HIPÓLITO DOUGLAS FRANÇA MOREIRA

# Deformação de tecidos moles para simuladores médicos: uma abordagem sem malha

São Paulo 2016

# HIPÓLITO DOUGLAS FRANÇA MOREIRA

# Deformação de tecidos moles para simuladores médicos: uma abordagem sem malha

Dissertação apresentada à Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Sistemas de Informação.

Área de Concentração: Sistemas de Informação

Versão corrigida contendo as alterações solicitadas pela comissão julgadora em 03 de dezembro de 2015. A versão original encontra-se em acervo reservado na Biblioteca da EACH-USP e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP (BDTD), de acordo com a Resolução CoPGr 6018, de 13 de outubro de 2011.

Orientador: Prof. Dr. Helton Hideraldo Bíscaro

São Paulo 2016 Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

# CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO

(Universidade de São Paulo. Escola de Artes, Ciências e Humanidades. Biblioteca)

Moreira, Hipólito Douglas França Deformação de tecidos moles para simuladores médicos : uma abordagem sem malha / Hipólito Douglas França Moreira ; orientador, Helton Hideraldo Bíscaro. – São Paulo, 2016 56 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Informação, Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, em 2015

Versão corrigida

1. Realidade virtual. 2. Tecidos (Anatonia) – Simulação computacional. 3. Hidrodinâmica de partículas suavizadas. I. Bíscaro, Helton Hideraldo, orient. II. Título

CDD 22.ed - 006.8

Dissertação de autoria de Hipólito Douglas França Moreira, sob o título "**Deformação de tecidos moles para simuladores médicos: uma abordagem sem malha**", apresentada à Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Sistemas de Informação, na área de concentração Sistemas de Informação, aprovada em 03 de dezembro de 2015 pela comissão julgadora constituída pelos doutores:

#### Prof. Dr. Helton Hideraldo Bíscaro

Presidente Instituição: Universidade de São Paulo – Escola de Artes, Ciências e Humanidades – Campus USP Leste

## Prof. Dr. Clodoaldo Aparecido de Moraes Lima

Instituição: Universidade de São Paulo – Escola de Artes, Ciências e Humanidades – Campus USP Leste

## Prof. Dr. Marcel Parolin Jackowski

Instituição: Universidade de São Paulo – Instituto de Matemática e Estatística – Campus Butantã

Este trabalho é dedicado a todos os pequenos sonhos que um dia se tornam grandes, e que se tornam maiores que a pessoa que o sonhou, ultrapassando as limitações e seguindo para o infinito.

# Agradecimentos

Agradecimentos ao meu orientador Helton Hideraldo Bíscaro pela extrema paciência e contínuo esforço para me entender e me ajudar a entender o problema proposto neste trabalho.

Agradecimentos a minha companheira Thábata Alyce Pivato Ferreira, que graças ao apoio durante o período em que estive desenvolvendo as atividades desta dissertação, mantive boa saúde e foco para desempenhar minhas atividades.

Agradecimentos também a Ana Cláudia Melo Tiessi Gomes de Oliveira, pelo trabalho muito bem estruturado que me levou a entender melhor o mundo de deformação computacional no qual mergulhei de cabeça durante este período.

Agradecimentos à equipe de coordenação do programa de pós-graduação em Sistemas de Informação, que sem o apoio com regras bem estabelecidas e empenho em sempre chamar a atenção dos alunos quanto aos prazos, disciplinas e projetos.

Agradecimentos também a CAPES pelo fornecimento de bolsa durante o segundo e terceiro semestres do período em que cursei o mestrado, sem o qual não teria tido condições de continuar durante o período do curso de pós-graduação.

"... Lights will guide you home, And ignite your bones ... "(Coldplay, Fix You)

# Resumo

MOREIRA, Hipólito Douglas França. **Deformação de tecidos moles para simuladores médicos**: uma abordagem sem malha 2016. 56 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Esta dissertação de mestrado propõe o estudo e a implementação de um método de deformação usando modelos tridimensionais sem o uso de malhas baseado na técnica Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), que consiste num sistema de resolução de equações diferenciais para aplicação de conceitos físicos para simular deformação de tecidos moles.

A opção pelo método sem malha para processo de deformação é apresentado nesta dissertação como alternativa a um dos métodos mais comuns em simulação de deformação de tecidos, o método massa-mola, explorando questões referentes ao uso de recursos computacionais.

Para chegada a definição do método foram analisados os temas envolvendo métodos de deformação, modelos baseados em pontos e o SPH como plataformas para alcançar o desenvolvimento do método proposto pela dissertação.

Como forma de comprovar as propriedades do método desenvolvido foi realizada a implementação e testes levando em consideração os modelos de deformação e a interação em tempo real num ambiente de simulação que contempla a deformação de uma mama, levando em conta a comparação com o método massa-mola, o uso de recursos do próprio método em função do aumento de detalhe e do uso de objeto com múltiplas propriedades.

Palavras-chaves: deformação de tecidos moles, simulação médica, hidrodinâmica de partículas suavizadas.

# Abstract

MOREIRA, Hipólito Douglas França. Soft tissue deformation for medical simulators: a meshless approach 2016. 56 p. Dissertation (Master of Science) – School of Arts, Sciences and Humanities, University of São Paulo, São Paulo, 2015.

This master thesis proposes a study and implementation of deformation method using tridimensional models without edge composed meshes based on Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) technique, that consists on differential equation solving system to reproduce physical concepts to simulate soft tissue deformation.

The option for a meshless method to deformation process is shown in this thesis as an alternative to a very common method in tissue deform simulation, the mass-spring method, reviewing a comparison based on computational resources.

To achieve a method definition were analyzed fields of study involving deformation methods, point-based models and SPH as platforms to build and deploy the proposed method for this thesis.

To show the characteristics for this developed deformation method was realized the implementation and tests based on deformation models and real time interaction on a simulation environment that includes a breast deformation, taking in account the comparison to mass-spring, number of points of the cloud model and multiple properties.

Keywords: soft tissue deformation, medical simulation, smoothed particle hydrodynamics.

# Lista de figuras

Figura 1 –	Fronteira do domínio $\Omega$ e subdomínio $\Omega_I$ com região de influência,	
	extraído de Belytschko et al. (1996).	8
Figura 2 $-$	${\rm Em}$ (a) temos o modelo massa tensor adaptado a uma situação similar	
	a uma célula de tecido epitelial, em (b) a captura microscópica da rede	
	epitelial de um embrião de um a $D.\ melanogaster,$ e em (c) temos a	
	adaptação dos vértices e arestas capturados na imagem em uma rede	
	com a aplicação método massa tensor. Adaptado de $% \left( {{\rm{Abate}}} \right)$ Abate et al. (2012)	13
Figura 3 $-$	Em (a) temos a imagem de ressonância da região das mamas, em (b) a	
	saída do algoritmo de segmentação, e em (c) o modelo de malha cons-	
	truído a partir das informações do algoritmo de segmentação. Adaptado	
	de Patete et al. (2013)	14
Figura 4 $-$	${\rm Em}$ (a) temos a estrutura construída para a simulação com a imagem	
	e o super cilindro com os órgãos com detalhes hápticos, com visão de	
	baixo para cima, e a visão superior, em (b) a simulação da palpação	
	onde o dedo toca a região do fígado aumentado. Adaptado de Yasmin	
	e Sourin (2012)	15
Figura 5 $-$	${\rm Em}$ (a) as forças restritivas à inserção da agulha, em (b) simulação do	
	processo de inserção de uma agulha rígida em um corpo viscoelástico	
	bidimensional. Extraído de Wang, Wang e Hirai (2012)	16
Figura 6 $-$	Em (a), (b) e (c) perspectivas do modelos físico massa-mola do globo	
	ocular, em (d) o globo ocular antes da deformação pela lei dos gases e	
	em (e) após a deformação. Adaptado de Yang (2011)	17
Figura 7 $-$	Representação do gerador de simulação médica ViMeT. Extraído de	
	Oliveira (2014)	19
Figura 8 $-$	Simulação presente no trabalho de Liu et al. (2014)	19
Figura 9 $-$	Representação gráfica do método de busca em grades, que consiste em	
	k subdivisões do espaço do tamanho do raio de suporte do ponto de	
	busca, extraído de Paiva et al. (2009)	25
Figura 10 –	Representação gráfica de estruturas adaptativas. Na figura da esquerda	
	a representação da busca, e na figura da direita a estrutura de armaze-	
	namento, extraído de Paiva et al. (2009).	26

Sequência de aplicação de um motor SPH num sistema de partículas	
com forças internas e externas. Adaptado de Paiva et al. $(2009)$	29
Interface gráfica do simulador	35
Comparação visual entre a aplicação dos métodos nos dois simuladores.	43
Comparação da deformação em função do número de pontos	45
Representação da nuvem de pontos multicamadas por meio de visua-	
lização tetra édrica, em (a) representação do modelo usando wi reframe	
para apresentar a localização dos ductos mamários. Em (b) representação	
das faces externas, não permitindo a visualização interna. Em $({\rm c})$ temos	
a representação das malhas externas da mama e dos ductos externos, e	
em (d) a representação em tetraedros que demonstra que o modelo de	
ductos está imerso no modelo da mama.	47
Modelo de pontos da mama sólido e multicamada utilizados para com-	
parações. A deformação de modelo sólido na parte cima contemplou	
apenas a mama, e na sequência mostrada abaixo a deformação de	
modelo multicamada contendo a mama e os ductos mamários. $\ldots$ .	47
	Sequência de aplicação de um motor SPH num sistema de partículas com forças internas e externas. Adaptado de Paiva et al. (2009) Interface gráfica do simulador

# Lista de algoritmos

Algoritmo 1 – Carregar dados do objeto	38
Algoritmo 2 – Identificação das propriedades dos materiais pelos tetraedros $\ldots \ldots \ldots$	38
Algoritmo 3 – Inicialização das variáveis do ambiente	38
Algoritmo 4 – Cálculo de vizinhança	39
Algoritmo 5 – Inicialização do sistema SPH	39
Algoritmo 6 – Cálculo da densidade local	39
Algoritmo 7 – Cálculo do volume	39

# Lista de tabelas

Tabela 1 –	Comparação entre consumo de processamento e memória de cada método.	44
Tabela 2 –	Comparação entre quantidade de pontos e tempo de recálculo das	
	relações entre os pontos	46
Tabela 3 –	Comparação entre modelo sólido e modelo multicamadas, baseado em	
	consumo médio de recursos e tempo	48
Tabela 4 –	Comparação entre métodos de deformação SPH, Massa-mola e MEF. $$ .	48

# Lista de abreviaturas e siglas

FCM	Fuzzy C-Means
GHMRF	Gaussian Hidden Markov Random Field
MLS	Moving Least Squares
MEF	Método dos Elementos Finitos
PU	Partição da Unidade
RV	Realidade Virtual
SPH	Smoothed Particles Hydrodynamics

CFL Courant Friedrich Lewis

# Lista de símbolos

m	massa $(g)$
E	módulo de Young $(kPa)$
t	tempo $(s)$
v	volume $(cm^3)$
V	coeficiente de <i>Poisson</i>
v	velocidade $(m/s)$
w	função peso
$k_s$	constante da mola
$x_{ij}$	vetor da diferença de posições entre $i \in j$
$l_{ij}$	módulo da distância original
$rac{x_{ij}}{ x_{ij} }$	vetor unitário de orientação da força
$\Delta t$	variação de tempo
abla()	derivada parcial para (x,y,z) de um ponto
Ω	domínio de uma função
ρ	densidade $(g/cm^3)$
σ	estresse
ε	tensão

# Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Justificativas	2
1.3	Contribuição deste trabalho	3
1.4	Estrutura do trabalho	3
<b>2</b>	Métodos de Deformação	5
2.1	Métodos de deformação com malha	5
2.1.1	Massa-mola	5
2.1.2	Método de elementos finitos	6
2.2	Métodos de deformação sem malha	7
2.2.1	SPH	8
2.2.2	Mínimos quadrados móveis	9
2.2.3	Partição da unidade	10
3	Trabalhos relacionados	12
4	Smoothed Particles Hydrodynamics	20
4.1	Aproximação por partículas	20
4.1.1	Operadores básicos	21
4.1.2	Comprimento suave	21
4.1.3	Operadores SPH	22
4.2	Aspectos numéricos	22
4.2.1	Integração temporal	22
4.2.1.1	Integrador Leap-Frog	23
4.2.1.2	Estimativa de passo de tempo	23
4.2.2	Busca de partículas vizinhas	24
4.2.2.1	Força bruta	24
4.2.2.2	Grades	25
4.2.2.3	Estruturas adaptativas	26

5	Engenharia do simulador usando SPH para de-	
	formação de tecidos moles 28	8
5.1	Processo de deformação sem malha 28	8
5.2	Método de deformação elástico baseado em SPH e	
	dinâmica dos sólidos 30	0
5.2.1	Definição das propriedades durante a inicialização 30	0
5.2.2	Cálculo do gradiente do deslocamento	1
5.2.3	Cálculo da tensão 32	2
5.2.4	Cálculo do estresse 33	3
5.2.5	Cálculo das forças resultantes 34	4
5.2.6	Integração temporal	4
5.3	Construção do espaço de simulação	5
6	Metodologia para a construção da simulação 33	7
6.1	Construção do método de deformação 37	7
6.1.1	Inicialização do sistema	7
6.1.2	Cálculo do gradiente 40	0
6.1.3	Cálculo da força elástica 40	0
6.2	Construção da interface gráfica 40	0
6.3	Controle do passo de tempo	0
6.4	Controle dos limites de deformação	1
7	<b>Testes</b>	2
7.1	Ambiente de testes 42	2
7.2	Comparação entre SPH x Massa-mola	3
7.3	Comparação entre quantidade de pontos x desempenho 44	4
7.4	Análise entre modelo de pontos sólido x modelo de	
	pontos multicamada	6
7.5	Tabela comparativa entre métodos de deformação48	8
8	$\mathbf{Conclusão}$	0
8.1	Conclusões	0
8.2	Trabalhos futuros	1

$\mathbf{Refer}^{\mathbf{\hat{e}ncias}^1}$	53
--	----

 $<sup>$\</sup>overline{1}$$  De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

# 1 Introdução

No desenvolvimento de métodos de deformação de tecidos se objetiva a implementação de técnicas computacionais para entender as ações do usuário a projetar sobre um objeto que representa um tecido orgânico, que por sua vez é componente de representações visuais presentes em animações ou simuladores.

