UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ARTES, CIÊNCIAS E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM DE SISTEMAS
COMPLEXOS

CARLOS EDUARDO HIRTH PIMENTEL

**Otimização dinâmica e controle
na extração de recursos florestais**

SÃO PAULO
2014

CARLOS EDUARDO HIRTH PIMENTEL

**Otimização dinâmica e controle
na extração de recursos florestais**

Dissertação apresentada à Escola de Artes Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos.

Versão corrigida contendo as alterações solicitadas pela comissão julgadora em 23 de setembro de 2014. A versão original encontra-se em acervo reservado na Biblioteca da EACH-USP de acordo com a resolução CoPGr 6018 de outubro de 2011.

Orientador: Marcone Corrêa Pereira

SÃO PAULO
2014

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO

(Universidade de São Paulo. Escola de Artes, Ciências e Humanidades. Biblioteca)

Pimentel, Carlos Eduardo Hirth

Otimização dinâmica e controle na extração de recursos florestais /
Carlos Eduardo Hirth Pimentel ; orientador, Marcone Corrêa Pereira. – São
Paulo, 2014.
63 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-
Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos, Escola de Artes,
Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, em 2014
Versão corrigida

1. Ecologia – Modelos matemáticos. 2. Manejo florestal –
Modelos matemáticos. 3. Recursos naturais – Modelos matemáticos.
4. Exploração florestal – Modelos matemáticos. 5. Biomatemática. I.
Pereira, Marcone Corrêa, orient. II. Título.

CDD 22.ed. – 577.015118

Nome: Carlos Eduardo Hirth Pimentel

Título: Otimização Dinâmica e Controle na Extração de Recursos Florestais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos da Escola de Artes Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

APROVADO EM: 23/09/ 2014

BANCA EXAMINADORA

PROF. DR. MARCONE CORRÊA PEREIRA

INSTITUIÇÃO: EACH - UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)

PROF. DR. PAULO ANTONIO DE ALMEIDA SINISGALLI

INSTITUIÇÃO: EACH - UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)

PROF. DR. RICARDO PARREIRA DA SILVA

INSTITUIÇÃO: IGCE - UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA (UNESP)

*Dedico este trabalho a Tiago A. Pimentel e Margarete B. E. Hirth,
que me deram a vida e todo o incentivo para sonhar.*

Agradecimentos

À minha família, e em especial à minha mãe, Margarete Babetta Elisabeth Hirth Pimentel, por me educar, sempre incentivar, e ensinar-me valores como o do respeito devido a todos, independentemente de crença, raça ou classe social, a meu pai Tiago Alves Pimentel (em memória), que apesar de não ter completado a educação básica, sabia da importância da educação e incentivou-me a estudar, a meus irmãos - Teresa Cristina Hirth Pimentel, Jorge Henrique, Miguel Ângelo, e a meus sobrinhos - Leonardo, Tiago e Mateus.

Aos meus grandes amigos por todos os alegres momentos, que sempre me deram força para concluir essa difícil tarefa - Natasha Leal, Giovani Bugre, Carlos Aquino, Igor Scaramuzzi, Iris Araújo, Fabiano Ionta, Rodolfo Valentim, Wagner Nishikawa, Massanobo Tachikawa. Aos colegas de mestrado pela amizade, colaborações, trocas de ideias, e pelos diversos momentos de reflexão, aprendizado e também de descontração. A Leandro Augusto Ferreira, pelas trocas de ideias acadêmicas sobre métodos matemáticos de sistemas complexos, redes complexas, estatística, finanças, Lattex, e sobre as imensas potencialidades das ciências da complexidade, e mais profundamente pela amizade e apoio.

Ao professor Fernando Fagundes Ferreira pelos conselhos e orientações. Aos professores - Massayuki Hasi, Alexandre Ramos, Camilo Neto, Marcone Pereira, Cândido Xavier, André Martins, Aldrea Leite Rodrigues, Fernando Coelho, Flávia Sarti e Paulo Sinisgalli pelas ótimas aulas ministradas durante o curso.

À professora Flávia Sarti pela dedicação como coordenadora do programa de mestrado em Modelagem de Sistemas Complexos da USP.

Ao professor Marcone Corrêa Pereira, meu orientador, por me incentivar, apoiar e guiar com sabedoria meu foco de estudo nesta dissertação de mestrado.

À Escola de Artes, Ciências e Humanidades pela criação do programa de Pós-Graduação em Sistemas Complexos.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

*O trabalho é o pai e a natureza a mãe
de toda a riqueza*

Sir William Petty

Resumo

PIMENTEL, C. E. H. **Otimização dinâmica e controle na extração de recursos florestais**. 2014. 64 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Este trabalho aborda um método de otimização dinâmica baseado em modelos bioeconômicos estabelecidos na teoria do controle ótimo, que visa modelar o resultado econômico-financeiro relacionado à atividade de extração dos recursos naturais, de modo que a otimização do resultado financeiro seja controlada por uma extração sustentável desse recurso. Mais especificamente, consideramos a exploração de madeira florestal restrita a uma série de vínculos econômicos e operacionais, bem como à dinâmica de crescimento natural da floresta. Avaliando o uso efetivo dessa metodologia aplicada ao planejamento das concessões florestais e procurando contribuir com o debate a respeito da viabilidade da forma de gestão florestal baseada em concessões florestais no Brasil.

Palavras chave: Otimização Dinâmica/Teoria do Controle Ótimo. Modelagem Bioeconômica. Manejo Florestal. Economia dos Recursos Renováveis.

Abstract

PIMENTEL, C. E. H. **Dynamic optimization and control for forest timber harvesting**. 2014. 64 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

This work addresses a dynamic optimization method based on bioeconomics models established in optimal control theory, which aims to model the economic-financial result related to the activity of extraction of natural resources, so that the optimization of the financial result is controlled by a sustainable extraction of this resources. More specifically, we consider the exploration of forest wood restricted to a series of economic and operational linkages, as well as the dynamics of natural forest growth. Assessing the effective use of this methodology applied to the planning of forest concessions and seeking to contribute to the debate about the viability of forest management form based on forest concessions in Brazil.

Keywords: Dynamic Optimization/Optimal Control Theory. Bioeconomics Modeling. Forest Management. Renewable-Resources Economics.

Lista de Figuras

2.1	Subdivisão da Floresta em Talhoes (IMAZON)	16
2.2	Desmatamento Florestal no Brasil (INPE)	18
3.1	Classificação dos modelos pela função de crescimento (F) e densidade populacional (N)	24
3.2	Comportamento da equação diferencial logística	26
3.3	Pontos de Equilíbrio na Produção Sustentável Máxima	30
3.4	Função de Crescimento Logística e Extração Linear	33
3.5	Comparações entre diferentes taxas de descontos	39
4.1	Intervalo de soluções possíveis entre a faixa de preço de R\$ 500.00 a R\$ 1000.00 em função da taxa de desconto.	58

Lista de Abreviaturas

RNR	Recursos Naturais Renováveis
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EDE	Equações Diferenciais Estocásticas
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
SBE	Serviço Florestal Brasileiro
FNDF	Fundo Nacional de Desenvolvimento Florestal
MMA	Ministério do Meio Ambiente
FLONA	Florestas Nacionais
VP	Valor Presente
APP	Área de Proteção Permanente

Sumário

1	Introdução	12
2	Manejo Florestal e Economia dos Recursos Naturais	15
2.1	Manejo Florestal	15
2.2	Economia dos Recursos Naturais	19
3	Modelos Bioeconômicos	23
3.1	Modelos Bioeconômicos	23
3.2	Modelos Aplicados ao Crescimento Populacional	23
3.2.1	Modelos Contínuos	25
3.2.2	Modelo Dinâmico de Extração de Recursos	27
3.2.3	Tipos de Funções de Crescimento Contínuas	28
3.3	Equilíbrios Bioeconômicos	30
3.3.1	Produção sustentável máxima	30
3.3.2	Equilíbrio em acesso aberto	32
3.3.3	Renda Máxima Sustentável	35
3.3.4	Valor Presente Máximo	36
3.4	Teoria do Controle e Otimização Dinâmica	40
3.4.1	Cálculo Variacional	41
3.4.2	Elementos da Teoria do Controle	42
3.4.3	Princípio Máximo de Pontryagin	43
3.4.4	Interpretação Econômica a partir da Estrutura Hamiltoniana	45
3.4.5	Equação Adjunta num Problema de Cálculo Variacional	46
4	Resultados	48
4.1	Análise Qualitativa do Modelo	48
4.2	Cálculo da Intensidade de Extração no Manejo	54
4.3	Resultados obtidos na Teoria de Controle	55
5	Conclusões	60

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho abordamos problemas relacionados à exploração de recursos naturais renováveis (RNR), mais especificamente, à exploração de madeira no modelo de concessão florestal do tipo FLONA, no âmbito da lei 11284 (Brasil, 2006), que regulamenta a gestão das florestas públicas.

O problema central deste trabalho é estudar e avaliar as possibilidades de otimizar os resultados financeiros para uma atividade de concessão florestal estável e que concilie sustentabilidade econômica e ecológica simultaneamente, propiciando a conservação dos recursos juntamente com o resultado econômico positivo obtido da atividade extrativa. Aliar o desenvolvimento econômico social com sustentabilidade ambiental é atualmente um desafio fundamental e complexo. ((Pillet, 1993) ; (Hanley *et al.*, 1997) ; (White, 2000))

A abordagem proposta para discutir esse tema, que é estabelecido como um problema de otimização sob restrições denominado Otimização dinâmica ou teoria do controle ótimo, é amplamente abordada em Chiang (1992) ou na referência clássica de Modelagem Bioeconômica Clark (2010).

Um modelo bioeconômico de otimização dinâmica possui em sua estrutura a maximização de uma funcional objetivo, relacionada ao ganho da atividade sob o ponto de vista econômico. Neste trabalho, essa funcional será representada pela expressão do valor presente (VP) de uma concessão florestal, a qual é dada pela seguinte expressão (1.1)

$$\max_{Y \in \mathbb{Y}} VP = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (p - C_m(V)) Y(V(t)) dt \quad (1.1)$$

sujeita as restrições:

$$\frac{dV}{dt} = G(V) - Y(V(t)) \quad (1.2)$$

$$V(t) \geq 0 \quad (1.3)$$

$$Y(V(t)) = q_c V(t) \quad (1.4)$$

$$0 \leq Y(V(t)) \leq Y_{max} \quad (1.5)$$

V(t) Estoque de Madeira por unidade de área [$\frac{m^3}{ha}$]

Y(V) Extração de Madeira por unidade de área [$\frac{m^3}{ha}$]

δ Taxa de desconto anual [ano^{-1}]

p Preço da madeira [$\$/ano$]

C_m Custos de manutenção da atividade [$\$/ha$]

q_c Taxa de extração do recurso [adimensional]

$C_m(V)$ representa o custo por volume de extração , dado pela fórmula:

$$C_m(V) = \frac{C_m}{q_c V} \quad (1.6)$$

Maiores detalhes inerentes aos aspectos de modelagem serão discutidos em 3, 3.4 e 4.

Focando rapidamente na descrição anterior, o modelo é subdividido em duas partes, na qual a primeira, dada pela equação (1.1), é o cálculo do valor presente (equação amplamente utilizada na análise de investimentos em finanças). Pode ser entendido como o valor das receitas líquidas futuras trazido ao presente, descontado por uma taxa δ . Os resultados financeiros da atividade, representados pela expressão: $(p - C_m(V))Y(V)$, , acumulados ao longo da atividade (representada pela integral definida do tempo 0 a T) são trazidos a valor presente em função da taxa de desconto δ . Como o objetivo de uma atividade econômica é maximizar os seus resultados, nesse caso temos a maximização do valor presente como a maximização do resultado econômico da atividade no decorrer da trajetória temporal dessa atividade.

Na segunda parte temos a lista de restrições, incluindo as restrições ambientais dadas pela equação diferencial ordinária (1.2) e as condições (1.3), (1.4) e (1.5). A primeira (1.2) vincula o estoque de recurso V em função da dinâmica de crescimento natural e também da extração desse recurso ¹. As demais restrições são relativas à característica operacional

¹A função G modela o crescimento natural da floresta e $Y(V)$ a exploração da madeira

da atividade extrativista, na qual a equação (1.4) diz respeito à forma de extração, aqui dada como uma função linear da quantidade de biomassa V . Por último, a limitação do esforço extrativo, dada pela desigualdade (1.5).

Como pode ser notado, o modelo pode ser aplicado a diversos casos de exploração de RNR, que implicam na parcimônia entre a otimização dos resultados em função também de vínculos determinados pela escassez dos recursos naturais e operacionais.

Este trabalho, por se basear em uma técnica de modelagem, obviamente não pretende ter uma aplicabilidade infinitamente ampla para tratar todos os problemas relacionados com a complexidade dos sistemas naturais abordados aqui. Neste trabalho introduzimos algumas técnicas de modelagem bioeconômica e propomos um modelo matemático como forma alternativa de análise, com possíveis aplicações na metodologia de manejo florestal.

Neste modelo, determinamos que o equilíbrio sustentável é restrito aos tipos de árvores que fornecem madeira de interesse econômico na concessão florestal (objeto da exploração). O mesmo também não será amplo a ponto de especificar as interações com outras espécies, mutualismos com a fauna local, diversos efeitos e interações com a sociedade e demais elementos da biosfera, etc. A princípio, as variáveis do problema serão a densidade de biomassa, da espécie de interesse, e demais variáveis econômicas.

