção de experimentos que satisfazem os critérios estabelecidos na tarefa. Embora possa parecer trivial, não existe um critério robusto para se comparar o desempenho de diferentes autômatos celulares na tarefa de classificação de densidade (DE OLIVEIRA, 2014).

Mitchell, Crutchfield e Hraber (1994) adotaram um reticulado unidimensional de tamanho $L = 149$ (valor este muito utilizado em pesquisas posteriores sobre o tema). O valor ímpar não foi por acaso: como a investigação limitou-se ao exame de autômatos celulares binários, procurou-se evitar o caso de indefinição quando $\rho_1 = \frac{1}{2}$. De outro modo, o tamanho é completamente arbitrário. Sabemos, entretanto, que a paridade do tamanho do reticulado influencia na medida de eficiência em autômatos celulares classificadores binários (OLIVEIRA G. M. B.; MARTINS; DE CARVALHO; FYNN, 2009).

Outro aspecto importante no cálculo de uma medida de eficiência é a forma pela qual é realizada a amostragem das configurações iniciais dos experimentos. Encontramos na literatura duas formas de amostragem. A primeira consiste em se definir uma série de diferentes pontos de densidade a partir dos quais são geradas uma certa quantidade de configurações iniciais aleatórias. A segunda consiste em gerar aleatoriamente as configurações de forma a obter uma distribuição binomial de densidades. Esta segunda forma exige uma amostragem consideravelmente maior que a primeira para fornecer medidas mais robustas de eficiência (DE OLIVEIRA; BORTOT; OLIVEIRA, 2006).

Nos autômatos celulares classificadores binários de quatro estados, as proporções ou densidades dos estados iniciais possuem grau de liberdade três (isto é, as densidades dos estados de uma configuração são completamente descritas a partir das densidades de três estados, uma vez que a densidade do quarto estado é determinada pelo complementar das três primeiras). Nesta pesquisa, adotamos a primeira estratégia e reduzimos o grau de liberdade para **1** fixando as densidades dos estados **2** e **3** enquanto variamos as densidades dos outros dois, sendo uma delas obtida de forma complementar.

Uma possível limitação para a medida de eficiência obtida pela proporção de experimentos que obtiveram sucesso é a de que alguns autômatos celulares e autômatos celulares probabilísticos classificadores de densidade não evoluem para configurações homogêneas mas para configurações cujas densidades são próximas da convergência completa. Isto pode ocorrer devido à introdução de ruído no sistema ou mesmo pela própria dinâmica de alguns autômatos celulares determinísticos que realizam a tarefa de classificação com

convergência parcial (apresentamos um autômato celular classificador binário de quatro estados com esta característica no Apêndice F).

3.4 Tarefa de classificação para autômatos celulares sujeitos a ruído

Até agora, vimos como a tarefa de classificação de densidades pode ser definida de um ponto de vista determinístico. Entretanto, como abordamos nesta pesquisa o ruído no autômato celular classificador GKL4, é importante discorrermos sobre a tarefa de classificação de um ponto de vista estocástico.

A introdução de ruído não poupa os estados absorventes de um sistema, conduzindo-os para configurações inevitavelmente não homogêneas ao longo do tempo. Este fato nos impede de formular a tarefa de classificação para autômatos celulares submetidos a ruído com critérios unicamente determinísticos, uma vez que as densidades do sistema são flutuantes. Assim devemos relaxar o critério da convergência completa.

Se tomarmos a densidade do estado inicialmente majoritário de um autômato celular classificador como estado do sistema, poderemos nos perguntar se existe um nível de ruído α^* abaixo do qual o sistema, apesar de apresentar pequenas flutuações, permanece com densidade sempre acima de uma determinada cota inferior ρ^* . Esta é justamente a questão investigada por Gács, Kurdyumov e Levin (1978), que acreditavam estar diante de um contra-exemplo da conjectura das "probabilidades positivas" segundo a qual qualquer sistema unidimensional de partículas com interações de curto alcance submetido a transições de probabilidades estritamente positivas é *ergódico* (MENDONÇA, 2011).

Dizemos que um autômato celular é ergódico quando qualquer ponto de seu espaço de estados é alcançável a partir de qualquer outro ponto desse mesmo espaço (FATÈS, 2013; MENDONÇA, 2011). Se um autômato celular classificador de densidades é ergódico quando submetido a certo nível de ruído, podemos dizer que sua eficiência de classificação está comprometida, uma vez que, se esperarmos tempo suficiente em sua dinâmica, poderemos encontrá-lo em qualquer ponto do seu espaço de configurações possíveis, ao invés de encontrá-lo no esperado estado absorvente.

Ainda não é provado, apesar de evidências favoráveis (SÁ; MAES, 1992), que GKL2 ou GKL4 são ergódicos quando submetidos a níveis de ruído não nulo. Em consequência, não se sabe se existe ou não um valor crítico de ruído α^* acima do qual observaremos, eventualmente, o estado inicialmente majoritário o deixar de ser em detrimento do estado inicialmente minoritário do sistema. Chamamos essa ocorrência de *inversão* dos estados majoritário-minoritário.

Este fato nos impede de formular a tarefa de classificação para autômatos celulares submetidos a ruído com critérios unicamente determinísticos. Uma vez que as densidades do sistema são flutuantes, devemos ainda relaxar o critério da convergência propondo, nesse sentido, uma medida de eficiência baseada na própria densidade ρ_{maj} do estado majoritário. Assim, denominamos a tarefa de *quasiclassificação*, a tarefa que cumpre a classificação com convergência parcial:

$$\mathbf{T}(L, \tau, \alpha) := \left\{ \Omega^\tau = \mathcal{R}_\alpha[\Phi^\tau(\Omega^0)] \mid \rho_{maj}(\Omega^\tau) > \rho_{maj}(\Omega^0) > \rho_{min}(\Omega^\tau) \right\}, \quad (3.6)$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$, e ρ_{maj} e ρ_{min} denotando as densidades dos estados majoritário e minoritário, respectivamente. Ou seja, $\rho_{maj}(\cdot)$ aumenta com o tempo e permanece maior que $\rho_{min}(\cdot)$, a qualquer tempo.

4 O modelo *Gács-Kurdyumov-Levin* de quatro estados

O modelo Gács-Kurdyumov-Levin de quatro estados, abreviado aqui por GKL4, é um autômato celular com reticulado unidimensional e condição de contorno periódica cujos sítios têm raio de vizinhança $r = 1$. Diferentemente do modelo de dois estados GKL2, GKL4 foi pouco estudado na literatura. O que se sabe sobre GKL4 foi discutido no próprio artigo em que foi apresentado (GÁCS; KURDYUMOV; LEVIN, 1978). As regras de ambos os modelos foram expressas como regras de composição, ou seja, um conjunto de uma ou mais expressões que especifica uma ou mais entradas do mapa de transição ϕ . No entanto, ao contrário de GKL2, as regras de composição de GKL4 são confusas e não definem completamente todas as entradas da regra de transição ϕ . Esta dificuldade é aqui eliminada e apresentamos todas as entradas da regra de transição do modelo na próxima seção e explicamos como podemos obtê-la a partir das regras de composição explicitadas originalmente no artigo de Gács, Kurdyumov e Levin (1978).

GKL4 possui a propriedade de erodir *ilhas* de sítios de estado localmente minoritário ou auxiliares que estão rodeadas por sítios de estado localmente majoritário. Podemos dizer que GKL4 possui um comportamento global semelhante ao modelo de dois estados, GKL2 que exibe este mesmo comportamento. Além disso, GKL4 possui a propriedade de convergência para um dos estados absorventes, isto é, aqueles estados que não se modificarão se participarem de uma configuração de vizinhança composta somente por estados iguais a eles.

Para descrever o comportamento de GKL4, este capítulo está assim organizado: primeiramente, caracterizamos GKL4 e sua regra de transição. Em seguida, descrevemos o experimento para o cálculo da eficiência de classificação. Em terceiro, apresentamos uma análise da mecânica computacional de GKL4. Em quarto, descrevemos a robustez de GKL4 contra perturbações e, por fim, a sua resistência a ruídos.

4.1 Regra de transição ϕ_{GKL4}

Representamos os estados que cada sítio pode assumir pelo conjunto $S = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$. O espaço de configurações de GKL4 é dado por $\Omega \in S^L$. Possuindo quatro estados possíveis e um raio de vizinhança $r = 1$, a regra de transição local de GKL4, definida pela função $\phi_{\text{GKL4}} : \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}^3 \mapsto \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ consiste em um mapeamento de 64 entradas definidas pelas seguintes regras de composição e suas respectivas simétricas-refletidas (GÁCS; KURDYUMOV; LEVIN, 1978) (removemos o sobrescrito $t - 1$ das

variáveis para tornar a notação mais leve):

$$\phi_{\text{GKL4}}(\mathbf{0}\omega_i\omega_{i+1}) = \mathbf{0}, \quad \text{se } \omega_i, \omega_{i+1} \neq \mathbf{1}, \quad (4.1)$$

$$\phi_{\text{GKL4}}(\omega_{i-1}\mathbf{0}\omega_{i+1}) = \begin{cases} \mathbf{3}, & \text{se } \omega_{i-1} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \\ \mathbf{0}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\phi_{\text{GKL4}}(\omega_{i-1}\omega_i\omega_{i+1}) = \mathbf{2}, \quad \text{se } \omega_i \in \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\} \text{ e a regra (4.1) não se aplique,} \quad (4.3)$$

com a operação de conjugação e simetria definida por $\phi_{\text{GKL4}}(s_0s_1s_2)^* = \phi_{\text{GKL4}}(s_2^*s_1^*s_0^*)$, onde s_0, s_1 e $s_2 \in S$ são os estados que compõem uma configuração de vizinhança η e $*$ é o operador de conjugação dos estados que satisfaz $\mathbf{0}^* = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}^* = \mathbf{0}$, $\mathbf{2}^* = \mathbf{2}$ e $\mathbf{3}^* = \mathbf{3}$. Repare que sem essa operação, as regras (4.1)-(4.3) são insuficientes para determinar todas as entradas de ϕ_{GKL4} . As regras de composição seguintes, obtidas a partir da aplicação da operação de conjugação e simetria, completam o formalismo proposto por Gács, Kurdyumov e Levin (1978):

$$\phi_{\text{GKL4}}(\omega_{i-1}\omega_i\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \quad \text{se } \omega_{i-1}, \omega_i \neq \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

$$\phi_{\text{GKL4}}(\omega_{i-1}\mathbf{1}\omega_{i+1}) = \begin{cases} \mathbf{3}, & \text{se } \omega_{i+1} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{3}\}, \\ \mathbf{1}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\phi_{\text{GKL4}}(\omega_{i-1}\omega_i\omega_{i+1}) = \mathbf{2}, \quad \text{se } \omega_i \in \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\} \text{ e a regra (4.4) não se aplique.} \quad (4.6)$$

Note que as expressões 4.3 e 4.6 são idênticas mesmo sendo uma a conjugada simétrica da outra. Isto decorre diretamente da definição do operador $*$. Como as respectivas regras de composição não são ambíguas na determinação de qualquer das entradas da regra de transição ϕ , podemos estabelecer a sua cadeia de precedência como (4.1),(4.4) $\preceq$ (4.2),(4.5) $\preceq$ (4.3),(4.6).

Podemos visualizar as entradas da regra de transição geradas a partir dessas regras de composição na Tabela 1. Essa regra de transição pode ser representada numericamente por $\phi_{\text{GKL4}} = (221516182237131410831087411648786888448)_{10}$ em base decimal (para mais informações sobre a representação numérica de regra de transição, veja o Apêndice E).

Gács, Kurdyumov e Levin (1978) afirmam que os estados $\mathbf{0}^L$ e $\mathbf{1}^L$ são os únicos estados atrativos dos modelos GKL2 e GKL4. Entretanto, GKL4 possui três estados absorventes, $\phi_{\text{GKL4}}(\mathbf{000}) = \mathbf{0}$, $\phi_{\text{GKL4}}(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$ e $\phi_{\text{GKL4}}(\mathbf{222}) = \mathbf{2}$ (como pode ser visto na Tabela 1). Gács, Kurdyumov e Levin (1978) fornecem um teorema para indicar que as configurações $\mathbf{0}^L$ e $\mathbf{1}^L$ são atrativas, no entanto, o estado $\mathbf{2}$, embora seja absorvente, não é atrativo. Embora tenhamos observado convergência para a configuração $\mathbf{2}^L$ várias vezes em simulações de autômatos celulares com reticulados relativamente pequenos, este não parece ser um comportamento sistemático: para configurações inicialmente aleatórias em que os sítios assumiam um dos estados com a mesma probabilidade de 1/4, GKL4 convergiu para essa configuração cerca de 1% das vezes. A seguir, descrevemos nosso experimento para medir o desempenho de classificação do GKL4. Veremos também que GKL4 não é um classificador de densidade para o estado $\mathbf{2}$, assim como não o é para o estado $\mathbf{3}$.

Tabela 1 – Regra de transição de GKL4.

η_l^{t-1}	ω_l^t	Eq.	η_l^{t-1}	ω_l^t	Eq.	η_l^{t-1}	ω_l^t	Eq.	η_l^{t-1}	ω_l^t	Eq.
(000)	0	(4.1)	(010)	3	(4.2)*	(020)	0	(4.1)	(030)	0	(4.1)
(001)	0	(4.2)	(011)	1	(4.2)*	(021)	2	(4.3)	(031)	2	(4.3)
(002)	0	(4.1)	(012)	3	(4.2)*	(022)	0	(4.1)	(032)	0	(4.1)
(003)	0	(4.1)	(013)	1	(4.2)*	(023)	0	(4.1)	(033)	0	(4.1)
(100)	3	(4.2)	(110)	3	(4.2)*	(120)	2	(4.3)	(130)	2	(4.3)
(101)	3	(4.2)	(111)	1	(4.1)*	(121)	1	(4.1)*	(131)	1	(4.1)*
(102)	3	(4.2)	(112)	3	(4.2)*	(122)	2	(4.3)	(132)	2	(4.3)
(103)	3	(4.2)	(113)	1	(4.2)*	(123)	2	(4.3)	(133)	2	(4.3)
(200)	3	(4.2)	(210)	3	(4.2)*	(220)	2	(4.3)	(230)	2	(4.3)
(201)	3	(4.2)	(211)	1	(4.1)*	(221)	1	(4.1)*	(231)	1	(4.1)*
(202)	3	(4.2)	(212)	3	(4.2)*	(222)	2	(4.3)	(232)	2	(4.3)
(203)	3	(4.2)	(213)	1	(4.2)*	(223)	2	(4.3)	(233)	2	(4.3)
(300)	0	(4.2)	(310)	3	(4.2)*	(320)	2	(4.3)	(330)	2	(4.3)
(301)	0	(4.2)	(311)	1	(4.1)*	(321)	1	(4.1)*	(331)	1	(4.1)*
(302)	0	(4.2)	(312)	3	(4.2)*	(322)	2	(4.3)	(332)	2	(4.3)
(303)	0	(4.2)	(313)	1	(4.2)*	(323)	2	(4.3)	(333)	2	(4.3)

4.2 Desempenho de classificação de densidade

No estudo dos autômatos celulares classificadores de densidade, interessa investigar suas densidades conforme evoluem para um estado de consenso (convergência). A densidade de um estado $s \in S$ de uma configuração global Ω no tempo t , denotada por $\rho_s(t)$, é obtida por

$$\rho_s(t) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \delta(\omega_l^t, s), \quad (4.7)$$

onde $\delta(\cdot)$ é a função delta de Kronecker e ω_l^t é o estado do sítio índice- l no tempo t . É fácil deduzir da Eq. (4.7) que $\sum_s \rho_s(t) = 1$. Podemos obter a frequência $N_s(t)$ do estado $s \in S$, onde $\sum_s N_s = L$ é o tamanho do reticulado, por

$$N_s(t) = \rho_s(t) L = \sum_{l=0}^{L-1} \delta(\omega_l^t, s). \quad (4.8)$$

A densidade¹ de um estado é uma das principais grandezas que podemos observar na dinâmica de um autômato celular.