A melhoria da qualidade da interação humano-computador nos processos de simulação médica é assunto de várias áreas de pesquisa e de instituições governamentais, como cita Delingette e Ayache (2004), apontando aumento no desenvolvimento de aplicações de simulação em função do investimento do Departamento de Defesa dos EUA, durante a década de 1990 na produção de simulações que auxiliassem na diminuição da curva de aprendizado de cirurgiões para procedimentos cirúrgicos pouco invasivos.

Simuladores médicos são a melhor saída para resolver as questões referentes ao treinamento médico com qualidade e baixo custo, como apresentado no trabalho de Novi (2011) no qual apresenta uma comparação ao uso dos simuladores médicos virtuais ao uso de cadáveres, animais e partes do corpo reproduzidas em latex ou silicone, apontando os pontos positivos do uso do simulador e ressaltando as restrições referentes à qualidade da interação e nas respostas do corpo simulado durante os procedimentos médicos executados, devido ao balanço entre a qualidade visual e qualidade da interação, visto que ambas são parte fundamental na simulação médica.

A importância dos simuladores de realidade virtual para treinamento médico está ligada a capacidade dos médicos em entender a situação que lhes é proposta no ambiente virtual e realizar a mesma atividade quando expostos a situações reais, permitindo que possuam prática naquela atividade sem que antes tenham tido contato com algum paciente, garantindo que as chances de sucesso de uma cirurgia aumentem e consequentemente diminuindo o custo de treinamento e a falta de experiência de médicos recém-formados.

Para que a simulação permita o ganho de experiência, a visualização do espaço cirúrgico, a realidade na reprodução do movimentos e iluminação de objetos na cena e a percepção da interação do usuário no ambiente devem ser o mais próximas da realidade quanto possível, como no caso da simulação para a extração de um dente, o usuário deve reconhecer seus instrumentos, o paciente, as atividades a desempenhar e deve ter resposta do ambiente caso algo ocorra a favor ou contra as ações do usuário, como no caso de uso desregulado de anestésico, extração de dente muito brusca, causando muita dor ao paciente, sangramentos, ou qualquer outra resposta que melhore o treinamento médico.

Sendo assim a construção do ambiente de simulação é muito importante em três pontos, na aproximação dos elementos de cena à realidade, na qualidade da interação do usuário com o ambiente e nas respostas dadas pelo ambiente de volta ao usuário, o que envolve sons ambientes, variações de iluminação, entre outros efeitos que permitem ao usuário associar os eventos neste ambiente ao de um procedimento real.

Como forma de melhorar o equílibrio dos três pontos anteriores, este trabalho aborda a redução do uso de recursos durante a interação com o usuário, com o objetivo de diminuir os custos computacionais do processo de deformação de tecidos, ao remover o uso de malhas geométricas do processo, que representa um fator de consumo muito elevado para simuladores.

# 1.1 Objetivos

Como objetivo central desta dissertação, temos a implementação e teste de um método de deformação de tecidos sem malha, e a sua comparação a um método muito comum dentro deste campo para demonstrar seu grau de eficiência.

Também temos como objetivo a construção de interação entre os pontos multicamada, que utiliza a característica da representação de modelos geométricos a partir de uma "nuvem" de pontos para permitir a construção de simulações com múltiplas camadas dentro de um mesmo objeto, onde cada camada tem seu próprio conjunto de características físicas.

Como objetivo secundário temos a realização de testes e comparações realizados com o método de deformação elástico, que é similar ao método defendido nesta dissertação, levando em consideração desempenho computacional e consumo de recursos.

# 1.2 Justificativas

A principal justificativa para este trabalho é a característica de métodos sem malha não estarem ligados a uma estrutura sólida e que necessita de recursos de armazenamento e reprocessamento cada vez que uma etapa interativa com um modelo virtual é realizada, ou seja, a capacidade de realizar os efeitos de deformação de uma representação de tecido mole de modo otimizado, com relação ao mesmo procedimento em uma estrutura com malha.

Como o método *Smoothed Particle Hydrodinamics* (SPH) (LUCY, 1977) faz uso de um sistema de equações que foca na propagação de um efeito a partir de propriedades atômicas, ou seja, cada unidade de uma nuvem de pontos é um composto de elementos dinâmicos, possui propriedades físicas e o último estado dentro da aplicação dos deslocamentos, sendo possível resolver as equações para representar um estado no tempo para frente como para trás.

Como justificativa secundária está a necessidade de construção de métodos matemáticos para procedimentos simulados serem incorporados à plataformas altamente escaláveis, ou seja, com ganho de desempenho e menos uso de recursos o acesso de aplicações de simuladores médicos multiplataforma torna-se mais acessível.

## 1.3 Contribuição deste trabalho

Este trabalho contribui com uma nova abordagem para a deformação de tecidos moles utilizando um processo de sem malha, que consiste apenas no uso de uma nuvem de pontos extraída de um objeto com malha, para reproduzir os efeitos provenientes do impacto de uma força contra o objeto.

O trabalho faz uso da abordagem apresentada por Paiva et al. (2009) que compreende o método *Smoothed Particle Hydrodynamics* – Hidrodinâmica de partículas suavizadas – com a adequação da mecânica de deformação de sólidos baseados em força elástica de Müller et al. (2004), com o uso das funções relacionadas a manutenção das propriedades elásticas dos objetos apresentado no trabalho de Vijaykumar (2012).

## 1.4 Estrutura do trabalho

Para melhorar a compreensão a respeito do tema, este trabalho esta organizado para propor primeiro uma passagem direta sobre os conceitos e teorias abordadas, apresentando os componentes de entendimento do método em capítulos separados.

No capítulo 2 temos o conteúdo referente aos métodos de deformação, que constituem o propósito e resultado que são desejados nesta dissertação, no capítulo 3 são apresentados trabalhos relacionados à deformação de tecidos e a simulação médica, e no capítulo 4 são descritos os principais conceitos do método SPH e seus componentes.

No capítulo 5 está o processo de construção matemática e complementado pelo capítulo 6 com a metodologia utilizada no desenvolvimento desta dissertação, sendo complementada pelo capítulo 7 que apresenta os testes e resultados obtidos nos experimentos desta dissertação e sendo fechado pelo capítulo 8 referente às conclusões de modo bem objetivo sobre a situação do trabalho e expectativas de trabalhos futuros.

## 2 Métodos de Deformação

Métodos de deformação consistem em métodos físico-matemáticos para representação de efeito da ação de forças sobre corpos, que dependendo do método utilizado se propagam por toda a estrutura de modo implícito ou precisam ser resolvidos num sistema de equações diferenciais de modo explícito.

O método de deformação se baseia numa função  $u(x) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , onde uma posição no espaço x dentro de um domínio  $\Omega$  é deslocada em função de um evento, conforme equação 1.

$$x \rightharpoonup x'\{u_x, u_y, u_z\} \tag{1}$$

Onde a posição inicial x, assume novo conjunto de posições baseado na aplicação da função de deformação.

Segundo Moore e Molloy (2007), podemos classificar os métodos de deformação em modelos não físicos, que se preocupam somente com a geometria, em modelos físicos, que são subdivididos em modelos discretos e modelos contínuos, e modelos de aproximação contínua englobando os métodos baseados nas leis da física, porém não aderindo a elas, como apresentado em Gibson e Mirtich (1997).

# 2.1 Métodos de deformação com malha

Segundo Bremm (2012) malha é uma coleção de vértices cujas ligações definem as arestas e sua sequência define os polígonos, sendo esta a representação típica de objetos, cujas superfícies são renderizadas como conjuntos de retângulos ou triângulos, sendo que os mesmos podem ser maciços ou apenas um modelo de arames.

Com base nesta estrutura existem modelos de deformação físicos, como método massa-mola e o método de elementos finitos e suas variações, estes são descritos a seguir com relação as suas características físicas e matemáticas.

#### 2.1.1 Massa-mola

O método de deformação massa-mola é um modelo físico, que é constituído por um conjunto de pontos ligados por mola e amortecedores em uma estrutura de malha, onde as molas conectadas por pontos de massa exercem forças sobre os pontos vizinhos quando um ponto é deslocado de sua posição de repouso. A principal desvantagem é uma tendência a oscilar devido a sua estrutura iterativa (MOORE; MOLLOY, 2007).

Neste método, uma força aplicada à um corpo causa a compressão e distensão da mola, fazendo com que energia potencial elástica seja acumulada, gerando uma força de resposta diretamente proporcional ao módulo da tensão (BREMM, 2012).

Sendo que as massas são consideradas como partículas e suas arestas como molas, de modo que estas partículas tem seu movimento definido pela segunda lei de Newton:

$$f_i = m_i \ddot{x}_i$$

A força atuando sobre uma massa i devido uma ligação a uma massa j, pode ser então explicada por:

$$f_i = k_s(|x_{ij}| - l_{ij})\frac{x_{ij}}{|x_{ij}|}$$
(2)

De modo que o deslocamento da segunda lei é definido pela diferença de posições entre *i* e *j* dado por  $x_{ij}$  subtraído da diferença de posições inicial  $l_{ij}$  e multiplicado pelo vetor unitário que define a orientação da força  $\frac{x_{ij}}{|x_{ij}|}$ .

Segundo Bremm (2012) aplicações práticas deste método quase sempre abordam simulação de tecido, visando a reprodução de efeito elástico causado pelas fibras do tecido.

## 2.1.2 Método de elementos finitos

Método de Elementos Finitos (MEF) é usado para encontrar uma aproximação para uma função contínua que satisfaça alguma expressão de equilíbrio, onde o objeto é dividido em elementos contínuos por nós discretos e a função que resolve a equação de equilíbrio é encontrada para cada elemento, porém a desvantagem desse método é o seu considerável custo computacional.

Segundo Bremm (2012), MEF é um método popular para resolver equações diferenciais parciais, discretizando volumes contínuos com a definição de uma malha tridimensional irregular, em que seus poliedros definem os elementos finitos, aos quais se aplicam a equação diferencial de elasticidade:

$$\rho \ddot{x} = \nabla \sigma + f$$

Onde:

 $\rho\,$  densidade do material

 $f\,$ resultante das forças externas

# 2.2 Métodos de deformação sem malha

Métodos de deformação sem malha podem ser entendidos como métodos numéricos para a solução de problemas de valor de contorno, cujas equações básicas do modelo discreto independem da definição de uma malha de elementos finitos. Em resumo, a solução aproximada do problema, em um espaço de dimensão finita, é constituída sem que a conectividade entre os pontos nodais desta aproximação seja estabelecida (BARROS, 2002).

O objetivo dos métodos sem malha é eliminar a necessidade de estrutura ao realizar aproximações baseadas apenas nos pontos que compõem o objeto, como uma forma de diminuir o trabalho de estruturas baseadas em malha (BELYTSCHKO et al., 1996).

Com o propósito de apresentar os métodos de aproximação sem malha, de acordo com o trabalho de Belytschko et al. (1996) é considerado para esta seção a função única u(x) em um domínio  $\Omega$ , com um conjunto de pontos  $x_I$ , onde I = 1 vai até  $n_N$ , em que para cada ponto I é associada a função de aproximação  $u_I$ .

