UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ARTES, CIÊNCIAS E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM DE SISTEMAS
COMPLEXOS

LEANDRO AUGUSTO FERREIRA

**As redes complexas e o estudo do risco sistêmico no
sistema financeiro**

SÃO PAULO
2013

LEANDRO AUGUSTO FERREIRA

**As redes complexas e o estudo do risco sistêmico no
sistema financeiro**

Dissertação apresentada à Escola de Artes
Ciências e Humanidades da Universidade
de São Paulo, como parte dos requisitos
para a obtenção do Título de Mestre em
Ciências pelo Programa de Pós-Graduação
em Modelagem de Sistemas Complexos.

Orientador: Fernando Fagundes Ferreira

[VERSÃO CORRIGIDA]

SÃO PAULO
2013

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada à fonte.

CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO

Biblioteca

Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo

Ferreira, Leandro Augusto

As redes complexas e o estudo do risco sistêmico no sistema financeiro / Leandro Augusto Ferreira ; orientador, Fernando Fagundes Ferreira. – São Paulo, 2013.

77 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem em Sistemas Complexos, Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo, em 2013.

Versão corrigida

1. Análise de risco. 2. Sistema financeiro – Simulação computacional. 3. Crise financeira. 4. Sistemas dinâmicos. I. Ferreira, Fernando Fagundes, orient. II. Título.

CDD 22.ed.– 368.01

Nome: Leandro Augusto Ferreira

Título: As redes complexas e o estudo do risco sistêmico no sistema financeiro

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos da Escola de Artes Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

APROVADO EM: 12/07/2013

BANCA EXAMINADORA

PROF. DR. FERNANDO FAGUNDES FERREIRA

INSTITUIÇÃO: EACH-USP

ASSINATURA: _____

PROF. DR. LUIZ JURANDIR SIMÕES DE ARAÚJO

INSTITUIÇÃO: FEA-USP

ASSINATURA: _____

PROF. DR. PAULO FERNANDO COIMBRA TILLES

INSTITUIÇÃO: IFSC-USP

ASSINATURA: _____

*Dedico este trabalho à Elizabeth,
minha mãe, amiga e conselheira.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me capacitar e consolar nas horas de dificuldade e à minha mãe, Elizabeth Augusta de Lima, por ter me educado com sabedoria e dedicação.

À minha família, em especial, ao meu pai, Alberto Ferreira de Lima, minha avó, Teotônia Augusta de Lima, meus irmãos, Anderson Augusto Ferreira e Fernanda Augusta Ferreira de Giuli, aos meus cunhados Arnaldo de Giuli Neto e Ana Paula Angelozi Lima e aos meus sobrinhos Sarah Angelozi Ferreira Lima e Miguel Ferreira de Giuli, por acreditarem na realização desse projeto.

Aos amigos, Alessandra Melo, Aline Dutra, Bruna Patrícia, Bruno Vitório, Carlos Hirth, Eder Fonseca, Gabriel Pais, Gilberto Sassi, José Emílio, Michel Alexandre, Priscila Soares, Raoni Venturieri, Tiago Colliri pelo incentivo e contribuições.

Ao Professor Fernando Fagundes Ferreira, meu orientador, por me incentivar e apoiar durante esse projeto.

À professora Flavia Sarti, como coordenadora do programa de mestrado.

Aos professores, Alexandre Ramos, Camilo Neto, Carlos de Brito, Luiz Jurandir, Masayuki Hase, Nikolai Kolev pelas aulas ministradas durante o Mestrado.

À Escola de Artes, Ciências e Humanidades pela criação do programa de Pós-Graduação em Sistemas Complexos.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

*Porque este Deus é o nosso Deus
para sempre; Ele será nosso guia até
à morte.*

Sl 48:14

Resumo

FERREIRA, L. A. **As redes complexas e o estudo do risco sistêmico no sistema financeiro**. 2013. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

As crises financeiras são processos de perdas decorrentes do mecanismo do mercado financeiro. Elas afetam as instituições do sistema financeiro e por meio do processo de contágio se espalham por ele, algumas vezes analogamente ao efeito dominó. Este processo pode levar muitas instituições financeiras saudáveis a se tornarem insolventes. Isso acontece porque os agentes econômicos estão interligados por meio de relações contratuais e se tornam dependentes uns aos outros. O risco sistêmico pode ser entendido como o risco de uma grande perda em um sistema. O presente trabalho tem como objetivo utilizar as propriedades de um modelo de contágio, proposto para estudar os efeitos da propagação de crises financeiras, bem como a mensuração do risco sistêmico no sistema interbancário. Este problema foi investigado considerando três diferentes topologias de rede: *Erdős-Rényi*, Livre de Escala (*ou Scale-Free*) e Interbancária Empírica. A escolha destas topologias foi pelo fato de que duas delas — Livre de Escala e Interbancária Empírica — podem emular o sistema bancário real e a de *Erdős-Rényi* ter sido utilizada em diversos modelos da literatura. Cada nó representa um banco que possui balanço patrimonial constituído de passivos (patrimônio líquido, empréstimos e depósitos) e ativos (empréstimos, títulos e valores mobiliários). Foi analisada a influência da alavancagem do sistema, da probabilidade inicial de *default* e do número de *clusters* da rede Interbancária Empírica. O risco sistêmico foi medido utilizando o Indicador de Risco Sistêmico, o índice de Risco Sistêmico e o VaR Sistêmico. Mostrou-se que as redes Livres de Escala são mais robustas em relação aos ataques aleatórios evitando o aumento da inadimplência. O aumento abrupto do impacto causados pela crise acontece devido ao aumento do grau de alavancagem do sistema. O número de *clusters* da rede Interbancária Empírica impacta a roubutez do sistema. O modelo reproduz o resultado conhecido como *Muito Interconectado para Falhar*, que é quando bancos mais interconectados oferecem maior risco ao sistema.

Palavras-chave: Risco sistêmico, contágio financeiro, redes complexas, crises financeiras, sistemas complexos.

Abstract

FERREIRA, L. A. **Complex networks and the study of systemic risk on financial system**. 2013. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

The financial crises are processes of losses arising from financial market mechanism. They affect the institutions of the financial system by the process of contagion. Sometimes it is equal to the domino effect. This process can make many healthy financial institutions become insolvents. It happens because economic agents are interconnected through contractual relations and become dependent on each other. Systemic risk can be understood as the risk of a huge loss in a system. The present work aims to study the properties of a contagion model proposed to study the effects of the spread of financial crises, as well as the measurement of systemic risk in the interbank system. This problem was investigated considering three different network topologies: *Erdős-Rényi*, Scale-Free and Empirical Interbank. The choice of these topologies was made by the fact that two of them — Scale-Free and Empirical Interbank — may emulate the real banking system and *Erdős-Rényi* has been used in several models in the literature. Each node is a bank and consists on a balance sheet split as liabilities (equity, borrowings and deposits) and assets (lendings, bonds and securities). It was analyzed the influence of the coefficient of leverage, the influence of the initial probability of default and the influence of the number of clusters on the Empirical Interbank. The systemic risk was measured using the Systemic Risk Indicator, Systemic Index and Systemic Value at Risk. It was shown that Scale-Free networks are more robust against random attacks, avoiding increases in the number of defaults. The abrupt increase in the impact caused by the crisis happens due to the increase in coefficient of leverage. The number of clusters on Empirical Interbank network impacts the robustness of the system. The model reproduces the result known as *Too Interconnected to Fail*, that is, banks more interconnected offer higher risk to the system.

Keywords: Systemic risk, financial contagion, complex networks, financial crises, complex systems.

Sumário

Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	14
1 Introdução	15
1.1 Objetivos	16
1.2 Organização do Trabalho	17
2 Revisão da Literatura	18
3 Redes Complexas	24
3.1 Fundamentos	26
3.2 Distribuição de graus	27
3.2.1 Distribuição de Poisson	28
3.2.2 Lei de Potência (Power Law)	29
3.3 Modelos de Redes	30
3.3.1 Erdős-Rényi	30
3.3.2 Livre de escala (Scale-free)	31
3.3.3 Interbancária Empírica	33
4 O Risco Financeiro	36
4.1 Classificação do Risco	36
4.2 Value at Risk	40
4.2.1 Modelo por simulação histórica	41
4.2.2 Modelo Paramétrico	42
4.2.3 Modelo por simulação de Monte Carlo	43
5 Risco Sistêmico	45
5.1 Crises Financeiras	45
5.2 Modelo de contágio	48
5.2.1 Construção do Sistema Interbancário	48
5.2.2 Alavancagem do sistema	50
5.2.3 Propagação do choque	50

5.3	Medidas de Risco Sistêmico	51
5.3.1	Indicador de Risco Sistêmico	52
5.3.2	Índice de Risco Sistêmico	54
5.3.3	VaR Sistêmico	55
6	Resultados	56
6.1	Muito Interconectado para falhar	56
6.2	Efeitos da alavancagem	58
6.3	Robustez das topologias de rede	62
6.4	O efeito da presença de <i>clusters</i>	65
6.5	Índice de Risco Sistêmico	67
6.6	Var Sistêmico	68
7	Conclusões	69
7.1	Considerações Finais	69
7.2	Sugestões para Pesquisas Futuras	70
A	Algoritmos da Simulação	71
	Referências Bibliográficas	74

Lista de Figuras

2.1	Mecanismo de difusão de crises financeiras: D representa as firmas de bens de consumo, U as firmas que forcenem insumos e B os bancos que financiam o mercado. As interações entre os bancos e firmas mudam a cada rodada, de acordo comercial o cenário econômico. As ligações na cor vermelha indicam os efeitos causados pela inadimplência das firmas D4,D6 e D7 que afetam seus parceiros contratuais (bancos e firmas).	22
2.2	Ilustração da variação do parâmetro γ gerando diferentes topologias de rede. Figura (a) é uma rede aleatória gerada pelo parâmetro $\gamma = 0$, figura (b) é uma rede livre de escala gerada pelo parâmetro $\gamma = 12$ e figura (c) é uma rede pseudo-estrela gerada pelo parâmetro $\gamma = 40$.	23
3.1	Representação do problema das sete pontes de Königsberg.	24
3.2	Representação de uma cadeia alimentar por meio de uma rede. Cada nó representa um animal na dentro da cadeia e cada ligação a relação entre predador presa. O nó em cor mais escura representa uma presa de um predados cujo nó está em cor mais clara.	25
3.3	Exemplo de representação de um grafo não direcionado.	26
3.4	Exemplo de representação de um grafo direcionado.	26
3.5	Distribuição empírica de renda de uma população, cuja distribuição segue uma lei de potência.	29
3.6	Representação da rede aleatória de Erdős-Rényi	30
3.7	Representação da Rede Erdős-Rényi com 50 bancos	31
3.8	Representação da rede Livre de Escala de A.-L. Barabási.	31
3.9	Representação da rede Livre de escala com 100 bancos.	32
3.10	Topologia da rede interbancária brasileira em Julho 2008.	33
3.11	Rede Interbancária	34
3.12	Rede <i>Interbancária Empírica</i> simulada com 200 nós e 3 <i>clusters</i> . As diferentes cores representam a formação dos <i>clusters</i> .	35
4.1	Ilustração do cálculo do VaR.	40
4.2	<i>VaR por simulação histórica calculado para nível de confiança de 99%.</i>	42

4.3	Representação da construção da distribuição dos preços obtidas por meio de trajetórias aleatórias.	44
5.1	Representação do Sistema Financeiro	46
5.2	Resumo do processo de formação de uma crise financeira	47
5.3	Comparação entre os Acordos de Basiléia II e III	48
5.4	Balanco patrimonial de um banco	49
5.5	Ilustração do processo de contágio financeiro. No primeiro estágio, o banco inadimplente — em vermelho — afeta seus três credores. No segundo estágio, apenas um dos credores afetados no primeiro estágio é contagiado, e portanto fica inadimplente. No terceiro estágio, um dos bancos atingidos nos estágios anteriores é atingido novamente, desta vez, se tornando inadimplente; um dos bancos sequer é atingido.	51
5.6	Distribuições de grau de saída, em vermelho e de probabilidade de bancos inadimplentes, em azul.	52
5.7	Distribuições de grau de saída, em vermelho e de probabilidade de bancos inadimplentes, em azul.	53
5.8	Homeorfismo entre os intervalos (a, b) e $(0, 1)$ da reta.	53
5.9	Representação do Indicador de Risco Sistêmico. No caso (a) os bancos mais conectados possuem maior risco de inadimplência, no caso (b) os bancos menos conectados possuem maior risco de inadimplência. O tamanho dos círculos em azul indica a proporção de bancos com o respectivo grau de saída.	54
6.1	Os tamanhos dos círculos na cor azul mostram a proporção dos bancos com grau de saída k^{out} . A reta verde indica o grau médio de cada topologia de rede (a) Erdős-Rényi, (b) Interbancária e (c) Livre de escala e a reta vermelha indica a igualdade entre as <i>distribuições de grau e de default</i> , ou seja, a concentração de círculos à direita da reta verde, acima da reta vermelha (1º quadrante), à esquerda da reta verde e abaixo da reta vermelha (3º quadrante), indicam que bancos com grau de saída maior que a média, possuem maior risco dentro do sistema.	57
6.2	Análise do efeito da alavancagem para a rede <i>Erdős-Rényi</i> com 100 bancos. Na cor preta o resultado para $pd_i = 0.05$ e na cor azul o resultado para $pd_i = 0.1$	58
6.3	Análise do efeito da alavancagem para a rede <i>Erdős-Rényi</i> com 200 bancos. Na cor preta o resultado para $pd_i = 0.05$ e na cor azul o resultado para $pd_i = 0.1$	59
6.4	Análise do efeito da alavancagem para a rede <i>Erdős-Rényi</i> com 500 bancos. Na cor preta o resultado para $pd_i = 0.05$ e na cor azul o resultado para $pd_i = 0.1$	59

6.5	Análise do efeito da alavancagem para a rede Interbancária Empírica com 100 bancos.	60
6.6	Análise do efeito da alavancagem para a rede Interbancária Empírica com 200 bancos.	60
6.7	Análise do efeito da alavancagem para a rede Interbancária Empírica com 500 bancos.	61
6.8	Análise do efeito da alavancagem para a rede Livre de Escala com 100 bancos.	61
6.9	Análise do efeito da alavancagem para a rede Livre de Escala com 200 bancos.	62
6.10	Análise do efeito da alavancagem para a rede Livre de Escala com 500 bancos.	62
6.11	Comparação dos resultados de desempenho de robustez entre as três topologias de redes estudadas. Nas figuras (a) e (b) tem-se, respectivamente, a quantidade de bancos afetados e inadimplentes para $pd_i = 0.05$ e nas figuras (c) e (d) tem-se, respectivamente, a quantidade de bancos afetados e inadimplentes para $pd_i = 0.1$, para redes com 100 bancos.	63
6.12	Comparação dos resultados de desempenho de robustez entre as três topologias de redes estudadas. Nas figuras (a) e (b) tem-se, respectivamente, a quantidade de bancos afetados e inadimplentes para $pd_i = 0.05$ e nas figuras (c) e (d) tem-se, respectivamente, a quantidade de bancos afetados e inadimplentes para $pd_i = 0.1$, para redes com 500 bancos.	64
6.13	Análise do Cluster feita para a rede Interbancária Empírica com 100 bancos, com 3, 4 e 5 clusters e valor de $pd_i = 0.05$	65
6.14	Análise do Cluster feita para a rede Interbancária Empírica com 100 bancos, com 3, 4 e 5 clusters e valor de $pd_i = 0.1$	65
6.15	Análise do Cluster feita para a rede Interbancária Empírica com 200 bancos, com 3, 4 e 5 clusters e valor de $pd_i = 0.05$	66
6.16	Análise do Cluster feita para a rede Interbancária Empírica com 200 bancos, com 3, 4 e 5 clusters e valor de $pd_i = 0.1$	66
6.17	Comparação dos resultados do Índice de Risco Sistêmico para as três topologias de redes estudadas e três valores para a alavancagem ρ . A figura (a) considera $\rho = 0.8$, a figura (b) considera $\rho = 4$ e, figura (c) considera $\rho = 8$.	67
6.18	Resultado para VaR Sistêmico com nível de confiança de 99% calculado para as diferentes topologias de rede e valores de alavancagem estudados. Figura (a) mostra o VaR calculado para $pd_i = 0.05$ e figura (b) mostra o VaR calculado para $pd_i = 0.1$	68

Lista de Tabelas

4.1	Principais modelos de risco de crédito.	37
4.2	Matriz de transição de <i>ratings</i> segundo o modelo <i>Credit Metrics</i>	38
4.3	Classificação do Risco Operacional	39
4.4	Resumo das metodologias de cálculo do VaR.	41

Capítulo 1

Introdução

As instituições financeiras fazem operações com alto grau de alavancagem: elas usam capital de terceiros ou realizam operações futuras por meio da aplicação de uma fração do valor do ativo para aumentar seus lucros (Adrian e Shin, 2010). Sabendo-se que o passivo bancário é formado em grande parte por recursos oriundos do setor produtivo, do comércio e da poupança popular, uma crise financeira pode comprometer toda estrutura econômica de uma sociedade. Vale ainda notar que as crises têm sido recorrentes com diferentes intensidades. Por outro lado, o crescente aumento da conectividade do mercado global, por meio de transações comerciais (fluxo de produtos) e financeiras (fluxo de capital), gera maior grau de apreensão ou medo de que estas crises se tornem mais frequentes e se propaguem mais velozmente (Haldane, 2010).

