UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ARTES, CIÊNCIAS E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM DE SISTEMAS COMPLEXOS

VITOR MENDES CARDOSO

**Algoritmos não-paramétricos para detecção de pontos de mudança
em séries temporais de alta frequência**

São Paulo

2018

VITOR MENDES CARDOSO

**Algoritmos não-paramétricos para detecção de pontos de mudança
em séries temporais de alta frequência**

Versão original

Dissertação apresentada à Escola de Artes,
Ciências e Humanidades da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de Mestre em
Ciências pelo Programa de Pós-graduação em
Modelagem de Sistemas Complexos

Área de concentração:
Fundamentos de Sistemas Complexos

Orientador:
Prof. Dr. José Ricardo Gonçalves de Mendonça

São Paulo

2018

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO

(Universidade de São Paulo. Escola de Artes, Ciências e Humanidades. Biblioteca)

CRB 8 - 4936

Cardoso, Vitor Mendes

Algoritmos não-paramétricos para detecção de pontos de mudança em séries temporais de alta frequência / Vitor Mendes Cardoso ; orientador José Ricardo Gonçalves de Mendonça. – 2018.

78 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos, Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo. Versão original.

1. Análise de séries temporais. 2. Métodos gráficos. 3. Econometria. 4. Mercado financeiro - Estatísticas e dados numéricos - Controle. I. Mendonça, José Ricardo Gonçalves de, orient. II. Título.

CDD 22.ed.– 519.55

Dissertação de autoria de Vitor Mendes Cardoso sob o título “**Algoritmos não-paramétricos para detecção de pontos de mudança em séries temporais de alta frequência**” apresentada à Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Modelagem de Sistemas Complexos na área de concentração Fundamentos de Sistemas Complexos, aprovada em _____ de _____ de _____ pela comissão julgadora constituída pelos seguintes membros:

Prof. Dr. José Ricardo Gonçalves de Mendonça

Escola de Artes, Ciências e Humanidades – Universidade de São Paulo

Presidente

Prof(a). Dr(a). _____

Instituição: _____

Examinador(a)

Prof(a). Dr(a). _____

Instituição: _____

Examinador(a)

Prof(a). Dr(a). _____

Instituição: _____

Examinador(a)

*Dedico este trabalho à minha esposa Fernanda,
melhor amiga e companheira de todas as horas*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha esposa Fernanda Santos pelo carinho, compreensão, amor e solidariedade, por assumir o papel de minha editora e revisora e por sempre me apoiar em todas as decisões.

Agradeço também à minha família e a Deus e, com agradecimentos especiais, a todo corpo docente da EACH e da USP que me acompanhou nesta jornada.

Por fim, agradeço ao meu orientador Prof. José Ricardo por me ajudar a vencer as dificuldades com conselhos e ações.

Resumo

MENDES, Vitor Cardoso. **Algoritmos não-paramétricos para detecção de pontos de mudança em séries temporais de alta frequência**. 2018. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

A área de estudos econométricos visando prever o comportamento dos mercados financeiros aparece cada vez mais como uma área de pesquisas dinâmica e abrangente. Dentro deste universo, podemos de maneira geral separar os modelos desenvolvidos em paramétricos e não paramétricos. O presente trabalho tem como objetivo investigar técnicas não-paramétricas derivadas do CUSUM, ferramenta gráfica que se utiliza do conceito de soma acumulada originalmente desenvolvida para controles de produção e de qualidade. As técnicas são utilizadas na modelagem de uma série cambial (USD/EUR) de alta frequência com diversos pontos de negociação dentro de um mesmo dia.

Palavras-chaves: Séries temporais. Série cambial. Estatística não-paramétrica. Soma cumulativa. Máscara V.

Abstract

MENDES, Vitor Cardoso. **Non-parametric change-point detection algorithms for high-frequency time series**. 2018. 78 p. Thesis (Master of Science) – School of Arts, Sciences and Humanities, University of São Paulo, São Paulo, 2018.

The area of econometric studies to predict the behavior of financial markets increasingly proves itself as a dynamic and comprehensive research area. Within this universe, we can generally separate the models developed in parametric and non-parametric. The present work aims to investigate non-parametric techniques derived from CUSUM, a graphical tool that uses the cumulative sum concept originally developed for production and quality controls. The techniques are used in the modeling of a high frequency exchange series (USD/EUR) with several trading points within the same day.

Keywords: Time series. Foreign exchange series. Non-parametric statistics. Cumulative sum. V mask.

Lista de figuras

Figura 1 – Agrupamento de volatilidade para os retornos da cotação de petróleo.	17
Figura 2 – Comportamento de distribuições de densidade.	19
Figura 3 – Exemplo de CUSUM tabular.	25
Figura 4 – Máscara V plotada sobre gráfico CUSUM.	27
Figura 5 – Diagrama dos custos envolvidos.	33
Figura 6 – Cotação do par de moedas EUR/USD.	39
Figura 7 – Histograma da amostra treinamento.	41
Figura 8 – Retornos logarítmicos do par de moedas EUR/USD.	42
Figura 9 – Amostra teste do par de moedas EUR/USD	43
Figura 10 – Retornos do par de moedas EUR/USD.	44
Figura 11 – Histograma da amostra teste do par de moedas EUR/USD.	45
Figura 12 – Comparação entre o PIB brasileiro nominal e real.	46
Figura 13 – Rendimentos de acordo com a variação dos parâmetros h e D	50
Figura 14 – Soma acumulada para os desvios acima da média.	51
Figura 15 – Soma acumulada para os desvios acima da média em junho/2016.	52
Figura 16 – Retornos para dias selecionados de junho/2016.	52
Figura 17 – Soma acumulada para os desvios abaixo da média.	53
Figura 18 – Estatística CUSUM com limites de controle.	54
Figura 19 – Estatística CUSUM com limites de controle e cotação do ativo.	55
Figura 20 – Cotação no momento das ordens de compra e venda.	57
Figura 21 – Retornos acumulados.	58
Figura 22 – Retornos brutos e líquidos acumulados.	59
Figura 23 – Estatística CUSUM e limites de controle para amostra teste.	60
Figura 24 – Cotação no momento das ordem para a amostra de teste.	61
Figura 25 – Retornos brutos e líquidos acumulados para a amostra de teste.	61
Figura 26 – Rentabilidade Máscara V com variação de parâmetro.	63
Figura 27 – Estatística da Máscara V e ordem emitidas.	64
Figura 28 – Estatística da Máscara V e ordem emitida para período específico.	65
Figura 29 – Estatística da Máscara V e cotação original.	65
Figura 30 – Cotação após ordens de compra ou venda pela Máscara V.	67

Figura 31 – Rentabilidade bruta da Máscara V.	67
Figura 32 – Rentabilidade bruta e líquida da Máscara V.	68
Figura 33 – Ordens para a amostra de teste – Máscara V.	69
Figura 34 – Comportamento das ordens para a amostra de teste – Máscara V.	70
Figura 35 – Rentabilidades para a amostra de teste – Máscara V.	70

Lista de tabelas

Tabela 1 – Medidas descritivas da amostra treinamento	40
Tabela 2 – Medidas descritivas da amostra teste.	44
Tabela 3 – Retornos de acordo com os parâmetros selecionados.	48
Tabela 4 – Comparativo entre rendimentos para $D = 0,002$ e $D = 0,0025$	50
Tabela 5 – Ordens de compra CUSUM tabular.	56
Tabela 6 – Ordens de venda CUSUM tabular.	56
Tabela 7 – Taxa de acerto das ordens emitidas.	57
Tabela 8 – Taxa de acerto das ordens emitidas na amostra teste	60
Tabela 9 – Taxa de acerto das ordens emitidas pela Máscara V.	66
Tabela 10 – Taxa de acerto das ordens emitidas para a amostra de teste – Máscara V . . .	69

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Definição do problema	13
1.2	Justificativa do projeto	14
1.3	Metodologia	14
1.4	Objetivos e organização	15
2	Séries temporais financeiras	16
2.1	Séries temporais	16
2.2	Fatos estilizados	16
2.2.1	<i>Agrupamentos de volatilidade</i>	17
2.2.2	<i>Distribuição com Caudas Pesadas</i>	18
3	Gráficos de controle	20
3.1	Procedimentos estatísticos	20
3.2	Soma cumulativa – CUSUM	22
3.3	A máscara V	26
3.4	Comprimento médio de corrida – ARL	29
3.5	Aspectos econômicos de gráficos de controle	31
3.5.1	<i>Perspectiva geral</i>	31
3.5.2	<i>Rentabilidade com ativos financeiros</i>	34
4	Aplicação do CUSUM a séries financeiras cambiais	36
4.1	Mercado de câmbio	36
4.2	Amostra	37
4.2.1	<i>Amostra de treinamento</i>	38
4.2.2	<i>Amostra de teste</i>	42
4.2.3	<i>Ajuste de tendência</i>	45
5	Estudo de caso	47
5.1	CUSUM tabular	47
5.1.1	<i>Parâmetros</i>	47
5.1.2	<i>Modelagem</i>	51

5.1.3	<i>Retorno financeiro</i>	55
5.1.4	<i>Amostra de teste</i>	59
5.2	Máscara V	62
5.2.1	<i>Parâmetros</i>	62
5.2.2	<i>Modelagem</i>	63
5.2.3	<i>Retorno financeiro</i>	66
5.2.4	<i>Amostra de teste</i>	68
6	Conclusões	71
	Referências¹	73
	APÊNDICES	74
	Apêndice A – Código em R para o CUSUM tabular	75
	Apêndice B – Código em R para a máscara V	77

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

1 Introdução

1.1 Definição do problema

Em ambientes de mercado financeiro, é notória a dificuldade em estabelecer ferramentas com capacidade de previsão do movimento dos ativos financeiros que estão sendo comercializados. Apesar disto, a imensa maioria dos participantes corporativos dos mercados financeiros se utiliza de ferramentas computacionais e técnicas estatísticas para uma tentativa de antecipação dos movimentos. Por óbvio, tais instrumentos são utilizados pelos participantes ativos, ou seja, aqueles que estão de fato comercializando os ativos, com intuito de auferirem lucros mais sólidos, entretanto, para os participantes regulatórios, tais como as próprias bolsas de valores ou as autoridades bancárias centrais, as ferramentas de previsão são utilizadas na identificação de movimentos que podem trazer volatilidade adicional, que por sua vez podem acarretar em situações problemáticas para o mercado como um todo.

Diante deste cenário, a bibliografia em econometria está repleta de técnicas e tentativas de construção de modelos que demonstrem capacidade preditiva nos mercados. Os modelos paramétricos já estão consideravelmente evoluídos e refinados, até mesmo ao ponto de termos ganhadores de prêmio Nobel em Economia oriundos desta vertente de pesquisa. Além do mais, grande parte da literatura de econometria já é preenchida com estudos paramétricos. Em que pese a importância desta linha de pesquisa, o presente trabalho se propõe a estudar com mais profundidade os modelos não paramétricos em econometria.

Ao imaginarmos uma situação real, é de suma importância para um agente ativo no mercado identificar de forma rápida e assertiva a tendência que o preço de um determinado ativo possa estar tomando, seja uma tendência crescente, que desencadearia ordem de compra, ou uma tendência de queda nos preços, que teria como consequência uma ordem de venda. Já no caso de autoridades regulatórias, a identificação antecipada de movimentos bruscos no mercado pode ser o gatilho para iniciar uma série de atitudes e movimentos visando acalmar os mercados, sendo a mais agressiva delas a interrupção completa dos mercados por um determinado período de tempo, procedimento conhecido como *circuit breaker*.

O problema que o presente trabalho se propõe a solucionar está correlacionado a construir um método capaz de prever e monitorar o comportamento dos ativos financeiros. Além do mais, o problema baseia-se em identificar rapidamente quando ocorrerá uma mudança relevante

no comportamento do ativo, que em termos práticos pode ser entendido como o início de uma tendência do mesmo.

1.2 Justificativa do projeto

Certamente um algoritmo capaz de antever certos movimentos em ativos financeiros seria de grande valia para os agentes econômicos envolvidos no mercado. Muito além de ferramentas capazes de proporcionar lucros aos seus usuários, um algoritmo de detecção de pontos de mudança de comportamento em séries financeiras pode ser usado, por exemplo, para identificação rápida e otimizada de movimentos bruscos no mercado que podem trazer elementos de volatilidade maiores do que os considerados saudáveis pelas autoridades reguladoras.

Numa realidade cada vez mais dominada por algoritmos que operam em alta frequência no mercado financeiro, uma ferramenta capaz de capturar mudanças de comportamento nas séries sob estudo certamente podem ter um papel fundamental na preservação da integridade dos mercados de ativos financeiros, sejam eles de ações, de câmbio ou de outra natureza. Uma ferramenta construída a partir do mesmo conceito de operações de alta frequência, ou seja, mecanismos de investimentos que se utilizam de ferramentas tecnológicas apuradas e algoritmos computacionais para comercializar ativos financeiros de diversas configurações e características, seguramente oferece melhores resultados, tanto de performance econômica quanto de papel regulatório, do que quando comparado a técnicas mais rudimentares do ponto de vista tecnológico.

1.3 Metodologia

Com base numa série cambial de preços entre dólar americano (USD) e euro (EUR), utilizamos a técnica de soma acumulada denominada CUSUM. Inicialmente desenvolvida para aplicações em controle de qualidade industriais (BISSEL, 1969), adaptamos sua finalidade para o mercado de capitais. A partir do CUSUM, estudamos duas variantes de metodologia, o CUSUM tabular e a Máscara V, que permitiram a definição dos melhores momentos para se comprar ou vender o ativo sob estudo. A modelagem foi feita com base numa amostra treinamento que compreende todo o ano de 2016, já a verificação do poder preditivo dos modelos consiste em comparações com base numa amostra teste que compreende o primeiro semestre de 2017.