A característica comum aplicada a todos os métodos sem malha é a função de peso ou *kernel*, que define o comportamento dos pontos em sua vizinhança, sendo definida para ter suporte compacto, onde um subdomínio  $\Delta \Omega_I$  não nulo é uma pequena parte do todo e a ele está associado um ponto. O suporte, ou região de influência do subdomínio pode estar associado a uma forma circular ou retangular, conforme figura 1.



Figura 1 – Fronteira do domínio  $\Omega$  e subdomínio  $\Omega_I$  com região de influência, extraído de Belytschko et al. (1996).

#### 2.2.1 SPH

O mais antigo dos métodos sem malha, que provém da noção de aproximação de kernel para u(x) em um domínio  $\Omega$  sendo gerado por

$$u^{h}(x) = \int_{\Omega} w(x - y, h)u(y)d\Omega$$
(3)

Onde  $u^h(x)$  é a aproximação, w(x - y, h) é um *kernel* ou função peso, e h é a medida da região suporte. O *kernel* deve satisfazer as seguintes condições:

- 1. w(x-y,h) > 0 no subdomínio  $\Omega_I$ ,
- 2. w(x-y,h) = 0 for<br/>a do subdomínio  $\Omega_I$ ,
- 3. uma propriedade de normalização:  $\int w(x-y,h)d\Omega = 1$ ,
- 4. w(s,h) é uma função de decremento, onde s = ||x y||.
- 5.  $w(s,h) \to \delta(s)$ , com  $h \to 0$ , onde  $\delta(s)$  é a função do delta de Dirac.

A segunda condição é crucial para o método por permitir a aproximação ser gerada de uma representação local. O domínio sob o qual a função w(x - y) é não-nulo e pode ser chamado de suporte da função peso ou domínio de influência.

A terceira condição confere consistência, mesmo que não a assegura numa aproximação em forma discreta, podendo ser observada como base para um procedimento de interpolação. A quinta condição é apresentada (BELYTSCHKO et al., 1996) como desprezível, pois é difícil acreditar que uma função cujo suporte tende a zero satisfaça as condições anteriores, já que em computação real h nunca se aproxima de zero.

Como exemplo de funções de peso, temos exponencial, *spline* de terceiro e quarto graus, baseado nos parâmetros de que w(s,h), onde s = ||x - y|| e  $\overline{s} = s/h$ , temos as seguintes equações:

$$exponencial: w(\overline{s}) = \begin{cases} \exp^{-(\overline{s}/\alpha)^2} & para \quad \overline{s} \le 1\\ 0 & para \quad \overline{s} > 1 \end{cases}$$
(4)

$$spline^{3}: w(\overline{s}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\overline{s}^{2} + 4\overline{s}^{3} & para \quad \overline{s} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\overline{s} + 4\overline{s}^{2} - \frac{4}{3}\overline{s}^{3} & para \quad \frac{1}{2} < \overline{s} \leq 1 \\ 0 & para \quad \overline{s} > 1 \end{cases}$$
(5)

$$spline^{4}: w(\overline{s}) = \begin{cases} 1 - 6\overline{s}^{2} + 8\overline{s}^{3} - 3\overline{s}^{4} & para \quad \overline{s} \leq 1\\ 0 & para \quad \overline{s} > 1 \end{cases}$$
(6)

O valor  $\alpha$  contido na equação 4 é um valor de escala, definido pelo usuário (BELYTS-CHKO et al., 1996).

Segundo ainda Belytschko et al. (1996) o kernel exponencial é uma função de classe  $C^1$  enquanto os kernels spline são de classe  $C^2$ , que confere uma estabilidade de forma ao modelo conforme os valores do subdomínio são inseridos.

A continuidade permite a garantia da consistência na hora em que a atualização das propriedades dos pontos convergem, fazendo com que o método seja mais estável. Esta consistência depende da ordem em que as equações diferenciais parciais são resolvidas, e suas condições estão relacionadas a completude e reprodução delas.

#### 2.2.2 Mínimos quadrados móveis

Como alternativa também ao desenvolvimento de uma aproximação sem malha temos o método de mínimos quadrados móveis –*Moving Least Squares* (MLS)–, que foi desenvolvido da noção de elementos difusos, se originando da correspondência de dados e de funções polinomiais de ordem inferior, onde os monômios são chamados de funções de Shepard (BELYTSCHKO et al., 1996).

Na aproximação de mínimos quadrados móveis temos:

$$u^{h}(x) = \sum_{i=1}^{m} p_{i}(x)a_{i}(x) \equiv p^{T}(x)a(x)$$
(7)

onde m é o número de termos na base,  $p_i(x)$  são funções monomiais da base, e  $a_i(x)$ são os seus coeficientes, que como indicado, são funções das coordenadas espaciais de x, como por exemplo:

$$p^{T} = (1, x)$$
$$p^{T} = (1, x, y)$$

ou em base quadrática:

$$p^T = (1, x, x^2)$$
$$p^T = (1, x, y, x^2, xy, y^2)$$

A consistência do método MLS está ligado à ordem polinomial k da função base, de modo que esta função possa ser escalável conforme o tamanho do subdomínio aumenta.

### 2.2.3 Partição da unidade

Métodos sem malha também podem ser baseados na partição de unidade (PU), que é um paradigma sob o qual o domínio é coberto por sucessivos subdomínios  $\Omega_I$ , onde a cada um, está associado uma função  $\phi_I(x)$  não-nula apenas a este  $\Omega_I$  que possui a propriedade (BELYTSCHKO et al., 1996), conforme 8.

$$\sum_{I} \phi_{I}(x) = 1, \quad \epsilon \quad \Omega \tag{8}$$

A condição essencial para a partição da unidade é idêntica a condição de consistência de ordem zero, desta maneira a construção de uma partição de unidade é idêntica a construção de uma função peso ou *kernel* em uma aproximação sem malha. Em referência ao trabalho de Belytschko et al. (1996) a aproximação pode ser dada conforme a equação 9.

$$u^{h}(x) = \sum_{I} \phi_{I}^{0}(x)(a_{0I} + a_{1I}x + \ldots + a_{kI}x^{k} + b_{1I}\sinh nx + b_{2I}\cosh nx)$$
(9)

podendo ser reescrita como:

$$u^{h}(x) = \sum_{I} \phi_{I}^{0}(x) \sum_{i} \beta_{iI} p^{T}(x)$$
(10)

onde,

$$\beta_{iI} = [a_{0I}, a_{1I}, \dots, a_{kI}, b_{1I}, b_{2I}]$$

 $p^T = [1, x, \dots, x^k, \sinh nx, \cosh nx]$ 

Aqui,  $\phi^0(x)$  é a função de *Shepard* ou aproximação MLS, que provê a partição de unidade, o suporte compacto da aproximação. As funções cosh nx e sinh nx são funções de melhoria extrínsecas à base, aprimorando a precisão desta equação em particular.

## 3 Trabalhos relacionados

Os trabalhos relacionados apresentados neste capítulo estão divididos quanto aos conteúdos abordados nesta dissertação, sendo a primeira seção referente a deformação de tecidos moles e a seção seguinte ao desenvolvimento de simuladores médicos.

Quanto aos métodos de deformação em tecidos moles foi realizada uma revisão exploratória nas bases de dados *ACM Digital Library*, *IEEE Xplore* e *Elsevier Digital Library* para realizar uma busca sobre estes processos, apresentado nos trabalhos abaixo.

O trabalho de Oliveira (2014) consistiu na modelagem e implementação de um método de deformação para tecidos moles, voltado para a simulação com objetos representando órgãos humanos em cirurgias, para treinamento médico, fazendo o uso de dois modelos físicos, uma para a mecânica de tecidos reais e outro para a construção de volume do objeto.

Antes da etapa de implementação existiu a necessidade de construção de um modelo matemático que avaliasse e configurasse os atributos e parâmetros para os modelos de deformação empregados, levando em consideração as seguintes características físicas: módulo de elasticidade, matriz de rigidez e constante da mola; empregando as leis da Mecânica: Segunda Lei de Newton, Lei de Hooke, Teoria Linear da Elasticidade e Teoria Não-Linear da Elasticidade. A proposta do trabalho consistiu em receber um retorno do modelo consistente com o do corpo humano, sendo que o volume deverá levar em consideração a existência de diferentes objetos constituindo o volume da região pretendida na simulação.

Quanto ao trabalho de Oliveira (2014) é importante ressaltar também as informações em resumo sobre a revisão sistemática realizada, contribuindo com os seguintes dados:

- MEF é o melhor método para obter realismo visual, porém sacrifica realismo háptico e o tempo de resposta em tempo real;
- Massa-mola provê um realismo visual e tempo de resposta aceitáveis;
- Massa-tensor possibilita emprego de parâmetros físicos, sem gerar um aumento no uso de recursos;
- ChainMail permite deformação de volume, mas a interação em tempo real pode ser comprometida de acordo com a complexidade do modelo;

 somente métodos baseados em física podem ser empregados em aplicações de treinamento e simulação cirúrgica, afim de garantir realismo e tempo de resposta em tempo real.

A abordagem do trabalho de Oliveira (2014) quanto aos métodos de deformação sem malha não apresentou trabalhos nesta área, possuindo apenas um parágrafo relacionado ao trabalho de Barros (2002), onde constam os métodos de SPH, elementos difusos, *Galerkin* livre de elementos, pontos finitos e métodos das partículas reprodutoras do núcleo.

O trabalho de Abate et al. (2012) teve como objetivo geral o desenvolvimento de um modelo quantitativo que visa um equilíbrio entre descritividade e precisão do modelo, contra tamanho, computabilidade e facilidade de análise no desenvolvimento de um modelo matemático para a dinâmica de redes epiteliais grandes e heterogêneas. A metodologia utilizada envolve a análise das características do movimento celular e das propriedades biológicas das células, desenvolvendo um modelo para redes de células epiteliais, onde a arquitetura celular é discreta; anisotropia depende da geometria da célula e da topologia da rede; aparecimento de características mecânicas não-lineares e temporais da célula sob diferentes componentes estruturais; e a modelagem da preservação de volume pode ser complexa.

Para a construção da simulação, o trabalho de Abate et al. (2012) assumiu que a geometria celular subjacente é conhecida, onde uma malha é colocada sobre as junções celulares, com função de modelo de deformação massa-tensor e o modo de resolução do sistema linear para este modelo fez uso de comparações entre elementos finitos e elementos discretos.



Figura 2 – Em (a) temos o modelo massa tensor adaptado a uma situação similar a uma célula de tecido epitelial, em (b) a captura microscópica da rede epitelial de um embrião de uma *D. melanogaster*, e em (c) temos a adaptação dos vértices e arestas capturados na imagem em uma rede com a aplicação método massa tensor. Adaptado de Abate et al. (2012)

No trabalho de Abate et al. (2012) o modelo massa tensora para deformação é aplicado sobre uma captura microscópica de um embrião de *D. melanogaster*, como apresentado na figura 2, onde cada aresta capturada a partir da imagem do embrião recebe um conjunto massa-mola, em que os pontos são o corpo de arrasto e a mola, a aresta.

O trabalho de Patete et al. (2013) objetivou o desenvolvimento e validação de um modelo de deformação tridimensional para a cirurgia de mama auxiliada por computador, extraindo dados de ressonância magnética e gerando um modelo de malhas tetraédricas representando a pele, gordura e glândulas mamárias; e o método de deformação aplicado foi o massa-mola levando em consideração as forças elásticas internas e externas. A metodologia utilizada neste trabalho envolveu a construção do modelo a partir da segmentação de imagens de ressonância magnética usando algoritmo baseado em *Fuzzy C-Means* com 4 classes identificadas: pele, músculo, gordura e tecido de glândula mamária.

Para realizar a próxima segmentação usou-se Gaussian Hidden Markov Random Field, para separar o conjunto gordura-glândula, e partindo da divisão destes grupos fez a criação volumétrica da malha, onde para cada etapa da simulação foram definidos os cálculos do tamanho da aresta e das forças elástica, resultante e global, exercidas em cada vértice da malha a partir da posição de pontos do frame seguinte, através das médias do algoritmo Verlet, que provém das forças decorrentes da variação de volume e da correção da posição dos vértices no frame seguinte.



Figura 3 – Em (a) temos a imagem de ressonância da região das mamas, em (b) a saída do algoritmo de segmentação, e em (c) o modelo de malha construído a partir das informações do algoritmo de segmentação. Adaptado de Patete et al. (2013)

O processo de transformação da ressonância para objeto tridimensional utilizando o algoritmo apresentado no trabalho de Patete et al. (2013) está representado na figura 3.