Do ponto de vista teórico, ou seja, nos modelos clássicos, o setor financeiro realmente tem um papel muito rudimentar: o banco central define a taxa de juros, que por sua vez afeta as decisões de consumo e de poupança das famílias. Os atores reais do setor financeiro e os seus diversos tipos de transações não desempenham um papel importante nesses modelos (Wieland *et al.*, 2012). Fenômenos como as *bolhas especulativas*, *superinvestimento*, os efeitos das mudanças dos balanços e liquidez, e os efeitos dominó de falências bancárias estão excluídos, a priori. A origem da instabilidade do setor financeiro e sua propagação para a economia real não está endereçada na estrutura básica desses modelos (Brunnermeier e Oehmke, 2012; Mishkin, 2009; Wieland *et al.*, 2012).

A maneira como as crises financeiras têm afetado a economia exige que a pesquisa nessa área encontre um novo caminho em muitos aspectos. De modo geral, as estruturas do mercado financeiro local e global, bem como sua capacidade intrínseca de gerar desestabilização, precisam ser estudadas, assim como a propagação da crise dentro do setor bancário e para o resto da economia (Wieland *et al.*, 2012).

A propagação de uma crise pode ter efeitos muito diferentes com a pequena mudança das condições do cenário econômico ou inerentes a cada mercado. Para exemplificar esse fato, basta lembrar as crises imobiliárias do Japão, em meados de 1990, e da americana, em 2008.

Embora a crise imobiliária no Japão tenha tido efeitos regionais (Shiratsuka, 2005), a crise do mercado imobiliário dos Estados Unidos se espalhou rapidamente para outras instituições financeiras que detinham títulos cujos rendimentos dependiam do resultado dos empréstimos hipotecários americano (Gkougkousi e Roosenboom, 2010). Estas instituições tiveram que ajustar seus balanços com a venda de outros títulos, levando-os à desvalorização dos mesmos, causando prejuízos para os titulares de outras instituições. Depois que o Lehman Brothers faliu, as instituições financeiras acabaram por exacerbar a propagação da crise: elas pararam de dar empréstimos a curto prazo no setor interbancário, mas isto só causou um agravamento de problemas de liquidez (Datz, 2002). Como quase todas as instituições financeiras dependem de um mercado interbancário que funcione bem, a retração do setor bancário amplificou os efeitos da crise de liquidez que ameaçou todo o sistema financeiro. Governos e bancos centrais tiveram que intervir para evitar que todo o sistema entrasse em colapso (Santos, 2010).

A explicação para esse fenômeno pode ser encontrada por meio do estudo do risco sistêmico, pois as ferramentas atuais pouco surtiram efeito neste sentido. Dentro deste contexto, a abordagem metodológica que combina risco sistêmico com redes complexas têm dado um norte ao que diz respeito às políticas preventivas, e isso têm feito o Comitê da Basileia reformular o Acordo de Basileia II, criando o novo Acordo de Basileia III, que leva em conta medidas de risco de liquidez, a conectividade entre os bancos e a dependência de risco via derivativos (BIS, 2010).

As redes complexas emulam as relações contratuais de crédito entre as instituições financeiras permitindo um estudo aprofundado sobre o sistema financeiro; o formato dessas ligações é denominado topologia de rede. Ainda não se sabe qual seria o impacto dessas topologias no sistema, ou qual delas seria mais robusta, ou seja, o uso de alguma topologia reduziria ou aumentaria o risco sistêmico?

Parte dessas respostas podem ser obtidas por meio do estudo dessas topologias e de como as mesmas descrevem a sensibilidade dos sistemas em uma crise. Neste trabalho, serão discutidos os efeitos das topologias de rede, utilizando um modelo de propagação de crises financeiras.

1.1 Objetivos

O principal objetivo desse estudo é investigar o papel da estrutura da rede que descreve o setor financeiro. A compreensão dessas redes parece ser de importância central na análise de instabilidades sistêmicas. Ela fornece a base científica para a obtenção do conhecimento de como as crises se propagam (Haldane e May, 2011). Isso permite discutir estratégias e políticas de regulamentação do setor bancário que devem levar em conta não apenas os riscos específicos do banco, mas também os fatores de riscos globais, que devem ser estudados de forma integrada (Chan-Lau, 2010).

Neste trabalho serão discutidos, por meio de um modelo de propagação de crises, os efeitos das topologias de rede, bem como a alavancagem e o nível de endividamento inicial do sistema.

1.2 Organização do Trabalho

O trabalho está dividido da seguinte maneira: O **capítulo 2** apresenta a revisão da literatura da área, ou seja, mostra os principais trabalhos publicados na área de risco sistêmico sob a abordagem de redes complexas. Desta maneira, introduz-se ao leitor os conceitos que servirão como base para o restante do texto; o **capítulo 3** discute os conceitos de redes complexas relevantes a esse trabalho, bem como uma breve descrição das topologias de rede utilizadas nas simulações, o leitor que se sentir familiarizado com os esses conceitos poderá pular este capítulo, assim como o **capítulo 4**, que trata sobre o conceito de risco financeiro, sua classificação e também descreve um dos principais modelos de mensuração de risco, denominado *Value at Risk*, também conhecido como *VaR*; o **capítulo 5** versa sobre o risco sistêmico e sobre as crises financeiras, além de trazer comentários sobre os acordos de Basiléia II e III, e apresentar os modelos utilizados nesse estudo: um modelo de criação de rede interbancária e outro de contágio financeiro, ou seja, o mecanismo de propagação da crise. Neste mesmo capítulo são apresentadas as três medidas de risco sistêmico utilizadas nesse estudo; o **capítulo 6** descreve e analisa os resultados obtidos nessa pesquisa; o **capítulo 7** traz as considerações finais sobre o modelo e os resultados obtidos por meio das simulações, bem como sugestões para pesquisas futuras; por fim, as **referências bibliográficas** utilizadas e como **apêndice** os algoritmos do modelo de contágio e da rede proposta por [Li et al. \(2010\)](#), esses modelos, assim como todos os outros, foram implementados em *Python*.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

As crises financeiras têm despertado interesse em diversas áreas do conhecimento, diversos modelos surgiram na tentativa de explicar como e porque elas acontecem.

As diversas linhas de pesquisa englobam os modelos de corridas bancárias (Diamond e Dybvig, 1983; Mishkin, 2009), ou seja, quando os depositantes, com medo de serem impedidos de recuperar seus investimentos, realizam saques em massa, provocando a quebra das instituições, os modelos de *Assimetria de Informação* (Chen, 1999), que é, quando alguns participantes com informações privilegiadas sobre a saúde financeira das instituições tomam atitudes equivocadas, causando a instabilidade financeira, ou ainda os modelos preditivos. Estes, em geral, analisam as possíveis quebras na bolsa de valores, por meio das ferramentas tradicionais da estatística (Reinhart e Rogoff, 2011) ou, mais recentemente, com a análise de multifractalidade (Fonseca, 2012), ambos munidos de séries temporais financeiras.

Embora esses modelos sejam interessantes, ainda assim não excluem a necessidade de modelos que expliquem como as mesmas são propagadas. A propagação é peça fundamental no contexto de uma crise financeira, ela acontece devido à interconectividade entre os bancos e as firmas. A crise do mercado de hipotecas em 2008 evidenciou esse fato, indicando a fragilidade de um sistema aparentemente saudável (Gkougkousi e Roosenboom, 2010; Moussa, 2011; Santos, 2010), porém extremamente suscetível ao contágio financeiro (Allen e Gale, 2000; Jaramillo *et al.*, 2010; Upper e Worms, 2004; Wells, 2004).

As instituições conhecidas como *Muito conectadas para falhar*, são hoje a grande preocupação no que se diz respeito à regulação financeira, e devem receber atenção especial (BIS, 2010; Chan-Lau, 2010). Dentro deste contexto, os modelos que utilizam as redes complexas como ferramenta demonstram cada vez mais importância nesse tipo de análise, eles têm criado uma nova literatura que dará suporte às decisões, do ponto de vista sistêmico.

Uma medida de *risco sistêmico* pode auxiliar os bancos centrais em suas intervenções, uma vez que as medidas tradicionais de risco, mesmo que integradas, são feitas individualmente para cada instituição e não mostram a situação na qual o sistema se encontra.

Pode-se dizer que o primeiro modelo que trata de risco sistêmico utilizando redes foi o

modelo proposto por Allen e Gale (2000). Não se trata de um modelo de redes complexas, no entanto, foram utilizadas redes completas e incompletas. Representando cada instituição por um nó, foi possível concluir que no caso da rede completa os efeitos da crise são amenizados, pois após receber um choque financeiro, os riscos são compartilhados entre todos os participantes do sistema. O inverso ocorre com a utilização de redes incompletas, ou seja, os efeitos da crise são maiores, pois os riscos são compartilhados com menos participantes do sistema.

Embora ainda muito simplista, esse modelo inspirou diversos trabalhos que consideram a interconectividade um fator determinante para que uma crise seja propagada. Como por exemplo, os trabalhos de Tetryatnikova (2010). Este, por intermédio do uso de uma rede livre de escala, e Acemoglu *et al.* (2013), por meio de um modelo teórico com redes em formato de anéis, obtiveram resultados semelhantes aos de Allen e Gale (2000).

Ao longo do tempo, um grande número de trabalhos utilizaram a estrutura de balanço patrimonial definida a partir de uma estrutura de rede previamente escolhida. Em geral, o balanço é definido para cada banco i do sistema da seguinte maneira:

$$\underbrace{pl_i}_{\text{patrimônio líquido}} = \underbrace{e_i}_{\text{outros}} + \underbrace{l_i}_{\text{empréstimos}} - \underbrace{d_i}_{\text{depósitos}} - \underbrace{b_i}_{\text{empréstimos}}. \quad (2.1)$$

Por diversas razões, como por exemplo, investimentos mal sucedidos, interdependência entre as instituições, falta de liquidez dos ativos, riscos mal geridos, erros em precificações de ativos e principalmente a inadimplência, afetam as instituições, ou seja, os choques s_i representam prejuízos financeiros dados às instituições. Logo, os choques desestabilizam o sistema, pois afetam os patrimônios líquidos das instituições.

Dizer que uma instituição está inadimplente (*default*) significa que a mesma não poderá honrar com seus compromissos, isso é caracterizado da seguinte maneira:

$$\underbrace{pl_i}_{\text{patrimônio líquido}} < \underbrace{s_i}_{\text{choque}}. \quad (2.2)$$

É na situação de inadimplência que a instituição propaga o choque, fazendo com que seus credores sofram um novo choque, tornando-os ou não inadimplentes.

É nesse sentido que Nier *et al.* (2007) propuseram um modelo utilizando a topologia de rede aleatória de Erdős-Rényi com 25 bancos e uma estrutura de balanço patrimonial que estabelecesse as relações de empréstimos interbancários, bem como o nível de exposição de cada instituição no sistema. Este é feito contabilizando o número de nós de entrada e saída da rede. Com a variação de diversos parâmetros do modelo, os autores concluíram que com o aumento do patrimônio líquido, a insolvência diminui, sugerindo uma mudança no nível de alavancagem praticada pelos bancos. A pouca proximidade de uma rede interbancária real com as redes de Erdős-Rényi é uma das críticas a esse modelo, o que o torna pouco realístico.

Outro modelo que utiliza estrutura de balanço patrimonial é o modelo de [Haldane e May \(2011\)](#). Os autores afirmam que há a necessidade de que existam modelos que levem em consideração os balanços patrimoniais, pois os mesmos se adequam aos critérios de regulação da Basileia. Compara-se também os sistemas financeiros com os sistemas ecológicos, como por exemplo, as redes de cadeia alimentar. Um apanhado de resultados são discutidos, dentre eles, o estudo sobre resiliência e robustez de topologias de redes. Segundo os mesmos, a conexão de nós com propriedades diferentes, possibilita que o sistema seja mais robusto e resiliente. Outro fato importante é que a principal causa para que acontecesse um choque financeiro é atribuída ao mercado de derivativos, pois são os principais motivos para a alavancagem bancária.

[Gai e Kapadia \(2010\)](#) estudaram a relação entre conectividade média e contágio. Segundo os autores, quanto maior a conectividade média, menor será o contágio. Apesar de se basear em uma estrutura de balanço patrimonial, o modelo especifica diversos tipos de ativos de uma instituição financeira, tornando o modelo pouco prático e muito complicado.

[Canedo e Jaramillo \(2009\)](#) estimaram o *Loss given default*, a perda dada à inadimplência, utilizando um modelo de contágio baseado em uma base de dados Mexicana com aproximadamente 30 bancos. Como essa rede é considerada pequena, não foi necessário utilizar nenhuma estimativa por *máxima entropia*, técnica utilizada para completar bases de dados ([Cajueiro e Tabak, 2008](#)). Segundo os autores, esse método é totalmente irrealístico.

A técnica utilizada para a estimativa das perdas do sistema, assume independência na medida dessa probabilidade, ou seja, a probabilidade das perdas do sistema é o produto da probabilidade das perdas de cada instituição. O modelo também assume existência de um limiar de perda. O mesmo foi representado pelo capital do *tipo 1*, ou seja, patrimônio líquido mais lucros (prejuízos). Dentro da base de dados tal limiar indica quando um banco está ou não *inadimplente*. As probabilidades de inadimplência são atribuídas aleatoriamente. As base de dados indicam as exposições interbancárias, que por sua vez, consideram como perda a porcentagem de ativos não recuperados quando o banco está em *default* ou o total de exposições bancárias não pagas.

O modelo de [Jaramillo et al. \(2010\)](#) deu continuidade ao trabalho de [Canedo e Jaramillo \(2009\)](#), retirando a hipótese de independência das probabilidades das perdas mediante o uso da teoria de cópulas, técnica utilizada para estudar a dependência entre variáveis aleatórias ([Nelsen, 2006](#)).

Diversos trabalhos que também utilizam redes empíricas ([Boss et al., 2004](#); [Canedo e Jaramillo, 2009](#); [Iori et al., 2008](#); [Moussa, 2011](#); [Santos, 2010](#); [Souma et al., 2003](#); [Wells, 2004](#)), sugerem que as redes interbancárias sejam redes com distribuições de graus de entrada e saída cujas caldas sigam uma lei de potência (*power law*) com expoente entre 2 e 3.