1.4 Objetivos e organização

O objetivo principal deste trabalho é apresentar possíveis aplicações de algoritmos não paramétricos de detecção de pontos de mudança no mercado financeiro, mais especificamente no mercado cambial. Devido ao foco na aplicação em mercados financeiros, os métodos e procedimentos são apresentados de forma adaptada para lidar com uma sequência de variáveis aleatórias que representam cotações de pares de moedas ou qualquer outra estatística observada sequencialmente. Normalmente, as estatísticas do mercado financeiro são altamente correlacionadas e, conseqüentemente, não são idêntica e independentemente distribuídas. Diante disto, algoritmos não paramétricos oferecem excelentes alternativas para seu tratamento.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 tratamos rapidamente sobre séries financeiras, descrevendo suas principais características e utilidades. Na sequência, o Capítulo 3 apresenta a metodologia CUSUM e seus respectivos detalhes. Também mostramos no Capítulo 4 a validade da utilização do CUSUM ao mercado cambial, explicando as adaptações e definições necessárias para uma sólida utilização. Por fim, no Capítulo 5 modelamos e aplicamos o CUSUM tabular e a Máscara V numa série financeira real e estudamos seus resultados, que discutimos nas conclusões apresentadas no Capítulo 6. Dois apêndices A e B exibem parte dos scripts em R que usamos na elaboração deste trabalho.

2 Séries temporais financeiras

Neste capítulo são discutidas as principais características das séries financeiras, seus *fatos estilizados*, tais como os agrupamentos de volatilidade e distribuições com causas pesadas.

2.1 Séries temporais

Uma série temporal pode ser definida como um conjunto de observações Z_t , $t \in T = (0, \infty)$, com cada observação representando um tempo específico t , inclusive para cada t fixo tem-se uma variável aleatória Z_t , com uma função de distribuição de probabilidade. Série temporal é o nome dado a uma particular trajetória (MORETTIN; TOLOI, 2006).

Como para cada valor de t é associado uma variável aleatória sobre o mesmo espaço amostral da característica que está sendo observada, uma série temporal é também uma realização de um processo estocástico. Há dois tipos de classificação com relação ao tempo específico t : quando $t \in T \subset T_0$ um subconjunto de Z , dizemos que a série temporal é em tempo discreto, quando os tempos de observações estão em um intervalo contínuo, por exemplo, $T_0 = [0, 1]$, dizemos que a série temporal é em tempo contínuo. Apesar de trabalharmos com séries de alta frequência, possivelmente com múltiplas observações dentro de um intervalo consideravelmente pequeno, ainda assim estaremos modelando uma série temporal em tempo discreto.

2.2 Fatos estilizados

Séries de retornos financeiros apresentam diversas características em comum, comumente denominadas fatos estilizados, tais como

- (i) Estacionariedade;
- (ii) Distribuição com caudas pesadas;
- (iii) Curtose positiva;
- (iv) Agrupamentos de volatilidade;
- (v) Não-lineariedade, reagindo de maneira distinta a choques grandes e pequenos;
- (vi) Não são autocorrelacionadas, com exceção de pequenas defasagens temporais;
- (vii) Os quadrados dos retornos são autocorrelacionados para maiores defasagens temporais.

Para um melhor entendimento dos fatos estilizados, as subseções seguintes explanam mais detalhadamente o significado de agrupamento de volatilidade e distribuição de caudas pesadas.

2.2.1 Agrupamentos de volatilidade

Ao acompanhar o comportamento do mercado financeiro, rapidamente nota-se que o mesmo reage de modo enérgico diante de crises políticas ou econômicas, diante de conflitos bélicos, sejam guerra declaradas ou atentados isolados, diante de eventos naturais extremos, como terremotos e erupções vulcânicas, ou diante de qualquer outro fato relevante numa escala global. No decorrer destes períodos de alta volatilidade, a tendência é de que os preços tenha fortes variações, principalmente ao compará-los a de períodos ditos normais. Diante disto, pode-se dizer que numa série financeira de retorno, a volatilidade, entendida como a variabilidade inerente ao comportamento dos mercados, altera-se no tempo. Na Figura 1 notamos claramente um agrupamento de volatilidade no início da série dos retornos dos preços do petróleo desde 2008.

Figura 1 – Agrupamento de volatilidade para os retornos da cotação de petróleo.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Em linguagem estatística, a variância dos retornos num determinado instante de tempo depende dos próprios retornos até aquele mesmo instante e de possíveis outras informações disponíveis, de tal sorte que a variância de ser definida de maneira condicional dado o passado, ou seja, é variável no tempo e não é análoga com a variância global dos dados observados. Por fim, quando leva-se em consideração a presença de grupos de volatilidade numa dada série financeira, é fundamental a utilização de modelos condicionalmente heterocedásticos.

2.2.2 Distribuição com Caudas Pesadas

No momento em que a distribuição empírica dos retornos é calculado, em geral observa-se que a mesma não se iguala estatisticamente a uma distribuição normal, inclusive os testes convencionais de normalidade costumam rejeitar a hipótese de normalidade dos dados. A distribuição empírica decresce a zero de forma mais lenta do que a distribuição normal, ou seja, mais lenta que $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$. Além disto, o ponto central da distribuição, μ , é mais acentuado que uma distribuição normal, fazendo com que a distribuição empírica seja uma distribuição leptocúrtica. Uma das principais ferramentas para se medir tais características é o coeficiente de curtose, definido como

$$\frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^4}{[\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2]^2} \quad (1)$$

Quando a distribuição é leptocúrtica, ou de caudas pesadas, o coeficiente de curtose será maior que 3, caso seja menor que 3, o formato da distribuição chama-se platicúrtica e quando o coeficiente é igual a 3, o achatamento é equivalente a distribuição normal e chama-se mesocúrtica. Na Figura 2 podemos visualizar o comportamento da distribuição Normal comparada a distribuição Beta e t -Student.

Figura 2 – Comportamento de distribuições de densidade.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

3 Gráficos de controle

3.1 Procedimentos estatísticos

Existem diversas razões para a utilização de métodos sequenciais no âmbito da análise estatística, isto porque alguns problemas são intrinsicamente definidos como sequências e não podem ser dissociados deste aspecto. Exemplos claros são sistemas com dinâmicas desconhecidas, onde o aprendizado do comportamento do sistema é realizado concomitantemente as suas realizações. Entendendo métodos sequenciais como métodos que se atualizam a cada realização do evento sob estudo, também pode-se definir métodos por lote, onde a aplicação é realizada em cima de um grupo de observações do evento. A vantagem de se utilizar métodos de lote é que quanto maior for o lote, melhor será o entendimento da dinâmica do processo, contudo, quanto maior for este, também maior será o atraso para a obtenção da informação desejada.

Considerando algoritmos de detecção de ponto de mudança, estes podem ser basicamente definidos em duas classes, os algoritmos paramétricos e os não paramétricos. Algoritmos paramétricos são aqueles que requerem modelos estatísticos explicativos dos dados observados, ou seja, métodos paramétricos exigem modelos estatísticos que expliquem a dinâmica do processo antes e depois do ponto de mudança. Já os modelos não paramétricos, que em geral podem ser considerados menos complexos, são modelos que não apresentam a exigência de um modelo estatístico por trás. Apesar do nome, modelos não paramétricos também necessitam de alguns parâmetros, contudo estes são calculados de maneira empírica.

Em termos de aplicabilidade dos métodos, os procedimentos paramétricos foram desenvolvidos para monitorar uma sequência de variáveis aleatórias idêntica e independentemente distribuídas, enquanto as abordagens não paramétricas podem ser aplicadas para monitorar qualquer sequência com média independente do tempo. Um ponto relevante a se notar é que uma média independente do tempo não implica necessariamente em estacionariedade. Já em termos históricos do desenvolvimento dos procedimentos, os modelos não paramétricos foram desenvolvidos a partir dos modelos paramétricos, justamente para tratar de dinâmicas onde os modelos paramétricos não se encaixavam ou o faziam com extrema complexidade.

A suposição de que as variáveis aleatórias da sequência X_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, são idêntica e independentemente distribuídas frequentemente não é verdadeira quando consideramos dados do mercado financeiro, que com grande recorrência são correlacionados. Além disso, algumas estatísticas do mercado financeiro são demasiadamente difíceis de serem modeladas e a distribuição

de probabilidade antes do pontos de mudança e a distribuição pós pontos de mudança não são exatamente conhecidas. O uso de abordagens não paramétricas é de grande valor quando não se tem modelos probabilísticos precisos para a sequência observada. Uma abordagem interessante para estes cenários é com base no CUSUM, ou gráfico de controle de soma acumulada. A sequência de teste da abordagem não paramétrica baseada no CUSUM é dada por

$$Y_n = \max [0, Y_{n-1} + X_n - \mathbb{E}^*(X_n) - c_n], \quad Y_0 = 0, \quad (2)$$

onde $\mathbb{E}^*(X_n) = E(X_n \mid \text{sem mudança})$ é uma estimativa histórica para $E(X_n)$ durante o comportamento normal do processo e c_n é uma sequência real determinística que é escolhida experimentalmente para minimizar a taxa de falsos alarmes. O tempo de parada é definido como:

$$\tau_Y = \tau_Y(h) = \min(n \geq 1 : Y_n \geq h), \quad (3)$$

onde h é um número positivo que representa o limiar de detecção e pode ser escolhido a partir da condição $\mathbb{E}^*[\tau_Y(h)] \geq T$.

Outro tipo de procedimento não paramétrico interessante é o procedimento de detecção de ponto de mudança por lote, também chamado método a posteriori, onde é considerado num intervalo de tempo fixo $1, \dots, k$, isto é, em um agrupamento da sequência observada real. Em procedimentos de detecção de pontos de mudança sequenciais, a ocorrência de uma alteração na sequência observada X_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ é testada a cada novo ponto observado nos dados, consequentemente, em métodos de lote os dados são analisados em janelas de tamanho k . Quando maior o tamanho da janela de tamanho k , melhor será a precisão do algoritmo de lote, sendo o oposto também verdadeiro. A principal vantagem do método sequencial em comparação ao método de lote é evidente quando o procedimento só faz sentido sob a ótica de tempo real. Claramente, se ocorrer uma alteração no ponto t , então qualquer método de lote com tamanho fixo k detectará esta alteração com o atraso fixo $k - t$, sendo que o atraso máximo de detecção é o próprio valor k . Obviamente, o tempo de detecção de mudança pelo método de lote será maior em comparação com o tempo de detecção de mudança pelo método sequencial quanto maior for o intervalo k .

É possível combinar métodos por lote e sequenciais agrupando os dados observados em intervalos de tamanho fixo e primeiro executando um processamento em lote em cada intervalo. Em seguida, os resultados obtidos a partir de cada intervalo de tempo podem ser posteriormente processados sequencialmente. A importância de uma abordagem sequencial em lote não se baseia

apenas no fato de que a taxa de falsos alarmes diminuirá, aumentando a precisão, entretanto este é sem dúvida um dos principais pontos de vantagem da abordagem por lote frente a abordagem sequencial, contudo, do ponto de vista de atraso de detecção, a abordagem por lote nem sempre é a melhor solução. A aplicação de uma abordagem por lote e sequencial combinadas é de grande valia quando se observam diferentes sequências, possivelmente representando diferentes estatísticas, que em um primeiro momento foram analisadas de forma isolada com um método sequencial, e posteriormente são agregadas e analisadas ao mesmo tempo.

A estatística de lote utilizada por ser definida como

$$\chi_{k,j}^2 = \sum_{s \in S} \frac{(X_{s,k,j} - \mathbb{E}^*(X_{s,k}))^2}{\mathbb{E}^*(X_{s,k})} \quad (4)$$

onde $(X_{s,k,j})$ é a sequência $X_{s,k,1}, X_{s,k,2}, \dots$ que representa a sequência observada (X_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$ amostrada em janelas de tempo de comprimento k . O conjunto S contém diferentes sequências observadas. $\mathbb{E}^*(X_{s,k})$ representa o valor médio da sequência $(X_{s,k,j})$ durante condições normais. A sequência de teste do procedimento por lote e sequencial derivado do CUSUM é dada por

$$Y_{k,j} = \max \left[0, Y_{k,j-1} + \chi_{k,j}^2 - \mathbb{E}^*(\chi_{k,j}^2) \right], \quad Y_{k,0} = 0, \quad (5)$$

onde o valor médio da estatística do lote em condições normais é $\mathbb{E}^*(\chi_{k,j}^2)$. O tempo de parada é definido como

$$\tau_{Y,k} = \tau_{Y,k}(h) = \min (j \geq 1 : Y_{k,j} \geq h) \quad (6)$$

3.2 Soma cumulativa – CUSUM

No âmbito do estudo voltado a séries financeiras, um dos principais objetivos é a construção de ferramentas analíticas que possibilitem a tomada de decisão de compra ou venda de ativos de maneira eficaz e lucrativa. Quando se trata de decisões econômicas de longo prazo, ferramentas de análise ditas fundamentalistas são de grande valia. Dentro deste segmento de análise, destacam-se, por exemplo, a análise dos balanços financeiros publicados pelas empresas, análises estruturadas de mercado e percepções de profissionais qualificados acerca do desenvolvimento da econômica como um todo ou particularmente do ativo em questão. Agora, quando a análise tem foco em séries financeiras de alta frequência, as decisões em tempo real são inviáveis caso não sigam as orientações de algoritmos computacionais.