Pretende-se, portanto, adaptar o modelo para captar exclusivamente a dinâmica do crescimento da biomassa florestal e o seu equilíbrio de renovação frente à atividade de exploração. Definimos um modelo inicialmente simples, univariado, considerando apenas a dinâmica de uma espécie de árvore (um tipo de árvore ou espécies aproximadamente similares), de forma que seja considerada apenas uma única taxa de crescimento da biomassa florestal. Discutindo, desta forma, o problema de maneira homogênea.

Capítulo 2

Manejo Florestal e Economia dos Recursos Naturais

2.1 Manejo Florestal

O manejo florestal sustentável pode ser definido segundo (Silva, 1996) como:

Administração da floresta para a obtenção de benefícios econômicos, sociais e ambientais, respeitando-se os mecanismos de sustentação do ecossistema (objeto do manejo) e considerando-se, cumulativa ou alternativamente, a utilização de múltiplas espécies madeireiras, de múltiplos produtos e subprodutos não madeireiros, bem como a utilização de outros bens e serviços de natureza florestal

O caráter sustentável mencionado nessa definição implica que o manejo deve ser economicamente viável com base numa atividade de extração ecologicamente sustentável. Neste contexto, destacamos que a conservação não implica em não uso dos recursos. Este princípio pode ser validado pela presença das comunidades pré-colombianas ocupando a Amazônia, há cerca de 14.000 anos (Bueno, 2010). Os nativos ancestrais faziam uso dos produtos oriundos das florestas para sua subsistência, sem no entanto esgotá-los.

Partindo dos princípios mencionados anteriormente, as técnicas de manejo implicam numa exploração de impacto reduzido, ou seja, uma exploração planejada e baseada em técnicas empíricas, e no monitoramento da capacidade de crescimento, possibilitando a recuperação contínua da floresta.

O planejamento do manejo se divide em duas grandes etapas, denominadas Macroplanejamento e Microplanejamento (IMAZON, 1998)

O Macroplanejamento tem a função de avaliar a viabilidade técnica do manejo florestal, tanto do ponto de vista econômico quanto ambiental. É nesta etapa que são feitos

os levantamentos sobre o relevo, inventário amostral das espécies e mapeamentos de rios, nascentes, igarapés, estradas de acesso, etc. A partir desses levantamentos é feita uma avaliação de viabilidade. Esta sendo positiva, é desenvolvido então um plano de manejo florestal sustentável. (IMAZON, 1998)

Após efetuado com sucesso o Macroplanejamento, a etapa seguinte, o Microplanejamento, é necessária para planejar e permitir a operacionalização estruturada do manejo. Entre as atribuições do Microplanejamento podemos citar: a localização de APPs (Áreas de Proteção Permanente), como por exemplo, encostas, margens de rios e igarapés; aberturas de trilhas; Censo ou Inventário Florestal 100%; cálculo da volumetria da madeira da floresta, etc (IMAZON, 1998)

A partir dessas etapas, a área total da floresta a ser manejada é dividida em subunidades denominadas unidades de produção anual (UPA), ou talhões. Figura 2.1

Figura 2.1: *Subdivisão da Floresta em Talhoes (IMAZON)*

Além do dimensionamento dos talhões (ou UPAs), em função da produção e taxa de crescimento natural da floresta, outro procedimento necessário para o planejamento do manejo é o estabelecimento de um inventário florestal, que consiste em elaborar um plano amostral com o objetivo de estimar o volume total da floresta, classificado por: espécie, grupos de espécies, diâmetro (DAP), área basal, marcação do talhão, etc. Os dados são então agrupados para obter a distribuição do número de árvores, área basal e volume de madeira por hectare e classe de diâmetro. Estes dados servem tanto para a gestão da unidade florestal, como para seu monitoramento (IMAZON, 1998)

No inventário são identificados também as espécies que não poderão ser derrubadas num determinado ciclo, como por exemplo: árvores com diâmetro a altura do peito (DAP) menor do que 50 cm, bem como árvores porta sementes. Algumas espécies não podem ser derrubadas em hipótese alguma, como por exemplo a castanheira. Outra medida de con-

servação é deixar no mínimo 3 árvores de cada espécie a cada 100 ha. As espécies são então marcadas, catalogadas e então mapeadas num software para fazer o mapa do estoque das espécies e assim planejar a escolha e ordenação na derrubada das árvores (IMAZON, 1998)

As florestas de natureza tipicamente tropical possuem produtividade baixa em função do seu crescimento mais lento se comparada com outras espécies de interesse comercial, como o eucalipto por exemplo. A produção no manejo florestal clássico é então feita de forma a se adequar o período de corte com a taxa de regeneração natural da floresta. (?)

A subdivisão em talhões possibilita uma melhor operacionalização do manejo, pois cada subunidade é explorada num ano. Por exemplo: uma área florestal de 15.000 ha (hectares) com taxa de crescimento de $1m^3/ha.ano$ de madeira, subdividida em talhões de 500 ha. Assim, cada talhão poderá produzir por volta de $500 m^3/ano$ com um ciclo corte de 30 anos ($15.000ha/500ha$) para retornar a cortar no talhão inicial. No caso de uma floresta alta de terra firme, temos uma taxa de crescimento média de $40m^3/ha.ano$. Considerando a mesma área do exemplo anterior, obtem-se uma produção de $20.000 m^3/ano$ por talhão. De forma geral, o volume a ser retirado depende do tipo de floresta, capacidade produtiva e manejo a ser empregado (?)

O manejo florestal com sua particularidade de ocupar e manter a conservação da floresta é um importante fator de diminuição de desmatamento predatório.

Em relação ao desmatamento, temos que o percentual de desmatamento no Brasil vem caindo ano a ano, devido a pressões da sociedade (doméstica e internacional) para deter a destruição das florestas nacionais. O Brasil saiu de um total de área desmatada de 27772 Km^2 em 2004 para 4517 Km^2 em 2012, representando uma diminuição de cerca de 84 % no nível de desmatamento, conforme dados do INPE (INPE, 2014) apresentados na Figura 2.2. Isso reflete um grau de eficiência do próprio monitoramento e um avanço do compromisso na redução do desmatamento. Mas ainda mantemos um nível consideravelmente alto. E portanto, o esforço no controle do desmatamento deve continuar.

A destruição das florestas bem como o desmatamento têm como causas determinantes os incêndios florestais naturais, queimadas deliberadas, o avanço da agricultura na Amazônia legal e da atividade de exploração criminosa de madeira. Desta forma, a prática de exploração florestal baseada em manejo serve como forma de inibição do aumento do desmatamento por ocupar diversos pontos das florestas, e também pela eficiência na produção de madeira. Apesar de parecer paradoxal, o manejo planejado também é viável do ponto de vista econômico, mesmo comparado à extração de madeira convencional, visto que no manejo ocorre muito menos desperdício, devido ao mapeamento e planejamento do

Estados Ano	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	Var. 2012-2011	Var. 2012-2004
Acre	728	592	398	184	254	167	259	280	305	9,00%	-58,00%
Amazonas	1232	775	788	610	604	405	595	502	523	4,00%	-58,00%
Amapá	46	33	30	39	100	70	53	66	27	-59,00%	-41,00%
Maranhão	755	922	674	631	1271	828	712	396	269	-32,00%	-64,00%
Mato Grosso	11814	7145	4333	2678	3258	1049	871	1120	757	-32,00%	-94,00%
Pará	8870	5899	5659	5526	5607	4281	3770	3008	1741	-42,00%	-80,00%
Rondônia	3858	3244	2049	1611	1136	482	435	865	773	-11,00%	-80,00%
Roraima	311	133	231	309	574	121	256	141	124	-12,00%	-60,00%
Tocantins	158	271	124	63	107	61	49	40	52	30,00%	-67,00%
Amazônia Legal	27772	19014	14286	11651	12911	7464	7000	6418	4571	-29,00%	-84,00%

Figura 2.2: Desmatamento Florestal no Brasil (INPE)

corte, que segue uma orientação de queda para minimizar a derrubada de outras árvores durante o corte de uma unidade. No manejo, cada 1 árvore não aproveitada equivale a 28 não aproveitadas na prática convencional (([IMAZON, 1998](#)), ([SFB, 2013](#)), ([Embrapa, 2013](#))).

Entre os benefícios atribuídos ao manejo florestal, podemos destacar: é de fácil operação, possui razoável viabilidade econômica, promove desenvolvimento socioeconômico local e conservação ambiental. Impactos ambientais possíveis na atividade de manejo: assoreamento de rios, lagos, igarapés, aumento do escoamento nas áreas exploradas, causando erosão, contaminação do solo por combustíveis, compactação do solo devido ao tráfego de máquinas pesadas, danos físicos a espécies remanescentes, causados pela exploração florestal, risco de eliminação de espécies raras, aumento de incidência solar nas clareiras (o que provoca a morte de árvores jovens), possibilidade de árvores porta-semente não resistirem à colheita seletiva, eliminação do potencial germinativo de sementes depositadas no solo. Apesar do grande número de formas de impactos negativos listadas, na maioria dos casos são pouco prováveis, se o manejo for efetuado de forma criteriosa e controlada, como usual da prática ([IMAZON, 1998](#))

As informações referentes às técnicas de manejos florestais que foram levantadas e empregadas para o entendimento desta tecnologia estão amplamente acessíveis nos sítios: [Embrapa \(2013\)](#), do Instituto do Homem e Meio Ambiente da Amazônia [IMAZON \(1998\)](#) e do Serviço Florestal Brasileiro ([SFB, 2013](#)).

2.2 Economia dos Recursos Naturais

Recursos Naturais Renováveis (RNR) podem ser entendidos como recursos cuja capacidade de crescimento/renovação natural é suficiente para a estabilidade, e assim a perenidade, da sua população nas condições naturais (naturais, visto que a extração predatória pode esgotar um recurso natural mesmo que este possua uma boa taxa de crescimento). Entre os diversos recursos naturais renováveis podem-se incluir os de origem biológica, como peixes, mamíferos, insetos, vegetais, florestas, etc. O ar, água, as formas de energia - solar, hidráulica, eólica, das marés, etc, são exemplos de recursos naturais renováveis não biológicos. Os recursos naturais não renováveis são consequentemente aqueles em que a taxa de reposição natural é lenta ou mesmo praticamente nula; como exemplos desses recursos podemos citar: o petróleo e os recursos minerais. Em outras palavras, o estoque natural desses recursos praticamente não aumenta com o tempo, enquanto os estoques disponíveis dos recursos naturais renováveis se mantêm com o passar do tempo. Essa divisão é importante para entender a abordagem metodológica pertinente a cada caso. No nosso caso específico, estudaremos alguns métodos matemáticos aplicados à economia de extração dos recursos naturais renováveis biológicos, que serão a partir daqui denominados recursos naturais renováveis, ou abreviadamente como RNRs.

Os RNR estão interconectados entre diversas espécies bem como ao ambiente onde vivem. Essa interconexão entre as diversas espécies e seu ambiente implica que a dinâmica dos estoques desses recursos está inserida num sistema complexo onde o homem tem um papel importante, visto que a utilidade de um estoque para o homem induz a sua exploração em função dada pelo seu preço de mercado.

A economia por sua vez busca a eficiência no uso dos recursos pela maximização da produção e do bem estar dos agentes econômicos, se harmonizando com as restrições orçamentárias. Esta otimização implica em efeitos no meio material externo à economia neoclássica. Se a exploração desses recursos ultrapassar um limiar de renovação, ela pode provocar uma ameaça de extinção ou comprometer a integridade dos elementos constituintes dos ecossistemas, como água, solo, minerais, fauna, flora, qualidade do ar, condições climáticas, ciclos biogenéticos, florestas, entre outros.

Este perigo demonstra que o mercado possui recursos que não gere, não lhe são diretamente apropriáveis e estão fora do seu controle, sendo porém essenciais a ele. Inicialmente podendo ser definidos como recursos externos aos recursos do mercado. Sendo assim, os recursos naturais foram reconhecidos como uma entidade que está fora do mercado, como o ar que não é manufaturado, mas que utilizamos sem ser ele valorado por um preço, devido à sua abundância. O meio ambiente, porém, foi reconhecido não só como

externo ao mercado, como paradoxalmente sem efeito de existência própria. (Pillet, 1993).

A Economia NeoClássica consegue então dessa forma, associando os recursos naturais como externalidades, sistematizar seus modelos num círculo fechado onde todos os fluxos são conservados entre os agentes econômicos. Este paradigma é contestado em especial pelo economista e matemático romeno Nicholas Georgescu Roegen (1906-1994), que insere o meio ambiente e seus recursos na economia. Esta modificação, porém, não permite à economia clássica manter a sua visão estabelecida da conservação dos fluxos num sistema fechado. Ampliando a economia para um sistema aberto, e assim regida por um conceito oriundo da termodinâmica, denominado entropia.

Baseado nessa nova visão, Gerogescu propõe que a hipótese do crescimento econômico eterno seria incompatível num mundo de recursos finitos e regido pela entropia. Roegen (2008)

A economia aplicada aos recursos naturais, por sua vez, é uma ciência que engloba os benefícios e custos relacionados à gestão de um ecossistema num dado intervalo de tempo, em função da diminuição desse recurso ocasionado pela exploração ou aumento desse estoque.

A economia aplicada aos RNR foi originada como um campo de conhecimento científico nos anos 50, com o intuito principal de solucionar problemas relativos à economia da atividade pesqueira. Esses modelos, porém, eram estáticos. O termo estático, neste contexto, significa que a dinâmica do crescimento populacional era simples, ou não era levada em consideração. O foco seriam os fatores determinantes na produção pesqueira, tais como esforço de pesca, preço e custos envolvidos com a atividade, bem como a disponibilidade ambiental de um estoque de peixe suficiente para manter a rentabilidade da atividade pesqueira, tanto do ponto de vista econômico quanto ambiental, visto que a pesca predatória poderia provocar efeitos danosos também do ponto de vista econômico a médio ou longo prazo. Gordon (1954) estabeleceu em seus estudos um ponto de equilíbrio para a extração do estoque do recurso, no qual a rentabilidade (receitas menos despesas) fosse reduzida a zero no caso de uma atividade pesqueira num ambiente não regulado, ou de competição aberta.

