UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ARTES, CIÊNCIAS E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
DE SISTEMAS COMPLEXOS

WAGNER VIEIRA RAMOS

O efeito da diversidade de perfis de
investidores na dinâmica de preços de um
modelo virtual do mercado de ações da
BM&FBOVESPA

São Paulo

2016

WAGNER VIEIRA RAMOS

**O efeito da diversidade de perfis de investidores na
dinâmica de preços de um modelo virtual do
mercado de ações da BM&FBOVESPA**

Dissertação apresentada à Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Modelagem de Sistemas Complexos.

Versão corrigida contendo as alterações solicitadas pela comissão julgadora em 13 de maio de 2016. A versão original encontra-se em acervo reservado na Biblioteca da EACH/USP e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP (BDTD), de acordo com a Resolução CoPGr 6018, de 13 de outubro de 2011.

Área de concentração: Ciências Sociais e Ambientais Aplicadas

Orientador: Prof. Dr. Camilo Rodrigues Neto

São Paulo

2016

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO

(Universidade de São Paulo. Escola de Artes, Ciências e Humanidades. Biblioteca)

Ramos, Wagner Vieira

O efeito da diversidade de perfil de investidores na dinâmica de preços de um modelo virtual do mercado de ações da BM&FBOVESPA / Wagner Vieira Ramos ; orientador, Camilo Rodrigues Neto. – São Paulo, 2016.

98 f : il

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos, Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo. Versão corrigida.

1. Mercado financeiro - Simulação. 2. Redes complexas. 3. Bolsa de valores. 4. Investidor. 5. Sistemas dinâmicos. I. Rodrigues Neto, Camilo, orient. II. Título

CDD 22.ed.– 332.6

Nome: RAMOS, Wagner Vieira

Título: O efeito da diversidade de perfis de investidores na dinâmica de preços de um modelo virtual do mercado de ações da BM&FBOVESPA

Dissertação apresentada à Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Modelagem de Sistemas Complexos.

Área de concentração: Ciências Sociais e Ambientais Aplicadas.

Aprovado em: ____/ ____/ _____

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Assinatura: _____

À minha esposa Simone e à minha filha Joyce. Por elas, tudo vale a pena.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Camilo Rodrigues Neto, pela inestimável orientação na execução deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlos de Brito Pereira e ao Prof. Dr. Terry Macedo Ivanauskas pelas preciosas sugestões feitas na Qualificação da dissertação.

Aos professores das disciplinas cursadas no Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos, Prof. Dr. Camilo Rodrigues Neto, Prof. Dr. Fernando Fagundes Ferreira, Prof. Dr. Carlos de Brito Pereira, Prof. Dra. Flávia Mori Sarti, Prof. Dr. Paulo Antonio de Almeida Sinisgalli, Prof. Dr. Alexandre Ferreira Ramos e Prof. Dr. José Ricardo Gonçalves de Mendonça, tanto pelo conteúdo transmitido em sala de aula, quanto pela presteza com que me atenderam sempre que os procurei.

Ao Banco Central do Brasil, pela concessão de autorização para realização de horário de trabalho especial, que viabilizou a minha participação neste Programa de Pós-graduação em Modelagem de Sistemas Complexos. Em particular, ao meu coordenador Rodomarque Tavares Meira, pela paciência e colaboração durante esse período.

À Michel Alexandre da Silva, por ter me apresentado a esse programa de pós-graduação e pelas dicas valiosas.

“Is this the real life? Is this just fantasy? Caught in a landslide no escape from reality...”
(Freddie Mercury)

Resumo

RAMOS, Wagner Vieira. **O efeito da diversidade de perfis de investidores na dinâmica de preços de um modelo virtual do mercado de ações da BM&FBOVESPA.** 2016. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

O objetivo deste trabalho é estudar como a distribuição de investidores entre aleatórios, grafistas, fundamentalistas e híbridos afeta a dinâmica de um mercado de ações representada por fatos estilizados. Para realização desse trabalho, foi desenvolvido um simulador de mercado de ações baseado em agentes, no qual são incorporadas regras e características do mercado de ações da BM&FBOVESPA. Os agentes grafistas, fundamentalistas e híbridos aprendem com a experiência. O simulador foi executado um número de vezes para diversas distribuições de perfis e os resultados foram analisados com o objetivo de identificar relações entre tais distribuições e os fatos estilizados estudados.

Palavras-chaves: Mercado financeiro. Fatos estilizados. Modelo baseado em agentes. Aprendizado de máquinas.

Abstract

RAMOS, Wagner Vieira . **The effect of investors profiles diversity in pricing dynamic of a virtual model of BM&FBOVESPA stock market**. 2016. 98 p. Dissertation (Master of Science) – School of Arts, Sciences and Humanities, University of São Paulo, São Paulo, 2016.

The objective of this work is to study how the distribution of investors among random, chartists, fundamentalists and hybrids affects the dynamics of a stock market represented by stylized facts. To carry out this work, we developed a stock market simulator based on agents, which incorporates rules and characteristics of the BM&FBOVESPA stock market. Chartists, fundamentalists and hybrids agents can learn from experience. The simulation was performed a number of times for various profiles distributions and the results were analyzed in order to identify relationships between these distributions and the stylized facts studied.

Keywords: Stock market. Stylized facts. Agent-based models. Machine learning.

Lista de figuras

Figura 1 – Início das negociações	27
Figura 2 – Primeira ordem da fila ask	28
Figura 3 – Alteração no bid sem negociação	29
Figura 4 – Uma nova fila de espera para ordens de compra	30
Figura 5 – Uma nova fila de espera para ordens de venda	31
Figura 6 – Uma nova ordem na fila bid	32
Figura 7 – Negociação por emissão de ordem de venda	33
Figura 8 – Alteração no ask sem negociação	34
Figura 9 – Negociação por emissão de ordem de compra	35
Figura 10 – Distribuição de retornos da ação PETR4	38
Figura 11 – Volatilidade da ação PETR4	39
Figura 12 – Índices de aglomeração de volatilidade da ação PETR4	41
Figura 13 – Distribuição e evolução das quantidades diárias de negociações da ação PETR4	43
Figura 14 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de grafistas quando havia so- mente grafistas	67
Figura 15 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de fundamentalistas quando havia somente fundamentalistas	69
Figura 16 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de híbridos grafistas quando havia somente híbridos	71
Figura 17 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de híbridos fundamentalistas quando havia somente híbridos	72
Figura 18 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de grafistas quando havia perfis mistos com predomínio de aleatórios	73
Figura 19 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de fundamentalistas quando havia perfis mistos com predomínio de aleatórios	74
Figura 20 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de híbridos grafistas quando havia perfis mistos com predomínio de aleatórios	75
Figura 21 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de híbridos fundamentalistas quando havia perfis mistos com predomínio de aleatórios	76

Figura 22 – Comparação da distribuição dos retornos da ação PETR4 com os padrões majoritários em cada distribuição de perfis	78
Figura 23 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição somente grafistas	79
Figura 24 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição somente fundamentalistas	80
Figura 25 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição somente híbridos .	81
Figura 26 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição somente aleatórios	82
Figura 27 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição com perfis mistos	83
Figura 28 – Comparação dos índices de aglomeração de volatilidade da ação PETR4 com os padrões majoritários em cada distribuição de perfis	85
Figura 29 – Comparação do volume de negociação da ação PETR4 com os padrões majoritários em cada distribuição de perfis	88
Figura 30 – Somente híbridos - Adoção de perfis pelos agentes híbridos	91
Figura 31 – Perfis mistos - Adoção de perfis pelos agentes híbridos	92

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tamanho das sequências de índices de aglomeração de volatilidade iguais	41
Tabela 2 – Estratégias possíveis	49
Tabela 3 – Parâmetros do sistema	61
Tabela 4 – Resumo dos resultados das simulações de produção de dados	93

Lista de abreviaturas e siglas

ASM	<i>Artificial stock market.</i>
div-P/L	Relação entre o dividendo pago e o preço por lucro.
GASM	<i>Genoa artificial stock market.</i>
LMM	<i>Lux-Marchesi model.</i>
K	Curtose.
E	Valor esperado.
LPA	Lucro por ação.
LPA PROJ	Lucro por ação projetado para o ano seguinte.
PJ	Preço justo.
SSM	<i>Stochastic simulation model.</i>
TX CRESC	Taxa de crescimento do lucro por ação.
TX JUR	Taxa básica de juros.

Lista de símbolos

φ	Quantidade de rodadas que o agente aguarda pela negociação de uma ordem emitida.
ε	Valor a ser somado ao preço de mercado no momento da emissão da ordem, ou subtraído dele.
μ	Valor a ser somado ao da ordem emitida, ou subtraído dele, em caso de renegociação.
ν	Quantidade de rodadas que o agente aguarda pela negociação, antes de renegociar a ação.
α	Taxa de aprendizagem.
γ	Taxa de desconto de recompensas futuras.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	O MERCADO DE AÇÕES VISTO COMO UM SISTEMA COMPLEXO	18
1.2	LIVRO DE OFERTAS	18
1.3	FATOS ESTILIZADOS	19
1.4	AGENTES DO MERCADO DE AÇÕES	19
1.5	MODELAGEM DO MERCADO DE AÇÕES	20
1.5.1	Modelagem de sistemas complexos	20
1.5.2	Modelo orientado a agentes	22
1.5.3	Mercados artificiais de ações	23
2	LIVRO DE OFERTAS	26
2.1	DINÂMICA DE NEGOCIAÇÃO	26
3	FATOS ESTILIZADOS	37
3.1	DISTRIBUIÇÃO DE RETORNOS NÃO NORMAIS	37
3.2	AGLOMERAÇÃO DE VOLATILIDADE (textitVOLATILITY CLUSTERING) DOS RETORNOS	39
3.2.1	Classificação da distribuição de aglomerações de volatilidade	41
3.3	VOLUME DE NEGOCIAÇÃO ELEVADO E PERSISTENTE	42
4	AGENTES, ESTRATÉGIAS E APRENDIZAGEM	44
4.1	PERFIS DOS AGENTES	44
4.1.1	Perfil Grafista	44
4.1.2	Perfil Fundamentalista	44
4.1.3	Perfil Aleatório	46
4.2	ESTRATÉGIAS	46
4.2.1	Estratégias de especulação	46
4.2.2	Estratégias de reposição	48

4.3	PERCEPÇÃO DA SITUAÇÃO	50
4.3.1	Percepção da situação pelos grafistas	50
4.3.2	Percepção da situação pelos fundamentalistas	51
4.4	PROCESSO DE APRENDIZAGEM	51
4.4.1	Algoritmo <i>Q-learning</i>	52
4.4.2	Fatores que levaram a escolha do algoritmo <i>Q-learning</i> .	53
5	SIMULADOR DESENVOLVIDO	54
5.1	SIMPLIFICAÇÕES	54
5.1.1	Quantidade de papéis negociados	54
5.1.2	Volume negociado	54
5.1.3	Equiprobabilidade dos parâmetros das estratégias	55
5.1.4	Parâmetros de aprendizagem constantes	55
5.2	ADOÇÃO DA ESTRATÉGIA	55
5.3	EXECUÇÃO DA ESTRATÉGIA	57
5.4	APRENDIZAGEM	59
6	EXECUÇÃO DO SIMULADOR	61
6.1	CRIAÇÃO DOS AGENTES	62
6.2	DINÂMICA DA EXECUÇÃO	63
7	RESULTADOS	65
7.1	SIMULAÇÕES DE APRENDIZAGEM	65
7.1.1	Caso em que há somente grafistas	67
7.1.2	Caso em que havia somente fundamentalistas	69
7.1.3	Caso em que havia somente híbridos	71
7.1.4	Caso em que havia todos os perfis com predomínio de aleatórios	73
7.1.5	Análise geral da simulação de aprendizagem	76
7.2	SIMULAÇÕES DE PRODUÇÃO DE DADOS	77
7.2.1	Distribuição de retornos não normais	78
7.2.1.1	Análise das curtoses	79
7.2.1.2	Análise geral da distribuição de retornos	83
7.2.2	Aglomerção de volatilidade dos retornos	84

7.2.3	Volume de negociação elevado	86
7.2.4	Adoção de perfis pelos agentes híbridos	90
7.2.5	Análise geral das simulações de produção de dados	92
8	POSSIBILIDADES DE UTILIZAÇÃO DO MO- DELO DESENVOLVIDOS EM FUTUROS ESTU- DOS	94
9	CONCLUSÃO	95
	Referências ¹	97

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

1 INTRODUÇÃO

Sistemas complexos estão por toda a parte, nós mesmos fazemos parte de diversos deles, somos compostos por diversos deles e, até mesmo, somos um deles. E, no entanto, o estudo sistematizado dos sistemas complexos e o desenvolvimento de ferramentas e metodologias para modelá-los é um processo relativamente recente. Mas o que é um sistema complexo? Antes de respondermos a essa pergunta, consideremos um sistema dito simples. A trajetória de uma bala de canhão pode ser prevista pela aplicação de regras da física newtoniana sobre um determinado conjunto de parâmetros iniciais. Igualmente, podemos utilizar as mesmas regras para definir os parâmetros iniciais de maneira a fazer com que a bala caia numa posição desejada. Não importa o número de vezes que o experimento seja repetido, desde que sejam utilizados os mesmos parâmetros iniciais, sempre obteremos o mesmo resultado, dentro de uma margem de erro. Dizemos, então, que o deslocamento de uma bala de canhão é um sistema simples. O deslocamento dos astros no espaço é outro exemplo de sistema simples, por mais complicados que os cálculos utilizados para descrevê-lo possam ser. Mas, claramente, esse não é o único tipo de sistema que encontramos. “Não se pode evitar a sensação de que, além do fenômenos regulares e reprodutíveis existem outros, manifestamente, muito menos regulares e reprodutíveis” (NICOLIS; NICOLIS, 2007, p. 2), os sistemas complexos.

Segundo Mitchell, sistema complexo pode ser definido como “um sistema com uma grande rede de componentes que não possuem um controle central e atuam de acordo com regras simples de operação, dando origem a comportamentos coletivos complexos, processamento de informação sofisticado e adaptação via aprendizagem, ou evolução” (MITCHELL, 2009, p. 13).

Podemos encontrar exemplos que correspondam a essa definição nas mais diversas áreas, como, por exemplo, na ecologia (colônias de insetos sociais, cadeias alimentares), na anatomia (sistema nervoso, sistema imunológico), nas redes sociais (redes de relacionamentos pessoais, profissionais e acadêmicos), na tecnologia (a internet) e na economia (relações entre produção e consumo e entre capital e emprego, mercados). Neste trabalho, examinaremos o mercado financeiro, em particular, o mercado de ações.

1.1 O MERCADO DE AÇÕES VISTO COMO UM SISTEMA COMPLEXO

Podemos definir mercado como um sistema no qual agentes negociam bens numa estrutura de negociação que pode ser física ou normativa. No mercado financeiro, os bens negociados são ativos financeiros e no mercado de ações, foco deste trabalho, tais ativos financeiros são ações, ou seja, subdivisões mínimas da participação no patrimônio de uma empresa, e a estrutura de negociação é provida por bolsas de valores. Percebe-se claramente que os mercados assim definidos são sistemas complexos, uma vez que não há um controle central que determine quem vai vender, quem vai comprar, quantos bens serão negociados e por quanto. Cada agente negocia de acordo com regras relativamente simples, se adaptando e evoluindo com a experiência. Além disso, há pelo menos um comportamento coletivo emergente bem visível, que é a formação de preço do bem negociado.