Dentro de diversas técnicas para a tomada de decisão em séries de alta frequência, uma possível é a que se baseia em gráficos de controle, mais especificamente a metodologia de

gráfico de controle CUSUM. O gráfico de controle CUSUM possui a capacidade de incorporar diretamente toda nova informação da série amostral. Tal assimilação é feita através da soma acumulada dos desvios dos novos valores da série com relação a um valor alvo, que no presente trabalho trata-se da média do processo. A técnica de utilização da soma acumulada pode ser utilizada tanto para observações individuais quanto para as médias de subgrupos. Pela dinâmica dos mercados cambiais, a preferência é pela utilização das novas observações de maneira individual, de tal sorte que todo o processo será atualizado a cada novo ponto de negociação.

Os gráficos de CUSUM são considerados boas ferramentas para detecção de pequenos desvios do processo, que no caso de séries financeiras de alta frequência podem disparar ordens de intervenção no processo, ou seja, ordens de compra ou venda do ativo em estudo. Obviamente, além do mercado financeiro, os gráficos de controle CUSUM, e também metodologias parecidas, são utilizados para diversos fins, onde alguns exemplos são (i) processos de controle de qualidade de produtos, (ii) controles on-line de acessos, (iii) produção de substâncias químicas. De maneira geral, o intuito dos gráficos de controle CUSUM são de manter os processos dentro do controle estabelecido, contudo, em séries de ativos financeiros o principal objetivo é a identificação de que o processo está saindo do controle determinado e a consequente possibilidade de aferição de lucro através da compra ou venda do ativo.

A utilização prática da soma acumulada significa uma sequência de testes de hipóteses para verificar se o processo continua sob controle. Desta forma, é necessário formalizar previamente a hipótese que será testada ao longo de todo novo incremento de informação na amostra. Durante um processo, pode-se basicamente tomar duas decisões, a de intervir no processo, ou seja, a de comprar ou vender o ativo, ou a de não intervir. Contudo, para a tomada da decisão temos que verificar se o processo está sob controle. Logo, o teste de hipótese associado é

H_0 : o processo está sob controle;

H_1 : o processo não está sob controle.

Como em qualquer teste de hipótese, considera-se a hipótese H_0 como verdadeira toda vez que a estatística monitorada estiver dentro dos limites previamente definidos. De maneira inversa, rejeita-se a hipótese H_0 sempre que a estatística monitorada exceder os limites definidos. A primeira métrica envolvida no procedimento é a soma entre as diferenças dos valores observados

e a média do processo. Considerando μ_0 como sendo a média do processo, o gráfico de controle CUSUM é construído utilizando a soma acumulada dada por

$$C_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \mu_0), \quad (7)$$

onde i representa a quantidade de observações da série. Por incorporar todas as novas observações da amostra no cálculo, os gráficos de controle CUSUM são muito eficazes na detecção de pequenos desvios. A estatística da equação (7) ainda não é forma final necessária para se trabalhar com o gráfico de controle CUSUM tabular, também conhecido como CUSUM algoritmo. Na literatura científica existem diversos modos de se construir um gráfico de controle CUSUM tabular, contudo explicitaremos no presente trabalho a proposta apresentada por (MONTGOMERY, 2000).

Seja X_i cada um das observações individuais do processos sob estudo. Uma das premissas é de que o processo estudado possui uma distribuição normal com média μ_0 e desvio padrão σ . O gráfico de controle CUSUM tabular se caracteriza pela capacidade de controle bilateral, ou seja, tanto desvios do processo que sejam para cima da média quanto para baixo dela são detectados. Para tal, é necessário a definição de duas estatísticas unilaterais, C_i^- e C_i^+ , onde a primeira busca identificar mudanças negativas, ou seja, para baixo da média, e a segunda serve para detectar mudanças positivas. A estatística C_i^- é definida como sendo a soma acumulada dos desvios negativos, isto é, a soma acumulada dos desvios que estão abaixo da média μ_0 . Analogamente, C_i^+ é dado pela soma acumulada dos desvios positivos, ou seja, aqueles que estão acima da média μ_0 . Pode-se ainda denominar as estatísticas C_i^- e C_i^+ como CUSUM negativo e positivo, respectivamente. Na Figura 3 podemos ver o comportamento gráfico do CUSUM tabular.

Figura 3 – Exemplo de CUSUM tabular.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

As estatística necessárias podem ser calculadas como

$$C_i^+ = \max [0, x_i - (\mu_0 + D) + C_{i-1}^+], \quad (8)$$

$$C_i^- = \max [0, (\mu_0 + D) - x_i + C_{i-1}^-], \quad (9)$$

$$C_1^+ = C_1^- = 0, \quad (10)$$

onde x_i é a i -ésima observação da série sob estudo e D é o chamado valor de referência que representa o desvio que se deseja detectar no decorrer do processo. Este parâmetro tem o papel de determinar grandes desvios caso opte-se por um D elevado ou pequenos e até irrelevantes desvios caso D seja exageradamente pequeno. Pela definição de C_i^- e C_i^+ , é necessário substituir por zero um valor de C_i^+ eventualmente negativo e realizar a mesma substituição por zero para os casos em que C_i^- seja positivo.

Conceitualmente, D representa o desvio da média que se deseja detectar com a utilização do gráfico de controle CUSUM. Caso a mudança seja expressada em unidades de desvio padrão quando

$$\mu_1 \neq \mu_0, \quad (11)$$

então D é dado por

$$D = \frac{\delta}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} \quad (12)$$

onde δ representa o tamanho das mudanças que se deseja detectar em unidades de desvio padrão, σ representa o próprio desvio padrão, μ_0 o valor da média do processo e μ_1 a média que não pode ser considerada sob controle. Definindo H como sendo o intervalo de decisão, ou seja, caso

$$C_i^+ > H \quad (13)$$

ou

$$C_i^- < -H \quad (14)$$

então pode-se considerar que o processo não está mais sob controle. (MONTGOMERY, 2000) diz que a melhor formulação matemática para se definir H é baseada nas equações

$$D = d \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (15)$$

$$H = h \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{LSC – Limite Superior de Controle}), \quad (16)$$

$$H = -h \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{LIC – Limite Inferior de Controle}), \quad (17)$$

onde d e h são constantes, geralmente assumindo $d = 0,5$ e $h = 4$ ou $h = 5$.

3.3 A máscara V

Um método alternativo ao gráfico CUSUM tabular para identificação de desvios de comportamento da estatística monitorada é a utilização da Máscara V plotada sobre o gráfico CUSUM. Tal procedimento permite a identificação de desvios através de uma figura geométrica em formato de V que se desloca a cada novo ponto da série plotada no gráfico CUSUM. A Figura 4 exemplifica o funcionamento deste método de detecção de desvios.

Figura 4 – Máscara V plotada sobre gráfico CUSUM.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

O funcionamento da Máscara V em gráficos CUSUM ocorre da seguinte maneira: O ponto O sempre irá coincidir com o último ponto C_i plotado no gráfico CUSUM. Este mesmo ponto O também se mantém afastado do ponto P a uma distância constante d . O segmento de reta $\overline{OP}$ é sempre paralelo ao eixo horizontal do gráfico. A partir do ponto P , duas retas são traçadas respeitando o ângulo θ . Desta forma, a cada novo ponto C_i introduzido no gráfico CUSUM, toda a estrutura da Máscara V irá se deslocar de tal forma a se manter em linha com este último ponto. A partir desta forma geométrica, a detecção de desvio ocorre quando qualquer ponto da série da soma acumulada ultrapassar uma das linhas da Máscara V. Quando algum ponto da soma acumulada ultrapassa a linha superior tem-se uma tendência decrescente na série, e analogamente, quando algum ponto da soma acumulada fica abaixo da linha inferior da Máscara V, tem-se uma tendência crescente.

Pela Figura 4 fica claro que para a projeção da Máscara V sobre o gráfico CUSUM os parâmetros mais importantes são a distância d do ponto O para o ponto P e o ângulo θ entre as duas linhas da máscara e o segmento horizontal $\overline{OP}$. É evidente que as propriedades gerais da Máscara V dependerão destes parâmetros, sendo que quanto menores eles forem, mais recorrente será a detecção de desvios com relação ao comportamento da estatística monitorada.

Em (GOLDSMITH; WHITFIELD, 1961; EWAN, 1963), os autores concluem que uma escolha razoável dos parâmetros seria

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2} \right) \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right), \quad (18)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\delta}{2A} \right), \quad (19)$$

onde α e β são as probabilidades associadas aos erros do tipo I e tipo II. Em outras palavras, α indica a probabilidade do gráfico emitir um alarme falso de desvio do processo em relação a média e β indica a probabilidade do gráfico não emitir um alerta frente a uma desvio verdadeiro do processo em relação a média. Por fim, a constante A é um fator de escala que relaciona a distância horizontal entre os pontos sucessivos em termos da distância de unidade do eixo vertical. O papel desta constante é permitir que os valores plotados em sequência no eixo horizontal estejam com a distância entre si comparáveis com a escala das somas acumuladas plotadas no eixo vertical. Caso o valor da constante A seja escolhida equivocadamente, a visualização rápida das mudanças ocorridas no processo pode ficar comprometida.

Apesar de se basear nos mesmo princípios que o CUSUM tabular, a versão Máscara V é construída plotando a estatística

$$S_m = \sum_{i=1}^m (x_i - \mu). \quad (20)$$

Em algumas situações específicas, a construção de um gráfico CUSUM não tem por critério básico a otimização dos erros tipo I e II, representados por α e β respectivamente, mas sim com enfoque na distribuição do tempo necessário para o gráfico disparar um alerta. Para estes casos em particular, não existem ligações matemática diretas entre α e β e o ARL, contudo, é de conhecimento que ao se permitir α e β maiores, o tempo entre falsos alertas diminui e o tempo para os sinais corretos aumenta. A equivalência entre o CUSUM tabular de parâmetros h (intervalo de decisão padronizado do processo) e D (um valor de referência) e o procedimento de Máscara V com os parâmetros θ e d foi demonstrado por (KEMP, 1961). Os valores h e D são dados por

$$D = A \tan \theta, \quad (21)$$

$$h = Ad \tan \theta = dD. \quad (22)$$

A partir das definições (21) e (22) é possível encontrar as equações que descrevem as duas linhas diagonais, sendo $y_{\inf}$ a linha inferior e $y_{\sup}$ a superior, da Máscara V. Definindo o

ponto $x_0 = n + d$, com n representando a quantidade de amostras plotadas no gráfico, e $y_0 = C_i$, onde C_i é a soma acumulada até a i -ésima amostra, ou seja, o ponto $P(x_0, y_0)$ é o que estará sempre a uma distância fixa a direita do último ponto plotado da série. Observando que as duas linhas diagonais que formam a Máscara V são duas retas concorrentes no ponto $P(x_0, y_0)$ e que cada linha forma com a reta $y = y_0$ um ângulo interno igual a θ , temos que a linha inferior da Máscara V é representada por

$$\tan \theta = D = \frac{y_{\text{inf}} - C_i}{x - (n + d)} \implies y_{\text{inf}} = Dx + C_i - D(n + d). \quad (23)$$

Como as duas linhas são simétricas, o procedimento para a obtenção da linha superior da Máscara V é análogo. Desta forma, temos

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta = -D = \frac{y_{\text{sup}} - C_i}{x - (n + d)} \implies y_{\text{sup}} = -Dx + C_i + D(n + d). \quad (24)$$

3.4 Comprimento médio de corrida – ARL

Pela própria natureza dos gráficos de controle, uma medida relevante para medição da performance é o tempo entre os alertas disparados, sejam eles verdadeiros ou falsos. Esta métrica, denominada comprimento médio de corrida e abreviada por ARL, do inglês *average run lenght*, indica a quantidade de amostras incorporadas na estatística do gráfico de controle necessárias para que um alerta indicando a saída de controle do processo seja emitido.

Por construção, o conceito de ARL está ligado aos erros do tipo I e II, que segundo (CROWDER, 1987) representam, respectivamente, a probabilidade de emissão de um alerta falso durante o tempo que o processo continua sob controle e a probabilidade de não emissão de alerta quando o processo já se encontra fora de controle. Na literatura estatística, os erros do tipo I e II também são comumente expressos como α e β , respectivamente.

Quando o processo se encontra sob controle, deseja-se, por óbvio, que o ARL seja o maior possível, uma vez que nestas circunstância um alerta não se faz necessário. Já quando o processo se encontra fora de controle, deseja-se o oposto, que o gráfico de controle emita rapidamente um alerta e por conseguinte o ARL seja o menor possível. Quando o processo está sob controle, o ARL dependerá essencialmente de α , sendo expresso como

$$ARL = \frac{1}{\alpha}. \quad (25)$$

Já quando fora de controle, o ARL pode ser definido como função de β .

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (26)$$

Pelo fato de gráficos de controle na grande maioria das vezes serem aplicados às variáveis aleatórias dependentes o cálculo analítico do ARL se mostra altamente complexo, inclusive muitas vezes inviável. Além da óbvia alternativa de cálculo empírico, uma alternativa válida segundo Alves (2004) é o cálculo utilizando o método da equação integral.