Os resultados obtidos no trabalho de Patete et al. (2013) apresentaram uma diminuição no tempo de construção e visualização de modelos tridimensionais com volume, ao apresentar taxa de atualização excelente para a simulação em tempo de real. No trabalho de Yasmin e Sourin (2012) temos a proposta da geração de *feedback* visual e háptico para um simulador de exames de palpação da porção abdominal de um paciente, permitindo *feedback* também dos órgãos internos. O simulador é construído usando uma imagem bidimensional, modelos com perspectivas tridimensionais para a produção do efeito visual, usando também regiões de resposta háptica, baseadas na imagem do paciente, passando a sensação de pressionar contra os órgãos da região abdominal, e adicionando uma função para a geração de simulação respiratória.

A implementação do modelo de deformação foi feito em camadas, na parte superior uma caixa torácica, na região abdominal músculos e tecidos moles, e quanto a sensação háptica uso de valores de rigidez altos para os ossos, e para tecidos moles um valor de rigidez baixo, de modo que a detecção de órgãos em estado normal inexiste, pois é possível sentir a rigidez dos ossos da caixa torácica apenas.

Durante a simulação quando o órgão está inflamado ele assume um caráter mais elástico e palpável. A solução usada para a resolução da deformação em tempo real foi o uso de funções simples, derivadas de paralelepípedos e trapezoides na construção dos órgãos, onde simples alterações nos valores de escala permitem a resposta háptica dentro destas funções.



Figura 4 – Em (a) temos a estrutura construída para a simulação com a imagem e o super cilindro com os órgãos com detalhes hápticos, com visão de baixo para cima, e a visão superior, em (b) a simulação da palpação onde o dedo toca a região do fígado aumentado. Adaptado de Yasmin e Sourin (2012) Na figura 4 temos em (a) a representação do simulador háptico para palpação com a caixa torácica com diferenciação de relevo, para passar a ideia dos ossos, o fígado aumentado para ultrapassar a região da caixa e o baço, e em (b) um exemplo de palpação apresentando a ponta do dedo tocando a região aumentada pelo tamanho do fígado.

Em Wang, Wang e Hirai (2012) foi trabalhada a interação entre deformação de tecidos e forças de fricção durante o procedimento de inserção da agulha de uma seringa, considerando a velocidade relativa e a superfície de contato como os fatores principais das forças de fricção com o processo de deformação; e construíram um modelo para a simulação dinâmica da inserção da agulha baseados numa agulha rígida e tecido viscoelástico. Neste trabalho foi usado o método de restrição local para gerar uma série de restrições equivalentes e forças pela decomposição da força de entrada da agulha dentro da região de contato.

Os resultados deste trabalho demonstraram que as forças envolvidas na inserção e retirada da agulha estão diretamente ligadas ao coeficiente de fricção do material; e para avaliação completa do processo dinâmico de inserção da agulha a modelagem de outras forças envolvidas no processo foram necessárias, como rigidez, cortes e forças de fricção.



Figura 5 – Em (a) as forças restritivas à inserção da agulha, em (b) simulação do processo de inserção de uma agulha rígida em um corpo viscoelástico bidimensional. Extraído de Wang, Wang e Hirai (2012)

Na figura 5 temos o trabalho de Wang, Wang e Hirai (2012), onde está representado em (a) as forças restritivas envolvidas na inserção da agulha e em (b) resultados da simulação de uma agulha rígida num material viscoelástico bidimensional, onde o comportamento de deformação do tecido é observado na inserção e na remoção da agulha.

No trabalho de Yang (2011) foi proposto um novo método de deformação pela combinação do conceito massa-mola com um método baseado em pressão interna para

a construção de modelos de globos oculares e córneas. O algoritmo proposto utilizava a resolução de equações diferenciais *Verlet*, que apresenta alta precisão, boa convergência, resultados estáveis e rastreio independente de velocidade. Na utilização do algoritmo a córnea é modelada por elementos triangulares, em suas extremidades encontra-se o sistema massa-mola e na parte interna uma malha para a aplicação do modelo baseado em pressão. Os resultados obtidos dos experimentos mostraram que este método (YANG, 2011) melhora a precisão para a deformação de tecidos moles e reduz a complexidade computacional.



Figura 6 – Em (a), (b) e (c) perspectivas do modelos físico massa-mola do globo ocular, em (d) o globo ocular antes da deformação pela lei dos gases e em (e) após a deformação. Adaptado de Yang (2011)

Na figura 6 está a representação do modelo massa-mola do globo ocular e a deformação através da expansão de gases, proposta do trabalho de Yang (2011), onde ocorre o crescimento da região central, de modo a representar a anatomia do globo ocular e a sua cavidade.

O desenvolvimento de simuladores médicos é abordado neste trabalho como fundamento para construção da área de interação tridimensional com o objeto, afim de representar o processo de deformação em tempo real, baseando-se na tese de doutorado de Novi (2011) e no trabalho de Delingette e Ayache (2004), onde ambos abordam a construção de simuladores médicos observando a importância das características envolvidas na definição de um processo de simulação médica aceitável, ressaltando pontos como processo de deformação e discretização dos efeitos físicos envolvidos. No trabalho de Novi (2011) temos a definição de simulação para malhas usando a deformação viscoelástica que levou em consideração os efeitos da deformação, o tempo de cálculo e o tempo de reprocessamento gráfico para esta abordagem, explicou também pontos referentes ao processo de corte e fratura dos objetos.

Neste trabalho ocorreu o uso de *metaballs*, que consiste em um modelo molecular com propriedades físicas, similar a abordagem SPH, porém usado como parte de construção de modelos de *blob*, mais simples de reduzir e reconstruir que um modelo de malhas normal, sendo que as malhas são construídas pelos centros das *blobs*.

Os modelos de manipulação de objetos e as características físicas da deformação de corpos fluídos e sólidos presentes em Novi (2011) fundamentam os dois processos de deformação para fraturas e cortes dentro do espaço de simulação proposto.

No trabalho de Delingette e Ayache (2004) existe uma abordagem mais detalhada sobre a definição de simuladores médicos, sua história, a evolução desta ferramenta, a apresentação do modelo de deformação trabalhado e a aplicação para procedimento de cirurgia do fígado com incisão mínima.

A abordagem do trabalho de Delingette e Ayache (2004) poderia ser melhor utilizada por esta dissertação se o propósito estivesse na construção de simulador e fizesse o uso de objetos com malha, porém a utilidade dos conceitos a respeito da interação, anatomia de órgãos e as aproximações dos modelos matemáticos ajudaram a montar parte da solução do problema desta dissertação, ao aproximar tecidos moles constituídos por modelos com malha para a abordagem sem malha, que permitiu a propagação de resultados de modo mais eficiente.

Relacionado também está o framework para construção de aplicações médicas VIMET, desenvolvido por Oliveira (2014), que possibilita o desenvolvimento de aplicações baseadas em objetos com malha e método de deformação viscoelástico em procedimentos de palpação e punção.

Este framework possibilita o desenvolvimento de uma aplicação de simulação médica em ambiente virtual por meio de uma interface gráfica indutiva, que permite a configuração de novas aplicações sem conhecimento de programação, mas ainda sendo necessária a configuração do ambiente de realidade virtual.


Figura 7 – Representação do gerador de simulação médica ViMeT. Extraído de Oliveira (2014).

Por meio da interface gráfica o usuário pode selecionar os objetos que consistem de modelagens de órgãos e instrumentos médicos. Definição das características destes objetos com relação a posição, inclinação e tamanho, e a definição de quais funcionalidades que farão parte da aplicação (OLIVEIRA, 2014), representados na figura 7.

Por último cabe colocar aqui o trabalho de Liu et al. (2014) que aborda o desenvolvimento de uma simulação que utiliza SPH, o algoritmo octree como ferramenta de controle de vizinhança e o modelo mecânico de *Voigt* para estabelecer o relacionamento entre estresse e tensão. O modelo mecânico de *Voigt* define que o tensor de estresse para material isotrópico pode ser dividido em tensor esférico e tensor de desvio, e o tensor de tensão é dividido entre deformação de volume e distorção do mesmo volume.

O processo de deformação presente em Liu et al. (2014), apresentado na figura 8, conta também com o controle da área de deformação para a aplicação de força, onde durante o processo de entrada de força por parte do dispositivo são definidas áreas de interação a partir da região de impacto, conforme 8.



Figura 8 – Simulação presente no trabalho de Liu et al. (2014).

## 4 Smoothed Particles Hydrodynamics

A representação do método SPH é dada por um conjunto de partículas definidas como pontos no espaço, aos quais também associamos outras propriedades individuais relacionadas à física do fenômeno simulado, de modo que o estado do sistema é representado por um conjunto de partículas, onde, além de representar o objeto da simulação, as partículas são utilizadas como a estrutura computacional para calcular as aproximações necessárias afim de obter uma solução numérica para as equações (PAIVA et al., 2009).

Desde a sua aplicação inicial em 1977 (LUCY, 1977) para resolver problemas astrofísicos, o método SPH tem sido modelado para atender uma maior área de problemas, tanto para os problemas astrofísicos, quanto para casos que contemplem hidrodinâmica e mecânica dos sólidos (PAIVA et al., 2009).

Devido a falta de necessidade em usar conectividade pré-definida entre as partículas da discretização, o método SPH é atrativo para aplicações de impacto em alta velocidade, explosão e simulações complexas. Outra característica atraente deste método é a combinação da formulação lagrangeana com as partículas em simulações de escoamento de fluidos, pois devido as partículas no sistema SPH carregarem propriedades físicas seu movimento é dado em função das interações entre si e das forças externas, o que permite guardar toda a dinâmica do escoamento.

# 4.1 Aproximação por partículas

No método SPH todo o conjunto de interação, o objeto e seus componentes são representados por um número finito de partículas distribuídas no domínio do espaço de simulação, conforme a equação 3.

$$u^{h}(x) = \int_{\Omega} w(x - y, h)u(y)d\Omega$$

As representações integrais obtidas para uma função u(x) e suas derivadas em um ponto  $x \in \Omega$  podem ser discretizadas substituindo a integral no domínio  $\Omega$  pelo somatório sobre todas as partículas que representam esse domínio, ao fazer uso da condição de compacidade sobre o problema  $\phi$  se reduz à integração usando o suporte compacto do núcleo, de modo que o somatório pode ser calculado localmente, conforme a equação 11.

$$\sum_{j \in \Omega_i} u(x_j) W^h(x_i - x_j) \frac{m_j}{\rho_j}$$
(11)

O volume infinitesimal  $d\Omega$  foi substituído pelo volume finito  $\Delta V$  relacionado à porção do sistema representada por uma partícula vizinha, sendo relacionado à massa m da partícula pela expressão:

$$m = \Delta V.\rho$$

onde  $\rho$  representa a densidade da partícula.

## 4.1.1 Operadores básicos

Desta forma o valor de uma função em uma dada partícula i é aproximado de uma média dos valores da função em todas as partículas j pertencentes a seu suporte, ponderados pelo núcleo e pelas propriedades físicas das partículas vizinhas (PAIVA et al., 2009), em resumo, as aproximações para uma partícula i são representadas pelas equações 12.

função vetorial 
$$f_i = \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} f_i W_{ij}$$
  
divergente da função vetorial  $\nabla f_i = \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} f_i \cdot \nabla W_{ij}$  (12)  
gradiente da função vetorial  $\nabla f_i = \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} f_i \nabla W_{ij}$ 

As aproximações por partículas discretizam as representações integrais contínuas de uma função e sua derivada, baseadas num conjunto qualquer de partículas (PAIVA et al., 2009).

## 4.1.2 Comprimento suave

O comprimento suave h atribuído aos pontos está diretamente ligado a precisão com que os efeitos da deformação são representados, pois a aproximação por partículas precisa de um número mínimo de pontos dentro do suporte compacto para refletir alguma alteração, e um número máximo para evitar que a deformação se propague levando em consideração todas as partículas da nuvem de pontos.

Quanto ao uso de recursos é importante levar em consideração também a quantidade de vizinhos k durante as atividades de busca da vizinhança, devido a possibilidade de haver

vizinhos muito próximos, ou muito distantes, com valores muito além do comprimento suave h.

## 4.1.3 Operadores SPH

Esta subseção apresenta as aproximações resultantes das propriedades implícitas do método SPH, servindo também como identidade para os operadores diferenciais, que se mostraram mais adaptadas à física ou à definição matemática.