Seguindo essa mesma direção, [Moussa \(2011\)](#) construiu um modelo estocástico que reproduz esses fatos estilizados, admitindo uma rede livre de escala direcionada, baseada em

Bollobás *et al.* (2003) e a distribuição do capital interbancário seguindo uma *distribuição de Pareto*. Algumas conjecturas sobre a topologia de rede foram feitas a partir de uma base de dados brasileira incompleta. Tal base foi utilizada por Santos (2010), mas desta vez, completa.

De forma muito semelhante, os trabalho de Moussa (2011) e Santos (2010) definem uma medida de *risco sistêmico*, tal qual será apresentada a seguir utilizando a nomenclatura utilizada por Santos (2010).

Seja $\mathcal{V}$ o conjunto das instituições bancárias e $\mathcal{A}$ o conjuntos das ligações entre elas, então o colchão de capital B_i de uma instituição financeira $i \in \mathcal{V}$ representa os recursos exigidos para cobrir possíveis perdas, este será definido da seguinte maneira:

$$B_i = C_{2,i} - C_{r,i}, \quad (2.3)$$

onde $C_{2,i}$ representa o *Capital de Referência* do banco $i \in \mathcal{V}$, ou seja, capital do tipo 1 e 2 que significam a soma do patrimônio líquido com os lucros ou prejuízos e a valorização ou desvalorização dos mesmos. O *Capital Exigido* $C_{r,i}$ é definido como função das fontes de risco, em que

$$C_{r,i} = \delta \times \text{Base de Risco}, \quad (2.4)$$

δ é o mínimo requerido *Índice de Basileia*, proporção mínima exigida entre os ativos e o capital de referência de um banco.

O *Impacto de Inadimplência* DI_j de um banco $j \in \mathcal{V}$ é definido da seguinte maneira:

$$DI_j = \sum_{\substack{i \in \mathcal{V}, \\ (i,j) \in \mathcal{A}}} \left\{ \frac{B_i^{(0)} - \max(B_i^{(\omega^*)}, 0)}{B_i^{(0)}} \right\}, \quad (2.5)$$

onde $B_i^{(0)}$ indica o nível de colchão de capital no estado inicial, $B_i^{(\omega^*)}$ indica o nível de colchão de capital no estado de equilíbrio, ou seja, quando não há mais perdas nos estados subsequentes.

Utilizando o *impacto de inadimplência* é possível definir uma outra medida, denominada *Índice de Risco Sistêmico* de uma instituição i ,

$$SI_i = \mathbb{E} [DI_i^\varepsilon \mid B_i + \varepsilon_i < 0], \quad (2.6)$$

que é a média dos impactos de inadimplência provocados por esta instituição segundo as magnitudes ε_i de choques financeiros sofridos.

Pode-se dizer que este índice representa a perda esperada causada pela crise e pode ser usado para avaliar a saúde do sistema, uma vez que as exposições bancárias sejam conhecidas.

As redes compostas por firmas e bancos foram estudadas quase em paralelo à literatura

apresentada até agora, Gatti *et al.* (2006) modelaram uma rede de crédito constituída por famílias, empresas e bancos. Os agentes são ligados por meio de uma relação de crédito *interior* e *exterior*, respectivamente, empresas dentro e fora do setor. A rede é estática, isto é, não evolui com o tempo. O trabalho de Gatti *et al.* (2006) foi ampliado em 2009 com a publicação de um artigo utilizando, desta vez, um mecanismo para a evolução endógena da estrutura da rede (Gatti *et al.*, 2009). Na rede de crédito, as famílias desempenham o papel consumidores finais, elas passam toda a sua renda para o sistema através da compra de bens de consumo. O Mercado Financeiro é constituído por dois tipos de firmas: *Downstream* (representado por D), empresas que produzem bens de consumo, enquanto que nas *Upstream* (representado por U) empresas fornecem insumos intermediários para as empresas D. Os bancos apenas concedem crédito ao sistema. Empresas do tipo D são devedores: elas tomam empréstimo das empresas U (crédito comercial) e de bancos (empréstimos bancários), como na figura 2.1.

Figura 2.1: Mecanismo de difusão de crises financeiras: D representa as firmas de bens de consumo, U as firmas que fornecem insumos e B os bancos que financiam o mercado. As interações entre os bancos e firmas mudam a cada rodada, de acordo com o cenário econômico. As ligações na cor vermelha indicam os efeitos causados pela inadimplência das firmas D4, D6 e D7 que afetam seus parceiros contratuais (bancos e firmas).

A grande contribuição de Gatti *et al.* (2009) foi a construção de uma rede endógena capaz de reproduzir crises financeiras, porém não existe um sistema interbancário, ou seja, os bancos apenas abastecem o mercado mediante a realização de empréstimos e financiamentos.

Lenzua e Tedeschi (2012) por meio de um modelo baseado em balanço patrimonial, estudaram quais topologias de redes são mais robustas. Considerando um sistema interbancário em equilíbrio, perturba-se esse sistema com dois choques, um positivo e outro negativo. O choque negativo faz o banco afetado buscar crédito pela rede em sua vizinhança. Todo o sistema é mobilizado até que o banco que recebeu o choque positivo seja encontrado e seus recursos sejam disponibilizados para a concessão de crédito.

A rede é composta por bancos com diferentes níveis de liquidez, pois, bancos com mais credores são consequentemente mais líquidos.

A cada período de tempo t , um agente i rompe a ligação com um agente k e cria uma nova ligação com um agente j com probabilidade

$$Pr_i^t = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(\phi_j^t - \phi_k^t)}}, \quad (2.7)$$

onde ϕ_j^t é uma medida de atratividade, ou seja, ela indica o quanto o agente j poderá oferecer em recursos, caso seja necessária a realização de empréstimos.

O parâmetro $\gamma \in [0, \infty)$ é responsável pela determinação da topologia de rede. Quando $\gamma \in [0, 2]$ a topologia de rede é aleatória, com distribuição de graus de entrada que seguem uma distribuição binomial, para $\gamma \in (2, 4]$ a topologia que emerge é a exponencial, para $\gamma \in (4, 12]$ a topologia é livre de escala e para $\gamma \in (12, \infty)$ tem-se uma topologia pseudo-estrela. A figura 2.2 ilustra os tipos de topologias geradas por meio da variação do parâmetro γ .

Figura 2.2: Ilustração da variação do parâmetro γ gerando diferentes topologias de rede. Figura (a) é uma rede aleatória gerada pelo parâmetro $\gamma = 0$, figura (b) é uma rede livre de escala gerada pelo parâmetro $\gamma = 12$ e figura (c) é uma rede pseudo-estrela gerada pelo parâmetro $\gamma = 40$.

Segundo [Lenzua e Tedeschi \(2012\)](#), as redes com distribuição de graus que seguem uma lei de potência são menos vulneráveis a ataques do que as redes aleatórias, pois possuem *hubs* — bancos muito conectados — e os mesmos seriam um rápido canal para a busca de crédito dentro das redes endógenas.

A literatura mostrou que as pesquisas na área de risco sistêmico foram intensificadas após a crise de 2008, mas já haviam sido iniciadas muito antes da mesma acontecer.

Capítulo 3

Redes Complexas

Pode-se dizer que os estudos de redes tiveram seu início com a **teoria dos grafos**, após *L. Euler (1707-1783)* resolver o problema das *sete pontes de Königsberg* (Barabási, 2002). Este problema consiste em: sete pontes conectavam duas ilhas com as margens de um rio. Questionava-se se seria possível, partindo de um determinado local e retornando ao mesmo, andar pela cidade utilizando somente uma vez cada ponte. Euler resolveu esse problema representando cada ponte por uma aresta (*ligação*) e as margens por pontos (vértices ou nós), como pode ser visto na figura 3.1.

Figura 3.1: Representação do problema das sete pontes de Königsberg.

Contando o grau de cada vértice, ou seja, o número de arestas que entram e que saem pelo vértice, Euler percebeu que os vértices de partida e chegada deveriam ter grau ímpar, pois não há necessidade de entrar na saída e sair da chegada, enquanto que os vértices intermediários deveriam ter grau par, pois a cada entrada deveria haver uma saída, em caso de o vértice de entrada e saída coincidirem, obviamente o grau seria par. No problema das sete pontes, todos os vértices possuem grau ímpar, o que torna a solução impossível.

Após a resolução de Euler um campo novo da matemática surge, abrindo a possibilidade de inúmeras pesquisas nesta área. Quase duzentos anos após a resolução do problema das sete pontes, na década 1950, os matemáticos *P. Erdős* e *A. Rényi* deram início aos estudos das redes aleatórias, hoje conhecidas como *redes aleatórias de Erdős-Rényi*, que

são usadas comumente como referência para os estudos em redes complexas, uma vez que suas propriedades são bem definidas e conhecidas na literatura.

Nas décadas de 1960 e 1970 o uso de redes passou a ser comum em problemas sociais e estudos do comportamento humano. Um exemplo disso é o estudo proposto por S. Milgram, denominado “seis graus de separação” (*six degree of separation*), sugerindo que duas pessoas escolhidas aleatoriamente em uma população estão separadas aproximadamente por seis intermediários. Milgram chegou a essa conclusão realizando um experimento, no qual propunha que moradores do Kansas e Boston entregassem uma carta a uma determinada pessoa, escolhendo um intermediário que julgassem conhecer o destinatário. Apesar de muitas cartas terem sido perdidas, muitas delas chegaram aos seus destinatários, sendo que, em média, o número de pessoas intermediárias foi de 5,2, sugerindo, assim, os *seis graus de separação* que deu origem ao conceito de mundo pequeno (*small-world*), ou seja, algumas redes possuem vértices cujas distâncias entre eles são pequenas.

O que se conhece hoje como redes complexas (*complex networks*), teve início com o trabalho de R. Albert e A.-L. Barabási, com as denominadas redes Livres de Escala (*Scale-Free*) (Albert e Barabási, 2002; Barabási e Albert, 1999). Essas redes têm sido utilizadas em diversas áreas do conhecimento, em especial, nas áreas biológica, financeira e social. Um exemplo da utilização de redes na área biológica é a representação das cadeias alimentares, (figura 3.2), cujos nós representam as espécies e as ligações, as interações do tipo predador-presa. Já na área financeira, tem sido comum o uso das redes para os estudos de crises financeiras, cujos nós representam as instituições financeiras e as ligações os contratos de empréstimos entre as mesmas.

Figura 3.2: Representação de uma cadeia alimentar por meio de uma rede. Cada nó representa um animal na dentro da cadeia e cada ligação a relação entre predador presa. O nó em cor mais escura representa uma presa de um predados cujo nó está em cor mais clara.

Fonte: www.foodwebs.org

Neste trabalho será dado enfoque às redes interbancárias, para tanto, na seção 3.1 serão apresentados os principais conceitos desta área.

3.1 Fundamentos

Formalmente uma rede pode ser definida pelo grafo $G = (V, A)$, onde V representa o conjunto de vértices (ou nós) e A o conjunto de arestas (conexões ou ligações). A *ordem* de G é definida utilizando a cardinalidade de V , ou seja, pelo valor de N que é o número de elementos do conjunto V . Então, diz-se que o grafo G possui ordem N .

Sejam i e $j \in V$ e para $(i, j) \in A$, dizemos que os nós i e j estão conectados (ou são adjacentes). Os grafos podem ser *direcionados*, ou seja, o par (i, j) não é ordenado, desta forma, não importa de qual nó parte a aresta. E de forma semelhante são definidos os grafos *direcionados*, ou seja o par (i, j) é ordenado, implicando que existe um nó de partida i e um nó de chegada j . Um grafo pode ser representado graficamente, o que simplifica, muitas vezes, a resolução de diversos problemas, como por exemplo, o problema das sete pontes resolvido por Euler. No entanto, é usual representar um grafo por meio de uma *matriz de adjacência* $\overleftrightarrow{X}$, onde cada entrada x_{ij} da matriz representa a ligação entre o par (i, j) da seguinte forma: $x_{ij} = 1$ implica o par (i, j) estar conectado, e $x_{ij} = 0$ implica o par (i, j) não estar conectado. As figuras 3.3 e 3.4 representam, respectivamente, exemplos de grafos não direcionados e direcionados, graficamente e matricialmente.

Figura 3.3: Exemplo de representação de um grafo não direcionado.

Figura 3.4: Exemplo de representação de um grafo direcionado.

Existem outras representações possíveis, como por exemplo a *matriz de pesos* $\overleftrightarrow{P}$, muito semelhante à matriz de adjacência, porém atribui-se pesos às ligações, ou seja, quando há ligações entre i e j , $x_{ij} = p$, com $p > 0$. Desta maneira se pode diferenciar as ligações atribuindo intensidades, como por exemplo, em uma rede de empréstimos bancários com três bancos 1, 2 e 3, onde o banco 1 empresta \$200.000,00 para o banco 3 e \$70.000,00 para o banco 2, o banco 2 empresta \$10.000,00 para o banco 1 e o banco 3 empresta \$50.000,00 para o banco 2, a matriz de pesos pode ser representada da seguinte maneira:

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 200 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \end{pmatrix} \times 10^3$$

Quando se trabalha com matrizes esparsas é conveniente usar a representação de uma *matriz de distâncias* $\overleftrightarrow{L}$, definindo a distância entre dois nós i e j como o número de arestas l_{ij} que compõem o menor caminho entre eles. Caso não exista, adota-se a convenção de $l_{ij} = \infty$ e obviamente $l_{ii} = 0$. Como pode ser visto a seguir, o último exemplo foi utilizado para escrever a matriz de distâncias do exemplo da rede interbancária, considerando a inclusão de um quarto banco, que empresta aos bancos 1 e 2 uma certa quantia. Assim:

$$\overleftrightarrow{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & 0 & \infty \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que a distância do banco 4 aos outros bancos pode ser calculada, no entanto o caminho inverso não é permitido, pois trata-se de um grafo direcionado e neste caso não existe um caminho.

Define-se k_i como o *grau* do nó i para o caso não-direcionado, como o número de aresta que esse nó tem. Utilizando a matriz de adjacências é possível calcular o valor de k_i da seguinte maneira:

$$k_i = \sum_{j=1}^N x_{ij} = \sum_{j=1}^N x_{ji}$$

Para o caso direcionado, a fim de definir k_i , se faz necessário definir k_i^{in} e k_i^{out} , respectivamente como o grau de entrada e saída do nó i . Assim, formalmente tem-se:

$$k_i^{in} = \sum_{j=1}^N x_{ji} \text{ e } k_i^{out} = \sum_{j=1}^N x_{ij}$$

O grau k_i do nó i será dado pela soma dos graus de entrada e saída.

$$k_i = k_i^{in} + k_i^{out}$$

Na seção 3.2, será definido o significado da distribuição de graus $P(k)$, bem como suas propriedades.

3.2 Distribuição de graus

Uma caracterização alternativa para as redes é feita mediante o uso da *distribuição de graus* $P(k)$, como a probabilidade de um nó escolhido aleatoriamente ter grau k . É comum

associar a cada rede a sua distribuição de graus. Desta maneira, serão apresentadas as distribuições de grau mais comuns: a distribuição de poisson e a lei de potência (*power law*).

3.2.1 Distribuição de Poisson

Seja X uma variável aleatória discreta tal que

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^k}{k!}, k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad (3.1)$$

então a variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson**, com parâmetro $\alpha > 0$.