Na realidade, tal percepção “é, pelo menos, tão antiga quanto Adam Smith, que (não exatamente com essas palavras) descreve a economia e a riqueza social que ela cria como um processo emergente baseado num comportamento auto-organizado de indivíduos que atuam independentemente e são automotivados” (FARMER et al., 2012, p. 297). Entretanto, somente nas últimas décadas essa visão passou a ter um papel significativo entre os pesquisadores da área econômica, quando estes voltaram a utilizar modelos oriundos da física restabelecendo uma prática que tinha sido interrompida no início do século XX, num processo cujo resultado foi batizado pelo físico H. Eugene Stanley como *econofísica* (STANLEY et al., 1996). Esse termo não é amplamente aceito na comunidade econômica, entretanto, o fato é que, para muitos economistas, “a única maneira de fazer um grande avanço na modelagem econômica é explorar abordagens inteiramente novas, em vez de fazer modificações incrementais em modelos existentes” (FARMER et al., 2012, p. 296) e a econofísica permitiu isso.

1.2 LIVRO DE OFERTAS

Nos principais mercados de ações do mundo, as negociações são intermediadas por bolsas de valores, para onde investidores enviam ordens de compra ou de venda de ações para serem executadas. Historicamente, a estrutura de negociação de ações disponibilizada

pelas bolsas de valores consistia em instalações físicas para a prática de pregões viva-voz, nos quais operadores ofereciam, literalmente aos gritos, propostas de compra e de venda de ações em nome de seus clientes. A partir do final do século passado, várias das principais bolsas de valores do mundo, como a NASDAQ, a de Londres, a de Tóquio, a de Hong Kong e a BM&FBovespa, entre outras, substituíram paulatinamente os pregões viva-voz por sistemas informatizados em que são cadastradas ordens de compra e de venda que são efetivadas em negociações de ações ou registradas para possível negociação futura, numa estrutura conhecida como *livro de ofertas*. Segundo Silva, “O livro de ofertas é, portanto, uma lista que traz todas as ofertas limitadas de compra e venda disponíveis – ainda não executadas – em cada ponto no tempo” (SILVA, 2013).

No capítulo 2, apresentaremos em detalhes a dinâmica de negociação do livro de ofertas.

1.3 FATOS ESTILIZADOS

De acordo com Cooley, “um fato estilizado é uma aproximação teórica de um fenômeno observado empiricamente” (COOLEY, 1995, p. 3). Fatos estilizados podem ser utilizados para diversos propósitos, no nosso trabalho consideraremos três dos principais, a saber, distribuição não normais dos retornos, também conhecido como caudas grossas, aglomeração de volatilidade e volume de negociação elevado e persistente, para verificar como são afetados pela heterogeneidade dos perfis dos agentes.

No capítulo 3, descreveremos esses fatos estilizados, bem como os estudos a serem realizados nas séries temporais de retornos produzidas pelo simulador para a verificação da ocorrência deles.

1.4 AGENTES DO MERCADO DE AÇÕES

Na visão clássica da economia, o mercado financeiro deve ser estudado por meio de uma microeconomia reducionista, na qual “os agentes são entendidos como unidades de decisão clarividentes, dotadas de racionalidade grosso modo perfeita e já constituídas

como tais em face das escolhas” (PRADO, 2006, p. 305). Segundo Simon, esta visão implica em que os agentes possuam uma racionalidade substantiva na qual “o conhecimento é pleno, as expectativas são corretas e o resultado da ação é certo” (SIMON, 1976). Já na visão de mercado financeiro como sistema complexo, pressupõe-se que os agentes possuam comportamentos heterogêneos e atuem sem ter pleno conhecimento de todas as informações do mercado, havendo a possibilidade de que suas expectativas não estejam corretas e sem que o resultado da ação seja certo.

No modelo aqui desenvolvido, os agentes poderão ter perfis fundamentalistas, grafistas, híbridos ou aleatórios. No capítulo 4, detalharemos cada um desses perfis, bem como as estratégias utilizadas por cada um deles, além do mecanismo de aprendizagem e evolução desses agentes.

1.5 MODELAGEM DO MERCADO DE AÇÕES

Neste trabalho, o mercado de ações será estudado como um sistema complexo, modelado por meio de um mercado artificial de ações, que é um caso particular de modelo orientado a agentes. Antes, entretanto, de descrevermos com mais detalhes essas metodologias, falaremos brevemente sobre a modelagem de sistemas complexos.

1.5.1 Modelagem de sistemas complexos

O estudo dos sistemas complexos tem evoluído muito nas últimas décadas e uma série de metodologias, técnicas e abordagens têm sido usadas para a construção de modelos para os sistemas estudados, dentre as quais, cabe destacar os sistemas dinâmicos, os autômatos celulares, a percolação, o estudo dos fractais, a teoria do caos, o estudo de redes complexas e os modelos orientados a agentes.

Sistemas dinâmicos são sistemas cujo estado muda com o tempo. Foram estudados pela primeira vez por Galileu no século XVI e, com o desenvolvimento do cálculo diferencial, passaram a ser modelados usualmente por meio de equações diferenciais. Os modelos de dinâmica populacional, como o Malthusiano e o Logístico, são exemplos deste tipo de modelagem.

Autômatos celulares (*cellular automata* - *CA*) são modelos matemáticos propostos inicialmente por John Von Neumann e Stanislaw Ulam no começo dos anos 50. São definidos por uma grade de células identificadas por estados que evoluem no tempo de acordo com regras de interação locais. São utilizados para o estudo da formação de padrões em fenômenos da natureza, comportamentos sociais, ambientais e biológicos.

Percolação surgiu inicialmente como um conceito relacionado ao transporte de um fluido através de um meio poroso e, posteriormente, transformou-se em uma parte da teoria da probabilidade com aplicações em mecânica, eletricidade, prospecção de petróleo, propagação de epidemias e propagação de incêndios. A teoria da percolação trabalha basicamente com o número e as propriedades de aglomerados definidos de forma que, dada uma grade quadrada de tamanho finito na qual cada quadrícula tem uma probabilidade p de estar ocupada (por um fluido, uma residência, uma unidade de geração de energia, etc) e uma probabilidade $(1 - p)$ de estar vazia, diz-se que duas quadrículas são primeiras vizinhas quando elas têm um lado em comum. Se duas quadrículas primeiras vizinhas estão ambas ocupadas e todas as suas primeiras vizinhas estão vazias, então dizemos que elas formam um aglomerado de duas quadrículas ocupadas. Quando a probabilidade p for pequena, as quadrículas ocupadas ficam distribuídas isoladamente ou formam pequenos aglomerados e quando p atinge um determinado valor, surge um aglomerado que possivelmente se torna dominante sobre os outros e, subitamente, abrange toda a área de estudo conectando os dois lados opostos da grade. Tal aglomerado é chamado de aglomerado percolante.

Fractais são objetos geométricos cujas principais características são auto semelhança, complexidade e dimensão. A auto semelhança é verificada quando o mesmo aspecto visual se repete em qualquer escala, ou seja, uma parte da figura se assemelha à figura como um todo. A complexidade é definida pelo fato de que as figuras são construídas pela iteração da mesma regra de construção indefinidamente. A dimensão fractal é uma quantidade fracionária que representa o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém. Os fractais são utilizados na medicina (como método de diagnóstico quantitativo de várias patologias), na eletrônica (desenho de antenas, projeto de fibras ópticas), no mercado financeiro (distribuição das flutuações dos preços de commodities), e em muitas outras áreas.

Teoria do caos tem seu marco inicial em 1963, quando o meteorologista americano Edward Lorenz utilizava sistemas computacionais para aumentar a confiabilidade das previsões meteorológicas e, ao tentar repetir uma experiência, trancou inadvertidamente

as casas decimais dos dados que utilizava, e percebeu que os resultados obtidos diferiam significativamente dos produzidos anteriormente. Este fenômeno ficaria conhecido posteriormente como “efeito borboleta” numa referência à alegoria de que o bater de asas de uma borboleta em Pequim poderia provocar um furacão em Nova Iorque. As observações de Lorenz o levaram a concluir que a previsão do tempo em um intervalo de tempo longo não seria possível. Sistemas como o de Lorenz passaram a ser denominados como “caóticos determinísticos” (ou simplesmente “caóticos”) pelo fato de que, embora apresentem um comportamento imprevisível, a sua dinâmica é governada por equações determinísticas. A principal diferença entre os sistemas complexos caóticos determinísticos e os sistemas aleatórios estocásticos é a sensibilidade às condições iniciais. Nos sistemas estocásticos, as mesmas condições iniciais podem conduzir a resultados diferentes, o que não ocorre nos sistemas caóticos determinísticos.

Redes complexas são estudadas desde o século XVIII, quando Euler propôs uma solução para o problema das pontes de Königsberg, originando a teoria dos grafos. Desde então, a evolução da teoria das redes está entrelaçada à evolução da teoria dos grafos. Grafos são estruturas matemáticas constituídas por vértices conectados uns aos outros por meio de arestas, e a teoria desenvolvida sobre estas estruturas permitiu o estudo de características muito peculiares das redes, como a centralidade (o vértice mais central) e a conectividade (vértices com maior número de conexões). Dentre os principais exemplos de redes complexas, estão as redes sociais, que são constituídas por indivíduos representados por vértices, e pelas interações entre eles, representadas por arestas. A centralidade e a conectividade são usadas, por exemplo, para determinar quais indivíduos se relacionam melhor com os demais ou para identificar os indivíduos mais influentes.

Modelo orientado a agentes é a metodologia de modelagem que utilizaremos neste trabalho, por isso, será explicada com mais detalhes no tópico seguinte.

1.5.2 Modelo orientado a agentes

Um modelo orientado a agentes é um sistema computacional que simula um ambiente cujos participantes (os agentes) interagem entre si e com o ambiente. Tais modelos são bastante adequados para representar sistemas complexos como os mercados financeiros, nos quais os pesquisadores dispõem de “dados de qualidade muito alta em uma frequência alta, que dão a eles um conjunto extensivo de fatos e características a partir do qual trabalhar.

Eles também são bem organizados, centralizados e negociam produtos homogêneos de uma maneira geralmente eficiente em relação a mercados de outros produtos e serviços” (LEBARON, 2001).

Os sistemas orientados a agentes permitem o desenvolvimento de simuladores que apresentam como principais características:

- *heterogeneidade*: é possível criar tantos tipos de agentes quantos sejam necessários, cada um com características e comportamentos próprios;
- *interatividade*: as ações de um agente produzem efeitos nos agentes a ele relacionados, direta ou indiretamente, e vice-versa. Além disso, as ações dos agentes produzem efeitos no meio ambiente e as mudanças ocorridas no meio ambiente produzem efeitos nos agentes;
- *limitação de racionalidade*: o nível de “racionalidade” de cada agente pode variar desde o completamente aleatório (agentes de inteligência zero) até o que for definido pela teoria como perfeitamente racional, passando por todas as gradações intermediárias. Na definição de cada agente, é possível até mesmo simular comportamentos irracionais decorrentes de tendências psicológicas e crenças;
- *completo controle sobre os parâmetros*: por mais detalhado que seja, um modelo nunca representa completamente a realidade que ele modela. A definição do grau de detalhamento do modelo depende dos seus objetivos, sendo que um modelo destinado a fazer previsões exige um grau de detalhamento muito maior do que um modelo destinado a fazer análises comportamentais e, por isso, tem um custo computacional muito maior. Num modelo orientado a agentes, o controle sobre os parâmetros (como quantidade de tipos de agentes, número inicial de agentes de cada tipo, escala de tempo, regras de evolução, etc) permite que se defina um grau de detalhamento adequado aos objetivos do modelo.

1.5.3 Mercados artificiais de ações

Um mercado artificial de ações (*artificial stock market - ASM*) é um simulador computacional do mercado de ações que utiliza a técnica de modelagem orientada a agentes.

Inúmeros modelos de mercados artificiais de ações podem ser encontrados na literatura, tais como o Santa Fe ASM (PALMER et al., 1994), o modelo de Lux e Marchesi (LUX; MARCHESI, 1999), o modelo de Matassini e Franci (MATASSINI; FRANCI, 2000), o Genoa ASM (RABERTO et al., 2001) e o modelo de Preis, Golke, Paul e Schneider (PREIS et al., 2007), apenas para citar alguns. Cada um deles, com suas peculiaridades, foi utilizado para analisar diferentes aspectos do mercado de ações. Foge ao escopo do presente trabalho fazer uma análise aprofundada desses modelos, apenas comentaremos brevemente os modelos de Lux e Marchesi e o Genoa ASM, destacando, em seguida, quais de suas características foram aproveitadas no modelo aqui desenvolvido.

O modelo de Lux e Marchesi, também conhecido pelas siglas LMM (*Lux-Marchesi model*) e SSM (*stochastic simulation model*), é composto por dois tipos de agentes: os fundamentalistas e os grafistas, sendo que esses últimos são subdivididos entre otimistas e pessimistas. Com uma dada probabilidade, agentes fundamentalistas podem se transformar em grafistas e vice-versa e agentes grafistas podem passar de otimistas para pessimistas e vice-versa. Os fundamentalistas emitem uma ordem de compra caso o preço corrente da ação esteja abaixo do preço fundamental e emite uma ordem de venda caso contrário. Entre os grafistas, que no modelo são chamados de *noise traders*, os otimistas emitem somente ordens de compra e os pessimistas emitem somente ordens de venda. A cada passo da simulação, o preço da ação pode variar para cima ou para baixo aleatoriamente, de acordo com uma distribuição Gaussiana. A utilização desse modelo permite verificar se algum perfil predomina ao final de um período de negociações, para um dado conjunto de parâmetros iniciais. Em relação aos fatos estilizados, com a execução desse modelo, verificou-se caudas grossas na distribuição dos retornos e aglomeração de volatilidade.

O Genoa ASM, também conhecido pela sigla GASM, é composto por três tipos de agentes: os fundamentalistas, os grafistas e os aleatórios, não havendo possibilidade de troca de perfil entre os agentes. Os fundamentalistas, assim como no modelo LMM, emitem uma ordem de compra caso o preço corrente da ação esteja abaixo do preço fundamental e emite uma ordem de venda caso contrário. Os grafistas, que no modelo são chamados de *momentum traders*, emitem ordem de compra ou de venda dependendo da tendência dos preços passados, se a tendência for de alta, emite uma ordem de compra, se a tendência for de baixa, emite uma ordem de venda. Todos os agentes aleatórios emitem ordens que

podem ser de compra ou de venda com probabilidade igual a 0,5. O modelo possui um mecanismo de negociação que procura reproduzir de maneira realista os livros de ofertas limitadas. Os agentes possuem limitações de dinheiro e de quantidade de ações para negociar e nem todos os agentes estão engajados em negociações em cada rodada de negociações.