Os operadores básicos apresentados anteriormente são imprecisos e frequentemente não obedecem às propriedades de conservação nas equações, porém quando a aproximação é feita com o uso de um termo que contém a expressão nula

$$\nabla W(x) = \sum_{j} \frac{m_j}{\rho_j} \nabla_x W(x - x_j) = 0,$$

e com a garantia de que  $W(x - x_j)$  seja uma partição da unidade, é possível melhor as funções para:

gradiente SPH 
$$\nabla f_i = \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} (f_j - f_i) \nabla_i W_{ij}$$
  
divergente SPH  $\nabla f_i = \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} (f_j - f_i) \cdot \nabla_i W_{ij}$  (13)

## 4.2 Aspectos numéricos

Como o computador está limitado à operações algébricas com uma quantidade finita de números para modelar a natureza, procura-se aproximar no sentido matemático o modelo físico, o que se transforma num problema de tradução em linguagem de programação e formulação de processo matemático delicado, submetido às limitações da lógica de programação e às regras do fenômeno físico.

## 4.2.1 Integração temporal

O método SPH permite calcular aproximações de derivadas espaciais, problema este definido como a discretização do contínuo, que possibilita calcular as derivadas a partir de partículas distribuídas no espaço. A integração temporal se assemelha com a discretização em grades, onde são explorados os espaços anteriores e posteriores ao instante atual. Pela literatura adotada (PAIVA et al., 2009) o método *leap-frog* apresentado a seguir foi escolhido para a integração temporal.

## 4.2.1.1 Integrador *Leap-Frog*

É um integrador simples, mas com uma precisão de segunda ordem, sendo baseado na estimativa de derivada como diferença centrada, representada na equação 14.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \frac{1}{2}h) - \mathbf{v}(t - \frac{1}{2}h)}{h} \approx \frac{\mathbf{v}(t + \frac{1}{2}\Delta t) - \mathbf{v}(t - \frac{1}{2}\Delta t)}{\Delta t}$$
(14)

Ao contrário da "diferença para frente" usada no integrador de Euler, o integrador *leap-frog* é reversível no tempo, devido à simetria dos passos de tempo, sendo importante, pois garante a conversão de energia do sistema.

### 4.2.1.2 Estimativa de passo de tempo

Em situação ideal a derivada temporal discreta converge para a derivada normal caso o passo de tempo  $\Delta t$  tenda a zero, porém é impraticável usar um passo de tempo muito pequeno, pois é necessário tempo de resposta aceitável numa simulação. Sendo assim para a estimar o passo de tempo de uma simulação pode-se usar avaliação física, que consiste em avaliar o tempo a partir das propriedades do material, geralmente associado com a velocidade do som nele, sendo colocada como velocidade máxima de propagação, definida pela equação 15.

$$\Delta_{tCFL} = \alpha \frac{h}{c} \tag{15}$$

Onde:

 $\Delta_{tCFL}$  é a variação de tempo padrão SPH Courant Friedrich Lewis;

 $\alpha$ é um valor constantes definido pelo usuário;

h é o valor de suporte do ponto;

cé a velocidade de propagação do som no material.

### 4.2.2 Busca de partículas vizinhas

Os cálculos dos procedimentos do método SPH são realizados através de somas sobre partículas vizinhas, que se assemelham com a maioria dos métodos de simulação, porém no SPH as partículas mudam de posição ao longo do tempo, desta forma as relações de vizinhança tendem a mudar, o que, se não for bem trabalhado pode tomar todo o tempo do processador.

A análise sobre as técnicas para realizar a busca de partículas vizinhas se baseou nos algoritmos apresentados em Paiva et al. (2009), que são força bruta, grades e estruturas adaptativas.

### 4.2.2.1 Força bruta

Algoritmos de força bruta envolvem aplicar a solução mais prática sem a preocupação com a taxa de sucesso, construindo apenas uma solução que resolve, porém sem atenção ao uso de recursos, que pode levar a um número desnecessário de ações para alcançar seu fim.

Segundo Paiva et al. (2009), os algoritmos de força bruta compreendem lógica simples, porém necessitam utilizar grande esforço computacional para chegar a uma resposta. Quanto ao uso de força bruta foram observados trabalhos envolvendo o uso de pura força bruta, como visto no trabalho de Tompkin et al. (2012), que compara ponto a ponto as nuvens geradas a partir de vídeos para encontrar relacionamentos que se referem aos locais onde foram capturados, permitindo a navegação numa biblioteca de vídeos.

Entretanto, como uma forma de melhorar o uso de força bruta temos o uso de técnicas de restrição de espaço, pois não há necessidade de percorrer toda a nuvem, como pode ser observado em Huang et al. (2013), que aborda a melhoria de fronteiras em objetos reconstruidos a partir de uma nuvem de pontos, onde a manipulação destas, faz uso da distância dos vetores da normal do ponto em relação a normal da vizinhança, com o uso de uma área de alcance para limitar a busca ponto a ponto à toda estrutura.

## 4.2.2.2 Grades

Os algoritmos de grade consistem em mapeamentos espaciais para subdivisão e reaproveitamento de instruções já realizadas, pois compreendem a construção de uma matriz sobre a estrutura de pontos, representado pela figura 9.



Figura 9 – Representação gráfica do método de busca em grades, que consiste em k subdivisões do espaço do tamanho do raio de suporte do ponto de busca, extraído de Paiva et al. (2009).

Segundo Paiva et al. (2009), a busca na vizinhança por meio de grades, consiste em dividir o espaço da nuvem por um tamanho definido, de modo que a mesma seja feita mais rapidamente a um custo maior de memória.

A exemplo deste tipo de algoritmo temos o trabalho de Snavely, Seitz e Szeliski (2006), que aborda a construção de uma ferramenta de navegação para grandes coleções de fotos baseados na posição e ângulo de captura e associando seus pontos de identificação numa nuvem ambiente, de modo que a busca das imagens é feita pelo encontro dos pontos numa grade que representa a nuvem.

No trabalho de Guillemot, Almansa e Boubekeur (2012) que consiste na reconstrução de modelos a partir de uma nuvem de pontos utilizando valores do vetor da normal para busca em distância por pontos vizinhos, fazendo uso de um valor estabelecido pelo usuário, para construir a estrutura de grade com áreas delimitadas conforme a necessidade de detalhes na visualização do objeto.

#### 4.2.2.3 Estruturas adaptativas

Estruturas adaptativas são estruturas de dados que compreendem e refletem a situação dos modelos baseados em pontos, sendo que para isto é necessário abrigar a informação em memória sempre que ela necessitar ser acessada, com a representação espacial apresentada na figura 10.



Figura 10 – Representação gráfica de estruturas adaptativas. Na figura da esquerda a representação da busca, e na figura da direita a estrutura de armazenamento, extraído de Paiva et al. (2009).

Segundo Paiva et al. (2009) estruturas adaptativas consistem de estruturas para compreender nuvens com dados muito esparsos ou de difícil percepção de relacionamentos numa grade, devido a grande quantidade de memória utilizada. A estrutura adaptativa mais comum é a partição binária do espaço, que consiste em dividir cada ponto da nuvem por uma de suas dimensões recursivamente.

Dentre os trabalhos analisados foram encontradas diversas estruturas adaptativas, como a kdtree presente no trabalho de Öztireli, Alexa e Gross (2010), que visa a melhoria de objetos gerados a partir de uma nuvem de pontos e faz uso da estrutura para manter as relações de vizinhança de modo dinâmico.

Analisado também a estrutura octree no trabalho de Xie e Xie (2011), que aborda a otimização no processo de simplificação do volume de nuvens de pontos com o uso da estrutura para organizá-los e a definição de limites para cada visualização, gerando modelo mais complexo conforme a necessidade de detalhe.

No trabalho de Livny et al. (2011) foi utilizada a árvore de espalhamento mínimo como estrutura adaptativa que aborda a captura de uma nuvem de pontos de uma árvore, e com uso de técnicas de otimização para a modelagem consegue renderizar de modo eficiente em ambiente virtualizado. Neste ambiente utiliza-se o algoritmo da árvore de espalhamento mínimo para separar galhos de folhas, a partir dos pesos referentes à concentração de pontos vizinhos, pois quanto menos esparsos os pontos mais próximo de ser definido como galho e o inverso para a definição de folha.

Outra estrutura adaptativa utilizada foi uma árvore clusterizada, apresentada por Yu et al. (2010), que aborda a simplificação de nuvens de pontos para melhor ganho de desempenho em sua utilização, construindo a árvore de *clusters* por meio de subdivisões do algoritmo de k-médias.

# 5 Engenharia do simulador usando SPH para deformação de tecidos moles

A metodologia utilizada neste projeto consistiu na análise, desenvolvimento e implementação de um ambiente de simulação para modelos baseados em pontos, com o uso de um sistema de partículas e equações que adotam o SPH, para a aplicação da deformação elástica a tecidos moles.

A validação do método de deformação sem malha leva em consideração sua comparação com o método de deformação massa-mola, ambos baseados no mesmo princípio e conceito de deformação, que consiste na relação entre a variação de posição entre pontos durante os efeitos provenientes do evento externo, o que garante dizer que ambos são sistemas de partículas.

A forma de análise dos resultados foi realizada por meio da comparação de uso de recursos do sistema, a nível de uso do processador e memória RAM, e tempo de resposta das funções de recálculo de vizinhança e cálculo de deformação, que são descritos no capítulo 7.

# 5.1 Processo de deformação sem malha

O processo de deformação apresentado aqui fez uso da proposta de (PAIVA et al., 2009) com conceitos de deformação de sólidos, ao utilizar as funções para deformação elástica, de modo similar ao trabalho de Müller et al. (2004), porém adequou-se as funções de deformação dentro do sistema SPH ao invés de utilizar o MLS.



Figura 11 – Sequência de aplicação de um motor SPH num sistema de partículas com forças internas e externas. Adaptado de Paiva et al. (2009)

O desenvolvimento de um sistema SPH é muito similar a construção de um motor de física presente em aplicações de jogos e computação gráfica, visto que é necessário um controle sobre as propriedades dos elementos da aplicação para poder refletir o estado de deformação, ou para refletir o estado do objeto no ambiente em que está inserido, apenas pela presença das forças externas, levando em conta os eventos que ocorrem para cada partícula a cada iteração do sistema, conforme a figura 11, que apresenta as etapas em que são realizados os cálculos de posicionamento das partículas, descritos na lista abaixo:

- Inicialização: inicialização do sistema SPH, que consiste em inicializar todas as partículas do sistema com valores padrão, a busca da relação de vizinhança de cada ponto e os valores derivados.
- Cálculo de forças externas e internas: este cálculo envolve efeitos da interação do usuário sobre o modelo e da sua interação com o ambiente, produzindo reações e modificações no posicionamento dos pontos.
- Integração temporal: aplicação da variação das características dos pontos por passo de tempo, ou seja, a modificação da estrutura dos pontos após um intervalo determinado.
- Condições de restrição: condições verificadas a cada interação para evitar excesso no processo de deformação elástico, que limitam a distância entre pontos vizinhos a um mínimo e máximo.
- 5. Visualização: corresponde à resposta da interação na representação visual.

# 5.2 Método de deformação elástico baseado em SPH e dinâmica dos sólidos

O método de deformação montado para o projeto faz uso dos conceitos apresentados em Paiva et al. (2009), Liu et al. (2014) e Fober et al. (2011), visando então a construção de um sistema SPH para a deformação de tecidos moles, com restrição de área de deformação e variação de efeito baseado nas propriedades do objeto.

Para a montagem do método existe um conjunto de etapas para a interpretação da força externa dentro do sistema de equações e sua conversão computacional, onde resolve-se o componente central (a função de peso) para depois definir o gradiente SPH e a sua adequação nas funções de manutenção da deformação elástica (estresse e tensão), para chegar na definição do componente da força interna.

Após a definição da força interna temos a integração em passo de tempo de sua aplicação no objeto, onde itera e modifica a estrutura de visualização até alcançar o ponto de parada, ou condição de contorno do modelo.

# 5.2.1 Definição das propriedades durante a inicialização

Durante o processo de inicialização do sistema SPH, o conjunto de propriedades associadas aos pontos é inicializado a partir das definições nos trabalhos de Müller et al. (2004) e Paiva et al. (2009), onde:

Velocidade (v), aceleração (a) e força são inicializados com zero (objeto inicialmente parado).

Estado de deformação é a propriedade que indica se o ponto está na região deformável após a interação de uma força, sendo inicializada como falsa, pois antes da aplicação de força todos os pontos estão inativos.

Densidade ( $\rho$ ), coeficiente de Poisson ( $\mathbf{v}$ ) e módulo de Young (E) são definidos a partir de uma biblioteca de materiais, e configuradas conforme parâmetro dentro da carga do objeto.