Pode-se mostrar que tanto a esperança quanto a variância são iguais a α , ou seja, $E(X) = \alpha$ e $VAR(X) = \alpha$. Para este estudo, será visto que a topologia de *Erdős-Rényi* possui distribuição de grau que segue uma distribuição binomial, e sua expressão pode ser vista a seguir:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}. \quad (3.2)$$

À medida que n cresce, o cálculo de $P(X = k)$ torna-se custoso, porém admitindo a hipótese de que p seja pequeno, isto é, $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$. Então é possível aproximar a distribuição binomial pela distribuição de Poisson. Note que a hipótese de que p seja pequeno, de fato, faz sentido, pois caso contrário, a probabilidade de conexão da rede seria grande. Isso implicaria em um modelo altamente suscetível à propagação de choques, tornando o modelo de contágio pouco explicativo ou mesmo desnecessário.

A seguir será mostrado como é possível obter essa aproximação, primeiramente reescrevendo a distribuição binomial, tem-se

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Admitindo-se que $np = \alpha$, então $p = \alpha/n$ e $1-p = (n-\alpha)/n$, e reescrevendo a expressão 3.3 em termos de α , tem-se

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(\frac{n-\alpha}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \left[\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right]^{n-k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Quando $n \rightarrow \infty$, com $np = \alpha$ constante, os termos da forma $\left(1 - \frac{i}{n}\right)$; para $i = 1, 2, \dots$

se aproximam de 1, quando n tende ao infinito.

Lembrando que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

e fazendo $\frac{1}{x} = -\frac{\alpha}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\alpha x} = e^{-\alpha}$$

Desta maneira, conclui-se que quando $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$, é possível utilizar a distribuição de Poisson, ou seja, pode-se escrever:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^k}{k!}$$

3.2.2 Lei de Potência (Power Law)

Nesta seção será descrito de forma breve o conceito de lei de potência (Newman, 2005).

Figura 3.5: Distribuição empírica de renda de uma população, cuja distribuição segue uma lei de potência.

É comum, quando se estuda algum fenômeno do ponto de vista da estatística, ter o interesse em descobrir quais são as distribuições de probabilidade associada aos fatos estilizados desses modelos. Diversos fenômenos, como por exemplo a distribuição de renda de uma população, não têm distribuição simétrica como a Normal, uma vez que pequena quantidade de pessoas detêm a maior parte dos recursos e uma grande quantidade de pessoas detêm uma pequena porção dos recursos. Quando plotada em um histograma na escala *log-log*, figura 3.5, tem-se a reta $\ln P(x) = -\alpha \ln x + c$, então:

$$P(X = x) = Cx^{-\alpha}, \quad (3.5)$$

onde C é uma constante de normalização. A distribuição na forma (3.5) é conhecida como *lei de potência* (*power law*).

3.3 Modelos de Redes

Nesta seção serão descritos três modelos de redes, que são: o modelo de *Erdős-Rényi*, o modelo Livre de Escala (Scale-Free) de *Barabási e Albert (1999)* e por fim o modelo de rede Interbancária Empírica proposta por *Li et al. (2010)*.

3.3.1 Erdős-Rényi

As redes Erdős-Rényi, figura 3.6, baseiam-se em grafos *completamente aleatórios*, ou seja, dada uma probabilidade p de conexão, os N nós são conectados por M arestas escolhidas dentre $\frac{N(N-1)}{2}$ possíveis no caso *não-direcionado* e no caso *direcionado* $N(N-1)$, ou seja, cada nó possui a mesma probabilidade p de se conectar a outro.

Figura 3.6: Representação da rede aleatória de *Erdős-Rényi*

A descrição anterior sugere que a distribuição de graus desta rede seja uma *binomial*. Embora isso seja verdade, fazendo $N \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$, a distribuição binomial é aproximada pela distribuição de Poisson, como foi mostrado na seção 3.2.1. Quando a probabilidade p cresce, naturalmente a conectividade média da rede também cresce.

A dependência desses parâmetros torna a implementação muito simples mostrando o porquê do seu uso como uma referência ao se estudar redes complexas. A figura 3.7 representa uma rede direcionada com 50 nós.

Figura 3.7: *Representação da Rede Erdős-Rényi com 50 bancos*

Os primeiros modelos na área de risco sistêmico utilizaram esta topologia de rede, entretanto, estudos empíricos sugerem o uso de outras topologias de rede que seguem uma lei de potência; tais redes serão exibidas a seguir.

3.3.2 Livre de escala (Scale-free)

As redes livre de escala estão presentes em diversos contextos, tanto em modelos biológicos, quanto sociais e econômicos. Elas podem ser caracterizadas por meio da relação entre nós e as conexões da seguinte maneira: um número pequeno de nós possui muitas ligações e um número grande de nós possui poucas ligações. Com o uso dessa relação pode ser mostrado que a distribuição de graus segue uma lei de potência (*power law*) (Barabási e Albert, 1999) com expoente geralmente entre 2 e 3. A figura 3.8 representa uma rede com a topologia descrita.

Figura 3.8: *Representação da rede Livre de Escala de A.-L. Barabási.*

Utilizando o modelo de Bollobás *et al.* (2003), é possível controlar os expoentes das distribuições de graus de entrada e saída de uma rede direcionada, isso é feito por meio da variação dos parâmetros descritos a seguir:

Sejam α , β , γ , δ_{in} e δ_{out} parâmetros do modelo, tal que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, onde α e γ são, respectivamente, a probabilidade de criação de um novo nó, de acordo com grau de entrada e de saída, β é a probabilidade de criação de uma conexão entre dois nós, onde um foi escolhido por meio do grau de entrada e o outro de saída, δ_{in} e δ_{out} são os vieses para a escolha, respectivamente, de nós de entrada e de saída.

Os parâmetros acima são relacionados introduzindo novos parâmetros c_1 e c_2 da seguinte maneira:

$$c_1 = \frac{\alpha + \beta}{1 + \delta_{in}(\alpha + \gamma)} \text{ e } c_2 = \frac{\beta + \gamma}{1 + \delta_{out}(\alpha + \gamma)}. \quad (3.6)$$

De acordo com um conjunto de teoremas, nesse mesmo artigo, demonstra-se que os expoentes de entrada e de saída, são

$$X_{in} = 1 + \frac{1}{c_1} \text{ e } X_{out} = 1 + \frac{1}{c_2}. \quad (3.7)$$

Fazendo a variação desses parâmetros, controlamos, desta forma, a inclinação da distribuição de graus de entrada e saída, ou seja, criando diversos tipos de topologias de rede, possibilitando, por exemplo, a investigação da influência de nós muito conectados na rede (*hubs*).

Como [Moussa \(2011\)](#) a escolha dos parâmetros pode ser feita da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} = a \text{ e } \beta = 1 - 2a,$$

dessa maneira, satisfazendo as condições iniciais e permitindo o uso de apenas um parâmetro.

Figura 3.9: Representação da rede Livre de escala com 100 bancos.

A figura 3.9 ilustra uma rede livre de escala gerada pelo algoritmo baseado em [Bollobás et al. \(2003\)](#) com o uso do parâmetro a proposto por [Moussa \(2011\)](#).

3.3.3 Interbancária Empírica

As redes interbancárias do Japão (Soramaki *et al.*, 2007), Áustria (Boss *et al.*, 2004), Reino Unido e Alemanha (Wells, 2004), Itália (Iori *et al.*, 2008) e Brasil (Cajueiro e Tabak, 2008; Moussa, 2011; Santos, 2010) foram estudadas por meio de bases de dados reais.

Figura 3.10: *Topologia da rede interbancária brasileira em Julho 2008.*

Li *et al.* (2010) propôs uma topologia de rede capaz de reproduzir bem essas redes. A figura 3.11 mostra uma representação dessa rede. Este modelo estabelece a categorização de bancos que podem ser agrupados segundo seus tamanhos (patrimônio líquido) ou tipos (bancos comerciais, bancos de investimentos, etc).

As relações de crédito dependem da categoria onde os bancos estão localizados. Bancos de mesma categoria interagem-se por meio de uma relação de confiança (limiar de confiança e vetor confiança), que compara a mínima confiança exigida que cada banco permite para negociação com o quanto o mesmo confia nos demais bancos. Para bancos de categorias diferentes, seleciona-se aleatoriamente uma quantidade de bancos de cada grupo que se interagem através da mesma relação de confiança descrita anteriormente para bancos de mesma categoria, porém o número máximo de negociações permitidas é limitado.

Este modelo mostrou-se capaz de descrever as estruturas de *clusters* presentes nas redes reais.

Figura 3.11: *Rede Interbancária*

Fonte: (Li *et al.*, 2010)

Formalmente, seja l o número de grupos bancários, n_i o número de bancos do tipo i , de modo que $n_1 + n_2 + \dots + n_l = N$. Segue abaixo a regra para o estabelecimento de conexões:

1. Cada banco i possui um vetor confiança w_i tal que estabelece a relação de confiança do banco i com o banco j , para $i \neq j$, w_{ij} segue uma distribuição normal e $w_{ii} = 0$ é um limiar de confiança T_i dentro de um intervalo $[a, b]$
2. Dentro de um mesmo grupo interbancário a relação é feita se $w_{ij} \leq T_i$
3. Para bancos de dois diferentes grupos, seleciona-se r bancos dentro dos dois grupos distintos e posteriormente realizar-se-á o mesmo procedimento do item 2. O número de negociações é limitado para que as relações entre o mesmo grupo sejam preferenciais.

Tal procedimento faz com que exista a formação natural de *clusters*; Assim forma a rede se torna altamente *clusterizada*, como pode ser visto na figura 3.12, que apresenta três *clusters*.

Figura 3.12: Rede Interbancária Empírica simulada com 200 nós e 3 clusters. As diferentes cores representam a formação dos clusters.

Nesta topologia, tanto a distribuição de graus de entrada, quanto a de saída segue uma lei de potência (*power law*), e esse é um dos motivos da sua boa representação em redes interbancárias reais.

Capítulo 4

O Risco Financeiro

Segundo [Jorion \(2006\)](#), o risco pode ser definido como uma medida atrelada à possibilidade de sucesso ou ao fracasso em uma tomada decisão. Em especial no mercado financeiro, essas decisões estão associadas a um ou mais investimentos.

Saber mensurar e administrar riscos é o que define a saúde de qualquer instituição, ou seja, é possível assumir riscos sem que isso signifique estar em perigo. Dentro deste contexto, o risco define limiares para que uma instituição possa projetar seus investimentos de maneira mais segura.

Existem diversos fatores que podem ocasionar perdas financeiras, pode-se dizer que a combinação de dois deles é a principal fonte de risco, que são: a *volatilidade* do retorno dos ativos e a *exposição* de uma carteira de investimento. Apesar das instituições financeiras não terem o controle da volatilidade dos ativos financeiros, elas podem ajustar e administrar as perdas controlando a exposição das carteiras de investimentos a esses riscos. O *Value at Risk* (VaR) é uma metodologia que mensura o efeito combinado das volatilidades e da exposição aos riscos financeiros ([McNeil et al., 2005](#)). Apesar de ter sido originalmente criada como ferramenta para mensurar risco de mercado, hoje já ganha espaço na medida de outros tipos de risco. Devido a sua importância, essa medida será comentada neste capítulo.

4.1 Classificação do Risco

Nesta seção será discutido a classificação dos tipos de risco financeiro, isto é, risco de crédito, mercado, liquidez, operacional e moral. O estudo do *risco sistêmico* será realizado no capítulo 5.

Risco de Crédito

A ideia de crédito implica na existência de uma fonte de recursos financeiros (doador de crédito) e de um receptor de recursos financeiros (tomador de crédito). Ao transferir os recursos financeiros do doador para o tomador de crédito, utilizando uma operação de

crédito, existe a possibilidade de o tomador do crédito não querer ou não poder honrar seu compromisso de pagamento, ficando assim inadimplente (ou em *default*).

Esta modalidade de risco é tida como uma das mais antigas formas existentes de risco de financeiro. Ela atinge de modo especial as instituições especializadas em conceder créditos, como é o caso dos bancos. A concessão de crédito pode ser realizada de diversas maneiras, as formas mais usuais empregadas pelos bancos são: empréstimos, financiamentos, descontos de títulos, adiantamento a depositantes, adiantamento de câmbio, operações de arrendamento mercantil (*leasing*), avais e finanças, etc. Os empréstimos concedidos aos **NINJA** (sigla, em inglês, **N**o **I**ncome, **N**o **J**ob, **n**o **A**ssets), ou seja, clientes sem condições de comprovar renda, trabalho ou propriedades, é a modalidade de crédito com juros mais altos devido ao seu alto risco de inadimplência. Embora todas essas modalidades sejam importantes, principalmente os **NINJA**, pois tiveram um papel crucial no início da crise do mercado imobiliário de 2008, nesse estudo o foco será dado aos empréstimos interbancários. Na tabela 4.1 é apresentado alguns dos principais modelos de risco de crédito e suas características.

Tabela 4.1: Principais modelos de risco de crédito.

Introduzido por	Modelo	Base teórica
JP Morgan	CreditMetrics	Probabilidade de migração do <i>rating</i>
KMV	Merton Asset Value	Inadimplência dependente da estrutura de capital da empresa
Credit Suisse	CreditRisk +	Probabilidade de inadimplência
MCKinsey	Credit Portfolio View	Probabilidade de inadimplência condicionada a variáveis econômicas

A *perda esperada* em uma transação de crédito é mensurada da seguinte maneira:

$$\text{Perda Esperada} = EAD \times PD \times (1 - LGD), \quad (4.1)$$

onde EAD é o valor de exposição financeira no momento da inadimplência (*Exposure at Default*), PD é a probabilidade de inadimplência (*Probability of Default*) e $(1 - LGD)$ é a recuperação financeira após a inadimplência, ou seja, o complementar do que se perde na inadimplência (*Loss Given Default*).

A grande dificuldade de modelar o risco de crédito é mensurar a probabilidade de inadimplência PD e a perda não recuperável LGD .

Utilizando uma base histórica de operações de crédito de uma contraparte (tomador de crédito) e uma classificação de risco (ratings) pode se construir uma matriz com a frequência de transição de ratings e inferir as probabilidade de *default*.

Tabela 4.2: Matriz de transição de ratings segundo o modelo Credit Metrics.

Rating inicial	Rating por ano%							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.65	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.03	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	1.12	0.18
BB	0.02	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

O classificação de *ratings* em geral é realizada por agências como *Moody's* ou *Standard & Poor's*.

Risco de Mercado

O risco de mercado pode ser entendido como o risco da perda do valor de um ativo ou passivo. O seu valor de mercado pode variar de acordo com os diferentes tipos de instrumentos financeiros, que estão atrelados a diversos índices financeiros que sofrem mudanças ou a notícias que podem abalar rapidamente o mercado.

Uma carteira de investimentos deve ser composta por diferentes tipos de investimentos, desta maneira, as perdas são reduzidas com a diversificação dos ativos. Administrar uma carteira significa saber precificá-la corretamente e mensurar o seu risco.

Risco de Liquidez

O risco de liquidez pode ser definido como o risco de uma posição financeira perder seu valor, caso a mesma seja resgatada antes do seu prazo de vencimento. Isso pode acontecer mediante à venda de um ativo feita repentinamente, devido ao “descasamento” entre os seus pagamentos e recebimentos.

Ativos mais líquidos, em geral, possuem menor retorno financeiro. Por esse motivo, os investimentos que são menos líquidos são mais arriscados.

A falta de liquidez pode causar o fracasso de uma instituição, mesmo quando a mesma é tecnicamente solvente, ou seja, adimplente.

Risco Operacional

O risco de perdas que resulta da inadequação ou deficiência de processos internos, pessoas e sistemas, ou de eventos externos, associado a problemas de controle de uma

instituição. Isso inclui as fraudes, falhas de segurança, efeitos de regulação, ou desastres naturais.

É possível incluir nesta classificação o risco legal, que surge quando os contratos de uma instituição não podem ser legalmente amparados por falta de representatividade ou autoridade por parte de um negociador, por documentação insuficiente, insolvência ou ilegalidade de uma transação.