Seja X a variável sob estudo no gráfico de controle e seja $f(x)$ a respectiva função de densidade de probabilidade. Também definindo $P(z)$ como sendo a probabilidade de um ciclo do processo terminar quando o limite inferior é rompido, $z \leq h$, e $L(z)$ o ARL do gráfico de CUSUM quando este se inicia no valor z . Por fim, o número de amostras necessárias ao processo é denotado por $N(z)$. A função $f(x)$ atende as equações integrais apresentadas por Page (1954) segundo o método numérico de equação integral com

$$P(z) = \int_{-\infty}^z f(x)dx + \int_z^h P(x)f(x-z)dx \quad (27)$$

$$N(z) = 1 + \int_0^h N(x)f(x-z)dx \quad (28)$$

$$L(z) = 1 + L(0)F(-z) + \int_0^h L(x)f(x-z)dx, 0 \leq z \leq h \quad (29)$$

A partir das equações (27), (28) e (29), chega-se a relação entre elas de $L(z) = N(z) + L(0)P(z)$. Tal relação possibilita o cálculo do ARL de um determinado ciclo iniciado em z . Note que quando $z = 0$, ou seja, quando o intervalo de controle do gráfico é o mais reduzido possível, e considerando $N(0)$ e $P(0)$ conhecidos, tem-se que o ARL do processo pode ser dado por

$$L(0) = N(0) + L(0)P(0) \Rightarrow L(0) = \frac{N(0)}{1 - P(0)}. \quad (30)$$

Numa situação sob controle, $P(0)$ se aproxima consideravelmente de 1, isto porque ao se considerar $z = 0$, a opção é pelo limite de controle mais restrito possível. Por este fato, o denominador da expressão para $L(0)$ na equação (30) tende a 0. Isto posto, a estimativa de $P(0)$ deve ter uma precisão considerável caso se deseje obter valores confiáveis do ARL.

Segundo (GOEL; WU, 1971), para o caso em que X segue uma distribuição normal de média θ e variância unitária,

$$P(z) = \Phi(-z - \theta) + \int_0^h P(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - z - \theta)^2 \right\} dx \quad (31)$$

e

$$N(z) = 1 + \int_0^h N(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x-z-\theta)^2 \right\} dx, \quad (32)$$

onde

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left(-\frac{1}{2}t^2 \right) dt. \quad (33)$$

Para se obter uma aproximação de $P(z)$ e $N(z)$, as equações integrais em (31) e (32) podem ser substituídas por sistemas de equações algébricas lineares e resolvidas para as variáveis desconhecidas.

3.5 Aspectos econômicos de gráficos de controle

Claramente, estudos que se relacionam a saúde ou a qualidade de vida de seres vivos devem ter os aspectos econômicos tratados em segundo plano, entretanto estudos sobre o mercado financeiro ou até mesmo estudos de controle de qualidade de produtos industriais devem dar bastante atenção aos aspectos econômicos envolvidos.

3.5.1 Perspectiva geral

O planejamento e a execução de gráficos de controle muitas vezes consideram apenas aspectos puramente estatísticos, com vistas a maximizar a relação entre os erros do tipo I e II, representados pelos parâmetros α e β . Contudo, vem ganhando destaque na literatura especializada os aspectos econômicos envolvidos na decisão de se utilizar gráficos de controle para qualquer que seja o processo sob estudo. Caso esta vertente econômica do estudo seja ignorada, corre-se o risco de se chegar a uma solução estatisticamente ótima, mas com custos proibitivos caso se queira aplicá-la na prática. Em suma, pode-se chegar numa solução antieconômica. Segundo (CHIU, 1974), quando olhamos a perspectiva econômica de gráficos de controle, devemos entender o lucro por intervalo de tempo em que o processo opera sob controle e o lucro quanto o mesmo opera fora de controle.

Tratando-se especificamente do mercado financeiro, custos relevantes estão envolvidos caso decida-se operar nos mercados. Os custos mais evidentes são as taxas de negociação, tanto para compra quanto para a venda de ativos, taxas de emolumentos e de custódia e impostos. Considerando um gráfico de controle que emite alertas com curtos espaços de tempo e que para cada alerta uma ordem de compra ou venda é acionada, o custo das operações podem

comprometer o retorno final, ou seja, uma parte substancial do lucro auferido pode se perder com o pagamento das taxas envolvidas nas negociações.

Boa parte do estudo de gráficos de controle está relacionada ao controle de qualidade na produção. Dentro deste universo, custos claros envolvidos na utilização dos gráficos de controle são i) o custo da amostragem e da medição, ii) o custo de investigar e de corrigir os desvios ocorridos e iii) os custos incorridos na produção dos bens não conformes. Dentro do universo dos mercados financeiros, estes custos também existem, contudo com interpretações levemente adaptadas. Os custos de bens inconformes produzidos na verdade podem ser interpretados como o lucro não auferido por conta da demora na identificação de mudança de patamar da média do processo. Exemplificando, caso o processo tenha demorado dez pontos amostrais para sinalizar a mudança na média do processo, a inação durante estes dez pontos amostrais deixaram de render ao agente econômico certa quantia, que no caso seria exatamente um lucro não auferido. Os custos de investigação e correção são os custos envolvidos na corretagem, tanto o custo da transação quanto o custo de emolumento e custódia. Já o custo da amostragem é o custo necessário para a obtenção dos valores dos ativos em tempo real, sendo que tais custos variam conforme o mercado que se esteja transacionando e a qualidade das informações recebidas.

Dentro da literatura sobre os modelos econômicos de gráficos de controle, duas suposições básicas são recorrentemente consideradas ([DUNCAN, 1956](#)):

1. O processo possui apenas um estado sob controle e que as causas dos desvios deste estado ocorrem durante intervalos de tempo segundo um processo de Poisson. Ou seja, considerando que o processo começou sob controle, ela permanecerá sob controle segundo uma distribuição exponencial do tempo;
2. A transição entre os estados do processo é instantânea e o processo não é auto corrigível, ou seja, o processo só voltará a estar sob controle caso uma intervenção seja realizada.

Além disso, os modelos econômicos também se utilizam do conceito de ciclos do processo. Um ciclo de processo pode ser entendido como a somatória dos tempos em que o processo se manteve sob controle e em que o processo esteve fora de controle. O tempo sob controle é o período que compreende o início do processo e o momento da ocorrência do evento que causa a variabilidade no processo, ou seja, o tempo dos alarmes falsos e de suas respectivas ações desencadeadas estão contidos neste tempo em que o processo está sob controle. Já o tempo onde o processo está fora de controle compreende o momento da ocorrência do evento causador da instabilidade do processo até o momento em que a causa é reparada. Note que no âmbito dos

mercados financeiros, principalmente no papel de um trader, ou seja, de um agente econômico participante de forma proativa no mercado, o reparo dos eventos causadores da variabilidade do processo é uma tomada de posição, seja via compra ou via venda do ativo, que permita que o agente aufera lucro a partir daquele movimento em particular do mercado.

Os custos envolvidos em cada etapa do ciclo do processo também diferem entre si. Os envolvidos na etapa em que o processo está sob controle são majoritariamente os de amostragem, ou seja, os de obtenção dos dados em tempo real e os custos dos alarmes falso, que em outras palavras, são os custos oriundos de decisões equivocadas por parte do agente econômico. Já na etapa em que o processo não se encontra mais sob controle, os principais dispêndios são os oriundos das negociações para se buscar o novo patamar de operações do mercado, ou seja, os de negociação, os de custódia e emolumentos e o de custo de oportunidade por não se ter tomado decisão de compra ou venda entre o momento que o processo se tornou instável e o momento da detecção desta instabilidade. Na Figura 5 vemos um diagrama de sumarização dos custos envolvidos nas transações.

Figura 5 – Diagrama dos custos envolvidos.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Após a definição dos custos e processos envolvidos, o objetivo do planejamento econômico dos gráficos de controle é correlacionar os custos aos parâmetros dos gráficos. Para tal, a premissa básica é de que os processos partem sob controle e prossegue até que o gráfico alerte um estado

fora de controle e, além disso, que cada ciclo do processo pode ser visto como independente um do outro. Posto isso, um modelo econômico pode ser generalizado como sendo

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}, \quad (34)$$

em que $E(T)$ representa o tamanho esperado de um ciclo do processo, $E(C)$ o custo total envolvido no ciclo do processo e, finalmente, $E(A)$ assume o papel do custo esperado por unidade temporal.

3.5.2 *Rentabilidade com ativos financeiros*

Quando o ativo ganha valor, a ideia de auferir lucro com esta elevação do preço é de familiaridade de grande parte das pessoas. O lucro auferido pode ser calculado através da diferença entre o preço final, mais alto, e o preço inicial, mais baixo, dividido pelo capital empregado, ou seja, o preço inicial. Se imaginarmos a aquisição de um casa ao valor de R\$ 100 mil e a venda desta mesma casa ao término de um determinado periodo por, digamos, R\$ 130 mil, temos um lucratividade absoluta de R\$ 30 mil e um relativa de 30%. Para o mercado de câmbio, o pensamento é fundamentalmente o mesmo.

Contudo, também podemos lucrar com o mercado em queda. Essencialmente, existem duas formas de lucrar com o mercado em queda, sendo uma delas quando já se tem posse do ativo e outra quando não se tem a posse do ativo. Num cenário hipotético de falta de burocracia e elevada liquidez, podemos supor que um proprietário de um imóvel qualquer tenha plena convicção de que seu imóvel irá se depreciar no curto prazo. Nesse caso, ele poderia, numa atitude ousada, vender o imóvel por R\$ 100 mil e recomprá-lo a R\$ 70 mil algum tempo depois. Neste caso, após a conclusão das operações, ainda terá a posse do imóvel e terá lucrado R\$ 30 mil, ou 30% do valor inicial do imóvel de R\$ 100 mil. Por óbvio, no mundo real, tal tipo de transação com imóveis é inviável, principalmente quando consideramos os custos e buracracias envolvidas e pelo fato de não se ter certeza de que se conseguirá adquirir o mesmo imóvel algum tempo depois. Entretanto, quando pensamos em ativos financeiros, tal prática é comum, uma vez que a burocracia é mínima, a liquidez é abrangente e não existe a necessidade de compra da mesma ação vendida tempos atrás, uma vez que todas as ações de mesma classe são idênticas entre si.

Outra maneira de se lucrar com o mercado em baixa é através do aluguel de ativos. Supônhamos um ativo que acreditamos que irá se desvalorizar no curto prazo, contudo não se

tem a posse de ativo. A alternativa para se lucrar neste tipo de cenário é alugando o ativo, digamos uma ação, e vendendo este ativo no mercado por R\$ 10. Após três meses temos que devolver o ativo para seu proprietário de direito, sendo assim, compramos a ação, não necessariamente a mesma ação vendida inicialmente, por R\$ 6 e a devolvemos ao dono. Neste exemplo de operação, e desconsiderando os custos envolvidos, o ganho absoluto foi de R\$ 4 e o relativo de 40%.

Para a dinâmica do presente trabalho, essencialmente consideraremos a primeira forma apresentada de ganhos a partir da queda dos preços, ou seja, nas simulações em que serão disparadas ordens de venda, o intuito final seja de recompra quando os preços mostrarem novamente tendência de crescimento.

4 Aplicação do CUSUM a séries financeiras cambiais

Neste capítulo, o objetivo central é aplicar os algoritmos de detecção de pontos de mudanças explanados ao longo dos capítulos iniciais do presente estudo numa série real, especificamente numa série cambial, ou seja, numa série que representa a cotação de uma determinada moeda em unidade de outra moeda. Contudo, antes, uma introdução ao mercado cambial se faz necessária. Como em qualquer série cujo significado reside no mercado financeiro, a detecção de mudanças é um problema de alto impacto na vida real, uma vez que tais séries costumemente apresentam padrões de volatilidade e comportamento semelhantes a aleatoriedade.

4.1 Mercado de câmbio

Para se entender o significado e funcionamento do mercado cambial, deve-se inicialmente compreender o que é o próprio câmbio. De maneira simplista, câmbio pode ser definido como a compra de moeda de um determinado país utilizando como forma de pagamento a moeda corrente de um segundo país. Qualquer pessoa que já realizou uma viagem internacional já participou ativamente do mercado de câmbio, seja de forma direta, com a compra da moeda corrente do país a ser visitado em casas de câmbio, ou seja de forma indireta com a utilização de cartão de crédito internacional, onde neste caso o câmbio efetivo é realizado pela operadora do cartão de crédito. Já a taxa de câmbio é o preço de uma determinada moeda medida em unidades ou frações de outra moeda, como por exemplo US\$ 1,00 valendo R\$ 3,50.

Diante disto, o mercado cambial é nada mais que o ambiente onde se realizam as operações de câmbio. Tal mercado pode ser dividido em primário e secundário. No mercado primário tem-se a entrada, ou saída, efetiva de divisas internacionais no país. Esse é o caso de, por exemplo, operações realizadas por exportadores, importadores e viajantes em geral. Por sua vez, o mercado secundário, também denominado de mercado interbancário, é quando a moeda estrangeira é negociada entre as instituições do sistema financeiro, de tal sorte que a divisa internacional alvo da negociação apenas muda do ativo da instituição vendedora para o ativo da instituição compradora, não havendo fluxo de entrada ou saída da moeda estrangeira do país. Como curiosidade, o mercado cambial é o maior mercado financeiro do mundo, considerando o valor total de negociações, inclusive superando o mercado de ações.