No modelo desenvolvido para este trabalho, procuramos reproduzir as características do modelo GASM descritas acima, com três modificações importantes. A primeira é a inclusão do perfil híbrido. Agentes com esse perfil podem agir tanto como grafistas quanto como fundamentalistas em cada rodada de negociação, permitindo que se faça um estudo de qual desses perfis predomina ao final de um período de negociações, assim como no modelo de Lux e Marchesi. Outra modificação importante é o mecanismo de aprendizagem por reforço desenvolvido para os agentes não aleatórios. Finalmente, os agentes negociam por meio de estratégias, em vez de simplesmente emitirem ordens de compra ou de venda sem conexão com negociações anteriores.

Por meio da análise dos resultados produzidos por diversas execuções do modelo desenvolvido, pretendemos verificar a influência da heterogeneidade dos agentes em três fatos estilizados, a saber, a distribuição não normal dos retornos, a aglomeração da volatilidade e o volume de negociação elevado, além da adoção de perfil por parte dos agentes híbridos.

No capítulo 5, detalharemos as características do modelo desenvolvido nesse trabalho, no capítulo 6, descreveremos a execução desse modelo e, no capítulo 7, discutiremos os resultados produzidos.

2 LIVRO DE OFERTAS

Em mercados financeiros como o da BM&FBovespa, agentes que desejam negociar ações emitem ordens de compra ou de venda, nas quais constam o preço e o volume desejados. No caso das ordens de compra, o preço indica o limite máximo que o agente está disposto a pagar por ação e, no caso das ordens de venda, indica o limite mínimo que está disposto a aceitar por ação. Por isso, tais ordens são chamadas de *ordens limitadas*. Nem todas as ordens limitadas emitidas conseguem ser negociadas assim que chegam à bolsa. Se não houver uma contraparte que cubra a oferta (uma ordem de venda com preço menor ou igual ao preço máximo inscrito na ordem de compra emitida, ou uma ordem de compra com preço maior ou igual ao preço mínimo inscrito na ordem de venda emitida), a ordem é registrada num livro de ofertas para ficar em espera. Em termos de modelagem, o livro de ofertas é uma lista de filas de espera. Cada fila contém somente ordens de compra ou somente ordens de venda com o mesmo preço.

Em cada instante do ciclo de negociação, todas as filas de espera que contêm ordens de compra sempre estão associadas a preços estritamente menores do que os das filas de espera que contêm ordens de venda. O maior preço ao qual está associada uma fila de espera que contém ordens de compra é chamado de *bid* e a fila associada a esse valor é chamada de *fila bid*. O menor preço ao qual está associada uma fila de espera que contém ordens de venda é chamado de *ask* e a fila associada a esse valor é chamada de *fila ask*. O *spread* é a diferença entre o ask e o bid, e o *preço de mercado* é igual a média entre bid e ask, caso essas duas filas existam, ou ao bid, caso somente exista a fila bid, ou ao ask, caso somente exista a fila ask.

2.1 DINÂMICA DE NEGOCIAÇÃO

Ilustramos por meio das figuras a seguir a dinâmica de negociação em um ambiente de bolsa com livro de ofertas. Para facilitar o entendimento do processo, consideraremos que o volume de todas as ordens é de uma única ação.

Figura 1 – Início das negociações

Figura elaborada pelo autor

A figura 1 é um exemplo de situação em que não há negociação e há alteração do preço de mercado da ação. O agente 15 emite uma ordem de compra no valor de R\$ 51,235. Essa ordem passa a ser a primeira da fila bid e, uma vez que ainda não existe a fila ask, o novo preço médio passa a ser o bid, ou seja, R\$ 51,235.

Figura 2 – Primeira ordem da fila ask

Figura elaborada pelo autor

A figura 2 é outro exemplo de situação em que não há negociação e há alteração do preço de mercado da ação. O agente 470 emite uma ordem de venda no valor de R\$ 51,272. Como essa ordem possui um valor maior do que o bid, não há negociação. A ordem passa a ser a primeira da fila ask e o novo preço de mercado da ação passa a ser a média entre R\$ 51,235 e R\$ 51,272, ou seja, R\$ 51,253, implicando em uma alta no preço de mercado.

Figura 3 – Alteração no bid sem negociação

Figura elaborada pelo autor

Na figura 3 temos mais um exemplo de situação em que não há negociação e há alteração do preço de mercado da ação. O agente 248 emite uma ordem de compra no valor de R\$ 51,241. Como essa ordem possui um valor menor do que o ask, não há negociação, entretanto, como possui um valor maior do que o bid, ela passa a ser a primeira ordem da nova fila bid e a antiga fila bid passa a ser somente mais uma fila de espera. O novo preço de mercado da ação passa a ser a média entre R\$ 51,241 e R\$ 51,272, ou seja, R\$ 51,256, implicando em uma alta no preço de mercado.

Figura 4 – Uma nova fila de espera para ordens de compra

Figura elaborada pelo autor

A figura 4 é um exemplo de situação em que não há negociação nem há alteração do preço de mercado da ação. O agente 6 emite uma ordem de compra no valor de R\$ 51,237. Como essa ordem possui um valor menor do que o ask, não há negociação, além disso, ela possui um valor menor do que o bid, então, também não há alteração do preço de mercado. Simplesmente cria-se uma nova fila de espera para o valor da ordem, de maneira a manter as filas em ordem crescente de valor.

Figura 5 – Uma nova fila de espera para ordens de venda

Figura elaborada pelo autor

A figura 5 é outro exemplo de situação em que não há negociação nem há alteração do preço de mercado da ação. O agente 92 emite uma ordem de venda no valor de R\$ 51,278. Como essa ordem possui um valor maior do que o bid, não há negociação, além disso, ela possui um valor maior do que o ask, então, também não há alteração do preço de mercado. Simplesmente cria-se uma nova fila de espera para o valor da ordem, de maneira a manter as filas em ordem crescente de valor.

Figura 6 – Uma nova ordem na fila bid

Figura elaborada pelo autor

Na figura 6 temos mais um exemplo de situação em que não há negociação nem há alteração do preço de mercado da ação. O agente 739 emite uma ordem de compra no valor de R\$ 51,241. Como esse valor é igual ao bid, simplesmente registra-se essa ordem no final da fila bid.

Figura 7 – Negociação por emissão de ordem de venda

Figura elaborada pelo autor

A figura 7 é um exemplo de situação em que há negociação e não há alteração do preço de mercado da ação. O agente 39 emite uma ordem de venda no valor de R\$ 51,230. Como essa ordem possui um valor menor do que o bid, haverá negociação. Note que o valor dessa ordem é menor do que o valor de todas as ordens de compra emitidas até o momento, entretanto, ela será negociada pelo bid com a primeira ordem da fila bid, aquela mais antiga, emitida pelo agente 248. Após a negociação, a ordem emitida pelo agente 248 é retirada do livro de ofertas, passando a ordem emitida pelo agente 739 a ser a primeira da fila bid. Como a fila bid não ficou vazia após a negociação, não há alteração no bid e, portanto, não há alteração do preço de mercado da ação. A ordem de venda emitida pelo agente 39 nem é registrada no livro de ofertas.

Figura 8 – Alteração no ask sem negociação

Figura elaborada pelo autor

Na figura 8 temos um novo exemplo de situação em que não há negociação e há alteração do preço de mercado da ação. O agente 615 emite uma ordem de venda no valor de R\$ 51,269. Como essa ordem possui um valor maior do que o bid, não há negociação, entretanto, como possui um valor menor do que o ask, ela passa a ser a primeira ordem da nova fila ask e a antiga fila ask passa a ser somente mais uma fila de espera. O novo preço de mercado da ação passa a ser a média entre R\$ 51,241 e R\$ 51,269, ou seja, R\$ 51,255, implicando em uma baixa no preço de mercado.

Figura 9 – Negociação por emissão de ordem de compra

Figura elaborada pelo autor

A figura 9 é um exemplo de situação em que há negociação e há alteração do preço de mercado da ação. O agente 21 emite uma ordem de compra no valor de R\$ 51,280. Como essa ordem possui um valor maior do que o ask, haverá negociação. Ainda que o valor dessa ordem seja maior do que o valor de todas as ordens de venda emitidas até o momento, ela será negociada pelo ask com a única ordem da fila ask. Após a negociação, a ordem da fila ask é retirada do livro de ofertas, de maneira que a fila ask fica vazia. A nova fila ask volta a ser aquela que contém a ordem com valor de R\$ 51,272, havendo alteração no preço de mercado da ação, que volta a ser a média entre R\$ 51,241 e R\$ 51,272, ou seja, R\$ 51,256, implicando em uma alta no preço de mercado. A ordem de compra emitida pelo agente 21 nem é registrada no livro de ofertas.

Assim, quando um agente emite uma ordem, podem acontecer quatro consequências possíveis:

- registro da ordem no livro de oferta com alteração do preço de mercado da ação;
- registro da ordem no livro de oferta sem alteração do preço de mercado da ação;
- ocorrência de negociação com alteração do preço de mercado da ação;
- ocorrência de negociação sem alteração do preço de mercado da ação.

O preço de mercado da ação aumentará caso ocorra uma das duas possibilidades a seguir:

- alta do bid, provocada pela emissão de uma ordem de compra cujo valor seja maior do que o bid atual, mas seja menor do que o ask;
- alta no ask, provocada pela emissão de uma ordem de compra cujo valor seja maior do que o ask quando a fila ask possuir apenas uma ordem.

Por outro lado, o preço de mercado da ação cairá caso ocorra uma das duas possibilidades a seguir:

- baixa do ask, provocada pela emissão de uma ordem de venda cujo valor seja menor do que o ask atual, mas seja maior do que o bid;
- baixa no bid, provocada pela emissão de uma ordem de venda cujo valor seja menor do que o bid quando a fila bid possuir apenas uma ordem.

Com isso, observamos que a dinâmica de preços de uma ação negociada num ambiente de bolsa de valores com livro de ofertas é um comportamento emergente do sistema complexo composto pela bolsa e pelos agentes que atuam nela, pois, embora decorra da interação entre esses componentes, é independente dos objetivos individuais deles.

3 FATOS ESTILIZADOS

Conforme dito anteriormente, analisaremos as séries temporais de retornos produzidas pelo simulador para verificarmos influência da heterogeneidade dos agentes em três dos principais fatos estilizados, que são a distribuição não normais dos retornos, a aglomeração de volatilidade e o volume de negociação elevado e persistente. Nos exemplos apresentados a seguir para ilustrar tais fatos estilizados, consideraremos a série temporal de preços da ação PETR4 no período de 28/04/2008 a 29/12/2011.

3.1 DISTRIBUIÇÃO DE RETORNOS NÃO NORMAIS

Uma das mais antigas e desafiadoras questões dos investidores em mercados de capitais é a questão da previsibilidade, sendo o estudo da distribuição dos retornos essencial para a elaboração de modelos de previsão.

Modelos clássicos de previsão de preços utilizados no mercado de capitais, tais como o modelo *Martingal* e os modelos de *Passeio Aleatório 1, 2 e 3* (*Random Walk, 2 e 3*, ou *RW1, RW2 e RW3*), descritos em (CAMPBELL; LO; MACKINLAY, 1997) pressupõem a distribuição normal dos retornos. Entretanto, estudos empíricos mostraram que eventos extremos ocorrem com mais frequência do que o previsto numa distribuição Gaussiana. De fato, Ehrentreich verificou que “dados financeiros reais têm mais massa de probabilidade nas caudas e no centro, em outras palavras, eles têm caudas grossas e picos altos” (EHRENTREICH, 2008, p.57).

Na figura a seguir, comparamos a distribuição normal com a distribuição dos retornos diários da ação PETR4, calculados pela equação $r_i = (p_i - p_{i-1})/p_{i-1}$, onde r_i é o retorno diário, p_i é o preço de fechamento e p_{i-1} é o preço de fechamento do dia anterior, para o i -ésimo dia:

Figura 10 – Distribuição de retornos da ação PETR4

Fonte: BM&FBovespa. Cálculos e gráfico elaborados pelo autor

Podemos verificar retornos maiores do que os previstos pela distribuição normal em ambas as extremidades, configurando caudas grossas, além de uma quantidade de ocorrências no centro da distribuição bem maior do que a prevista na distribuição normal, configurando pico alto.

A ocorrência de caudas grossas pode ser verificada numericamente pelo cálculo da *curtose* da série retornos, calculada pela seguinte fórmula:

$$K(X) = \frac{E(X - E(X))^4}{[E[(X - E(X))^2]^2} \quad (1)$$

Quando a *curtose* calculada por essa fórmula é maior do que 3, dizemos que ela é *leptocurtose* e indica a ocorrência de caudas grossas.

Para a série de retornos da ação PETR4 no período estudado, a curtose calculada foi de 3,560055, verificando-se, desta maneira, a ocorrência de caudas grossas.

3.2 AGLOMERAÇÃO DE VOLATILIDADE (textitVOLATILITY CLUSTERING) DOS RETORNOS

Na figura a seguir, apresentamos o gráfico das volatilidades diárias da ação PETR4, calculados pela equação $v_i = \log(p_i/p_{i-1})$, onde v_i é a volatilidade diária, p_i é o preço de fechamento e p_{i-1} é o preço de fechamento do dia anterior, para o i -ésimo dia:

Figura 11 – Volatilidade da ação PETR4

Fonte: BM&FBovespa. Cálculos e gráfico elaborados pelo autor

Percebemos períodos de aglomeração de altas volatilidades seguidos de períodos de aglomeração de baixas volatilidades, embora não consigamos definir claramente onde eles começam e onde terminam. Segundo Ehrentreich:

A aglomeração de volatilidade (*volatility clustering*) como segundo fato estilizado nota que estes grandes retornos frequentemente tendem a emergir em aglomerações (*clusters*), isto é, grandes retornos tendem a ser seguidos por grandes retornos, de qualquer sinal. Isso também é conhecido como *persistência de volatilidade*. (EHRENTREICH, 2008, p. 60):

Para obtermos uma melhor visualização da aglomeração de volatilidade, utilizaremos uma variação do conceito de índice de aglomeração utilizado por Tseng e Li (TSENG; LI, 2012, p. 12-14). Para começar, nós introduzimos uma janela móvel com um certo tamanho para fazer a varredura através da série temporal das volatilidades. Em seguida, contamos o número total de dias de negociação dentro dessa janela cuja flutuação nos retornos seja maior do que um determinado limite superior, que chamaremos de contagem de alta volatilidade. Contamos, também, o número total de dias de negociação dentro da janela cuja flutuação nos retornos seja menor do que um determinado limite inferior, que chamaremos de contagem de baixa volatilidade. Os limites superior e inferior são calculados da seguinte maneira:

$$t_{div} = (v_{max} - v_{min})/n_{div}$$

$$l_{sup} = v_{max} - t_{div}$$

$$l_{inf} = v_{min} + t_{div}$$

Onde:

- v_{max} é a maior volatilidade na janela;
- v_{min} é a menor volatilidade na janela;
- n_{div} é o número de divisões entre a maior e a menor volatilidades;
- t_{div} é o tamanho de cada divisão entre a maior e a menor volatilidades;
- l_{sup} é o limite superior;
- l_{inf} é o limite inferior.