Na tabela 4.3 são mostrados em detalhes os fatores que, segundo o "British Bankers' Association", pode-se classificar o risco operacional nas seguintes categorias: risco de pessoas, risco de processo, o risco do sistema e risco externo. Entre estes está incluso o risco do modelo, que se dá devido ao uso de modelos de precificação de ativos e mensuração de risco de forma geral. Este é um risco interno que combina a falta de conhecimento nos instrumentos financeiros e falhas nos sistemas informatizados, como a programação de computadores.

Tabela 4.3: *Classificação do Risco Operacional*

Riscos Internos		
Pessoas	Processos	Sistema
Fraudes	Erros Contábeis	Base de dados
Ausências de funcionários	Mensuração do risco	Erros de programação
Perdas de Funcionários	Precificação de ativos	Capacidade do sistema
Leis trabalhistas	Erros em relatórios	Compatibilidade entre sistemas
Saúde e segurança	Erros em Pagamentos	Violação de segurança
Falta de conhecimentos	Erros de Transação	Falhas no sistema

Riscos Externos	
Externo	Físico
Risco Legal	Incêndio
Lavagem de dinheiro	Desastres naturais
Terceirização	Terrorismo
Político	Roubos
Taxas	
Regulação	

Como esse risco varia de acordo com o volume de negócios, mercado de atuação e qualidade dos recursos da instituição, a sua definição é frequentemente adaptada a cada projeto de gestão de risco e a cada instituição.

Risco Moral

O risco moral pode ser entendido como a possibilidade de um agente mudar seu comportamento durante uma determinada transação financeira. A mudança desse comportamento pode afetar as relações contratuais, definindo assim, novos ajustes aos contratos financeiros. Contratar um seguro de carro e por esse motivo agir de maneira descuidada, aumenta as chances de furto ou roubo. Se outros indivíduos tomarem a mesma atitude, isso implicará no aumento do preço cobrado pelas companhias de seguro.

4.2 Value at Risk

O *Value at risk*, *Valor em Risco* ou simplesmente *VaR*, é uma medida associada a um determinado nível de confiança para representar a pior perda financeira esperada, ou seja, O risco é representado por um valor em unidades monetárias.

Essa ferramenta de mensuração de risco se tornou amplamente utilizada por administradores de risco de instituições financeiras e não financeiras, principalmente após os desastres financeiros do início da década de 90, quando diversas instituições financeiras americanas amargaram severas perdas em decorrência de estimativa e gerenciamento de riscos ineficientes (Jorion, 2006).

O VaR_p corresponde ao p -quantil associado a um nível de confiança $p \in (0, 1)$ e é definido como

$$VaR_p = \inf\{x \in (-\infty, \infty) : F_X(x) \geq p\} = F_X^{-1}(p), \quad (4.2)$$

onde F_X é a distribuição de probabilidade das perdas associada à variável aleatória X .

Figura 4.1: Ilustração do cálculo do *VaR*.

Embora a definição de *VaR* possa ser associada a qualquer distribuição de perdas, seu uso é abundantemente na mensuração de risco de carteiras de investimentos. Na prática se utiliza a série de retornos da carteira de investimentos, ao invés da série de preços para

o calculo do risco. O retorno R_t dos preços P de uma carteira é definido como

$$R_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right), \quad (4.3)$$

ou seja, o retorno é dado pelo logaritmo do preço no instante t , pelo preço no instante $t - 1$. Resumidamente, o algoritmo de cálculo do VaR de uma carteira de investimentos é dado por:

- Marcar a mercado a carteira, isto é, precificar os ativos e mensurar o valor da exposição ao risco.
- Obter a distribuição dos retornos.
- Definir o nível de confiança.
- Encontrar o quantil, ou seja, a pior perda esperada (VaR).

Existem diversas formas de estimar e modelar a distribuição de probabilidade do retorno dos ativos da carteira de investimentos: pode-se utilizar distribuições de probabilidade paramétricas, como a normal, ou utilizar o histograma da distribuição empírica, ou simular os preços artificialmente por meio de simulações de *Monte Carlo*. É possível classificar as metodologias de cálculo de VaR em dois tipos: a paramétrica e a não paramétrica.

Tabela 4.4: *Resumo das metodologias de cálculo do VaR .*

	Paramétrica	Não-Paramétrica	
Metodologia	Delta-Normal	Simulação Histórica	Simulação de Monte Carlo
Caracterização da distribuição	Média, Variância, Momentos superiores	Dados Reais	Dados Artificiais

Nas próximas seções serão apresentados os modelos de cálculo de VaR delta-normal, por simulação histórica e por simulação de *Monte Carlo*, tabela 4.4.

4.2.1 Modelo por simulação histórica

Neste modelo, utiliza-se o histograma da série real obtida por meio dos retornos de uma carteira de investimentos e, em seguida, determina-se o VaR calculando o quantil associado ao nível de confiança p , por esse motivo é a medida mais simples de ser calculada.

Figura 4.2: VaR por simulação histórica calculado para nível de confiança de 99%.

Fonte: Adaptado de <http://financetrainingcourse.com>

Esta modelagem do VaR se baseia no fato de que o futuro tende a repetir o comportamento passado. Dessa maneira, não é assumida a possibilidade de mudanças bruscas no cenário econômico.

Nessa modelagem não é assumido nenhum tipo de distribuição para os retornos e nem a independência dos mesmos.

4.2.2 Modelo Paramétrico

Os modelos de *VaR* paramétrico partem da premissa de que a série de retornos segue alguma distribuição de probabilidade (usualmente, a distribuição normal). Partindo desta premissa, os parâmetros da distribuição são estimados a partir das características da série (usualmente, desvio padrão da distribuição normal como a volatilidade dos retornos e média, como a média dos retornos da série utilizada). Com essas características da distribuição, basta obter o quantil relacionado com o nível de confiança do *VaR* e diretamente da distribuição obter o valor do *VaR*.

Da equação 4.3 sabe-se que $VaR_p = F_X^{-1}(p)$, ou seja, $F_X(VaR_p) = p$. Utilizando a definição de função distribuição de uma variável aleatória X e escrevendo $V^* = VaR_p$

$$F_X(V^*) = P(X \leq V^*) = \int_{-\infty}^{V^*} f_X(x) dx = p, \quad (4.4)$$

onde f_X é a função densidade da variável X .

Assumindo a normalidade dos retornos, ou seja, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$F_X(V^*) = P(X \leq V^*) = \int_{-\infty}^{V^*} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = p \quad (4.5)$$

Considerando $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ a *distribuição normal padrão*, cuja função distribuição é usualmente representada por $\Phi(z)$, então

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (4.6)$$

Aplicando $\frac{V^* - \mu}{\sigma}$ na distribuição normal padrão,

$$\Phi\left(\frac{V^* - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{V^* - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = p. \quad (4.7)$$

Tomando $\alpha = \frac{V^* - \mu}{\sigma}$, obtém-se o VaR_p , ou seja,

$$VaR_p = \sigma\alpha + \mu, \quad (4.8)$$

onde α é o quantil de uma distribuição normal associado ao nível de confiança p .

4.2.3 Modelo por simulação de Monte Carlo

O modelo de VaR por simulação de *Monte Carlo* é uma maneira alternativa para o cálculo do risco, pois não assume, a priori, nenhum tipo de distribuição paramétrica para a série de retornos financeiros, esta é obtida por meio de uma simulação computacional. De acordo com Ross (2006), define-se *Movimento Browniano* da seguinte maneira.

Definição 4.2.1 (Movimento Browniano). *Um Processo de Wiener ou Movimento Browniano é um conjunto de variáveis aleatórias $\{X(t), t \geq 0\}$ que satisfazem as seguintes condições:*

1. $X(0) = 0$;
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;
3. para todo $t > 0$, $X(t)$ é normalmente distribuído com média 0 e variância $\sigma^2 t$.

De maneira semelhante, define-se o *Movimento Browniano Geométrico* da seguinte maneira:

Definição 4.2.2 (Movimento Browniano Geométrico). *Se $\{Y(t), t \geq 0\}$ é Movimento Browniano com média μ e variância σ^2 , então o processo $\{X(t), t \geq 0\}$ definido por*

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

é dito ser Movimento Browniano Geométrico.

Equivalentemente, diz-se que se $X(t)$ satisfaz a Equação Diferencial Estocástica descrita a seguir:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dY(t), \quad (4.9)$$

tal que $Y(t)$ é um Movimento Browniano com média μ e variância σ^2 . Isso significa que, resolvendo a equação 4.10, obtém-se o processo segundo a definição 4.2.2.

Assumindo que o valor de um ativo (ou passivo) $S(t)$ no tempo t segue o *Movimento Browniano Geométrico* e adaptando a equação 4.10 em termos de novas variáveis, comumente se escreve a expressão para o preço de um ativo (ou passivo) no tempo t :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (4.10)$$

onde dt é a parcela determinística e $dW(t)$ a parcela estocástica.

Utilizando esse processo estocástico, determina-se várias trajetórias até um tempo T estabelecido. Por meio do conjunto formado pelos preços obtidos pelas trajetórias, obtém-se a distribuição dos preços, figura 4.3.

Figura 4.3: Representação da construção da distribuição dos preços obtidas por meio de trajetórias aleatórias.

Depois da formação dos preços, a distribuição dos retornos é obtida. Em seguida, calcula-se o VaR_p de acordo com o nível de confiança p fixado.

Resumidamente o algoritmo de cálculo do VaR por simulação de *Monte Carlo* é dado por:

1. Obter distribuição de preços via *Movimento Browniano Geométrico*.
2. Obter a distribuição dos retornos.
3. Escolher nível de confiança p .
4. Calcular o VaR_p utilizando o p -quantil da distribuição dos retornos.

Capítulo 5

Risco Sistêmico

As quebras e falências fazem parte da dinâmica natural da economia e podem ser encaradas como uma forma de disciplinar o mercado e eliminar empresas e bancos mal geridos e insolventes. Contudo, a insolvência, que é a inadimplência, pode, algumas vezes, atingir instituições saudáveis por meio de um *efeito de contágio*, isto é, *efeito dominó*.

O elevado grau de comprometimento entre as instituições por meio de contratos favorece o aumento do chamado *risco sistêmico*. A incapacidade de um ou mais bancos honrarem seus compromissos gera uma reação em cadeia, propagando-se como uma avalanche por todo **Sistema Financeiro**, podendo atingir tanto as instituições insolventes (ou em *default*), quanto às que eram saudáveis antes de sofrerem o impacto de um *choque inicial*.

Em resumo, há dois elementos básicos que compõem o risco sistêmico: o choque inicial e o mecanismo de propagação (Nier *et al.*, 2007) ou contágio. O choque inicial (*initial shock*), pode ser advindo de fraudes (*risco operacional*), uma má gerência financeira e/ou mudanças abruptas no mercado que podem causar grandes desvalorizações de papéis (*risco de mercado*). O mecanismo de propagação é potencializado pelo tamanho da exposição financeira e perda de confiança dos agentes (*risco de crédito*), e a incapacidade do resgate de investimentos feito em ativos pouco líquidos (*risco de liquidez*). É desta maneira que o sistema, que se tornou instável após o choque, encontra um novo ponto de equilíbrio (Datz, 2002; Haldane, 2010).

5.1 Crises Financeiras

Segundo Mishkin (2009), as crises financeiras podem ser definidas como um processo de perdas de recursos do sistema financeiro causadas por um ou mais choques dados a ele. De acordo com Haldane e May (2011), os choques financeiros são oriundos de diversas fontes, mas o principal motivo é atribuído aos derivativos, em que os riscos financeiros, em geral, são maiores.

Após receber um choque, os patrimônios líquidos das instituições são deteriorados. Isso pode torná-las inadimplentes, deixando-as incapazes de honrar seus compromissos

financeiros. Com isso, ocorre um aumento da *assimetria de informação*, ou seja, o conhecimento privilegiado de alguns investidores sobre a situação dessas instituições faz com que aconteça a chamada *seleção adversa*, isto é, a tomada de decisões equivocadas e/ou precipitadas desses investidores, que provocam a desvalorização dos ativos, aumentando a incerteza (risco moral) sobre a situação financeira do sistema, fazendo com que outros investidores saiam do mercado.

Com a saída de investidores, os preços dos ativos são desvalorizados devido à lei da oferta e da demanda. Essa desvalorização provoca um novo choque ao sistema, e portanto de forma cíclica, o processo é recommençado até que o sistema encontre um novo equilíbrio (Datz, 2002).

Dentro deste processo também estão os intermediários financeiros, que são os bancos. Eles têm papel indispensável no sistema financeiro, pois os mesmo movimentam os recursos financeiros de investidores dispostos a “poupar”, disponibilizando-os a quem precisa, em forma de empréstimo bancário, figura 5.1.

Figura 5.1: Representação do Sistema Financeiro

Fonte: Adaptado de market.orkitra.com

Devido ao seu papel tão importante dentro do sistema, os bancos sofrem sérias consequências durante uma crise. Eles estão altamente conectados por meio das relações de crédito, portanto, quando recebem um choque, os efeitos de *assimetria de informação*, *seleção adversa* e *risco moral* são amplificados. Como intermediários financeiro, os bancos podem provocar muitos danos ao sistema, por isso, devem receber maior atenção.

É comum que após os prejuízos iniciais de um choque, o medo de outras instituições também serem afetadas aumente, mesmo sendo saudáveis. Caso isso aconteça todo sistema sofrerá perdas. O chamado *contágio financeiro* atinge diversas instituições e é o principal responsável pela crise. Quando o sistema está abalado, há uma redução dos empréstimos bancários e logo o sistema se torna incapaz de canalizar os investimentos, tornando-se

ineficiente. Como consequência dessa ineficiência, a oferta de fundos disponíveis para os mutuários diminui, o que resulta em taxas de juros mais elevadas, afetando todo o mercado de crédito. A figura 5.2 resume as etapas de uma crise financeira.

Figura 5.2: *Resumo do processo de formação de uma crise financeira*

Fonte: Adaptado de Mishkin (2009)

Para que as crises não prejudiquem toda a atividade econômica, os bancos centrais assumem o papel fundamental de reguladores financeiros. A regulação é feita de acordo com as regras estabelecidas por meio do *Acordo de Basileia*. Os acordos de Basileia II e III são regras para que os bancos centrais regulem o sistema interbancário de forma segura. Estas regras definem limiares para os níveis de risco praticados pelas instituições; elas também sugerem metodologias de mensuração de risco.

Dentro do acordo de Basileia II foram estabelecidos três *pilares*, **Requerimentos Mínimos de Capital**, **Supervisão Bancária** e **Disciplina de Mercado**. O novo acordo, ou seja, a *Basileia III*, fará diversos ajustes a esses pilares, figura 5.3.

Figura 5.3: Comparação entre os Acordos de Basileia II e III

Fonte: Adaptado de moodysanalytics.com

A Basileia III manteve a definição de capital aprimorando os requerimentos para os riscos de crédito, de mercado e operacional. Foram também introduzidos os *buffers* de capital, exigências quantitativas de liquidez e limites de alavancagem, e ainda a alocação de capital suplementar para instituições sistemicamente importantes, isto é, as mais conectadas (BIS, 2010).

5.2 Modelo de contágio

O modelo leva em consideração uma estrutura de rede escolhida que é considerada um sistema interbancário. Desta forma, cada nó foi caracterizado como um banco com uma estrutura de balanço patrimonial Haldane e May (2011); Nier *et al.* (2007) e cada *link* como um empréstimo interbancário, isto definirá a capacidade financeira de cada banco diante de uma crise. Depois de definida essa estrutura financeira, cada banco é considerado um agente dentro do sistema, com características diferentes que dependem fortemente da conectividade de cada um. A conectividade de cada banco define, dentro da rede, a dinâmica de propagação da crise, esta dependerá do choque inicial e do mecanismo de propagação, ambos serão explicados futuramente.

É assumida a hipótese de não existência de liquidez, neste caso, o sistema pode ser considerado estado de estresse, e como consequência disso, a única maneira de evitar a insolvência é utilizando os recursos disponíveis em caixa.