Uma característica singular do mercado cambial é a inexistência de um mercado central para câmbio de moedas estrangeiras. Em alternativo, os negócios com moedas são concretizados de maneira eletrônica no dito mercado de balcão, o que se traduz na totalidade das transações ocorrendo através de redes computadorizados entre os agentes do mundo inteiro, não necessitando de um bolsa centralizadora das operações. Por ser tratar de um mercado de alcance global, as negociações estão abertas 24 horas por dia, cinco dias e meio por semana, com moedas sendo negociadas nos principais mercados financeiros mundiais, de Nova Iorque a Tóquio, passando por Londres e Frankfurt. Por estar em operações em quase todos os fusos horários, o mercado cambial pode estar altamente ativo em qualquer hora do dia, com as cotações sofrendo oscilações constantemente. Mesmo não sendo um mercado centralizado, um dos principais agentes ativos no mercado de câmbio são os próprios Bancos Centrais dos países, inclusive do Brasil. A intervenção dos Bancos Centrais no mercado de moedas deve-se principalmente a intenção destes de manter a moeda de seus respectivos países os mais estáveis possíveis, propiciando com isso condições econômicas favoráveis para os agentes atuantes dentro das fronteiras de seus países.

4.2 Amostra

Séries financeiras registradas de maneira quase contínuas, ou seja, em todos os seus pontos de negociação apresentam, necessariamente, intervalos não uniformes entre as negociações. Caso a série financeira apresente cem negociações dentro de um minuto qualquer e no minuto seguinte registre 80 negociações, o tempo entre uma negociação e a imediatamente posterior serão diferentes. Tal fato impossibilita, ou ao menos dificulta, a utilização dos modelos econométricos tradicionais. Desta forma, o intervalo entre as negociações deve ser o mais uniforme possível. Intervalos muito longos, mesmo se tratando de séries financeiras intradiárias, podem não representar de maneira clara movimentos e aspectos das séries ditas de alta frequência, já intervalos de tempo muito curtos podem gerar muitas observações idênticas entre si, não agregando informação alguma por um tempo considerável ao longo da série. Para o presente estudo, optou-se por utilizar dados do mercado de câmbio, mais precisamente a cotação do par EUR/USD registrada cada um minuto. Convencionalmente, a primeira moeda do par, no caso o Euro, é dita de moeda base, já a segunda, o Dólar Americano, é definida como moeda de cotação.

Desta forma, quando vemos uma cotação de, digamos, 1,18, quer dizer que necessitaremos de 1,18 dólares americanos para compra 1 euro.

A opção por se estudar uma série financeira cambial se deve a diversos fatores, entre os quais se destacam (i) a grande liquidez e volume de negociações realizadas neste mercado, proporcionando com isso séries financeiras de alta frequência com movimentos interessantes e ausência de períodos longos onde não ocorrem negociações, (ii) a grande facilidade na obtenção dos dados, sendo que diversas páginas on-line fornecem de maneira gratuita e confiável longas séries de diversos pares de moedas e para diversos tempos entre as negociações, inclusive séries com todas as negociações realizadas e (iii) pelo fato do mercado de câmbio ser capaz de precificar movimentações e tensões mundiais, proporcionando com isso uma visão geral do comportamento mundial dos mercados financeiros.

A série estudada no presente trabalho é composta pela cotação do par EUR/USD Americana registrada a cada um minuto durante todos os dias de negociação do ano de 2016 e pelos dois primeiros meses de 2017. Optou-se por utilizar a série de 2016 para construção do modelo, doravante denominada amostra treinamento, e os meses de 2017 para testes, doravante denominada amostra teste. A amostra treinamento é composta por 372.679 observações que se iniciam no dia 03/01/2016 e se encerram em 30/12/2016. Por se tratar de uma série originalmente marcada com o fuso horário da costa leste americana (EST), os dados se encerram todas as sextas-feira às 17:00 e retomam aos domingos também às 17:00, diante disso e para efeito de análise, escolheu-se ligar o último ponto de cada sexta-feira diretamente ao primeiro ponto do domingo imediatamente posterior. Um tratamento análogo também foi realizado para os feriados, ligando o último ponto de negociação antes dos feriados ao primeiro pós feriado. Pelo fato do mercado cambial operar por 24 horas nos dias úteis, não foi necessário tratamento específico para estes dias como ocorreria se a opção tivesse sido por trabalhar com dados oriundos de bolsas de valores.

4.2.1 Amostra de treinamento

Apesar do mercado cambial ser extremamente líquido, e que o par de moedas EUR/USD ser um dos mais negociados, é inevitável a presença de intervalos maiores que um minuto sem negociação. Na amostra treinamento, ou seja, na série de 2016, existem exatamente 372.000 intervalos de um minuto, perfazendo assim 99,81% dos intervalos da série. Os demais intervalos não ultrapassam onze minutos, sendo que aproximadamente 80% dos 0,19% de intervalos

maiores que um minuto são de apenas dois minutos. Diante disso, optou-se por ignorar tais intervalos maiores que um minuto. A Figura 6 mostra o comportamento dos dados originais da amostra treinamento.

Figura 6 – Cotação do par de moedas EUR/USD.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Alguns movimentos interessantes indicados com números podem ser observados na Figura 6. O movimento indicado com o número 1, que ocorreu por volta dos dias 3 e 4 de fevereiro de 2016 deveu-se a uma semana particularmente negativa para os índices da economia americana, mais especificamente dados do desemprego e do setor de serviços norte-americanos. O movimento de desvalorização do Euro frente ao Dólar Americano indicado pelo número 2 deveu-se especialmente ao referendo sobre a saída da Grã Bretanha da União Europeia. Este movimento ocorreu entre os dias 21 e 23 de junho de 2016, sendo que o referendo, também conhecido como “Brexit”, foi realizado no dia 23 de junho de 2016. Por fim, o movimento mais longo encerrado próximo à marcação com o número 3, se deve a grande influência das eleições presidenciais norte-americanas, onde o então candidato Donald Trump ganhava espaço nas pesquisas eleitorais.

Na Tabela 1 podemos ver as principais medidas descritivas da amostra treinamento. Interessante notarmos que o valor da assimetria é negativo, ou seja, indica que a cauda do lado

Tabela 1 – Medidas descritivas da amostra treinamento

Amostra Treinamento	Valor
Pontos	372.679
Média	1,107
Mediana	1,114
Mínimo	1,035
Máximo	1,161
Amplitude	0,126
Desvio padrão	0,0248
Variância	0,0006
Curtose	0,186
Assimetria	-0,857

esquerdo da função densidade de probabilidade é maior que a do lado direito. Podemos verificar esta fato na Figura 7. Já a estatística de curtose ser positiva, indica que a distribuição é mais concentrada e afunilada que a distribuição normal.

Figura 7 – Histograma da amostra treinamento.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Em análises de séries financeiras, é padrão trabalhar com os retornos logarítmicos da série, e não com os dados originais. Considerando a amostra treinamento completa, seja P_i uma determinada cotação do par EUR/USD e seja P_{i-1} a cotação imediatamente anterior, onde $i = 2, 3, \dots, 372.679$. Para o cálculo dos retornos logarítmicos, tem-se

$$R_i = \ln \left(\frac{P_i}{P_{i-1}} \right). \quad (35)$$

Vale notar que este cálculo para a primeira cotação dos domingos incorpora as informações coletadas pelos agentes do mercado durante os finais de semana, uma vez que neste ponto o retorno é cálculo aplicando o logaritmo sobre a divisão entre a primeira cotação do domingo e a última da sexta-feira. A Figura 8 mostra todos os retornos para a amostra treinamento.

Figura 8 – Retornos logarítmicos do par de moedas EUR/USD.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Na Figura 8 pode-se ver a existência de aglomerados de volatilidade, ou seja, períodos concentrados da série onde existem altas ou baixas volatilidades. Esta composição faz parte do que é comumente denominado fatos estilizados em séries financeiras. A relevância de se verificar os fatos estilizados de uma série financeira está absolutamente correlacionada à capacidade de se prever os retornos. Caso uma série seja independente, isto significa que o processo é completamente aleatório e, por conseguinte, nenhum modelo determinístico com intuito de previsão pode ser idealizado para inferir o comportamento futuro da série.

4.2.2 Amostra de teste

Com referência a amostra teste, que engloba 147.961 observações de negociações entre os meses de janeiro e fevereiro de 2017, temos basicamente o mesmo tratamento aplicado a amostra treinamento, ou seja, (i) a conexão direta entre o último ponto de negociação das sextas-feiras ao primeiro ponto de negociação dos domingos, (ii) tratamento análogo para os feriados, (iii) ignorância dos intervalos maiores que um minuto, sendo que a amostra teste possui 99,82% de intervalos iguais a um minuto e intervalo máximo de apenas cinco minutos e (iv)

cálculo dos retorno considerando $R_i = \ln(P_i/P_{i-1})$, onde $i = 2, 3, \dots, 147.961$. A Figura 9 mostra o comportamento dos dados originais da amostra teste.

Figura 9 – Amostra teste do par de moedas EUR/USD

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Nas cotações, podemos notar duas claras tendência presentes na amostra teste. Inicialmente, e até o primeiro pico na data de 02 de fevereiro de 2017, aproximadamente a observação de número 34 mil da série, existe claramente um tendência ascensional, ou seja, a moeda norte americana vinha perdendo espaço frente ao Euro. Após este ponto a cotação começa a cair até aproximadamente 1,05. Curiosamente, tal comportamento é espelhado para as cotações seguintes, onde vemos claramente a cotação aumentando novamente e na sequência traçando um movimento claro de queda. Contudo, a partir deste ponto e até o final da série, visivelmente o Dólar Americano perdeu espaço, fechando a série na casa dos 1,12. Na Figura 10 estão representados os retornos associados aos valores de cotação da amostra teste.

Figura 10 – Retornos do par de moedas EUR/USD.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Tabela 2 – Medidas descritivas da amostra teste.

Amostra Teste	Valor
Pontos	147.961
Média	1,075
Mediana	1,070
Mínimo	1,034
Máximo	1,126
Amplitude	0,092
Desvio padrão	0,0193
Variância	0,0003
Curtose	0,203
Assimetria	0,938

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Na Tabela 2 são mostradas as estatísticas descritivas da amostra teste. A exemplo da amostra treinamento, a amostra teste apresenta uma curtose positiva, contudo uma assimetria positiva. Tais fatos evidenciam que a amostra possui uma calda do lado esquerdo menor que a calda do lado direito e que a distribuição é mais concentrada e afunilada quando comparada a distribuição normal. Pode-se ver a evidência visual na Figura 11

Figura 11 – Histograma da amostra teste do par de moedas EUR/USD.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

4.2.3 Ajuste de tendência

Um aspecto relevante de séries financeiras é a comumente necessidade de ajustes nos dados quando da retirada de influência da taxa básica de juros ou da inflação (MOREIRA; LEMGRUBER, 2004). Denominados valores reais e nominais, o primeiro se caracteriza por representar o valor absoluto do ativo, já o segundo considera o desconto da evolução dos preços da economia, ou seja, a inflação. Este tipo de técnica pode ser muito útil em situações que

envolvam análise de longos anos. Na Figura 12 vemos a diferença entre os valores reais e nominais do PIB brasileiro desde a implantação do plano real.

Figura 12 – Comparação entre o PIB brasileiro nominal e real.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Notamos claramete que os valores nominais são consideravelmente maiores que os valores reais, a razão disto fica clara com um breve exemplo: caso o PIB de um ano para outro passe de R\$ 2 trilhões para R\$ 4 trilhões, mas a inflação no mesmo período tenha sido de 100%, o valor do PIB real teve crescimento zero. No presente trabalho optamos por não realizar o ajuste pela taxa básica de juros da economia nem pela inflação, isso porque além de se tratar de uma série não tão longa e num período de baixa inflação por conta da crise internacional, o objetivo do presente trabalho é a identificação de movimentos em tempo real da série, e não o estudo macroeconômico da taxa de câmbio.

5 Estudo de caso

Neste capítulo, ajustamos uma modelagem baseada na metodologia CUSUM na amostra treinamento com intuito de atingirmos o ponto ótimo de rentabilidade na série. Após isto, iremos aplicar a modelagem com os parâmetros fixados na amostra treinamento, para justamente verificar a capacidade de previsão do modelo CUSUM quando aplicado a séries financeiras.

5.1 CUSUM tabular

Nesta seção exploramos a modelagem baseada no CUSUM tabular a partir da amostra treinamento.

5.1.1 Parâmetros

Para o CUSUM tabular, os parâmetros mais relevantes são os presentes nos cálculos dos limites superior e inferior de controle, h , e o presente no próprio cálculo da soma acumulada, D . Onde os limites de decisão e a soma acumulada são dados por

$$H = h \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{LSC} - \text{Limite Superior de Controle}), \quad (36)$$

$$H = -h \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{LIC} - \text{Limite Inferior de Controle}), \quad (37)$$

$$C_i^+ = \max [0, x_i - (\mu_0 + D) + C_{i-1}^+], \quad (38)$$

$$C_i^- = \max [0, (\mu_0 + D) - x_i + C_{i-1}^-]. \quad (39)$$

Além da definição matemática, o parâmetro D pode ser entendido como o desvio que se deseja detectar ao longo do processo. Como o parâmetro aparece como componente da diferença com μ_0 , a média dita sob controle, obviamente que D deve estar numa escala comparável ao valor alvo da média do processo sob controle. Já o parâmetro h assume o papel de ajustar os limites superior e inferior de acordo com a variabilidade natural do processo. É fácil enxergar que quanto maior o valor de h , mais o processo deverá se afastar da média dita sob controle para a metodologia emitir um alerta de que o processo não está mais sob controle.