A partir dos anos 70 e início dos 80, o tema em destaque era o desenvolvimento de modelos dinâmicos e análise da estabilidade dos sistemas aplicados aos recursos naturais. A partir dos anos 90, a economia dos recursos naturais se tornou um assunto da teoria do capital. Neste caso relacionando a produtividade de um ecossistema com a função de produção no âmbito microeconômico da teoria das firmas que exploram determinado recurso.

(White, 2000). Os padrões de propriedade sobre os recursos e sua dependência da forma de exploração e as consequências nos ecossistemas também se tornaram um importante campo de estudo, pois resultam num conjunto de problemas desafiadores, como por exemplo a exploração em áreas abertas (como os mares), em áreas comuns ou comunitárias (por exemplo, quilombolas) e em áreas privadas (como fazendas).

Em consequência da análise desses problemas resultaram nas seguintes abordagens :

1. modelos mais realistas de dinâmica das populações
2. Implementação de abordagens de políticas de conservação adaptadas à dinâmica dos ecossistemas
3. Modelagem Multi Espécies (*food webs*, competição, cooperação etc)

Segundo White (2000), a análise dos problemas da economia dos recursos naturais tem um nítido caráter multidisciplinar, com áreas mais atuantes relacionadas aos campos da Matemática Aplicada, Economia e Ecologia. Entre os principais marcos, destacaram-se as aplicações de modelos econômicos aplicados aos problemas ecológicos envolvidos nas políticas de conservação ambiental ((Gordon, 1954);(Milner-Gulland, 1997)). Podemos citar também os Modelos Integrados Econômicos Ecológicos (Huffaker e Wilen, 1991) (Tu e Wilman, 1992) (Huffaker, 1993) e uma grande convergência de métodos utilizados por ecologistas, matemáticos e economistas para modelagem de ecossistemas. Este cenário propiciou um amplo debate sobre a interpretação da sustentabilidade (Mangel e et al , 1996) e um grande produção de trabalhos envolvendo tópicos diversos sobre economia de recursos renováveis (McInerney, 1976); (McInerney, 1978) ; (Smith, 1977) ; (Dasgupta e Heal , 1979) ; (Fisher, 1981) ; (Clark *et al.*, 1979) ; (Hanley *et al.*, 1997) .

Entre os temas mais importantes relacionados à pesquisa neste campo do conhecimento, podem-se citar os seguintes:

- Modelos de crescimento das populações e o seu papel nos modelos econômicos
- Modelos ortodoxos econômicos de extração ótima
- Métodos fundamentais de análise de estabilidade
- Aplicações desses métodos para recursos terrestres e marinhos
- Como os modelos podem ser estendidos para modelar problemas levando em consideração ambientes com propriedades compartilhadas e propriedades comuns usando teoria dos jogos
- Natureza estocástica do crescimento populacional

- Políticas aplicadas aos recursos naturais

Dos diversos tópicos listados acima, alguns farão parte do objetivo desse trabalho, especificamente os itens sobre: a discussão dos modelos de crescimento populacional e os modelos de extração ótima e seu papel na política de conservação ambiental.

Capítulo 3

Modelos Bioeconômicos

3.1 Modelos Bioeconômicos

Existe no momento, uma extensa bibliografia disponível abordando modelos de crescimento populacional; entre elas podemos citar: [(May, 2001); (Murray, 2002); (Kot, 2001)]. De uma forma sucinta, podemos definir a modelagem bioeconômica como um modelo matemático para otimizar o resultado financeiro de uma atividade econômica baseada na extração de recursos renováveis cuja dinâmica de produção é limitada pelos recursos naturais finitos e outras restrições pertinentes ao problema.

3.2 Modelos Aplicados ao Crescimento Populacional

Os modelos populacionais podem ser classificados em relação a estrutura como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modelos não Estruturados} \left\{ \begin{array}{l} \text{Modelos de uma População Simples} \\ \text{Modelos de Populações Interativas} \end{array} \right. \\ \text{Modelos Estruturados} \left\{ \begin{array}{l} \text{Modelos Espaciais Estruturados} \\ \text{Modelos Estruturados pela Idade} \\ \text{Modelos Estruturados pelo Sexo} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nesta classificação, temos inicialmente uma característica em relação a estrutura. No caso dos modelos estruturados, eles podem possuir - estrutura espacial - nos casos onde são importantes a localização de cada espécie ou sua dispersão espaço, e portanto levada em consideração no modelo; estrutura etária - as distribuições das faixas etárias em função do tempo, e finalmente a distribuição por sexo. No caso onde essas estruturas não são levadas em consideração, os modelos podem ser aplicados a uma espécie individual ou a diversas espécies, e neste caso a interação entre elas pode ser considerada, como nos casos de presas e predadores, mutualismos e outras formas de comunidade.

Segundo Domokos e Scheuring (2004), os modelos populacionais podem ser classificados em relação ao domínio da variável densidade populacional N (Discreta (D) ou Contínua (C)), ou associada à característica comportamental em relação à natureza determinística (D), Estocástica (S) ou com ruído (R) da função de crescimento populacional F .

Classificação F x N dos modelos populacionais		
Modelos populacionais $N_t = F(N_{t-1})$	Propriedades de N_t	
Propriedades de F	Contínuo (C) (N_t é real)	Discreto (D) (N_t é inteiro)
Modelos Determinísticos (D) ; F é determinística	DC	DD
Modelos Estocásticos (S) ; F é um processo estocástico	SC	SD
Modelos com Ruído (R); F é uma combinação de uma parte determinística e um ruído aleatório	RC	RD

Figura 3.1: Classificação dos modelos pela função de crescimento (F) e densidade populacional (N)

De acordo a natureza do problema, podemos assumir que a densidade populacional (aqui considerada N_t) é contínua se os seus valores possíveis são tantos que podemos considerar a reta real como uma boa representação do seu conjunto de densidade. No caso discreto, de modo oposto, considera-se alguns valores possíveis (neste caso, os números naturais). Os recursos podem possuir características tais como uma sazonalidade na natureza da sua fecundidade que torna o caso discreto mais apropriado.

A função de crescimento F pode ser considerada determinística F_d se sua lei de crescimento for estabelecida por funções matemáticas determinísticas, não considerando portanto flutuações, ou que as mesmas sejam desprezíveis. Nos demais casos, são consideradas flutuações no seu comportamento de crescimento, podendo ser classificada como Estocástica F_s ou com Ruído F_r , sendo que na denominação da função F estocástica, considera-se

que a função F_s de crescimento em si é regida por um processo estocástico. E finalmente, a função de crescimento F_r com ruído se aplica aos casos que temos uma composição de uma função determinística de crescimento F_d adicionada a um ruído aleatório, considerando um ruído branco ε resulta na seguinte composição $F_r = F_d + \varepsilon$.

Em seu artigo, [Domokos e Scheuring \(2004\)](#) discutem os resultados de uma simulação para comparar os resultados em modelos considerando os diversos efeitos no caso de as densidades N_t forem consideradas Discretas (D) ou Contínuas (C) bem como diferentes tipos de funções de crescimento $F(t)$. Um resultado importante desse artigo foi mostrar que os modelos com dinâmicas populacionais discretos podem ser aproximados por contínuas nos casos em que a dinâmica comportamental é regular (ou seja, não caótica), ou no caso de dinâmica caótica se o nível de ruído for consideravelmente grande para que não exista confundimento aditivo entre ruídos da dinâmica com ruídos oriundos do modelo discreto.

Considerando um modelo simples de forma não estruturada, considerando a dinâmica do nosso problema regular, não caótica, com a variável de estado relacionada com o crescimento de biomassa (neste trabalho a densidade de madeira por hectare), a densidade N_t será considerada de forma contínua. A modelagem de sistemas dinâmicos contínuos baseada no conceito de campo médio será empregada para investigar qualitativamente o comportamento padrão do sistema. Neste caso, a dinâmica de crescimento da biomassa de madeira na concessão florestal será modelada de forma simples e generalizada por uma equação diferencial ordinária que representa o comportamento de crescimento padronizado do sistema florestal por uma função que mimetize o crescimento médio, o mais próximo possível do observado na floresta. A seguir, discutiremos alguns tipos de modelos contínuos para modelagem da dinâmica de crescimento florestal.

3.2.1 Modelos Contínuos

Modelos de crescimento populacional contínuos são modelos de sistemas dinâmicos e podem ser generalizadamente expressos numa forma mais simples de uma EDO, como:

$$\frac{dx}{dt} = \text{nascimentos} - \text{mortes} + \text{migrações} \quad (3.1)$$

onde $x(t)$ representa a população e a derivada $\frac{dx}{dt}$ a variação dessa população que se iguala ao total de nascimento menos mortes mais as migrações num ambiente delimitado e num intervalo de tempo.

Sendo b proporção de nascimentos e d proporção de mortes num ambiente sem migrações, esta equação possui a seguinte solução analítica:

$$\frac{dx}{dt} = bx - dx \implies x(t) = x_0 e^{(b-d)t} \quad (3.2)$$

que implica num crescimento exponencial da espécie. Este resultado foi obtido para Malthus em 1798 e mostrou-se não realista pelo fato de não serem consideradas as restrições ambientais para o crescimento da espécie.

Uma alternativa ao modelo de crescimento exponencial foi proposta por Verhulst (1838 e 1845). Neste, um processo auto limitante opera para que a população não aumente indefinidamente e de modo exponencial. Sugeriu-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) \quad (3.3)$$

Nesta equação, a constante K é a capacidade de suporte ambiental da espécie, que geralmente é determinada pelos recursos ambientais disponíveis para essa espécie. Com condição inicial abaixo desse valor a população tende a crescer até se estabilizar em: $x(t) = K$. Acima deste valor, as pressões ambientais causadas pelo excesso populacional ou pela carência dos recursos, tornam o crescimento da população impraticável. Então a população diminui, de forma a se aproximar da solução de estabilidade K .

Veja abaixo um gráfico ilustrando os comportamentos das soluções da equação diferencial logística (3.3).

Figura 3.2: Comportamento da equação diferencial logística

Conforme pode ser observado em 3.2, expomos duas soluções da equação diferencial logística, ambas com a mesma capacidade de suporte $K = 5$ e taxa de crescimento $r = 0.8$, diferindo apenas as condições iniciais x_0 . A curva inferior representa uma solução quando a condição inicial $x_0 = 0.5$; neste caso, o valor inicial de biomassa é bem abaixo da capacidade de suporte ambiental dada; em outras palavras $x_0 < K$. Na curva superior, a solução neste caso é quando a condição inicial é dada por $x_0 = 7$, quando o valor inicial

de biomassa está acima da capacidade de suporte ambiental $x_0 > K$.

Em ambas as curvas ocorre o comportamento assintótico das funções tenderem ao valor da capacidade ambiental dada ($K = 5$) quanto $t \rightarrow \infty$. No primeiro caso ($x_0 < K$), a função representando a população (ou biomassa) cresce até se aproximar de K . No segundo caso, $x_0 > K$, a função decresce e também vai se aproximando de K também quando $t \rightarrow \infty$.

O sistema florestal de uma concessão possui entre suas diversas características: após o corte das árvores numa determinada área ou talhão, novas árvores nascem depois de um tempo a partir das dispersões das sementes (ou replantio). Essas mudas então se espalham pela área até atingir um limite de ocupação do solo dado pela competição de espaço e substratos. Deste modo a equação diferencial logística (3.3) fornece um modelo inicial simples para obter resultados com boa aproximação, pois o comportamento previsto no modelo se aproxima do comportamento natural de renovação florestal.

3.2.2 Modelo Dinâmico de Extração de Recursos

Um modelo básico de exploração de recursos naturais pode ser descrito por meio da seguinte equação diferencial (Clark, 2010):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= G(x) - h(t) \\ \text{Onde: } x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

A função $x(t)$ representa quantidade de um estoque de biomassa relativa a uma espécie, geralmente expressa em toneladas (Tons); x_0 representa a quantidade inicial de biomassa, avaliada em $t = 0$. A função $G(x)$ representa a dinâmica de crescimento natural da biomassa populacional, usualmente expressa em [tons/ano] em função da quantidade de estoque x . A função $h(t)$ representa a razão de remoção ou extração de um recurso em função do tempo. Esta mesma função pode depender também do estoque atual de biomassa e neste caso temos: $h(t, x)$.

A equação (3.4) representa enfim a dinâmica de crescimento de uma dada espécie numa condição de remoção de seu estoque de biomassa. A derivada à esquerda representa a variação de crescimento de biomassa em função do tempo, e o lado esquerdo por sua vez representa o crescimento natural da espécie menos a quantidade removida.

Se ambas as funções $G(x)$ e $h(t)$ forem dadas juntamente com as condições iniciais

então a equação diferencial (3.4) possui uma solução que determina o estoque de biomassa $x(t)$ em função do tempo t .

Devido às características naturais dos problemas relativos ao extrativismo de recursos naturais, temos as seguintes restrições:

$$x(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad h(t) \geq 0 \quad (3.5)$$

A função genérica $G(x)$ pode assumir diversas formas. Deste modo podemos assumir uma função a priori que simule melhor um dado comportamento de crescimento populacional das florestas (Murray, 2002), ou mesmo testar modelos candidatos utilizando dados relativos ao crescimento populacional da espécie (caso disponíveis) empregando técnicas estatísticas de ajustes.