A seguir, será descrito o processo de construção do sistema interbancário, e posteriormente o mecanismo de propagação de crise, ou seja, o contágio financeiro.

5.2.1 Construção do Sistema Interbancário

Como em Nier *et al.* (2007) e Haldane e May (2011) foi criado um sistema interbancário baseado em estrutura de rede direcionada com N nós, onde cada banco é re-

presentado por um nó e cada empréstimo uma aresta (*link*) na rede. Cada nó é descrito através da estrutura contábil de Balanço Patrimonial (*Balance Sheet*), figura 5.4

PASSIVOS	ATIVOS
c_i Patrimônio líquido	e_i Ativos Externos
d_i Depósitos	l_i Empréstimos Concedidos
b_i Empréstimos Recebidos	

Figura 5.4: Balanço patrimonial de um banco

Fonte: Haldane e May (2011); Nier *et al.* (2007)

A construção do Balanço Patrimonial é feita da seguinte maneira: seja $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ uma rede interbancária onde $\mathcal{V}$ representa o conjunto das instituições bancárias e $\mathcal{A}$ o conjunto das ligações entre essas instituições. Para cada banco i pertencente a $\mathcal{V}$, tem-se no lado do passivo p_i : os d_i (depósitos) e b_i (empréstimos recebidos), no lado do ativo a_i , tem-se: e_i (ativos externos) e l_i (ativos internos), este último representa os empréstimos concedidos e a diferença entre os ativos e passivos é c_i (patrimônio líquido).

Para que a estrutura contábil seja construída, se faz necessário que a condição $c_i = a_i - p_i$, seja estabelecida. Para tanto, esta etapa será realizada em alguns passos: seja A o total de ativos do sistema, β a porcentagem de ativos externos E e θ a porcentagem de ativos internos L , então é possível escrever $E = \beta A$ e $L = \theta A$, onde $\beta = 1 - \theta$ e $A = E + L$, como consequência da definição.

Seja Z o total de *links* da rede, então definimos $w = L/Z$, como o peso de cada empréstimo de modo que dado um banco i , tem-se $b_i = wk_i^{in}$ e $l_i = wk_i^{out}$, onde k_i^{in} e k_i^{out} são respectivamente os *graus de entrada e saída* de cada banco, em outras palavras, a quantidade de empréstimos recebidos e concedidos são definidas através da quantidade de *links* que cada banco possui.

Para se obter e_i , utiliza-se dois passos, primeiro calculando $\hat{e}_i$ e $\tilde{e}_i$ como a seguir: se $b_i - l_i \geq 0$, então $\hat{e}_i = b_i - l_i$, caso contrário $\hat{e}_i = 0$ e $\tilde{e}_i = (E - \sum \hat{e}_i)/N$, logo $e_i = \hat{e}_i + \tilde{e}_i$.

De forma direta obtém-se a_i , pois $a_i = e_i + l_i$. No lado dos passivos tem-se $c_i = \gamma a_i$, onde γ é uma porcentagem dos ativos. Desta forma, obtém-se o patrimônio líquido, então, para obter, d_i — os depósitos — basta fechar o balanço patrimonial, fazendo: $d_i = a_i - c_i - b_i$.

5.2.2 Alavancagem do sistema

De acordo com [Gitman \(2009\)](#), *Alavancagem Financeira* é o termo geral para qualquer técnica aplicada para multiplicar a rentabilidade através de endividamento. O grau de alavancagem pode ser entendido da seguinte maneira: suponha que seu valor seja 2, isso significa a instituição investiu o dobro do seu próprio capital. Quando a alavancagem é maior do que 1, significa dizer que a instituição financeira está alavancada.

A alavancagem aumenta a exposição financeira e consequentemente os riscos de *default* (insolvência ou inadimplência), portanto, exige um olhar mais cuidadoso dos gestores de risco das instituições em geral.

Embora seja arriscado, as operações de alavancagem estão presentes em diversos contextos, como por exemplo no mercado de derivativos, que são ativos cujo preço deriva de outro ativo. Na venda de uma opção descoberta, por exemplo, o investidor não detém o ativo negociado. Mesmo com baixos valores de negociação, uma alta flutuação no preço do ativo vinculado à opção pode gerar altos prejuízos ao investidor.

Quando um banco faz um empréstimo, ele toma dinheiro de terceiros e empresta à outra pessoa, física ou jurídica. Esta operação também alavanca o banco, ficando em prejuízo caso a contraparte não honre seus compromissos.

Em um sistema interbancário os bancos emprestam dinheiro uns aos outros, então, de maneira análoga, define-se ρ como *o grau de alavancagem do sistema*, podendo ser interpretado como *o nível de endividamento do sistema*.

Utilizando a notação apresentada na seção 5.2.1, é possível escrever:

$$\rho = \frac{L}{\sum_i c_i} = \frac{\theta A}{\sum_i \gamma a_i} = \frac{\theta A}{\gamma \sum_i a_i} = \frac{\theta A}{\gamma A} = \frac{\theta}{\gamma}, \quad (5.1)$$

ou seja, ρ é calculado utilizando dois parâmetros, θ e γ . Como $\rho > 0$, pode-se estudar dois casos, quando $0 < \rho \leq 1$ e $\rho > 1$, respectivamente, *sistema não alavancado* e *sistema alavancado*.

5.2.3 Propagação do choque

As consequências da propagação do choque no sistema interbancário serão estudadas utilizando as topologias de rede (Erdős-Rényi, Livre de escala e Interbancária Empírica).

A probabilidade inicial de *default* p_{d_i} é utilizada para identificar o conjunto de m bancos, inicialmente sujeitos a estarem inadimplentes no sistema, o qual denotamos por $\mathcal{B}$. Cada banco $i \in \mathcal{B}$ recebe um choque inicial de magnitude s_i . Na tentativa de honrar suas dívidas, desconta-se o choque do seu patrimônio líquido c_i . O saldo restante será igual a $s_i - c_i$. Caso essa quantia seja insuficiente, o repasse do saldo devedor é feito aos seus k_i^{in} parceiros proporcionalmente. Isso equivale a dizer que os credores de i deixaram de receber o valor repassado.

Figura 5.5: Ilustração do processo de contágio financeiro. No primeiro estágio, o banco inadimplente — em vermelho — afeta seus três credores. No segundo estágio, apenas um dos credores afetados no primeiro estágio é contagiado, e portanto fica inadimplente. No terceiro estágio, um dos bancos atingidos nos estágios anteriores é atingido novamente, desta vez, se tornando inadimplente; um dos bancos sequer é atingido.

De forma sistemática: se um banco i com k_i^{in} credores recebe um choque de magnitude s_i , o mesmo estará em *default* caso $s_i > c_i$, então cada banco credor j de i receberá um choque $s_j = [(s_i - c_i)/k_i^{in}]$. Se $s_i - c_i > b_i$ significa que b_i não é suficiente para sanar a dívida, então o banco i estará inadimplente (ou em *default*). Ele sai do sistema bancário e não há novos entrantes. Vale ressaltar que, no caso de inadimplência, os credores saem lesados. Além disso, cada credor irá propagar o choque da mesma forma com os seus respectivos credores, figura 5.5. O processo termina quando todo o choque for absorvido pelo sistema, ou seja, quando todos os bancos não puderem repassar a dívida.

5.3 Medidas de Risco Sistemico

Sabe-se que o estudo do *Risco Sistemico* é de fato importante para a criação de medidas de risco que auxiliem nas tomadas de decisões em uma situação de crise. Assim, os danos causados por uma crise poderão ser evitados ou ao menos, amenizados.

Nesta seção serão apresentadas três medidas que poderão auxiliar nestas tomadas de decisões. A primeira delas é o *Indicador de Risco Sistemico* que mostra se há a tendência de risco de acordo com o grau de conectividade de uma instituição. A segunda medida é o chamado *Índice de Risco Sistemico*, este indica a média entre os impactos de inadimplência dado que o banco ficou inadimplente. E por fim, uma medida denominada *VaR Sistemico*, que também foi obtida por meio da distribuição de impacto da inadimplência.

5.3.1 Indicador de Risco Sistêmico

Como foi dito, cada sistema interbancário possui sua topologia de rede, e a mesma possui distribuição de graus de entrada e saída. Durante um choque, o sistema pode sofrer perdas, e estas provocam ou não a inadimplência das instituições. Desta maneira, a contabilização do número de bancos inadimplentes indica a perda que o sistema sofreu. A distribuição das perdas pode ser expressa por meio de um gráfico que mostra a frequência com que os bancos ficaram inadimplentes, dada a sua conectividade.

Em geral, a quantidade de bancos que possuem grau de saída — k^{out} — diferentes, também são diferentes, sugerindo que a distribuição das perdas seja sempre comparada à distribuição de graus da rede. Sendo assim, bancos com um determinado grau de saída, podem ter maior frequência de inadimplência simplesmente por estarem em maior quantidade no sistema, figura 5.6.

Figura 5.6: Distribuições de grau de saída, em vermelho e de probabilidade de bancos inadimplentes, em azul.

Nem sempre a comparação visual entre as distribuições deixa claro a diferença entre as duas distribuições. Um exemplo disso é o caso das topologias de rede, cujas distribuições seguem uma lei de potência, figura 5.7. Quando isso acontece, o gráfico deixa dúvidas, prejudicando a análise dos dados.

Figura 5.7: Distribuições de grau de saída, em vermelho e de probabilidade de bancos inadimplentes, em azul.

Uma maneira de evitar a má compreensão é criando um novo gráfico que mostra a diferença entre os valores de cada ponto das distribuições. Esta é uma maneira de verificar a “distância” entre as distribuições de inadimplência e graus. No entanto, em muitos casos, essa medida pode ser negativa, pois para um determinado valor de grau de saída as respectivas frequência de bancos inadimplentes ($freq_{default}$) e frequência de graus ($freq_{degree}$), a diferença $freq_{default} - freq_{degree} < 0$, se $freq_{default} < freq_{degree}$.

Segundo (Lima, 2003), todo intervalo (a, b) , com $a > b$, da reta é homeomorfo ao intervalo $(0, 1)$, ou seja, existe uma aplicação contínua do intervalo (a, b) , cuja inversa também é contínua, isso significa que é possível representar a mesma medida feita dentro de um intervalo (a, b) , em termos do intervalo $(0, 1)$. Para isso, basta achar uma função $f : (a, b) \rightarrow (0, 1)$, que seja bijetora. Tome $f : (a, b) \rightarrow (0, 1)$, tal que: $f(t) = \frac{t - a}{b - a}$. Tal função é bijetora e leva de fato (a, b) em $(0, 1)$. Como consequência da bijeção o ponto médio, $\frac{b-a}{2}$, do intervalo (a, b) é levado em $\frac{1}{2}$, o que facilitará a compreensão dos resultados.

Figura 5.8: Homeorfismo entre os intervalos (a, b) e $(0, 1)$ da reta.

Para mostrar se há ou não tendência de inadimplência de acordo com o grau de saída,

far-se-à a divisão do gráfico em quadrantes. Para isso, traça-se uma reta na cor vermelha paralela ao eixo das abscissas passando por $\frac{1}{2}$ e uma outra reta na cor verde paralela ao eixo das ordenadas passando pelo grau de saída médio $\langle k^{out} \rangle$.

Os círculos em azul indicam a proporção do número de bancos relativamente à distribuição de graus para um determinado valor de grau de saída. Assim, é possível notar a diferença entre a proporção de bancos de acordo com a topologia de rede estudada.

Figura 5.9: Representação do Indicador de Risco Sistemico. No caso (a) os bancos mais conectados possuem maior risco de inadimplência, no caso (b) os bancos menos conectados possuem maior risco de inadimplência. O tamanho dos círculos em azul indica a proporção de bancos com o respectivo grau de saída.

Se os círculos se concentrarem entre o 1° e 3° quadrantes significa que bancos *mais conectados* possuem *maior risco* de inadimplência. Semelhantemente, se os círculos se concentrarem entre o 2° e 4° quadrantes significa que bancos *menos conectados* possuem *maior risco* de inadimplência.

5.3.2 Índice de Risco Sistemico

Adaptando a medida proposta por Santos (2010) ao modelo da seção 5.2, pode-se obter as expressões para o *nível de colchão de capital*, *Impacto da Inadimplência* de uma instituição financeira.

Considerando a estrutura de balanço patrimonial definida na seção 5.2.1, o colchão de capital de uma instituição i é definido como:

$$B_i = c_i - \delta \times l_i, \quad (5.2)$$

onde c_i corresponde ao patrimônio líquido do banco i , δ ao mínimo requerido Índice de Basileia, que será igual a 0.11 nas simulações e l_i aos empréstimos concedidos pela instituição i . Por meio desta, define-se o *Impacto de Inadimplência* de uma instituição j da seguinte maneira:

$$DI_j = \sum_{\substack{i \in \mathcal{V}, \\ (i,j) \in \mathcal{A}}} \left\{ \frac{B_i^{(0)} - \max(B_i^{(\omega^*)}, 0)}{B_i^{(0)}} \right\}, \quad (5.3)$$

onde $B_i^{(0)}$ indica o nível de colchão de capital no estado inicial, $B_i^{(\omega^*)}$ indica o nível de colchão de capital no estado de equilíbrio, ou seja, quando não há mais perdas nos estados subsequentes.

Para calcular o *Índice de Risco Sistemico* de uma instituição i basta considerar a média dos impactos de inadimplência provocados por esta instituição, segundo os diferentes níveis de probabilidade inicial de *default*, pd_i , ou seja,

$$SI_i = \mathbb{E} \left[DI_i^{pd_i} \mid B_i - s_i < 0 \right], \quad (5.4)$$

onde s_i representa o choque recebido pela instituição i .

5.3.3 VaR Sistemico

O *VaR* é uma medida de risco que pode ser interpretada como a pior perda esperada dentro de uma janela de tempo, para um determinado nível de confiança escolhido. Para isso, faz-se necessário o uso da distribuição das perdas. A equação 5.3 indica o impacto que cada instituição provocaria no sistema caso a mesma sofresse um choque financeiro.

Por meio dos valores de DI de cada instituição, constrói-se a distribuição das perdas do sistema. Posteriormente, calcula-se o VaR_p obtendo o quantil da distribuição de acordo com o nível de confiança p .

Capítulo 6

Resultados

Neste capítulo serão discutidos os resultados obtidos por meio das simulações computacionais implementadas em *Python*, utilizando o pacote *NetworkX*. Foram utilizados, como parâmetro, os valores 100, 200, 500 para a quantidade de bancos dentro das três diferentes topologias de rede, a *Erdős-Rényi* com probabilidade $p = 0.4$ de conexão, *Interbancária Empírica*, inicialmente com três *clusters* e a *Livre de Escala*, com expoente $\alpha = 2.4$.

Foram estudados diversos casos, todos eles considerando a alavancagem ρ definida na seção anterior. Caso o valor de ρ seja menor ou igual a 1, ou seja, (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1), o sistema é dito ser *não alavancado*. Caso o valor de ρ seja maior do que 1, ou seja, (2, 4, 6, 8), o sistema é dito ser *alavancado*.

Os valores escolhidos para a probabilidade inicial de *default*, pd_i , são iguais a 0.05 e 0.1, isto é, inicialmente 5% ou 10% dos bancos recebem um choque financeiro.

6.1 Muito Interconectado para falhar

Durante muito tempo se pensava que as maiores instituições financeiras, aquelas com maior patrimônio líquido, causavam maiores danos ao sistema. No entanto, a crise de 2008 evidenciou que, na verdade as instituições mais perigosas são aquelas mais interconectadas, pois o alto grau de conectividade dessas instituições aumenta o chamado risco sistêmico.