Se a contagem de alta volatilidade for maior do que a contagem de baixa volatilidade, o índice de aglomeração de volatilidade do dia inicial da janela será definido como 1, se a contagem de alta volatilidade for menor do que a contagem de baixa volatilidade, o índice de aglomeração de volatilidade do dia inicial da janela será definido como -1 , se as contagens forem iguais, o índice será 0. Movemos, então, a janela adiante em um dia e repetimos o processo até varrer toda a série temporal. Na figura a seguir, apresentamos os gráficos do índice de volatilidade para uma janela de 10 dias e 4 divisões entre a maior e a menor volatilidades:

Figura 12 – Índices de aglomeração de volatilidade da ação PETR4

Gráfico elaborado pelo autor

Pela figura, percebemos claramente períodos de concentração de altas volatilidades, em azul, seguidos de períodos de concentração de baixas volatilidades, em vermelho.

3.2.1 Classificação da distribuição de aglomerações de volatilidade

Na tabela a seguir, são apresentados os tamanhos de cada sequência de índices de aglomeração de volatilidade iguais.

Tabela 1 – Tamanho das sequências de índices de aglomeração de volatilidade iguais

Sequência	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tamanho	100	2	5	1	12	3	46	10	48	3	52	6
Sequência	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Tamanho	17	1	38	3	49	2	76	3	37	6	33	4
Sequência	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Tamanho	15	1	58	1	112	2	2	2	22	1	3	3

Tabela elaborada pelo autor

Consideraremos como aglomeração de alta volatilidade as sequências maiores do que 2 dias seguidos cujo índice de aglomeração de volatilidade seja igual a 1, indicados na

tabela em azul. Consideraremos como aglomeração de baixa volatilidade as sequências maiores do que 2 dias seguidos cujo índice de aglomeração de volatilidade fosse igual a -1 , indicados na tabela em vermelho. Sequências de 1 ou 2 dias não foram consideradas como aglomerações de volatilidade e estão indicados na tabela em preto. Os dias com índice de aglomeração de volatilidade igual a 0 foram desconsiderados na contagem.

Além disso, consideramos sequências de 3 a 20 dias como períodos curtos de aglomeração de volatilidade, sequências de 21 a 200 dias como períodos médios de aglomeração de volatilidade e sequências de 201 dias ou mais como períodos longos de aglomeração de volatilidade.

Observando a tabela, pudemos contar 9 períodos curtos de alta volatilidade, 6 períodos curtos de baixa volatilidade e 12 períodos médios de baixa volatilidade. Assim, classificamos a distribuição das aglomerações de volatilidades da ação PETR4 no período considerado como uma distribuição na qual há predomínio de períodos curtos de alta volatilidade e predomínio de períodos médios de baixa volatilidade.

Embora os períodos de concentração de alta volatilidade sejam todos curtos, podemos dizer que se verifica a aglomeração de volatilidade para a ação PETR4 no período analisado.

Finalmente, cabe observar que não encontramos na bibliografia pesquisada nenhuma metodologia de classificação da distribuição de aglomerações de volatilidade.

3.3 VOLUME DE NEGOCIAÇÃO ELEVADO E PERSISTENTE

Dados empíricos e estudos teóricos evidenciaram diversas características importantes do volume de negociação. Em primeiro lugar, nos mercados financeiros reais, o volume de negociação é elevado, muito embora “no mundo de um agente representativo, investidores completamente racionais que dividem as mesmas informações e expectativas obviamente nunca deveriam negociar uns com os outros” (EHRENTREICH, 2008, p. 64). Além disso, Lobato e Velasco mostraram que ele é um processo de longa memória persistente (LOBATO;

VELASCO, 2000).

Na figura a seguir, observamos a distribuição e a evolução da quantidade de negociações da ação PETR4:

Figura 13 – Distribuição e evolução das quantidades diárias de negociações da ação PETR4

Fonte: BM&FBovespa. Gráficos elaborados pelo autor

Podemos verificar que a média das quantidades diárias de negociações (indicada em vermelho na figura 13(b)) é superior a 20.000 e que, na grande maioria dos dias do período analisado, a quantidade diária de negociações foi superior a 10.000.

4 AGENTES, ESTRATÉGIAS E APRENDIZAGEM

Dissemos anteriormente que o mercado de ações artificial desenvolvido para este trabalho é composto por agentes de perfis diferentes, que atuam de acordo com diversas estratégias possíveis e que dispõem de um mecanismo de aprendizagem por reforço. Descrevemos, a seguir, cada um desses perfis e cada uma dessas estratégias e detalhamos o mecanismo de aprendizagem.

4.1 PERFIS DOS AGENTES

Neste modelo, os agentes se comportam de maneira heterogênea, de acordo com seus perfis, que podem ser grafista, fundamentalista, híbrido ou aleatório. Descrevemos, a seguir, cada um deles.

4.1.1 Perfil Grafista

Investidores de perfil grafista negociam a partir da chamada *Análise Técnica*, ou *grafismo*, que parte do princípio de que os preços dos ativos e os volumes negociados seguem certos padrões. Assim, seria possível fazer uma projeção das movimentações futuras do mercado com base na análise dos dados passados. Grafistas operam na Bolsa de Nova Iorque desde a virada do século XIX para o século XX, obtendo lucros muito acima do que pode ser explicado por ganhos aleatórios, a ponto de Charles H. Dow (1851-1902) e William P. Hamilton (1867-1929), terem publicado uma série de 252 editoriais no Wall Street Journal. Esses editoriais se tornaram a base da “Teoria Dow”, descrita em (NELSON, 1903). “Desde que a análise técnica é baseada na suposição de que os mercados não apresentam sequer o menor grau de eficiência, é um anátema para muitos acadêmicos” (EHRENTREICH, 2008, p. 64), muito embora seus resultados sejam verificados empiricamente.

4.1.2 Perfil Fundamentalista

O investidor de perfil fundamentalista avalia os fundamentos econômicos de uma empresa, o contexto macroeconômico no qual ela está inserida e a suscetibilidade da

empresa a esse contexto para definir um *preço fundamental*, também chamado de *preço justo*, para as ações dessa empresa. Se o preço de mercado da ação estiver a seguir do preço fundamental, o investidor esperará um aumento de preço e realizará operações de compra. Se o preço de mercado da ação estiver acima do preço fundamental, o investidor esperará uma queda de preço e realizará operações de venda.

Neste modelo, definiremos os fundamentos econômicos da empresa a partir das orientações de Bodie, para quem:

para determinar o preço adequado da ação de uma empresa, o analista de valores deve prever os dividendos e os ganhos que podem ser esperados da empresa. Este é o coração da análise fundamental, ou seja, a análise dos determinantes de valor, como perspectiva de lucros (BODIE; KANE; MARCUS, 2008, p. 370).

Os agentes fundamentalistas do modelo utilizam o lucro por ação projetado para o ano seguinte e a taxa de crescimento do lucro por ação como parâmetros para avaliar os fundamentos econômicos da empresa, e a taxa básica de juros como parâmetro para avaliar o contexto econômico no qual ela está inserida. Esses parâmetros são utilizados para calcular o preço justo da ação por meio da fórmula de Graham revisada (GRAHAM, 1974, p. 3):

$$PJ = LPA_PROJ.(8,5 + (2.TX_CRESC)).\left(\frac{4,4}{TX_JUR}\right). \quad (2)$$

Onde:

- PJ é o preço justo;
- LPA_PROJ é o lucro por ação projetado para o ano seguinte;
- TX_CRESC é a taxa de crescimento do lucro por ação;
- TX_JUR é a taxa básica de juros.

A constante 8,5 é o lucro por ação esperado para uma empresa com 0% de crescimento e a constante 4,4 é a taxa de retorno esperada. Embora tais constantes tenham sido obtidas empiricamente a partir da realidade dos Estados Unidos na década de 70, continuam sendo amplamente utilizadas hoje em dia por agentes fundamentalistas de diversos mercados do mundo, inclusive no Brasil.

4.1.3 Perfil Aleatório

Existem investidores que não são nem grafistas nem fundamentalista. Não podemos dizer que suas escolhas sejam aleatórias, mas são decorrentes de motivos tão diversos e idiossincráticos que, do ponto de vista de um observador externo, são imprevisíveis. Assim, para fins de resultado agregado, é razoável modelar tais investidores como sendo aleatórios.

Uma característica importante dos agentes aleatórios neste modelo é que eles não possuem processo de aprendizagem.

4.2 ESTRATÉGIAS

Cada agente possui inicialmente um caixa, com uma determinada quantidade de dinheiro, e um portfólio, com uma determinada quantidade de ações. Tanto o caixa quanto o portfólio podem ser alterados por meio de negociações, que são executadas por meio de estratégias. Classificamos as estratégias das seguintes maneiras:

- *pelo objetivo*: podem ser estratégias de especulação ou de reposição;
- *pelo tipo*: podem ser estratégias de compra e revenda, de venda e recompra, somente de compra ou somente de venda;
- *pelo valor com que a ordem é emitida*: pode ser um pouco maior ou um pouco menor do que o último preço de mercado da ação;
- *pelo que o agente faz após a emissão de uma ordem*: o agente pode aguardar até que a negociação da ordem seja efetivada, ou até que sua paciência acabe. Também pode renegociar a ordem emitida um determinado número de vezes, caso a negociação não ocorra.

4.2.1 Estratégias de especulação

São estratégias executadas pelos agentes visando retorno financeiro. São compostas por duas emissões de ordens opostas, uma inicial e outra final, sendo que a ordem final é emitida tão logo a ordem inicial seja negociada. Tais estratégias, se executadas até o fim, ou seja, até o momento em que a ordem final seja negociada, não alteram o portfólio

do agente, mas podem alterar seu caixa tanto positivamente, quanto negativamente. Se o agente acreditar que haverá aumento no preço da ação, deve utilizar uma estratégia de compra e revenda, ou seja, emitir uma ordem inicial de compra e uma ordem final de venda. Se o prognóstico estiver correto, a venda será efetuada por um preço maior do que a compra e a estratégia terá um resultado positivo, senão, a venda será efetuada por um preço menor do que a compra e a estratégia terá um resultado negativo. Por outro lado, se o agente acreditar que haverá queda no preço da ação, deve utilizar uma estratégia de venda e recompra, ou seja, emitir uma ordem inicial de venda e uma ordem final de compra. Se o prognóstico estiver correto, a compra será efetuada por um preço menor do que a venda e a estratégia terá um resultado positivo, senão, a compra será efetuada por um preço maior do que a venda e a estratégia terá um resultado negativo.

Nem sempre a estratégia consegue ser executada até o final e, neste caso, o modelo considera que a estratégia teve retorno zero. Se, ao final da estratégia, não tiver havido negociação com a ordem inicial, não terá havido alteração nem no caixa, nem no portfólio do agente. Se tiver havido negociação somente da ordem inicial, mas não da final, consideraremos que uma eventual diminuição no caixa foi compensada pelo um aumento no portfólio e vice-versa.

Mesmo que haja negociação, ela pode ocorrer num momento posterior ao da emissão da ordem. Nesse caso, o agente pode aguardar um determinado tempo, que depende da sua paciência, para que a ordem emitida seja negociada. Ao final desse tempo, se não tiver havido negociação, o agente encerra a estratégia, cancelando a(s) ordem(ns) emitida(s). O agente também pode tentar renegociar a ordem um determinado número de vezes, caso ela não seja negociada antes de atingir o limite de sua paciência. Renegociar significa retirar uma ordem de compra do livro de ofertas e reinseri-la com um valor um pouco mais alto, ou retirar uma ordem de venda do livro de ofertas e reinseri-la com um valor um pouco mais baixo.

O valor da ordem só é definido no momento de sua emissão. Ordens de compra emitidas com valor um pouco maior do que o último preço da ação ou ordens de venda emitidas com um valor um pouco menor do que o último preço da ação têm mais chance de serem negociadas, mas contribuem menos para o resultado final da estratégia. Por outro

lado, ordens de compra emitidas com um valor um pouco menor do que o último preço da ação ou ordens de venda emitidas com um valor um pouco maior do que o último preço da ação, embora tenham menos chance de serem negociadas, caso o sejam, contribuem de maneira mais positiva para o resultado final da estratégia.

4.2.2 Estratégias de reposição

Caso o agente tente utilizar uma estratégia de compra e revenda, mas não possua caixa suficiente, ou caso tente utilizar uma estratégia de venda e recompra, mas não possua nenhuma ação em seu portfólio, terá que recorrer a uma estratégia de reposição. Uma estratégia de reposição de compra serve para repor o portfólio e uma estratégia de reposição de venda serve para repor caixa. Estratégias de reposição possuem apenas ordem inicial e as considerações sobre o valor da ordem e o que fazer após sua emissão são as mesmas das estratégias de especulação.

Na tabela [2](#), a seguir, são exibidas as possibilidades de estratégias utilizadas no modelo.

Tabela 2 – Estratégias possíveis

Código	Objetivo	Tipo	Valor da ordem inicial ¹	Após emitir ordem inicial	Valor da ordem final ¹	Após emitir ordem final
0	Especulação	Compra e revenda	Menor	Aguarda	Menor	Aguarda
1	Especulação	Compra e revenda	Maior	Aguarda	Menor	Aguarda
2	Especulação	Compra e revenda	Menor	Aguarda	Maior	Aguarda
3	Especulação	Compra e revenda	Maior	Aguarda	Maior	Aguarda
4	Especulação	Compra e revenda	Menor	Aguarda	Menor	Renegocia
5	Especulação	Compra e revenda	Maior	Aguarda	Menor	Renegocia
6	Especulação	Compra e revenda	Menor	Aguarda	Maior	Renegocia
7	Especulação	Compra e revenda	Maior	Aguarda	Maior	Renegocia
8	Especulação	Compra e revenda	Menor	Renegocia	Menor	Aguarda
9	Especulação	Compra e revenda	Maior	Renegocia	Menor	Aguarda
10	Especulação	Compra e revenda	Menor	Renegocia	Maior	Aguarda
11	Especulação	Compra e revenda	Maior	Renegocia	Maior	Aguarda
12	Especulação	Venda e recompra	Menor	Aguarda	Menor	Aguarda
13	Especulação	Venda e recompra	Maior	Aguarda	Menor	Aguarda
14	Especulação	Venda e recompra	Menor	Aguarda	Maior	Aguarda
15	Especulação	Venda e recompra	Maior	Aguarda	Maior	Aguarda
16	Especulação	Venda e recompra	Menor	Aguarda	Menor	Renegocia
17	Especulação	Venda e recompra	Maior	Aguarda	Menor	Renegocia
18	Especulação	Venda e recompra	Menor	Aguarda	Maior	Renegocia
19	Especulação	Venda e recompra	Maior	Aguarda	Maior	Renegocia
20	Especulação	Venda e recompra	Menor	Renegocia	Menor	Aguarda
21	Especulação	Venda e recompra	Maior	Renegocia	Menor	Aguarda
22	Especulação	Venda e recompra	Menor	Renegocia	Maior	Aguarda
23	Especulação	Venda e recompra	Maior	Renegocia	Maior	Aguarda
24	Reposição	Compra	Menor	Aguarda	—	—
25	Reposição	Compra	Maior	Aguarda	—	—
26	Reposição	Compra	Menor	Renegocia	—	—
27	Reposição	Compra	Maior	Renegocia	—	—
28	Reposição	Venda	Menor	Aguarda	—	—
29	Reposição	Venda	Maior	Aguarda	—	—
30	Reposição	Venda	Menor	Renegocia	—	—
31	Reposição	Venda	Maior	Renegocia	—	—

Tabela elaborada pelo autor

Na tabela, são listadas 32 estratégias, sendo 24 de especulação e 8 de reposição. As execuções iniciais do simulador permitiram verificar que nem todas as combinações possíveis de características configuravam estratégias viáveis. Foram retiradas do modelo as estratégias com renegociação tanto após a emissão da ordem inicial, quanto após a emissão da ordem final, pois estas nunca eram executadas até o final. Para que tais estratégias fossem executadas até o final, seria necessário aumentar muito a paciência dos agentes e

¹ Em relação ao preço anterior

isso diminuía muito a quantidade de negociações, pois os agentes ficavam em estado de espera na maior parte das rodadas de negociação, comprometendo a produção de dados para análise.