Cálculo de vizinhança é utilizada para guardar a região definida por k vizinhos de um ponto, onde para isto foi usada a estrutura adaptativa kdtree (MOORE, 1991), pois resolve questões de busca em área e por quantidade de vizinhos, atendendo questões de posicionamento espacial para quaisquer n dimensões. Região de suporte compacto do ponto (h) é definida como a região de influência do ponto, sendo definido como 3 (três) vezes a distância média aos pontos vizinhos. Massa (m) é definida como a potência ao cubo da região de suporte compacto  $(h^3)$ multiplicada pela densidade do objeto  $(\rho)$ , com a possibilidade de uso de uma função de ajuste (s) para adequar a massa, dependendo do material.

$$m = sh^3\rho$$

**Densidade local** ( $\rho_i$ ) é um parâmetro mutável do ponto consistindo na proporção de densidade que o ponto ocupa no objeto, sendo menor ou igual a densidade do material, definida pelo impacto que provoca na vizinhança, conforme a expressão:

$$\rho_i = \sum_{j \in \Omega_i} m_j W_{ij}$$

Após a inicialização das variáveis, todas relacionadas as propriedades físicas de cada ponto da nuvem, o sistema entra em estado passivo aguardando pela entrada de força do usuário, para começar o processo de cálculo das equações que refletem o efeito de deformação. Seus detalhes estão apresentados nas próximas subseções.

# 5.2.2 Cálculo do gradiente do deslocamento

Utilizando a equação 3:

$$u^{h}(x) = \int_{\Omega} w(x-y,h)u(y)d\Omega$$

A função de aproximação u utilizada é a mesma do sistema de deformação massamola, que é o processo de deformação elástica, apresentada na equação 2.

Para definir o gradiente:

$$\nabla u^{h}(x) = \int_{\Omega} w(x - y, h) \nabla u(y) d\Omega$$
(16)

Onde:

 $\nabla u^h(x) =$  variação da função de deformação u no ponto x para cada uma de suas dimensões em uma vizinhança definida pelo valor de suporte h;

u(y) = função de aproximação aplicada exclusivamente na relação do ponto x com o ponto y em cada dimensão.

A integral utilizada é substituída pela ponderada da região e a função de peso w(x - y, h) é substituída por uma das funções de *kernel* analisadas neste trabalho, que neste caso envolve o uso do *kernel* e gradientes polinomiais, representados nas equações 17 e 18, respectivamente.

$$W_{poly}(\overrightarrow{r},h) = A \begin{cases} (h^2 - \|\overrightarrow{r}\|^2)^3 & para & 0 \le \|\overrightarrow{r}\| \le h \\ 0 & para & \|\overrightarrow{r}\| > h \end{cases}$$

$$A = \frac{315}{64\pi h^9}$$

$$\nabla W_{poly} = -B.\overrightarrow{r}(h^2 - \|\overrightarrow{r}^2\|)^2$$
(18)

$$B = \frac{945}{32\pi h^9}$$

Onde:

 $\overrightarrow{r}$  = vetor entre os pontos  $p_i \in p_j$ h = raio de suporte do ponto  $p_i$ 

Deste modo, a função 16 do gradiente SPH passa à equação 19.

$$\nabla u = \sum_{j \in \Omega_i} \frac{m_j}{\rho_j} u_j \nabla_i W_{ij} \tag{19}$$

Onde:

 $\nabla u$  gradiente do deslocamento;

 $\frac{m_j}{\rho_j}$  volume do ponto de suporte;

 $u_j$  deslocamento entre o ponto de suporte  $p_i$  e o vizinho  $p_j$ ;

 $\nabla_i w_{p_i p_j}$  gradiente da função peso aplicada a cada componente do deslocamento.

# 5.2.3 Cálculo da tensão

Como esta aplicação contempla apenas a deformação elástica e somente a elasticidade do objeto, será desprezado o cálculo da tensão plástica nesta dissertação. Seguindo a mesma proposta para o cálculo de tensão de Müller et al. (2004), este trabalho utiliza o tensor *Green-Saint-Venant* para o cálculo da tensão elástica, definido na equação 20.

$$\varepsilon = \nabla u + \nabla u^T + \nabla u \nabla u^T \tag{20}$$

Para ser então utilizada para o cálculo de estresse de acordo com as características do objeto.

# 5.2.4 Cálculo do estresse

O cálculo do estresse após a definição da tensão é feita pelo seu enquadramento dentro da equação 21.

$$\sigma = C\varepsilon \tag{21}$$

Onde  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são matrizes simétricas 3x3 e a matriz C é construída com base em dois parâmetros que descrevem o comportamento elástico do material: módulo de *Young E*, que é a propriedade do objeto para mapear linearmente o estresse com a força elástica resultante, e o coeficiente de *Poisson* v, que é a preservação de volume.

$$\frac{E}{(1+\mathbf{v})(1-2\mathbf{v})} \begin{bmatrix} 1-\mathbf{v} & \mathbf{v} & \mathbf{v} & 0 & 0 & 0\\ \mathbf{v} & 1-\mathbf{v} & \mathbf{v} & 0 & 0 & 0\\ \mathbf{v} & \mathbf{v} & 1-\mathbf{v} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{v} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{v} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{v} \end{bmatrix}$$
(22)

Desta forma o vetor com os componentes do estresse fica definido como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mathsf{v})(1-2\mathsf{v})} \begin{bmatrix} 1-\mathsf{v} & \mathsf{v} & \mathsf{v} & 0 & 0 & 0 \\ \mathsf{v} & 1-\mathsf{v} & \mathsf{v} & 0 & 0 & 0 \\ \mathsf{v} & \mathsf{v} & 1-\mathsf{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mathsf{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathsf{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathsf{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$
(23)

A partir do tensor de estresse pode-se obter as forças elásticas resultantes.

## 5.2.5 Cálculo das forças resultantes

O cálculo da resultante da tensão e estresse é baseada na densidade da energia de tensão acumulada em torno do ponto i para um material isométrico, como apresentado em Müller et al. (2004) na equação 24:

$$f_i = -\nabla_{u_i} U = -\frac{1}{2} \nabla_{u_i} (\varepsilon \cdot C\varepsilon) = -\sigma \nabla_{u_i} \varepsilon$$
(24)

Como as forças resultantes são aplicadas a cada um dos vizinhos, devido ao princípio da ação e reação, o cálculo efetivo dos vetores de força é:

$$f_i = -2v_i J_i \sigma_i d_i = F_e d_i \tag{25}$$

Onde v é o volume de suporte do ponto,  $J_i$  é a jacobiana do ponto i definida na equação 26.

$$J_i = I + \nabla u^T \tag{26}$$

E  $d_i$  definido pela equação 27.

$$d_i = -\sum_{j \in \Omega_i} x_{p_i p_j} W_{ij} \tag{27}$$

O valor de  $d_i$  consiste no deslocamento do ponto de suporte em função da vizinhança, baseada na multiplicação do vetor entre o ponto de suporte  $p_i$  e o vizinho  $p_j$ , representado por  $x_{p_ip_j}$  pela função de peso aplicado na relação dos dois pontos.

## 5.2.6 Integração temporal

Ao final do cálculo das forças internas em cada ponto da nuvem que sofreu alteração, cada um possui um vetor de força resultante acumulada, resultante da influência da vizinhança.

Para simular o movimento da força resultante é necessário o cálculo da aceleração a gerada pelas forças internas, a velocidade v gerada pela aceleração e o deslocamento x

gerado pela velocidade dentro de um passo de tempo, conforme as equações 28, 29 e 30, respectivamente.

$$a = \frac{f_t + \Delta t}{m_i} \tag{28}$$

$$\mathbf{v}_t + \Delta t = \mathbf{v}_t + a\Delta t \tag{29}$$

$$x_t + \Delta t = x_t + \mathbf{v}_t \Delta t \tag{30}$$

O passo de tempo utilizado faz uso da configuração temporal *leap-frog* incorporando a configuração adaptativa apresentada na variação do passo de tempo, baseado no variante temporal (GOSWAMI; PAJAROLA, 2011) padrão do SPH, conforme equação 15.

# 5.3 Construção do espaço de simulação

A construção do simulador deste projeto é uma interface simplificada de simulador médico contendo apenas o espaço de visualização construído com linguagem C++ e biblioteca OpenGL, com um carregador de modelos simples, conforme figura 12.



Figura 12 – Interface gráfica do simulador

A representação adotada pelo simulador faz uso de malhas por ser mais simples implementar este tipo de visualização, mas é feita apenas para este uso, não sendo necessária utilizar a sua estrutura para nada além do que montar triângulos.

O simulador conta com recursos de navegação do objeto, sendo possível rotacionar, transladar e alterar a escala do campo visual da câmera, e possui também funcionalidade de visualização baseada nos pontos, arestas e faces de uma malha geométrica normal, tendo em vista as características dos testes a serem realizados usando o mesmo objeto. Como características também, o simulador funciona em tempo real, onde cada passo de tempo é executado conforme a propagação da velocidade do som no objeto.

# 6 Metodologia para a construção da simulação

Neste capítulo é descrito o conjunto de passos que foram utilizados para o desenvolvimento do simulador e do processo de simulação, descrevendo a implantação das regras e fórmulas apresentadas no capítulo 5.

# 6.1 Construção do método de deformação

Para a realização do processo de simulação usando SPH em qualquer ambiente é necessário seguir um conjunto de etapas para inicializar o sistema e configurar o conjunto de variáveis, depois aguardar a a entrada de dados por parte do usuário, seja por entrada manual, por dispositivo háptico ou outra configuração não qual seja possível passar dados ao sistema para que ele comece com os cálculos de gradiente, tensão, estresse e forças do sistema, e depois refletir a alteração da provocada pela força conforme o passo de tempo.

## 6.1.1 Inicialização do sistema

Para a inicializar o sistema SPH é necessário preparar toda a estrutura do objeto e das variáveis globais do processo, seguindo o conjunto de passos:

- 1. carregar dados da interface grafica
- 2. carregar dados da simulacao
- 3. carregar dados do objeto

Desta forma após a realização da carga do sistema e da inferface gráfica, independente de como ela seja construída, é realizada a carga de dados do objeto que nos dá os recursos básicos para o uso do SPH, usando o conjunto de instruções presentes nos algoritmos 1, 2, 3, 4, 6, 7. Algoritmo 1 Carregar dados do objeto

procedure CARREGAR DADOS DO OBJETO

if objeto existe then

leia todos os vertices como pontos;

leia todos os triangulos como informacao visual apenas;

identifica materiais pelos tetraedros();

else

finaliza a simulacao

end

inicializa variaveis do ambiente()

Fonte: Hipólito Douglas, 2015

Algoritmo 2 Identificação das propriedades dos materiais pelos tetraedros

procedure IDENTIFICA MATERIAIS PELOS TETRAEDROS

for i de 1 até total tetraedros do

- if informacao extra do tetraedro = valor material 1 then todos os indices dos pontos apresentados assumem propriedades do material 1 da biblioteca de materais
- $\mathbf{if}$  informacao extra do tetraedro = valor material 2 then

todos os indices dos pontos apresentados assumem propriedades do material 2 da biblioteca de materais

## end

Fonte: Hipólito Douglas, 2015

Algoritmo 3	3	Inicialização	o das	variáveis	do	$\operatorname{ambiente}$
-------------	---	---------------	-------	-----------	----	---------------------------

procedure inicializa variaveis do ambiente

for i de 1 até quantidade de pontos do

if *i* for igual a material 1 then

propriedades do ponto i recebem valores da biblioteca de propriedades do material 1

 $\mathbf{if}$  i for igual a material 2  $\mathbf{then}$ 

propriedades do ponto i recebem valores da biblioteca de propriedades do material 2

else

não atribuir valores de propriedade para o ponto

end

end

calculo de vizinhos()

calculo de densidade local()

calculo do volume()

Fonte: Hipólito Douglas, 2015

 Algoritmo 4 Cálculo de vizinhança

 procedure CALCULO DE VIZINHOS

 usar kdtree para construir a arvore de busca

 for i de 1 até total de pontos do

 busca n vizinhos próximos(vetor vizinhos, vetor distâncias)

 distancia media ¡- media(vetor distancias)

 raio de suporte do ponto i ¡- 3 \* distancia media

 massa do ponto i ¡- fator escala \* distancia media <sup>3</sup> \* densidadepontoi

 end

Fonte: Hipólito Douglas, 2015

Algoritmo 5	5	Inicialização	do	sistema	SPH
-------------	---	---------------	----	---------	-----

# procedure RECALCULO DE VIZINHOS

usar kdtree para construir a arvore de busca for *i de 1 até total de pontos* do busca n vizinhos próximos(vetor vizinhos, vetor distâncias) distancia media ¡- media(vetor distancias) raio de suporte do ponto i ¡- 3 \* distancia media end

calculo de densidade local()

calculo do volume()

Fonte: Hipólito Douglas, 2015

Algoritmo	6	Cálculo	da	densidade	local
-----------	---	---------	----	-----------	-------

**procedure** CALCULO DE DENSIDADE LOCAL **for** *i de 1 ate quantidade de pontos* **do** 

for *j* de 1 ate quantidade de vizinhos do densidade local de i j- densidade local de i + massa de i \* kernel polinomial(diferença entre o ponto i e o seu vizinho j, raio de suporte de i) end

end

Fonte: Hipólito Douglas, 2015

A função kernel polinomial está descrita na equação 17.