Na Tabela 3 podemos ver os ganhos em porcentagem, segundo a lógica apresentada no capítulo 3, que obteríamos caso tivéssemos optado por valores de h que variam entre 0,5 e 5 e valores de D que variam entre 0,0005 e 0,005. Importante frisar que os valores de D são consideravelmente pequenos pois a média dos log-retornos da série é zero.

Tabela 3 – Retornos de acordo com os parâmetros selecionados.

h	D	Retorno (%)	h	D	Retorno (%)
0,5	0,0005	-10,05	1	0,0005	-0,48
0,5	0,001	10,53	1	0,001	14,43
0,5	0,0015	-1,93	1	0,0015	-1,62
0,5	0,002	7,76	1	0,002	11,42
0,5	0,0025	12,24	1	0,0025	14,26
0,5	0,003	7,86	1	0,003	9,96
0,5	0,0035	0,86	1	0,0035	0,86
0,5	0,004	-2,86	1	0,004	-2,86
0,5	0,0045	-1,14	1	0,0045	-1,14
0,5	0,005	-10,71	1	0,005	-10,71

h	D	Retorno (%)	h	D	Retorno (%)
1,5	0,0005	-0,36	2	0,0005	1,26
1,5	0,001	17,43	2	0,001	12,38
1,5	0,0015	2,15	2	0,0015	-3,28
1,5	0,002	13,54	2	0,002	10,17
1,5	0,0025	15,34	2	0,0025	12,29
1,5	0,003	12,58	2	0,003	7,14
1,5	0,0035	-1,12	2	0,0035	-1,12
1,5	0,004	-1,14	2	0,004	-1,14
1,5	0,0045	-2,17	2	0,0045	-2,17
1,5	0,005	-10,71	2	0,005	-10,71

h	D	Retorno (%)	h	D	Retorno (%)
2,5	0,0005	6,03	3	0,0005	2,50
2,5	0,001	3,50	3	0,001	6,31
2,5	0,0015	-4,23	3	0,0015	5,88
2,5	0,002	11,06	3	0,002	12,90
2,5	0,0025	9,87	3	0,0025	7,86
2,5	0,003	4,52	3	0,003	4,52
2,5	0,0035	-1,02	3	0,0035	-1,02
2,5	0,004	-1,14	3	0,004	-1,14
2,5	0,0045	-3,73	3	0,0045	-9,49
2,5	0,005	-10,71	3	0,005	-10,71

h	D	Retorno (%)	h	D	Retorno (%)
3,5	0,0005	3,03	4	0,0005	11,03
3,5	0,001	1,76	4	0,001	-0,73
3,5	0,0015	5,88	4	0,0015	7,95
3,5	0,002	12,23	4	0,002	14,26
3,5	0,0025	7,86	4	0,0025	9,96
3,5	0,003	0,86	4	0,003	0,86
3,5	0,0035	-1,02	4	0,0035	-1,02
3,5	0,004	-1,14	4	0,004	-1,14
3,5	0,0045	-10,71	4	0,0045	-10,71
3,5	0,005	-10,71	4	0,005	-6,78

h	D	Retorno (%)	h	D	Retorno (%)
4,5	0,0005	11,97	5	0,0005	16,37
4,5	0,001	2,49	5	0,001	-0,43
4,5	0,0015	11,33	5	0,0015	8,94
4,5	0,002	15,34	5	0,002	14,87
4,5	0,0025	12,58	5	0,0025	7,14
4,5	0,003	0,22	5	0,003	-1,12
4,5	0,0035	0,71	5	0,0035	-1,14
4,5	0,004	-2,71	5	0,004	-2,17
4,5	0,0045	-10,71	5	0,0045	-10,71
4,5	0,005	-6,78	5	0,005	-6,78

Ao analisarmos o conteúdo da Tabela 3, notamos que independentemente do valor escolhido de h , quando D assume valores maiores ou iguais a 0,004, todos os rendimentos são negativos, ou seja, caso optássemos por operar no mercado financeiros com estes parâmetros, teríamos prejuízo. Outro ponto relevante é que nem todo rendimento negativo e/ou positivo deve ser considerado isoladamente. Para sabermos se uma metodologia está propiciando retornos melhores que o mercado, uma alternativa simples e rápida é calcularmos o ganho do último ponto da série com relação ao primeiro. Para a amostra treinamento, o último ponto equivale a 1,05224, já o primeiro equivale a 1,08713. Desta forma, temos um rendimento de mercado negativo de

$$\frac{1,05224}{1,08713} - 1 = -3,2\% \quad (40)$$

Outro padrão que pode ser notado na Tabela 3 é que para valores de D inferiores, ou iguais, a 0,001, os rendimentos também são em boa parte negativos. Em que pese que para alguns valores de h os rendimentos sejam positivos, no geral temos uma clara instabilidade para valores de h muito pequenos. Diante deste quadro, o melhor valor para D claramente reside entre 0,0015 e 0,003. Na Figura 13 podemos observar os rendimentos que seriam obtidos a partir da amostra

treinamento caso a escolha fosse para um valor de D variando entre 0,0015 e 0,003 e h entre 0,5 e 3.

Figura 13 – Rendimentos de acordo com a variação dos parâmetros h e D .

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Podemos notar que tanto os rendimentos com parâmetro $D = 0,0015$ e $D = 0,003$ apresentação em certos momentos rendimentos negativos. Para o primeiro, os rendimentos negativos acontecem majoritariamente quando o parâmetro h é maior ou igual a 3 e para o segundo quando o mesmo parâmetro assume valores superiores a 4,5. Dito isto, claramente para o parâmetro D os melhores resultados são obtidos quando este assume valores intermediários, que no caso são iguais a 0,002 e 0,0025. Quando considerado o parâmetro h , temos que os melhores rendimentos para $D = 0,002$ se dão para os maiores valores de h e para $D = 0,0025$ os maiores rendimentos se encontram nos menores valores de h . Além disto, os maiores rendimentos, de 15,3%, são alcançados tanto para $D = 0,002$, com $h = 1,5$, quanto para $D = 0,0025$, com $h = 4,5$.

Na Tabela 4 podemos observar uma breve comparação acerca dos rendimentos para $D = 0,002$ e $D = 0,0025$

Tabela 4 – Comparativo entre rendimentos para $D = 0,002$ e $D = 0,0025$.

	D = 0,002	D = 0,0025
Rendimento máximo	15,3%	15,3%
Rendimento mínimo	7,8%	7,1%
Rendimento médio	12,4%	10,9%
Variância	0,0005	0,0007

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Além do fato dos maiores rendimentos serem equivalente, nota-se que o menor rendimento para $D = 0,002$ é de 7,8%, obtido quando $h = 0,5$, é superior ao menor rendimento

obtido quando $D = 0,0025$. No rendimento médio, o parâmetro igualado a 0,002 também leva vantagem com relação a situação onde o mesmo parâmetro é considerado como sendo 0,0025. Por fim, para $D = 0,002$, também temos uma variabilidade menor nos rendimentos, critério este bastante relevante no contexto de séries financeiras, onde muitas vezes a definição de variabilidade se iguala ao conceito de risco. Diante deste quadro, optou-se pela utilização dos parâmetros $D = 0,002$ e $h = 4,5$ para prosseguir com a modelagem do CUSUM tabular.

5.1.2 Modelagem

Com base nos parâmetros definidos empiricamente, podemos estudar mais a fundo o comportamento do CUSUM tabular quando aplicado a séries financeiras. Na Figura 14 podemos observar o comportamento da soma acumulada para os desvios acima da média considerada sob controle. Importante frisar que para os pontos com valores diferentes de zero, não necessariamente temos uma ordem de compra, uma vez a ordem de compra somente se dá quando a soma acumulada ultrapassa o limite superior de controle.

Figura 14 – Soma acumulada para os desvios acima da média.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Por conta da grande quantidade de pontos presentes na série, a observação visual pode ficar comprometida, contudo alguns aspectos são claros: temos longos períodos, por volta de um mês, em que não ocorrem valores acima de zero para a estatística observada, além do mais claramente o mês de junho foi o mês com a maior quantidade de pontos acima de zero. Na Figura 15 observamos o comportamento da estatística apenas para o mês de junho. Claramente os dias 23 e 24 foram de grande movimentação no mercado. Dos 74 pontos acima de zero calculados

para junho, 30 ocorreram nesta janela de tempo. Na Figura 16, em que estão plotados os retornos para alguns dias selecionados da série, vemos claramente um concentração de volatilidade nos dias 23 e 24 de junho, justificando com isso a concentração exposta anteriormente.

Figura 15 – Soma acumulada para os desvios acima da média em junho/2016.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Figura 16 – Retornos para dias selecionados de junho/2016.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Do mesmo modo que a estatística para desvios acima da média acumula valores máximos entre zero e um cálculo definido, analogamente, a situação para desvios abaixo da média também acumula valores mínimos entre zero e o cálculo definido. Na Figura 17 podemos ver os valores acumulados quando os desvios estão abaixo da média onde o sistema é considerado sob controle.

Figura 17 – Soma acumulada para os desvios abaixo da média.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

A exemplo da Figura 14, também é possível observar com certa clareza que a estatística estudada possui períodos consideráveis em que assume valor zero. Além disto, o mês de junho também se mostra como o mês de maior concentração dos valores diferentes de zero. Para sabermos ao certo quando os gatilhos de compra ou venda do ativo foram disparados, precisamos combinar as figuras 14 e 17 com os respectivos limites superior e inferior de controle. Na Figura 18 podemos ver o comportamento completo do CUSUM tabular.

Figura 18 – Estatística CUSUM com limites de controle.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Podemos notar que os limites de controle, tanto inferior quanto superior, não são constantes ao longo de toda a série. Isso se deve ao fato de que ao utilizarmos as equações (16) e (17), a variância amostral é constantemente atualizada a cada novo ponto da série. No mais, vemos que a maioria das vezes em que a estatística pontua valores diferentes de zero, os limites de controle são ultrapassados e consequentemente temos um ordem de compra ou venda assinalada. Em termos exatos, temos a estatística positiva assumindo por 74 vezes valores acima de zero, com o disparo de 31 ordens de compra e a estatística negativa assumindo por 63 vezes valores abaixo de zero e disparando 40 ordens de venda, perfazendo assim uma taxa total de 51,28% de disparos de ordens dado que a estatística é diferente de zero. Quando sobrepomos os valores da cotação do par de moeda EUR/USD com os valores obtidos pela modelagem CUSUM, Figura 19, notamos que no mês de junho, já identificado como o mês que concentrou a maior quantidade

de alertas, ocorreu uma grande queda abrupta nos valores de cotação, inclusive com a cotação andando de lado até aproximadamente o início do mês de agosto.

Figura 19 – Estatística CUSUM com limites de controle e cotação do ativo.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

5.1.3 Retorno financeiro

Para decisão dos parâmetros a serem utilizados na modelagem do CUSUM tabular, o retorno financeiro proporcionado pela escolha dos ditos parâmetros teve papel central, logo, é de grande interesse entendermos detalhadamente como este retorno, de 15,3% com $h = 4,5$ e $D = 0,002$, é alcançado. Ao longo da modelagem com a utilização da amostra treinamento, o processo de CUSUM tabular emitiu os alertas de compra descritos na Tabela 5 e os alertas de venda descritos na Tabela 6.

Tabela 5 – Ordens de compra CUSUM tabular.

Ordens de Compra				Ordens de Compra			
Sequencial	Dia	Hora	Cotação	Sequencial	Dia	Hora	Cotação
1	03/02/2016	10:00	1,1035	17	19/06/2016	17:01	1,13323
2	10/03/2016	08:56	1,09218	18	23/06/2016	19:01	1,1352
3	10/03/2016	08:57	1,09468	19	23/06/2016	19:19	1,13132
4	10/03/2016	09:03	1,09641	20	23/06/2016	22:30	1,11994
5	10/03/2016	09:10	1,09974	21	23/06/2016	22:45	1,11012
6	10/03/2016	09:11	1,10417	22	23/06/2016	23:54	1,09664
7	10/03/2016	09:12	1,10776	23	23/06/2016	23:56	1,10136
8	10/03/2016	09:13	1,10947	24	08/07/2016	09:14	1,11108
9	16/03/2016	14:00	1,11418	25	02/09/2016	08:30	1,1237
10	16/03/2016	14:01	1,11495	26	02/09/2016	08:31	1,12209
11	29/03/2016	12:20	1,12412	27	08/11/2016	21:23	1,11686
12	21/04/2016	08:44	1,13898	28	04/12/2016	18:00	1,05666
13	03/06/2016	08:30	1,12263	29	08/12/2016	07:45	1,08608
14	03/06/2016	08:31	1,12298	30	29/12/2016	18:39	1,05873
15	03/06/2016	08:32	1,12404	31	29/12/2016	18:40	1,06416
16	19/06/2016	17:00	1,13313				

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Tabela 6 – Ordens de venda CUSUM tabular.