3.2.3 Tipos de Funções de Crescimento Contínuas

A função de crescimento logística, apresentada do lado direito na equação (3.3) se ajusta bem a uma grande quantidade de casos.

$$G(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (3.6)$$

A equação diferencial baseada na função de crescimento logística (3.6) assume a seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (3.7)$$

Neste caso considera-se a taxa de crescimento do recurso r constante.

Em um exemplo do livro "Elements of Mathematical Ecology" Kot (2001) faz uso de uma função de crescimento com uma dinâmica logística com taxa de crescimento variando com o tempo $r(t)$ para modelar um sistema de extração de madeira, dada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dV}{dt} = r(t)V \left(1 - \frac{V}{K}\right) - EV \quad (3.8)$$

no qual

$$r(t) = \frac{r}{1 + at}$$

é decrescente com o tempo.

Considera-se também outras formas de abordagem permitindo o emprego de parâmetros estocásticos, por exemplo a taxa de crescimento r :

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x - h(t) - r_0x^2/K \quad (3.9)$$

Neste caso temos um problema de equação diferencial estocástica (EDE) assumindo que a função $r(t)$ possui um comportamento estocástico na forma de um ruído branco, descrito pela seguinte expressão:

$$r(t) = r_0 + \gamma t \quad (3.10)$$

onde:

r_0 - esperança da taxa de crescimento $r(t)$

γ - termo relacionado com a dispersão do processo $r(t)$

t - tempo

A EDE [Equação (3.9)] pode ser resolvida empregando a regra de Ito, conforme discutido em [Beddington e May \(1977\)](#). Este método não será utilizada para as análises deste trabalho, mas é bastante promissor para um contexto de otimização dinâmica em trabalhos futuros.

3.3 Equilíbrios Bioeconômicos

Nos tópicos seguintes serão discutidos e analisados os principais tipos de equilíbrios bioeconômicos, denominados aqui de: Produção Sustentável Máxima (PSM), Equilíbrio em acesso aberto (AA), Resultado econômico sustentável máximo (RSM) e valor presente máximo (VPM) (Clark, 2010)

3.3.1 Produção sustentável máxima

A produção sustentável máxima é definida de forma generalizada como:

$$h_{PSM} = \max_x G(x) \quad (3.11)$$

A equação (3.11) representa este equilíbrio, no qual a extração máxima é igualada ao máximo da produção do recurso.

Lembramos que a dinâmica de colheita ou extração do recurso pode ser modelada pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dx}{dt} = G(x) - h \quad (3.12)$$

Utilizaremos como exemplo, a partir daqui, uma função $G(x)$ com dinâmica de produção do recurso do tipo logística para desenvolver a análise deste equilíbrio. A função de crescimento logística é definida então como :

$$G(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (3.13)$$

O comportamento desta função é apresentado na figura 3.3

Figura 3.3: Pontos de Equilíbrio na Produção Sustentável Máxima

Neste exemplo, a função logística $G(x)$ (3.13) é uma função quadrática, portanto de concavidade negativa (convexa). As raízes dessa função são obtidas por dois pontos, um na origem $x = 0$ e outro quando atingimos a capacidade ambiental do sistema $x = K$:

$$G(0) = 0 \text{ e } G(K) = 0 \quad (3.14)$$

Obtemos o máximo da função $G(x)$, pelo fato de ser simétrica e convexa, no ponto médio entre as raízes; este ponto é equivalente ao pontos de produção sustentável máxima $x = x_{PSM}$, de forma que $G(x_{PSM})$ representa o máximo da função.

A equação (3.12), quando $h(t) = 0$, representa a dinâmica de crescimento natural do recurso x . Por outro lado, no caso de uma extração (pesca, caça, colheita) a uma taxa constante $h(t) = h$ do recurso x .

Resolvendo a equação $G(x) - h = 0$ determinam-se dois pontos de equilíbrios da equação diferencial (3.12): o primeiro, x_1 , é instável [pois $G'(x) > 0$] e o outro x_2 é estável [$G'(x) < 0$] (ver linha horizontal que representa h em 3.3). Neste caso assumimos $h < \max_x G(x)$.

À medida que a função constante h vai aumentando, os pontos x_1 e x_2 vão se aproximando até se igualarem no ponto de equilíbrio x_{PSM} (geometricamente no topo da curva) quando a derivada $G'(x)$ é zero:

$$G'(x_{PSM}) = 0 \quad (3.15)$$

Aplicando (3.15) na função logística (3.13) temos que:

$$G'(x_{PSM}) = 0 \Rightarrow x_{PSM} = \frac{K}{2} \quad (3.16)$$

Substituindo $x = x_{PSM}$ em (3.13) temos:

$$G(x_{PSM}) = \frac{rK}{4} \quad (3.17)$$

Sabendo que a produção h em x_{PSM} (3.11), temos:

$$h_{PSM} = \max_x G(x) \Rightarrow h_{PSM} = G(x_{PSM}) = \frac{rK}{4} \quad (3.18)$$

E finalmente este ponto determina um ponto de equilíbrio da equação diferencial pois:

$$\frac{dx}{dt} = G(x_{PSM}) - h_{PSM} = 0 \quad (3.19)$$

A extração a uma taxa constante h no Ponto de Equilíbrio x_{PSM} implica em tese numa extração sustentável do recurso (portanto indefinida a longo prazo). Porém é fácil verificar que isto acontece apenas no ponto x_{PSM} pois qualquer outro valor fora deste ponto implica em: $\frac{dx}{dt} < 0$, fazendo com que a taxa de crescimento do recurso diminua até o seu colapso.

Neste caso, estimativas incertas deste equilíbrio pode levar à exploração predatória do recurso por anos. Desta forma, é prudente manter a extração abaixo desse estoque $h \leq G(x_{PSM})$ para evitar expor o recurso a uma instabilidade por uma perturbação no ponto x_{PSM} .

3.3.2 Equilíbrio em acesso aberto

Recursos em áreas de acesso aberto, pode ser definido como os recursos naturais oriundos de áreas comunitárias, públicas ou de uso comum tais como: os mares, florestas nacionais, comunidades extrativistas etc, como a exploração dos recursos naturais nesses locais é usualmente não regulamentada. No caso de acesso aberto, o equilíbrio será definido como exploração do RNR até o esgotamento das possibilidades de obtenção de receita econômica positiva oriunda dessa atividade de extração.

Definimos a seguir os principais parâmetros econômicos introduzidos nesta seção:

E Esforço produtivo da atividade [mão de obra, máquinas, etc empregadas na extração]

p Preço de venda do recurso natural[\$/ano]

c Custos associados ao esforço produtivo da atividade [\$]

q Taxa da eficiência da extração do recurso [adimensional]

Todos os parâmetros anteriores são assumidos como constantes.

Definiremos o lucro da atividade extrativa como:

$$R = p h - c E \quad (3.20)$$

O primeiro termo da relação (3.20) $p h$ representa a receita obtida com a extração pois o preço vezes o total extraído (dado por h) representa a receita total; o segundo termo

por sua vez representa o custo total com esta atividade cE .

Utilizando a relação da extração do tipo Schaefer: $h = qEx$ (Clark, 2010) e substituindo o termo h em (3.20), obtemos:

$$R = (pqx - c)E \quad (3.21)$$

No caso quando $R = 0$ (lucro igual a zero), temos:

$$x_{AA} = \frac{c}{pq} \quad (3.22)$$

A relação (3.22) representa o ponto a partir do qual o lucro obtido com a atividade extrativa é zerada, a partir desse ponto o custo em extrair se torna maior que a receita.

Assumindo inicialmente uma função de crescimento logística (3.3) e a relação de Schaefer para a extração $h = qex$, faremos a seguir uma análise do equilíbrio x_{AA} .

Figura 3.4: Função de Crescimento Logística e Extração Linear

Na figura acima 3.4 o eixo vertical representa o custo ou renda total CT, RT e a abscissa o esforço E . A reta representa a função custo total $CT = cE$ e a parábola representa a renda total $RT = pY(E)$. Onde $Y(E)$ é a produção do recurso no ponto de equilíbrio $Y(E) = h(x^*)$.

No ponto de equilíbrio temos: $Y(E) = h(x^*) = G(x^*)$, implica que: $qEx = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$. Resolvendo a equação em x , temos:

$$x^* = K \left(1 - \frac{qE}{r}\right)$$

Substituindo em $h(x^*)$ ou $G(x^*)$, temos:

$$Y(E) = KqE - \left(\frac{Kq^2E^2}{r} \right) \quad (3.23)$$

e finalmente multiplicando (3.23) por p temos a receita total dada em função de "E":

$$RT = p \times Y(E) = pKqE \left(1 - \frac{qE}{r} \right) \quad (3.24)$$

Nota-se que a (3.24) é quadrática em relação a "E". Observe também que o custo total dado em função de "E" é

$$CT = cE \quad (3.25)$$

que definem a equação da reta de custo (CT) (3.25) e a parábola referente a receita total (RT) (3.24), apresentadas na figura 3.4.

O ponto de interseção da reta com a parábola (Ver 3.4), corresponde ao ponto de equilíbrio num ambiente de livre acesso (pois temos receita igual à despesa), o que implica em (3.20) $R = 0$.

Como o ponto de equilíbrio em acesso aberto é a interseção das duas curvas, igualando as relações (3.24) com (3.25) temos:

$$E_{AA} = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{Kpq} \right) \quad (3.26)$$

Lembrando da relação (3.22), temos

$$E_{AA} = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{x_{AA}}{K} \right) \quad (3.27)$$

Com esta relação podemos estabelecer o esforço produtivo "E" para o equilíbrio em acesso aberto.

Este equilíbrio mimetiza o comportamento de uma atividade de extração competitiva determinada apenas pelo seu viés econômico. O Equilíbrio é alcançado quando $R = 0$. Deste modo, mesmo sem nenhuma regulação da atividade teríamos um ponto de equilíbrio antes do colapso nos casos onde $x_{AA} > 0$. Porém, este equilíbrio também possui as suas fragilidades, visto que no caso de aumento populacional, o preço p tende a aumentar. A melhoria das técnicas produtivas, e o advento de novas tecnologias tendem a fazer o custo c decair, e com o tempo a eficiência de coleta também tende a aumentar. Lembrando que o estoque em equilíbrio : $x_{AA} = \frac{c}{pq}$ determina que todos estes efeitos comentados provocam diminuição no ponto de equilíbrio x_{AA} com o passar do tempo, e assim também

possivelmente provocar a extinção do recurso. Deste modo, as atividades de extração em ambientes de acesso aberto são melhores amparadas com o auxílio de regulação da atividade, como criação de cotas de exploração, ou outras, que possibilitem a recuperação natural do recurso.

3.3.3 Renda Máxima Sustentável

O Equilíbrio por renda máxima sustentável é obtido quando o resultado financeiro da atividade leva em conta a dinâmica da recuperação do recurso.

Para calcular tal equilíbrio utilizamos a função de extração de Schaefer $h = qEx$ na equação (3.12) e aplicamos a condição de estado estacionário $\frac{dx}{dt} = 0$ obtendo $G(x) = qEx$

Substituindo $G(x) = qEx$ na receita com a atividade extrativa introduzida em (3.20), temos :

$$R = (pqx - c) E \rightarrow R = \left(p - \frac{c}{qx} \right) G(x) \quad (3.28)$$

escrevendo $c(x) = \frac{c}{qx}$ temos:

$$R_{sust} = (p - c(x)) G(x) \quad (3.29)$$

Analisando a expressão acima, verifica-se que a função R_{sust} possui duas raízes: $x_1 = x_{AA}$ (equilíbrio de acesso aberto, 3.3.2) e $x_2 = K$.

A obtenção das raízes é facilmente verificada. Substituindo x_{AA} em $c(x)$ temos: $c(x) = \frac{c}{q \frac{c}{pq}}$ simplificando temos: $c(x) = p$, e assim $R_{sust} = 0$. Para a raiz $x_2 = K$, como $G(K) = 0$, temos igualmente $R_{sust} = 0$. Além disso, observa-se que $R_{sust} > 0$ em $x_{AA} < x < K$.

Maximização da Renda Sustentável

Derivando em relação a x e igualando a zero a expressão (3.29), temos:

$$pG'(x) = c'(x)G(x) + c(x)G'(x) \quad (3.30)$$

Simplificando temos:

$$G'(x^*) = \frac{c'(x^*)G(x^*)}{p - c(x^*)} \quad (3.31)$$

onde $x^* = x_{RSM}$ é a biomassa de equilíbrio no caso de renda máxima sustentável.

Relação com demais tipos de equilíbrio

Por meio da equação da Renda Máxima Sustentável (3.31) pode-se obter as demais condições de equilíbrio definidas anteriormente:

quando a constante $c = 0$, temos que $c'(x) = 0$ pois $c'(x) = -\frac{c}{qx^2}$. Deste modo substituindo em (3.31) obtemos

$$G'(x^*) = 0 \Rightarrow x^* = x_{PSM} \quad (3.32)$$

conforme visto em (3.15). Neste caso, o equilíbrio x_{RSM} se reduz ao equilíbrio x_{PSM} .

De forma geral temos que $G'(x^*) \leq 0$ já que

$$c'(x) \leq 0, \forall x \quad (3.33)$$

e as funções $G(x)$ e $p - c(x)$ são assumidas positivas

No caso da função $G(x)$ ser convexa, a sua derivada negativa geometricamente se situa à direita do ponto de máximo da função $G(x)$ (vimos que este ponto é o ponto x_{PSM}) :

Logo a região onde $G'(x^*) = 0$ é dado pela desigualdade

$$x_{RSM} \geq x_{PSM} \quad (3.34)$$

Deste modo, podemos concluir que o equilíbrio x_{RSM} é sempre maior ou igual que o equilíbrio x_{PSM} .