Algoritmo 7 Cálculo do volume
procedure CALCULO DO VOLUME
for <i>i</i> de 1 ate quantidade de pontos do
volume de i j- massa de i / densidade local de i
end

Fonte: Hipólito Douglas, 2015

## 6.1.2 Cálculo do gradiente

Após a inicialização de todos as variáveis relacionadas com o processo de deformação, o sistema entra em estado de espera de um vetor de força e uma posição de impacto, para então da inicio ao processo de deformação.

Após receber o impacto são definidas as três regiões de impacto que conferem melhor realismo para a aplicação de força e que está ligado diretamente ao tamanho da força exercida e à quantidade de pontos vizinhos dentro do raio de influência k.

Após a definição do campo de influência temos a montagem do gradiente SPH definido na equação 19, apenas resolvendo usando os componentes fornecidos inicialmente e com o uso da equação do gradiente da função kernel polinomial, equação 18.

## 6.1.3 Cálculo da força elástica

Após a obtenção do gradiente do deslocamento é feito o cálculo das matrizes de tensão e estresse para a composição da matriz elástica que confere as propriedades de deformação do material.

Para tornar mais simples o uso do gradiente negativo da aplicação de força presente na equação 24 é utilizada a aproximação presente em 25, que retrata a aplicação da matriz elástica aos deslocamentos.

### 6.2 Construção da interface gráfica

A construção da interface gráfica levou em consideração o desenvolvimento usando o padrão MVC – Model View Controller – para melhorar o fluxo de informação e separar as funções de modelagem da informação das funções de persistência dos objetos em deformação.

## 6.3 Controle do passo de tempo

O controle do passo de tempo acontece de duas formas, tanto pelo tempo de atualização da interface, que compreende o passo de tempo cronológico, que está ligado diretamente a visualização em tempo real quanto, e o passo de tempo adaptativo que reflete quanto da alteração é exibido por passo de tempo de atualização.

# 6.4 Controle dos limites de deformação

Como precaução para as recorrentes explosões que atingiram os modelos durante o desenvolvimento algumas medidas de segurança foram propostas para o simulado, consistindo inicialmente de uma condição de limite para distância entre os pontos, similar a compressão máxima e mínima de uma mola.

Outro ponto a analisar foi o efeito de ter a atualização de posição de pontos durante o cálculo de vizinhos para valores muito acima do esperado, o que retorna um valor não computável tido como infinito positivo ou negativo, neste caso a correção a usar foi um método de restrição de valores nulos, ou fora do limite esperado.

## 7 Testes

Os testes envolvem a avaliação prática do método de deformação para modelos baseados em pontos, em comparação ao mesmo método de deformação com enfoque para modelos com malha, utilizando a abordagem apresentada por Cunha (2009), *Mate Face*, um conceito de representação de malhas que se assemelhou ao uso de pontos presente neste trabalho e adotou o método de deformação massa-mola, que foi implementado para comparação.

As características da avaliação dos métodos envolvem análise das etapas e processos da simulação, compreendendo o carregamento e visualização do objeto, reprocessamento da estrutura e visualização dos efeitos.

# 7.1 Ambiente de testes

Para testar o proposto nesta dissertação foram implementados os métodos massamola e o método SPH com características de força elástica e voltados para a análise de consumo de memória, processamento e tempo de acesso aos pontos.

Os testes foram realizados em um Intel Core i3 2.13GHz com 8GB de RAM utilizando a linguagem C++ e o compilador GCC junto às bibliotecas OpenGL para a construção de interface gráfica e as ferramentas relacionadas, GLUT e GLM; e a biblioteca ANN foi usada como estrutura de dados para construção das relações de vizinhança.

Os testes envolvendo a mama assumiram as características extraídas do trabalho de Sinkus et al. (2005), que traz a velocidade do som no tecido de 1540 m/s, a densidade assumida como a da água de 1  $g/cm^3$  e o coeficiente de Poisson (v) de 0.49999999; e o módulo de Young E de 3.25 para tecidos normais foi extraído de Samani, Zubovits e Plewes (2007).

Os testes envolvendo as esferas se concentram nas propriedades da borracha, que foram extraídas de pesquisas no site http://www.engineeringtoolbox.com/, pois as propriedades da borracha são divulgadas em sites com informações sobre materiais, onde a velocidade do som pode variar de 40 m/s a 150 m/s, com o valor de 60 m/s adotado para os testes, a densidade de 0.93  $g/cm^3$ , o coeficiente de Poisson (v) é de aproximadamente 0.5 e o módulo de Young E entre 0.01 até 0.1, onde para este trabalho foi adotado o valor de 0.075.

## 7.2 Comparação entre SPH x Massa-mola

O primeiro teste descreve as diferenças entre o uso do método massa-mola em comparação ao método SPH, onde foi utilizado o mesmo objeto em dois simuladores, cada um com sua respectiva implementação. O processo de teste registrou o momento antes da carga do objeto, após a carga e depois da deformação sobre o modelo, com o resultado visual apresentado na figura 13.



Deformação no simulador Massa-mola

Figura 13 – Comparação visual entre a aplicação dos métodos nos dois simuladores.

O processo de captura de informações utilizou a saída do programa de monitoramento de recursos *top*, nativo de sistemas operacionais linux para checar consumo de memória, uso de processamento e tempo de execução de processos, e os dados extraídos foram sumariados na tabela 1, que apresenta os valores médios para uso de processamento e memória dos métodos.

	CDII(%)	Memória	Memória sem custo da aplicação
	$OI \cup (70)$	(bytes)	(bytes)
SPH	45	175286	65082
Massa-Mola	6	1405761	140905

Tabela 1 – Comparação entre consumo de processamento e memória de cada método.

Os dados apresentados na tabela 1 consistem na análise da deformação de uma representação de mama composta por 783 vértices utilizando o método SPH e o método massa-mola, levando em consideração o consumo médio de CPU em (%) durante a captura de dados durante 1 minuto no processo de deformação, sendo aplicada a mesma regra para a coluna seguinte que representa o consumo médio de memória. A última coluna é referente ao custo de memória da deformação retirando do valor o custo da aplicação de cada simulador, para o SPH o custo foi de 110.204 *bytes*, enquanto para o massa-mola foi de 1.264.856 *bytes*.

Pelo uso de recursos é simples colocar a estabilidade do método massa-mola, que faz a carga de toda a sua estrutura para realizar o processo de deformação, mas que provoca um consumo de memória elevado, em contrapartida temos o uso do método SPH que necessita de uma quantidade muito inferior de memória para realizar as mesmas operações, mas fazendo uso mais pesado do processador.

## 7.3 Comparação entre quantidade de pontos x desempenho

O segundo teste enfoca a variação do uso de recursos conforme se aumenta a quantidade de pontos do modelo baseado em pontos, aproveitando também para analisar o impacto visual da deformação, apresentado na figura 14.



Figura 14 – Comparação da deformação em função do número de pontos.

O gráfico comparativo ao final da deformação apresentado na figura 14 mostra o consumo de memória em função do aumento do número de pontos durante o processo de deformação, que demonstra a taxa de variação de consumo de cada método e uma visão geral desta proporção entre SPH e Massa-mola.

Referente ao efeito gráfico que a propagação provoca no sistema, existe uma solução de compromisso entre a quantidade de detalhe e a capacidade de processar a alteração para representação em uma simulação em tempo real, tendo em vista os resultados obtidos na tabela 2.

Tabela 2 – Comparação entre quantidade de pontos e tempo de recálculo das relações entre os pontos.

	Qtd. pontos	Recálculo (segundos)	Modificação (segundos)	CPU (%)
Esfera 1	1070	0.019049211	0.009717658	74
Esfera 2	3445	0.073682804	0.015029455	94
Esfera $3$	4637	0.096401231	0.033462513	95

O tempo de recálculo apresentado leva em consideração o tempo médio que a função para montar a relação de vizinhança dentro da área de suporte h levou para encontrar kvizinhos num espaço de tempo de 1 minuto. O tempo de modificação representa o tempo médio que a função de aplicação de deformação levou para executar a alteração na área deformável e a última coluna leva em consideração a quantidade de uso de processamento médio durante o processo de deformação para cada quantidade de pontos.

# 7.4 Análise entre modelo de pontos sólido x modelo de pontos multicamada

O terceiro grupo de testes realizados envolveu a análise entre uma nuvem de pontos para a representação de um objeto sólido, onde as propriedades de todos os pontos correspondem a apenas um material, com uma nuvem de pontos multicamada, que consiste de uma representação com múltiplos objetos associados, e cada um com seu próprio conjunto de propriedades, conforme representação contida na figura 15.



Figura 15 – Representação da nuvem de pontos multicamadas por meio de visualização tetraédrica, em (a) representação do modelo usando wireframe para apresentar a localização dos ductos mamários. Em (b) representação das faces externas, não permitindo a visualização interna. Em (c) temos a representação das malhas externas da mama e dos ductos externos, e em (d) a representação em tetraedros que demonstra que o modelo de ductos está imerso no modelo da mama.

16.

Os resultados gráficos dos testes entre as duas nuvens estão representados na figura



Deformação do modelo multicamadas

Figura 16 – Modelo de pontos da mama sólido e multicamada utilizados para comparações. A deformação de modelo sólido na parte cima contemplou apenas a mama, e na sequência mostrada abaixo a deformação de modelo multicamada contendo a mama e os ductos mamários.

	Qtd. Pontos	Consumo de memória (bytes)	Consumo médio de CPU(%)	Tempo médio da deformação (segundos)	Tempo médio do recálculo (segundos)
Modelo sólido	783	163700	61	0,000315361	0,016180262
Modelo multicamada	14474	228201	99	0,342603476	0,288342923

Tabela 3 – Comparação entre modelo sólido e modelo multicamadas, baseado em consumo médio de recursos e tempo.

Sobre os dados da tabela 3 aferiu-se o seguinte, o consumo de memória RAM por parte da estrutura está relacionado apenas a carga do objeto, sem adição de outras estruturas para manter os pontos, porém a taxa de uso de processador alcança o seu máximo com o aumento do número de pontos, que reflete que a deformação de objeto sólido em comparação ao multicamada, se baseia apenas na quantidade de pontos acrescidos.

Ainda sobre a restrição de área deformável, existe uma proximidade maior entre o tempo de recálculo de vizinhança, que quando relacionado ao tempo de deformação, apresentou maior estabilidade.

Deste modo a utilização de modelo deformável baseado em pontos e multicamada apresenta deformação com diferentes propriedades, com o mesmo comportamento apresentado no teste anterior, onde o número de pontos foi o principal fator de impacto à deformação.

# 7.5 Tabela comparativa entre métodos de deformação

Nesta seção é apresentada uma tabela comparativa (tabela 4) analisando pontos de comparação entre os métodos SPH, Massa-mola e MEF, basedos nas propriedades de deformação.

	Estrutura deformável	Resolução do sistema linear de equações	Utilização de propriedades físicas diretas
SPH	Pontos	Não há	Faz uso
Massa Mola	Malha	Não há	Não faz uso
MEF	Malha	A cada passo de iteração	Faz uso

Tabela 4 – Comparação entre métodos de deformação SPH, Massa-mola e MEF.

Pela comparação apresentada, as principais vantagens da utilização do método sem malha SPH está no pouco consumo de memória, ao fazer uso de pontos, e na qualidade da aproximação física, e como desvantagem o custo dos cálculos de processamento, mas neste quesito perde apenas para o método massa-mola, pois em comparação ao uso de MEF tem ganho de desempenho favorável.

# 8 Conclusão

Neste capítulo são apresentadas as conclusões, que levam em consideração e expectativas de trabalhos futuros para esta dissertação.

# 8.1 Conclusões

Durante as primeiras fases do desenvolvimento da dissertação se estudou diversas possibilidades sobre como trabalhar a deformação sem malha, e como ponto de partida foi realizada uma revisão exploratória sobre o tema para melhorar o entendimento sobre deformação de tecidos sem o uso de malhas, que resultou na adoção do sistema SPH, que apresentou como principal característica a de adotar padrões de aproximação tanto para sólidos quanto para fluidos, devido a passagem dos parâmetros físicos a cada ponto componente da nuvem, sendo possível o trabalho com sistemas de nuvem multicamadas e a presença de elementos internos.

Após a construção do modelo matemático a partir da definição das equações presentes nos trabalhos base desta dissertação foi realizada a implementação do modelo matemático, que consistiu na tradução das funções para o espaço computacional; com o foco no equilíbrio de uma implementação eficiente foi utilizada a linguagem C++, normalmente utilizada para o fim de aplicações gráficas eficientes.