Verificamos o desempenho de classificação de densidade de GKL4 por meio de simulações de Monte Carlo como se segue. Estipulamos um reticulado de tamanho L múltiplo de 4 e então atribuímos a $L/4$ sítios escolhidos aleatoriamente cada um dos estados **2** ou **3**; a $L/4 + m$ sítios o estado **0** e aos $L/4 - m$ sítios remanescentes o estado **1**, com $-L/4 \leq m \leq L/4$ um parâmetro inteiro variável. Devido à propriedade de classificação de densidade de GKL4, esperamos que para $m > 0$ o estado do autômato celular no regime

¹ Aqui, utilizamos alternativamente as grandezas N_s e ρ_s como medidas de densidade do sistema.

Figura 1 – Desempenho da classificação de densidade de GKL4. O parâmetro $k = \frac{1}{2}(N_0 - N_1)$ representa a diferença entre o número de sítios com estado **0** e **1** da configuração inicial. Cada ponto das curvas corresponde à média de uma amostra de 10.000 amostras aleatórias. De cima para baixo, as curvas correspondem aos reticulados de tamanho $L = 400, 800, 1.600$ e 3.200 .

estacionário seja $\Omega = \mathbf{0}^L$ enquanto para $m < 0$ seja $\Omega = \mathbf{1}^L$. Em seguida, simulamos a evolução do autômato celular e monitoramos as densidades em um passo de tempo $\hat{t}$ quando $N_0(\hat{t}) = L$ ou $N_1(\hat{t}) = L$. Se inicialmente $m > 0$ ($m < 0$) e o estado estacionário é $\mathbf{0}^L$ (respectivamente, $\mathbf{1}^L$), então dizemos que GKL4 classificou com sucesso a configuração inicial, caso contrário dizemos que ele falhou. Além disso, também consideramos que GKL4 falhou se, após $10L$ passos, ele não entrar em regime estacionário para um desses estados. Quando $m = 0$, computamos o desempenho de GKL4 como o número de vezes que ele convergiu para a configuração $\mathbf{0}^L$. Aqui, a escolha entre $\mathbf{0}^L$ ou $\mathbf{1}^L$ é irrelevante tendo em vista que as entradas da regra de GKL4 são conjugadas e simétricas com relação aos estados **0** e **1** (isto pode ser visto na regra de GKL4 da Tabela 1) e o reticulado satisfaz a condição de contorno periódico. Para cada valor de k , repetimos o experimento 10.000 vezes e coletamos os dados. Os resultados são apresentados na Figura 1.

Vemos na Figura 1 que GKL4 não é um classificador perfeito: para configurações iniciais aleatórias, às vezes ele converge para o estado errado. Percebemos que GKL4 tem desempenho similar à classificação aleatória para densidades iniciais $N_0(t) \approx N_1(t)$, representada no gráfico pelo parâmetro $m = 0$. No entanto, essa eficiência é crescente na medida em que m se afasta para a esquerda ou para a direita. A partir desse resultado, fica evidente que o sucesso do consenso também depende da distribuição inicial dos estados ao longo dos sítios do reticulado. Essa dependência cai gradativamente na medida em que m se afasta do zero.

Em experimentos com configurações iniciais compostas apenas dos estados classificáveis **0** e **1** aleatoriamente distribuídos, encontramos um limiar a partir do qual parece não haver qualquer possibilidade do classificador GKL4 falhar. Nessas condições, esse limiar parece ser atingido quando a densidade do estado majoritário é superior a duas

Figura 2 – Desempenho da classificação de densidade de GKL4 com relação ao estado **2**. Cada curva corresponde a diferentes tamanhos do reticulado: da esquerda para a direita, $L = 40, 80, 120, 160$ e 240 .

vezes a densidade do estado minoritário. Esta conjectura, contudo, está baseada apenas em observações empíricas.

Gács, Kurdyumov e Levin (1978) argumentam que os estados **0** ou **1** dominam completamente o autômato celular GKL4 em seu regime estacionário. Os demais estados, **2** e **3**, são eliminados ao longo da dinâmica. Em nossas simulações, no entanto, verificamos que nem sempre GKL4 converge para uma das configurações $\Omega = \mathbf{0}^L$ ou $\mathbf{1}^L$; às vezes o autômato celular converge para o regime estacionário onde todos os estados são **2**. Para reticulados relativamente pequenos, com $L \sim 40 \dots 80$, e configuração inicial aleatória onde os sítios assumem um dos quatro estados possíveis com a mesma probabilidade $1/4$, observamos que o autômato celular converge para a configuração $\Omega = \mathbf{2}^L$ aproximadamente 1% das vezes. Para quantificar esse comportamento, realizamos o seguinte experimento: atribuímos inicialmente a $L/4 - m$ sítios escolhidos aleatoriamente um dos estados **0**, **1** e **3**, e para os $L/4 + 3m$ sítios restantes o estado **2**, com $m = 0, 1, \dots, L/4 - 1$ um parâmetro inteiro. Em seguida, simulamos as dinâmicas do autômato celular e observamos o comportamento no regime estacionário. Como podemos ver na Figura 2, GKL4 não classifica satisfatoriamente as configurações iniciais que possuem o estado **2** como maioria.

Este resultado nos mostra que o estado **2** não é um estado classificável uma vez que não existe um comportamento sistemático para a sua classificação, embora possa, eventualmente dominar a configuração do autômato celular. Sua convergência é, portanto, incidental e possivelmente relacionada com simetrias na distribuição espacial dos estados

0 e **1** ao longo do reticulado.

Podemos dizer que GKL4 possui dois estados classificáveis, **0** e **1**, e dois estados auxiliares **2** e **3**. Lançando mão da propriedade de convergência discutida em Gács, Kurdyumov e Levin (1978)

Para melhor entendermos como cada estado participa na dinâmica de classificação, examinaremos a seguir como GKL4 efetua sua computação. Para isto, introduziremos uma notação prática de representação de regras de transição que ajudará neste processo.

4.3 Mecânica computacional

Sabemos que a quantidade de entradas (ou regras elementares) de uma regra de transição ϕ é determinada pela quantidade de elementos do seu domínio $\mathcal{D}(\phi)$. A estipulação individual de cada uma dessas entradas pode consistir numa tarefa complicada, principalmente para as situações em que o raio de vizinhança $r > 1$ (ANDRE; BENNETT III; KOZA, 1996), para a qual é possível estabelecer alternativas mais simples. Sabemos que a computação de autômatos celulares unidimensionais é realizada por meio da propagações e colisões de domínios (interpretadas como um sistema de domínios e partículas (HORDIJK; CRUTCHFIELD; MITCHELL, 1996)), definidos como uma sucessão espacialmente periódica e uniforme de estados (HANSON; CRUTCHFIELD, 1992). É conveniente estabelecermos uma notação ou linguagem capaz de descrever a dinâmica de GKL4 em termos de propagação e colisão de domínios.

Do ponto de vista do estudo da mecânica computacional, GKL4 tem uma vantagem clara sobre os classificadores cujos raios de vizinhança são maiores que um, que é a facilidade com que podemos examinar o modo pelo qual realiza a sua computação sem a necessidade de técnicas sofisticadas de identificação de domínios (HORDIJK; CRUTCHFIELD; MITCHELL, 1996). No GKL4, podemos considerar cada estado representando um domínio e, assim, o estudo das interações entre as bordas dos domínios torna-se uma tarefa relativamente fácil. Para realizar este estudo, propomos a representação da regra de transição ϕ por um esquema de propagação e aniquilação de estados pelos sítios do reticulado, o que facilitará a explicação. Uma regra de composição pode ser compreendida como uma expressão que especifica um conjunto de uma ou mais entradas do mapa de transição ϕ . Uma regra de composição expressa em termos de propagação e colisão de domínios para autômatos celulares com raio de vizinhança $r = 1$ requer uma notação muito simples. A seguir, descrevemos essa notação.

4.3.1 Notação para as regras de composição (RC)

Seja ω_l^t o estado do sítio índice- l no tempo t . Dizemos que um estado $s_0 \in S$ se propaga para a direita (esquerda) no reticulado unidimensional sobre um estado $s_1 \in S$ se

Tabela 2 – Esquema de representação da propagação/aniquilação dos estados. Os marcadores na coluna da esquerda geram entradas na regra de transição ϕ segundo a expressão da coluna do meio, onde o $*$ indica o desdobramento dos demais estados. A coluna da direita indica a quantidade máxima dessas entradas geradas.

Marcador	Entradas geradas em ϕ	Número de entradas
$s_0 \curvearrowright s_1$	$\phi(s_0 s_1 *) = s_0$	k
$s_1 \curvearrowleft s_0$	$\phi(* s_1 s_0) = s_0$	k
$s_0 \xrightarrow{s_2} s_1$	$\phi(s_0 s_1 *) = s_2$	k
$s_0 \xleftarrow{s_2} s_1$	$\phi(* s_0 s_1) = s_2$	k
$s_0 s_1 s_2 \rightarrow s_3$	$\phi(s_0 s_1 s_2) = s_3$	1
$s_0 \twoheadrightarrow s_1$	$\phi(* s_0 *) = s_1$	k^2

$\omega_l^{t-1} = s_1$, $\omega_l^t = s_0$ e $\omega_{l-1}^{t-1} = s_0$ ($\omega_{l+1}^{t-1} = s_0$, para propagações para esquerda), para $l \in \mathbb{Z}$ e $t = 1, 2, \dots$. Se $\omega_l^t \notin \{s_0, s_1\}$, dizemos que a propagação se dá por substituição. Como recurso de linguagem, outra forma de nos referirmos ao processo de propagação de s_0 sobre s_1 é dizer que s_1 é aniquilado por s_0 .

Esquemáticamente podemos representar esse processo pelo marcador $s_0 \curvearrowright s_1$, se s_0 se propaga para a direita sobre s_1 , ou $s_1 \curvearrowleft s_0$ se s_0 se propaga para a esquerda. Para denotar que a propagação se dá por substituição, acrescentamos no sobrescrito o estado de substituição como em $s_0 \xrightarrow{s_2} s_1$ ou $s_1 \xleftarrow{s_2} s_0$, onde $s_2 \in S \setminus \{s_0, s_1\}$. Se queremos representar uma transição simples a partir de uma configuração de vizinhança específica, usamos o marcador $s_0 s_1 s_2 \rightarrow s_3$, indicando que o sítio central será alterado para $s_3 \in S$. Para completar a notação, usamos o marcador $s_0 \twoheadrightarrow s_1$ quando queremos denotar que qualquer sítio cujo estado seja s_0 passa a ter o estado s_1 . Uma breve síntese da notação aqui proposta encontra-se na Tabela 2.

Seja $k = |S|$ a quantidade de estados do sistema, os marcadores $\curvearrowright$ e $\curvearrowleft$ são capazes de gerar, cada um, até k entradas na regra de transição ϕ . O marcador $\rightarrow$ determina uma única entrada de ϕ enquanto $\twoheadrightarrow$ gera até k^2 entradas.

Repare que, ao definirmos um conjunto de RC de acordo com essa notação, não será difícil nos depararmos com ambiguidades de regras entre duas ou mais entradas; ou mesmo uma insuficiência de regras que não abrange todos as configurações de vizinhança possíveis. No primeiro caso, podemos fazer uso do marcador $\rightarrow$ para resolver possíveis conflitos gerados. No segundo, é preciso arbitrar uma ordem de precedência entre as RC e estipular o princípio segundo o qual toda e qualquer entrada não definida não deve ter o seu sítio central modificado, princípio este que denominaremos de *inercial*. A ordem de precedência entre as RC obtidas com este esquema de representação segue a ordem ascendente da quantidade de entradas que as RC geram. Assim, obtemos a cadeia de precedência $(\rightarrow) \prec (\curvearrowright, \curvearrowleft) \prec (\twoheadrightarrow) \prec (\text{inercial})$.

4.3.2 RC de propagação/aniquilação de GKL4

Procuramos representar o maior número de entradas da regra de transição ϕ pelos marcadores de propagação $\curvearrowright$ e $\curvearrowleft$. Em seguida, especificamos as exceções pelos marcadores $\rightarrow$ e $\twoheadrightarrow$.

Podemos observar que as entradas de ϕ , na Tabela 1, definem a propagação dos estados **0** e **1**, pela direita e pela esquerda, respectivamente, sobre os estados **2** e **3**. Assim, temos o primeiro grupo de RC de propagação: $\mathbf{0} \curvearrowright \mathbf{2}$, $\mathbf{0} \curvearrowright \mathbf{3}$, $\mathbf{2} \curvearrowleft \mathbf{1}$ e $\mathbf{3} \curvearrowleft \mathbf{1}$. Essas RC nos conduzem para duas definições ambíguas de entradas da regra de transição ϕ_{GKL4} , no caso, as entradas $\phi_{GKL4}(\mathbf{021})$ e $\phi_{GKL4}(\mathbf{031})$. Para resolvê-las, escrevemos as RC $\mathbf{021} \rightarrow \mathbf{2}$ e $\mathbf{031} \rightarrow \mathbf{2}$.

Por outro lado, observamos que as entradas de ϕ associadas às regras (4.2) e sua simétrica refletida (4.5), juntamente com a regra (4.3), estão definindo outros dois processos. O primeiro consiste na aniquilação dos estados **1** e **0** quando estes estão em sítios adjacentes, nessa mesma ordem; e o segundo processo consiste na propagação do estado **2** sobre os estados **0** e **1**, pela direita e pela esquerda, respectivamente. No entanto, esses processos de aniquilação e propagação ocorrem por substituição pois são intermediados pelo estado **3** que é convertido no estado **2** no passo seguinte a este, conduzindo à continuidade do processo de propagação do estado **2**. Assim, temos mais dois grupos de RC, o primeiro representando os processos de aniquilação e propagação aqui descritos, $\mathbf{1} \overset{3}{\curvearrowright} \mathbf{0}$, $\mathbf{1} \overset{3}{\curvearrowleft} \mathbf{0}$, $\mathbf{2} \overset{3}{\curvearrowright} \mathbf{0}$ e $\mathbf{1} \overset{3}{\curvearrowleft} \mathbf{2}$, e o segundo representando a intermediação do estado, $\mathbf{3} \twoheadrightarrow \mathbf{2}$. Esses grupos formam, na dinâmica do autômato celular, o surgimento de propagação do estado **2** sobre os estados **0** e **1** cuja velocidade é a metade daquela verificada nas propagações desses últimos estados sobre o primeiro. E este parece ser o único papel desempenhado pelo estado **3**, isto é, o de introduzir um passo de espera nessa dinâmica.

Sintetizamos as RC segundo nossa notação na Tabela 3. Essas RC, juntamente com o pressuposto inercial, determinam completamente, e sem ambiguidades, as 64 entradas da regra de transição ϕ_{GKL4} .