3.3.4 Valor Presente Máximo

Taxa de juros e taxa de desconto

Na análise de um investimento, a taxa de juros é usualmente definida como o prêmio pago pela não disponibilidade do recurso para o consumo a curto prazo, ou como prêmio pelo risco de disponibilizar o montante por exemplo, no caso de um empréstimo.

Numa série de pagamentos: V_t determina o valor futuro e V_0 o valor inicial investido (ou montante inicial de uma dívida), e sendo i a taxa de juros desse investimento, o valor ou montante futuro desse investimento é calculado por meio da fórmula dos juros compostos:

$$V_t = (1 + i)^t V_0 \quad (3.35)$$

Neste caso, consideramos o tempo t em intervalos discretos (dias, meses, etc)

No caso contínuo, a expressão é definida como:

$$V_t = e^{\delta t} V_0 \quad (3.36)$$

onde δ representa a taxa de juros no caso contínuo

O caso discreto pode ser considerado um caso delimitado pelo caso contínuo, de forma que igualando (3.35) com (3.36), obtemos a relação entre as taxas contínua δ e discreta i

$$\delta = \ln(1 + i) \quad (3.37)$$

Num caso onde a taxa de juros não é fixa, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \delta(t)V_t \quad (3.38)$$

Sabendo que $V_0 = V(0)$ e resolvendo a equação diferencial obtemos

$$V_t = V_0 \exp \left(\int_0^t \delta(s) ds \right) \quad (3.39)$$

Nota-se que (3.36) é um caso particular de (3.39)

A taxa de desconto é definida de forma inversa - determina-se o valor do pagamento presente a partir do valor futuro. Assim, no caso discreto temos

$$V_0 = \frac{V_t}{(1 + i)^t} \quad (3.40)$$

e no caso contínuo:

$$V_0 = e^{-\delta t} V_t \quad (3.41)$$

Assim temos as taxas δ e i agora denominadas de taxas de desconto, visto que se aplicam a descontar os valores futuros.

Valor Presente

O Valor presente é definido como o total a ser investido V_0 no tempo inicial t_0 de modo a produzir um montante futuro V_t

O Valor presente é obtido somando todas as parcelas no intervalo de tempo considerado (mensal, anual, etc). No caso discreto temos:

$$VP = \sum_{t=1}^T \frac{V_t}{(1+i)^t} \implies \sum_{t=1}^T V_t \alpha^t \quad (3.42)$$

fazendo $\alpha = \frac{1}{(1+i)}$

O valor presente para o caso contínuo é obtido integrando a equação (3.41), obtendo-se a integral (3.43)

$$VP = \int_0^T e^{-\delta t} V(t) dt \quad (3.43)$$

É fácil verificar que o valor da taxa de desconto afeta consideravelmente o valor presente. De forma inversa, com altas taxas de desconto determinamos baixos valores presentes.

Para $T \rightarrow \infty$, temos:

$$VP = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} V(t) dt \quad (3.44)$$

(3.44) representa a serie de todos os valores trazidos a valor presente indefinidamente.

Como exemplo analisaremos um caso particular, considerando parcelas constantes $V(t) = V$. Nesse caso, por meio de (3.44) temos que

$$VP = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} V dt = \frac{V}{\delta} \quad (3.45)$$

após o cálculo da integral imprópria.

Essa expressão indica a relação inversa entre a taxa de desconto e valor presente, de forma que quanto maior o valor presente, menor a taxa de desconto.

A seguir, compara-se o efeito de duas taxas de descontos ao longo de uma série de pagamentos aplicadas a um investimento inicial com o intuito de analisar o comportamento do desconto nos valores futuros descontados.

No gráfico 3.5 temos uma comparação entre os descontos a valor presente de dois investimentos de \$ 1.000 cada, sendo que um com taxa de desconto de 1% (curva azul) e outro com taxa de desconto de 5% (curva vermelha). Nota-se como o efeito de redução é maior no gráfico relacionado com a maior taxa [conforme resultado obtido em (3.45)].

Figura 3.5: *Comparações entre diferentes taxas de descontos*

Neste caso, nota-se que a aplicação da taxa de desconto maior (5%) resulta em descontos maiores nas parcelas futuras, e obtendo assim parcelas de valores presentes menores. Conclui-se desta forma que a soma trazida a valor presente fica maior se a taxa de desconto δ for menor e vice versa.

No caso do modelo matemático proposto aqui, a série dos valores presentes deve ser maximizada conforme um problema de otimização do investimento ao longo do tempo. Neste caso, retornando ao resultado apresentado na relação (3.44) (que representa o valor presente maximizado tendendo ao infinito), implica no investimento ser rentável a longo prazo. Porém, essa maximização do valor presente deve ser aplicada conjuntamente com a sustentabilidade, ou a conservação do recurso renovável deve ser também perene. Visto que num caso extremo, em que uma exploração predatória ou sem o devido cuidado com a renovação ambiental do recurso, provoque o colapso ou escassez desse, isso implicaria também no colapso da atividade econômica extrativista ligada à exploração desse recurso. Portanto, temos um caso de otimização sujeita a restrições.

Portanto, de acordo com os argumentos expostos nos últimos parágrafos desta seção, o objetivo é obter a maximização do funcional (3.44) restrita a uma série de vínculos (ou restrições); entre esses, a renovação sustentável do recurso. A metodologia indicada para esse problema de otimização será tratada mais profundamente nas próximas seções.

3.4 Teoria do Controle e Otimização Dinâmica

A otimização dinâmica é uma técnica de otimização matemática empregada em diversos problemas oriundos de áreas como: engenharia, produção, economia ([Chiang, 1992](#)), bem como da exploração de recursos naturais. Entre os diversos tipos de exploração de recursos, consideramos mencionar, em particular, a exploração pesqueira amplamente investigada em [Clark \(2010\)](#)). Neste trabalho, temos como objetivo principal propor a aplicação deste método na discussão do problema da viabilidade (econômica e ecológica) das concessões florestais. Conforme discutido na seção [3.3.4](#) emprega-se o método para maximizar uma função objetivo de interesse; no nosso caso, o valor presente do resultado da atividade de concessão, que representa a diferença entre a receita (preço x produção) menos os custos operacionais da atividade extrativa (e outras variáveis preestabelecidas) trazidos a valor presente. Porém, o resultado possui um limitante, pois é restrito à capacidade do sistema de produção de madeira pelo ambiente. Finalmente, possibilitando avaliar estratégias ótimas de extração de madeira numa concessão florestal.

Na otimização estática, o objetivo é encontrar um valor definido para cada variável de interesse, e otimizando uma dada função. A otimização dinâmica, por sua vez, depende do tempo e se baseia na maximização ou minimização de um funcional objetivo, denominado de J , numa trajetória ótima, partindo de um tempo inicial $t=0$ até um tempo final $t=T$. A otimização dinâmica pode também ser vinculada a um conjunto de restrições. De forma geral, temos os seguintes elementos na otimização dinâmica:

- Conjunto de caminhos admissíveis (estratégias)
- Pontos iniciais e terminais do caminho (tempo inicial e final da otimização)
- Variáveis de estado (crescimento de biomassa florestal)
- Variáveis de Caminho [índices de performance financeira (preços, custos etc)]
- Variáveis de Controle: (quantidade de biomassa extraída da floresta)
- Especificar uma funcional para otimizar (Integral do valor presente)

Os pontos iniciais e terminais são definidos no problema por condições de contorno ou condições de transversalidade. Entre as variáveis, vamos destacar neste momento os dois tipos mais importantes, denominadas: Variável de estado $x(t)$ e variável de controle $u(t)$. A funcional objetivo será representada como $J(x(t), u(t))$, podendo representar lucros, valor presente, etc . Num problema típico de teoria do controle ótimo o objetivo é determinar a função de controle $u(t)$ que otimize a funcional $J(x(t), u(t))$.

3.4.1 Cálculo Variacional

O Cálculo das variações é uma área clássica da análise matemática que generaliza o conceito de otimização (maximização e minimização) aplicada a entes matemáticos denominados de funcionais que são mapeamentos de um espaço de funções para um conjunto dos números reais, um funcional é frequentemente descrita da seguinte maneira:

$$J[x] := \int_0^T f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))dt$$

No cálculo diferencial as otimizações são aplicadas a simples funções $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. No cálculo variacional, busca-se por outro lado, determinar funções (ou caminhos neste mapeamento) que otimizem os funcionais $J[x]$.

Problemas relacionados ao cálculo variacional remontam ao século XV. Entre os matemáticos que trataram de problemas relacionados ao cálculo variacional temos contribuições de: John e James Bernoulli, L. Euler, Lagrange, G. Leibniz, Isaac Newton, Gauss, entre outros. Importantes problemas da física e matemática foram resolvidos utilizando o cálculo variacional, como por exemplo: o problema da Braquistócrona, problemas envolvendo geodésicas, princípio da mínima ação de Fermat (princípio fundamental na física), entre outros.

No Cálculo Variacional temos portanto, no mínimo, as seguintes variáveis presentes: uma variável de estágio, geralmente o tempo t , variáveis de estado $\mathbf{x}(t)$ e subsequentes condições acerca do estágio (ou tempo t) inicial e final e dos estados iniciais e finais

Formulação de um problema de cálculo das variações, para o caso de uma variável de estado unidimensional $x(t)$:

$$\text{Maximizar ou Minimizar } J[x] := \int_0^T f(t, x(t), x'(t))dt \quad (3.46)$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 & (x_0 \text{ dado}) \\ x(T) &= x_T & (T \text{ e } x_T \text{ dados}) \end{aligned}$$

Nesta formulação temos um problema fundamental na forma mais simples do cálculo variacional onde os pontos iniciais e terminais são completamente especificados e a integral funcional possui uma função f diferenciável, dependendo apenas de uma variável de estado $x(t)$ e de sua derivada $x'(t)$. Em seguida vamos apresentar uma forma mais

generalizada do cálculo variacional, denominada Teoria do Controle Ótimo.

3.4.2 Elementos da Teoria do Controle

O problema do controle ótimo é formulado por meio de três variáveis: o tempo t , uma variável de estado $x(t)$ (mencionadas no tópico anterior) e uma importante variável, denominada variável de controle $u(t)$. A variável de controle $u(t)$ se relaciona com a variável $x(t)$ por meio de uma equação denominada de equação de movimento ou equação de evolução de estado:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t > t_0$$

onde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função suficientemente suave. E finalmente é necessário também determinar um valor de estado inicial $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)$, a partir do qual este sistema evoluirá.

O problema de controle ótimo pode ser definido a partir da definição do problema de cálculo variacional (3.46) onde:

$$\text{Maximizar ou Minimizar } J[u] := \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.47)$$

Sujeito à :

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x(t), u(t))$$

$$\begin{aligned} e \quad x(0) &= x_0 & (x_0 \text{ dado}) \\ x(T) &= x_T & (T \text{ e } x_T \text{ dados}) \end{aligned}$$

No caso particular onde: $g(t, x(t), u(t)) = u(t)$ o problema recai num caso de Cálculo das Variações (3.46)

No Cálculo Variacional, a Equação de Euler (3.48) desempenha papel importante para resolução de problemas como condição necessária por meio dessa equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \quad (3.48)$$

3.4.3 Princípio Máximo de Pontryagin

A contribuição mais importante em Teoria do Controle Ótima é denominada princípio do máximo ¹. Este princípio é creditado ao matemático Russo L. S. Pontryagin. A grande vantagem desse princípio é o estabelecimento de possibilidades de lidar com problemas de otimização dinâmica onde a variável de controle possui restrições no seu domínio (limitações de valores de entrada). Neste caso, permitindo a análise de problemas onde os valores admissíveis para $u(t)$ pertencem a um conjunto convexo ² e fechado ³ $\mathbb{U}$ denominado conjunto de controles possíveis. Por exemplo, no caso de apenas uma variável de controle, o intervalo $a \leq u(t) \leq b$ é um caso onde a variável de controle é limitada a um intervalo de valores admissíveis onde $u(t) \in [a; b]$ ou $u(t) \in \mathbb{U}$.

O problema fica então reescrito neste caso como:

$$\text{Maximizar } J[u] := \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.49)$$

Sujeito à :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g(t, x(t), u(t)) \\ e \quad x(0) &= x_0 \quad (x_0 \text{ dado}) \\ x(T) &= x_T \quad (T \text{ e } x_T \text{ dados}) \\ u(t) &\in \mathbb{U} \quad (\text{Para } t \in [0; T]) \end{aligned}$$

Como se pode notar, uma nova linha foi adicionada aos vínculos do problema, indicando que a variável de controle pertence ao conjunto de controles possíveis $\mathbb{U}$.

Para resolução deste problema vamos introduzir uma função definida como: $H(x(t), t, u(t), \lambda(t))$ e denominada Hamiltoniano:

$$H(x, t, u, \lambda(t)) = f(x, t, u) + \lambda(t)g(x, t, u) \quad (3.50)$$

Sendo $x(t)$ a variável de estado e $u(t)$ a variável de controle que maximiza o Hamiltoniano a cada tempo t . A função $\lambda(t)$, a princípio desconhecida, é uma variável auxiliar que é denominada variável adjunta ou multiplicador de Lagrange.