O modelo de contágio aqui proposto foi capaz de reproduzir esse fato, conforme figura 6.1. Nesta figura exibimos o Indicador de Risco Sistêmico como função da conectividade de saída para as três topologias em estudo. A conectividade de saída foi normalizada para assumir valores entre 0 e 1. Cada ponto da figura 6.1 representa o valor médio do Indicador sobre 100 realizações. Na figura 6.1(a). Essa figura permite fazer uma avaliação visual do risco relativo de um banco entrar em *default* com respeito a sua conectividade. Quando os pontos estão no quadrante três significa que o risco relativo a conectividade é baixo. Assim que os pontos entram na região do primeiro quadrante identificamos as instituições mais suscetíveis ao *default*. O maior valor do indicador de risco sistêmico no

primeiro quadrante corresponde a conectividade que oferece maior risco. Comparando as três topologias percebemos que a conectividade que maximiza o risco não é a conectividade máxima. A rede aleatória apresenta o maior risco sistêmico seguido pela rede interbancária e depois a livre de escala. A rede livre de escala apresenta mais número de nós na região de baixo risco, seguido pela rede interbancária e a rede *Erdős-Rényi* que apresenta uma partição mais equânime.

(a) Erdős-Rényi

(b) Interbancária

(c) Livre de Escala

Figura 6.1: Os tamanhos dos círculos na cor azul mostram a proporção dos bancos com grau de saída k^{out} . A reta verde indica o grau médio de cada topologia de rede (a) Erdős-Rényi, (b) Interbancária e (c) Livre de escala e a reta vermelha indica a igualdade entre as distribuições de grau e de default, ou seja, a concentração de círculos à direita da reta verde, acima da reta vermelha (1º quadrante), à esquerda da reta verde e abaixo da reta vermelha (3º quadrante), indicam que bancos com grau de saída maior que a média, possuem maior risco dentro do sistema.

No trabalho de Santos (2010) foi encontrado evidências que apontam para conectividade é um indicado do nível de risco. Observa-se na figura 6.1 que de fato a conectividade está associada ao risco. Contudo, a topologia relativiza a conectividade mínima para os bancos com maior probabilidade de *default*. Devido à presença de aglomerados muito

grandes nas redes livre de escala e interbancária a conectividade relativa para o risco de *default* é baixa.

Embora as distribuições de graus sejam diferentes, a medida feita pelo *indicador de risco sistêmico* é semelhante para as três topologias, ou seja, instituições com conectividade maior que a média possuem maior *risco sistêmico*.

6.2 Efeitos da alavancagem

Para o estudo dos efeitos da alavancagem foram dois valores diferentes para a *probabilidade de default* em cada topologia de rede estudada, ou seja, $pd_i = 0.05$ e $pd_i = 0.1$.

A figura 6.2 mostra os resultados obtidos para a rede *Erdős-Rényi* com 100 bancos. A figura 6.2(a) mostra a porcentagem de bancos afetados pela crise. O choque inicial determina a quantidade de bancos afetados, que apesar de ser a grande maioria deles, parece não depender do nível de alavancagem. Na figura 6.2(b) observa-se que a probabilidade de *default* inicial influencia o número de bancos em *default*. Mas é a alavancagem que aumenta de forma não linear a quantidade de bancos inadimplentes. Na figura e investigam o efeito do tamanho da rede. Se observa que o número de nós da rede não muda o resultado observado para redes menores. Isso indica que de fato é a proporção inicial do choque que define a amplitude da propagação.

Figura 6.2: Análise do efeito da alavancagem para a rede *Erdős-Rényi* com 100 bancos. Na cor preta o resultado para $pd_i = 0.05$ e na cor azul o resultado para $pd_i = 0.1$.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.3: Análise do efeito da alavancagem para a rede Erdős-Rényi com 200 bancos. Na cor preta o resultado para $pd_i = 0.05$ e na cor azul o resultado para $pd_i = 0.1$.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.4: Análise do efeito da alavancagem para a rede Erdős-Rényi com 500 bancos. Na cor preta o resultado para $pd_i = 0.05$ e na cor azul o resultado para $pd_i = 0.1$.

Os resultados obtidos para a rede Interbancária Empírica, mostram que menos bancos são afetados pela crise em relação a rede aleatória. No entanto, há um aumento na porcentagem de bancos inadimplentes. O aumento observado é não-linear, como o observado nas figuras 6.5, 6.6 e 6.7.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.5: *Análise do efeito da alavancagem para a rede Interbancária Empírica com 100 bancos.*

O aumento do número de inadimplentes passa a ser bastante expressivo no sistema alavancado, chegando a quase 40% do total de bancos na rede.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.6: *Análise do efeito da alavancagem para a rede Interbancária Empírica com 200 bancos.*

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.7: Análise do efeito da alavancagem para a rede Interbancária Empírica com 500 bancos.

O comportamento não-linear continuou presente nos resultados para a rede *Livre de Escala*, tanto para o número de bancos afetados, quanto para o número de bancos inadimplentes. A porcentagem de bancos inadimplentes chegou próxima de 15% para as redes com 100, 200 e 500 bancos, figuras 6.8, 6.9 e 6.10, respectivamente.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.8: Análise do efeito da alavancagem para a rede Livre de Escala com 100 bancos.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.9: Análise do efeito da alavancagem para a rede Livre de Escala com 200 bancos.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.10: Análise do efeito da alavancagem para a rede Livre de Escala com 500 bancos.

Em todos os casos, é possível observar o efeito não linear provocado pelo aumento da alavancagem. Quando o pd_i é aumentado, a curva preserva seu formato, alterando apenas os valores do impacto causado pelo choques sofridos.

O efeito da alavancagem na propagação dos choques é intuitivo. Quando o sistema entra na fase alavancada e o nível de bancos afetados ou inadimplentes é baixo espera-se que o grau de alavancagem torne o processo de contágio mais severo.

6.3 Robustez das topologias de rede

Utilizando os resultados obtidos na seção 6.2 é possível comparar a robustez das topologias das redes estudadas. Comparando as redes, *Erdős-Rényi*, *Livre de Escala* e

Interbancária Empírica, verifica-se que a rede do Livre de Escala é a mais robusta e a rede *Interbancária Empírica* é a menos robusta, considerando o número de *defaults*. Em relação à quantidade de bancos afetados pela crise, a ordem muda. Neste caso a rede de *Erdős-Rényi* teve pior desempenho, seguido da rede *Interbancária Empírica*. O que mostra que as redes Livres de Escala são mais robustas em relação aos ataques aleatórios, figura 6.11.

(a) Afetados pela crise, $pd_i = 0.05$ (b) Inadimplentes, $pd_i = 0.05$ (c) Afetados pela crise, $pd_i = 0.1$ (d) Inadimplentes, $pd_i = 0.1$

Figura 6.11: Comparação dos resultados de desempenho de robustez entre as três topologias de redes estudadas. Nas figuras (a) e (b) tem-se, respectivamente, a quantidade de bancos afetados e inadimplentes para $pd_i = 0.05$ e nas figuras (c) e (d) tem-se, respectivamente, a quantidade de bancos afetados e inadimplentes para $pd_i = 0.1$, para redes com 100 bancos.

Os resultados são semelhantes para 100, 200 e 500 bancos. A seguir, o resultado para 500 bancos, figura 6.12.

(a) Afetados pela crise, $pd_i = 0.05$ (b) Inadimplentes, $pd_i = 0.05$ (c) Afetados pela crise, $pd_i = 0.1$ (d) Inadimplentes, $pd_i = 0.1$

Figura 6.12: Comparação dos resultados de desempenho de robustez entre as três topologias de redes estudadas. Nas figuras (a) e (b) tem-se, respectivamente, a quantidade de bancos afetados e inadimplentes para $pd_i = 0.05$ e nas figuras (c) e (d) tem-se, respectivamente, a quantidade de bancos afetados e inadimplentes para $pd_i = 0.1$, para redes com 500 bancos.

A diferença entre os desempenhos de robustez pode ser explicada pela especificidade de cada topologia. A rede *Erdős-Rényi* não possui *hubs* como a rede Livre de Escala, e nem *clusters* como a rede *Interbancária Empírica*. Nesta topologia, muitos bancos podem ser afetados, porém, poucos ficam inadimplentes. Na rede aleatória de *Erdős-Rényi* a distribuição da conectividade é de tal sorte que os bancos possuem conectividade com variabilidade baixa. Isto leva a um padrão de propagação do choque de forma mais homogênea. Nas outras duas topologias a presença de grandes aglomerados permite que os nós mais conectados absorvam os choques, protegendo as instituições menos conectadas.

Note que em alguns momentos ocorre empate ou inversão do desempenho para graus de alavancagem mais baixos, mas vale lembrar que os bancos operam com altos graus de alavancagem. Para valores maiores de alavancagem, a topologia Livre de Escala sempre teve melhor desempenho.

6.4 O efeito da presença de *clusters*

A topologia de rede *Interbancária Empírica* permite o aumento natural do número de *cluster*. Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos para o estudo comparativo de redes com 3, 4 e 5 *clusters*.

O número de *clusters* influencia na robustez dessa topologia. Entende-se por robustez a capacidade do sistema resistir ao colapso. Foi mostrado que com o aumento da quantidade de *clusters* a topologia torna-se mais robusta (figuras 6.13 e 6.14).

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.13: Análise do Cluster feita para a rede Interbancária Empírica com 100 bancos, com 3, 4 e 5 *clusters* e valor de $pd_i = 0.05$.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.14: Análise do Cluster feita para a rede Interbancária Empírica com 100 bancos, com 3, 4 e 5 *clusters* e valor de $pd_i = 0.1$.

O mesmo acontece com a utilização de redes maiores (figuras 6.15 e 6.16).

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.15: Análise do Cluster feita para a rede Interbancária Empírica com 200 bancos, com 3, 4 e 5 clusters e valor de $pd_i = 0.05$.

(a) Afetados pela crise

(b) Inadimplentes

Figura 6.16: Análise do Cluster feita para a rede Interbancária Empírica com 200 bancos, com 3, 4 e 5 clusters e valor de $pd_i = 0.1$.

Quando o sistema está na fase não alavancada poucos bancos são afetados. A medida que o sistema entra na fase alavancada a propagação do choque é atenuada pela presença de um número maior de *clusters* na rede. Como já foi dito anteriormente os clusters funcionam como uma blindagem ou um aparato de absorção da propagação.

O estudo de redes reais mostrou que elas têm, em geral, três *clusters*, por isso este estudo foi baseado em redes com essa quantidade. No entanto, o melhor desempenho obtido por meio de redes com um número maior de *clusters* indica a possibilidade de intervenções dos Bancos Centrais com a alteração dessas quantidades.

6.5 Índice de Risco Sistêmico

Utilizando o cálculo do impacto da inadimplência (DI) é possível obter o Índice de Risco Sistêmico (SI). Após calcular este índice SI para cada instituição, plota-se a distribuição de frequência deles na figura 6.17. Para efeito comparativo, as distribuições foram todas normalizadas. Na figura 6.17 mostra-se os resultados obtidos para diferentes topologias e graus de alavancagem.

Figura 6.17: Comparação dos resultados do Índice de Risco Sistêmico para as três topologias de redes estudadas e três valores para a alavancagem ρ . A figura (a) considera $\rho = 0.8$, a figura (b) considera $\rho = 4$ e, figura (c) considera $\rho = 8$.

Na figura 6.17(a) observa-se que a rede livre de escala apresenta a grande maioria das instituições com baixo índice sistêmico. Isso significa que poucos bancos são responsáveis pelos maiores impactos de *default* as suas instituições parceiras. A rede interbancária Empírica apresenta uma quantidade maior de instituições com alto impacto de risco sistêmico quando comparado a rede de livre de escala. Contudo a rede de *Erdős-Rényi* é aquela que

apresenta quantidade elevada de bancos causadores de impactos negativos aos seus parceiros. Com o aumento da alavancagem pouca mudança se observa nas redes livre de escala e interbancária empírica. Apenas na rede aleatória apresentou uma mudança na forma da distribuição em favor do aumento do número de instituições com menor índice sistêmico.

6.6 Var Sistêmico

Considerou-se o nível de confiança de 99% para cálculo do VaR . Os resultados podem ser vistos na figura 6.18, com a comparação das três topologias.

Figura 6.18: Resultado para VaR Sistêmico com nível de confiança de 99% calculado para as diferentes topologias de rede e valores de alavancagem estudados. Figura (a) mostra o VaR calculado para $pd_i = 0.05$ e figura (b) mostra o VaR calculado para $pd_i = 0.1$.

O $VaR_{99\%}$ indica que a topologia *Erdős-Rényi* é menos robusta que as demais, seguindo a mesma ordem do resultado dos bancos afetados pela crise, obtido por meio do estudo de robustez.

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Considerações Finais

No presente trabalho foi revisada literatura na área de redes complexas aplicadas ao estudo do risco sistêmico, trazendo as principais contribuições dos últimos anos. Essa literatura tem sido desenvolvida desde o ano 2000 e foi intensificada após a crise do mercado de hipotecas americano em 2008. Esses trabalhos se dividiram entre modelos de redes estáticas e evolutivas, os quais procuraram explicar, principalmente, a razão pela qual as crises acontecem e os impactos na economia que elas produzem. Bancos centrais do mundo inteiro têm o interesse sobre esse estudo, sobretudo para que a regulação financeira seja feita da melhor maneira.

Esse estudo considerou três topologias de rede: *Erdős-Rényi*, *Livre de Escala* e *Interbancária Empírica*. A criação de um sistema interbancário baseado nessas redes possibilitou a compreensão dos efeitos do contágio financeiro com relação ao grau de alavancagem sistêmico. O aumento não-linear dos impactos provocados pelo contágio financeiro mostra os motivos pelos quais as crises podem ter diferentes magnitudes.

A topologia de rede *Livre de Escala* se mostrou mais robusta em relação aos ataques aleatórios, comparada às demais, pois não foram considerados ataques aos *hubs*, cujo resultado já é conhecido na literatura.

O efeito da presença de *clusters* mostrou que o aumento do número da quantidade deles melhora o desempenho de robustez, ou seja, quanto maior o número de *clusters* na rede, mais robusta será a rede *Interbancária Empírica*.

Também foi abordada a mensuração do risco sistêmico. Entre as três medidas apresentadas, duas delas foram propostas nesse trabalho. O *Indicador Sistêmico* mede a relação do risco com a conectividade e corroborou para o resultado conhecido como *muito interconectado para falhar*, mostrando que os bancos que oferecem mais riscos são os mais conectados. O *Índice de Risco Sistêmico* é a distribuição das perdas provocadas pelos bancos inadimplentes. Esta mostrou que a maioria das instituições recebem impactos menores, enquanto que a minoria recebe impactos maiores. Finalmente, o *VaR* sistêmico

proposto neste trabalho, aferiu as perdas máximas causadas dentro do sistema. Constatou-se que para o VaR de 99% de nível de confiança, a topologia que oferecia maior risco é a de *Erdős-Rényi*, pois ela afeta mais bancos dentro do sistema, mesmo não provocando muitas falências.

Portanto, por meio dessa pesquisa, foi compreendido o papel das redes complexas como um sistema interbancário e como as crises podem ser propagadas.

7.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

Para as pesquisas futuras é possível criar um sistema interbancário cujos pesos dos empréstimos não sejam constantes. O estudo dos efeitos da liquidez também pode ser incorporado em outros modelos.

É possível criar um sistema que integre bancos e firmas, desta maneira seria possível compreender o impacto das crises em toda a economia.

Utilizando base de dados reais é possível calibrar as medidas de risco sistêmico dentro da realidade do sistema financeiro, bem como ajustar o modelo de contágio utilizado neste trabalho.

Apêndice A

Algoritmos da Simulação

Toda a implementação foi feita em *Python*, pois trata-se de uma linguagem de programação versátil e *opensource*.