4.3.3 Mecânica computacional de GKL4

Seja $s_0\Lambda s_1$ uma região contígua do reticulado delimitada pelos estados $s_0, s_1 \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Λ consiste numa região de zero ou mais sítios formada exclusivamente pelos estados **2** e **3**. A dinâmica observada em Λ depende dos valores de s_0 e s_1 . Repare que é necessária a existência de pelo menos um estado classificável (**0** ou **1**) em uma configuração Ω de um reticulado com condição de contorno periódico (única condição considerada nesta pesquisa) para formar uma região Λ .

Podemos destacar dois tipos especiais de região $s_0\Lambda s_1$. O primeiro tipo, chamado de *fonte*, é formado pelas vizinhanças (**10**), (**120**) e (**130**) e tem a propriedade de expandir

Tabela 3 – RC de propagação/aniquilação de GKL4. A quantidade de entradas geradas por cada RC pode ser vista na segunda coluna.

RC	Entradas geradas
021 $\rightarrow$ 2	1
031 $\rightarrow$ 2	1
0 $\curvearrowright$ 2	3
0 $\curvearrowright$ 3	3
2 $\curvearrowleft$ 1	3
3 $\curvearrowleft$ 1	3
1 $\overset{3}{\curvearrowright}$ 0	4
1 $\overset{3}{\curvearrowleft}$ 0	4
2 $\overset{3}{\curvearrowright}$ 0	4
1 $\overset{3}{\curvearrowleft}$ 2	4
3 $\rightarrow$ 2	9
(Inercial)	25

as regiões $\mathbf{\Lambda}$ na configuração do autômato celular pela aniquilação de s_0 e s_1 . O segundo tipo, denominado de *borda*, é formado pelas vizinhanças **(01)**, **(021)** e **(031)** e tem como característica definir um ponto de bloqueio para a propagação dos estados **0** e **1**.

Se uma configuração não-homogênea Ω é formada unicamente por estados **0** e **1** (ou seja, se nela existir apenas região $\mathbf{\Lambda}$ vazias) então haverá pelo menos uma configuração de vizinhança do tipo *fonte* e uma do tipo *borda*.

A análise da mecânica computacional que realizamos a seguir é baseada na articulação desses elementos com a regra de transição ϕ_{GKL4} , aqui facilitada pelo uso de nossa notação. É evidente que não há nada de intrínseco nos estados ou em configurações de vizinhança específicas, sendo todas as dinâmicas determinadas pela regra de transição de GKL4. Nesse sentido, indicaremos as regras subjacentes a cada processo descrito. Por fim, estamos interessados em descrever as dinâmicas principais que descrevem a mecânica computacional de GKL4 e, portanto, consideraremos que a região $s_0\mathbf{\Lambda}s_1$ estará ladeada pelos mesmos estados s_0 e s_1 da seguinte forma $(\dots s_0s_0\mathbf{\Lambda}s_1s_1 \dots)$.

Descrevemos a seguir quatro dinâmicas distintas promovidas por diferentes valores de s_0 e s_1 : $s_0 = \mathbf{1}$, $s_1 = \mathbf{0}$; $s_0 = s_1 = \mathbf{0}$; $s_0 = s_1 = \mathbf{1}$ e; $s_0 = \mathbf{0}$, $s_1 = \mathbf{1}$.

Se tomarmos uma configuração Ω_0 apenas com regiões $\mathbf{\Lambda}$ vazias, observaremos pelo menos uma ocorrência da vizinhança do tipo fonte, que são regidas pelas RC **1** $\overset{3}{\curvearrowright}$ **0** e **1** $\overset{3}{\curvearrowleft}$ **0**. Assim, no passo seguinte, teremos necessariamente uma região $\mathbf{\Lambda}$ não vazia, com $s_0 = \mathbf{1}$, $s_1 = \mathbf{0}$. A partir daí, $\mathbf{\Lambda}$ se expandirá simetricamente, para a direita e para a esquerda, um sítio a cada dois passos de tempo, conforme as RC **3** $\rightarrow$ **2**, **2** $\overset{3}{\curvearrowright}$ **0** e **1** $\overset{3}{\curvearrowleft}$ **2**, até que encontre uma vizinhança do tipo borda. Essa dinâmica está ilustrada na Figura 3.

Repare que a simetria da propagação de $\mathbf{\Lambda}$ será quebrada quando um dos lados

Figura 3 – Dinâmica de propagação do tipo $(\dots \mathbf{1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{0}\dots)$. Diagrama espaço-temporal de um autômato celular de tamanho $L = 31$. O tempo corre de cima para baixo. Os estados estão mapeados para as seguintes cores: amarelo= $\mathbf{0}$, azul= $\mathbf{1}$, branco= $\mathbf{2}$ e preto= $\mathbf{3}$.

encontrar primeiro a vizinhança de borda. Há, no entanto, a possibilidade de que essa simetria se mantenha quando ambos os lados alcançarem, ao mesmo tempo, uma vizinhança de borda. Há três resultados possíveis aqui: o primeiro e o segundo são mais comuns e definem o início de outras duas dinâmicas descritas a seguir; o terceiro resultado, mais raro, é aquele em que a configuração do autômato celular entra no estado absorvente $\mathbf{2}^L$, conforme já discutiremos anteriormente.

Suponha que o avanço do estado $\mathbf{2}$ para a esquerda, sobre o estado $\mathbf{1}$ encontre uma das vizinhanças de borda antes que o seu par simétrico da direita. Neste ponto do tempo, todos os estados $\mathbf{1}$ situados entre a vizinhança de fonte e a de borda terão sido aniquilados, iniciando, assim, a propagação do estado $\mathbf{0}$, aquele mais à esquerda da vizinhança de borda, para a direita sobre o estado $\mathbf{2}$ de $\mathbf{\Lambda}$, a uma velocidade de um sítio por passo de tempo, conforme as RC $\mathbf{0} \curvearrowright \mathbf{3}$ e $\mathbf{0} \curvearrowright \mathbf{2}$. Repare que, do outro lado dessa região, ainda ocorre a propagação do estado $\mathbf{2}$, também para a direita, sobre o estado $\mathbf{0}$. Assim, temos a nossa segunda dinâmica onde $s_0 = s_1 = \mathbf{0}$, que se caracteriza pela existência de duas propagações para o mesmo lado mas com velocidades distintas, a mais lenta expandindo $\mathbf{\Lambda}$ e a mais rápida aniquilando-a.

Devido à simetria da regra de transição ϕ_{GKLA} , esse mesmo processo ocorre para o lado esquerdo e tem o estado $\mathbf{1}$ como o estado de propagação sobre a região $\mathbf{\Lambda}$ segundo as RC $\mathbf{2} \curvearrowleft \mathbf{1}$ e $\mathbf{3} \curvearrowleft \mathbf{1}$. Neste caso, temos a nossa terceira dinâmica, onde $s_0 = s_1 = \mathbf{1}$. Assim, se $s_0 = s_1$, observaremos propagações no mesmo sentido no entorno de $\mathbf{\Lambda}$. Repare

Figura 4 – Dinâmicas de propagação dos tipos $(\dots \mathbf{0}\mathbf{\Lambda}\mathbf{0} \dots)$ e $(\dots \mathbf{1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{1} \dots)$. Diagramas espaço-temporal de um autômato celular de tamanho $L = 31$. O tempo corre de cima para baixo. Os estados estão mapeados para as seguintes cores: amarelo= $\mathbf{0}$, azul= $\mathbf{1}$, branco= $\mathbf{2}$ e preto= $\mathbf{3}$

que esses dois processos podem ter início já no primeiro passo da evolução do sistema, bastando para isto que haja na configuração inicial um caso de uma região $\mathbf{\Lambda}$ ladeada por um mesmo estado classificável. A Figura 4 ilustra as duas dinâmicas.

Esses dois processos poderão ter dois fins distintos: se o lado mais rápido alcançar o lado de propagação mais lenta, teremos uma região localmente dominada por aquele estado classificável que se propaga; no entanto, se o lado mais lento encontrar uma vizinhança de borda antes de ser alcançado pelo lado de propagação mais rápida, ocorrerá a nossa quarta dinâmica.

Nesta última dinâmica, onde $s_0 = \mathbf{0}$ e $s_1 = \mathbf{1}$, $\mathbf{\Lambda}$ é aniquilada em favor de $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ que se propagam pela direita e pela esquerda, respectivamente, segundo as RC $\mathbf{0} \curvearrowright \mathbf{2}$ e $\mathbf{2} \curvearrowleft \mathbf{1}$. O fim dessa aniquilação é marcada pela formação de uma vizinhança do tipo borda. Nesse caso, se a quantidade de sítios dessa mesma região for ímpar, restará em seu sítio central apenas um estado $\mathbf{2}$ cuja vizinhança se estabilizará em $\mathbf{021}$, conforme as RC $\mathbf{021} \rightarrow \mathbf{2}$ e $\mathbf{031} \rightarrow \mathbf{2}$; de outro modo, sendo $\mathbf{\Lambda}$ formada, no início do processo, por um número par de sítios, aqueles dois mais centrais formarão a configuração de vizinhança $\mathbf{01}$, ditada pela RC Inercial. Ambos os casos estão ilustrados na Figura 5.

O fato desta dinâmica cessar com a produção de uma vizinhança de borda implica

Figura 5 – Dinâmica de propagação do tipo $(\dots 0\mathbf{A}1 \dots)$. Diagramas espaço-temporal de um autômato celular de tamanho $L = 31$. O tempo corre de cima para baixo. Os estados estão mapeados para as seguintes cores: amarelo= $\mathbf{0}$, azul= $\mathbf{1}$, branco= $\mathbf{2}$ e preto= $\mathbf{3}$

que, em outra posição da configuração do autômato celular, existe, pelo menos, uma região $\mathbf{A}$ ou uma vizinhança de fonte, realizando seu próprio processo. Assim, sabemos que esta é uma dinâmica transiente. É fácil visualizar que, a menos que os estados $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$ sejam aniquilados de forma simultânea, um dos dois dominará a configuração final do GKL4 e isto foi particularmente provado em Gács, Kurdyumov e Levin (1978).

Podemos simplificar ainda mais a configuração inicial para melhor compreender as funções dessas dinâmicas do ponto de vista computacional. Considere uma configuração formada por m sítios contíguos com estado $\mathbf{1}$ e n sítios com estado $\mathbf{0}$ de modo que o tamanho do reticulado é $L = m + n$. Com essa formação, não há qualquer região $\mathbf{A}$ no autômato celular; há somente uma vizinhança de borda e uma de fonte, a partir da qual será iniciada a primeira dinâmica aqui descrita. Se $m > n$, a expansão da região $\mathbf{A}$, que se forma a partir da vizinhança de fonte, aniquilará primeiramente todos os estados $\mathbf{0}$, no tempo $\hat{t} = 2n$, eliminando assim a vizinhança do tipo borda. Note que, até este ponto do tempo, a diferença $|N_0(t) - N_1(t)|$ é constante e vale $|m - n|$. No passo seguinte, dá-se início à segunda dinâmica, marcada pela propagação do estado $\mathbf{1}$ sobre a região $\mathbf{A}$, no mesmo sentido da propagação mais lenta de $\mathbf{A}$ que ainda ocorre no lado oposto. O desfecho desse processo é o aniquilamento da região $\mathbf{A}$ no tempo $t = \hat{t} + 2(L - |n - m|)$ com o estado

1 dominando toda a configuração do autômato celular. Um processo simétrico ocorreria para o estado **0** se $m < n$. Já no caso em que $m = n$, observaríamos a convergência do autômato celular para o estado $\mathbf{2}^L$.

Nesse tipo de formação da configuração inicial temos sempre uma classificação perfeita das densidades. Vimos que o primeiro processo de expansão da região **A** computa perfeitamente a diferença $|N_0(t) - N_1(t)|$ no fim do qual se dá o início da segunda dinâmica, a de convergência do estado de maior densidade. Entretanto, se imaginarmos uma configuração inicial com estados aleatórios, observaremos esses dois processos de cômputo das diferenças e dos resultados ocorrendo simultaneamente e de forma distribuída ao longo da configuração de GKL4. O resultado é que erros são introduzidos devido a essa dispersão de cômputos locais que se somam em etapas intermediárias e levam o autômato celular a classificar incorretamente uma determinada configuração inicial.

Em todo caso, a diferença entre as velocidades de propagação é a chave para o mecanismo computacional de classificação de GKL4, que também está presente em muitos outros autômatos celulares classificadores de densidade, mesmo aqueles com raio de vizinhança $r > 1$, como GKL2².

No entanto, a análise feita aqui não nos diz como os níveis de densidade dos estados evoluem no tempo. Uma das formas de quantificar essa dinâmica das densidades é através da análise das *taxas instantâneas de recuperação* proposta no experimento a seguir, que nos informam sobre a capacidade de recuperação de GKL4 a perturbações do estado estacionário.

4.4 Robustez contra perturbações do estado estacionário

Em sistemas complexos, a robustez é geralmente associada com a capacidade que um sistema possui para se recuperar de falhas ou perturbações. Examinamos a robustez contra perturbações de GKL4 alterando aleatoriamente o estado de uma fração de seus sítios em uma configuração inicialmente homogênea e medimos o tempo e a velocidade de convergência do autômato celular em função da quantidade de sítios perturbados e do tamanho do reticulado. A questão que procuramos responder aqui é: quantos passos são necessários para que GKL4 recupere seu estado de convergência ($\mathbf{0}^L$ ou $\mathbf{1}^L$) após uma perturbação?

² Ao longo de nosso trabalho, desenvolvemos um autômato celular classificador de convergência parcial cujo mecanismo de classificação não é baseado nas diferenças de velocidades de propagação. Este autômato celular é apresentado no Apêndice F.

4.4.1 Taxas instantâneas de recuperação

Nós definimos $R_s(t)$ como a taxa instantânea de recuperação do estado $s \in S$ por

$$R_s(t) = \frac{1}{L} \frac{\Delta N_s(t)}{\Delta t} = \frac{N_s(t) - N_s(t-1)}{L} = \rho_s(t) - \rho_s(t-1), \quad (4.9)$$

onde $N_s(t)$ é o número de sítios com estado s no tempo t . A medida R_s pode ser compreendida como a velocidade instantânea de recuperação/degradação de um estado. Como os estados **0** e **1** são atrativos, R_0 e R_1 devem estar na maior parte do tempo anticorrelacionadas, enquanto R_2 e R_3 devem assumir quase sempre valores negativos. Claramente,

$$R_0(t) + R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) = 0. \quad (4.10)$$

Os gráficos da Figura 6 mostram as taxas de recuperação instantâneas $R_s(t)$ obtidas a partir de 10.000 realizações com diferentes parâmetros de tamanho ($L = 400, 800, 1600, 3200$) e sítios perturbados ($\epsilon = 0.05, 0.075, 0.1, 0.125, \dots, 0.5$). Claramente, os dados observados mostram que a grandeza R_s é invariante quanto ao tamanho do autômato celular e depende apenas do número de sítios perturbados e do passo de tempo da dinâmica. Repare que não podemos danificar mais que $3/4$ dos sítios da configuração homogênea inicial sob o risco de alterar o estado majoritário.