Ordens de Venda				Ordens de Venda			
Sequencial	Dia	Hora	Cotação	Sequencial	Dia	Hora	Cotação
1	08/01/2016	08:30	1,08224	21	23/06/2016	23:58	1,098
2	21/01/2016	08:33	1,0828	22	26/06/2016	17:00	1,10076
3	21/01/2016	08:34	1,08214	23	26/06/2016	17:01	1,10078
4	05/02/2016	08:31	1,11812	24	26/06/2016	17:02	1,10182
5	10/03/2016	07:45	1,091	25	26/06/2016	17:03	1,10181
6	10/03/2016	07:46	1,08772	26	30/06/2016	11:59	1,10341
7	10/03/2016	07:47	1,08696	27	08/07/2016	08:30	1,10134
8	10/03/2016	07:48	1,08667	28	08/07/2016	08:31	1,10049
9	27/04/2016	14:00	1,12822	29	05/08/2016	08:30	1,11109
10	27/04/2016	14:01	1,12815	30	26/08/2016	10:00	1,12527
11	23/06/2016	19:00	1,13193	31	26/08/2016	10:01	1,12499
12	23/06/2016	19:16	1,13285	32	06/11/2016	17:00	1,10614
13	23/06/2016	19:18	1,12783	33	06/11/2016	17:01	1,10669
14	23/06/2016	19:41	1,13085	34	09/11/2016	01:13	1,12275
15	23/06/2016	22:31	1,11682	35	04/12/2016	17:00	1,06265
16	23/06/2016	22:32	1,11425	36	08/12/2016	07:46	1,08223
17	23/06/2016	22:43	1,10618	37	14/12/2016	14:00	1,05875
18	23/06/2016	22:53	1,10872	38	14/12/2016	14:01	1,05903
19	23/06/2016	22:54	1,10529	39	29/12/2016	18:41	1,05885
20	23/06/2016	22:55	1,10424	40	29/12/2016	18:42	1,05782

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Um fato interessante e fácil de notar é que a modelagem produziu mais alerta de venda de que para compra, contudo, como a quantidade de alertas para compra também é relevante, temos indicações que o modelo possa estar funcionando tanto para a alta quanto para a baixa do mercado. Analisando a Tabela 5, notamos que uma grande concentração das ordens de compra no dia 10/03/2016 e no mês de junho/16. Já para as ordens de venda, a grande concentração se dá

no dia 23/06/2016. Na Figura 20, temos o comportamento dos preços de acordo com as ordens cronologicamente geradas pelo modelo, de tal sorte que os pontos plotados representam somente as cotações no momento exato do disparo da ordem. Pertinente notarmos o comportamento logo após uma determinada ordem, que para o caso de ser um ordem compra espera-se uma crescente nos preços e caso seja de venda espera-se um queda nos preços.

Figura 20 – Cotação no momento das ordens de compra e venda.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Na Tabela 7 temos o descritivo dos acertos e erro cometido conforme o tipo de ordem emitida, ou seja, será que após uma ordem de compra a cotação subiu e será também que após uma ordem de venda a cotação caiu?

Tabela 7 – Taxa de acerto das ordens emitidas.

Ordem de venda		
Total	Acertos	Taxa de acerto
40	25	62,50%

Ordem de compra		
Total	Acertos	Taxa de acerto
31	20	64,51%

Ordens totais		
Total	Acertos	Taxa de acerto
71	45	63,38%

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Vemos que o modelo possui uma relevante taxa de acerto, tanto quando indica uma queda nos preços quanto uma crescente nos preços. Tal fato é muito positivo, uma vez que caso a taxa

global de acertos fosse os mesmos 63,38%, mas as taxas de acertos para ordens de compra e venda fossem muito dispares entre si, teríamos um indício claro de desbalanceamento do modelo. Na Figura 21 podemos observar o percentual de retorno acumulado de acordo com cada ordem emitida, culminando nos 15,3% de retornos obtido ao final da série.

Figura 21 – Retornos acumulados.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Podemos observar três claros movimentos de tendência no decorrer das ordens emitidas. A primeira tendência, que se mantém até aproximadamente a ordem de número 50 é de paulatino crescimento nos retornos. Neste momento, mesmo que não tenhamos retornos acelerados, é evidente a boa performance do modelo ao selecionar os momentos de entrada e saída no ativo. O segundo momento, mais complicado, se mantém da ordem 50 até a ordem 59, em que neste ínterim ocorre uma perda substancial dos retornos acumulados, sendo a queda de uma patamar inicial de 8,3% para um patamar de 3,5%. Já o terceiro movimento, e o mais positivo, reside nas ordens finais emitidas. Nesta fase os retornos que agressivamente incrementados, com saltos altamente relevantes de até 5,5 pontos percentuais em cima do retorno imediatamente anterior.

Em um ambiente real de utilização do modelo, certamente no segundo movimento de tendência explanado anteriormente seria prudente que o operador do modelo retirasse o modelo do comando. Um possível gatilho para contenção de perdas seria retirar o modelo do ar após três retornos negativos e consecutivos e voltar a pô-lo em produção após dois retornos positivos e consecutivos.

Podemos chamar o retorno bruto o valor final de 15,3%, pois ainda não estão deduzidos os valores devidos para se operar no mercado de câmbio. Quando o mercado de câmbio é

comparado ao mercado de ações, as taxas envolvidas no primeiro podem ser consideradas menores, girando em torno de 0,023% do valor envolvido, entretanto, diferente do mercado de ações onde muitas vezes se aplica um valor máximo ser cobrado por operação, no mercado cambial a taxa por operação, também chamada de *spread*, será cobrada sobre o valor total da operação, não importando se a movimentação for de US\$ 100,00 ou de US\$ 1.000.000,00. Na Figura 22 podemos ver a comparação entre as linhas de retorno bruto e líquido, este último já com os custos deduzidos.

Figura 22 – Retornos brutos e líquidos acumulados.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Por óbvio, o comportamento das linhas são similares, se diferenciando por um *shift* causado justamente pelos custos de transação. Podemos notar que este *shift* aumenta com o decorrer das ordens, chegando a comprometer a rentabilidade final em 1,6 pontos percentuais, isto ocorre pelo fato de que quanto mais se opera no mercado cambial, mais se acumulam custos e taxas pagos.

5.1.4 Amostra de teste

Como dito no início do presente trabalho, amostra teste compreende o início do ano de 2017. Ao rodarmos a modelagem com os parâmetro definidos como sendo $h = 4,5$ e $D = 0,002$, obtemos um retorno bruto de 4,84%. Na Figura 23 podemos ver o comportamento da série de teste bem os momentos em que as ordens são disparadas.

Figura 23 – Estatística CUSUM e limites de controle para amostra teste.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Até mesmo visualmente, pode-se notar que a quantidade de ordens disparadas é reduzido quando comparado ao cenário em que o modelo é aplicado à amostra treinamento. Um dos fatores disto é o comportamento menos volátil da amostra de teste quando comparada a amostra treinamento. De qualquer maneira, durante a aplicação da modelagem na amostra teste, em 20 ocasiões a estatística estudada assumiu valores diferentes de zero, sendo 6 vezes para valores negativos e 20 vezes para valores positivos. Na Tabela 8 podemos ver mais detalhadamente a quantidade e a taxa de acerto das ordens emitidas.

Tabela 8 – Taxa de acerto das ordens emitidas na amostra teste

Ordem de compra		
Total	Acertos	Taxa de acerto
10	6	60,00%

Ordem de venda		
Total	Acertos	Taxa de acerto
2	1	50,00%

Ordens Totais		
Total	Acertos	Taxa de acerto
12	7	58,33%

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Notamos claramente uma quantidade maior de ordens de compra do que de venda. Isso se justifica pela própria tendência crescente constatada na amostra teste. Além do mais, a exemplo da amostra treinamento, continuamos vendo que o modelo acerta a maioria dos movimentos após ordem emitida, que neste caso chegou a uma taxa de acerto global de 58,33%, levemente inferior a taxa de acerto alcançada pela amostra treinamento, de 63,38%. Na Figura 24 podemos ver o comportamento da cotação do ativo no momento das ordens emitidas.

Figura 24 – Cotação no momento das ordem para a amostra de teste.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Como dito anteriormente, o modelo CUSUM tabular alcançou 4,84% de retorno quando aplicado à amostra teste. Na Figura 25 vemos a linha dos retornos bruto e líquidos acumulados ao longo da série.

Figura 25 – Retornos brutos e líquidos acumulados para a amostra de teste.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Um fato interessante que podemos notar é que para o período central da série, onde a rentabilidade bruta anda de lado, a rentabilidade líquida descola-se e se inclina mais para baixo. Isso é oriundo dos spreads pagos durante as transações que não são compensados com a valorização do ativo. No mais, vemos também um abrupto ganho de rentabilidade no final da série justificado pelo aumento da cotação do ativo já visto na Figura 23. Por fim, a partir das informações expostas, podemos concluir que o CUSUM tabular conseguiu alcançar um rentabilidade interessante tanto para a amostra treinamento quanto para amostra teste.

5.2 Máscara V

5.2.1 Parâmetros

Como mostrado pelas equações (??) e (??), existe uma certa equivalência entre o CUSUM tabular e o Máscara V. Contudo, como estamos interessados em alcançar a maximização da rentabilidade a partir da modelagem, simulamos empiricamente diversos cenários com variação de parâmetros para decidir pela forma final da modelagem. Pelo método da Máscara V os parâmetros mais relevantes são a distância fixa entre o último ponto da série e o ponto onde os limites superior e inferior se cruzam e o ângulo θ , formado pelos os dois limites de controle. Por se tratar de um estudo focado em operações de alta frequência, onde se deseja detectar modificações comportamentais o quanto antes, optou-se por utilizar $d = 0$, ou seja, o ponto de cruzamento entre os limites superior e inferior coincidirá com o último ponto observado da série. Outra definição importante é a opção de se considerar os pontos de até no máximo uma hora antes para considerações de ordem emitida, ou seja, apenas pontos da última hora que ultrapassarem os limites de controle servirão de gatilho para os disparos de ordens.

Na Figura 26 podemos observar a rentabilidade bruta auferida pela Máscara V conforme variamos o parâmetro D dos limites de controle superior e inferior expressos pelas equações (??) e (??). Claramente observamos dois momentos em que a rentabilidade positiva se mantém num intervalo de mudança dos parâmetro D . Apesar da rentabilidade entre os valores 0,002 e 0,0035 de D serem acima de zero, é no parâmetro de valor 0,0013 que obtemos a maior rentabilidade, de 21,8%. Considerando apenas a rentabilidade bruta, a Máscara V se mostra de melhor performance que o CUSUM tabular, que por sua vez alcançou uma rentabilidade bruta de 15,3%, aproximadamente 29,8% menor.

Figura 26 – Rentabilidade Máscara V com variação de parâmetro.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Definindo $D = 0,0013$ como sendo o parâmetro que propicia a maior rentabilidade, temos que as equações dos limites superior e inferior ficam sendo

$$y_{\text{inf}} = 0,0013x + C_i - 0,0013n, \quad (41)$$

$$y_{\text{sup}} = -0,0013x + C_i + 0,0013n. \quad (42)$$

5.2.2 Modelagem

Encontrado o parâmetro que melhor rentabilidade fornece ao modelo, podemos estudar de forma mais aprofundada o comportamento geral da modelagem. Na Figura 27 podemos observar o comportamento da estatística da Máscara V durante toda a série estudada. Podemos notar que em grande parte da série, até aproximadamente o mês de novembro, a estatística se manteve positiva, só passando em definitivo para o campo negativo no último mês do ano. Além disto, nota-se pelas linhas verticais arrosadas, que indicam o momento de todas as ordens emitidas, que a quantidade de disparos da Máscara V certamente é superior a quantidade de ordens emitidas pelo CUSUM tabular.

Figura 27 – Estatística da Máscara V e ordem emitidas.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Para melhor esclarecer como as ordens na modelagem com base na Máscara V foram emitidas, na Figura 28 temos um zoom numa ordem de compra emitida no dia 18/julho. As linhas concorrentes em vermelho sinalizam o momento de disparo da ordem, já as linhas concorrentes em amarelo nos dão uma noção de antecedência até o momento de disparo da ordem.

Notamos que até o momento de disparo da ordem, a estatística observada vinha se comportando com baixa variabilidade, contudo no horário de 11:08 um ponto atipicamente alto foi detectado, fazendo com que o ponto observado no horário de 11:07 ficasse abaixo do limite inferior, caracterizando assim uma ordem de compra do ativo. Como definimos a janela de decisão em uma hora, qualquer ponto a partir das 10:09 do mesmo dia que ficasse além dos limites de controle, dispararia uma ordem de compra ou venda do ativo.

Figura 28 – Estatística da Máscara V e ordem emitida para período específico.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Na Figura 29 podemos notar a grande semelhança presente entre a estatística da Máscara V e a cotação em si. Mesmo trabalhando com a soma acumulada do retornos, a série final se caracteriza pela evidente correspondência com a série original do ativo.

Figura 29 – Estatística da Máscara V e cotação original.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Na Tabela 9 observamos o total de ordens emitidas, separadas pelo seu tipo e com a taxa de acerto calculada.

Tabela 9 – Taxa de acerto das ordens emitidas pela Máscara V.

Ordem de venda		
Total	Acertos	Taxa de acerto
222	129	58,11%

Ordem de compra		
Total	Acertos	Taxa de acerto
219	125	57,08%

Ordens totais		
Total	Acertos	Taxa de acerto
441	254	57,60%

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

De imediato percebemos um volume de ordens bem mais elevado quando comparado ao CUSUM tabular, que teve apenas 71 ordens emitidas. Contudo, e similar ao CUSUM tabular, vemos um comportamento parecido entre as ordens de compra e venda, indicando assim que o modelo consegue captar tanto movimento de valorização do ativo quanto movimento de desvalorização. Por fim, uma taxa global de acerto de 57,6% sinaliza um bom desempenho de previsão do modelo, que será averiguado com a amostra teste.