As execuções iniciais do simulador também permitiram verificar um efeito secundário da execução das estratégias de reposição. Elas contribuem para a frenagem de tendências de alta ou de baixa provocadas por efeito manada, uma vez que são sempre contrárias à tendência. Exemplificando, um agente que tem a intenção de seguir a tendência de compra para posterior revenda, mas não tem caixa, se vê obrigado a vender. Por outro lado, um agente que tem a intenção de seguir a tendência de venda para posterior recompra, mas não possui ações, se vê obrigado a comprar.

4.3 PERCEPÇÃO DA SITUAÇÃO

Como veremos a seguir, é fundamental para o processo de aprendizagem determinar a maneira como os agentes percebem a situação na qual uma determinada estratégia é utilizada. Isto permite que os agentes voltem a utilizar uma estratégia que tenha produzido bons resultados em uma situação anterior igual à atual. Agentes de perfil grafista e de perfil fundamentalista percebem de maneiras diferentes a situação na qual as estratégias são utilizadas. Agentes aleatórios não precisam perceber essa situação, uma vez que não possuem processo de aprendizagem.

4.3.1 Percepção da situação pelos grafistas

Neste modelo, grafistas percebem a situação pela comparação do preço atual da ação com o preço de datas anteriores de curto, de médio e de longo prazos. Cada grafista possui uma base de comparação de médio prazo e uma base de comparação de longo prazo que variam de agente para agente. A base de comparação de curto prazo é o dia anterior ao atual para todos os agentes.

Para cada base de comparação, o agente grafista compara o preço atual da ação com os preços da ação na data base e nos dias anteriores, contando os casos em que o preço de comparação seja estritamente menor do que o preço atual. São considerados somente comparações com preços diferentes do preço atual e o processo é repetido até que sejam feitas três comparações para cada uma das três bases de referência. Assim, a contagem final pode variar entre 0 e 9, totalizando dez valores possíveis, que são utilizados como códigos identificadores da situação.

4.3.2 Percepção da situação pelos fundamentalistas

Neste modelo, os agentes fundamentalistas percebem a situação pela comparação dos valores no ano atual do lucro por ação (LPA) e da relação entre o dividendo pago e o preço por lucro (div-P/L) com valores de anos anteriores desses parâmetros ao atual. O valor do div-P/L no ano atual é comparado com o valor do div-P/L em cada um dos cinco anos anteriores. O valor da LPA do ano atual é comparado com os valores dos LPA de cada um dos quatro anos anteriores ao atual. Durante o processo de comparação são contados os valores de referência estritamente menores do que os valores atuais. Assim, também no caso dos fundamentalistas, a contagem final pode variar entre 0 e 9, totalizando dez valores possíveis, que são utilizados como códigos identificadores da situação.

4.4 PROCESSO DE APRENDIZAGEM

Agentes grafistas, fundamentalistas e híbridos aprendem com suas experiências. Neste modelo, foi utilizado um processo de aprendizagem por reforço que, de acordo com Sutton, “é aprender o que fazer – como mapear situações e ações – de modo a maximizar uma recompensa representada numericamente” (SUTTON; BARTO, 1998). Os principais elementos da aprendizagem por reforço são:

- *recompensa*: define o resultado imediato obtido pela utilização de uma estratégia em uma determinada situação;

- *valor*: define a recompensa esperada no longo prazo pela utilização de uma estratégia em uma determinada situação. O cálculo do valor leva em consideração o fato de que uma estratégia é adotada em uma situação, mas é concluída em outra. Assim, o valor associado a um par (situação, estratégia) é o resultado acumulado das utilizações anteriores da estratégia naquela situação, mais a perspectiva de recompensa futura definida pela máxima recompensa que o agente pode obter na situação em que se encontra quando concluí a estratégia;
- *política*: define a maneira como o agente deve se comportar em cada situação.

4.4.1 Algoritmo *Q-learning*

O algoritmo *Q-learning* modela um processo de aprendizagem por reforço no qual a política é representada por uma matriz Q , também chamada de Q-matriz, cujas linhas são indexadas pelo código da situação percebida pelo agente e cujas colunas são indexadas pelos códigos das estratégias. As células da matriz contêm os valores definidos por:

$$Q(s_t, e_t) = (1 - \alpha) \cdot Q'(s_t, e_t) + \alpha \cdot (r_{t+1} + \gamma \cdot \max_e Q(s_{t+1}, e)). \quad (3)$$

Onde:

- s_t indica a situação no instante t ;
- e_t é a estratégia adotada no instante t ;
- $Q'(s_t, e)$ é o valor anterior associado ao par (s_t, e_t) ;
- $Q(s_t, e_t)$ é o novo valor associado ao par (s_t, e_t) ;
- r_{t+1} é a recompensa imediata resultante da estratégia e_t ;
- α é a taxa de aprendizagem;
- γ é a taxa de desconto de recompensas futuras.

No modelo desenvolvido, agentes grafistas e fundamentalista possuem Q-matrizes com 24 colunas indexadas pelos códigos das estratégias de especulação utilizadas pelos agentes e 10 linhas, indexadas pelos códigos das situações percebidas no momento da utilização da estratégia. Cada agente híbrido tem uma Q-matriz para seu perfil grafista e uma Q-matriz para seu perfil fundamentalista. Caso a estratégia seja concluída, o valor do par (situação, estratégia) é atualizado de acordo com a equação (2).

Não há processo de aprendizagem para estratégias de reposição, uma vez que sempre produzem resultado 0 e sempre são utilizadas quando os agentes não têm escolha.

A dinâmica de aprendizagem dos agentes ficará mais clara com o detalhamento do processo de execução do simulador apresentada a seguir.

4.4.2 Fatores que levaram a escolha do algoritmo *Q-learning*

A escolha do algoritmo *Q-learning* como método de aprendizagem para os agentes não aleatórios se deveu, principalmente, às seguintes características dessa técnica de aprendizagem de máquina:

- é considerada uma das mais importantes técnicas de inteligência artificial para o desenvolvimento de sistemas de aprendizagem por reforço, ou seja, sistemas que “permitem aos agentes adquirirem um conhecimento do ambiente que não estava disponível em tempo de projeto” (SUTTON; BARTO, 1998);
- possibilita que as escolhas dos agentes levem em consideração a experiência passada;
- possibilita que as escolhas dos agentes levem em consideração as perspectivas de resultados futuros (tanto positivos, quanto negativos);
- permite que os agentes possuam taxas de valorização da experiência passada e da perspectiva de resultados futuros diferenciados, permitindo níveis de aprendizagem heterogêneos para os agentes;
- a experiência passada é armazenada na forma de valores acumulados, dispensando armazenamento de históricos, evitando alocação de regiões grandes e sempre crescentes de memória para esse fim;
- permite a utilização do mesmo algoritmo por agentes que percebem a situação do ambiente de maneiras diferentes.

5 SIMULADOR DESENVOLVIDO

Neste trabalho, um mercado de ações artificial foi desenvolvido na forma de um simulador computacional construído em linguagem *C++*. Tal simulador contém um livro de ofertas cujo funcionamento reproduz exatamente o apresentado no capítulo 2 e contém, também, agentes de perfis grafistas, fundamentalistas, híbridos e aleatórios em quantidades que variam de simulação para simulação. No início da simulação, cada agente recebe uma quantidade inicial de dinheiro para compor seu caixa e uma quantidade inicial de ações para compor seu portfólio. Ao longo do período de simulação, cada agente repete ciclos nos quais adotam uma estratégia, executam essa estratégia e, caso consigam executá-la até o final, aprendem com a experiência. Antes, entretanto, de descrever cada um desses passos, apresentaremos algumas simplificações feitas no modelo.

5.1 SIMPLIFICAÇÕES

As limitações de tempo e capacidade computacional disponíveis impuseram algumas simplificações ao modelo. Note que não são simplificações estruturais, como, por exemplo, a suposição de que os agentes detêm todo o conhecimento necessário à tomada de decisões. Antes, são simplificações operacionais, que podem ser removidas em futuros trabalhos e estudos, desde que se disponha da capacidade computacional e do tempo necessários.

5.1.1 Quantidade de papéis negociados

Neste modelo é negociada somente a ação Petrobras PN – PETR4, mas ele está preparado para trabalhar com múltiplas ações, bastando para tanto o acréscimo registros contendo as séries temporais de preços anteriores, dividendos e lucro por ação na lista de mercados do modelo para o período da simulação.

5.1.2 Volume negociado

Na versão final do simulador, o volume de cada ordem emitida é de somente uma ação, mas há versões anteriores em que tal volume podia ser maior, sendo possível restaurar essa característica em futuros trabalhos.

5.1.3 Equiprobabilidade dos parâmetros das estratégias

Quando um agente adota uma nova estratégia, os valores escolhidos para os preços nos momentos das emissões das ordens inicial e final e o código da ação a ser tomada após a emissão das ordens são sorteados considerando-se possibilidades equiprováveis. O estudo da distribuição mais apropriada para o sorteio de tais valores ultrapassa os objetivos deste trabalho. No código desenvolvido, as rotinas para a realização desses sorteios estão segregadas. Se, em futuros trabalhos, houver acesso a estudos que definam as distribuições mais adequadas àqueles parâmetros, tais rotinas podem ser facilmente substituídas.

5.1.4 Parâmetros de aprendizagem constantes

Tanto a taxa de aprendizagem, quanto a taxa de desconto de recompensas futuras, embora variem de agente para agente, permanecem constantes para cada agente ao longo das simulações.

5.2 ADOÇÃO DA ESTRATÉGIA

O processo de adoção de estratégias depende do tipo de simulação que se esteja executando.

Para as simulações de produção de dados, no início da simulação, ou após a conclusão de uma estratégia, os agentes definem o código da situação do momento, conforme descrito em 4.3 e, então, adotam novas estratégias. A maneira com que essa adoção é feita varia de acordo com o perfil.

Agentes aleatórios sorteiam o tipo de estratégia, que, em princípio, deve ser de especulação e, portanto, deve ter um código entre 0 e 23. Cada código pode ser sorteado com probabilidade $\frac{1}{24}$.

Agentes não aleatórios verificam se existe uma estratégia que tenha sido executada em ocorrências anteriores da situação atual com resultados positivos. Para tanto, o agente

toma o maior Q-valor associado à situação atual e se ele for estritamente positivo, utiliza a estratégia associada a esse Q-valor. Explicando de outra maneira, seja s o código da situação atual, e j o índice da estratégia tal que $Q(s, e_j) = \max(Q(s, e_i))$ para $0 \leq i < 24$. Se $Q(s, e_j) > 0$, utiliza a estratégia e_j , senão, adota uma nova estratégia. Agentes híbridos repetem esse processo para cada um de seus perfis e escolhem o perfil que apresentar o maior Q-valor para executar a estratégia adotada. Caso os maiores Q-valores de ambos os perfis sejam menores ou iguais a zero, sorteia um dos dois perfis com probabilidade $\frac{1}{2}$ para executar uma nova estratégia.

Agentes grafistas adotam uma nova estratégia por sorteio, exatamente da mesma maneira que os agentes aleatórios. Ou seja, no início da simulação, agentes grafistas são aleatórios e a experiência adquirida os torna grafistas, uma vez que adotam as melhores estratégias associadas a situações que são percebidas pela análise da evolução dos preços anteriores.

Para adotar uma nova estratégia, agentes fundamentalistas calculam o preço justo da ação pela fórmula de Graham apresentada em 4.1.2. Caso o preço justo calculado seja maior do que o preço atual da ação, adotam uma estratégia de compra e revenda. Caso contrário, adotam uma estratégia de venda e recompra. Os valores das ordens inicial e final e o que fazer após a emissão das ordens são sorteados pressupondo distribuição homogênea das probabilidades.

Caso a estratégia adotada tenha sido de compra e revenda, mas o agente não possua caixa suficiente para comprar uma ação pelo preço de mercado do momento, ele será obrigado a adotar uma estratégia de reposição de venda para repor seu caixa. O valor da ordem de venda e o que fazer após a emissão dessa ordem são sorteados pressupondo distribuição homogênea das probabilidades.

Caso a estratégia adotada tenha sido de venda e recompra, mas o agente não possua ações em seu portfólio, ele será obrigado a adotar uma estratégia de reposição de compra para repor seu portfólio. O valor da ordem de compra e o que fazer após a emissão dessa ordem são sorteados pressupondo distribuição homogênea das probabilidades.

Para as simulações de aprendizagem, o processo de adoção de estratégias é diferente, pois o objetivo é fazer com que cada estratégia seja utilizada o maior número de vezes, visando preencher as Q-matrizes dos agentes não aleatórios. Para alcançar esse objetivo, as estratégias são adotadas de forma circular para cada situação. Assim, para uma determinada situação, se a última estratégia adotada foi a de código 10, a próxima estratégia a ser adotada será a de código 11. Se a última estratégia adotada foi a de código 23, a próxima estratégia a ser adotada será a de código 0. Nesse tipo de simulação, a evolução do preço da ação não tem muito significado e não é registrada, sendo que a única preocupação é que nem dispare, nem vá para zero, comprometendo o preenchimento das Q-matrizes.

5.3 EXECUÇÃO DA ESTRATÉGIA

Cada agente i , possui uma paciência φ_i , que é a quantidade de rodadas que ele aguarda pela negociação de uma ordem emitida por ele, um valor ε_i , que é um valor a ser somado ao preço de mercado no momento da emissão da ordem, ou subtraído dele, para definir o valor da ordem emitida. Há, também, parâmetros comuns a todos os agentes, como o parâmetro μ , que é um valor a ser somado ao da ordem emitida, ou subtraído dele, em caso de renegociação e o parâmetro ν , que é a quantidade de rodadas que ele aguarda pela negociação, antes de renegociar a ação.

A execução da estratégia é feita por meio de uma máquina de estados. Em cada rodada de negociação, a estratégia de um determinado agente pode estar em um dos seguintes estados:

- *EMITE_ORDEM_INICIAL*: o agente deve emitir a ordem inicial assim que chegar sua vez de negociar. É o estado atribuído a toda estratégia no momento da sua adoção;
- *EMITE_ORDEM_FINAL*: o agente deve emitir a ordem final assim que chegar sua vez de negociar;
- *AGUARDA_TEMPO*: agente aguarda a negociação de uma ordem emitida até esgotar sua paciência;
- *AGUARDA_E_RENEGOCIA_INICIAL*: o agente aguarda a negociação da ordem inicial, mas pode renegociar essa ordem enquanto não esgotar sua paciência;

- *AGUARDA_E_RENEGOCIA_FINAL*: o agente aguarda a negociação da ordem final, mas pode renegociar essa ordem enquanto não esgotar sua paciência
- *FIM*: a estratégia foi finalizada ou encerrada.