O resultado mostra que as médias das taxas de recuperação de GKL4 são oscilantes em sua fase transiente, antes de convergir para zero. Essa oscilação apresenta um período de dois passos de tempo, quando as taxas de recuperação respectivas de cada passo do estado majoritário (veja gráfico (a) da Figura 6) seguem uma curva cujo módulo decresce monotonicamente a partir do passo de tempo $t \geq 2$. Uma das possíveis razões para esse comportamento pode estar na dinâmica de propagação/aniquilação em dois estágios realizada pelas RC $\mathbf{1} \overset{3}{\curvearrowright} \mathbf{0}$, $\mathbf{1} \overset{3}{\curvearrowright} \mathbf{0}$, $\mathbf{2} \overset{3}{\curvearrowright} \mathbf{0}$ e $\mathbf{1} \overset{3}{\curvearrowright} \mathbf{2}$. Vimos que essa dinâmica compõe precisamente a fase computacional na qual GKL4 computa as diferenças de densidade entre os estados **0** e **1**.

Esse resultado pode ser simplificado ao nível das taxas de recuperação envolvidas no mecanismo computacional do autômato celular. Uma vez encontradas as equações que descrevem os fluxos de probabilidade dos seus estados, teremos condições de compreender melhor como esse mecanismo oscilante de GKL4 é gerado. É nesse sentido que fazemos uso da abordagem de campo médio.

A partir das equações de recorrência obtidas por uma aproximação simples, realizamos pequenos experimentos para verificar, de forma qualitativa, se as diferenças de probabilidades aproximadas dos estados se assemelham com o comportamento oscilante das taxas de recuperação.

Figura 6 – Taxas de recuperação de GKL4 em função do tempo. Cada t corresponde à diferença entre densidades nos tempos t e $t - 1$. Os gráficos (a), (b), (c) e (d) mostram a evolução das taxas de recuperação de GKL4 para os estados **0**, **1**, **2** e **3**, respectivamente. Cada ponto corresponde à média de 10.000 amostras de configurações iniciais aleatórias para cada um dos diferentes tamanhos de reticulado $L = 400, 800, 1600, 3200$. Os desvios-padrão, se representados nos gráficos, seriam menores que os marcadores. As curvas indicadas nas legendas referem-se às frações de sítios aleatoriamente perturbados na configuração inicial.

4.4.2 Aproximação por campo médio

Seja a Eq. (2.12) e considere um sistema sem ruído para diferentes valores de $\Lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$. Assim, a probabilidade envolvida para um determinado valor de Λ está associada àquelas configurações de vizinhança η^Λ que geram Λ (veja Tabela 1). Aplicando-se as relações expressas na Eq. (2.13), chegamos às seguintes expressões (os cálculos podem ser verificados no Apêndice B):

$$P_t(0) = \underbrace{P_{t-1}(00) + P_{t-1}(30)}_{(0 \rightarrow 0)} + \underbrace{P_{t-1}(02) - P_{t-1}(021)}_{(2 \rightarrow 0)} + \underbrace{P_{t-1}(03) - P_{t-1}(031)}_{(3 \rightarrow 0)} \quad (4.11)$$

$$P_t(1) = \underbrace{P_{t-1}(11) + P_{t-1}(13)}_{(1 \rightarrow 1)} + \underbrace{P_{t-1}(21) - P_{t-1}(021)}_{(2 \rightarrow 1)} + \underbrace{P_{t-1}(31) - P_{t-1}(031)}_{(3 \rightarrow 1)} \quad (4.12)$$

$$P_t(2) = \underbrace{P_{t-1}(2)}_{(2 \rightarrow 2)} - \underbrace{(P_{t-1}(02) - P_{t-1}(021))}_{(2 \rightarrow 0)} - \underbrace{(P_{t-1}(21) - P_{t-1}(021))}_{(2 \rightarrow 1)} + \underbrace{P_{t-1}(3) - P_{t-1}(03) - P_{t-1}(31) + 2P_{t-1}(031)}_{(3 \rightarrow 2)} \quad (4.13)$$

$$P_t(3) = \underbrace{P_{t-1}(10) + P_{t-1}(20)}_{(0 \rightarrow 3)} + \underbrace{P_{t-1}(10) + P_{t-1}(12)}_{(1 \rightarrow 3)}, \quad (4.14)$$

onde as parcelas agrupadas são aquelas associadas ao fluxo de probabilidade de transição entre os estados representados nos respectivos rótulos inferiores. Esses fluxos estão representados no diagrama da Figura 7.

É conveniente realizar as aproximações de campo médio discutidas anteriormente para eliminar as parcelas de probabilidade conjunta de dois e três estados. Aplicando a aproximação simples, obtemos as seguintes equações de probabilidade aproximada:

$$P_t(0) \approx P_{t-1}(0)^2 + P_{t-1}(0)P_{t-1}(2) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) + P_{t-1}(3)P_{t-1}(0) + P_{t-1}(0)P_{t-1}(3) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) \quad (4.15)$$

$$P_t(1) \approx P_{t-1}(1)^2 + P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) + P_{t-1}(1)P_{t-1}(3) + P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) \quad (4.16)$$

$$P_t(2) \approx P_{t-1}(2) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(2) - P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) + 2P_{t-1}(0)P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) + P_{t-1}(3) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(3) - P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) + 2P_{t-1}(0)P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) \quad (4.17)$$

$$P_t(3) \approx P_{t-1}(1)P_{t-1}(0) + P_{t-1}(1)P_{t-1}(2) + P_{t-1}(1)P_{t-1}(0) + P_{t-1}(2)P_{t-1}(0) \quad (4.18)$$

Repare que a aproximação é razoável se considerarmos que essas equações, no tempo suficientemente longo ($t \gg L$), capturam o comportamento global de GKL4 para o qual as

Figura 7 – Fluxos de probabilidade de estados de GKL4 segundo suas regras de transição de estado. Os nós do diagrama representam os níveis de probabilidade dos respectivos estados. Os arcos que ligam dois nós são os fluxos de probabilidade (entrada e saída) destacados nas Eq. (4.11)-(4.14).

relações a seguir devem ser verdadeiras, uma vez que GKL4 deve convergir necessariamente para 0^L , 1^L ou 2^L ³:

$$P(0)P(1) = 0 \quad (4.19)$$

$$P(0)P(2) = 0 \quad (4.20)$$

$$P(1)P(2) = 0 \quad (4.21)$$

$$P(0) + P(1) + P(2) = 1. \quad (4.22)$$

Assim, substituindo essas relações nas equações anteriores, teremos:

$$P_t(0) = P_{t-1}(0) \quad (4.23)$$

$$P_t(1) = P_{t-1}(1) \quad (4.24)$$

$$P_t(2) = P_{t-1}(2) \quad (4.25)$$

$$P_t(3) = 0, \quad (4.26)$$

com $t \gg L$, $P_t(0)$, $P_t(1)$ e $P_t(2)$ assumindo os valores zero ou um no regime estacionário. Essas relações traduzem o comportamento de GKL4 *sem ruído*.

É fácil ver que podemos eliminar a probabilidade $P(3)$ do sistema, substituindo o valor de $P_t(3)$ nas demais equações. Essa substituição acaba introduzindo termos dependentes no tempo $t - 2$, o que nos conduziria para o mecanismo computacional de dois estágios da propagação do estado **2** intermediado pelo estado **3**.

³ Em nossa notação, dizemos que $P_t = P_{t-1} = P$ para $t \gg L$

Podemos agora simular o sistema de equações recorrentes para os valores arbitrários de distribuições de probabilidade inicial dos estados e observar a evolução das diferenças $\Delta P = P_t - P_{t-1}$ entre probabilidades imediatamente subsequentes no tempo para um mesmo estado. A Figura 8 mostra os resultados para as mesmas condições iniciais dos experimentos representados na Figura 6.

Repare que a evolução dos fluxos de probabilidade de estados é qualitativamente semelhante com os resultados obtidos nas simulações das taxas de recuperação, sugerindo que as oscilações em dois períodos se justifica pelo mecanismo computacional de dois estágios relativos às RC $1 \xrightarrow{3} 0$, $1 \xrightarrow{3} 0$, $2 \xrightarrow{3} 0$ e $1 \xrightarrow{3} 2$.

Até aqui, examinamos várias características de GKL4 observadas a partir de experimentos que não interferiram na sua regra de transição. Na próxima seção, nossas análises estarão concentradas nos efeitos de níveis de ruído não nulo no sistema que se traduzem na transformação da regra de transição determinística do sistema em uma regra de transição estocástica.

4.5 Resistência a ruídos

Analizamos diversos aspectos de GKL4 por meio da grandeza da densidade dos estados que compõem a sua configuração ao longo do tempo. Vimos particularmente na seção anterior como essas densidades se alteram, em média, a cada passo da dinâmica, através das taxas de recuperação de densidade ou fluxos de probabilidade no caso da análise por campo médio. Todas essas abordagens assumem a grandeza da densidade como medida de estado do sistema. Entretanto essas análises desconsideraram o ruído, componente introduzido nos experimentos desta seção. Assim, primeiramente, discorreremos sobre a densidade como medida do estado do sistema para, em seguida, descrevermos o experimento que procura capturar a distribuição de probabilidade que o sistema exibe em assumir um de seus estados possíveis.

4.5.1 A densidade como medida do estado do sistema

Definimos o estado inicialmente majoritário, denotado por s_{maj} , como sendo

$$s_{maj} = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho_0(\Omega^0) > \rho_1(\Omega^0) \\ 1 & \text{se } \rho_0(\Omega^0) < \rho_1(\Omega^0) \\ \text{indefinido} & \text{se } \rho_0(\Omega^0) = \rho_1(\Omega^0). \end{cases} \quad (4.27)$$

Considere a grandeza $N_s(t)$ definida na Eq. (4.8), com $s = s_{maj}$ denotando o *estado-densidade do sistema*. Vimos que as configurações $\Omega^t \in S^L$ de GKL4 consistem no estado do sistema em um dado momento t . O total de configurações possíveis para GKL4

Figura 8 – Evolução das taxas de recuperação dos estados de GKL4 segundo as equações de recorrência obtidas por aproximação de campo médio. Cada curva representa as diferenças $\Delta P = P_t - P_{t-1}$ de probabilidades para uma dada perturbação inicial. De cima para baixo, os estados dos gráficos são (a) estado 0; (b) estado 1; (c) estado 2; (d) estado 3. As oscilações obtidas capturam comportamento similar ao exibido no experimento das taxas de recuperação descrito nesta seção (Compare com a Figura 6).

com reticulado de tamanho L é 4^L . Entretanto, os diferentes níveis do estado-densidade $N_{s_{maj}}$ do sistema podem ser obtidos de diferentes subconjuntos desse universo. Esses subconjuntos associados aos diferentes níveis do estado-densidade formam partições de S^L . É possível determinar o tamanho da partição $C_s(c)$ de configurações $\Omega \in S^L$ que exibem $N_s(t) = c$ ocorrências do estado s por

$$C_s(c) = \binom{L}{c} 3^{L-c}. \quad (4.28)$$

Para chegarmos a essa expressão, precisamos, primeiramente, obter as combinações de c sítios de um reticulado de tamanho L que possuam as c ocorrências desejadas. Para cada uma dessas combinações, teremos $L - c$ sítios que poderão assumir qualquer um dos outros três estados possíveis e isto nos conduz à expressão da Eq. (4.28). $C_s(c)$ assumirá o seu valor máximo quando $c = \lfloor \frac{L}{4} \rfloor$.

Claramente, só há uma única configuração que permite obter $N_{s_{maj}}(t) = L$ que é a configuração homogênea $\Omega = (s_{maj}, s_{maj}, \dots, s_{maj})$. De acordo com a Eq. (2.7), se submetermos um autômato celular com esta configuração a um nível de ruído não nulo, a probabilidade do estado-densidade deixar o valor $N_{s_{maj}}(t) = L$ no passo seguinte será de $1 - \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)^L$. Quando $L \gg 1$ e $\alpha > 0$, a probabilidade do sistema deixar o estado de configuração homogênea tenderá para 1. Assim, observaremos um sistema cujo estado evolui com flutuações estocásticas em certas regiões do espaço do estado-densidade, e que, apenas eventualmente atinge o estado absorvente para rapidamente deixá-lo em seguida.

A pergunta que nos conduz ao experimento descrito a seguir é: quais são as probabilidades de encontrarmos GKL4 em diferentes níveis do estado-densidade quando o submetemos a um determinado nível de ruído α ?

4.5.2 As probabilidades das densidades do sistema submetido a ruído

Vimos que o GKL4, quando não está sujeito a ruídos, possui a propriedade de convergir necessariamente para os estados estacionários $\mathbf{0}^L$, $\mathbf{1}^L$ e $\mathbf{2}^L$ dos quais apenas os dois primeiros são estáveis. Nesta seção, introduziremos ruído em GKL4 transformando-o em um autômato celular probabilístico sem um regime estacionário homogêneo. Neste cenário, devido à natureza estocástica das transições dos estados, é natural experimentarmos flutuações na densidade do estado majoritário. Entretanto, o que os primeiros experimentos efetuados por Gács, Kurdyumov e Levin (1978), bem como aqueles por nós aqui realizados sugerem, é que essas flutuações não ocorrem de forma completamente aleatória no intervalo das densidades. Nesta seção, estamos interessados em medir a probabilidade associada a um determinado nível do estado-densidade do sistema, ou seja, com que probabilidade podemos encontrar o sistema em um dado estado-densidade.

Quando partimos de uma configuração inicialmente homogênea com um dos dois estados classificáveis, e aplicamos recorrentemente os operadores definidos pela Eq. (2.8), percebemos que o estado-densidade de GKL4 evolui exibindo uma flutuação em torno de certas regiões do espaço de densidades. Assim, como a própria ideia de taxas de recuperação sugere, é razoável supor que essas regiões são aquelas para as quais a taxa de recuperação instantânea do estado majoritário se iguala à parcela de sítios perturbados pelo operador de ruído.

Para examinarmos este comportamento, considere

$$Y(\hat{N}, m) = \sum_{t=0}^m \mathbb{I}(N_{s_{maj}} = \hat{N}), \quad (4.29)$$

a quantidade de tempo gasto pelo sistema no estado $\hat{N}$ no intervalo entre $t = 0$ até m , onde

$$\mathbb{I}(\cdot) \begin{cases} 1, & \text{se } (\cdot) \text{ é verdadeiro} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.30)$$

é a função indicadora.

Para um determinado nível α de ruído, e $m \gg 1$, podemos obter empiricamente as probabilidades aproximadas $P_\alpha[N_{s_{maj}} = \hat{N}]$ tomando a média das proporções de tempo gasto pelo sistema em um dado nível de estado $\hat{N}$ em $T \gg 1$ realizações, isto é,

$$P_\alpha[N_{s_{maj}} = \hat{N}] \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(\frac{1}{m+1} Y(\hat{N}, m) \right). \quad (4.31)$$

Repare que nossa definição satisfaz a condição $\sum_{\hat{N}=0}^L P_\alpha[N_{s_{maj}} = \hat{N}] = 1$ e, portanto, pode ser interpretada como uma medida de probabilidade, neste caso, a de que encontremos a densidade $\hat{N}$ do estado s_{maj} em um passo de tempo qualquer do experimento ou, dito de outra forma, a fração do tempo total em que o experimento se encontra em tal estado-densidade.