Porém, após a realização de testes de desempenho quanto ao uso de processador, o processamento distribuído junto ao uso de GPU é visto como melhor alternativa, pois durante os testes a implementação foi feita para apenas um núcleo, que resultou em desempenho travado.

Após resolver as etapas de implementação do simulador computacional, o próximo objetivo foi a adequação do modelo matemático do sistema SPH, pois inicialmente o sistema estava baseado no trabalho de Paiva et al. (2009), que aplicava o sistema para a deformação de fluidos e que foi adaptado para deformação de sólidos por meio de uma função de aproximação de deformação elástica, seguindo o trabalho de Müller et al. (2004), que compreendeu uma sequência de adaptações que foram realizadas para customizar as equações.

Devido ao potencial observado durante os testes, ficou evidente a capacidade do sistema de partículas para controlar a deformação em comparação ao método de deformação massa-mola, pois apenas perturbar uma malha é simples, mas quando se explora a alteração de estado, o sistema SPH já estaria preparado e nem mesmo precisaria se adaptar a uma nova condição, sendo necessário apenas alimentar com mais um conjunto de funções para provocar novos efeitos.

Em comparação aos outros trabalhos, a principal característica observada ao utilizar o sistema SPH é a capacidade de customização, pois é possível transportar o sistema para qualquer material e construir ambientes inteiros apenas compostos por pontos. Propriedade esta, que não se encontra habitualmente em aplicações de tempo real e *engines* de jogos, que compreende a simulação com múltiplas propriedades, e a interação entre elas, pois em sua grande maioria, apenas líquidos, gases e fios usam sistemas de partículas, com configuração pré-estabelecidas.

Concluindo, o método de deformação sem malha utilizando SPH desta dissertação tem possibilidades muito maiores do que aquelas encontradas nos métodos de deformação tradicionais, por permitir mais proximidade as propriedades físicas do elementos na deformação, por permitir interação entre duas nuvens de pontos de maneira nativa, ou seja, permite que as duas malhas se comuniquem como se fossem um único objeto, e consequentemente pela melhoria de desempenho para simuladores médicos.

# 8.2 Trabalhos futuros

A capacidade do método de deformação foi apresentada apenas como solução do problema de deformação, mas não reflete em completo todo o seu potencial, devido a ausência de propriedades que caracterizam a deformação em tempo real. Um conjunto de funções e técnicas de implementação que melhoram a qualidade visual e o desempenho, dentre estas funções existe a seguinte relação de melhorias como intenção de atuação em trabalhos futuros:

- **Representação gráfica:** Melhoria da representação gráfica, para evitar o uso de triângulos, construindo uma visualização baseada na reconstrução a partir dos pontos.
- Desempenho: Durante os testes percebeu-se a alta taxa de consumo de processamento pelo método, pois foi usada uma implementação que contempla apenas o uso de um processador, sendo que a máquina de testes possuía quatro, onde é possível

explorar o uso de multiprocessamento e uso de GPU, de modo a melhorar o trabalho com um número maior de partículas, afim de aumentar a complexidade dos modelos.

- Equações físico-matemáticas: Por contemplar apenas um evento da deformação, que compreende apenas a aplicação de força e o reflexo dela sobre o objeto, existem funções referentes a manutenção do objeto que não foram devidamente estudadas e implementadas na versão atual, que são essenciais para melhorar a realidade dos efeitos.
- Usabilidade: Melhoria da interface gráfica para garantir um uso mais fluido para a configuração da deformação no objeto e melhoria da interface do núcleo das funções de deformação, para permitir a inserção de novas funções.
- Interação: Atualmente a deformação se concentra apenas em deformar o objeto; como medida evolutiva está a deformação em cenário, ou seja, possuir mais elementos visuais que criem uma simulação mais realista.

# $\mathbf{Refer}^{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{n}\mathbf{c}\mathbf{i}\mathbf{a}\mathbf{s}^{1}$

ABATE, A. et al. A mathematical model to study the dynamics of epithelial cellular networks. *IEEE/ACM transactions on computational biology and bioinformatics* / *IEEE, ACM*, v. 9, n. 6, p. 1607–20, 2012. ISSN 1557-9964. Disponível em: (http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=3558995{&}tool= pmcentrez{&}rendertype=ab). Citado 3 vezes nas páginas 9, 13 e 14.

BARROS, F. Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2002. Disponível em: (http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-07062006-150039/en.php). Citado 2 vezes nas páginas 7 e 13.

BELYTSCHKO, T. et al. Meshless methods: An overview and recent developments. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, n. 139, p. 3–47, 1996. Disponível em: (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578259601078X). Citado 4 vezes nas páginas 9, 7, 8 e 10.

BREMM, T. Simulação física de corpos deformáveis com técnica sem malha: implementação de método baseado em pontos. Tese (Doutorado), 2012. Disponível em:  $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1164}{\text{monograf}}}$ . Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.

CUNHA, Í. L. L. da. Estrutura de dados Mate Face e aplicações em geração e movimentos de malhas. 108 p. Tese (Master Thesis) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, São Paulo (SP) - Brazil - In Portuguese, 2009. Disponível em: (http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-17062009-105850/). Citado na página 42.

DELINGETTE, H.; AYACHE, N. Soft tissue modeling for surgery simulation. *Handbook of Numerical Analysis*, 2004. Disponível em: (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865903120054). Citado 3 vezes nas páginas 1, 17 e 18.

FOBER, T. et al. Superposition and alignment of labeled point clouds. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, v. 8, n. 6, p. 1653–1666, 2011. ISSN 1557-9964. Disponível em: (http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/ 21358005http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs{\\_}all.jsp?arnumber=5722954http: //www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-80052905509{&}partnerID=40{&} md5=dbdaef9d76ff74361c12630). Citado na página 30.

GIBSON, S. F. F.; MIRTICH, B. A Survey of Deformable Modeling in Computer Graphics. [S.l.], 1997. 1–31 p. Disponível em: (http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.6.4155{&}rep=rep1{&}type=pdfhttp://www.me). Citado na página 5.

GOSWAMI, P.; PAJAROLA, R. Time adaptive approximate SPH. Workshop on Virtual Reality Interaction and Physical Simulation VRIPHYS, v. 1008, p. 1–7, 2011. Disponível em: (http://diglib.eg.org/EG/DL/PE/vriphys/vriphys11/019-028.pdf.abstract.pdf; internal{&}action=action.digitallibrary.ShowPaperAbstr>. Citado na página 35.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

GUILLEMOT, T.; ALMANSA, A.; BOUBEKEUR, T. Non Local Point Set Surfaces. 2012 Second International Conference on 3D Imaging, Modeling, Processing, Visualization & Transmission, Ieee, p. 324–331, oct 2012. Disponível em: (http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6375011). Citado na página 25.

HUANG, H. et al. Edge-aware point set resampling. *ACM Transactions on Graphics*, v. 32, n. 1, p. 1–12, 2013. ISSN 07300301. Disponível em: (http://dl.acm.org/citation.cfm?doid=2421636.2421645). Citado na página 24.

LIU, X. et al. Deformation of Soft Tissue and Force Feedback Using the Smoothed Particle Hydrodynamics. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 9, 19 e 30.

LIVNY, Y. et al. Texture-lobes for tree modelling. ACM SIGGRAPH 2011 papers on - SIGGRAPH '11, ACM Press, New York, New York, USA, v. 1, n. 212, p. 1, 2011. Disponível em: (http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=1964921.1964948). Citado na página 26.

LUCY, L. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, n. 82, p. 1013–1024, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 20.

MOORE, A. W. Kd-trees for cheap learning. *Efficient Memory-based Learning* for Robot Control, v. 139, n. 209, p. 1 – 20, 1991. ISSN 00457825. Disponível em: (http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.28.6468). Citado na página 30.

MOORE, P.; MOLLOY, D. A Survey of Computer-Based Deformable Models. International Machine Vision and Image Processing Conference (IMVIP 2007), Ieee, p. 55–66, sep 2007. Disponível em: (http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm? arnumber=4318138). Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.

MULLER, M. et al. Point Based Animation of Elastic, Plastic and Melting Objects. *Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*, p. 141–151, 2004. ISSN 17275288. Disponível em:  $\langle http://dx.doi.org/10.1145/1028523.1028542\$ \langle delimiter"026E30F\$nhttp://dl.acm.org/ft{\_}gateway.cfm?id=1028542{\&}ty\rangle$ . Citado 6 vezes nas páginas 3, 28, 30, 33, 34 e 50.

NOVI, G. D. Soft tissue modeling for virtual reality surgery simulator with haptic feedback. Tese (Doutorado), 2011. Disponível em: (http://amsdottorato.unibo.it/3702/1/DeNovi{\\_} Gianluca{\\_}tesi.pdfhttp://amsdottorato.cib.unibo.it/3702/1/DeNovi{\\_}Gianluca}. Citado 3 vezes nas páginas 1, 17 e 18.

OLIVEIRA, A. C. M. T. G. de. *Método de deformação elástica para simulação visual e háptica de procedimentos de punção.* 175 p. Tese (Doutorado), 2014. Disponível em: (http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3141/tde-29122014-182821/pt-br.php). Citado 5 vezes nas páginas 9, 12, 13, 18 e 19.

ÖZTIRELI, a. C.; ALEXA, M.; GROSS, M. Spectral sampling of manifolds. *ACM SIGGRAPH Asia 2010 papers on - SIGGRAPH ASIA '10*, v. 1, n. 212, p. 1, 2010. Disponível em: (http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=1866158.1866190). Citado na página 26.
PAIVA, A. et al. Particle-based viscoplastic fluid / solid simulation. Computer-added design, v. 41, n. 4, p. 306–314, 2009. ISSN 0010-4485. Citado 13 vezes nas páginas 9, 10, 3, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30 e 50.

PATETE, P. et al. A multi-tissue mass-spring model for computer assisted breast surgery. *Medical Engineering & Physics*, v. 35, n. 1, p. 47–53, jan 2013. ISSN 1873-4030. Disponível em: (http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1350453312000562http: //www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/22483758). Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.

SAMANI, A.; ZUBOVITS, J.; PLEWES, D. Elastic moduli of normal and pathological human breast tissues: an inversion-technique-based investigation of 169 samples. *Physics in Medicine and Biology*, v. 52, n. 6, p. 1565–1576, 2007. ISSN 0031-9155. Disponível em: (http://stacks.iop.org/0031-9155/52/i=6/a=002?key=crossref. cc4a297bacdc3956970762d8400165ad). Citado na página 42.

SINKUS, R. et al. Viscoelastic shear properties of in vivo breast lesions measured by MR elastography. *Magnetic Resonance Imaging*, v. 23, n. 2, p. 159–165, 2005. ISSN 0730725X. Disponível em: (http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0730725X05000391). Citado na página 42.

SNAVELY, N.; SEITZ, S.; SZELISKI, R. Photo tourism: exploring photo collections in 3D. ACM transactions on graphics (TOG), v. 1, n. 212, p. 835–846, 2006. Disponível em: (http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1148024http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1141964). Citado na página 25.

TOMPKIN, J. et al. Videoscapes. ACM Transactions on Graphics, v. 31, n. 4, p. 1–12, 2012. ISSN 07300301. Disponível em: (http://dl.acm.org/citation.cfm?doid=2185520.2185564). Citado na página 24.

VIJAYKUMAR, A. Smoothed Particle Hydrodynamics Simulation for Continuous Casting. 2012. Citado na página 3.

WANG, L.; WANG, Z.; HIRAI, S. Modeling and simulation of friction forces during needle insertion using Local Constraint Method. *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Ieee, p. 4926–4932, oct 2012. ISSN 21530858. Disponível em: (http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6385756). Citado 2 vezes nas páginas 9 e 16.

XIE, Q.; XIE, X. Point cloud data reduction methods of octree-based coding and neighborhood search. *Proceedings of 2011 International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology*, Ieee, p. 3800–3803, aug 2011. Disponível em: (http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber= 6023069). Citado na página 26.

YANG, Y. Real-time deformations simulation of soft tissue by combining massspring model with pressure based method. 2011 3rd International Conference on Advanced Computer Control, Ieee, n. Icacc, p. 506–510, jan 2011. Disponível em:  $\langle http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6016464 \rangle$ . Citado 3 vezes nas páginas 9, 16 e 17.

YASMIN, S.; SOURIN, A. A new approach to virtual palpation. ... SIGGRAPH International Conference on Virtual- ..., v. 1, n. 212, p. 203–212, 2012. Disponível em: (http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2407567). Citado 2 vezes nas páginas 9 e 15. YU, Z. et al. ASM: An adaptive simplification method for 3D point-based models. *Computer-Aided Design*, Elsevier Ltd, v. 42, n. 7, p. 598–612, 2010. ISSN 00104485. Disponível em: (http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0010448510000588). Citado na página 27.