Uma estratégia é considerada finalizada quando todas as ordens emitidas durante sua execução são negociadas antes que se esgote a paciência do agente, caso contrário, é considerada encerrada.

Para exemplificar a execução de uma estratégia, suponha que o agente 20 seja grafista e esteja pronto para adotar uma nova estratégia, ou seja, ele ainda não executou nenhuma, acabou de encerrar uma, ou acabou de finalizar uma. Suponha, também, que ele tenha adotado a estratégia de código 9, ou por ser a melhor das estratégias já utilizadas com sucesso naquela situação, ou porque ele a sorteou. De acordo com a tabela 2, esta é uma estratégia de especulação de compra e revenda, com o valor da ordem inicial maior do que o preço de mercado no momento da emissão da ordem, na qual o agente pode renegociar a ordem inicial, caso ela não seja negociada até o final da paciência dele, e com o valor da ordem final menor do que o preço de mercado no momento da emissão da ordem, na qual o agente aguarda pela negociação da ordem até que sua paciência se esgote.

O agente 20 inicia a execução da estratégia, que estará no estado *EMITE_ORDEM_INICIAL*, emitindo uma ordem de compra no valor de $p_{inicial} + \varepsilon_{20}$, onde $p_{inicial}$ é o preço de mercado no momento da emissão da ordem inicial, inicia um contador de rodadas total e outro parcial e altera o estado da estratégia para *AGUARDA_E_RENEGOCIA_INICIAL*. Se a ordem não for negociada em até o contador parcial atingir ν rodadas, ele retira a ordem do livro de ofertas, zera o contador parcial e emite uma nova ordem de compra no valor de $v_{atual} + \mu$, onde v_{atual} é o valor da ordem retirada. O agente repete esse processo até que o contador total atinja φ_{20} rodadas. Se não houver negociação ao final dessas rodadas, o agente encerra a estratégia e retorna à fase de adoção de estratégia, alterando o estado da estratégia para *FIM*. Se houver negociação, ele registra o preço pelo qual a ordem foi negociada, que não precisa ser, necessariamente, o valor da ordem emitida e altera o estado da estratégia para *EMITE_ORDEM_FINAL*. Na rodada seguinte, emite uma ordem de venda no valor de $p_{final} - \varepsilon_{20}$, onde p_{final} é o preço de mercado no momento

da emissão da ordem final, zera o contador total e altera o estado da estratégia para *AGUARDA_TEMPO*. Se a ordem não for negociada em até φ_{20} rodadas, o agente encerra a estratégia. Se houver negociação, ele calcula o resultado da estratégia, que é sempre o valor pelo qual a ordem de venda (neste exemplo, a final) foi negociada menos o valor pelo qual a ordem de compra (neste exemplo, a inicial) foi negociada e finaliza a estratégia. Em ambos os casos, o agente retorna à fase de adoção de estratégia, alterando o estado da estratégia para *FIM*.

Sempre que houver uma negociação, ambos os agentes envolvidos na negociação atualizam os estados de suas estratégias e ambos verificam se a estratégia foi finalizada e, em caso afirmativo, executam a fase de aprendizagem, caso não sejam aleatórios.

A execução de uma estratégia de reposição é equivalente à de uma estratégia de especulação que só possua a ordem inicial, não havendo cálculo de resultado, nem fase de aprendizagem após sua finalização.

5.4 APRENDIZAGEM

Todo agente não aleatório possui uma taxa de aprendizagem α_i e uma taxa de desconto de recompensas futuras γ_i . Suponha que, no exemplo anterior, o agente 20 tenha iniciado a estratégia de código 9 na situação 2 e a tenha finalizado na situação 7, com resultado negativo de R\$ 3,00. Suponha também que esse agente possua uma taxa de aprendizagem de 0,60 e uma taxa de desconto de recompensas futuras de 0,80, que o Q-valor para o uso da estratégia 9 na situação 2 fosse 1,00 no momento do início da estratégia e que o máximo Q-valor associado à situação 7 ao final da estratégia seja -2,00. Temos, então, que o novo Q-valor para o uso da estratégia 9 na situação 2, de acordo com a equação (3), passa a ser:

$$Q(2, 9) = 0,40 \cdot 1,00 + 0,60 \cdot (-3,00 + 0,80 \cdot -2,00) = -2,36$$

Note que a estratégia utilizada, além de produzir resultado negativo, levou o agente a uma situação na qual o melhor Q-valor associado a uma a estratégia também era negativo, fazendo com que o novo Q-valor fosse negativo. Isto significa que, na próxima vez que o agente 20 for adotar uma estratégia e se encontrar na situação 2, provavelmente ele não

deva adotar a estratégia 9, a menos que seja por sorteio, no caso em que todas as outras estratégias associadas à situação 2 também possuam Q-valores menores ou iguais a 0.

6 EXECUÇÃO DO SIMULADOR

Todas as simulações foram executadas com os seguintes parâmetros iniciais:

Tabela 3 – Parâmetros do sistema

Parâmetro	Valor
Dias de execução	1.000
Rodadas por dia	210
Quantidade total de agentes	1.000
Quantidade total de ações	15.000
Caixa inicial de cada agente	R\$ 1.000,00
Período de simulação	5 anos a partir de 02/01/2007

Tabela elaborada pelo autor

Os valores iniciais dos parâmetros foram escolhidos empiricamente, após uma série de simulações iniciais, de maneira a possibilitar a execução completa de todas as simulações para coleta de dados no menor tempo possível.

Inicialmente, foram utilizados como parâmetros 833 rodadas por dia e 1.200 dias, para totalizar, aproximadamente, um milhão de rodadas para cada simulação, 2.000 agentes, 50.000 ações no total e caixa inicial de R\$ 10.000,00. Com esses parâmetros, cada simulação durava entre 10 e 13 minutos. Uma série de simulações iniciais mostraram que resultados muito semelhantes poderiam ser obtidos com os parâmetros listados acima, reduzindo o tempo de cada simulação para um intervalo entre 2 e 2,5 minutos, ou seja, cerca de 20% do tempo conseguido inicialmente. Assim, uma série de 50 simulações que deveria durar entre 8 horas e 20 minutos e 10 horas e 50 minutos, passou a ser executada numa faixa entre 1 hora e 40 minutos e 2 horas e 10 minutos

A definição de uma data inicial para as simulações foi feita para que os agentes fundamentalistas pudessem utilizar as séries temporais reais de dividendos e lucro por ação da PETR4² e da taxa básica de juros³ em seus cálculos de preço justo. Essas séries, além da série de preços de fechamento da ação PETR4⁴, foram armazenadas no simulador com início 300 dias úteis antes da data inicial definida, para que as regras de percepção da situação pudessem ser adotadas por grafistas e fundamentalistas desde o primeiro dia de

negociação.

As simulações foram executadas para as seguintes distribuições de perfis:

- somente grafistas;
- somente fundamentalistas;
- somente híbridos;
- somente aleatórios;
- distribuição mista com predomínio de aleatórios⁵.

Para a distribuição que contém somente agentes aleatórios, foram executadas cinquenta simulações de produção de dados. Para cada uma das demais distribuições, antes das execuções das cinquenta simulações de produção de dados, foi executada uma simulação de aprendizagem, na qual as matrizes de aprendizagens (Q-matrizes) de cada agente não aleatório foram preenchidas e gravadas para serem lidas no início de cada simulação de produção de dados.

6.1 CRIAÇÃO DOS AGENTES

A primeira tarefa executada em cada simulação é a criação dos agentes. Nesse momento, cada agente tem seus parâmetros preenchidos da seguinte maneira:

- caixa inicial: todos os agentes recebem R\$ 1.000,00;
- portfólio inicial: todos os agentes recebem 15 ações;
- quantidade de rodadas que o agente aguarda pela negociação de uma ordem emitida (φ): cada agente recebe um valor aleatório entre 1.000 e 2.000;
- valor a ser somado ao preço de mercado no momento da emissão da ordem, ou subtraído dele (ε): cada agente recebe um valor aleatório entre R\$ 0,001 e R\$ 0,005;
- valor a ser somado ao da ordem emitida, ou subtraído dele, em caso de renegociação (μ): todos os agentes recebem R\$ 0,01;

² Fonte: site Bastter.com

³ Fonte: Banco Central do Brasil

⁴ Fonte: BM&FBovespa

⁵ 100 grafistas, 100 fundamentalistas, 200 híbridos e 600 aleatórios

- quantidade de rodadas que o agente aguarda pela negociação, antes de renegociar a ação (ν): todos os agentes recebem 200.

Além desses, agentes não aleatórios também recebem valores para os seguintes parâmetros:

- base de comparação de médio prazo: cada agente recebe um valor aleatório entre 10 e 40;
- base de comparação de longo prazo: cada agente recebe um valor aleatório entre 100 e 240;
- taxa de aprendizagem (α): cada agente recebe um valor aleatório entre 0 e 1;
- taxa de desconto de recompensas futuras (γ): cada agente recebe um valor aleatório entre 0 e 1.

Agentes híbridos recebem os mesmos valores de parâmetros para seu dois perfis.

6.2 DINÂMICA DA EXECUÇÃO

No início de cada rodada de negociação os 1.000 agentes são embaralhados e cada um deles executa a estratégia que estiver adotando, de acordo com o estado em que ela se encontre, conforme descrito no tópico 5.3. Se o agente tiver encerrado ou finalizado uma estratégia na rodada anterior, ou estiver na primeira rodada, ele adotará uma nova estratégia antes de executá-la, conforme descrito no tópico 5.2. Os agentes que finalizarem suas estratégias na rodada, realizam o processo de aprendizagem descrito no tópico 5.4.

Se não se tratar de uma simulação de aprendizagem, ao final de cada dia de simulação (210 rodadas), serão gravadas as estatísticas diárias, compostas pelas seguintes informações totalizadas:

- quantidade de negociações;
- quantidade de ordens de compra emitidas por agentes aleatórios;
- quantidade de ordens de compra emitidas por agentes grafistas;
- quantidade de ordens de compra emitidas por agentes fundamentalistas;
- quantidade de ordens de venda emitidas por agentes aleatórios;

- quantidade de ordens de venda emitidas por agentes grafistas;
- quantidade de ordens de venda emitidas por agentes fundamentalistas;
- número de vezes que um agente híbrido adotou perfil grafista;
- número de vezes que um agente híbrido adotou perfil fundamentalista;
- número de vezes que estratégias de compra e revenda foram finalizadas;
- número de vezes que estratégias de venda e recompra foram finalizadas;
- número de vezes que estratégias de compra foram finalizadas;
- número de vezes que estratégias de venda foram finalizadas;
- número de vezes que estratégias adotadas por agentes aleatórios foram finalizadas;
- número de vezes que estratégias adotadas por agentes grafistas foram finalizadas;
- número de vezes que estratégias adotadas por agentes fundamentalistas foram finalizadas;
- resultado acumulado dos agentes aleatórios;
- resultado acumulado dos agentes grafistas;
- resultado acumulado dos agentes fundamentalistas;
- preço de fechamento máximo da ação;
- preço de fechamento mínimo da ação.

Nem todas essas informações são utilizadas nas análises dos resultados, entretanto, elas foram muito úteis no estabelecimento dos parâmetros iniciais.

Ao final de cada uma das simulações de aprendizagem, é gerada e gravada uma matriz com a soma de todas as Q-matrizes para cada perfil não aleatório, havendo duas matrizes para o perfil híbrido.

7 RESULTADOS

A análise dos resultados referentes aos fatos estilizados foram feitas de acordo com o exposto no capítulo 3. A metodologia utilizada nas demais análises será explicada antes de ser aplicada sobre os resultados apresentados.

Primeiro apresentaremos as análises dos resultados das simulações de aprendizagem, agrupadas pelas distribuições de perfis. Em seguida, apresentaremos as análises dos resultados das simulações de produção de dados, agrupadas pelos fatos estilizados e pela verificação de predomínio de perfil entre os híbridos.

Utilizou-se a linguagem R para gerar todos os gráficos apresentados nas análises dos resultados.

7.1 SIMULAÇÕES DE APRENDIZAGEM

A seguir, apresentamos de maneira gráfica as matrizes dos somatórios das Q-matrizes para cada distribuição de perfis. Cada gráfico de barras representa uma linha da matriz que, por sua vez, está associada a uma situação percebida pelos agentes. No caso dos grafistas, as situações do lado esquerdo são aquelas em que a contagem de preços anteriores menores do que o preço atual é menor do que a contagem de preços anteriores maiores do que o preço atual, indicando uma tendência de queda. As situações do lado direito são aquelas em que a contagem de preços anteriores menores do que o preço atual é maior do que a contagem de preços anteriores maiores do que o preço atual, indicando uma tendência de alta. No caso dos fundamentalistas, as situações do lado esquerdo são aquelas em que a contagem dos dividendos pagos e do lucro por ação anteriores menores do que os valores atuais é menor do que a contagem dos dividendos pagos e do lucro por ação anteriores maiores do que os valores atuais, o que indica uma tendência de queda. As situações do lado direito são aquelas em que a contagem dos dividendos pagos e do lucro por ação anteriores menores do que os valores atuais é maior do que a contagem dos dividendos pagos e do lucro por ação anteriores maiores do que os valores atuais, o que indica uma tendência de alta.

Os gráficos de barras representam as estratégias especulativas, assim, os índices que aparecem nos eixos x desses gráficos representam as colunas da matriz soma das Q -matrizes, ou seja, os códigos das estratégias. Os índices de 0 a 11 estão relacionados às estratégias de compra e revenda e os de 12 a 23 estão relacionados às de venda e recompra. Os índices pares estão relacionados às estratégias em que o valor da ordem inicial é menor do que o preço de mercado no momento da sua emissão e os índices ímpares estão relacionados às estratégias em que o valor da ordem inicial é maior. Outras relações entre os índices e características das estratégias não são de visualização tão fácil no gráfico, por isso, serão comentadas somente quando forem relevantes para a análise de casos particulares dos gráficos.

Note que os valores dos eixos y dos gráficos apresentados são os valores agregados dos Q -valores de todos os agentes não aleatórios, lembrando que os Q -valores são a soma ponderada dos valores anteriores acumulados, do resultado de estratégia recém-finalizada e da expectativa de ganho futuro, expressa pelo máximo Q -valor associado à situação em que a estratégia é finalizada. A primeira observação a ser feita é que a matriz apresentada nos gráficos a seguir representa a aprendizagem agregada de todos os agentes não aleatórios, havendo, certamente, casos particulares que possuem distribuições de Q -valores diferentes da distribuição apresentada pelo agregado. Vale lembrar, também, que os gráficos apresentam retratos do início de cada uma das simulações de produção de dados, que serão alteradas de maneiras diferentes ao longo de cada simulação.

7.1.1 Caso em que há somente grafistas

Figura 14 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de grafistas quando havia somente grafistas

Gráficos elaborados pelo autor

Neste caso, percebemos que, no agregado de todos os agentes não aleatórios, as estratégias 14, 18 e 22 apresentaram valores negativos em todas as situações do lado esquerdo, ou seja, aquelas que indicam tendência de queda, e na situação do lado direito referente à situação 5, em que a contagem de preços anteriores menores do que o preço

atual é maior do que a contagem de preços anteriores maiores do que o preço atual por apenas 1 unidade. Em comum, essas três estratégias têm os fatos de serem de venda e recompra, com o valor da ordem inicial, de venda, menor do que o preço de mercado no momento da emissão e com o valor da ordem final, de compra, maior.