Para nossos experimentos, definimos uma configuração Ω_0 , de tamanho L , inicialmente homogênea para um dado estado classificável $s \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. De acordo com essas condições iniciais, é razoável esperarmos que o estado-densidade se mantenha alto ao longo do tempo devido à capacidade de recuperação de GKL4. Quando $\alpha = 0$, isto é, para GKL4 sem ruído, a obtenção de $P_{\alpha=0}[N_{s_{maj}} = \hat{N}]$ é trivial e vale 1 quando $\hat{N} = L$.

Calculamos a Eq. (4.31) para uma faixa de tempo $m = 10^4 L$ após um determinado período transiente $h = L$, com $L = 400$, $T = 10^3$ e para um feixe de 150 pontos equidistantes de ruído $0.01 \leq \alpha \leq 0.15$. O resultado é mostrado na Figura 9. Para melhor visualizar a variação das probabilidades nos diferentes níveis de ruído usamos a escala logarítmica na base 10. A configuração inicial do autômato celular foi definida para o estado $\mathbf{0}$. Como a regra de transição de GKL4 é simétrica para os estados $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$, os resultados obtidos também valem para a situação de estado inicial $\mathbf{1}$.

Figura 9 – Probabilidades dos estado-densidade em função do nível de ruído. As probabilidades (cores) associadas a cada densidade (eixo vertical) para diferentes níveis de ruído $0.01 \leq \alpha \leq 0.15$ (eixo horizontal) estão em escala logarítmica na base 10. Os dados mostram a média de $T = 10^3$ realizações de GKL4 para os parâmetros: $m = 10^4 L$, $h = L$ e $L = 400$. As linhas de nível indicam, de fora para dentro, as probabilidades relativas a 10^{-5} , 10^{-3} , 10^{-2} e 10^{-1} .

Podemos observar que GKL4 exibe comportamento bem definido de acordo com os níveis de ruído ao qual é submetido. Destacamos dois regimes qualitativamente observados em nossos experimentos, cuja obtenção depende fortemente do nível de ruído ao qual o autômato celular é submetido. No primeiro regime ($\alpha \lesssim 0.06$), existem duas regiões de atração, uma na parte superior da figura, para $\rho \gtrsim 0.85$; e outra na parte inferior, para $\rho \lesssim 0.05$. Há ainda uma região de densidade de atração que se afasta lentamente desses regimes estacionários conectando-os a partir do nível de ruído $\alpha \gtrsim 0.02$, na qual observamos poucas ocorrências de inversões do estado majoritário na escala de tempo considerada. À medida em que avançamos no nível de ruído podemos perceber que as regiões de atração superior e inferior deixam de existir em favor de um regime de atração única e esparsa, e este é o nosso segundo regime. Esta mudança sugere a existência de uma transição de fase do sistema. A Figura 10 fornece exemplos típicos de configurações espaço-temporais

O segundo regime ($\alpha \gtrsim 0.06$) caracteriza-se pela forte presença de inversões entre os estados **0** e **1**. Neste regime, deixam de existir os dois picos de densidades entre os quais observamos uma distribuição suave e côncava das probabilidades. A partir de níveis altos de ruído ($\alpha \gtrsim 0.15$) verificamos um comportamento cada vez mais aleatório com densidades de probabilidade assemelhando-se à curva gaussiana em torno da densidade

Figura 10 – Exemplos de diagramas espaço-temporais de um autômato celular de tamanho $L = 400$ com densidade inicial $\rho = 1$ para o estado de tom amarelado. O tempo corre de cima para baixo e cada diagrama mostra 400 passos de tempo a partir de diferentes tempos t escolhidos arbitrariamente. Os diagramas (A) e (B) estão situados no primeiro regime. Os diagramas (C) e (D) estão situados no segundo regime proposto (a localização dos diagramas podem ser vistas na Figura 9). O ruído usado no experimento seguiu a Eq. (2.7).

média $\rho = 0.25$.

As probabilidades calculadas do estado-densidade nos permitem verificar que, para níveis de $\alpha \geq 0.017$, a capacidade de regeneração de GKL4 se mostra insuficiente para garantir uma quota inferior acima da qual o nível do estado-densidade se mantém. Ou seja, GKL4 exibiu inversões do estado majoritário para valores de ruído acima dessa quota, um comportamento tipicamente ergódico para esse sistema.

Nossas observações, contudo, restringiram-se a uma escala de tempo que reduz drasticamente a probabilidade de encontrarmos ocorrências nas áreas em branco da figura, tal como aquela situada em baixos níveis de ruído ($\alpha \lesssim 0.017$). Sabemos apenas que GKL4 é ergódico para valores de $\alpha \gtrsim 0.017$, mas nada podemos concluir para valores inferiores a este nível de ruído uma vez que o resultado depende da escala de tempo considerada no experimento.

Se GKL4 possui propriedades de erosão semelhantes ao GKL2, talvez seja o caso de compartilhar o provável comportamento ergódico de seu modelo irmão de dois estados. Sá e Maes (1992) sugerem que GKL2 seja ergódico para qualquer valor de ruído não nulo. Segundo os autores, o tempo de erosão dos blocos de estado minoritário de GKL2 é uma função linear do tamanho N desses blocos para valores de ruído $0.01 \leq \alpha \leq 0.1$ enquanto que, para valores inferiores de ruído, as evidências apontam que este mesmo tempo é proporcional à N^2 . O decréscimo do tempo de erosão ocorre aproximadamente para valores de ruído inversamente proporcionais à N . Se GKL2 fosse não ergódico, este decréscimo marcaria o início do regime que somente tenderia à zero quando $N \rightarrow \infty$, o que nos conduziria para um sistema infinito sem transição de fase para $\alpha \neq 0$. Assim, embora não exista uma prova de que GKL4 seja ergódico para qualquer nível de ruído imaginamos que este também seja o caso.

5 Conclusões e perspectivas

A investigação aqui realizada nos permitiu compreender melhor como e em que condições sistemas distribuídos podem atingir coordenação global pelo processamento de informações locais. Abordamos esse problema através do exame de um modelo particular de autômato celular classificador de densidade proposto em Gács, Kurdyumov e Levin (1978).

Por muito tempo, pouco se soube sobre GKL4 além das evidências coletadas originalmente, ao contrário do modelo GKL2, que foi intensamente investigado na literatura (SÁ; MAES, 1992; PARK, 1997). Esta pesquisa procurou contribuir nesse sentido.

Demos especial atenção para a mecânica computacional de GKL4 em sua tarefa de classificação de densidades. Verificamos que suas taxas de recuperação instantâneas são oscilantes, com período dois, e invariantes com relação ao tamanho do autômato celular e dependem apenas da perturbação inicial e do passo de tempo da dinâmica. Essas propriedades, juntamente com as análises de campo médio aqui realizadas, sugerem que o comportamento oscilante do sistema é decorrente de seu próprio mecanismo de classificação que se desenvolve em duas etapas.

O estudo da mecânica computacional nos permitiu identificar a diferença de velocidades de propagação/aniquilação como um dos principais mecanismos para o alcance de consenso. Sugerimos que essa característica esteja também presente em outros modelos de autômatos celulares classificadores.

Embora não tenhamos feito uma análise comparativa entre os modelos GKL2 e GKL4, os experimentos e as análises aqui realizadas sugerem que GKL4, assim como os resultados encontrados por Mendonça (2011), possui tolerância a falhas semelhante ao modelo GKL2 na realização da tarefa de classificação de densidades. Essas e outras lacunas de investigação ficaram fora do escopo desta pesquisa, de modo que podemos sugerir possíveis trabalhos futuros.

Nesta pesquisa, não fizemos um exame sistemático da relação entre a eficiência de GKL4 e os parâmetros de ruído, dimensionalidade e topologia da rede de vizinhança. A variação desses parâmetros nos conduz naturalmente ao estudo de outros tipos de autômatos celulares classificadores, tais como gases de rede e autômatos celulares assíncronos, todos processos estocásticos markovianos de enorme interesse teórico e prático (BOCCARA, 2010; DENNUNZIO; FATÈS; FORMENTI, 2013; TOMÉ; OLIVEIRA, 2014).

Algumas importantes características e propriedades que poderiam ser medidas no contexto dos autômatos celulares classificadores de densidade submetidos a essas transfor-

mações são a ergodicidade, percolação temporal de estados e o espalhamento de danos. Dizemos que um estado percola temporalmente se pelo menos um sítio inicialmente neste estado possui um caminho contíguo (horizontal ou verticalmente) de sítios correspondentes no diagrama espaço-temporal do autômato celular. Nesse sentido, podemos nos questionar se é desejável que um autômato celular classificador de densidade, quando submetido a ruído, possua a propriedade de percolar temporalmente seu estado inicialmente majoritário, ou seja, que haja um caminho contíguo entre um sítio de estado majoritário na configuração inicial e um sítio de mesmo estado na configuração final. E ainda: a percolação do estado majoritário implicaria na não ergodicidade do autômato celular classificador? Por fim, o espalhamento de danos consiste na medida da *distância de Hamming* entre duas configurações obtidas pela mesma dinâmica de transição, porém com estados iniciais ligeiramente diferentes (TOMÉ; OLIVEIRA, 2014). Essa diferença inicial entre duas configurações pode provocar perturbações de longo alcance na configuração final do autômato celular. No caso específico dos autômatos celulares classificadores de densidade, é desejável que um bom classificador possua distância zero para faixas de densidade inicial estritamente majoritárias de um determinado estado e distância máxima para faixas de inversão de densidades majoritária-minoritária entre dois estados do autômato celular, uma vez que se espera a correta classificação do estado inicialmente majoritário.

Embora seja um modelo de natureza distinta, é possível identificar algumas semelhanças entre os modelos de Ising (KRAUTH, 2006) e GKL4, o que nos sugere a possibilidade de aplicação de técnicas conhecidas desse modelo no estudo de autômatos celulares classificadores de densidade.

Os resultados desta pesquisa, aprofundam o conhecimento sobre os autômatos celulares classificadores de densidade e lançam luz sobre entendimento da origem da coordenação global de sistemas que exibem as características aqui descritas. Além disso, os experimentos propostos são aplicáveis na modelagem e investigação de sistemas complexos caracterizados justamente por incidência de ruídos com interações locais e espacialmente distribuídas.

Referências¹

ANDRE, D.; BENNETT III, F. H.; KOZA, J. R. Discovery by genetic programming of a cellular automata rule that is better than any known rule for the majority classification problem. In: *Proceedings of the First Annual Conference on Genetic Programming*. [S.l.]: MIT Press, 1996. p. 3–11. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 31.

BANDINI, S.; MAURI, G.; SERRA, R. Cellular automata: From a theoretical parallel computational model to its application to complex systems. *Parallel Computing*, v. 27, n. 5, p. 539–553, 2001. Citado na página 11.

BOCCARA, N. *Modelling Complex Systems. 2a ed.* New York: Springer, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 50 e 56.

CAPCARRÈRE, M. S.; SIPPER, M.; TOMASSINI, M. Two-state $r = 1$ cellular automaton that classifies density. *Physical Review Letters*, APS, v. 77, n. 24, p. 4969, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 21.

CHAU, H. F.; SIU, L. W.; YAN, K. K. One dimensional n-ary density classification using two cellular automaton rules. *International Journal of Modern Physics C*, World Scientific, v. 10, n. 05, p. 883–889, 1999. Citado na página 20.

CRUTCHFIELD, J. P.; MITCHELL, M. The evolution of emergent computation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 92, n. 23, p. 10742–10746, 1995. Citado na página 11.

DANTAS, C. A. B. *Probabilidade, Um curso introdutório*. [S.l.]: EduUSP, 1997. Citado na página 59.

DE OLIVEIRA, P. P. B. Conceptual connections around density determination in cellular automata. In: SPRINGER. *Cellular Automata and Discrete Complex Systems: 19th International Workshop, AUTOMATA 2013, Gießen, Germany, September 14-19, 2013, Proceedings*. [S.l.], 2013. v. 8155, p. 1. Citado na página 21.

DE OLIVEIRA, P. P. B. On density determination with cellular automata: Results, constructions and directions. *Journal of Cellular Automata*, v. 9, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 20, 22 e 23.

DE OLIVEIRA, P. P. B.; BORTOT, J. C.; OLIVEIRA, G. M. B. The best currently known class of dynamically equivalent cellular automata rules for density classification. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 70, n. 1, p. 35–43, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 23.

DENNUNZIO, A.; FATÈS, N.; FORMENTI, E. Foreword: asynchronous cellular automata and applications. *Natural Computing*, Springer Science & Business Media, v. 12, n. 4, p. 537, 2013. Citado na página 50.

FATÈS, N. Stochastic cellular automata solutions to the density classification problem: When randomness helps computing. *Theory of Computing Systems*, v. 53, n. 2, p. 223–242, 2013. Citado na página 24.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

FUKŠ, H. Solution of the density classification problem with two cellular automata rules. *Physical Review E*, v. 55, p. 3, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 68.

GÁCS, P.; KURDYUMOV, G. L.; LEVIN, L. A. One-dimensional uniform arrays that wash out finite islands. *Problemy Peredachi Informatsii*, v. 14, n. 3, p. 92–96, 1978. Citado 11 vezes nas páginas 5, 6, 11, 24, 26, 27, 30, 31, 37, 45 e 50.

GUTOWITZ, H. A.; VICTOR, J. D.; KNIGHT, B. W. Local structure theory for cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 28, n. 1, p. 18–48, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 17.

HANSON, J. E.; CRUTCHFIELD, J. P. The attractor-basin portrait of a cellular automaton. *Journal of Statistical Physics*, v. 66, n. 5-6, p. 1415–1462, 1992. Citado na página 31.

HORDIJK, W.; CRUTCHFIELD, J. P.; MITCHELL, M. Embedded particle computation in evolved cellular automata. In: TOFFOLI, T.; BIAFORE, M.; LEAO, J. (Ed.). *96 (Pre-proceedings), New England Complex Systems Institute*. [S.l.]: Physics and Computation, 1996. p. 153–158. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 31.

KANEKO, K.; YANAGITA, T. Coupled maps. *Scholarpedia*, v. 9, n. 5, p. 4085, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.

KARI, J. Theory of cellular automata: A survey. *Theoretical Computer Science*, v. 334, n. 1, p. 3–33, 2005. Citado na página 10.

KRAUTH, W. *Statistical Mechanics: Algorithms and Computations*. New York: Oxford University Press, 2006. Citado na página 51.

LAND, M.; BELEW, R. K. No perfect two-state cellular automata for density classification exists. *Physical review letters*, v. 74, n. 25, p. 5148, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

MAGALHAES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. [S.l.]: IME-USP, 2004. Citado na página 59.

MENDONÇA, J. R. G. Sensitivity to noise and ergodicity of an assembly line of cellular automata that classifies density. *Physical Review E*, v. 83, n. 3, p. 031112, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 11, 15, 22, 24 e 50.

MITCHELL, M.; CRUTCHFIELD, J. P.; HRABER, P. T. Evolving cellular automata to perform computations: Mechanisms and impediments. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 75, n. 1, p. 361–391, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 11, 20 e 23.

MITCHELL, M.; HRABER, P. T.; CRUTCHFIELD, J. P. Revisiting the edge of chaos: Evolving cellular automata to perform computations. *Complex Systems*, v. 7, p. 89–130, 1993. Citado na página 11.

MOREIRA, A. A. et al. Efficient system-wide coordination in noisy environments. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, National Acad Sciences, v. 101, n. 33, p. 12085–12090, 2004. Citado na página 11.