¹Em algumas referências também denominado de princípio do mínimo

²Dizemos que um conjunto $\mathbb{X}$ é convexo quando todo segmento de reta ligando dois pontos pertencentes a $\mathbb{X}$ esta contido nesse conjunto $\mathbb{X}$

³O conjunto $\mathbb{X}$ é fechado se possui seus pontos de aderência (seu contorno)

O princípio do máximo diz que o Hamiltoniano é maximizado exclusivamente por meio da determinação do valor de controle ótimo u^* , de modo que :

$$H(t, x, u^*, \lambda(t)) \geq H(t, x, u, \lambda(t)) \quad (3.51)$$

Podemos enunciar neste momento o princípio do máximo, por meio das condições abaixo. Se $u(t)$ é a variável de controle e $x(t)$ sua resposta, então existe uma variável $\lambda(t)$ contínua em $[0, T]$ tal que sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$\underset{u}{Max} \quad H(t, x, u, \lambda) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.52)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{Equação Adjunta} \quad (3.53)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \text{Equação de Movimento} \quad (3.54)$$

$$\lambda(T) = 0 \quad \text{Condição de Transversalidade} \quad (3.55)$$

Em outras palavras e conforme apresentado em (3.51) e (3.52), o princípio do máximo implica que apenas o controle $u(t)$ maximiza o hamiltoniano para cada tempo t . No intuito de determinar a função de controle $u(t)$ e a de estado $x(t)$, introduz-se uma função auxiliar $\lambda(t)$, de maneira que essa expressão em conjunto com (3.52) e as demais condições dadas pelas equação de movimento (3.54) e equação adjunta (3.53) formem um sistema de equações determinado.

Elimina-se então $u(t)$ desse sistema por (3.52) e dada a expressão de $\lambda(t)$ (não necessariamente a condição dada em (3.55)), resolve-se o sistema de equações diferenciais de primeira ordem dadas por (3.53) e (3.54)

Portanto, a equação adjunta (3.53):

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.56)$$

a equação de estado (3.54), que pode ser reescrita como:

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x(t), u(t)) \quad (3.57)$$

Juntamente com uma condição de transversalidade (cuja condição (3.55) é um caso possível) são as condições necessárias que satisfazem o problema de controle ótimo.

Essa dada condição de transversalidade (3.55) é um caso específico da condição auxiliar utilizada quando o tempo terminal "T" é finito e indeterminado. Nos exemplos anunciados anteriormente utilizamos casos nos quais as condições iniciais de tempo e estados eram todas dadas. As condições de transversalidade são empregadas para casos nos quais as diversas condições iniciais e finais são finitas e indeterminadas, podendo ser em relação ao tempo t_0 ou T quanto ao estado $x(0)$ ou $x(T)$ (Chiang, 1992), que a grosso modo são utilizadas para garantir unicidade de solução para o sistema de equações diferenciais. Foge ao escopo deste trabalho. ⁴

3.4.4 Interpretação Econômica a partir da Estrutura Hamiltoniana

O Hamiltoniano (3.50) possui uma interpretação Econômica, conforme sugerido por Clark (2010). O hamiltoniano é composto pelas funções $f(t, x, u)$, $g(t, x, u)$ e a variável adjunta $\lambda(t)$. A função $f(t, x, u)$ é dada em unidades de $[\frac{\$}{tempo}]$ ou seja, um fluxo de dinheiro, que financeiramente, pode ser interpretada como fluxo de caixa. A função $g(t, x, u)$ é igual a equação de estado, que neste caso representa o fluxo de biomassa, que deve então possuir unidades de: $[\frac{Biomassa(x)}{tempo}]$. Fazendo uma simples análise das unidades métricas, para fazer sentido dimensional é necessário que a variável adjunta $\lambda(t)$ possua unidades de: $[\frac{\$}{Biomassa(x)}]$, ou seja, um preço, ou mais precisamente um preço conceitual denominado na economia como preço sombra, que será definido econômica e matematicamente a seguir.

$$J(x, t) = \int_t^T f(t, x, u) ds, \quad x(t) = x \quad (3.58)$$

A integral (3.58) representa o valor econômico do ativo $x(t)$ no tempo t , assumindo que este ativo foi otimamente controlado no intervalo $[t, T]$.

Somando e subtraindo o termo λg no integrando de (3.58), utilizando a equação de estado (3.57) e integrando por partes obtemos a seguinte expressão:

$$J(x, t) = \lambda(t)x - \lambda(T)x(T) + \int_t^T \left(f + \lambda g + x \frac{d\lambda}{ds} \right) ds \quad (3.59)$$

Derivando parcialmente em relação a x , temos:

$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = \lambda(t) + \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{d\lambda}{ds} \right) ds \quad (3.60)$$

Empregando a relação adjunta (3.56) em (3.59) obtemos (3.60) :

⁴Discussões acerca dessas condições podem ser encontradas mais detalhadamente em Chiang (1992)

$$\lambda(t) = \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \quad (3.61)$$

O preço sombra é obtido finalmente através da relação (3.61), e pode ser interpretado economicamente como o valor econômico marginal de um ativo x num dado tempo t . Em outras palavras, pode ser empregado como um ponto para decidir se é vantajoso ampliar a produção (ou capacidade de extração do recurso x) e neste caso, só é economicamente vantajoso se o preço sombra for maior do que o incremento em J , dado por uma unidade do recurso extraído x , ou em outras palavras pelo valor econômico marginal do ativo, que de forma matemática pode ser expresso por:

$$\lambda(t) > \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \quad (3.62)$$

O Hamiltoniano $H = f + \lambda g$ pode ser interpretado como a razão total de crescimento da riqueza resultante de dois efeitos aditivos, fluxo de caixa + acréscimo no valor do ativo, visto que:

$$H = f + \lambda g \quad (3.63)$$

$$\lambda g = \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.64)$$

Resultando em:

$$H = f + \frac{\partial J(x, t)}{\partial t} \quad (3.65)$$

Desta forma, o Hamiltoniano representa o acréscimo de capital por meio de geração de dividendos mais valorização do ativo no tempo t . A maximização dada em (3.52) pode ser então interpretada do ponto de vista econômico de forma que o controle ótimo determinado u^* no tempo t maximiza a razão total de incremento da riqueza dada pelo Hamiltoniano.

3.4.5 Equação Adjunta num Problema de Cálculo Variacional

A relação auto adjunta foi definida em (3.56) e pode ser empregada para resolução de um problema de cálculo variacional do tipo (3.46)

Considerando (3.46) e assumindo:

$$u(t) = \frac{dx}{dt} \quad (3.66)$$

Colocando o problema (3.46) na forma Hamiltoniana introduzida em (3.49) e (3.50) temos

$$H = f(t, x(t), u(t)) + \lambda u(t) \quad (3.67)$$

Derivando parcialmente em relação a x e u , temos respectivamente:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda(t) \quad (3.69)$$

Maximizando em relação ao controle $u(t)$ temos (fazendo $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$):

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\lambda(t) \quad (3.70)$$

A equação adjunta (3.71)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{d}{dt} (-\lambda(t)) \quad (3.71)$$

combinada com o resultado (3.70) obtemos a equação de Euler introduzida em (3.48). Logo, se $u(t)$ é um controle ótimo e $x(t)$ é sua resposta associada ao Hamiltoniano (3.67) então a relação de Euler (3.48) se verifica neste caso para o estado $x(t)$ e controle $u(t)$.

Capítulo 4

Resultados

O desafio principal de nosso trabalho é utilizar a teoria do controle ótima na modelagem da exploração da madeira, numa concessão florestal, colocando o problema e suas variáveis de interesse de forma bem ajustada nessa estrutura teórica. Neste capítulo propomos um modelo de otimização dinâmica, cuja regeneração natural da floresta será representada por uma dinâmica logística, apresentando finalmente uma proposta de manejo.

A metodologia introduzida até o momento é largamente empregada, por exemplo, na modelagem de problemas oriundos da exploração de recursos naturais pesqueiros. Essa indústria geralmente atua em áreas de livre acesso, as quais são propriedades comuns que precisam de uma regulação atuante, com monitoramento constante da atividade que frequentemente são aplicadas quotas de exploração visando evitar competições predatórias que comprometam a regeneração natural do recurso. A concessão florestal, no entanto, ocorre geralmente em áreas com certa garantia de exclusividade na exploração da madeira, com espaço delimitado a cada produtor. Além deste fato, no caso dos peixes a mensuração perfeita do estoque $x(t)$ não é tão fácil como a contabilidade do estoque de árvores numa concessão florestal. Para uma melhor adaptação ao problema, conforme descrito na seção 3.2.1, as variáveis de estoque ($x(t)$), extração ($h(t)$) e capacidade ambiental (K), referentes à biomassa da madeira em termos de unidade de massa (medidas em toneladas) serão reescritas, conforme discutido abaixo.

4.1 Análise Qualitativa do Modelo

No problema do manejo florestal, a quantidade produzida é usualmente medida em unidade de volume (m^3 em geral), e a estimativa de biomassa florestal na forma de madeira é denominada de volumetria, e é mais conveniente calcular o volume de madeira em relação a uma determinada unidade de área (medidas em hectare (ha)). Como por exemplo: unidades de trabalho (UT), unidades de produção anual (UPA). O que repre-

senta fisicamente uma medida da densidade florestal dessa área

Nesta seção, substituiremos as variáveis de massa por variáveis de densidade $V(t)$ e extração $Y(V(t))$.

$$\begin{aligned}x(t) &\rightarrow V(t) \\h(t) &\rightarrow Y(V(t))\end{aligned}$$

Assumindo que as variáveis $V(t)$ e $Y(V(t))$ serão dadas em unidades (m^3/ha). O volume de madeira contido na área A_i será representado por $V(t)$, que é a densidade de estoque observada numa dada área da floresta; por sua vez, $Y(V(t))$ representa a intensidade de produção (ou a densidade de extração florestal) nesta mesma área de referência.

Como o volume $V(t)$ é previamente conhecido (mediante volumetria amostral da área), de forma resumida podemos assumir que a quantidade a ser extraída da floresta ($Y(V)$) é proporcional a V :

$$Y(V(t)) = q_c V(t) \tag{4.1}$$

A constante q_c pode ser considerada simplesmente como a proporção de madeira retirada da densidade observada de uma determinada área da floresta no tempo de corte. A relação 4.1 é definida para $V(t) \in [0, K]$. Como a produção $Y(V)$ não pode ser negativa e nem é possível extrair mais do que o volume total observado $V(t)$, temos que: $0 \leq q_c \leq 1$. Recordamos ainda que K é a capacidade de suporte ambiental introduzida na seção 3.2.1.

Lembrando que o objetivo principal de nosso processo de modelagem é obter a estratégia ótima de extração de madeira, torna-se crucial estabelecer o ponto de equilíbrio da intensidade de extração Y^* , para que (como já comentado ao longo desse trabalho) a atividade de concessão seja indefinidamente sustentável. Essa determinação da intensidade de extração ótima é determinada pelo estabelecimento do equilíbrio da densidade florestal ótima V^* . A discussão mais detalhada dos tipos de equilíbrios V^* proposta na seção 3.3. Mais especificamente nesta seção, empregaremos o equilíbrio do tipo MVP (Maximização do valor presente, discutido na seção 3.3.4). Seguiremos a recomendação de Clark (2010) que sugere que tal método é o mais adequado no estudo de problemas bioeconômicos.

Por meio da obtenção da densidade florestal de equilíbrio V^* , a intensidade de produção também pode ser definida como: $Y(t) = V(t) - V^*$, ou seja, a extração de todo o excedente de madeira acima do ponto de equilíbrio ótimo. Assumiremos que a produção seja limitada por um patamar superior denominado Y_{max} . Desta forma, a produção pode

variar no intervalo: $Y(t) \in [0; Y_{max}]$, onde Y_{max} é definido como a produção máxima empregada para reduzir o estoque para a quantidade de equilíbrio V^* .

O valor Y_{max} , no entanto na maioria dos casos, é estabelecido por meio da avaliação de custo retorno do investimento, utilizando o capital empregado como capital inicial, e no esforço produtivo para determinar a intensidade máxima de extração Y_{max} (Clark, 2010). Em diversos tipos de atividades de exploração de recursos naturais, se a intensidade Y_{max} for super dimensionada, a capacidade de esforço de trabalho (máquinas, trabalhadores, etc) poderá ficar ociosa na maior parte do tempo da atividade, o que resulta em perda de eficiência financeira (Clark, 2010). No caso do manejo, como uma atividade planejada, a força de trabalho é estabelecida de forma eficiente e deve ser estimada para cumprir as tarefas relacionadas com as atividades de manutenção da infraestrutura das estradas, planejamento, monitoramento da floresta, além da própria produção.

A seguir, listamos as definições de parâmetros de interesse relevantes (conforme visto na seção 3.3) que serão utilizados neste trabalho (nas respectivas unidades)

δ Taxa de desconto anual [ano^{-1}]

r - Taxa de crescimento do recurso [ano^{-1}]

p Preço da madeira [$\$/m^3$]

C_m Custos fixos de manutenção da atividade [$\$/ha$]

q_c Taxa de extração do recurso [adimensional]

Prosseguindo com a adequação do problema à estrutura de otimização dinâmica, o resultado líquido (receitas menos despesas), do empreendimento da concessão será definido como:

$$R(Y, C_m) = pY(V(t)) - C_m \quad (4.2)$$

O custo C_m em (4.2) são os custos fixos relacionados com a operação da atividade: aberturas e manutenções de estradas, custos com máquinas equipamento, gastos médios com energia ou combustíveis, treinamento de mão de obra, pagamento dos salários dos funcionários ao ano, depreciação do equipamento etc. Resumindo, são todos os gastos relacionados com a própria atividade, calculados numa base média anual.