Por outro lado, a partir da situação 3, as estratégias 13, 17 e 21 foram aquelas que produziram os melhores resultados. Elas também são estratégias de venda e recompra, mas com o valor da ordem inicial, de venda, maior do que o preço de mercado no momento da emissão e com o valor da ordem final, de compra, menor. Mesmo nas situações de 0 a 2, essas estratégias produziram bons resultados, embora a estratégia 19 na situação 0 e a estratégia 15 nas situações 1 e 2 produzissem resultados melhores do que pelo menos uma delas. Tanto a estratégia 15, quanto a 19, são de venda e recompra, mas com valores maiores do que o preço de mercado para as ordens inicial e final.

Os fatos inesperados são que as estratégias de venda e recompra produziram resultados agregados melhores, mesmo em situações que indicam tendência de alta e que este tipo de estratégia apresenta um risco maior de produzir resultados negativos em situações que indicam tendência de baixa.

7.1.2 Caso em que havia somente fundamentalistas

Figura 15 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de fundamentalistas quando havia somente fundamentalistas

Gráficos elaborados pelo autor

O primeiro ponto a chamar a atenção nesse caso é que não há gráficos para as situações 1, 8 e 9. Isto se deve ao fato de que, nas séries temporais dos dividendos pagos pela ação PETR4 e dos lucros por ação da Petrobras para os anos considerados, nunca ocorrem a situações em que exatamente 1, 8 ou 9 valores de anos anteriores sejam estritamente

menores do que os últimos valores disponíveis no momento da emissão da ação. desta maneira, as situações 1, 8 e 9 jamais são percebidas pelos agentes fundamentalistas.

Novamente, as estratégias 14, 18 e 22 apresentaram valores negativos, mas num número menor de situações. As estratégias 14, 18 apresentaram valores negativos nas situações 0, 3, 5 e 6, e a estratégia 22, nas situações 0 e 6. Na situação 7, essas três estratégias apresentaram valores próximos de 0.

Novamente, as estratégias 13, 17 e 21 produziram os melhores resultados e, neste caso, para todas as situações cuja percepção é possível pelos agentes fundamentalistas.

7.1.3 Caso em que havia somente híbridos

Figura 16 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de híbridos grafistas quando havia somente híbridos

Gráficos elaborados pelo autor

Mais uma vez, as estratégias 14, 18 e 22 apresentaram valores negativos, e desta vez em todas as situações. Além disso, os valores negativos acumulados para estas estratégias foram bem maiores, em módulo. Novamente, as estratégias 13, 17 e 21 produziram os melhores resultados para todas as situações.

Figura 17 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de híbridos fundamentalistas quando havia somente híbridos

Gráficos elaborados pelo autor

Resultados muito semelhantes aos produzidos no caso em que havia somente agentes fundamentalistas, apenas com os valores negativos acumulados para as estratégias 14, 18 e 22 bem maiores, em módulo.

7.1.4 Caso em que havia todos os perfis com predomínio de aleatórios

Figura 18 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de grafistas quando havia perfis mistos com predomínio de aleatórios

Gráficos elaborados pelo autor

Aqui, as estratégias 14, 18 e 22 apresentaram valores negativos apenas nas situações 0, 1 e 2, ou seja, nas situações de forte tendência de queda. Novamente, as estratégias 13, 17 e 21 produziram os melhores resultados para todas as situações.

Figura 19 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de fundamentalistas quando havia perfis mistos com predomínio de aleatórios

Gráficos elaborados pelo autor

Neste caso, as estratégias 14, 18 e 22 apresentaram valores negativos em quase todas as situações cuja percepção é possível pelos agentes fundamentalistas, sendo a única exceção a situação 4. Já as estratégias 13, 17 e 21 voltaram a produzir os melhores resultados para todas as situações cuja percepção é possível pelos agentes fundamentalistas.

Figura 20 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de híbridos grafistas quando havia perfis mistos com predomínio de aleatórios

Gráficos elaborados pelo autor

Aqui, obteve-se resultado quase idêntico ao verificado para os híbridos grafistas quando havia apenas agentes híbridos.

Figura 21 – Matrizes de aprendizagem acumuladas de híbridos fundamentalistas quando havia perfis mistos com predomínio de aleatórios

Gráficos elaborados pelo autor

Resultado quase idêntico ao verificado para os híbridos fundamentalistas quando havia apenas agentes híbridos.

7.1.5 Análise geral da simulação de aprendizagem

De maneira geral, 6 das 12 estratégias de venda e recompra se destacaram nas simulações de aprendizado. As estratégias 14, 18 e 22, que apresentaram valores agregados

negativos em muitas das situações, quando não em todas, para todos os casos verificados e as estratégias 13, 17 e 21, que produziram os melhores valores agregados em quase todas as situações, quando não em todas, para todos os casos verificados.

Por outro lado, as estratégias de compra e revenda, se em momento algum produziram valores agregados negativos, tampouco produziram os melhores valores agregados. Assim, no agregado, poderíamos dizer que as estratégias de compra e revenda são mais conservadoras do que estratégias de venda e recompra. Outro fato bem visível nos gráficos para esse tipo de estratégia, é que as de índices pares, aquelas em que o valor da ordem inicial, de compra, é menor do que o preço de mercado no momento da sua emissão, sempre produziram valores agregados melhores do que as de índices ímpares, que são aquela em que o valor da ordem inicial é maior o que o preço de mercado no momento da sua emissão.

7.2 SIMULAÇÕES DE PRODUÇÃO DE DADOS

A partir das informações das planilhas de estatísticas diárias produzidas nas simulações de produção de dados, utilizou-se a linguagem R para calcular as seguintes informações, a partir das quais foram produzidos os gráficos apresentados:

- preço médio;
- retorno diário;
- volatilidade;
- índice de volatilidade;
- quantidade de negociações;
- quantidade de vezes em que o perfil grafista foi adotado por agentes híbridos;
- quantidade de vezes em que o perfil fundamentalista foi adotado por agentes híbridos.

7.2.1 Distribuição de retornos não normais

Na figura a seguir, a distribuição dos retornos da ação PETR4 é comparada com os padrões majoritários em cada uma das distribuições de perfis:

Figura 22 – Comparação da distribuição dos retornos da ação PETR4 com os padrões majoritários em cada distribuição de perfis

Fonte: preços da ação PETR4 obtidos da BM&FBovespa. Cálculos e gráficos elaborados pelo autor

No caso em que todos os agentes eram grafistas, o padrão exemplificado na figura acima, ocorreu em 46 das 50 simulações. No caso em que todos os agentes eram fundamentalistas, perfis de distribuição de retornos semelhantes ao apresentado ocorreram em todas as 50 simulações. No caso em que todos os agentes eram híbridos, padrões semelhantes ao apresentado ocorreram em 22 das 50 simulações. Para o caso em que todos os agentes eram aleatórios, todas as distribuições apresentaram padrões semelhantes ao apresentado. Finalmente, para o caso misto, com predominância de aleatórios, todas as distribuições apresentaram padrões semelhantes ao apresentado.

7.2.1.1 Análise das curtoses

Nos gráficos apresentados a seguir, cada barra representa a curtose medida em uma simulação, o linha verde indica a curtose medida para a ação PETR4 no período analisado, a linha vermelha indica o limite acima do qual são verificadas caudas grossas e a linha preta indica a curtose média para as cinquenta simulações feitas para uma dada distribuição de perfis.

Figura 23 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição somente grafistas

Gráfico elaborado pelo autor

Em três das cinquenta simulações para a distribuição que continha somente grafistas foram verificadas curtoses maiores do que três, indicando ocorrência de caudas grossas. A curtose média para essa distribuição foi 1,917399.

Figura 24 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição somente fundamentalistas

Gráfico elaborado pelo autor

Em nenhuma das cinquenta simulações para a distribuição que continha somente fundamentalistas foi verificada curtose maior do que três, indicando que não ocorreram caudas grossas em nenhuma das simulações. A curtose média para essa distribuição foi 1,795182.

Figura 25 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição somente híbridos

Gráfico elaborado pelo autor

Em 4 das cinquenta simulações para a distribuição que continha somente híbridos foram verificadas curtoses maiores do que três, indicando ocorrência de caudas grossas. A curtose média para essa distribuição foi 2,093842.

Figura 26 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição somente aleatórios

Gráfico elaborado pelo autor

Em 7 das cinquenta simulações para a distribuição que continha somente aleatórios foram verificadas curtoses maiores do que três, indicando ocorrência de caudas grossas. A curtose média para essa distribuição foi 2,48013.

Figura 27 – Curtoses medidas para as simulações da distribuição com perfis mistos

Gráfico elaborado pelo autor

Em 3 das cinquenta simulações para a distribuição que continha perfis mistos foram verificadas curtoses maiores do que três, indicando ocorrência de caudas grossas. A curtose média para essa distribuição foi 2,14461.

7.2.1.2 Análise geral da distribuição de retornos

Assim, para este fato estilizado, a única distribuição para a qual não se verificaram caudas grossas em nenhuma simulação foi a que continha somente fundamentalistas. Para as outras simulações, foram verificadas caudas grossas em algumas simulações, sendo que o maior número de ocorrências, assim como as maiores curtoses médias foram verificadas

na distribuição que continha somente agentes aleatórios.

Em estudos futuros, que visem obter uma distribuição mais próxima da real, os resultados obtidos indicam para adoção de perfis mistos, com proporção de agentes aleatórios maior do que a adotada neste trabalho e proporção de agentes fundamentalista menor.

7.2.2 Aglomeração de volatilidade dos retornos

Para a análise da aglomeração de volatilidade, utilizaremos os gráficos de índices de aglomeração de volatilidade produzidos para cada uma das simulações conforme descrito no tópico 3.2 e contaremos as distribuições dos índices de aglomeração de volatilidade classificadas conforme definido no tópico 3.2.1.

Na figura a seguir, os índices de aglomeração de volatilidade da ação PETR4 são comparados com os padrões majoritários em cada uma das distribuições de perfis:

Figura 28 – Comparação dos índices de aglomeração de volatilidade da ação PETR4 com os padrões majoritários em cada distribuição de perfis

Fonte: preços da ação PETR4 obtidos da BM&FBovespa. Cálculos e gráficos elaborados pelo autor

No caso em que todos os agentes eram grafistas, o padrão exemplificado na simulação 24, ocorreu em 28 das 50 simulações com predomínio de períodos curtos de aglomeração de baixa volatilidade. Também foram verificados casos com predomínio de períodos curtos de aglomeração de alta volatilidade em todas as 50 simulações.

No caso em que todos os agentes eram fundamentalistas, todas as 50 simulações apresentaram padrões semelhantes ao exemplificado, com predomínio de períodos curtos de aglomeração tanto para alta volatilidade, quanto para baixa volatilidade.

Para o caso em que havia somente agentes híbridos, em todas as simulações foram verificadas distribuições de índices de aglomeração de volatilidade com predomínio de períodos curtos de aglomeração de alta volatilidade e, em 32 delas, também foram verificados casos com predomínio de períodos curtos de aglomeração de baixa volatilidade, como

na simulação 9 apresentada.

No caso em que havia somente agentes aleatórios, em todas as simulações foram verificadas distribuições de índices de aglomeração de volatilidade com predomínio de períodos curtos de aglomeração de alta volatilidade e, em 29 delas, foi verificado casos com predomínio de períodos curtos de aglomeração de baixa volatilidade, como na simulação exemplificada.

Para o caso de perfis mistos, com predomínio de aleatórios, em todas as simulações foram verificadas distribuições de índices de aglomeração de volatilidade com predomínio de períodos curtos de aglomeração de alta volatilidade e foi verificado predomínio de períodos médios de aglomeração de baixa volatilidade em 43 simulações, como na simulação 8 apresentada.

Desta maneira, a aglomeração de volatilidade é um fato estilizado verificado em todas as simulações realizadas, sempre com predomínio de períodos curtos de aglomeração de alta volatilidade. Para a maioria das distribuições de perfis, também houve predomínio de períodos curtos de aglomeração de baixa volatilidade, principalmente para a distribuição que continha somente agentes fundamentalistas. Foi verificado predomínio de períodos médios de aglomeração de baixa volatilidade, de maneira similar ao que foi verificado na aglomeração de volatilidade real da ação PETR4, apenas para a distribuição mista.

Em estudos futuros, que visem obter aglomerações de volatilidade mais próximas da real, os resultados obtidos indicam para adoção de perfis mistos, com proporção de agentes grafistas maior do que a adotada neste trabalho.

7.2.3 Volume de negociação elevado

Não podemos dizer, na verdade, se os resultados das simulações permitiriam verificar a ocorrência ou não de volume de negociação elevado. O volume de negociações sempre se manteve perene em todas as simulações executadas, explodindo apenas no primeiro dia, quando praticamente todas as ordens eram negociadas assim que emitidas. Mas, a partir do segundo dia, quando o livro de ofertas já estava preenchido com várias filas de

ordens e, na maior parte do tempo, os agente ficavam em espera dentro das estratégias adotadas, tal volume se estabilizava em torno de um média entre 2% e 6% do total de ações. Como esta explosão no volume de negociações é devida a uma característica transitória do simulador durante o primeiro dia, ela será desconsiderada na análise deste fato estilizado.

Se levarmos em conta que, entre os anos de 2005 e 2010, nos quais está contido todo o período considerado nas simulações, o *shares outstanding* (total de ações disponíveis para o público) da Petrobras foi de 4,387 bilhões⁶ e que a média de 20.000 ações PETR4 negociadas por dia nesse período corresponde a 0,00046% daquele total, podemos imaginar que uma média entre 2% e 6% do total de ações signifique um volume altíssimo de negociação. Mas o fato é que as características do simulador, como haver somente uma ação em negociação no mercado artificial desenvolvido e o volume de cada ordem ser de apenas 1 ação, não permitem esse tipo de comparação. O que se pode dizer é que, depois de acertados os parâmetros iniciais, o volume diário de negociação jamais convergiu para zero em nenhuma das 254 simulações executadas.

Entretanto, é fato que os resultados das simulações permitem que se faça uma análise de como a distribuição dos perfis dos agentes influencia no volume de negociação. É o que faremos a seguir.

Na figura a seguir, o volume de negociação da ação PETR4 é comparado com os padrões majoritários em cada uma das distribuições de perfis:

⁶ Fonte: site ycharts.com

Figura 29 – Comparação do volume de negociação da ação PETR4 com os padrões majoritários em cada distribuição de perfis

Fonte: volumes de negociação da ação PETR4 obtidos da BM&FBovespa. Gráficos elaborados pelo autor

Para o caso em que havia somente grafistas, as médias das volumes diários de negociação ficaram entre 500 e 1.000 para todas as 50 simulações. As 50 simulações produziram gráficos de evolução do volume de negociações semelhantes ao da simulação 1 apresentada, com média entre 500 e 1.000. Chama a atenção o fato de não ter havido, para esta distribuição de perfis, explosão no volume de negociações do primeiro dia em nenhuma das simulações.