OLIVEIRA G. M. B.; MARTINS, L. G. A.; DE CARVALHO, L. B.; FYNN, E. Some investigations about synchronization and density classification tasks in one-dimensional and two-dimensional cellular automata rule spaces. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 252, p. 121–142, 2009. Citado na página 23.

PACKARD, N. H. Adaptation towards the edge of the chaos. In: KELSO, J. A. S.; MANDELL, A. J.; SHLESINGER, M. F. (Ed.). World Scientific, Singapore: s. Dynamic Patterns in Complex Systems, 1988. p. 293–301. Citado na página 11.

PARK, K. *Ergodicity and mixing rate of one-dimensional cellular automata*. 108 p. Ph.D. thesis — Computer Science Department, Boston University, 1997. Citado na página 50.

SÁ, P. G.; MAES, C. The Gacs-Kurdyumov-Levin automaton revisited. *Journal of Statistical Physics*, v. 67, n. 3-4, p. 507–522, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 11, 24, 49 e 50.

SARKAR, P. A brief history of cellular automata. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, v. 32, n. 1, p. 80–107, 2000. Citado na página 10.

SCHELLING, T. C. Models of segregation. *The American Economic Review*, p. 488–493, 1969. Citado na página 10.

SCHELLING, T. C. Dynamic models of segregation. *Journal of mathematical sociology*, v. 1, n. 2, p. 143–186, 1971. Citado na página 10.

TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. 2 ed.. ed. São Paulo: EDUSP, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 10, 15, 18, 50 e 51.

VON NEUMANN, J.; BURKS, A. W. *Theory of self-reproducing automata*. [S.l.]: University of Illinois Press, 1966. Citado na página 10.

WOLFRAM, S. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of modern physics*, v. 55, n. 3, p. 601, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 66.

WOLZ, D.; DE OLIVEIRA, P. P. B. Very effective evolutionary techniques for searching cellular automata rule spaces. *Journal of Cellular Automata*, v. 3, n. 4, p. 289–312, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.

Apêndices

APÊNDICE A – Sistemas dinâmicos e autômatos celulares

A evolução de uma propriedade emergente de um sistema complexo ao longo do tempo pode ser apreendida por uma classe de modelos matemáticos e computacionais chamados de *sistemas dinâmicos*. Um sistema dinâmico é um conjunto de regras cujas soluções descrevem os estados de um sistema ao longo do tempo. O espaço de fases é o conjunto dos estados possíveis que esse sistema pode assumir. Suas regras de evolução podem ser de natureza determinística ou não-determinística, nesse caso, havendo a necessidade de se definir o processo estocástico que rege as interações locais (BOCCARA, 2010).

A variável temporal de um sistema dinâmico pode ser contínua ou discreta e elas podem definir dois grupos abrangentes de sistemas dinâmicos: aqueles cujas regras definidas por equações diferenciais de primeira ou de segunda ordem descrevem a evolução do estado do sistema no tempo contínuo e; os sistemas cujas regras definidas por mapas descrevem uma órbita, isto é, uma sequência sucessiva de estados no tempo discreto.

Um sistema dinâmico cujo estado também depende de uma variável espacial é chamado de *sistema dinâmico espacialmente estendido*. Muitas propriedades emergentes de sistemas complexos têm essa característica de serem espacialmente dependentes e, em muitos casos, sua dinâmica só pode ser apreendida quando introduzimos às suas regras de evolução essa dimensão espacial, que não necessariamente se refere a um espaço geográfico, podendo denotar outras formas de espaço sobre as quais se processam as interações dos agentes de um sistema como, por exemplo, um espaço de interações determinado por uma estrutura de rede social. A Tabela 4 resume os principais tipos de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos a partir de suas características.

Tabela 4 – Classificação dos sistemas dinâmicos espacialmente estendidos segundo os tipos das variáveis espaço, tempo e estado. A letra D corresponde à variável discreta e a letra C à contínua. Fonte: (KANEKO; YANAGITA, 2014)

Sistema	Espaço	Tempo	Estado
Autômatos celulares	D	D	D
Mapas de malhas acopladas	D	D	C
Equações diferenciais ordinárias acopladas	D	C	C
Equações diferenciais parciais	C	C	C

Assim, podemos definir que um sistema dinâmico é espacialmente estendido quando é formado por elementos de um espaço cujos estados dependem dos estados dos

elementos acoplados ou vizinhos. Como no caso dos sistemas dinâmicos, nesse contexto, espaço, tempo e estado podem ser representados de forma discreta ou contínua.

Um autômato celular é um tipo de sistema dinâmico espacialmente estendido que trata o espaço, o tempo e o estado de forma discreta. Outros tipos de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos tratam de forma diversa essas dimensões. Por exemplo, nos mapas de malhas acopladas, apenas espaço e tempo são discretos; nas equações diferenciais ordinárias acopladas, apenas o espaço é discreto; e nas equações diferenciais parciais, espaço, tempo e estado são contínuos (KANEKO; YANAGITA, 2014).

APÊNDICE B – Norma e raio de vizinhança

A proximidade entre dois sítios de um autômato celular é determinada por uma norma de espaço e por um raio de vizinhança r , arbitrariamente definido, que indica a distância máxima para que sejam considerados vizinhos entre si.

Considere dois sítios quaisquer $x = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$ e $y = (y_0, y_1, \dots, y_{d-1})$ definidos num espaço de $d \geq 1$ dimensões. Denotamos por $\|x - y\|_p$ a distância definida em um espaço de norma p (ou p -norma) definida por

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{i=0}^{d-1} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{B.1})$$

com $p \geq 1$. Considerando um raio r e uma norma p , a vizinhança de um sítio x compreende todos os sítios $y \in \eta$ que satisfazem a relação $\eta = \{ \forall y \mid \|x - y\| \leq r \}$.

As normas mais utilizadas na definição da vizinhança de autômatos celulares são as normas *Manhattan* (quando $p = 1$) e *norma-máxima* (quando $p \rightarrow \infty$). Para esses casos em particular, podemos obter as funções de distância a partir da Eq. (B.1),

$$\|x - y\|_1 = \sum_{i=0}^{d-1} |x_i - y_i| \quad \text{e} \quad (\text{B.2})$$

$$\|x - y\|_\infty = \max_{i=\{0,1,\dots,d-1\}} |x_i - y_i|, \quad (\text{B.3})$$

que conduzem aos esquemas de vizinhança conhecidos como *von Neumann* e *Moore*, respectivamente, quando $r = 1$, tal como ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Diferentes esquemas de vizinhança para autômatos celulares de dimensão $d = 2$. A vizinhança von Neumann é obtida para $p = 1$ e $r = 1$ (regiões em cinza escuro dos diagramas do lado esquerdo). A vizinhança Moore é obtida para $p \rightarrow \infty$ e $r = 1$ (regiões em cinza escuro dos diagramas do lado direito).

Para reticulados de dimensão $d = 1$, é fácil verificar que o tamanho da vizinhança $|\eta| = 2r + 1$ independe da norma empregada. Para reticulados de duas dimensões, as normas $p = 1$ e $p = \infty$ geram vizinhanças de tamanho $|\eta| = 2r^2 + 2r + 1$ e $|\eta| = 4r^2 + 4r + 1$, respectivamente.

APÊNDICE C – Noções gerais de probabilidade

A teoria de probabilidade está fundamentada na ideia de *classe de eventos do espaço amostral*, discutida a seguir. O espaço amostral é definido como um conjunto cujos elementos denotam os resultados possíveis de um experimento aleatório. Chamamos de evento simples, ou pontos amostrais de um experimento, cada elemento do espaço amostral. Um experimento aleatório se opõe a um experimento determinístico na medida em que o seu resultado está associado a uma incerteza. Num experimento aleatório, podemos estar interessados não apenas no exame de eventos simples mas em grupos de eventos simples e, dessa forma, podemos estender a noção de *evento* a um subconjunto de eventos simples do espaço amostral. Chegamos, assim, à ideia de eventos do espaço amostral¹.

Os eventos de um espaço amostral são definidos como subconjuntos do espaço amostral Ω . Denominaremos o conjunto desses subconjuntos, ou melhor, a classe desses subconjuntos por $\mathcal{F}$. Matematicamente, essa classe de subconjuntos é denominada de σ -álgebra e o seu estudo confere uma abordagem rigorosa à teoria da probabilidade. Uma σ -álgebra é uma estrutura que deve respeitar os seguintes axiomas:

$$(A.1) \quad \Omega \in \mathcal{F};$$

$$(A.2) \quad \text{Se } A \in \mathcal{F}, \text{ então } \overline{A} \in \mathcal{F};$$

$$(A.3) \quad \text{Se } A_i \in \mathcal{F}, \ i \geq 1, \text{ então, } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F};$$

Esses três axiomas garantem que todas as operações que definirmos entre os eventos conduzirão a novos eventos que também pertencem à σ -álgebra. Em nosso exemplo, os eventos do espaço amostral nos quais estamos interessados são definidos pela σ -álgebra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$. Sempre que falarmos de uma *classe de eventos do espaço amostral* estaremos nos referindo a uma σ -álgebra $\mathcal{F}$ específica sobre a qual está definida uma função de probabilidade P a cada elemento de $\mathcal{F}$. Note que a σ -álgebra aqui definida é a menor possível e está contida na σ -álgebra formada pela totalidade de subconjuntos possíveis de Ω . Nada nos impede de utilizar uma ou outra para definir um experimento em particular, desde que os axiomas acima sejam satisfeitos.

Podemos, agora, dar uma definição axiomática de probabilidade. Uma *probabilidade*, ou medida de probabilidade P , é uma função definida numa classe de eventos do espaço amostral $\mathcal{F}$ sobre os valores $[0, 1]$ que satisfaz os *Axiomas de Kolmogorov*:

¹ Esta revisão foi realizada tendo como base os trabalhos de Dantas (1997) e Magalhaes (2004).

$$(A.4) \quad P(\Omega) = 1;$$

$$(A.5) \quad P(A) \geq 0, \text{ para todo } A \in \mathcal{F}$$

(A.6) Se $A_1, A_2, \dots$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (C.1)$$

Denominamos de *espaço de probabilidades* a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que satisfaz os axiomas A.1-A.6. Nesta revisão, consideramos apenas o caso do conjunto de espaço amostral Ω ser um conjunto enumerável (i.e. um conjunto equiparável ao conjunto dos números naturais, tal como nosso exemplo), finito ou não. Assim, se o espaço amostral é enumerável, podemos definir a probabilidade de um dado evento $A \in \mathcal{F}$ como sendo a soma das probabilidades individuais de cada evento simples de Ω contido em $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, onde $\omega_1, \omega_2, \dots \in \Omega$. Isto é:

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\omega_i). \quad (C.2)$$

Uma variável aleatória é uma função que associa a cada ponto do espaço amostral um número pertencente a um conjunto enumerável ou não-enumerável. Quando uma variável aleatória está definida sobre um conjunto enumerável dizemos que a variável aleatória é discreta; caso contrário, dizemos que a variável aleatória é contínua.

As probabilidades associadas aos pontos de um espaço amostral, por vezes, não são homogêneas. Ainda que cada lançamento de se lançar uma moeda (ou, genericamente, de realizamos um ensaio) não interfira nos resultados dos outros lançamentos subsequentes (aqui assumimos o pressuposto da independência entre os ensaios), diferentes probabilidades podem estar associadas aos seus possíveis resultados. Por exemplo, uma moeda é dita não equilibrada quando as chances de resultar "cara" é diferente das chances de resultar "coroa". Podemos ainda definir um experimento em que os pontos amostrais resultantes são formados por um número variável de ensaios etc. Nestes casos, as probabilidades dos pontos amostrais podem ser diferentes.

Essa questão pode ser melhor compreendida a partir dos conceitos de *dependência* e *independência* de eventos. Considere dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$ de probabilidades $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Suponha que temos a informação de que um dos pontos amostrais $\omega_B \in B$ tenha ocorrido (portanto sabemos apenas que o evento B ocorreu). Partindo dessa informação, estamos interessados em saber a probabilidade de ter ocorrido o evento A . Por definição, sabemos que A só terá chances de ocorrer se $\exists \omega_B \in B, \omega_B \in A$, caso contrário, teremos certeza de que A não ocorreu. Sabendo que B ocorreu, seria natural que passássemos a considerar apenas o conjunto B na definição de um novo espaço amostral, e sua respectiva classe de eventos, de modo a determinar uma nova função de probabilidade $P_B(A)$ que nada mais é senão a probabilidade que queremos descobrir.

Assim, podemos definir uma nova classe de eventos $\mathcal{F}_B$ tendo o conjunto B como o conjunto do espaço amostral de modo que, se $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B} \in \mathcal{F}_B$. Uma vez que a nova função P_B está definida em $\mathcal{F}_B$, os axiomas A.1-A.6 estão satisfeitos e, portanto, temos um novo espaço de probabilidade definido pela tripla $(B, \mathcal{F}_B, P_B)$ que é derivado do espaço de probabilidade original $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tal como a definimos, a nova medida de probabilidade P_B é proporcional a $P(A \cap B)$. Logo, $P_B(A) = kP(A \cap B)$. Substituindo A por B nessa equação, temos que $P_B(B) = kP(B) = 1$ (pois B é o novo espaço amostral de P_B). Assim, $k = 1/P(B)$. Como $P(B) > 0$, por definição, chegamos à resposta de nossa questão e também a uma importante relação que, em probabilidade, usamos para definir o conceito de *probabilidade condicional* entre eventos:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (\text{C.3})$$

Uma notação muito encontrada na literatura para $P_B(A)$ é $P(A|B)$ que é a probabilidade de ocorrer o evento A dado que tenha ocorrido o evento B . A partir do conceito de probabilidade condicional, dizemos que dois eventos são *independentes* se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (\text{C.4})$$

isto é, quando a proporção entre $P(A \cap B)$ e $P(B)$ é a mesma que entre $P(A)$ e $P(\Omega)$, ou seja, a relação

$$P(A|B) = P(A), \quad (\text{C.5})$$

é satisfeita. Neste caso, a informação de que B tenha ocorrido ou não, não altera a probabilidade de A ocorrer. Por outro lado, dizemos que dois eventos são dependentes se a informação sobre B compromete a probabilidade de A ocorrer. Neste caso, a Eq. (C.4) não se mantém. Não é difícil estender o conceito de independência para n eventos, bastando, para isso, que a relação expressa pela Eq. (C.4) se mantenha para todos os arranjos possíveis dos n eventos tomados dois a dois.

Uma das vantagens de se trabalhar com variáveis aleatórias é a de podermos adotar as noções de momento, esperança, variância, obliquidade e curtose dentre outras grandezas, em variáveis aleatórias. Cada uma delas captura uma determinada característica da variável aleatória. No que se segue, denotamos a esperança matemática (ou valor esperado) de uma variável aleatória X por $\mathbb{E}(X)$. Sabemos que o valor esperado de uma variável aleatória é equivalente à sua média e a calculamos por

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k). \quad (\text{C.6})$$

Chamamos de *momento de ordem n de uma variável aleatória X* a esperança da n -ésima potência de X , isto é,

$$\mathbb{E}(X^n). \quad (\text{C.7})$$

Tabela 5 – Momentos de uma variável aleatória X . Note que o primeiro momento de uma variável aleatória é a sua média (μ), o segundo momento central é a sua variância (σ^2), o terceiro e o quarto momento central padronizado são, respectivamente, a obliquidade e a curtose.