Colocando em evidência o termo $Y(V(t))$ em (4.2), obtemos a seguinte expressão, assumindo que a intensidade da extração será proporcional à densidade de estoque disponível. Empregando a relação (4.1), temos:

$$R(Y, C_m) = (p - C_m(V))Y(V(t)) \quad \text{onde} \quad C_m(V) = \frac{C_m}{q_c V(t)} \quad (4.3)$$

Aqui o custo $C_m(V)$ no lado direito da expressão (4.3) representa, por sua vez, o custo variável em função da densidade do estoque $V(t)$. Por ser inversamente proporcional à essa variável, implica que o custo é decrescente com a densidade de estoque. O que é um efeito econômico previsível pela economia de escala.

O problema pode então ser expresso como a maximização dinâmica do valor presente em relação à variável de controle $Y(V) \in \mathbb{Y}$, onde $\mathbb{Y}$ é o conjunto dos controles possíveis, e este pode ser definido como:

$$\mathbb{Y} = \{Y : [0, K] \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid Y \text{ é contínua por partes e satisfaz } 0 \leq Y(V) \leq Y_{max}\}$$

O processo de maximização também será restrito a uma série de vínculos, conforme indicado abaixo. Com efeito, a modelagem do problema segundo a teoria do controle é estabelecida como:

$$\max_{Y \in \mathbb{Y}} VP = \int_0^\infty e^{-\delta t} (p - C_m(V))Y(V(t))dt, \quad (4.4)$$

sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= G(V) - Y(V(t)) \\ 0 &\leq Y(V(t)) \leq Y_{max}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

O funcional (4.4) representa a soma de todos os resultados financeiros definidos pela expressão (4.3), trazidos a valor presente (veja seção 3.3.4). Esse funcional é vinculado a dinâmica de crescimento do recurso florestal, por meio das restrições (4.5). No capítulo 3 discutimos a natureza e as propriedades dos modelos de crescimento populacional de um recurso, e em geral, assumimos um sistema dinâmico contínuo de crescimento de um dado recurso que possui uma lei que relaciona uma função de crescimento natural desse recurso por uma função $G(V)$ com a sua taxa de crescimento: $\frac{dV}{dt}$.

No nosso caso, o crescimento natural é alterado (ou controlado) pela exploração desse recurso, por meio da produção $Y(V)$. As hipóteses pertinentes à função de crescimento $G(V)$ foram discutidas detalhadamente também no capítulo 3. De maneira geral a função $G(V)$ deve ser diferenciável satisfazendo.

$$\begin{cases} G(V) > 0 & \text{sempre que } 0 < V < K \\ G(0) = G(K) = 0 & \text{se } V = 0 \text{ ou } V = K \\ G''(V) < 0 & \text{para } 0 < V < K \end{cases} \quad (4.6)$$

assim $V = K$ é um equilíbrio estável para a população quando $Y = 0$

Vamos então iniciar a resolução do problema (4.4) vinculado a (4.5). Empregando o princípio do máximo (ver 3.4.3) em sua estrutura Hamiltoniana temos:

$$H(V(t), t, Y(V), \lambda(t)) = e^{-\delta t}(p - c(V))Y(V) + \lambda(t)[G(V) - Y(V)] \quad (4.7)$$

reordenando os termos:

$$H(V(t), t, Y(V), \lambda(t)) = [e^{-\delta t}(p - C_m(V)) - \lambda(t)]Y(V) + \lambda(t)G(V) \quad (4.8)$$

e fazendo:

$$\sigma(V, t) = [e^{-\delta t}(p - C_m(V)) - \lambda(t)] \quad (4.9)$$

re-escrevendo o Hamiltoniano por

$$H(V(t), t, Y(V), \lambda(t)) = \sigma(V, t)Y(V) + \lambda G(V). \quad (4.10)$$

Nota-se o Hamiltoniano é linear em relação à variável controle $Y(V(t))$, que é restrito, por definição do problema, a um conjunto limitado de possíveis valores no intervalo fechado $[0, Y_{max}]$. Dessa forma, a solução ótima pode ocorrer nas extremidades do Hamiltoniano (4.10), isto é, em $Y = 0$ quando o coeficiente $\sigma(V, t) < 0$ ou em $Y = Y_{max}$ quando $\sigma(V, t) > 0$. Por outro lado, a solução ótima pode acontecer também numa posição intermediária do intervalo $[0, Y_{max}]$ (Clark, 2010) quando $G(V, t) \equiv 0$ numa determinada região admissível.

Segue-se então do princípio do máximo que o controle ótimo $Y = 0$ se $\sigma(V, t) < 0$ e $Y = Y_{max}$ se $\sigma(V, t) > 0$. No caso alternativo a este, temos a solução num ponto intermediário e indeterminado do segmento quando a variável $\sigma(V, t)$ (denominada a partir daqui de *swift*) for identicamente nula ($\sigma(V, t) = 0$). Esta última condição é denominada solução singular, as demais, obtidas nos extremos do conjunto $\mathbb{Y}$, são denominadas soluções do tipo Bang Bang.

As regras de controle de Y são então definidas pela seguinte função constante por partes :

$$Y(V(t)) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma(V, t) < 0 \\ \text{Singular} & \text{se } \sigma(V, t) = 0 \\ Y_{max} & \text{se } \sigma(V, t) > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

A função é condicionada em relação ao valor do *swift*. Nos casos extremos temos $\sigma(V, t) < 0$ ou $\sigma(V, t) > 0$, definindo um controle do tipo *Bang Bang*. No caso alternativo $\sigma(V, t) = 0$ o controle é denominado singular.

Nas situações onde o controle é do tipo *Bang Bang* temos ações extremas na qual a atividade extrativa é cessada ou é empregada o máximo de sua capacidade produtiva.

Permita-nos agora prosseguirmos os cálculos para encontrar a solução ótima para o caso singular $\sigma(V, t) = 0$

$$\sigma(V, t) = 0 \Rightarrow \lambda(t) = e^{-\delta t}(p - C_m(V)) \quad (4.12)$$

Vamos empregar a equação adjunta

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V} \quad (4.13)$$

Calculando inicialmente a derivada à direita em (4.13) pela expressão (4.12) temos:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\delta e^{-\delta t}(p - C_m(V)) - e^{-\delta t} \frac{dC_m(V)}{dV} \frac{dV}{dt} \quad (4.14)$$

Lembrando a relação da equação de estado (1.2) e substituindo então o termo $\frac{dV}{dt}$ em (4.14) obtemos:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -e^{\delta t}[\delta(p - C_m(V)) + C_m'(V)(G(V) - Y)] \quad (4.15)$$

Continuando o cálculo fazemos a derivada parcial do Hamiltoniano (4.8) obtendo

$$\frac{\partial H}{\partial V} = -e^{-\delta t}C_m'(V)Y(V) + [e^{-\delta t}(p - C_m(V))] - \lambda(t) \frac{\partial Y}{\partial V} + \lambda(t)G'(V) \quad (4.16)$$

O termo central se anula ao substituir relação (4.12) na variável adjunta $\lambda(t)$ em (4.16) obtendo a nova expressão:

$$-\frac{\partial H}{\partial V} = e^{-\delta t}[C_m'(V)Y - (p - C_m(V))G'(V)] \quad (4.17)$$

Substituindo então os resultados (4.15) e (4.17) em (4.13) e após alguns passos de álgebra obtemos finalmente a relação :

$$G'(V) - \frac{C'_m(V)G(V)}{p - C_m(V)} = \delta \quad (4.18)$$

A relação (4.18) determina implicitamente a densidade de biomassa florestal ótima V^* . Essa solução vai depender das propriedades das funções e dos parâmetros contidos nesta relação. Os parâmetros (p, c, q_c, δ) da equação (4.18) devem ser positivos. Temos também o custo marginal $C_m(V)$ negativo: $C'_m(V) \leq 0$, pois: $C'_m(V) = -C_m/q_c V^2$ e $G(V) \geq 0$

Finalmente observamos que o conjunto solução dado em V pela equação implícita (4.18) contempla também os demais casos de equilíbrios discutidos na seção 3.3. Primeiramente obtemos o equilíbrio produção máxima sustentável por (3.15) V_{PMS} quando (4.18) possui $\delta = 0$ e $C_m = 0$. Por outro lado o equilíbrio com resultado econômico máximo V_{RMS} é atingido quando apenas $\delta = 0$ pela equação (3.31). O equilíbrio em acesso aberto é atingido quando $C_m(V_{AA}) = p$, lembrando que: $V_{AA} = \frac{c}{pq_c}$ (ver (3.22)), ou seja, quando os custos em função do estoque são fixos e iguais ao preço da madeira.

4.2 Cálculo da Intensidade de Extração no Manejo

Nesta seção procuramos validar o modelo apresentado em Muhlbauer (2007) estabelecendo a produção ou intensidade de extração no manejo. Para isso, nos baseamos em informações e dados obtidos por meio do Plano de Manejo Florestal Sustentável em Floresta Pública (ou PMF), que é um documento necessário para candidatura à licitação de concessão florestal junto ao Sistema Florestal Brasileiro (SFB, 2013); produzido pela Madeflona Industrial Madeireira em 2007 (Muhlbauer, 2007).

O plano de manejo descrito nas referências acima detalha os levantamentos de macro e microplanejamento, bem como todos os demais elementos para o planejamento do manejo, levantamento de dados da área, infraestrutura, dados financeiros de custos, recursos operacionais etc. Na unidade denominada Flona do Jamarí, foram declarados, entre outros, os seguintes dados brutos:

- Ciclo de Corte: 30 anos
- taxa de desconto (adotaremos inicialmente 4% ao ano)
- Número de Funcionários: 47
- Custo da equipe técnica permanente: R\$ 819.763,00 ao ano
- Total da área manejada, aproximadamente: 16.433 ha
- Área média por UPA (Área Total/30): 548 ha

- Taxa de crescimento da floresta: $1 \text{ m}^3/\text{ha}$ ao ano
- Estoque inicial estimado (antes do início da atividade de extração): $82.69 \text{ m}^3/\text{ha}$

No mesmo PMF citado foi estimada a intensidade máxima de produção de: $25.80 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$. Este valor foi determinado por premissas extremamente simples, calculada de forma a manter o estoque final maior ou igual ao inicial. Segundo os dados, o estoque inicial estimado na Flona Jamarí foi de $82.69 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$. A taxa de recuperação anual da floresta, estimada de forma empírica em: $1 \frac{\text{m}^3}{\text{ha ano}}$, multiplica-se essa taxa pelo tempo do ciclo de 30 anos, e é obtida uma densidade de $30 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$ de floresta recuperada naturalmente. Foi escolhido então a priori uma intensidade de exploração menor do que essa taxa de recuperação da floresta para garantir a conservação. De forma que a intensidade adotada de $25.80 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$ provoca uma redução da densidade até o nível de $56.89 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$. Quando o ciclo de 30 anos se completar teremos uma adição de mais $30 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$ totalizando um estoque, ao fim do ciclo de rotação, de $86.89 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$, ou seja, ao final do ciclo se estima ter um pouco a mais de densidade florestal do que antes da atividade.

Empregando este procedimento simples de cálculo, o PMF conclui que a intensidade de $25.80 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$ seria sustentável e apresentada no plano de manejo como intensidade de corte ou produção. Este fator pode ser empregado para calcular a produção em m^3 em cada uma das 30 UPAs. Por exemplo, pode-se calcular a produção média de madeira por UPA: $25.8 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}} \times 548 \text{ ha} = 14.138,40 \text{ m}^3$ anualmente.

4.3 Resultados obtidos na Teoria de Controle

Assumindo a técnica de modelagem da teoria do controle ótimo e com auxílio de alguns dados procuramos obter as soluções ótimas. Para isto, utilizaremos os seguintes valores de parâmetros, tomados como valores de referência ou calculados a partir dos dados obtidos no PMF (Muhlbauer, 2007)

O percentual de corte estimado será adotado por meio dos valores da premissa anterior, no qual foi adotado uma intensidade de corte inicial de $25.80 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$ numa floresta de $82.69 \frac{\text{m}^3}{\text{ha}}$: $q_c = \frac{25.80}{82.69} = 0.31$, o custo fixo com a produção será estimado de forma simplificada, considerando apenas o custo com a equipe técnica por ano $C_m = \frac{R\$819.763,00}{548 \text{ ha}} = R\$1.495,97$ por hectare ano. O preço da madeira p sofre variações ao longo do tempo, desta forma, será adotado valor de referência dentro do intervalo citado em (CIFlorestas, 2013) como $p = 500$. Taxas de descontos altas implicam em explorações não sustentáveis e muitas vezes em colapso como comentado anteriormente em 3.3.4. O valor de referência ideal seria abaixo de 10% (Clark, 2010); no nosso caso, adotaremos aqui a taxa $\delta = 4\%$. Finalmente, adotaremos um valor para a constante denominada de capacidade ambiental K .

Lembrando que a constante K foi definida em (3.3) (a relação da dinâmica de crescimento da biomassa), representando na equação (3.3) de forma qualitativa que todas as órbitas desse sistema dinâmico convergem para K quando o tempo t tende ao infinito, em outras palavras, a densidade máxima (ou densidade de equilíbrio) que a floresta pode atingir.

Na exploração inicial da concessão, temos a floresta em equilíbrio. Neste caso, temos o valor da densidade florestal muito próximo da capacidade ambiental. Como a densidade florestal inicialmente medida foi de $V(0) = 82.69 \frac{m^3}{ha}$, podemos adotar para o K um valor de referência ligeiramente maior a este, neste caso será adotado $K = 90 m^3/ha$.