No caso em que havia somente fundamentalistas, as médias das volumes diários de negociação ficaram em torno de 200. As 50 simulações produziram gráficos de evolução do volume de negociações semelhantes ao da simulação 1 apresentada, com média em torno de 200. Para este caso, o volume de negociação no primeiro dia ficou entre 3.000 e 4.000 em todas as simulações.

Para o caso em que havia somente híbridos, as médias das volumes diários de negociação ficaram entre 500 e 1.000 para todas as 50 simulações, como no caso em que havia somente grafistas. Entretanto, houve explosão do volume de negociações no primeiro dia, como no caso em que havia somente fundamentalistas. As 50 simulações produziram gráficos de evolução do volume de negociações similares ao da simulação 1 apresentada, com média entre 500 e 1.000. Para este caso, o volume de negociação no primeiro dia ficou entre 30.000 e 35.000 em todas as simulações, o que significa um volume cerca de 10 vezes maior do que o verificado no primeiro dia nas simulações do caso em que havia somente fundamentalistas.

As evoluções do volume de negociação para o caso em que havia somente agentes aleatórios ficaram muito semelhante às do caso em que havia somente fundamentalistas, com médias de volumes diários de negociação em torno de 200. As 50 simulações produziram gráficos de evolução do volume de negociações semelhantes ao da simulação 1 apresentada, com média em torno de 200. Para este caso, o volume de negociação no primeiro dia ficou entre 30.000 e 35.000 em todas as simulações, como no caso em que havia somente híbridos.

As evoluções do volume de negociação para o caso de perfis mistos ficaram muito semelhante às do caso em que havia somente híbridos, com médias de volumes diários de negociação entre 500 e 1.000. As 50 simulações produziram gráficos de evolução do volume de negociações semelhantes ao da simulação 1 apresentada, com médias entre 500 e 1.000. Para este caso, o volume de negociação no primeiro dia ficou entre 30.000 e 35.000 em todas as simulações, exatamente como nos caso em que havia somente híbridos e em que havia somente aleatórios.

Assim, verificamos que as distribuições que possuem somente perfil fundamentalista ou somente perfil aleatório produzem resultados quase idênticos em termos de volume de negociação, com baixas médias. Já o existência de perfil grafista nas distribuições provocou uma elevação na média do volume de negociação, como pudemos verificar na distribuição em que havia somente agentes grafistas, na distribuição em que havia somente agentes híbridos e na distribuição com perfis mistos.

Um fato para o qual não encontramos explicação é que, apenas para a distribuição na qual havia somente agentes grafistas não houve a esperada explosão no volume de negociações do primeiro dia em nenhuma das simulações.

7.2.4 Adoção de perfis pelos agentes híbridos

Para verificarmos o predomínio de um perfil para os agentes híbridos, subtraímos, em cada dia de negociação, da quantidade de vezes que os agentes híbridos adotaram o perfil grafista, a quantidade de vezes que eles adotaram o perfil fundamentalista e apresentamos os resultados num gráfico ordenado pelas diferenças. As diferenças positivas são apresentadas em azul e indicam os dias em que o perfil grafista foi mais adotado do que o perfil fundamentalista. As diferenças negativas são apresentadas em vermelho e indicam os dias em que o perfil fundamentalista foi mais adotado do que o perfil grafista.

As únicas distribuições de perfis que continham agentes híbridos foram aquela em que havia somente perfis híbridos e aquela que continha perfis mistos e, para ambas, o número de dias nos quais os agentes híbridos adotaram mais vezes o perfil fundamentalista do que o perfil grafista foi maior do que o número de dias nos quais os agentes híbridos adotaram mais vezes o perfil grafista do que o perfil fundamentalista, em todas as simulações. Além disso, a máxima diferença em favor dos fundamentalistas sempre foi bem maior do que a máxima diferença em favor dos grafistas.

Figura 30 – Somente híbridos - Adoção de perfis pelos agentes híbridos

Gráfico elaborado pelo autor

As 50 simulações produziram gráficos semelhantes ao da simulação 1 apresentada, em que o perfil fundamentalista levou vantagem numa quantidade de dias maior do que o perfil grafista.

Figura 31 – Perfis mistos - Adoção de perfis pelos agentes híbridos

Gráfico elaborado pelo autor

No caso de perfis mistos, da mesma maneira que no caso em que havia somente perfis híbridos, o perfil fundamentalista levou vantagem mais vezes nas 50 simulações, exemplificadas no gráfico da simulação 1 apresentada.

7.2.5 Análise geral das simulações de produção de dados

Apresentamos, a seguir, uma tabela resumo dos resultados das simulações de produção de dados.

Tabela 4 – Resumo dos resultados das simulações de produção de dados

Fato	Característica	Análise
Distribuição de retornos não normais	Picos altos	Ocorreram em todas as simulações
	Caudas grossas	Ocorreram em algumas simulações em todas as distribuições, com exceção da que continha somente fundamentalistas
	Maior curtose média	Ocorreu na simulação que continha somente aleatórios
	Distribuição semelhante à real	Não ocorreu em nenhuma simulação
Aglomeração de volatilidade	Ocorrência	Ocorreu em todas as simulações
	Períodos de aglomeração de alta volatilidade	Predomínio de períodos curtos em todas as simulações
	Períodos curtos de aglomeração de baixa volatilidade	Ocorreram em todas as simulações para “somente fundamentalistas”, raros para “perfis mistos”, predominaram nas demais
	Períodos médios de aglomeração de baixa volatilidade	Não ocorreram para “somente fundamentalistas”, predominaram em “perfis mistos”, ocorreram nas demais
	Períodos longos de aglomeração de baixa volatilidade	Não ocorreram para “somente fundamentalistas”, raros nas demais
	Distribuição de aglomerações semelhante à real ⁷	Predominaram em “perfis mistos”
Volume de negociação	Médias	Baixas para “somente fundamentalistas” e “somente aleatórios”, altas para as demais
	Explosão no primeiro da	Não correu para “somente grafistas”, menores para “somente fundamentalistas”, maiores para as demais
Adoção de perfis pelos agentes híbridos	Perfil predominante	Fundamentalista em todas as simulações
	Maior módulo da diferença entre grafistas e fundamentalistas	Sempre dos fundamentalistas

Tabela elaborada pelo autor

⁷ Predomínio de períodos curtos de aglomeração de alta volatilidade e predomínio de períodos médios de aglomeração de baixa volatilidade

8 POSSIBILIDADES DE UTILIZAÇÃO DO MODELO DESENVOLVIDOS EM FUTUROS ESTUDOS

O modelo desenvolvido para esta dissertação pode ser utilizado em inúmeros outros estudos. Dentre as diversas possibilidades, podemos destacar, apenas para citar algumas:

- a determinação das causas dos comportamentos emergentes verificados, tais como:
 - a distribuição de perfis que contém somente aleatórios foi a produziu a maior curtose média e a que apresentou mais ocorrência de caudas grossas;
 - estratégias de venda e recompra produzirem os maiores ganhos, mas também as maiores perdas;
 - não ocorrer explosão no volume de operações do primeiro dia para distribuição de perfis que contém somente grafistas;
 - a presença de grafistas implicar no aumento na média dos volumes de negociação;
 - agentes híbridos adotarem o perfil fundamentalista em mais dias do que o perfil grafista;
- a busca de uma distribuição de perfis de agentes para a qual os resultados produzidos se aproximem o máximo possível dos verificados para a ação tomada como base em um determinado período;
- a análise dos resultados agregados para um conjunto de ações que compõem um determinada cesta;
- o estudo de como a variação de parâmetros como a taxa básica de juros ou o lucro por ação, por exemplo, afetam os resultados produzidos nas simulações;
- a comparação dos resultados produzidos quando os agentes fundamentalistas utilizam a fórmula de Graham com os resultados produzidos quando os agentes fundamentalistas utilizam outra metodologia de cálculo do preço justo de uma ação;
- a comparação dos resultados produzidos por outros simuladores para uma mesma ação num mesmo período.

9 CONCLUSÃO

Em primeiro lugar, podemos dizer que o simulador desenvolvido, com base no modelo GASM acrescido de características como negociação por meio de estratégias, capacidade de aprendizagem por parte de agentes não aleatórios e existência de agentes híbridos, permitiu reproduzir caudas grossas em algumas das simulações da fase de produção de dados, e de aglomeração de volatilidades em todas as simulações. Permitiu, também, analisar a influência de diversas distribuições de perfis nesses fatos estilizados e também no volume de negociações e no predomínio de perfil para os agentes híbridos. Além disso, permitiu analisar os resultados agregados da aplicação dos diversos tipos de estratégia, com base nos resultados da fase de aprendizagem.

A partir dos resultados das simulações de aprendizagem pudemos verificar que estratégias de venda e recompra podem apresentar valores agregados negativos, mas também podem produzir os melhores valores agregados, evidenciando que, no mercado artificial aqui desenvolvido, vale a regra de quanto maior o risco maior o ganho. Por outro lado, as estratégias de compra e revenda nunca produziram valores agregados negativos, mas também nunca produziram os melhores valores agregados, configurando-se como estratégias mais conservadoras neste simulador.

Outro fato que pudemos perceber com os resultados das simulações de aprendizagem foi que, para as estratégias de venda e recompra, os melhores resultados agregados foram conseguidos quando as ordens iniciais, de venda, possuíam valor maior do que o preço de mercado no momento da sua emissão. Já para as estratégias de compra e revenda, os melhores resultados agregados foram conseguidos quando as ordens iniciais, de compra, possuíam valor menor do que o preço de mercado no momento da sua emissão. Nesses dois casos, como pudemos ver no estudo da dinâmica do livro de ofertas, as chances de negociação rápida das ordens iniciais são menores, entretanto, os resultados das simulações de aprendizagem evidenciaram que, no agregado, os retornos obtidos são melhores.

Já pelos resultados das simulações de produção de dados pudemos verificar a ocorrência de dois fatos estilizados, a distribuição não normal dos retornos foi verificada

em algumas simulações e a aglomeração de volatilidade foi verificada em todas as simulações.

No caso da distribuição não normal dos retornos, picos altos foram encontrados em todas as simulações para todas as distribuições de perfis e caudas grossas em algumas simulações para todas as distribuições, com exceção das executadas na distribuição de perfis que continha somente agentes fundamentalistas. As simulações não produziram nenhuma distribuição de retornos semelhante verificada para a ação PETR4 no período considerado, mas a análise dos resultados apresentou uma indicação de que alterações na distribuição dos perfis podem produzir uma distribuição mais próxima da real.

No caso da aglomeração de volatilidades, verificou-se que a adoção de perfis mistos produziram, na grande maioria das simulações, sequências de aglomerações semelhantes às verificadas para a ação PETR4 no período considerado, com predomínio de períodos curtos de aglomeração de alta volatilidade e predomínio de períodos médios de aglomeração de baixa volatilidade.

No caso do volume de negociação, por não possuímos parâmetro de comparação, não foi possível determinar se os volumes verificados nas simulações podem ser considerados altos ou baixos. Mas pudemos determinar quais configurações de perfis produzem volumes maiores que quais produzem volumes menores.

Por meio da análise das adoções de perfis por parte dos agentes híbridos, tornada possível pela incorporação desse tipo de agente ao modelo, verificamos que o perfil fundamentalista foi adotado mais vezes do que o perfil grafista pelos agentes híbridos em todas as simulações realizadas. Além disso, foi sempre dos fundamentalistas a maior diferença, em módulo, entre o número de vezes de adoções do perfil grafistas e o número de vezes de adoções do perfil fundamentalistas em um dia.

Por fim, podemos concluir que o mercado de ações artificial desenvolvido demonstrou ser uma ferramenta útil ao estudo do efeito da diversidade de perfis de investidores na dinâmica do próprio mercado, representada por fatos estilizados, bem como ao estudo das adoções de perfis por parte dos agentes híbridos.

Referências¹

- BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. *Essentials of Investments*. 7^a. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill/Irwin, 2008. Citado na página 45.
- CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. The econometrics of financial markets. Princeton University Press, Princeton, 1997. Citado na página 37.
- COOLEY, T. Frontiers of business cycle analysis. Princeton University Press, Princeton, 1995. Citado na página 19.
- EHRENTREICH, N. *Agent-Based Modeling - The Santa Fe Institute Artificial Stock Market Model Revisited*. Berlin: Springer, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 37, 39, 42 e 44.
- FARMER, J. D. et al. A complex systems approach to constructing better models for managing financial markets and the economy. *European Physics Journal Special Topics*, n. 214, p. 295–324, 2012. Citado na página 18.
- GRAHAM, B. The decade 1965-1974: Its significance for financial analysts, proceedings of the seminar: The renaissance of value. The Financial Analysts Research Foundation, New York, p. 1–12, 1974. Citado na página 45.
- LEBARON, B. A builder's guide to agent based financial markets. *Quantitative Finance*, v. 1, n. 2, p. 1–13, 2001. Citado na página 23.
- LOBATO, I. N.; VELASCO, C. Long memory in stock-market trading volume. *Journal of Business and Economic Statistics*, n. 18, p. 410–426, 2000. Citado na página 43.
- LUX, T.; MARCHESI, M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. *Nature*, v. 397, p. 498–500, 1999. Citado na página 24.
- MATASSINI, L.; FRANCI, F. Life in the stockmarket - a realistic model for trading. *arXiv:cond-mat/0008466*, Max-Planck-Institut, Dresden, v. 1, 2000. Citado na página 24.
- MITCHELL, M. *Complexity: A guided tour*. Nova Iorque: Oxford University Press, 2009. Citado na página 17.
- NELSON, S. A. *The ABC of Stock Speculation*. Nova Iorque: Fraser Publ. Co., 1903. Citado na página 44.
- NICOLIS, G.; NICOLIS, C. *Foundations of Complex Systems - Nonlinear Dynamics, Statistical Physics, Information and Prediction*. Cingapura: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007. Citado na página 17.
- PALMER, R. G. et al. Artificial economic life: a simple model of stock market. *Physica D*, v. 397, p. 264–275, 1994. Citado na página 24.
- PRADO, E. F. S. Microeconomia reducionista and microeconomia sistêmica. *Nova Economia*, World Scientific Publishing Co., v. 16, n. 2, p. 302–322, 2006. Citado na página 20.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

PREIS, T. et al. Statistical analysis of financial returns for a multiagent order book model of asset trading. *Physical Review E*, v. 76, 2007. Citado na página 24.

RABERTO, M. et al. Agent-based simulation of a financial market. *Physica A*, v. 299, p. 319–327, 2001. Citado na página 24.

SILVA, M. A. *Livro de ofertas and dinâmica de preços: evidências a partir de dados da BOVESPA*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Artes, Ciências and Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. Citado na página 19.

SIMON, H. A. From substantive to procedural rationality. in: Latsis, s.j. (ed.): Method and appraisal in economics. Cambridge University Press, p. 129–148, 1976. Citado na página 20.

STANLEY, H. E. et al. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from dna and physiology to econophysics. *Proceedings of 1995 Calcutta Conference on Dynamics of Complex Systems, Physica A*, n. 224, p. 302, 1996. Citado na página 18.

SUTTON, R.; BARTO, A. *Reinforcement Learning: An Introduction*. Cambridge: MIT Press, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 53.

TSENG, J.; LI, S. Quantifying volatility clustering in financial time series. *International Review of Financial Analysis*, Jai Press, Stanford, v. 23, n. C, p. 11–19, 2012. Citado na página 40.