Ordem	Momento	Momento Central	Momento Central Padronizado
1	$\mathbb{E}(X) = \mu$	0	0
2	$\mathbb{E}(X^2)$	$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sigma^2$	1
3	$\mathbb{E}(X^3)$	$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^3)$	$\mathbb{E}\left(\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma}\right)^3\right) = \text{obliquidade}$
4	$\mathbb{E}(X^4)$	$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4)$	$\mathbb{E}\left(\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma}\right)^4\right) = \text{curtose}$

Por conseguinte, denominamos de *momento central de ordem n* de uma mesma variável aleatória X a esperança

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^n). \quad (\text{C.8})$$

Uma medida de momento central é dita *padronizada* se tomamos a esperança

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma}\right)^n\right), \quad (\text{C.9})$$

onde σ é o desvio-padrão da variável aleatória. Essas expressões definem os três tipos de momento a partir dos quais pode se obter a média, a variância, a obliquidade e a curtose. A Tabela 5 sumariza, até a quarta ordem, esses três momentos.

Observe que as constantes 0 e 1 que aparecem na Tabela 5 são decorrência direta das expressões quando substituímos os respectivos valores de ordem nas Eq. (C.7)-(C.9). Outra medida para a curtose, a *curtose de excesso*, bastante usada na literatura, é obtida por $\mathbb{E}\left(\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma}\right)^4\right) - 3$. O valor 3 é referente à curtose da curva normal e, para este caso, a curtose de excesso torna-se zero.

O cálculo dos momentos matemáticos possui diversas aplicações em mecânica e eletricidade com interpretações que variam segundo o fenômeno em questão, embora possa se manter alguns paralelos entre si. Em probabilidade e estatística esses paralelos podem ser estabelecidos. Substituindo a probabilidade pela massa e os valores de k pela posição espacial, o primeiro momento de um sistema de partículas nos fornece o seu centro de massa, ponto a partir do qual pode-se representar todo o sistema de uma forma mais simplificada. É fácil ver que em matéria de probabilidade, podemos assumir o primeiro momento de uma distribuição de probabilidade como uma medida representativa dos dados, uma média em torno da qual obteremos valores da variável aleatória.

O segundo momento em mecânica está associado ao conceito de momento de inércia que, por sua vez, está relacionado com a resistência oferecida por um corpo rígido em realizar movimento angular acelerado. É uma grandeza que depende da distribuição da massa do corpo em relação ao eixo de giro. Em probabilidade, o segundo momento está

associado à dispersão da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória. Entretanto usamos uma medida central, a variância, para medir esta dispersão. Uma variável aleatória só assumirá uma variância zero se todas as suas ocorrências se derem sempre no mesmo ponto, isto é, sem variabilidade ou estocasticidade. Note que a previsibilidade de uma variável aleatória está diretamente associada à essa medida de dispersão, que só pode assumir valores positivos. Quanto maior a variância tanto maior é a imprevisibilidade associada à variável aleatória. Nesse sentido, a variância complementa a informação da medida representativa (média) informando sobre o quão provável é a obtermos.

Entretanto, há ainda distorções na curva de distribuição que podem torná-la assimétrica, isto é, não sendo suficiente apenas saber a média e a variância, uma vez que não poderíamos afirmar se, realmente, haveria uma distribuição de probabilidade em torno (simetricamente) da média. A medida que nos fornece a informação sobre a obliquidade da curva de distribuição é obtida pelo terceiro momento central normalizado de uma variável aleatória. Repare que, devido ao expoente três da equação dessa medida, a obliquidade pode tanto ser negativa quanto positiva a depender da inclinação para a esquerda (sentido negativo) quanto para a direita (sentido positivo).

Por fim, o quarto momento de uma variável aleatória está associado à medida de curtose, que é o quarto momento central normalizado. Devido ao seu expoente, a curtose assume apenas valores positivos. Sua grandeza nos dá a informação sobre as caldas de uma curva de distribuição de probabilidade. Observe que esta medida está, pelo menos intuitivamente, relacionada em certa medida à ideia de dispersão, propriedade sobre a qual já obtemos informação da variância. Note, no entanto, que, devido ao seu expoente, a curtose tende a dar uma ênfase muito maior para aqueles valores afastados da média em comparação com a variância na proporção da quarta potência da distância. Caso a distribuição em questão possua uma calda alongada, isto é, apresente uma densidade de probabilidade mais alta que distribuições exponenciais para valores mais afastados da média, a curtose tende a capturá-la de modo a nos informar sobre o quão (im)provável é obtermos valores muito afastados da média.

APÊNDICE D – Processo Markoviano a tempo Discreto

Denominamos um processo markoviano a tempo discreto um processo estocástico em que o estado presente do sistema depende unicamente de seu estado imediatamente anterior, não importando a história de seus estados passados. Um processo markoviano a tempo discreto é descrito por variáveis aleatórias X_n , onde n é o passo de tempo do sistema e $n = 0, 1, 2, \dots$. Os valores possíveis para X_n são os elementos do conjunto finito $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Assim, podemos atribuir uma probabilidade (condicional) à variável X_n de acordo com os valores assumidos pelas variáveis nos passos anteriores:

$$\mathbb{P}[X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}]. \quad (\text{D.1})$$

Chamamos essa probabilidade condicional de *probabilidade de transição*, e a denotamos por $q(i_n | i_0, \dots, i_{n-1})$. Considerando o estado inicial do sistema como uma probabilidade $\varphi_0(i) = \mathbb{P}[X_0 = i]$, $i \in S$, podemos escrever a probabilidade da sequência finita de estados do sistema $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ como:

$$\mathbb{P}[X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n] = \varphi_0(i_0) q(i_1 | i_0) q(i_2 | i_0, i_1) \dots q(i_n | i_0, \dots, i_{n-1}). \quad (\text{D.2})$$

Aqui, estamos interessados naqueles processos estocásticos que obedecem à propriedade markoviana e, para este caso, a Eq. (D.1) transforma-se em:

$$\mathbb{P}[X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = \mathbb{P}[X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}]. \quad (\text{D.3})$$

Denotamos por $p(i_{n-1}, i_n)$ esta probabilidade condicional do sistema, estando no estado $X_{n-1} = i_{n-1}$ ir para $X_n = i_n$. Isso nos permite simplificar a Eq. (D.2) da seguinte forma:

$$\mathbb{P}[X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n] = \varphi_0(i_0) p(i_0, i_1) p(i_1, i_2) \dots p(i_{n-1}, i_n). \quad (\text{D.4})$$

Repare que p é uma função definida em $S \times S$ sobre $[0, 1]$, uma medida de probabilidade e, portanto,

$$0 \leq p(i, j) \leq 1 \text{ e} \quad (\text{D.5})$$

$$\sum_{j \in S} p(i, j) = 1, \quad i, j \in S. \quad (\text{D.6})$$

Uma matriz de transição $\mathbf{P}$ de uma cadeia de Markov é uma matriz quadrada de ordem $|S|$ cujo elemento (i, j) é $p(i, j)$ e, portanto, deve obedecer às mesmas condições em (D.5) e (D.6). Assim, podemos reescrever a Eq. (D.4) como:

$$\varphi_n = \varphi_0 \mathbf{P}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{D.7})$$

onde φ_n é o vetor de probabilidades do estado do sistema no tempo n .

Dado o vetor de probabilidade inicial φ_0 e a matriz de transição $\mathbf{P}$, podemos determinar a evolução do vetor de probabilidades do estado do sistema ao longo do tempo (cadeia de Markov), ou seja, determinar a probabilidade do estado $X_n = i_n$ que será $\varphi_n(i)$.

APÊNDICE E – Representação numérica de regras de transição

Os autômatos celulares elementares possuem reticulado unidimensional, um conjunto de estado binário $S = \{0, 1\}$ e um raio de vizinhança $r = 1$. Eles foram intensamente estudados por Wolfram (1983), que propôs uma codificação para representar as regras de transição que se tornou um padrão na literatura. Podemos verificar que existem 256 formas distintas de definir a regra de transição local ϕ para um autômato celular elementar, assim, é possível associar a cada uma delas um número natural entre 0 e 255 cuja representação binária corresponde à sequência das imagens definidas por ϕ , conforme ilustrado na Tabela 6.

Tabela 6 – Domínio e expansão binária $\mathcal{E}$ de um autômato celular elementar. Na última linha, a sequência das imagens de ϕ , é apresentada uma das 256 regras possíveis, no caso, a regra $110 = (01101110)_2$.

$\eta \in \mathcal{D}(\phi)$	(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(1, 0, 0)	(0, 1, 1)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
$\mathcal{E}(\eta)$	7	6	5	4	3	2	1	0
$\phi(\eta)$	0	1	1	0	1	1	1	0

Seguindo essa mesma ideia para k estados e $|\eta|$ vizinhos, devemos primeiramente mapear biunivocamente cada um dos $k^{|\eta|}$ elementos do domínio $\mathcal{D}(\phi)$ a um número natural do conjunto $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, k^{|\eta|} - 1\} \subset \mathbb{N}$ que pode ser realizado pela expansão k -ária dos elementos $\eta \in \mathcal{D}(\phi)$, como se segue:

$$\mathcal{E}(\eta) = \sum_{i=1}^{|\eta|} \eta_i k^{i-1}, \quad (\text{E.1})$$

onde $\mathcal{E} : S^{|\eta|} \mapsto \mathcal{N}$ denota o mapa da expansão e $\eta_i \in S$ é o i -ésimo componente (da direita para a esquerda) desse mesmo elemento. Repare que $\mathcal{E} < k^{|\eta|}$ e, nos servirá para definir numericamente uma regra de transição ϕ , numa base decimal pela operação:

$$\phi \equiv \sum_{\eta \in \mathcal{D}(\phi)} k^{\mathcal{E}(\eta)} \phi(\eta). \quad (\text{E.2})$$

O valor obtido a partir de (E.2) corresponde a um número representando uma das $k^{k^{|\eta|}}$ regras de transição ϕ possíveis. No caso do exemplo apresentado na Tabela 6, essa regra é representada por 01101110, cuja base é 2.

No caso de GKL4, temos $k = 4$ e $|\eta| = 3$. Aplicando a mesma lógica acima à sua

tabela de transição, obtemos a seguinte representação da regra de transição ϕ de GKL4:

$$\phi_{GKL4} = (2212221213130000221222121313333322122212131333330020002013130000)_4 \text{ ou}$$

$$\phi_{GKL4} = (221516182237131410831087411648786888448)_{10}.$$

APÊNDICE F – Proposição de autômatos celulares classificadores de densidade

No estudo do GKL4, compreendemos o funcionamento de alguns dos mecanismos computacionais do algoritmo de classificação. Isso nos possibilitou elaborar e propor alguns autômatos celulares classificadores de densidades que, à primeira vista, parecem não apresentar resultados triviais. Esses autômatos celulares são brevemente descritos neste apêndice. O primeiro, de quatro estados e raio de vizinhança $r = 1$, possui uma propriedade peculiar que está ausente nas versões de GKL: a velocidade idêntica de propagação. Vimos que, no GKL4, a diferença entre as velocidades de propagação de alguns estados é a responsável pela propriedade de emergir o consenso. Essa característica não está presente no modelo aqui proposto, denominado de SQR4.

A Figura 12 apresenta um exemplo de diagrama espaço-temporal do autômato celular SQR4. Observe que as inclinações referentes às propagações, seja para a esquerda ou para a direita, são idênticas para todos os domínios de estado. Em algumas simulações realizadas, encontramos que SQR4 não é um classificador perfeito e que possui uma eficiência de classificação inferior ao GKL4. Em nossos estudos subsequentes, realizaremos os experimentos de simulações necessários para apurar com maior precisão a taxa de eficiência de SQR4 em função de sua densidade inicial. O rótulo da regra de transição de SQR4 é dado por

$$\phi_{SQR4} = (3330333012120000323033301212222211121113121222223330333012120000)_4 \text{ ou } \phi_{SQR4} = (336275982625272745452461929185561830912)_{10}.$$

O segundo modelo aqui proposto, denominado de PRF5, refere-se a um autômato celular classificador de densidade perfeito de cinco estados e raio de vizinhança $r = 1$. Da mesma forma como o SQR4, o PRF5 classifica apenas dois estados, sendo os demais estados necessários no processo de computação da classificação de densidades. A computação efetuada por PRF5 é semelhante aos processos efetuados pelos autômatos celulares elementares CA184 e CA232, processos estes que combinados em dois estágios, constituem um autômato celular classificador perfeito de densidades (FUKS, 1997). No entanto, diferentemente da solução composta apresentada em FUKS (1997), que exige a informação do tamanho do autômato celular, PRF5 necessita apenas de um quinto estado para separar esses processos. Para classificar perfeitamente os estados **0** e **1**, a configuração inicial de PRF5 deverá incluir duas células consecutivas e únicas de estados **2** e **3** que desempenham função de separar dois processos: o primeiro, equivalente ao CA184 e o

Figura 12 – Diagrama de espaço-tempo do autômato celular SQR4 $k = 4$ e $r = 1$ de tamanho $L = 231$. As propagações em SQR4 possuem velocidades idênticas. Seu mecanismo de classificação é diferente de GKL4 que funciona pela diferença de velocidades das propagações. Esquema de cores dos estados: **0** = amarela; **1** = azul; **2** = branco; **3** = preto; Densidades iniciais $N_0(0) = 120$ e $N_1(0) = 111$ com distribuição aleatória.

segundo, equivalente ao CA232. O rótulo da regra de transição de PRF5 é dado por

$$\begin{aligned} \phi_{PRF5} &= (444404401444222131100000044440333131422213110000004444044414442221311 \\ &02222211110333134422213110111114444033313440001311000000)_5 \text{ ou} \\ \phi_{PRF5} &= (234795174603556740181052456404767906533618892558359922960411477056820 \\ &8992075621341109375)_{10}. \end{aligned}$$

Os estados auxiliares normalmente podem aparecer no processo de sorteio da configuração inicial sem afetar a capacidade de classificação do autômato celular pois são rapidamente substituídos por um dos estados classificáveis. Entretanto esta não é uma regra geral, podendo existir estados auxiliares que não podem participar do sorteio aleatório das configurações iniciais por exercerem funções muito específicas na mecânica computacional do classificador, a exemplo dos estados **3** e **4** do autômato celular PRF5. Esses estados são "colocados com a mão" nas configurações iniciais. A título de sistematização, podemos denominar os dois tipos de estados auxiliares como *dinâmico* e *estático*, respectivamente. Por exemplo, no caso do autômato celular PRF5, teríamos os estados **0** e **1** como classificáveis;

2 como auxiliar dinâmico e; **3** e **4** como auxiliares estáticos.

A distinção entre estados auxiliares dinâmicos e estáticos é útil pois sabemos que o uso de estados estáticos permite encontrar uma solução perfeita para o problema da maioria com convergência. Todavia, se considerarmos todo o universo de configurações iniciais possíveis (isto é, incluindo no seu sorteio os estados auxiliares estáticos) o classificador perfeito falha a ponto de tender a zero a sua eficiência.

O universo das configurações iniciais de um autômato celular classificador binário de k estados é dado por k^L . Se, desses k estados, um for do tipo auxiliar estático, teremos um universo bem mais restrito para as configurações iniciais do autômato celular com $(k - 1)^L$ elementos distintos. Esse segundo universo é apenas uma fração do primeiro, isto é, $\left(\frac{k-1}{k}\right)^L$. Na medida em que $L \gg 1$, essa fração tende à zero.