5.2.3 Retorno financeiro

Assim como na modelagem baseada no CUSUM tabular, a Máscara V também deve ser analisada do ponto de vista da rentabilidade. Sabemos que a rentabilidade bruta máxima atingida é de 21,8%, contudo foram necessárias 441 ordens para se atingir tal patamar. Como a cada ordem realizada paga-se uma taxa, que continuamos a utilizar de R\$ 0,0025 por ordem, independente de qual seja seu tipo, a rentabilidade líquida certamente será menor que a bruta. Na Figura 30 podemos ver o comportamento da cotação do ativo logo após uma ordem de compra, em azul, ou uma ordem de venda, em vermelho. Notamos claramente quatro momentos em que o modelo conseguiu acertar com antecedência fortes movimentos de queda do ativo, e um momento em que a cotação aumento consideravelmente após um ordem de compra.

Figura 30 – Cotação após ordens de compra ou venda pela Máscara V.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Com base nas ordens visualizadas na Figura 30, a Figura 31 mostra o comportamento da rentabilidade bruta até o atingimento da rentabilidade máxima de 21,8%. Notamos três fases distintas no comportamento da rentabilidade bruta. No começo a rentabilidade gira em torno do zero, contudo rapidamente parece se acomodar num patamar mais elevado, com pico de 8,9%, entretanto esta segunda fase é iniciada e encerrada com a rentabilidade de 5,9%. A partir deste momento, a rentabilidade se eleva de maneira bem agressiva, atingindo o pico de 21,8% ao final da série.

Figura 31 – Rentabilidade bruta da Máscara V.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Apesar de termos um considerável rentabilidade bruta, também temos que levar em conta a grande quantidade de ordens emitidas pela modelagem baseada na Máscara V. Pela Figura 32 vemos que a rentabilidade líquida, aquela que já desconta os custos de transação, se reduz

consideravelmente quando comparada a rentabilidade bruta. Do ponto máximo de rentabilidade bruta de 21,8%, chegamos a uma rentabilidade líquida de 11,6%, ou seja, os custos de transação custaram aproximadamente 47% da rentabilidade inicialmente calculada.

Figura 32 – Rentabilidade bruta e líquida da Máscara V.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Apesar da rentabilidade bruta da Máscara V ter sido 42,5% maior que a alcançada pelo CUSUM tabular, a rentabilidade líquida foi 15,3% menor. Com isso, fica evidenciado que os custos operacionais são um importante fator para a qualidade final de um modelo a ser aplicado no mercado financeiro.

5.2.4 Amostra de teste

Uma etapa fundamental para averiguar a qualidade final de um modelo é a aplicação deste mesmo modelo numa amostra teste. Considerando o mesmo parâmetro utilizado para a modelagem com a amostra treinamento, a técnica da Máscara V mostra o padrão de ordens emitidas apresentado na Figura 33

Figura 33 – Ordens para a amostra de teste – Máscara V.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Assim como para a modelagem com a amostra treinamento, fica evidente a quantidade maior de ordens emitidas pela técnica da Máscara V quando comparado ao CUSUM tabular. Na Tabela 10 vemos o detalhamento da ordens disparas para a amostra teste. Pela primeira vez em todos os cenários estudados, vemos uma taxa de acerto menor que 50% para as ordens de venda, ou seja, a modelagem baseada na Máscara V se mostrou pouco confiável para se trabalhar num cenário de queda de preços, onde a orden de venda é o principal mecanismo para se auferir rentabilidade. Já para as ordens de compra, que foram em maior volume, o modelo se mostrou confiável, inclusive fazendo com que a taxa de acerto global fosse ligeiramente maior que os 50%.

Tabela 10 – Taxa de acerto das ordens emitidas para a amostra de teste – Máscara V

Ordem de venda		
Total	Acertos	Taxa de acerto
21	9	42,86%

Ordem de compra		
Total	Acertos	Taxa de acerto
49	27	55,10%

Ordens totais		
Total	Acertos	Taxa de acerto
70	36	51,43%

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Pela Figura 34 podemos entender visualmente o porque do comportamento ruim das ordens de venda disparadas pela modelagem com base na Máscara V. Notamos que logo no

início todas as ordens disparadas foram ordens de venda, contudo a cotação neste intervalo subiu de aproximadamente 1,04 para 1,06, fazendo com que se acumulassem algumas ordens erroneamente emitidas. Já para as ordens de compra, vemos apenas um grande equívoco, na ordem de número 27, onde a cotação caiu de aproximadamente 1,077 para 1,059, uma queda de 1,67% que até a identificação da tendência e posterior disparado de ordem de venda.

Figura 34 – Comportamento das ordens para a amostra de teste – Máscara V.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Considerando o comportamento apresentado, a modelagem com base na Máscara V alcançou 6,48% em rentabilidade bruta e 4,82% em rentabilidade líquida. Apesar de tanto a rentabilidade bruta quanto a líquida da Máscara V terem uma leve vantagem quando comparadas aos valores obtidos pelo CUSUM tabular, é importante citar que além das ordens terem sido em quantidade bem maior, as ordens de venda não se mostraram com performance adequada, inclusive errando mais do que acertando. Na Figura 35 vemos o comportamento das rentabilidades acumuladas.

Figura 35 – Rentabilidades para a amostra de teste – Máscara V.

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

6 Conclusões

Originalmente desenvolvida para aplicações em cenários envolvendo produção de bens e seus respectivos controles de qualidade, o método CUSUM, bem como suas variantes, se mostraram com grande flexibilidade para adaptação a outras finalidades. Quando aplicados ao mercado de capitais, mais especificamente ao mercado de câmbio, o método se mostrou com boa performance, ainda que de maneira não tão pronunciada.

A modelagem com base no CUSUM tabular se mostrou muito parcimoniosa, de tal sorte que as ordens emitidas foram em pouca quantidade e com grande precisão. O lado positivo certamente é a possibilidade de investimentos mais pesados quando o modelo dispara uma ordem, já que seu grau de acurácia é satisfatório, o lado negativo é a perda da possibilidade de ganho com pequenas variações. Diante destas características, a rentabilidade líquida do modelo não se distingue tanto da rentabilidade bruta. Apesar de se mostrar um modelo viável, a utilização do CUSUM tabular para séries de alta frequência pode ser questionada pelo baixo volume de ordens emitidas.

O modelo ajustado com base na Máscara V se mostrou consideravelmente adaptável, com elevado número de ordens emitidas e também com boa taxa de acerto. Pela existência da cobrança de taxas de transação no mercado de capitais, e ainda que para o mercado específico de câmbio estas taxas sejam reduzidas, a grande quantidade de ordens emitidas com base na Máscara V fez com que sua elevada rentabilidade bruta fosse pesadamente impactada pelos custos inerentes ao mercado. Apesar disto, o poder de previsão do método, verificado através da amostra teste, se mostrou eficaz, muito devido a capacidade de detectar mudanças menores no comportamento da série.

Por fim, na comparação entre os dois métodos, a Máscara V se mostrou com maior capacidade de aproveitamento de pequenas variações, contudo o CUSUM tabular pode ser considerado mais conservador, inclusive com melhor taxa de acerto. Que pese a rentabilidade líquida maior do CUSUM tabular na amostra treinamento, para um cenário de utilização real a Máscara V se mostrou levemente melhor, conseguindo captar melhores oportunidades de ganho. Certamente uma melhoria possível nos modelos é a colocação de travas de performance, onde o disparo de maneira equivocada de, digamos, 3 ordens bloquearia o uso do modelo até uma revisão dos parâmetros ou até a volta de sua eficiência.

Desdobramentos naturais do estudo apresentado é a utilização da solução em tempo real, com capacidade de tomada de decisão automatizada. Obviamente, por se tratar de operações de alta frequência, a utilização de solução de negociação com base em programa computacionais exige um considerável investimento em *software* e *hardware*.

Referências¹

- BISSEL, A. F. Cusum techniques for quality control. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, v. 18, n. 1, p. 1–30, 1969. ISSN 0035-9254. Citado na página 14.
- CHIU, W. K. The economic design of cusum charts for controlling normal means. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, v. 23, n. 3, p. 420–433, 1974. ISSN 0035-9254. Citado na página 31.
- CROWDER, S. V. A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics*, v. 29, n. 4, p. 401–407, 1987. ISSN 0040-1706. Citado na página 29.
- DUNCAN, A. J. The economic design of $\bar{X}$ charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, v. 51, n. 274, p. 228–242, 1956. ISSN 0162-1459. Citado na página 32.
- EWAN, W. D. When and how to use cusum charts. *Technometrics*, v. 5, n. 1, p. 1–22, 1963. ISSN 0040-1706. Citado na página 28.
- GOEL, A. L.; WU, S. M. Determination of A.R.L. and a contour nomogram for cusum charts to control normal mean. *Technometrics*, v. 13, n. 2, p. 221–230, 1971. ISSN 0040-1706. Citado na página 30.
- GOLDSMITH, P. L.; WHITFIELD, H. Average run lengths in cumulative chart quality control schemes. *Technometrics*, v. 3, n. 1, p. 11–20, 1961. ISSN 0040-1706. Citado na página 28.
- KEMP, K. W. The average run length of the cumulative sum chart when a V-mask is used. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v. 23, n. 1, p. 149–153, 1961. ISSN 0035-9246. Citado na página 28.
- MONTGOMERY, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*. 4a. ed. New York: Wiley, 2000. ISBN 978-0-471-31648-0. Citado nas páginas 24 e 26.
- MOREIRA, J. M. S.; LEMGRUBER, E. F. O uso de dados de alta frequência na estimação da volatilidade e do valor em risco para o IBOVESPA. *Revista Brasileira de Economia*, v. 58, n. 1, p. 100–120, 2004. ISSN 0034-7140. Citado na página 45.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de Séries Temporais*. 2a. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2006. ISBN 978-8-521-20389-6. Citado na página 16.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

Apêndices

Apêndice A – Código em R para o CUSUM tabular

```

library("openxlsx")

data = read.xlsx("BaseDeDadosEURUSD.xlsx",sheet=2)
cot = data.matrix(data["Fechamento"])
dt=data.matrix(data["Retorno"])

dt[1] = 0
n1 = 1
n2 = length(cot)
cot = cot[n1:n2]
dt = dt[n1:n2]
h=0.5

for (j in 1:10) {
  k = 0.0005
  for(l in 1:10) {
    ls = 0
    li = 0
    lsc = 0
    lic = 0
    mizero = 0
    r = 0
    rhist = 0
    for (i in 2:length(dt)) {
      if (ls[i-1] > lsc[i-1] | -li[i-1] < lic[i-1]) {
        r = i-1
      }
      rhist = c(rhist,r)
      ls = c(ls,max(0,dt[i] - (mizero + k) + ls[i-1]))
      li = c(li,max(0,(mizero - k) - dt[i] + li[i-1]))
      lsc = lsc = c(lsc,h*sqrt(var(dt[1:i]))) \#rep(h*sqrt(var(dt)),i)
      lic = -lsc
    }
  }
}

```

```

plot(ls, ylim=c(-max(max(ls),max(li)), max(max(ls),max(li))), type="l", col="blue")
lines(-li,col="red")
lines(lsc,col="green")
lines(lic,col="green")

par(new=TRUE)

plot(cot[1:i],type="l",yaxt="n")
axis(4)
g1 = rep()
g2 = rep()
romp = c(unique(rhist),length(cot))

for (i in 2:(length(romp)-1)) {
  if (ls[romp[i]] > lsc[romp[i]]) {
    g1 = c(g1,cot[romp[i+1]]-cot[romp[i]])
  }
  if (-li[romp[i]] < lic[romp[i]]) {
    g2 = c(g2,-1*(cot[romp[i+1]]-cot[omp[i]]))
  }
}

print(100*(sum(g2,g1)/cot[romp[2]]))
k = k+0.0005
}
h = h+0.5
}

```

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.

Apêndice B – Código em R para a máscara V

```

library("openxlsx")

data = read.xlsx("BaseDeDadosEURUSD.xlsx",sheet=2)
cot1 = data.matrix(data["Fechamento"])
dt1=data.matrix(data["Retorno"])

dt1[1] = 0
n1 = 1
n2 = length(cot1)
cot = cot1[n1:n2]
dt = dt1[n1:n2]
ls = 0
li = 0
lsc = 0
lic = 0
mizero = 0
r = 0
rhist = 0

for (i in 2:length(dt)) {
  if (ls[i-1] > lsc[i-1] | -li[i-1] < lic[i-1]) {
    r=i-1
  }
  rhist = c(rhist,r)
  ls = c(ls,dt[i] - (mizero) + ls[i-1])
}

delta = 0.0013

for (m in 1:10) {
  ord1 = numeric()
  ord2 = numeric()
  for (k in 60:n2) {

```

```

ys=(-delta*seq((k-59):k))+(ls[k])+(delta*(60))
yi=(delta*seq((k-59):k))+(ls[k])-(delta*(60))
ord1 = c(ord1, sum(iffelse((ls[(k-59):(k-1)] < yi[-length(yi)]) == TRUE,1,0)))
ord2 = c(ord2, sum(iffelse((ls[(k-59):(k-1)] > ys[-length(ys)]) == TRUE,1,0)))

plot(ls[(k-59):k], type="l", col="blue")
lines(ys, col="red")
lines(yi, col="red")
}

ordf = ord1
ordf[which(ord2>0)]=-ord2[which(ord2>0)]
cotord = cot[(which(ordf != 0)+59)]
ooo = ordf[which(ordf != 0)]
res = iffelse( ooo > 0, cotord[-1]-cotord[-length(cotord)],
cotord[-length(cotord)]-cotord[-1])

print(sum(res))
print(k)
print(delta)
delta = delta+0.0001
}

```

Fonte: Vitor Mendes Cardoso, 2018.