Bibliotecas

```
1 import networkx as nx #Geração de Redes
2 import matplotlib.pyplot as plt #Gráficos
3 import numpy as np #Matrizes e vetores
4 import random as random_number #Geração de números aleatórios
```

Rede Interbancária Empírica

```
1 def interbank(N,L=3,mu=0.3,ro=0.0135,l1=0.31,l2=0.325):
2     negocio=arranjo(L,2) #relações entre os grupos
3     # Entrada de dados para os grupos de ni's bancos
4     n=np.ones(L) #vetor com quantidade de bancos
5     n=n*(np.divide(N,L)) #alocando quantidade de bancos em cada grupo
6     n[L-1]=n[L-1]+np.mod(N,L) #corrigindo qtd de bancos do último grupo
7     ng=np.zeros(negocio) #vetor número máx de negociações
8     r=np.zeros(negocio) #vetor bancos sorteados
9     # Número máx de negociações
10    for i in range(0,int(negocio)):
11        ng[i]=random_number.randint(1,7)
12        r[i]=random_number.randint(1,7)
13    #Criando a rede
14    GI = nx.DiGraph() # GI uma rede direcionada
15    for i in range(0,N): GI.add_node(i) #
16    #Criando matrizes e vetores
17    A = np.zeros((N,N)) # matriz confiançaa
18    B = np.zeros(N) # vetor limiar
19    E = np.zeros((L,2)) # vetor localização
20    #Preenchendo vetor localização dentro da matriz
21    E[0][1]=n[0]
```



```

22  for i in range(0,L-1):
23      E[i+1][0]=E[i][1]
24      E[i+1][1]=E[i][1]+n[i+1]
25  #Função de preenchimento de matriz confiança e vetor limiar
26  def preenche_matriz(m,s,c,d):
27      #(media, variancia, intervalo[c,d])
28      for i in range(0,N):
29          B[i] = c + (d-c)*random_number.random()
30          for j in range(0,N):
31              if i != j:
32                  A[i][j] = random_number.normalvariate(m, s)
33  #Função para negociação no mesmo grupo
34  def verif_mesmo(a,b):          # ([a,b])
35      for i in range(a,b):
36          for j in range(a,b):
37              if A[i][j] >= B[i]:
38                  GI.add_edges_from([(i, j)])
39  #Função para negociação em grupos diferentes
40  # (inf do intervalo do 1, sup do intervalo do 1, inf do intervalo 2,
41      sup do intervalo 2)
41  def verif_dif(a,b,c,d,r,lim):
42      global cont
43      for i in lista_rand(a,b,r):
44          cont = 0
45          for j in range(c,d):
46              if A[i][j] >= B[i] and cont < lim:
47                  GI.add_edges_from([(i, j)])
48                  cont = cont + 1
49  #Construindo rede
50  preenche_matriz(mu,ro,l1,l2) #preenche com os grupos
51  for i in range(0,L):
52      verif_mesmo(int(E[i][0]), int(E[i][1])) #negociações dentro do mesmo
53      grupo
53  aux=int(negocio)
54  for i in range(0,L):
55      for j in range(aux-2,aux):
56          # Realizando as conexões 2 a 2 entre os grupos
57          verif_dif(int(E[i][0]),int(E[i][1]),int(E[j%3][0]),int(E[j
58              %3][1]),int(r[j]),int(ng[j]))
58      aux-=2
59  return GI

```

Matriz Balanço patrimonial

```

1 #(pl, emp. rec., depósitos, ativos ext., emp.conc., k_in, k_out, choque)
2 BS =np.zeros((nbancos,8))

```

Propagação do Choque Financeiro

```

1 for indice in listofbank: # bancos inicialmente afetados
2     pilha=[indice] #cria pilha
3     BS[indice][7] = choque
4     #-----Execução para o primeiro banco-----
5     if ((BS[indice][7]>BS[indice][0]) and BS[indice][0]>0 : #default do
        primeiro banco
6         for j in range(0,ordem):
7             Adj[indice,j]=0 #retira o banco
8             if Adj[j,indice]>0: #se existe ligação
9                 BS[j][7]=(BS[indice][7]-BS[indice][0])/BS[indice][5] #repasse da
                    dívida
10                BS[j][6]-= 1 #retira o parceiro default
11                Adj[indice,j]=0 #retira a ligação
12                pilha.append(j) #adiciona o índice a ser tabulado
13            del pilha[0] #deleta o primeiro elemento da lista
14            BS[indice][0]= 0 #zera o pl do banco default
15        elif ((BS[indice][7]<BS[indice][0]) and BS[indice][0]>0 : #afeta do
            primeiro banco
16            BS[indice][0]-=BS[indice][7]
17        #-----Execução para os demais bancos-----
18        for i in pilha:
19            if (BS[i][7]>BS[i][0]) and BS[i][0]> 0: #default do banco i
20                if (BS[i][7]-BS[i][0]<=BS[i][1]):
21                    #condicao de transmissao (choque - pl < b)
22                    for j in range(0,ordem):
23                        Adj[i,j]=0 #retira o banco i
24                        if Adj[j,i]>0: #se existe ligação
25                            BS[j][7]=(BS[i][7]-BS[i][0])/BS[i][5] #repasse
26                            BS[j][6]-= 1 #retira o parceiro default
27                            Adj[j,i]=0 #retira j->i
28                            pilha.append(j) #adiciona o índice a ser tabulado
29                        del pilha[0] #deleta o primeiro elemento da lista
30                else:
31                    for j in range(0,ordem):
32                        Adj[i,j]=0 #retira o banco i
33                        if Adj[j,i]>0: #se existe ligação
34                            BS[j][7]=(BS[i][1])/BS[i][5] #repassa para os parceiros
35                            BS[i][2]=BS[i][7]-BS[i][0]-BS[i][1] #repassa para os
                                    depositantes
36                            BS[j][6]-= 1 #retira o parceiro em default
37                            Adj[j,i]=0 #retira a ligação
38                            pilha.append(j) #adiciona o índice a ser tabulado
39                        del pilha[0] #deleta o primeiro elemento da lista
40                        BS[i][0]= 0 #zera o pl do banco default
41                elif ((BS[i][7]<BS[i][0]) and BS[i][0]>0 :
42                    BS[i][0]-=BS[i][7] #afeta o banco i

```

Referências Bibliográficas

- Acemoglu et al.(2013)** Daron Acemoglu, Asuman Ozdaglar e Alireza Tahbaz-Salehi. Systemic risk and stability in financial networks. *The National Bureau of Economic Research*, (18727). URL https://www.ifk-cfs.de/fileadmin/downloads/publications/wp/2012/12_03.pdf. Citado na pág. 19
- Adrian e Shin(2010)** Tobias Adrian e Hyun Song Shin. Liquidity and leverage. *Journal of Financial Intermediation*, 19(3):418 – 437. Citado na pág. 15
- Albert e Barabási(2002)** Réka Albert e Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74:47–97. Citado na pág. 25
- Allen e Gale(2000)** Franklin Allen e Douglas Gale. Financial contagion. *Journal of Political Economy*, 108:1–33. Citado na pág. 18, 19
- Barabási(2002)** Albert-László Barabási. *Linked-the new science of networks*. Perseus Books Group, 1st edição. ISBN 0738206679,9780738206677. Citado na pág. 24
- Barabási e Albert(1999)** Albert-László Barabási e Réka Albert. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286(5439):509–512. ISSN 1095-9203. doi: 10.1126/science.286.5439.509. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.286.5439.509>. Citado na pág. 25, 30, 31
- BIS(2010)** BIS. *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, Dez 2010. Communications. Citado na pág. 16, 18, 48
- Bollobás et al.(2003)** Bélla Bollobás, Christian Borgs, Jennifer Chayes e Oliver Riordan. Directed scale-free graphs. páginas 132–139. Citado na pág. 21, 31, 32
- Boss et al.(2004)** Michael Boss, Helmut Elsinger, Martin Summer e Stefan Thurner. An empirical analysis of the network structure of the austrian interbank market. *Quantitative Finance*, 4(6):677–684. Citado na pág. 20, 33
- Brunnermeier e Oehmke(2012)** Markus K. Brunnermeier e Martin Oehmke. Bubbles, financial crises and systemic risk. *Working Paper*, 18398. URL <http://www.nber.org/papers/w18398>. Citado na pág. 15
- Cajueiro e Tabak(2008)** Daniel O. Cajueiro e Benjamin M. Tabak. The role of banks in the brazilian interbank market: Does bank type matter? *Physica A*, 387(27):6825–6836. doi: 10.1016/j.physa.2008.08.031. Citado na pág. 20, 33
- Canedo e Jaramillo(2009)** Javier M. D. Canedo e Serafín M. Jaramillo. A network model of systemic risk: stress testing the banking system. *Int. J. Intell. Syst. Acc. Fin. Mgmt.*, 16:87–110. Citado na pág. 20

- Chan-Lau(2010)** Jorge A. Chan-Lau. Regulatory capital charges for too-connected-to-fail institutions: a practical proposal. 19(5):355–379. Citado na pág. 16, 18
- Chen(1999)** Yehning Chen. Banking panics: The role of the first-come, first-served rule and information externalities. *Journal of Political Economy*, 107:946–968. Citado na pág. 18
- Datz(2002)** Marcelo D. X. S. Datz. Risco sistêmico e regulação bancária no brasil. Dissertação de Mestrado, EPGE/FGV, Brasil. Citado na pág. 16, 45, 46
- Diamond e Dybvig(1983)** Douglas W. Diamond e Philip H. Dybvig. Bank runs, deposit insurance and liquidity. *Journal of Political Economy*, 91(3):401–419. Citado na pág. 18
- Fonseca(2012)** Eder L. Fonseca. O estudo das propriedades multifractais de séries temporais financeiras. Dissertação de Mestrado, Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, Brasil. Citado na pág. 18
- Gai e Kapadia(2010)** Prasanna Gai e Sujit Kapadia. Contagion in financial networks. *Proc. R. Soc. A*, 466(2120):2401–2423. doi: doi:10.1098/rspa.2009.0410. Citado na pág. 20
- Gatti et al.(2006)** Domenico Delli Gatti, Mauro Gallegati, Bruce Greenwald, Alberto Russo e Joseph E. Stiglitz. Business fluctuations in a credit-network economy. *Physica A*, 370(68):68–74. Citado na pág. 22
- Gatti et al.(2009)** Domenico Delli Gatti, Mauro Gallegati, Bruce Greenwald, Alberto Russo e Joseph E. Stiglitz. Business fluctuations and bankruptcy avalanches in an evolving network economy. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, 4:195–212. Citado na pág. 22
- Gitman(2009)** Lawrence J. Gitman. *Princípios de Administração Financeira*. Prentice Hall, 12ª edição. Citado na pág. 50
- Gkougkousi e Roosenboom(2010)** Xanthi Gkougkousi e Peter Roosenboom. The effect of monetary policy on stock prices: The subprime mortgage crisis. Em Greg N. Gregoriou, editor, *The Banking Crisis Handbook*, páginas 21–37. 1ª edição. Citado na pág. 16, 18
- Haldane(2010)** Andrew G. Haldane. The \$100 billion question. *BIS Review*, 40. URL <http://www.bis.org/review/r100406d.pdf>. Citado na pág. 15, 45
- Haldane e May(2011)** Andrew G. Haldane e Robert M. May. Systemic risk in banking ecosystems. *Nature*, 469:351–355. Citado na pág. 16, 20, 45, 48, 49
- Iori et al.(2008)** Giulia Iori, Giulia De Masi, Ovidiu Vasile Precup, Giampaolo Gabbi e Guido Caldarelli. A network analysis of the italian overnight money market. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(1):259–278. Citado na pág. 20, 33
- Jaramillo et al.(2010)** Serafín M. Jaramillo, Omar Pérez Pérez, Fernando Avila Embriz e Fabrizio López Gallo Dey. Systemic risk, financial contagion and financial fragility. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34:2358–2374. Citado na pág. 18, 20
- Jorion(2006)** Philippe Jorion. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. MCGRAW-HILL Professional, 3rd edição. Citado na pág. 36, 40

- Lenzua e Tedeschi(2012)** Simone Lenzua e Gabriele Tedeschi. Systemic risk on different interbank network topologies. *Physica A*, 391(18):4331–4341. Citado na pág. [22](#), [23](#)
- Li et al.(2010)** Shouwei Li, Jianmin He e Yaming Zhuang. A network model of the interbank market. *Physica A*, 389(24):5587–5593. Citado na pág. [17](#), [30](#), [33](#), [34](#)
- Lima(2003)** Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. IMPA, 3º edição. Citado na pág. [53](#)
- McNeil et al.(2005)** Alexander J. McNeil, Rudiger Frey e Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Series in Finance. Princeton University Press. Citado na pág. [36](#)
- Mishkin(2009)** Frederic S. Mishkin. *The Economics of Money, Banking and Financial Markets*. Prentice Hall, 9º edição. ISBN 0321599799,9780321599797. Citado na pág. [15](#), [18](#), [45](#), [47](#)
- Moussa(2011)** Amal Moussa. *Contagion and Systemic Risk in Financial Networks*. Tese de Doutorado, Columbia University. Citado na pág. [18](#), [20](#), [21](#), [32](#), [33](#)
- Nelsen(2006)** Roger Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, 2nd edição. Citado na pág. [20](#)
- Newman(2005)** Mark E.J. Newman. Power laws, pareto distributions and zipf’s law. *Contemporary Physics*, 46(5):323–351. Citado na pág. [29](#)
- Nier et al.(2007)** Erlend Nier, Jing Yang, Tanju Yorulmazer e Amadeo Alentorn. Network models and financial stability. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6):2033–2060. Citado na pág. [19](#), [45](#), [48](#), [49](#)
- Reinhart e Rogoff(2011)** Carmen M. Reinhart e Kenneth S. Rogoff. From financial crash to debt crisis. *American Economic Review*, 101:1676–1706. Citado na pág. [18](#)
- Ross(2006)** Sheldon M. Ross. *Introduction to probability models*. Academic Press, 9º edição. Citado na pág. [43](#)
- Santos(2010)** Edson B. Santos. *Ensaio de Finanças Quantitativas: Apreçamento de Derivativos Multidimensionais através do processo de Lévy e topologia e propagação do risco sistêmico*. Tese de Doutorado, FEA, Universidade de São Paulo, Brasil. Citado na pág. [16](#), [18](#), [20](#), [21](#), [33](#), [54](#), [57](#)
- Shiratsuka(2005)** Shigenori Shiratsuka. Asset price bubble in japan in the 1980s:lessons for financial and macroeconomic stability. *Bis papers*, 21:42–62. Citado na pág. [16](#)
- Soramaki et al.(2007)** Kimmo Soramaki, Morten L. Bech, Jeffrey Arnold, Robert J. Glass e Walter E. Beyeler. The topology of interbank payment flows. *Physica A*, 379:317–333. Citado na pág. [33](#)
- Souma et al.(2003)** Wataru Souma, Yoshi Fujiwara e Hideaki Aoyama. Complex networks and economics. *Physica A*, 324:396–401. Citado na pág. [20](#)
- Teteryatnikova(2010)** Mariya Teteryatnikova. Resilience of the interbank network to shocks and optimal bail-out strategy: Advantages of “tiered” banking systems. (1007). Citado na pág. [19](#)

- Upper e Worms(2004)** Christian Upper e Andreas Worms. Estimating bilateral exposures in the german interbank market: Is there a danger of contagion? *European Economic Review*, 48(4):827–849. Citado na pág. 18
- Wells(2004)** Simon Wells. Financial interlinkages in the united kingdoms? interbank market and the risk of contagion. *Bank of England Working Paper*. Citado na pág. 18, 20, 33
- Wieland et al.(2012)** Volker Wieland, Tobias Cwik, Gernot J. Muller, Sebastian Schmidt e Maik Wolters. A new comparative approach to macroeconomic modeling and policy analysis. *CFS Working Paper*. URL https://www.ifk-cfs.de/fileadmin/downloads/publications/wp/2012/12_03.pdf. Citado na pág. 15