Os parâmetros adotados como valores de referência para os cálculos serão listados abaixo:

$$\delta = 4\% \text{ ao ano}$$

$$r = 1\% \text{ ao ano}$$

$$p = R\$ 500.00 \text{ por } m^3$$

$$q_c = 0.31$$

$$C_m = R\$ 1496.00 \text{ por ha}$$

$$K = 90 m^3/ha$$

A solução da equação (4.18) fornece o estoque referente à solução ótima para o valor presente. Supondo uma função de crescimento $G(V) = rV \left(1 - \frac{V}{K}\right)$ logística em V , resolvendo temos :

$$V^* = \frac{K}{4} \left[\left(\frac{C_m}{pqK} + 1 - \frac{\delta}{r} \right) + \sqrt{\left(\frac{C_m}{pqK} + 1 - \frac{\delta}{r} \right)^2 + \frac{8 C_m \delta}{pqKr}} \right] \quad (4.19)$$

Substituindo os valores dados em (4.19), obtemos como solução da equação implícita: $V^* = 48.38 \frac{m^3}{ha}$.

Este valor representa a densidade de árvores na qual ocorre o equilíbrio entre a intensidade da extração e a renovação natural. Portanto, esta densidade representa a densidade mínima a ser mantida. Neste patamar, se extrai apenas o excedente de V^* e a floresta é mantida.

Inicialmente, por este método, poderia ser então extraído no primeiro ciclo uma quantia de $Y^* = V - V^* = 82.69 - 48.38 \approx 34.30 \frac{m^3}{ha}$.

A estratégia de operação da produção sugerida por meio de otimização dinâmica é dada pela função contínua por partes, da seguinte forma:

$$Y(V(t)) = \begin{cases} 0 & \text{se } V < V^* \\ Y(V^*) & \text{se } V = V^* \\ Y_{max} & \text{se } V > V^* \end{cases} \quad (4.20)$$

É uma premissa da modelagem considerar a extração contínua. Na técnica de manejo a produção pode ser considerada também por meio de um modelo discreto, pois de fato temos os eventos em tempo discreto. Porém a organização do manejo em unidades de produção anual, permite que a produção seja feita continuamente ao longo do ano para cada UPA, dada pela organização de sequenciamento por rotação (neste caso foi adotado no plano de manejo um período de 30 anos), começando o corte na primeira UPA (A_1), no primeiro ano, sucessivamente até a última (A_{30}), formando então o vetor de unidade de produção anuais (UPAs)

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{30} \end{pmatrix}$$

Durante o período de rotação (T_R) de 30 anos (conforme (Muhlbauer, 2007)), retornando enfim à primeira UPA A_1 no ano subsequente ao fim do ciclo. Ao invés de modelar a rotação de cada UPA, se considerarmos o fenômeno como um todo temos uma produção anual e contínua na floresta ao longo do tempo, garantida por meio das técnicas de manejo

Na prática, a operação contínua pela produção constante em termos do valor singular é muito improvável de ser mantida, devido as características do sistema florestal e do ordenamento da atividade, que praticamente impossibilitam a manutenção estritamente constante do valor em: $V = 48.38 \frac{m^3}{ha}$ indefinidamente. Devemos esperar um regime de controle na maior parte do tempo do tipo puramente Bang Bang:

$$Y(V(t)) = \begin{cases} 0 & \text{se } V < 48.38 \frac{m^3}{ha} \\ Y_{max} & \text{se } V > 48.38 \frac{m^3}{ha} \end{cases} \quad (4.21)$$

Desta forma após a passagem do período de corte a uma dada unidade A_i , a mesma permanecerá pelo período de tempo do ciclo se recuperando. Assim a atividade é cessada e portanto entramos numa condição do tipo Bang Bang, onde $Y = 0$, deste modo, obtemos o sistema de crescimento natural da floresta

$$\frac{dV(t)}{dt} = rV \left(1 - \frac{V}{K} \right) \quad (4.22)$$

A equação diferencial acima possui solução analítica conhecida:

$$V(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-V_0}{V_0} \right) e^{-rt}} \quad (4.23)$$

Substituindo $t = T_R = 30$, temos que: $V(t) \approx K$ (pois quando $t \gg 1$ temos $V(t) \approx K$ pelo fato de que: $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = K$). Deste modo, podemos esperar que a floresta se recupere no período do ciclo estabelecido $t = T_R$.

A estratégia do tipo Bang Bang se mostra mais adequada ao planejamento e ordenamento dado no manejo, visto que o corte é efetuado a partir de um determinado estoque inicial $V(0)$ dado naquele instante até atingir o limite V^* e após T_R anos (T_R : tempo do ciclo) a área passa pelo período de descanso para recuperação. Em T_{R+1} é feito o novo levantamento na área para estimar o estoque na mesma UPA e no caso do valor ficar abaixo do valor de referência V^* , o corte não seria executado.

A resolução do problema até aqui se baseou nas estimativas de um valor intermediário de preço ($p = R\$ 500.00$) e uma dada taxa de desconto ($\delta = 0.04$). Neste momento, faremos uma análise das soluções possíveis das densidades de equilíbrio V^* para uma faixa de preços $p \in [R\$ 300.00, R\$ 1000.00]$ variando em função de δ e neste caso: $\delta \in [0.01; 0.10]$.

Figura 4.1: Intervalo de soluções possíveis entre a faixa de preço de $R\$ 500.00$ a $R\$ 1000.00$ em função da taxa de desconto.

Conforme observado no gráfico 4.1 a faixa destacada está delimitada entre a curva inferior representando a curva de preço ($p = R\$ 1000.00$) e a superior sendo a curva de preço para $p = R\$ 300.00$. Qualquer curva pertencente a este intervalo determina os valores possíveis de V^* (eixo vertical) para um determinado preço em função da taxa de

desconto δ (eixo horizontal). Observando o gráfico nota-se que o comportamento da função V^* é decrescente em função de δ . Conforme mencionado anteriormente ao longo de todo esse texto, é um comportamento esperado, pois grandes taxas determinam colheitas mais intensivas. Para o valor de $\delta = 0.04$ temos o preço de $p = R\$300.00$, determinando $V^* = 51.80$, e para $p = R\$1000.00$ temos $V^* = 45.80$.

Finalmente, observamos que o equilíbrio V^* varia continuamente com respeito a δ e p por meio da expressão explícita (4.18), sempre que p é limitado inferiormente por uma constante positiva. Desta forma, obtemos uma certa estabilidade do sistema, ou mais precisamente, das soluções ótimas com relação aos parâmetros preço da madeira p e taxa de desconto anual δ .

Capítulo 5

Conclusões

Observa-se que este modelo é um avanço, pois proporciona obter o valor ótimo da densidade florestal para a extração levando em consideração, além da dinâmica de renovação da floresta, os fatores econômicos relevantes, como preço da madeira, custos, etc. A técnica de teoria do controle/otimização dinâmica também valida a metodologia atualmente empregada e agora abre novas frentes de investigação, permitindo a introdução de outros fatores relevantes. Por exemplo, pode-se aperfeiçoar este modelo para avaliar o impacto social e ecológico, mais especificamente na fauna circunscrita em tal concessão. Nesse caso a otimização deve ser realizada em sistemas de equações mais complexas do que as apresentadas aqui. Também pode-se investigar a estabilidade da atividade procurando garantias para que o colapso (extinção da biomassa, neste caso) não ocorra.

Referências Bibliográficas

- Beddington e May (1977)** J. R. Beddington e R. M. May. Harvesting natural population. *Science*, 197:pp. 463–465. Citado na pág. 29
- Brasil (2006)** Brasil. Lei de gestão das florestas públicas. <http://www.florestal.gov.br/menu-horizontal-de-internet/legislacao/legislacao>, 2006. Último acesso em 25/6/2013. Citado na pág. 12
- Bueno (2010)** E. Bueno. *Brasil uma História*. Leya, 1º ed. Citado na pág. 15
- Chiang (1992)** A. C. Chiang. *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill. Citado na pág. 12, 40, 45
- CIFlorestas (2013)** CIFlorestas. Preço madeira serrada. Relatório técnico. URL <http://www.ciflorestas.com.br/dado.php?id=171>. Citado na pág. 55
- Clark (2010)** Colin W. Clark. *Mathematical Bioeconomics, The Mathematics of Conservation*. Willey, 3º ed. Citado na pág. 12, 27, 30, 33, 40, 45, 49, 50, 52, 55
- Clark et al. (1979)** Colin W. Clark, Frank H. Clarke e Gordon R. Munro. The optimal exploitation of renewable resource stocks: Problems of irreversible investment. *Econometrica*, 47(1):pp. 25–47. ISSN 00129682. Citado na pág. 21
- Dasgupta e Heal (1979)** P. S. Dasgupta e G. M. Heal. *Economic Theory And Exhaustible Resources*. Cambridge University Press, 1º ed. Citado na pág. 21
- Domokos e Scheuring (2004)** Gábor Domokos e István Scheuring. Discrete and continuous state population models in a noisy world. *Journal of Theoretical Biology*, 227(4):535 – 545. ISSN 0022-5193. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2003.08.017>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002251930300448X>. Citado na pág. 24, 25
- Embrapa (2013)** Embrapa. Floresta e silvicultura. <http://www.embrapa.br>, 2013. Último acesso em 23/7/2013. Citado na pág. 18
- Fisher (1981)** A. C. Fisher. *Resource and Environmental Economics*. Cambridge University Press. URL <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511572081>. Citado na pág. 21
- Gordon (1954)** H. Scott Gordon. The economic theory of a common-property resource: The fishery. *Journal of Political Economy*, 62(2):124–142. ISSN 00223808. URL <http://www.jstor.org/stable/1825571>. Citado na pág. 20, 21
- Hanley et al. (1997)** N. Hanley, J. Shogren e B. White. *Environmental Economics in Theory and Practice*. Macmillan. Citado na pág. 12, 21

- Huffaker (1993)** Ray G. Huffaker. Optimal management of game and forage resources in a private fee-hunting enterprise. *American Journal of Agricultural Economics*, 75(3): 696–710. doi: 10.2307/1243576. Citado na pág. 21
- Huffaker e Wilen (1991)** Ray G. Huffaker e James E. Wilen. Animal stocking under conditions of declining forage nutrients. *American Journal of Agricultural Economics*, 73(4):1213–1223. doi: 10.2307/1242449. Citado na pág. 21
- IMAZON (1998)** IMAZON. Floresta para sempre: Um manual para a produção de madeira na amazônia. <http://www.imazon.org.br/>, 1998. Último acesso em 28/7/2014. Citado na pág. 15, 16, 17, 18
- INPE (2014)** Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais INPE. Monitoramento do desmatamento na amazônia legal. <http://www.inpe.br/>, 2014. Último acesso em 23/7/2014. Citado na pág. 17
- Kot (2001)** Mark Kot. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-00150-2. Citado na pág. 23, 28
- Mangel e et al (1996)** Mangel e et al. Principles for the conservation of wild living resources. *Ecological Applications*, 6(2):338–362. ISSN 10510761. URL <http://www.jstor.org/stable/2269369>. Citado na pág. 21
- May (2001)** Robert May. *Stability and complexity in model Ecosystems*. Princeton University Press. Citado na pág. 23
- McInerney (1976)** John McInerney. The simple analytics of natural resource economics. *Journal of Agricultural Economics*, 27(1):31–52. ISSN 1477-9552. doi: 10.1111/j.1477-9552.1976.tb00964.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1477-9552.1976.tb00964.x>. Citado na pág. 21
- McInerney (1978)** John McInerney. On the optimal policy for exploiting renewable resource stocks. *Journal of Agricultural Economics*, 29(2):183–188. ISSN 1477-9552. doi: 10.1111/j.1477-9552.1978.tb02413.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1477-9552.1978.tb02413.x>. Citado na pág. 21
- Milner-Gulland (1997)** E. J. Milner-Gulland. A stochastic dynamic programming model for the management of the saiga antelope. *Ecological Applications*, 7(1):130–142. Citado na pág. 21
- Muhlbauer (2007)** Evandro Muhlbauer. Plano de manejo florestal sustentável em floresta pública. Relatório técnico, MADEFLONA Industrial Madeireira Flona do Jamari Ltda. URL http://www.florestal.gov.br/concessoes-florestais/florestas-sob-concessao/index.php?option=com_k2&view=item&layout=item&catid=98&id=800. Citado na pág. 54, 55, 57
- Murray (2002)** J. D. Murray. *Mathematical Biology, An Introduction*. Springer, 3º ed. Citado na pág. 23, 28
- Pillet (1993)** Gonzague Pillet. *Economia Ecologica*. Instituto Piaget, 1º ed. Citado na pág. 12, 20

- Roegen (2008)** Nicholas Georgescu Roegen. *O Decrescimento, Entropia Ecologia Econômica*. Instituto Piaget, 3º ed. Citado na pág. 20
- SFB (2013)** Serviço Florestal Brasileiro SFB. Sfb. <http://www.florestal.gov.br/>, 2013. Último acesso em 25/6/2013. Citado na pág. 18, 54
- Silva (1996)** J. N. M. Silva. *Manejo Florestal*. Embrapa, 2º ed. Citado na pág. 15
- Smith (1977)** Vernon L Smith. Control theory applied to natural and environmental resources an exposition. *Journal of Environmental Economics and Management*, 4(1): 1–24. ISSN 0095-0696. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0095-0696\(77\)90012-2](http://dx.doi.org/10.1016/0095-0696(77)90012-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095069677900122>. Citado na pág. 21
- Tu e Wilman (1992)** Pierre N.V Tu e Elizabeth A Wilman. A generalized predator- prey model: Uncertainty and management. *Journal of Environmental Economics and Management*, 23(2):123–138. ISSN 0095-0696. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0095-0696\(92\)90024-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0095-0696(92)90024-Q). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009506969290024Q>. Citado na pág. 21
- White (2000)** Ben White. A review of the economics of biological natural resources. *Journal of Agricultural Economics*, 51(3):419–462. Citado na pág. 12, 21