SQR4 é um classificador binário de quatro estados e PRF5 um classificador binário de cinco estados sendo um deles estado auxiliar dinâmico e os outros dois, estados auxiliares estáticos, isto é, que não podem participar do processo de sorteio das configurações iniciais dos experimentos sem comprometer a capacidade de classificação do autômato celular.

APÊNDICE G – Cálculos para aproximação de campo médio simples de GKL4 sem ruído.

A partir da Eq. (2.7), podemos verificar que, para um certo nível de ruído α , apenas uma parcela se efetiva como transição aleatória. Isto decorre do fato de que introduzimos ruído no sistema de acordo com um operador de ruído descrito na Eq. (2.8). Este operador, que atua somente após a aplicação da regra de transição Φ_{GKL4} em cada sítio, consiste numa transição aleatória do estado com probabilidade α . Em GKL4, isso se traduz numa transição aleatória para um dos quatro estados com probabilidade $b = \alpha/4$. Como um desses estados é o estado atual do sítio, apenas $3\alpha/4$ do ruído se efetiva, em média, como transição aleatória. Denotamos por B a probabilidade de transição de um sítio conforme a regra de transição Φ_{GKL4} após a aplicação do operador de ruído. Essa é a probabilidade complementar do ruído efetivo. Assim $B = 1 - 3\alpha/4$.

Para sabermos a probabilidade $P_t(s)$ de encontrarmos um estado s no tempo t , de acordo com a Eq. (2.9), precisamos somar todas as parcelas de probabilidade que nos conduzem ao estado s determinado. Para cada $s \in S$, teremos:

$$P_t(\Lambda = 0) = \sum_{\eta^0} \Psi(0|\eta^0) P_{t-1}(\eta^0) \quad (\text{G.1})$$

$$P_t(\Lambda = 1) = \sum_{\eta^1} \Psi(1|\eta^1) P_{t-1}(\eta^1) \quad (\text{G.2})$$

$$P_t(\Lambda = 2) = \sum_{\eta^2} \Psi(2|\eta^2) P_{t-1}(\eta^2) \quad (\text{G.3})$$

$$P_t(\Lambda = 3) = \sum_{\eta^3} \Psi(3|\eta^3) P_{t-1}(\eta^3). \quad (\text{G.4})$$

As medidas de probabilidade condicional $\Psi(\cdot)$ podem ser encontradas na Tabela 7. Desenvolvendo a Eq. (G.1) obtemos:

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{0}) = & B \cdot P_{t-1}(\mathbf{000}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{001}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{002}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{003}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{010}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{011}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{012}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{013}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{020}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{021}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{022}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{023}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{030}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{031}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{032}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{033}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{100}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{101}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{102}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{103}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{110}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{111}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{112}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{113}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{120}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{121}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{122}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{123}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{130}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{131}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{132}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{133}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{200}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{201}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{202}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{203}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{210}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{211}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{212}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{213}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{220}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{221}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{222}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{223}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{230}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{231}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{232}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{233}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{300}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{301}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{302}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{303}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{310}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{311}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{312}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{313}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{320}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{321}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{322}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{323}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{330}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{331}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{332}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{333}).
\end{aligned}$$

Agrupando os termos e simplificando a partir da Eq. (2.13), obtemos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{0}) = & B \cdot P_{t-1}(\mathbf{00}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{01}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{020}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{021}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{022}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{023}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{030}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{031}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{032}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{033}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{10}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{11}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{12}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{13}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{20}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{21}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{22}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{23}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{30}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{31}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{32}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{33}) \therefore \\
P_t(\mathbf{0}) = & B \cdot P_{t-1}(\mathbf{00}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{01}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{020}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{022}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{023}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{021}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{030}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{032}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{033}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{031}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{1}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{2}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{30}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{31}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{32}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{33}),
\end{aligned}$$

chegando finalmente em

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{0}) = & B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{00}) + P_{t-1}(\mathbf{02}) - P_{t-1}(\mathbf{021})) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{30}) + P_{t-1}(\mathbf{03}) - P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{01}) + P_{t-1}(\mathbf{021}) + P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{1}) + P_{t-1}(\mathbf{2}) + P_{t-1}(\mathbf{3}) - P_{t-1}(\mathbf{30})).
\end{aligned} \tag{G.5}$$

O procedimento para a obtenção da expressão de $P_t(\mathbf{1})$, dada pela Eq. (G.2), é semelhante e resulta em:

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{1}) = & B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{11}) + P_{t-1}(\mathbf{21}) - P_{t-1}(\mathbf{021})) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{13}) + P_{t-1}(\mathbf{31}) - P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{01}) + P_{t-1}(\mathbf{021}) + P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{0}) + P_{t-1}(\mathbf{2}) + P_{t-1}(\mathbf{3}) - P_{t-1}(\mathbf{13})).
\end{aligned} \tag{G.6}$$

Para obtermos a expressão de $P_t(\mathbf{2})$, desenvolvemos a Eq. (G.3) com as entradas correspondentes da Tabela 7 e obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{2}) = & b \cdot P_{t-1}(\mathbf{000}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{001}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{002}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{003}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{010}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{011}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{012}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{013}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{020}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{021}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{022}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{023}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{030}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{031}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{032}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{033}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{100}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{101}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{102}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{103}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{110}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{111}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{112}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{113}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{120}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{121}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{122}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{123}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{130}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{131}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{132}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{133}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{200}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{201}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{202}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{203}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{210}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{211}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{212}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{213}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{220}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{221}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{222}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{223}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{230}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{231}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{232}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{233}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{300}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{301}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{302}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{303}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{310}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{311}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{312}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{313}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{320}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{321}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{322}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{323}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{330}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{331}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{332}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{333}).
\end{aligned}$$

Realizando os devidos agrupamentos dos termos e usando as relações da Eq. (2.13),

podemos desenvolver a expressão como se segue:

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{2}) = & b \cdot P_{t-1}(\mathbf{00}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{01}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{021}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{020}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{022}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{023}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{031}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{030}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{032}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{033}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{10}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{11}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{120}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{122}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{123}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{121}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{130}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{132}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{133}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{131}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{20}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{21}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{220}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{222}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{223}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{221}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{230}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{232}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{233}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{231}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{30}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{31}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{320}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{322}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{323}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{321}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{330}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{332}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{333}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{331}) \therefore
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{2}) = & b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{0}) + P_{t-1}(\mathbf{1})) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{021}) + b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{02}) - P_{t-1}(\mathbf{021})) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{031}) + b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{03}) - P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{12}) - P_{t-1}(\mathbf{121})) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{121}) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{13}) - P_{t-1}(\mathbf{131})) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{131}) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{22}) - P_{t-1}(\mathbf{221})) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{221}) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{23}) - P_{t-1}(\mathbf{231})) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{231}) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{32}) - P_{t-1}(\mathbf{321})) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{321}) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{33}) - P_{t-1}(\mathbf{331})) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{331}) \therefore
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{2}) = & b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{0}) + P_{t-1}(\mathbf{1})) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{021}) + b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{02}) - P_{t-1}(\mathbf{021})) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{031}) + b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{03}) - P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{2}) - P_{t-1}(\mathbf{02}) - P_{t-1}(\mathbf{21}) + P_{t-1}(\mathbf{021})) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{3}) - P_{t-1}(\mathbf{03}) - P_{t-1}(\mathbf{31}) + P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{21}) - P_{t-1}(\mathbf{021})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{31}) - P_{t-1}(\mathbf{031})).
\end{aligned}$$

Finalizando como:

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{2}) = & B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{2}) - P_{t-1}(\mathbf{02}) - P_{t-1}(\mathbf{21}) + 2P_{t-1}(\mathbf{021})) + \\
& B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{3}) - P_{t-1}(\mathbf{03}) - P_{t-1}(\mathbf{31}) + 2P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{0}) + P_{t-1}(\mathbf{1})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{02}) - P_{t-1}(\mathbf{021}) + P_{t-1}(\mathbf{03}) - P_{t-1}(\mathbf{031})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{21}) - P_{t-1}(\mathbf{021})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{31}) - P_{t-1}(\mathbf{031})). \tag{G.7}
\end{aligned}$$

Para concluir, desenvolvemos a expressão para $P_t(\mathbf{3})$, dada por [G.4](#), agrupando e simplificando as expressões como se segue:

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{3}) = & b \cdot P_{t-1}(\mathbf{000}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{001}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{002}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{003}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{010}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{011}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{012}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{013}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{020}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{021}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{022}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{023}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{030}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{031}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{032}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{033}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{100}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{101}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{102}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{103}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{110}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{111}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{112}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{113}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{120}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{121}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{122}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{123}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{130}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{131}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{132}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{133}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{200}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{201}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{202}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{203}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{210}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{211}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{212}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{213}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{220}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{221}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{222}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{223}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{230}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{231}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{232}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{233}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{300}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{301}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{302}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{303}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{310}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{311}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{312}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{313}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{320}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{321}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{322}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{323}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{330}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{331}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{332}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{333}) \therefore
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{3}) = & b \cdot P_{t-1}(\mathbf{00}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{010}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{012}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{011}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{013}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{02}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{03}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{10}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{110}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{112}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{111}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{113}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{12}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{13}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{20}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{210}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{212}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{211}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{213}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{22}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{23}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{30}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{310}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{312}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{311}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{313}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{32}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{33}) \therefore
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{3}) = & b \cdot P_{t-1}(\mathbf{00}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{10}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{12}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{11}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{13}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{02}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{03}) + \\
& B \cdot P_{t-1}(\mathbf{10}) + B \cdot P_{t-1}(\mathbf{20}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{12}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{13}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{22}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{23}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{30}) + \\
& b \cdot P_{t-1}(\mathbf{32}) + b \cdot P_{t-1}(\mathbf{33}),
\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{3}) = & B \cdot (P_{t-1}(\mathbf{10}) + P_{t-1}(\mathbf{12}) + P_{t-1}(\mathbf{10}) + P_{t-1}(\mathbf{20})) + \\
& b \cdot (P_{t-1}(\mathbf{2}) + P_{t-1}(\mathbf{3}) + P_{t-1}(\mathbf{00}) + P_{t-1}(\mathbf{30}) + P_{t-1}(\mathbf{11}) + P_{t-1}(\mathbf{13})). \quad (\text{G.8})
\end{aligned}$$

Assumiremos agora um sistema sem ruídos, onde $\alpha = 0$, $B = 1$ e $b = 0$. Isto nos fornece as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
P_t(\mathbf{0}) = & P_{t-1}(\mathbf{00}) + P_{t-1}(\mathbf{02}) - P_{t-1}(\mathbf{021}) + \\
& P_{t-1}(\mathbf{30}) + P_{t-1}(\mathbf{03}) - P_{t-1}(\mathbf{031}) \\
P_t(\mathbf{1}) = & P_{t-1}(\mathbf{11}) + P_{t-1}(\mathbf{21}) - P_{t-1}(\mathbf{021}) + \\
& P_{t-1}(\mathbf{13}) + P_{t-1}(\mathbf{31}) - P_{t-1}(\mathbf{031}) \\
P_t(\mathbf{2}) = & P_{t-1}(\mathbf{2}) - P_{t-1}(\mathbf{02}) - P_{t-1}(\mathbf{21}) + 2P_{t-1}(\mathbf{021}) + \\
& P_{t-1}(\mathbf{3}) - P_{t-1}(\mathbf{03}) - P_{t-1}(\mathbf{31}) + 2P_{t-1}(\mathbf{031}) \\
P_t(\mathbf{3}) = & P_{t-1}(\mathbf{10}) + P_{t-1}(\mathbf{12}) + P_{t-1}(\mathbf{10}) + P_{t-1}(\mathbf{20})
\end{aligned}$$

Para procedermos a aproximação por campo médio simples neste caso, precisamos truncar as probabilidades dos blocos de dois e três estados encontrados nessas equações nos

termos das probabilidades individuais de cada um dos estados dos blocos, de acordo com a Eq. (2.14). Obtemos assim as seguintes equações aproximadas (para aproximação simples):

$$\begin{aligned}
P_t(0) &\approx P_{t-1}(0)^2 + P_{t-1}(0)P_{t-1}(2) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) + \\
&\quad P_{t-1}(3)P_{t-1}(0) + P_{t-1}(0)P_{t-1}(3) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) \\
P_t(1) &\approx P_{t-1}(1)^2 + P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) + \\
&\quad P_{t-1}(1)P_{t-1}(3) + P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) \\
P_t(2) &\approx P_{t-1}(2) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(2) - P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) + 2P_{t-1}(0)P_{t-1}(2)P_{t-1}(1) + \\
&\quad P_{t-1}(3) - P_{t-1}(0)P_{t-1}(3) - P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) + 2P_{t-1}(0)P_{t-1}(3)P_{t-1}(1) \\
P_t(3) &\approx P_{t-1}(1)P_{t-1}(0) + P_{t-1}(1)P_{t-1}(2) + P_{t-1}(1)P_{t-1}(0) + P_{t-1}(2)P_{t-1}(0)
\end{aligned}$$

Tabela 7 – Probabilidade conjunta de transição $\Psi(\Lambda|\eta^\Lambda)$ para nível de ruído α . Denotamos por B a probabilidade associada à transição prevista na regra de transição de GKL4 e b a probabilidade de ruído efetivo. De acordo com a Eq. (2.7), $B = 1 - 3\alpha/4$ e $b = \alpha/4$.

η^Λ	Λ				η^Λ	Λ				η^Λ	Λ				η^Λ	Λ			
	0	1	2	3		0	1	2	3		0	1	2	3		0	1	2	3
(000)	B	b	b	b	(010)	b	b	b	B	(020)	B	b	b	b	(030)	B	b	b	b
(001)	B	b	b	b	(011)	b	B	b	b	(021)	b	b	B	b	(031)	b	b	B	b
(002)	B	b	b	b	(012)	b	b	b	B	(022)	B	b	b	b	(032)	B	b	b	b
(003)	B	b	b	b	(013)	b	B	b	b	(023)	B	b	b	b	(033)	B	b	b	b
(100)	b	b	b	B	(110)	b	b	b	B	(120)	b	b	B	b	(130)	b	b	B	b
(101)	b	b	b	B	(111)	b	B	b	b	(121)	b	B	b	b	(131)	b	B	b	b
(102)	b	b	b	B	(112)	b	b	b	B	(122)	b	b	B	b	(132)	b	b	B	b
(103)	b	b	b	B	(113)	b	B	b	b	(123)	b	b	B	b	(133)	b	b	B	b
(200)	b	b	b	B	(210)	b	b	b	B	(220)	b	b	B	b	(230)	b	b	B	b
(201)	b	b	b	B	(211)	b	B	b	b	(221)	b	B	b	b	(231)	b	B	b	b
(202)	b	b	b	B	(212)	b	b	b	B	(222)	b	b	B	b	(232)	b	b	B	b
(203)	b	b	b	B	(213)	b	B	b	b	(223)	b	b	B	b	(233)	b	b	B	b
(300)	B	b	b	b	(310)	b	b	b	B	(320)	b	b	B	b	(330)	b	b	B	b
(301)	B	b	b	b	(311)	b	B	b	b	(321)	b	B	b	b	(331)	b	B	b	b
(302)	B	b	b	b	(312)	b	b	b	B	(322)	b	b	B	b	(332)	b	b	B	b
(303)	B	b	b	b	(313)	b	B	b	b	(323)	b	b	B	b	(333)	b	b	B	b